

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
на тему:

Методика вивчення показникової та логарифмічної  
функції в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу

Здобувача вищої освіти  
другого (магістерського) рівня, II курсу, СОМ-22-1 групи,  
спеціальності 014 «Середня освіта»  
освітня програма «Середня освіта: математика»

Щербака Ярослава Михайловича



Науковий керівник



Скасків Л.В., к.ф.-м.н., доцент

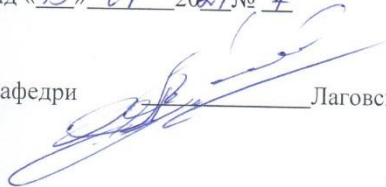
Керівник освітньо-професійної програми



Семко М.М., д.ф.-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри  
кібернетики та прикладної математики  
протокол від «15» 01 2024 № 7

Завідувач кафедри



Лаговський В.В., к.е.н., доцент

Ірпінь – 2023

Реєстрація № 1212.01.2024  
(дата)Ол Гермобай О.Б.  
(підпис відповідальної особи)

Результати перевірки

до захисту  
(до захисту, на доопрацювання)15.01.2024  
(дата)fmf  
(підпис)

Результат захисту

80  
(оцінка)6.02.2024  
(дата)О. —  
(підпис)

Голова комісії:

Аврам  
(підпис)Траусовичий М.В.  
(ініціали, прізвище)

Члени комісії:

М  
(підпис)Сенко М.М.  
(ініціали, прізвище)Ол  
(підпис)Гермобай О.Б.  
(ініціали, прізвище)fmf  
(підпис)Скасків М.В.  
(ініціали, прізвище)

# БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ

| Об'єкти контролю | Діапазон оцінки в балах | Фактична кількість балів | Примітки | Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи) |
|------------------|-------------------------|--------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------|
|------------------|-------------------------|--------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------|

## ОЦІНЮВАННЯ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ

|                                                                                                                                                                             |             |    |  |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|----|--|-----|
| Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій) | від 0 до 30 | 20 |  | fml |
| Дотримання вимог щодо оформлення                                                                                                                                            | від 0 до 10 | 10 |  | fml |
| Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни                                                                                                       | від 0 до 5  | 5  |  | fml |
| Рецензент                                                                                                                                                                   | від 0 до 5  | 5  |  | fml |
| РАЗОМ БАЛІВ*                                                                                                                                                                | від 0 до 50 | 40 |  | fml |

## ОЦІНЮВАННЯ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ

|                                                                                  |              |    |  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------|----|--|-----|
| 1. Доповідь                                                                      | від 0 до 10  | 5  |  | fml |
| 2. Роздатковий матеріал                                                          | від 0 до 5   | 5  |  | fml |
| 3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання | від 0 до 25  | 20 |  | fml |
| 5. Апробація (участь у конференціях)                                             | від 0 до 10  | 10 |  | fml |
| РАЗОМ БАЛІВ                                                                      | від 0 до 50  | 40 |  | fml |
| ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ                                                         | від 0 до 100 | 80 |  | fml |

## ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

| Оцінка за 100-бальною шкалою | Оцінка за шкалою ЄКТС | Оцінка за національною шкалою | Дата      | П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підписи)       |
|------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------|------------------------------------------------------------|
| 80                           | 13                    | 4                             | 6.02.2024 | Григорук М.В.<br>Зерковий О.Б.<br>Скляр С.В.<br>Сторо О.А. |
| 90-100                       |                       | A                             |           | 5 (відмінно)                                               |
| 80-89                        |                       | B                             |           | 4 (добре)                                                  |
| 70-79                        |                       | C                             |           |                                                            |
| 60-69                        |                       | B                             |           | 3 (задовільно)                                             |
| 50-59                        |                       | E                             |           |                                                            |
| 35-49                        |                       | EX                            |           | 2 (незадовільно)                                           |

## ЗМІСТ

|                                                                                                       |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Вступ</b>                                                                                          | <b>2</b>  |
| <b>I. Роль показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри</b>                                   | <b>5</b>  |
| 1. Аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури за темою дослідження                    | 5         |
| 2. Аналіз підручників з алгебри і початків аналізу щодо викладу показникової і логарифмічної функцій  | 11        |
| <b>II. Методика вивчення показникової та логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу</b> | <b>14</b> |
| 1. Методика вивчення показникових функцій                                                             | 15        |
| 2. Методика вивчення показникових рівнянь і нерівностей                                               | 24        |
| 3. Методика вивчення логарифму та його властивостей                                                   | 39        |
| 4. Методика вивчення логарифмічної функції та її властивостей                                         | 50        |
| 5. Методика вивчення логарифмічних рівнянь і нерівностей                                              | 56        |
| <b>Висновки</b>                                                                                       | <b>75</b> |
| <b>Список використаних джерел</b>                                                                     | <b>79</b> |

## Вступ

**Актуальність дослідження.** Сучасна школа має забезпечити виховання всебічно розвиненої людини, тому одночасно з піднесенням науково-теоретичного рівня викладання потрібно дбати про вироблення в учнів уміння застосовувати здобуті знання на практиці, про розвиток розумових здібностей, виховання інтересу до предмету, про вміння самостійно здобувати знання. Зокрема показникова і логарифмічна функції, як один з розділів математики, знаходить широке практичне застосування. Крім того, показникова і логарифмічна функції широко застосовуються в фізиці, техніці, роль її в розв'язанні проблем політехнічного навчання величезна, і природно, що вивчення показникової і логарифмічної функції має бути піднесене до рівня вимог сучасної науки.

Завдання вивчення показникової і логарифмічної функції в старшій школі визначені в державних програмах, які вимагають, щоб учні засвоїли основні поняття показникової і логарифмічної функцій (показникова функція, рівняння, нерівності, логарифм і його властивості, логарифмічна функція та її властивості, логарифмічні рівняння, нерівності, похідні показникової та логарифмічної функцій) і навчилися застосовувати набуті знання при вивченні математики, фізики й інших дисциплін, а після закінчення школи – на практиці: під час геодезичних вимірювань, технічних обчислень на виробництві тощо.

Для учнів, які після закінчення школи продовжуватимуть освіту на математичних факультетах університетів та у вищих технічних навчальних закладах, шкільний курс показникової і логарифмічної функцій повинен стати міцною базою для вивчення вищої математики, фізики та інженерно-технічних дисциплін.

Це означає, що для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосовувати до розв'язування практичних завдань. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язуванні практичних задач ставлять сучасний

ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах.

Ось чому так важливо, щоб наша молодь мала ґрунтовну математичну підготовку.

Для її забезпечення вчителю необхідно використовувати таку методику, яка б була ефективною і, яка б, звичайно, дотримувалася тих цілей і завдань, які поставлені перед нею, а також обов'язково була результативною. Також успіх викладання дисципліни і засвоєння її учнями у великій мірі залежить від методично правильного планування, від того, як при плануванні дотримано основних принципів дидактики. У державних програмах подано лише орієнтовні плани, і вчитель може планувати матеріал програми по- своєму, виходячи з конкретних умов роботи і тих методів, якими він користується в процесі викладання.

Отже, кожен учитель повинен уважно продумати програму, зважити на значення теми, кожного розділу і повинен побудувати план так, щоб забезпечити високий науковий рівень та строгу послідовність викладу матеріалу, дбаючи звичайно про те, щоб він був доступний розумінню учнів і цікавий для них.

Процес навчання являє собою активну взаємодію вчителя і учнів і не правильним є те, коли вчитель звертає увагу лише на окрему групу учнів, при цьому більшість пасивно стежать за ходом думок вчителя, не виявляючи будь-якої активності. На таких уроках відсутні елементи дослідництва та пошуку. Відповідно, так організовуючи навчання, вчитель не спроможний розв'язати тих завдань, які стоять перед школою на сучасному етапі її розвитку. Тому необхідно застосовувати ті форми і методи навчання, які б забезпечували здобуття учнями міцних і глибоких знань.

Все це зумовило вибір теми: «Методика вивчення показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу».

При вивченні даної теми в учнів формується:

- ✓ здатність адаптуватися до нових умов;
- ✓ уміння аналізувати ситуацію;

- ✓ здатність застосовувати набуті знання, вміння і навички;
- ✓ інтерес до геометрії та алгебри;
- ✓ вміння робити правильні висновки;
- ✓ узагальнюються і систематизуються знання учнів про функції.

**Об'єктом дослідження** є процес навчання математики у 11 класі.

**Предметом дослідження** є розробка методики вивчення показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу в 11 класі.

**Мета дослідження** полягає в тому, щоб розробити методику вивчення показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу в 11 класі.

Для досягнення мети планується розв'язати такі **завдання**:

- ✓ розкрити дидактичну суть методики навчання математики;
- ✓ з'ясувати, в якій мірі методична література, підручники та посібники задовольняють умови використання такої методики;
- ✓ розробити методику вивчення показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу в 11 класі.

В процесі дослідження використовувалися такі методи:

- ✓ вивчення і використання історії математики і математичної освіти;
- ✓ вивчення і використання досвіду сучасного навчання;
- ✓ аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури з математики, підручників з математики.

Практичне значення полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при викладанні теми «Показникова і логарифмічна функції» в курсі алгебри і початків аналізу, в підборі правильних методів, форм та прийомів до кожного уроку.

## **I. Роль показникової і логарифмічної функцій в курсі алгебри**

### ***1. Аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури за темою дослідження***

Для всіх, хто вивчає математику або веде дослідницьку роботу в галузі математики, очевидні деякі її особливості як науки: абстрактність, логічна строгість, надзвичайна широта її застосувань.

Математика – одна з найстародавніших наук. Вона пройшла великий шлях історичного розвитку – від простих задач на обчислення до винятково складних абстрактних теорій.

Сучасний період розвитку математики характеризується насамперед великим розширенням її предмета і галузей застосування, кількісним і якісним зростанням, появою численних нових теорій і методів, створенням нових узагальнюючих понять, глибоким взаємопроникненням основних розділів математики. [10]

Зберігаючи у своєму предметі числа і фігури, кількісні відношення і просторові форми дійсного світу, математика почала вивчати також можливі (логічні) зв'язки і форми. Таке розширення предмета математики призвело до формування нових підходів у її вивченні. Зокрема, показникова і логарифмічна функції, як один з основних розділів алгебри і початків аналізу 11 класу, відіграють досить важливу роль як в математиці, так і в інших науках. І тому її вивчення має бути глибоким, продуманим, правильним і ефективним.

Методика навчання показникової і логарифмічної функцій розглядалася і досліджувалася багатьма вченими-методистами, педагогами та психологами, зокрема такими, як М. В. Потоцький, М. Б. Гельфанд, В. С. Павлович та багато інших.

Існує багато різних підходів до визначення методики навчання показникової і логарифмічної функцій, проте всі ці підходи звичайно ґрунтуються на деяких важливих положеннях педагогіки і психології, які є джерелом основних висновків у відношенні постановки математичного навчання.

Перш за все потрібно пам'ятати, що процес засвоєння знань включає в себе такі ланки: сприймання, розуміння, осмислення, узагальнення, закріплення, застосування на практиці. [8]

Сприймання – це відображення в свідомості учня окремих властивостей предметів і явищ, що в даний момент діють на органи чуття. Для успішного сприймання учнями навчального матеріалу вчитель повинен викладати його лаконічно, акцентувати увагу на основних моментах, чітко і логічно структурувати інформацію, особливу увагу приділяти візуальному представленню навчальної інформації.

Розуміння – встановлення зв'язків між явищами і процесами, з'ясування їхньої будови, складу, призначення, розкриття причин явищ і подій, пояснення змісту.

Вчителю важливо пам'ятати, що для ефективного розуміння треба викладати матеріал зрозуміло, доступно, вчити учнів співставляти факти, дані, робити висновки.

Осмислення – розкриття більш глибоких зв'язків між окремими елементами цілого, більш глибоке порівняння, аналіз цих зв'язків. В учнів на цьому етапі з'являється власне ставлення до вивченого, початки переконання, уміння доводити справедливність висновків.

Узагальнення – виділення і об'єднання загальних суттєвих рис предметів і явищ. На основі узагальнення формуються поняття, закони, ідеї, теорії. При узагальненні навчального матеріалу вчителю слід звертати увагу на найважливіші ознаки предметів і явищ. Повноцінне осмислення і узагальнення можливе за умови, що воно базується на достатніх наукових знаннях, які дозволяють широко використовувати порівняння, аналогію і доказовість. На цьому етапі здійснюється систематизація навчального матеріалу.

Закріплення – неодноразове відтворення матеріалу, що вивчається, в цілому і по частинах, повторне осмислення. Здійснюється воно шляхом заучування деяких основних фактів, визначень, зв'язків, способів доведення, шляхом відтворення деяких особливо важливих елементів вивчення матеріалу,

узагальнень і висновків, виконання письмових і самостійних робіт. В основі закріплення лежить психологічний процес запам'ятовування – накопичення і збереження в пам'яті інформації та вражень для практичного їх відтворення. Вчителю дуже важливо спонукати учнів наводити власні приклади, виконувати вправи творчого і пошукового характеру

Для кращого запам'ятовування варто використовувати асоціативні образи, опорні сигнали.

Застосування – забезпечення глибини, міцності, усвідомленості, дієвості знань, умінь і навичок. Досягається на практиці різноманітними вправами. В. Онищук класифікує вправи на підготовчі, ввідні, пробні, тренувальні, творчі, контрольні. Особливе значення для повноцінного застосування мають між предметні зв'язки, вирішення різних життєвих задач, де доводиться використовувати комплекс знань з різних навчальних предметів. [12]

Важливе завдання процесу вивчення показникової і логарифмічної функцій в школі це:

- домогтися глибокого і міцного засвоєння учнями теоретичних знань: показникових і логарифмічних понять, тверджень про їхні властивості (аксіом, теореми), правил, законів;

- сформулювати навички й уміння застосування теоретичних знань на практиці і оволодіння способами творчої діяльності, досягти глибокого усвідомлення учнями світоглядних і морально-етичних ідей.

Щоб знання учнів з показникової і логарифмічної функцій були справді дійовими, щоб вони змогли набути в школі міцних знань та практичних умінь, необхідно:

Спланувати викладання показникової і логарифмічної функцій так, щоб уникнути відірваності окремих її розділів і добитись логічної послідовності та взаємозв'язку між ними.

1. При вивченні кожного розділу показникової і логарифмічної функцій з'ясовувати учням практичне його значення і, поряд з розв'язуванням прикладів, розв'язувати і практичні задачі на застосування формул цього розділу.

2. Теоретичні висновки, формули ілюструвати прикладами та задачами з геометрії, фізики та інших дисциплін.

Разом з тим об'єктивним фактом є те, що різні учні мають різні зони актуального і найближчого розвитку. Саме тому в умовах класно-урочної системи треба здійснювати рівневу диференціацію, використовувати групові й індивідуальні форми роботи, виділяючи типологічні групи учнів, які мають приблизно однаковий рівень загального розвитку, навченості, темпу просування у навчанні, цікавості до тригонометрії.

1. Усвідомлення всіма учнями процесу навчання. Забезпечення цього принципу вимагає від учителя кропіткої роботи з тими, хто не встигає, з'ясування причин цього та організації своєчасної педагогічної підтримки таких учнів.

2. Систематична робота вчителя над загальним розвитком усіх учнів, у тому числі й найслабкіших. У процесі навчання показникової і логарифмічної функції передусім передбачається розвиток мислення, оволодіння учнями загальними розумовими діями і прийомами розумової діяльності. Практика і дослідження психологів свідчать про те, що основною причиною того, що учні не встигають, є насамперед несформованість дій аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення.

Психологічні принципи розвивального навчання:

1. Систематичний розвиток всіх трьох основних видів мислення: наочно-дійове (або практичне), наочно-образне і абстрактно-теоретичне.

2. Проблемність навчання. Учень лише тоді включається в пізнавальний процес, виявляє розумову активність, коли стикається з проблемами (питаннями і задачами), які йому треба розв'язати.

3. Індивідуалізація і диференціація навчально-виховного процесу.

4. Цілеспрямоване формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності.

5. Систематичний розвиток мнемічної діяльності (тобто розвиток пам'яті) для забезпечення фонду дійових знань. На думку педагога і психолога П.П. Блонського, порожня голова не міркує. Психолог зазначає, що добре розвинена

пам'ять — умова розвиненого інтелекту. Тому, у процесі вивчення показникових і логарифмічних функцій слід домагатися запам'ятовування учнями основних означень, тверджень, алгоритмів розв'язання ключових задач, озброювати учнів спеціальними мнемічними прийомами, які полегшують запам'ятовування навчального матеріалу [5].

Важливою є також спеціальна настанова вчителя на те, що треба вивчити, перевести в довгострокову пам'ять, який матеріал вивчається для ознайомлення і не потребує заучування. Відсутність такого орієнтування призводить або до непотрібного перевантаження пам'яті учнів за сумлінного ставлення їх до навчання, або до ігнорування того, що треба вивчити, запам'ятати.

На розумові процеси діють також ряд факторів, які на перший погляд не мають до них ніякого відношення. Мова йде про такі сторони особистості людини, як емоції, почуття, настрої в даний момент, волю, темперамент, характер та багато інших. Відомий психолог Л. С. Виготський вважає, що якщо предмет доступний учню, якщо цілі його вивчення зрозумілі, якщо він відчуває свій рух вперед, то ті позитивні емоції, які тут виникають в свою чергу полегшують подальше навчання. Якщо ж матеріал досить важкий і не дається йому, якщо руху вперед він не бачить, то безрезультативність праці знижує ефективність всіх його психічних процесів - мислення, пам'яті, засвоєння - і знижує можливість подальшого навчання. Таким чином, успішне навчання створює позитивні емоції, які в свою чергу впливають на успішність подальшого навчання. Навпаки, викладання показникової і логарифмічної функції повинно створювати і виховувати у тих хто навчається такі відчуття, які сприяли б успішності їх навчання. В цьому полягає одне з важливих педагогічних завдань навчання. Зробити відчуття, волю, інтереси учнів союзниками навчання - ціль кожного педагога [6].

За словами Я. Коменського однією з необхідних умов якісного навчання учнів є їхня активна участь у процесі пізнання, стійкий інтерес до предмета, що вивчається, бажання пізнавати нове. Оскільки математична підготовка учнів орієнтується на широке розкриття зв'язків математики з оточуючим світом, а

математичні вміння та навички знаходять безпосереднє застосування в виробничий і науковій діяльності, тому одним з основних завдань сучасної школи є розвиток математичних здібностей та творчого потенціалу школяра.

Тому всебічний розвиток особистості, створення для цього сприятливих умов — головна мета школи. Виходячи із зазначеного, можна сформулювати основні цілі вивчення показникової і логарифмічної функції в школі:

1) розумовий розвиток учнів – розвиток логічного мислення й інтуїції, просторових уявлень і уяви, пам'яті, алгоритмічної та інформаційної культури як особливого аспекту культури мислення; формування позитивних якостей особистості – розумової активності, пізнавальної самостійності, пізнавального інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються, ініціативи, творчості;

2) забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою показникових і логарифмічних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності кожному членові сучасного суспільства, достатніх для вивчення інших дисциплін, продовження освіти в системі безперервної освіти; формування уявлень про ідеї і методи показникової і логарифмічної функції та її роль у пізнанні навколишнього світу, формування навичок математизації ситуацій під час досліджень різних явищ природи і суспільства.

Отже, для правильного та ефективного засвоєння учнями знань з показникової і логарифмічної функції, розвитку навичок застосування набутих знань для розв'язування вправ та задач вчителю необхідно докласти максимум зусиль, враховуючи загальні положення педагогіки, дидактики, психології, а також методики навчання показникової і логарифмічної функції.

## ***2. Аналіз підручників з алгебри і початків аналізу щодо викладу показникової і логарифмічної функцій***

У програмі тільки перелічуються розділи і теми, які потрібно опрацювати з учнями. Докладний зміст шкільного курсу математики дається в підручниках або навчальних посібниках.

Підручник – навчальне видання, в якому міститься систематичний виклад певної навчальної дисципліни або її розділу чи частини. Воно має відповідати навчальній програмі і бути офіційно затвердженом як даний вид видання.

За останні роки видано альтернативні підручники з математики для загальноосвітніх шкіл. В них реалізовано чимало авторських задумів і наукових підходів. Вдало, як правило, розв'язанні питання єдності змісту й апарату засвоєння, структури і логічної організації навчального матеріалу, добору ілюстративних засобів і повноти реалізації їх функцій. Однак, залишається питання, чи розв'язано питання диференціації способів розгортання матеріалу, яке є досить важливим на даному етапі розвитку і розбудови освіти на нових прогресивних концепціях? Відповісти на це питання можна лише після аналізу викладу матеріалу в підручниках і перевірки забезпечення в них проблемного вивчення матеріалу.

Розглянемо новий підручник для учнів 11 класу під редакцією Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра 11 клас (академічний і профільний рівні)» [8].

Текст підручника розділено на 6 параграфів, кожний з них складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами, розв'язанням задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання. До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язання.

Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі. Свої знання можна перевірити розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Текст підручника структуровано за двома рівнями – академічний і

профільний. Текст обов'язків для вивчення лише учнями класу профільного рівня, позначено пунктирною лінією червоного кольору. Відповідні частини підручника відокремлені піктограмами, «Стос підручників». Учні класів академічного рівня можуть використовувати цей матеріал для самоосвіти. Підкреслимо, що для учнів класів профільного рівня обов'язковим для вивчення є весь навчальний матеріал підручника.

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

В п.16. «Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція» строге означення степеня з дійсним показником не дається, бо це виходить за межі шкільного курсу математики. Властивості показникової функції вводяться без чіткого обґрунтування. Наводяться приклади застосування показникової функції в біології, фізиці. На мою думку, це доцільно, щоб учні бачили потребу у вивченні показникової функції. Наводяться приклади розв'язування вправ для академічного і профільного рівня. На закріплення запропоновано завдання для повторення.

В п. 17. «Показникові рівняння» розглядаються приклади рівнянь і говорять, що приклади такого типу називають показниковими рівняннями. Наводяться приклади розв'язування вправ для академічного і профільного рівня. На закріплення запропоновано завдання для повторення.

В п. 18. «Показникові нерівності» наводяться приклади нерівностей, які є показниковими нерівностями.

В п. 19. «Логарифм і його властивості» спочатку розглядаються приклади, які приводять до поняття логарифма (Логарифмом додатного числа  $b$  з основою  $a$ , де  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , називають показник степеня, до якого потрібно піднести число  $a$ , щоб отримати число  $b$ .)

В п. 20. «Логарифмічна функція та її властивості» задано функцію  $f(x)=\log_a x$  з областю визначення  $D(f)=(0;+\infty)$ , цю функцію називають логарифмічною. Показано, що логарифмічна функція  $f(x) = \log_a x$  є оберненою до показникової функції  $g(x) = a^x$ .

В п. 21. «Логарифмічні рівняння» дається означення найпростішого логарифмічного рівняння (рівняння виду  $\log_a x = b$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Після параграфа пропонуються завдання першої київської міської олімпіади (1935 р.), а також завдання для перевірки знань в тестовій формі.

Розглянемо підручник «Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загально- освіт. навчальн. закладів : академ. рівень /Є. П. Нелін».

Систему навчального матеріалу підручника з кожної теми подано за двома рівнями. Основний матеріал наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. Додатковий матеріал (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з алгебри і початків аналізу зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Учні можуть опановувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя.

На початку багатьох параграфів наведено довідкові таблиці, які містять основні означення, властивості та орієнтири для пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводяться приклади, у яких крім розв'язання міститься також коментар, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Систему вправ до основного матеріалу подано за трьома рівнями.

Отже, можна сказати, що структура і виклад матеріалу подібний, але нам здається, що у підручнику [8] виклад матеріалу доступніший дітям. При розробці методики вивчення показникової, логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватись саме цим підручником.

## II. Методика вивчення показникової, логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу

За діючою програмою на вивчення теми «Показникова і логарифмічна функція» відводиться 16 годин.

### КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

Алгебра і початки аналізу, 11 клас  
I семестр – 16 годин, 1 год на тиждень

*(Календарне планування сумісне з усіма підручниками завіреними МОН та допущеними до друкування у 2019 році)*

| № з\п                                                       | Тема уроку                                               | Дата уроку | Зміни | Примітки |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------|-------|----------|
| <b>Тема 1. Показникова та логарифмічна функції (16 год)</b> |                                                          |            |       |          |
| 1.                                                          | Властивості та графіки показникової функції              |            |       |          |
| 2.                                                          | Розв'язування типових вправ                              |            |       |          |
| 3.                                                          | Показникові рівняння                                     |            |       |          |
| 4.                                                          | Розв'язування типових вправ                              |            |       |          |
| 5.                                                          | Показникові нерівності                                   |            |       |          |
| 6.                                                          | Розв'язування типових вправ.<br><i>Самостійна робота</i> |            |       |          |
| 7.                                                          | Логарифм і його властивості                              |            |       |          |
| 8.                                                          | Властивості та графік логарифмічної функції              |            |       |          |
| 9.                                                          | Логарифмічні рівняння                                    |            |       |          |
| 10.                                                         | Розв'язування типових вправ                              |            |       |          |
| 11.                                                         | Логарифмічні нерівності                                  |            |       |          |
| 12.                                                         | Розв'язування типових вправ                              |            |       |          |
| 13.                                                         | Розв'язування типових вправ.<br><i>Самостійна робота</i> |            |       |          |

|     |                                                                       |  |  |  |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|--|--|--|
| 14. | Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей     |  |  |  |
| 15. | Підсумковий урок за темою «Показникова та логарифмічна функції»       |  |  |  |
| 16. | Контрольна робота № 1 за темою: «Показникова та логарифмічна функції» |  |  |  |

### ***1. Методика вивчення показникових функцій***

**Тема:** Показникова функція та її властивості

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової функції, властивості показникової функції, навчитися будувати графіки показникової функції; засвоїти властивості степенів з дійсним показником на основі властивості степенів з раціональним показником;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати графіки показникової функції та користуючись побудованими графіками аналізувати властивості показникової функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук, показати, де саме застосовують у житті властивості показникової функції;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

### **Хід уроку**

#### **I. Організаційний етап**

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

#### **II. Актуалізація опорних знань**

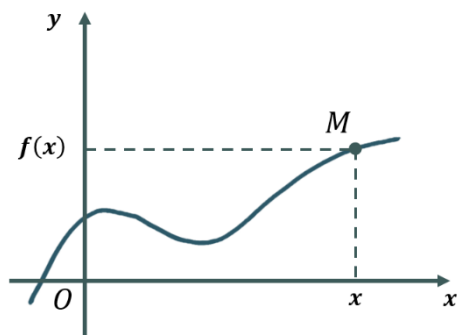
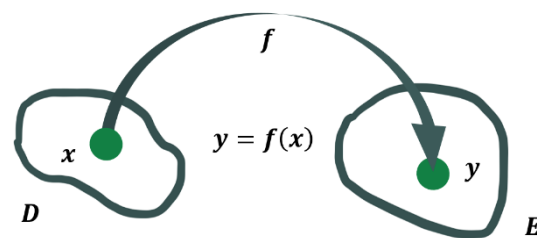
- Числовою функцією називається....

Числовою функцією з областю визначення  $D$  називається залежність, при якій кожному числу  $x$  із множини  $D$  (області визначення) ставиться у відповідність єдине число  $y$ .

$x$  – аргумент (незалежна змінна),  $y$  – функція (залежна змінна)

$f$  – функція

$f(x_0)$  – значення функції  $f$  у точці  $x_0$



- Графіком функції називається...

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини з координатами  $(x; f(x))$ .

- Область визначення функції...

Область визначення функції  $f$  – це множина тих значень, яких може набувати аргумент  $x$ . Позначення:  $D(f)$

- Область значень функції...

Область значень функції  $f$  – це множина, яка складається із всіх чисел  $f(x)$ , де  $x$  належить області визначення. Її позначають  $E(f)$ .

- Функція зростаюча, якщо...

Функція  $f(x)$  називається зростаючою на множині  $M$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.

- Функція спадає, якщо...

Функція  $f(x)$  називається спадною на множині  $M$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.

- Які існують типи чисел?

**Натуральні числа** (лат. «natura» - природа)

Натуральні числа – числа, що виникають природним чином при лічбі.

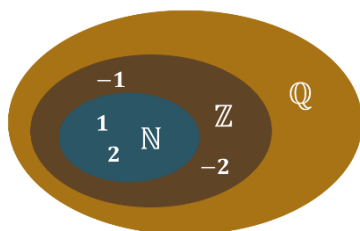
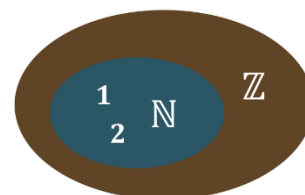


- Наведіть приклади натуральних чисел (1, 2, 3 ...)

## Цілі числа

Цілі числа – це натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль.

- Наведіть приклади цілих чисел ( $-2, -1, 0, 1, 2$ )



## Раціональні числа

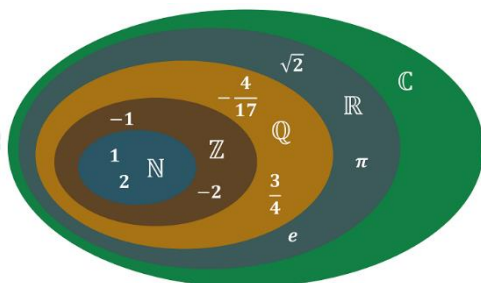
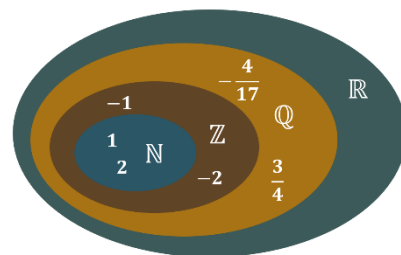
Раціональні числа – додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові), число нуль.

- Наведіть приклади раціональних чисел  $(-\frac{4}{17}; \frac{3}{4})$

## Дійсні числа

Множина раціональних та ірраціональних чисел (числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілих чисел, їх можна виразити за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів)

- Наведіть приклади дійсних чисел ( $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ )



## Комплексні числа

Комплексні числа можна подати у вигляді як формальну суму  $x + iy$ ,  $x$  і  $y$  – дійсні числа,  $i$  – уявна одиниця ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $i^2 = -1$ )

- Наведіть приклади комплексних чисел ( $1 + i\sqrt{3}$ )

- Чи існують інші типи чисел?



Кватерніони й октоніони є прикладами гіперкомплексних чисел.

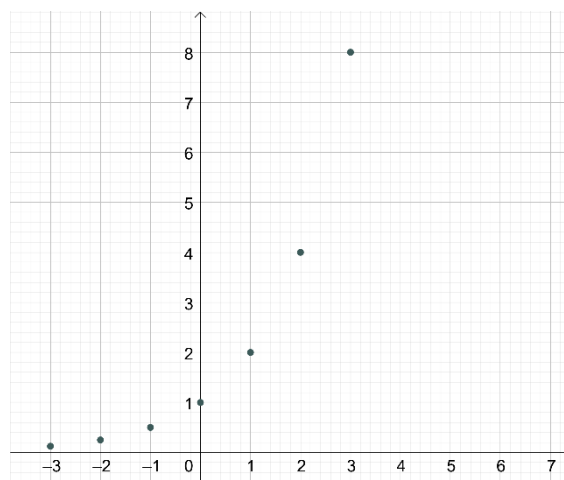
## III. Вивчення нового матеріалу

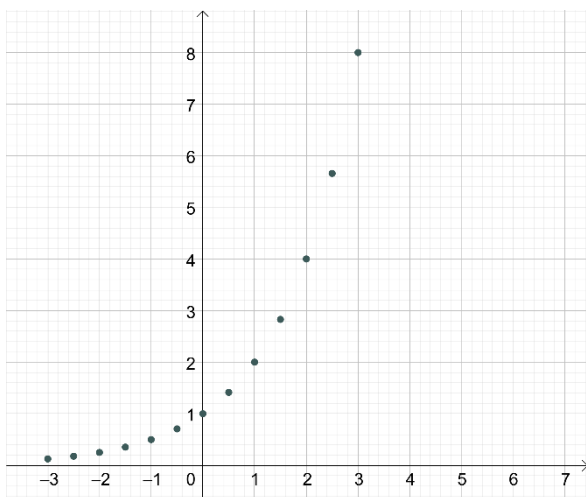
### Показникова функція

Функція виду  $y = a^x$   $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  називається **показниковою**.

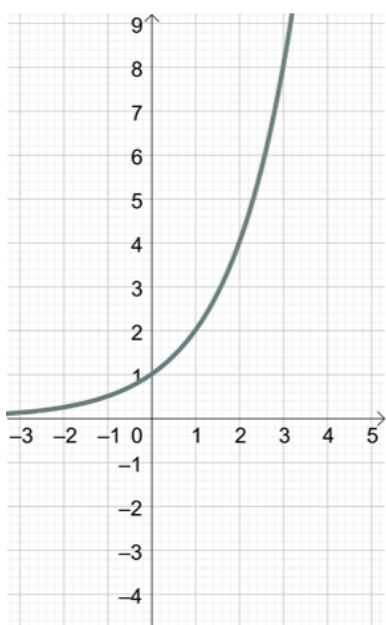
Наприклад:  $y = 2^x$ ,  $y = 0,3^x$ ,  $y = (\sqrt{2})^x$

Побудуємо  $y = 2^x$  для деяких цілих значень.





Тепер на цьому ж графіку побудуємо деякі дробові значення функції  $y = 2^x$

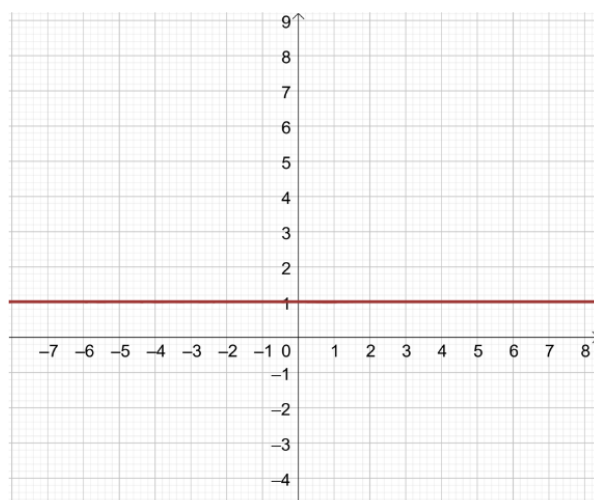


Якщо побудуємо всі значення з множини  $x \in \mathbb{R}$ , то отримаємо графік показникової функції  $y = 2^x$  (можливий інший запис, наприклад:  $g(x) = 2^x$ ).

*\*Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником  $x$ .*

○ Чи існує функція при  $a = 1$ ?

○ Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.



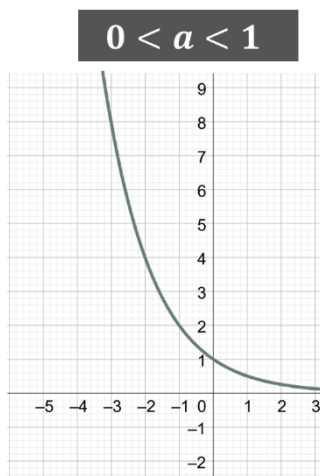
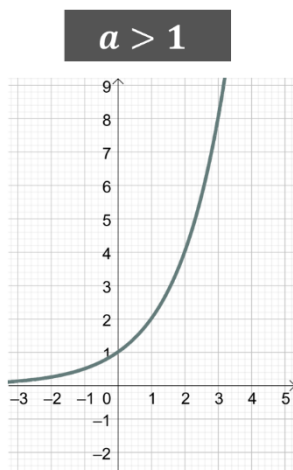
○ Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?

- Ні, навіть якщо ми візьмемо від'ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення ( $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ;  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ )

Отже, **вісь  $x$  є асимптотою цього графіка.**

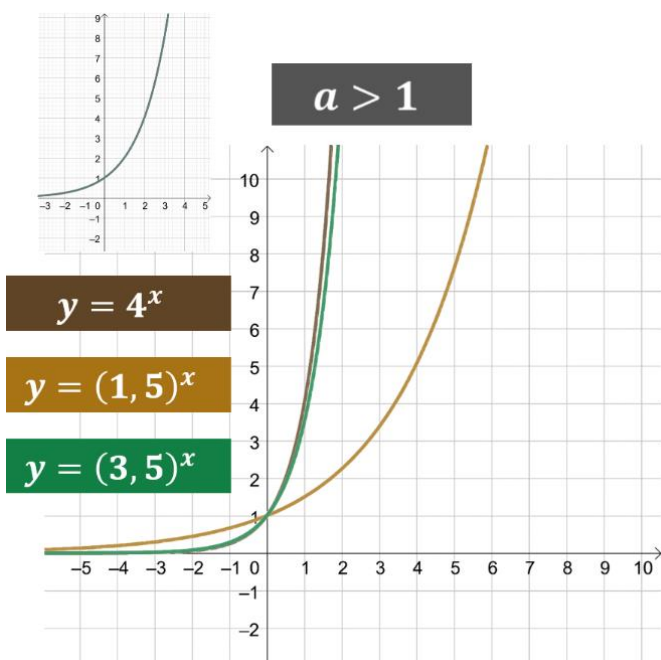
*\*Асимптота кривої (грец. ασυμπτωτος - що не збігається, не дотикається) - це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.*

Проаналізуємо графіки показникової функції при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$ :



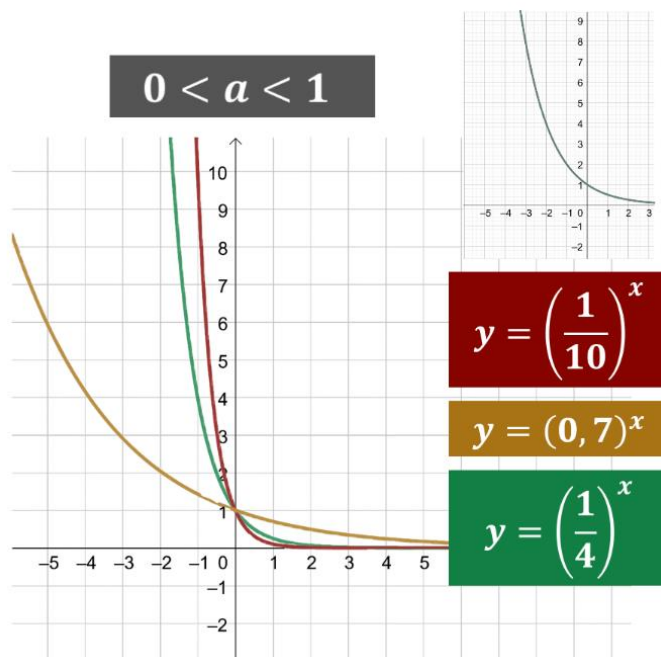
- Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?  
(при  $a > 1$  функція зростаюча, при  $0 < a < 1$  функція спадає)

Побудуємо деякі графіки функцій  $y = a^x$  при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$



Чим більшою є основа  $a > 1$ , тим крутіше «піднімається» графік функції  $y = a^x$ , якщо рухатися вправо.

Чим меншою є основа  $0 < a < 1$ , тим крутіше «піднімається» графік функції  $y = a^x$ , якщо точка рухається вліво.



Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

|                                                |
|------------------------------------------------|
| $a^x a^y = a^{x+y}$                            |
| $a^x : a^y = a^{x-y}$                          |
| $(a^x)^y = a^{xy}$                             |
| $(ab)^x = a^x b^x$                             |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ |

Всі ці властивості справедливі для  $a > 0$ ,  $b > 0$  та будь-яких дійсних  $x$  і  $y$

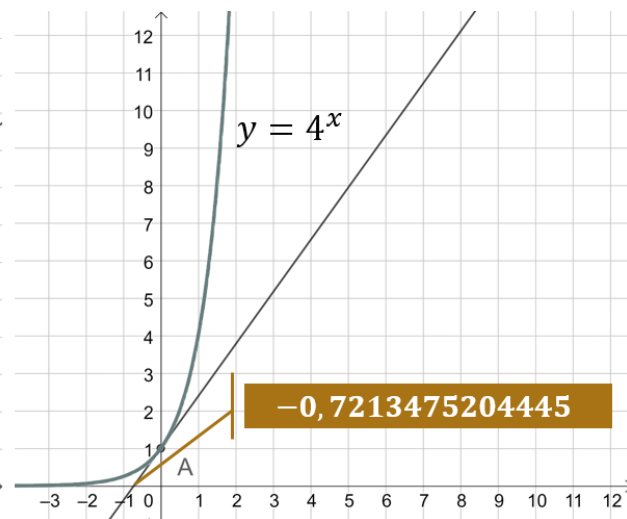
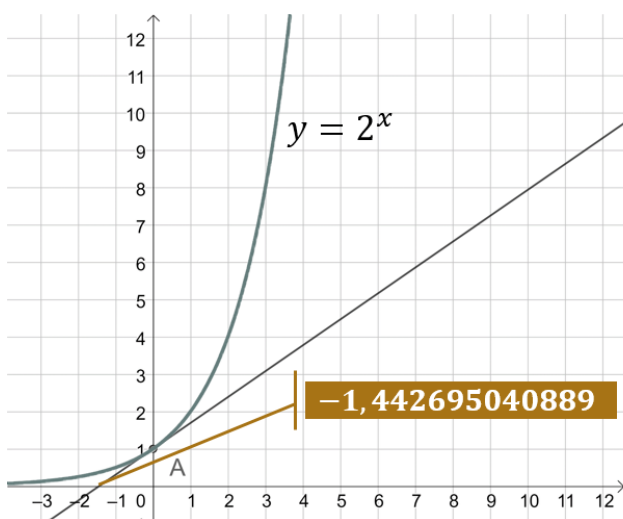
#### • Властивості показникової функції

1.  $D(f) = \mathbb{R}$  (Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)
2.  $E(f) = (0; \infty)$  (Областю значень показникової функції є множина  $(0; \infty)$ )
3.  $y > 0$  при всіх значеннях  $x \in \mathbb{R}$  (Показникова функція немає нулів, і проміжок  $(-\infty; +\infty)$  є проміжком її знакосталості)
4. При  $a > 1$  зростаюча (При  $a > 1$  зростає на всій області визначення)  
 При  $0 < a < 1$  спадна (При  $0 < a < 1$  спадає на всій області визначення)

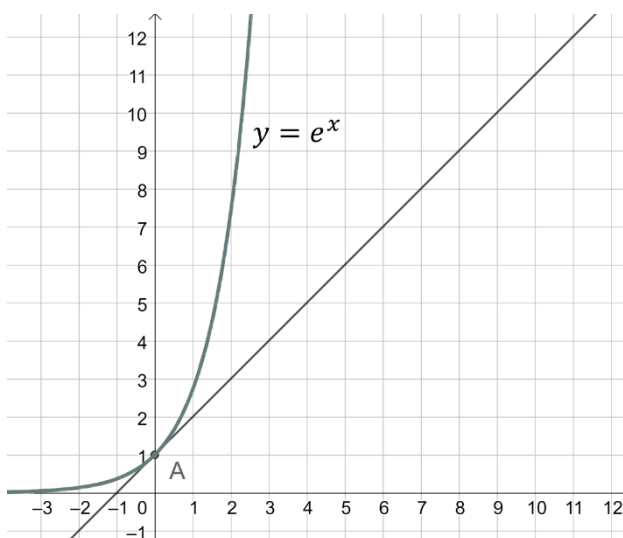
#### • Цікаво

Розглянемо графіки показникових функцій  $y = 2^x$  і  $y = 4^x$ .

У них кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці  $A(0; 1)$  до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.



- Чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в т. $A(1; 0)$  дорівнював 1?



Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число  $e = 2,71828 \dots$

Така показникова функція називається **експонентою**.

- Чому графік кожної показникової функції обов'язково проходить через точку  $A(0; 1)$ ?

$$y = a^x \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1$$

- **Процеси, що описує показникова функція**

Показникова функція описує значну кількість процесів, що відбуваються в природі. Наприклад, зростання кількості бактерій за сприятливих для них умов існування можна описати за законом  $N = 5^t$  ( $t$  – час дослідження,  $N$  – кількість бактерій у колонії).



- Як людина використовує ріст і розмноження бактерій?

(Виробництво антибіотиків, кисломолочних продуктів, виноробство, медицина)

- Зростання кількості деревини можна порахувати за законом  $A = A_0 \cdot a^{kt}$  ( $A_0$  – початкова кількість деревини,  $A$  – кількість деревини через час  $t$ ,  $k$  і  $a$  – сталі)
- Зменшення маси речовини під час радіоактивного розпаду відбувається за законом  $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$  ( $M_0$  – початкова маса речовини,  $M$  – маса в момент часу  $t$ ,  $T$  – період напіврозпаду речовини (час розпаду половини атомів заданої речовини))
- Зменшення тиску повітря з висотою відбувається за законом  $p = p_0 \cdot a^{-kh}$  ( $p_0$  – тиск на рівні моря,  $p$  – тиск на висоті  $h$ ,  $a$  і  $k$  – сталі)

#### IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Яка з даних функцій є показниковою:

|              |                      |
|--------------|----------------------|
| 1) $y = x^6$ | 2) $y = \sqrt[6]{x}$ |
| 3) $y = 6^x$ | 4) $y = 6$           |

№2

Грунтуючись на які властивості показникової функції можна стверджувати, що:

|                                                                      |                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$ | 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$ ? |
|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|

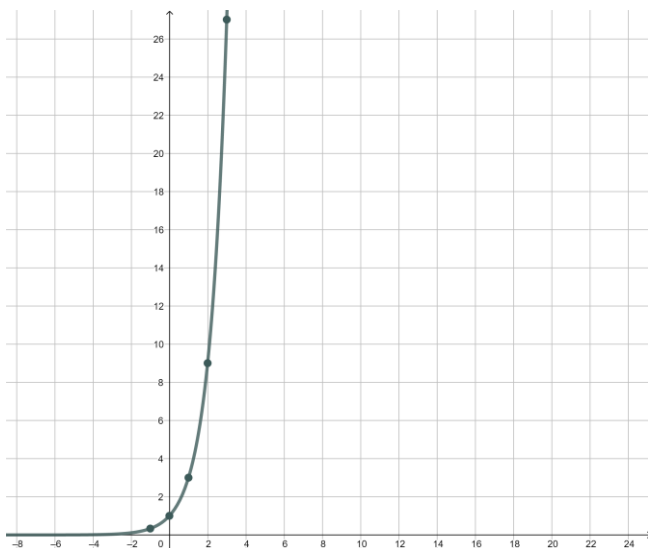
**Відповідь:** При  $a > 1$  показникова функція є зростаючою, при  $0 > a > 1$  – спадною.

№3

Побудуйте графік функції  $y = 3^x$ . У яких межах змінюється значення функції, коли  $x$  зростає від  $-1$  до  $3$  включно?

**Розв'язок:**

|       |               |     |     |     |      |
|-------|---------------|-----|-----|-----|------|
| $x$   | $-1$          | $0$ | $1$ | $2$ | $3$  |
| $3^x$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $3$ | $9$ | $27$ |



**Відповідь:** значення функції змінюється від  $\frac{1}{3}$  до 27.

№4

Порівняйте:

|                         |                                                  |                                                                            |
|-------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1) $5^{3,4} > 5^{3,26}$ | 2) $0,3^{0,4} < 0,3^{0,3}$                       | 3) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$   |
| 4) $0,17^{-3} > 0,17^0$ | 5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}} < \sqrt{2}^{\sqrt{7}}$ | 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$ |

№5

Обчисліть значення виразу:

$$1) 3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$$

**Розв'язок:**

$$3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$$

$$2) \left( (3^3\sqrt{7})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}}$$

**Розв'язок:**

$$\left( (3^3\sqrt{7})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}} = (3^3\sqrt{7})^3 = 3^3 + (\sqrt[3]{7})^3 = 27 \cdot 7 = 189$$

$$3) \sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$$

**Розв'язок:**

$$\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot 6^{-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^6} = 6^{\frac{6}{3}} = 6^2 = 36$$

$$4) \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{-\sqrt{8}}$$

**Розв'язок:**

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

**V. Підсумок уроку**

- Яку функцію називають показниковою?
- Чи може показникова функція перетнути вісь абсцис?
- Які властивості має степінь з дійсним показником?
- Зобразіть схематично графік функції  $y = a^x$  при  $a > 1$ ; при  $0 < a < 1$
- Через яку точку проходять всі графіки всіх показникових функцій?
- Користуючись побудованими графіками показникових функцій, охарактеризуйте всі їх властивості
- Що називають експонентою?
- Яку цікаву особливість має експонента?
- За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
- Чи може значення показникової функції бути від'ємним?
- Чи може значення показникової функції дорівнювати нулю?

**VI. Домашнє завдання**

|                                                               |              |
|---------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст. 6-9)<br>Виконати № 1.5; 1.7; 1.11; 1.17    | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §1<br>Виконати № 1,5; 1.7; 1.9; 1.21;              | Істер О.С.   |
| Опрацювати §1<br>Виконати № 1.2(2,4); 1.6(3-7); 1.7; 1.11(2); | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §1<br>Виконати № 8; 23; 27(в); 31;                 | Бевз Г.П.    |

**2. Методика вивчення показникових рівнянь і нерівностей****Тема:** Показникові рівняння**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення показникового рівняння, навчитися розв'язувати показникові рівняння методом зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами, методом введення нової змінної та функціонально-графічним методом;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати показникові рівняння різними способами; будувати графіки показникових рівнянь та знаходити на основі побудованих графіків корені або доводити, що таких немає;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

**Хід уроку****I. Організаційний етап**

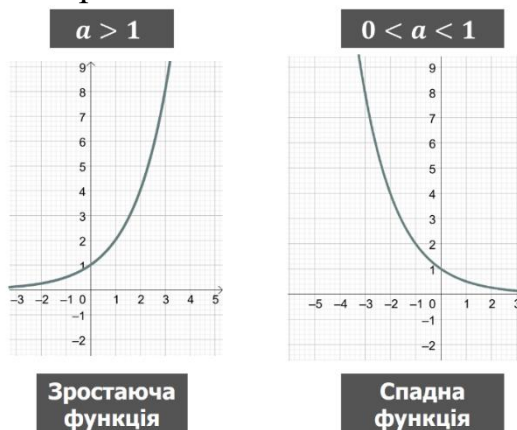
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

**II. Актуалізація опорних знань**

|                                                |
|------------------------------------------------|
| $a^x a^y = a^{x+y}$                            |
| $a^x : a^y = a^{x-y}$                          |
| $(a^x)^y = a^{xy}$                             |
| $(ab)^x = a^x b^x$                             |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ |

➤ Пригадаємо властивості степеня з дійсним показником

➤ Який вигляд мають графіки показникових функцій при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$ ?

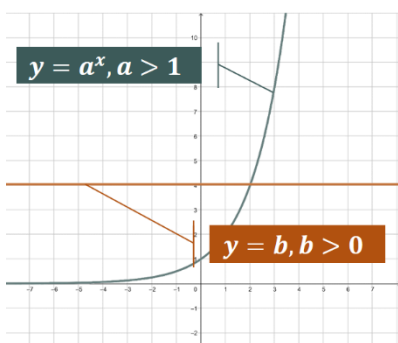


### III. Вивчення нового матеріалу

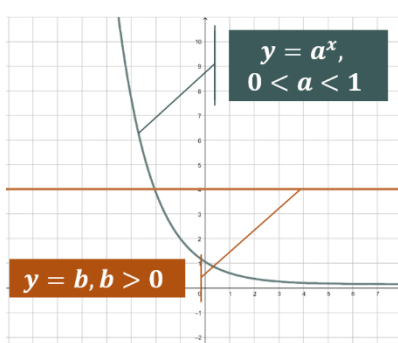
#### • Показникові рівняння

$$\left. \begin{aligned} 9^x &= \sqrt{3} \\ 3^x + 9^x &= 2 \\ 2^x \cdot 3^x &= \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{Показникові рівняння містять змінну} \\ \text{тільки у показнику степеня} \end{array}$$

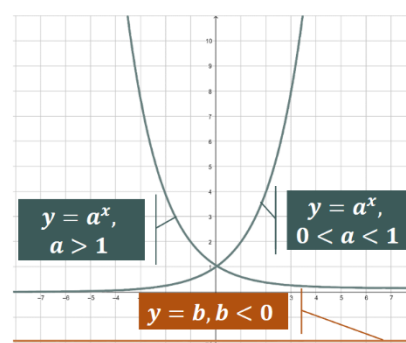
- Розглянемо найпростіше показникове рівняння  $a^x = b$  ( $a > 0, a \neq 1$ )
- Чому це рівняння не матиме розв'язків у випадку, коли  $b \leq 0$ ?  
(Так як  $a^x > 0$ )
- Чи може це рівняння мати декілька розв'язків?



**Єдиний розв'язок**



**Єдиний розв'язок**



**Розв'язків немає**

- Чому рівняння мають єдиний розв'язок?  
(В обох випадках функція  $a^x$  або монотонно зростає або монотонно спадає на  $\mathbb{R}$ , тобто кожне своє додатне значення приймає лише один раз)

#### Теорема

При  $a > 0$  і  $a \neq 1$  рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$  виконується тоді й тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$

\*Можливий запис в зошиті:  $\left. \begin{array}{l} a^{x_1} = a^{x_2} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow x_1 = x_2$

#### Доведення:

- Що нам необхідно довести?  
 $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

- Нехай  $x_1 < x_2$ , порівняйте значення показникової функції

|                                                                                                    |                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x_1 < x_2 \Rightarrow \left  \begin{array}{l} a^{x_1} ? a^{x_2} \\ a > 1 \end{array} \right $     | $x_1 < x_2 \Rightarrow \left  \begin{array}{l} a^{x_1} < a^{x_2} \\ a > 1 \end{array} \right $     |
| $x_1 < x_2 \Rightarrow \left  \begin{array}{l} a^{x_1} ? a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right $ | $x_1 < x_2 \Rightarrow \left  \begin{array}{l} a^{x_1} > a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right $ |

- Яка рівність виконується за умовою  
 $a^{x_1} = a^{x_2}$

➤ Який робимо висновок?

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^{x_1} < a^{x_2} \\ a > 1 \end{array} \right|$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^{x_1} > a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right| \Rightarrow \text{Отримали суперечність}$$

$$a^{x_1} = a^{x_2}$$

**Доведено.**

**Наслідок**

$$\left. \begin{array}{l} a^{f(x)} = a^{g(x)} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

(Якщо  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то рівняння  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x)$ )

## • Розв'язування показникових рівнянь

### 1. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами

*\*Метод зведення обох частин рівняння стосується рівнянь виду  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , та рівнянь, що можна звести до такого виду.*

Наприклад:

**1)  $4^x = 16$**

➤ Як для нашого прикладу можемо «подати» число 16?

$$4^x = 4^2$$

➤ Який отримали корінь рівняння?

$$x = 2 \left( \text{Так як } \left. \begin{array}{l} a^{x_1} = a^{x_2} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow x_1 = x_2 \right)$$

**2)  $7^x = 9^x$**

➤ Чи можемо обидві частини рівняння поділити на  $9^x$ ?

$$\frac{7^x}{9^x} = 1$$

➤ Як для цього прикладу можемо подати одиницю?

$$\left(\frac{7}{9}\right)^x = \left(\frac{7}{9}\right)^0 \Rightarrow x = 0$$

**3)  $7^x = -1$**

➤ Як можемо розв'язати це рівняння?

$$a > 0 \Rightarrow a^x > 0, \text{ коренів немає.}$$

**4)  $12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10$**

➤ Що робити, коли перед нами не найпростіше показникове рівняння?

➤ Винесемо спільний множник за дужки та зведемо це рівняння до найпростішого

$$12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10$$

$$5^x(12 \cdot \frac{1}{5} + 3 - 5) = 10$$

$$5^x \cdot \frac{2}{5} = 10$$

$$5^x = 10 : \frac{2}{5}$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

## 2. Метод введення нової змінної

1)  $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

➤ Як можемо виразити « $25^x$ »?

$$25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$$

➤ Уведемо нову змінну та виконаємо заміну

$$\left. \begin{array}{l} 25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0 \\ 25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2 \\ 5^x = t \end{array} \right| \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$$

➤ За теоремою Вієта, які будуть корені цього рівняння?

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -5$$

➤ Чому « $t = -5$ » не задовольняє умову?

$5^x > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , отже  $5^x = -5$  не має коренів.

➤ Виконаємо підстановку та розв'яжемо рівняння вже відомим нам способом

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5^0$$

$$x = 0$$

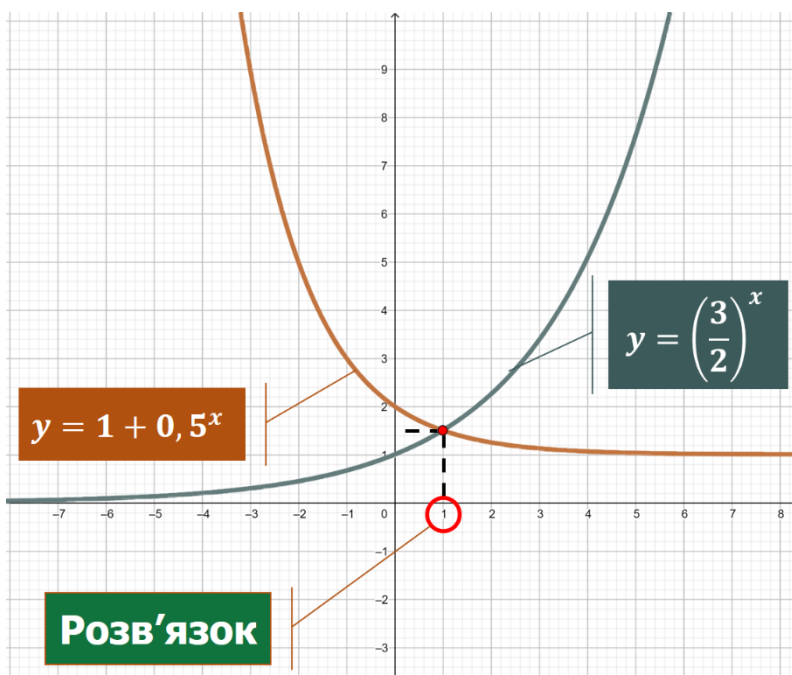
## 3. Функціонально-графічний метод

*\*Цим методом можна скористатися для знаходження коренів рівняння шляхом побудови графіків рівняння та на основі отриманих графіків довести, що інших коренів немає*

1)  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0,5^x$

➤ Чи можемо методом спроб знайти корінь рівняння?

(Так, але це не завжди зручно)



➤ Побудуємо обидва графіки та знайдемо корінь рівняння

➤ Чому ми можемо стверджувати, що інших коренів немає?

$$\left. \begin{array}{l} y = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \text{зростаюча функція, так як } \frac{3}{2} > 1 \\ y = 1 + 0,5^x - \text{спадна функція, так як } 0,5 < 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \text{інших коренів} \\ \text{немає} \end{array}$$

#### IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть рівняння

1)  $4^x = 64$

**Розв'язок:**

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

2)  $3^x = \frac{1}{81}$

**Розв'язок:**

$$3^x = 3^{-4}$$

$$x = -4$$

3)  $0,6^{2x-3} = 1$

**Розв'язок:**

$$0,6^{2x-3} = 0,6^0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

4)  $10^{-x} = 0,0001$

6)  $8^x = 16$

**Розв'язок:**

$$(2^3)^x = 2^4$$

$$2^{3x} = 2^4$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

7)  $\sqrt{5^x} = 25$

**Розв'язок:**

$$(5^x)^{\frac{1}{2}} = 5^2$$

$$5^{\frac{1}{2}x} = 5^2$$

$$\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 4$$

8)  $0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$

**Розв'язок:**

**Розв'язок:**

$$10^{-x} = 10^{-3}$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

$$5) 2^{5-x} = 2^{3x-7}$$

**Розв'язок:**

$$5 - x = 3x - 7$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4} &= 2^{x^2+1} \\ (2^{-2})^{x^2-4} &= 2^{x^2+1} \\ 2^{-2x^2+8} &= 2^{x^2+1} \\ -2x^2 + 8 &= x^2 + 1 \\ x^2 + 2x^2 &= 8 - 1 \\ 3x^2 &= 7 \\ x^2 &= \frac{7}{3} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

№2

Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

**Розв'язок:**Нехай  $2^x = t$ , тоді:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Отже:

$$\begin{aligned} 2^x = 2 &\mid \Rightarrow 2^x = 2^1 \mid \Rightarrow x = 1 \\ 2^x = 4 &\mid \Rightarrow 2^x = 2^2 \mid \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$2) 9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

**Розв'язок:**

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Нехай  $3^x = a$ , тоді:

$$t^2 - 6t - 27 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

Отже:

$$\begin{aligned} 3^x = 9 &\mid \Rightarrow 3^x = 3^2 \mid \Rightarrow x = 2 \\ 3^x = -3 &\mid \Rightarrow \emptyset \mid \end{aligned}$$

$$4) 100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0$$

**Розв'язок:**Нехай  $0,3^x = t$ , тоді:

$$100t^2 + 91t - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 91^2 + 4 \cdot 9 \cdot 100 = 8281 + 3600 = 11881 = 109^2$$

$$3) 25^x - 5^x - 20 = 0$$

**Розв'язок:**

$$5^{2x} - 5^x - 20 = 0$$

Нехай  $5^x = t$ , тоді:

$$t^2 - t - 20 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

Отже:

$$\begin{aligned} 5^x = 5 &\mid \Rightarrow 5^x = 5^1 \mid \Rightarrow x = 1 \\ 5^x = -4 &\mid \Rightarrow \emptyset \mid \end{aligned}$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-91 \pm 109}{200} = \begin{cases} t_1 = 0,09 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Отже:

$$\left. \begin{array}{l} 0,3^x = 0,09 \\ 0,3^x = -1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0,3^x = 0,3^2 \\ \emptyset \end{array} \right| \Rightarrow x = 2$$

№3

Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$$

**Розв'язок:**

Враховуючи, що  $a^x : a^y = a^{x-y}$ :

$$2^{x-2}(2^{x-x+2} + 2^{x-1-x+2} + 1) = 56$$

$$2^{x-2}(2^2 + 2 + 1) = 56$$

$$2^{x-2} \cdot 7 = 56$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

$$2) 6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$$

**Розв'язок:**

Враховуючи, що  $a^x : a^y = a^{x-y}$ :

$$5^{x-1}(6 \cdot 5^{x-x+1} - 5^{x+1-x+1} - 3 \cdot 1) = 10$$

$$5^{x-1}(6 \cdot 5^1 - 5^2 - 3) = 10$$

$$5^{x-1} \cdot 2 = 10$$

$$5^{x-1} = 5$$

$$5^{x-1} = 5^1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

$$3) 2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$$

**Розв'язок:**

Враховуючи, що  $a^x : a^y = a^{x-y}$ :

$$7^{x-1}(2 \cdot 7^{x-x+1} + 7^{x+2-x+1} - 3 \cdot 1) = 354$$

$$7^{x-1}(2 \cdot 7^1 + 7^3 - 3) = 354$$

$$7^{x-1} \cdot 354 = 354$$

$$7^{x-1} = 1$$

$$7^{x-1} = 7^0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$4) 4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$$

**Розв'язок:**

$$2^{2(x-2)} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$$

Враховуючи, що  $a^x : a^y = a^{x-y}$ :

$$2^{2x-4}(1 - 3 \cdot 2^{2x-1-2x+4} + 5 \cdot 2^{2x-2x+4}) = 228$$

$$2^{2x-4}(1 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4) = 228$$

$$2^{2x-4}(1 - 24 + 80) = 228$$

$$2^{2x-4} \cdot 57 = 228$$

$$2^{2x-4} = 4$$

$$2^{2x-4} = 2^2$$

$$2x - 4 = 2$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

**V. Підсумок уроку**

- Які рівняння називають показниковими?
- Як розв'язати найпростіше показникове рівняння?
- У яких випадках показникове рівняння  $a^x = b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) має корені? Наведіть приклади та проілюструйте їх графічно.
- У чому полягає метод введення нової змінної?
- У чому полягає метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами?
- Якому рівнянню рівносильне рівняння виду  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ?

**VI. Домашнє завдання**

|                                                                                                 |              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст.13-14)<br>Виконати № 2.2; 2.6; 2.10; 2.16                                     | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §2<br>Виконати № 2.4; 2.6; 2.8; 2.14; 2.28                                           | Істер О.С.   |
| Опрацювати §2 (п.2.1 – 2.2)<br>Виконати № 2.1.1 (15-19); 2.1.3(3,4); 2.2.3(4,6);<br>2.2.5 (3,4) | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §2 (ст.15-16)<br>Виконати № 51, 54, 58, 60                                           | Бевз Г.П.    |

**Тема:** Показникові нерівності

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової нерівності, навчитися розв'язувати показникові нерівності методами, подібними до методів розв'язування показникових рівнянь;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати показникові нерівності різними способами;

- *Виховна*: виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

### Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

## Хід уроку

### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

### II. Актуалізація опорних знань

#### • Розв'язування нерівностей

➤ Як саме ми можемо розв'язати звичайну нерівність?

(За допомогою методу рівносильних перетворень або методу інтервалів)

➤ У чому полягає суть методу рівносильних перетворень?

#### Метод рівносильних перетворень

1. Врахувати ОДЗ початкової нерівності.
2. Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях.

➤ У чому полягає суть методу інтервалів?

#### Метод інтервалів

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції:  $f(x) = 0$ .
3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції  $f(x)$  у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

➤ Які ми вже знаємо **теореми про рівносильні перетворення** для нерівностей?

1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій

➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?

(На будь-якій множині)

2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **додатне число** (або на одну й ту саму функцію, що визначена

і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій

➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?

(На ОДЗ заданої)

3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **від'ємне число** (або не одну й ту саму функцію, що визначена і **від'ємна** на ОДЗ заданої нерівності) і **змінити знак нерівності на протилежний**, то одержимо нерівність, рівносильну заданій

➤ Чи буде ця теорема справджуватися на будь-якій множині?

(На ОДЗ заданої)

### III. Вивчення нового матеріалу

#### • Показникові нерівності

$$\left. \begin{array}{l} 3^x \geq 9 \\ 2^x + 5^x > 1 \\ 2^x + 2^{x-1} < 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Показникові нерівності містять змінну} \\ \text{тільки у показнику степеня} \end{array}$$

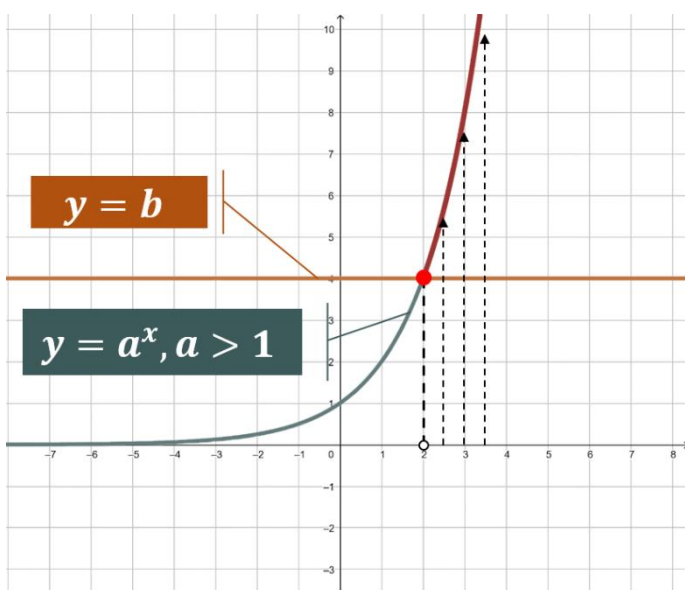
Найпростіші показникові нерівності:  $\left| \begin{array}{l} a^x > b, a^x < b, a^x \geq b, a^x \leq b \\ a > 0, a \neq 1, b > 0 \end{array} \right.$

➤ Пригадайте теорему для показникових рівнянь. Чи буде теорема для показникових нерівностей аналогічною?

(Теорема: При  $a > 0$  і  $a \neq 1$  рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$  виконується тоді й тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$ )

➤ Розглянемо найпростішу показникову нерівність  $a^x > b$  ( $a > 0, a \neq 1, b > 0$ )

Нехай  $b = a^c \Rightarrow a^x > a^c$ , у випадку  $a > 1$  функція  $y = a^x$  зростає



Більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, отже:

$$a^x > a^c \Rightarrow x > c$$

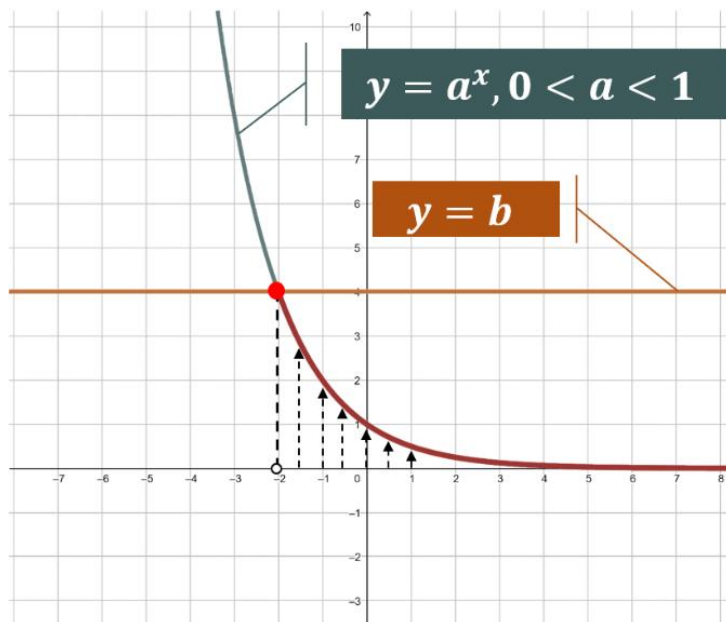
**Знак нерівності не змінюється**

➤ У випадку  $0 < a < 1$  функція  $y = a^x$  спадає:

Більшому значенню функції  
відповідає менше значення  
аргументу, отже:

$$a^x > a^c \Rightarrow x < c$$

**Знак нерівності змінюється на  
протилежний**



### Теорема

Якщо  $a > 1$ , то нерівність  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  рівносильна нерівності  $f(x) > g(x)$ ;  
Якщо  $0 < a < 1$ , то нерівність  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  рівносильна нерівності  $f(x) < g(x)$

*\*Можливий запис в зошиті*  $\left| \begin{array}{l} \text{Якщо } a > 1 \text{ і } a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{ то } f(x) > g(x) \\ \text{Якщо } 0 < a < 1, \text{ то } f(x) < g(x) \end{array} \right.$

### • Розв'язування показникових нерівностей

➤ Пригадайте методи розв'язування показникових рівнянь

1. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами
2. Метод введення нової змінної
3. Функціонально-графічний метод

➤ Чи можемо ми користуватися цими методами для розв'язування показникових нерівностей?

Так:

1. Метод зведення обох частин нерівності до степенів з однаковими основами
2. Метод введення нової змінної
3. Функціонально-графічний метод

➤ Поясніть, у чому полягає суть кожного методу?

➤ Отже, для розв'язування показникових нерівностей використовують ті самі методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей (розглянута нами теорема, що базується на монотонності (зростанні чи спаданні) показникової функції)

## IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Чи рівносильні нерівності:

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$       | Так |
| 2) $0,9^{x^2-4} < 0,9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$ | Ні  |
| 3) $a^x > a^5$ , де $a > 1$ , і $x > 5$          | Так |
| 4) $a^x < a^{-3}$ , де $0 < a < 1$ , і $x < -3$  | Ні  |

## №2

Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$$

**Розв'язок:**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x < 2$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; -2)$

$$2) 5^x < \frac{1}{5}$$

**Розв'язок:**

$$5^x < 5^{-1}$$

$$x < -1$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; -1)$

$$3) 11^{x-5} < 11^{3x+1}$$

**Розв'язок:**

$$x - 5 < 3x + 1$$

$$2x > -6$$

$$x > -3$$

**Відповідь:**  $x \in (-3; +\infty)$

$$4) 0,4^{6x+1} \geq 0,4^{2x+5}$$

**Розв'язок:**

$$6x + 1 \leq 2x + 5$$

$$4x \leq 4$$

$$x \leq 1$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 1]$

$$5) 0,3^{4x-8} > 1$$

**Розв'язок:**

$$0,3^{4x-8} > 0,3^0$$

$$4x - 8 < 0$$

$$4x < 8$$

$$x < 2$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 2)$

$$6) 9^{1-3x} \leq 0$$

**Розв'язок:**

Так як  $9^{1-3x} > 0$  для  $x \in \mathbb{R}$ , то нерівність не має розв'язків.

## №3

Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{x^2-1} < 8$$

**Розв'язок:**

$$2^{x^2-1} < 2^3$$

$$x^2 - 1 < 3$$

$$x^2 < 4$$

\*Так як  $x^2 = \left| \frac{2}{-2} \right|$ , і нам необхідна

множина яка в «квадраті» буде приймати значення «менше 4-х», то отримаємо множину всіх додатніх чисел менших за «2», всі від'ємні числа більші за «-2» і

$$3) 0,1^{3x-1} < 1000$$

**Розв'язок:**

$$10^{-(3x-1)} < 10^3$$

$$-3x + 1 < 3$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

**Відповідь:**  $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$$4) \left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$$

число «0». Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності:

$$-2 < x < 2$$

**Відповідь:**  $x \in (-2; 2)$

$$2) \ 27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$$

**Розв'язок:**

$$3^{3(2x+1)} > 3^{-2(x+2)}$$

$$3(2x+1) > -2(x+2)$$

$$6x+3 > -2x-4$$

$$8x > -7$$

$$x > -\frac{7}{8}$$

**Відповідь:**  $x \in \left(-\frac{7}{8}; +\infty\right)$

**Розв'язок:**

$$6^{-2(2-x)} < 6^{3(x+1)}$$

$$-2(2-x) < 3(x+1)$$

$$-4+2x < 3x+3$$

$$x > -7$$

**Відповідь:**  $x \in (-7; +\infty)$

$$5) \ \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

**Розв'язок:**

$$6x - x^2 < 5$$

$$-x^2 + 6x - 5 < 0$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

*\*Далі розкладемо цей квадратний тричлен на лінійні множники для повторення вивченого у попередніх класах матеріалу*

➤ Якій нерівності рівносильна ця нерівність?

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$x_1, x_2$  - корені рівняння

➤ Чи завжди можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники?

*Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.*

$$(x - 5)(x - 1) > 0$$

➤ Які розв'язки має ця нерівність?

$$x < 1 \text{ або } x > 5$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

$$6) \ 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$$

**Розв'язок:**

$$5^3 \cdot 5^{-1(3x^2)} \geq 5^{-2(-4x)}$$

$$5^{3-3x^2} \geq 5^{8x}$$

$$3 - 3x^2 \geq 8x$$

$$3x^2 + 8x - 3 \leq 0$$

$$f(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

1. ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$

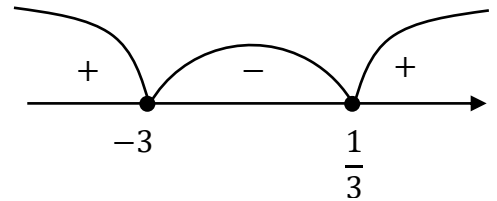
2. Нулі функції:  $f(x) = 0$

$$D = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:

4. Так як знак нашої функції менше/рівно нуля, оберемо проміжок  $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$ .



**Відповідь:**  $x \in \left[-3; \frac{1}{3}\right]$

$$6) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}$$

**Розв'язок:**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x - 0,5 < -0,5$$

$$x < 0$$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 0)$

$$7) 4 \cdot 0,5^{x(x+3)} \geq 0,25^{2x}$$

**Розв'язок:**

$$(0,5)^{-2} \cdot 0,5^{x(x+3)} \geq 0,5^{2(2x)}$$

$$0,5^{-2+x^2+3x} \geq 0,5^{4x}$$

$$-2 + x^2 + 3x \leq 4x$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

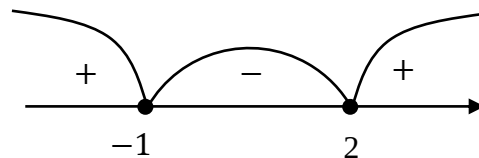
$$f(x) = x^2 - x - 2$$

1. ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції:  $f(x) = 0$

$$\text{За теоремою Вієта: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

3. Позначимо нулі функції та знайдемо знак у кожному з проміжків:  
 4. Так як знак нашої функції менше/рівно нуля, оберемо проміжок



$[-1; 2]$

**Відповідь:**  $x \in [-1; 2]$

## V. Підсумок уроку

- Які нерівності називають показниковими?
- Які нерівності називаються найпростішими показниковими нерівностями?
- Як розв'язати нерівність виду  $a^x > b$ , якщо  $b = a^c$  і  $a > 1$ ?
- Як розв'язати нерівність виду  $a^x > b$ , якщо  $b = a^c$  і  $0 < a < 1$ ?
- До якої нерівності зводиться нерівність  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ , якщо  $a > 1$ ?
- До якої нерівності зводиться нерівність  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ , якщо  $0 < a < 1$ ?

## VI. Домашнє завдання

|                                                                                                |              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст.17-18)<br>Виконати № 3.3; 3.5(1-3); 3.7; 3.9; 3.11 (1,2);<br>3.13(1-2); 3.16 | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §3<br>Виконати № 3,2; 3,6; 3,10; 3,16                                               | Істер О.С.   |
| Опрацювати §2 (п.2.3)<br>Виконати № 2.3.1 (2,6,8); 2.3.2 (3,5,6);                              | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §2 (ст.17)<br>Виконати № 63, 65, 70                                                 | Бевз Г.П.    |

## 3. Методика вивчення логарифму та його властивостей

**Тема:** Логарифм і його властивості

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення логарифма, основну логарифмічну тотожність та основні властивості логарифмів;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні рівняння та обчислювати значення виразів за допомогою основних властивостей логарифмів;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

**Компетенції:**

- *Соціальна і громадянська компетентності:*
  - **Уміння:** висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аргументувати та відстоювати свою позицію; ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі;
  - **Ставлення:** осядливність і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу;

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

**Хід уроку****I. Організаційний етап**

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

**II. Вивчення нового матеріалу**

- **Проблемне питання**

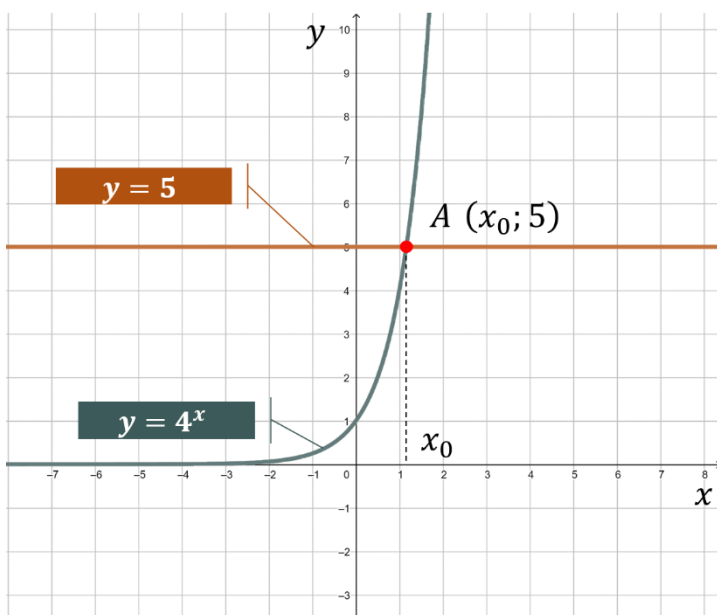
- Які саме числа будуть коренями цих рівнянь?

$$\begin{array}{l} 4^x = 16 \\ 4^x = 64 \end{array} \quad (2 \text{ і } 3)$$

- Чи буде мати розв'язки це рівняння?

$$4^x = 5$$

*\*Звернемося до графічної інтерпретації, щоб переконатися, що рівняння  $4^x = 5$  має єдиний корінь.*



- Що можемо сказати про « $x_0$ »? (Це показник степеня, до якого треба піднести число 4, щоб отримати число 5)

*\*Отже, розв'язком рівняння  $4^x = 5$  буде логарифм числа 5 за основою 4  
Записується так:  $\log_4 5$*

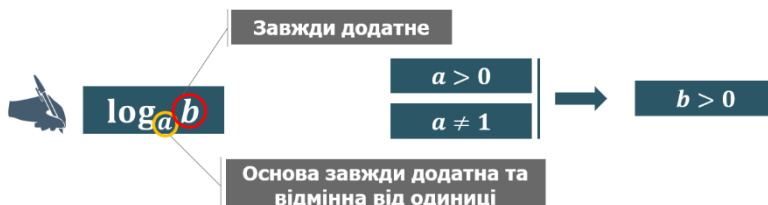
- Спробуйте сформулювати означення логарифма  
(Показник степеня, до якого треба піднести число  $a$ , щоб отримати число  $b$ )
- Які обмеження має рівняння  $a^x = b$ ?  
( $a > 0, a \neq 1$ )
- За якої умови рівняння  $a^x = b$  має розв'язок?  
( $b > 0$ )
- Чи може основа логарифма дорівнювати 0 або 1?  
(Ні)
- Чи матиме зміст вираз  $\log_a b$ , якщо  $b < 0$ ?  
(Ні, так як  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ )

### • Логарифм і його властивості

#### Означення

Логарифмом додатного числа  $b$  з основою  $a$ , де  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , називають показник степеня до якого потрібно піднести число  $a$ , щоб отримати число  $b$ .

*\*Отже, розглянувши рівність  $4^3 = 64$ , знаючи будь-які два числа – можемо*



*знайти третє.*

|            | Відомо | Знайти | Розв'язок          |          |
|------------|--------|--------|--------------------|----------|
| $4^3 = 64$ | 4 і 3  | 64     | $4^3 = 64$         | Степінь  |
|            | 64 і 3 | 4      | $\sqrt[3]{64} = 4$ | Корінь   |
|            | 4 і 64 | 3      | $\log_4 64 = 3$    | Логарифм |

**Обчисліть:**

|                                   | Відповідь | Розв'язок                                   |
|-----------------------------------|-----------|---------------------------------------------|
| $\log_2 8$                        | 3         | $2^3 = 8$                                   |
| $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$ | 2         | $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ |
| $\log_7 \frac{1}{49}$             | -2        | $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$     |

Поясніть, чому не існують:

$$\frac{\log_3(-9)}{\log_7 0}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} -4$$



Логарифм від'ємного числа і нуля не існує.

- **Логарифмування**

*\*Операцію знаходження логарифма числа називають логарифмуванням*

| Піднесення до степеня | Логарифмування           |
|-----------------------|--------------------------|
| $4^3 = 64$            | $\log_4 64 = 3$          |
| $(\sqrt{4})^4 = 16$   | $\log_{\sqrt{4}} 16 = 4$ |
| $(0,1)^4 = 0,0001$    | $\log_{0,1} 0,0001 = 4$  |

- **Логарифми з власними назвами**

$$\log_{10} a = \lg a$$

Десятковий логарифм

$$\log_e a = \ln a$$

Натуральний логарифм

- **Основна логарифмічна тотожність**

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b \\ a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{array} \right| \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$

$$x = \log_a b$$



$$10^{\lg b} = ?$$

$$10^{\lg b} = b$$

$$\log_a 1 = ?$$

Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = ?$$

Логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1$$

- **Основні властивості логарифмів**

**Теорема (логарифм добутку)**

Якщо  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то виконується рівність  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

### Теорема (логарифм частки)

Якщо  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то виконується рівність  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

\*« $\forall$ » - для будь-якого



$\forall a > 0, a \neq 1$  і  $x > 0, y > 0$ :

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Логарифм добутку додатних чисел  
дорівнює сумі логарифмів  
множників

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Логарифм частки додатних чисел  
дорівнює різниці логарифмів  
діленого і дільника

### Доведемо теорему про логарифм добутку:

$$a^{\log_a xy} = ?$$

- Використовуючи основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a xy} = xy$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = ?$$

- Використовуючи властивості степеня і основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$$

- Який робимо висновок?

$$\left. \begin{aligned} a^{\log_a xy} &= xy \\ a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy \end{aligned} \right| \Rightarrow a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Доведено



Творче д/з:

Доведіть теорему про логарифм частки

### Теорема (логарифм степеня)

Якщо  $x > 0$ ,  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то для будь-якого  $\beta \in \mathbb{R}$  виконується рівність  $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$



Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  і  $x > 0$ , то  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ :  
 $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

*Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня*

- Ми знаємо, що при  $x > 0$   $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$   
 Як можемо узагальнити формулу логарифму степеня?



Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  і  $x > 0$ , то  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ :  
 $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$   
 $\log_a \sqrt[\beta]{x} = \frac{1}{\beta} \log_a x$

**Теорема (перехід від однієї основи логарифма до іншої)**

Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $c \neq 1$ , то виконується рівність  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$



$\forall a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  і  $a \neq 1$ ,  $c \neq 1$   
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

*Логарифм додатного числа  $b$  за старою основою  $a$  дорівнює логарифму цього самого числа  $b$  за новою основою  $c$ , поділеному на логарифм старої основи  $a$  за новою основою  $c$*

**Наслідок 1**



Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , то:  
 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

**Наслідок 2**



Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ , то  $\forall \beta \neq 0$ :  
 $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$

• **Узагальнення**

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

Об'єднуючи ці дві властивості, що можемо сказати про:  $\log_{a^m} x^n = ?$

$$\left. \begin{aligned} \log_a x^n &= n \log_a x \\ \log_{a^m} b &= \frac{1}{m} \log_a b \end{aligned} \right| \Rightarrow \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

➤ Чи можемо знайти логарифм добутку, у випадку коли  $x$  і  $y$  від'ємні?

$$\left. \begin{aligned} x &< 0 \\ y &< 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \log_a(xy) \text{ — існує}$$

➤ Чи можемо скористатися формулою, обґрунтованою для додатних значень  $x$  і  $y$ ?

(Не можна)

\*Для випадку  $xy > 0$ :

$$xy > 0 \Rightarrow xy = |x| \cdot |y| \Rightarrow \left| \begin{aligned} |x| &> 0 \\ |y| &> 0 \end{aligned} \right|$$

➤ Як можемо узагальнити формулу логарифму добутку, якщо  $x < 0$  і  $y < 0$ ?

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

|                                         |                                                              |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $x < 0$ і $y < 0$                       | $\log_a(xy) = \log_a( x  \cdot  y ) = \log_a x  + \log_a y $ |
| <b>Також можливі інші узагальнення:</b> |                                                              |
| Якщо $\frac{x}{y} > 0$                  | $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x  - \log_a y $                 |
| Якщо $x \neq 0$                         | $\log_a x^{2k} = 2k \log_a x $                               |

### Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Чи є правильною рівність:

1)  $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

2)  $\log_{25} 5 = 2$

3)  $\log_5 125 = \frac{1}{3}$

4)  $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

5)  $\log_{0,01} 10 = 2$

6)  $\lg 0,0001 = -4$

№2

Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1

2) 2

3) 32

4)  $\sqrt{2}$

5) 0,5

6)  $\frac{1}{8}$

7)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

8)  $2\sqrt{2}$

**Розв'язок:**

1)  $\log_2 1 = 0$

2)  $\log_2 2 = 1$

3)  $\log_2 32 = 5$

4)  $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

5)  $\log_2 0,5 = -1$

6)  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

7)  $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

8)  $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

**№3****Знайдіть десятковий логарифм числа:**

1) 1

2) 100

3) 0,1

4) 0,00001

**Розв'язок:**

1)  $\lg 1 = 0$

2)  $\lg 100 = 2$

3)  $\lg 0,1 = -1$

4)  $\lg 0,00001 = -5$

**№4****Розв'яжіть рівняння:**

1)  $\log_7 x = -1$

2)  $\log_{\sqrt{3}} x = 6$

3)  $\log_x 9 = 2$

**Розв'язок:**

1)  $\log_7 x = -1$

2)  $\log_{\sqrt{3}} x = 6$

$$x = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$x = (\sqrt{3})^6 = 27$$

3)  $\log_x 9 = 2$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$x = -3 \text{ (не задовольняє, так як } x > 0)$$

**№5****Розв'яжіть рівняння:**

1)  $6^x = 2$

2)  $0,4^x = 9$

3)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$

**Розв'язок:**

1)  $6^x = 2$

2)  $0,4^x = 9$

$$x = \log_6 2$$

$$x = \log_{0,4} 9$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$

$$1-x = \log_{\frac{1}{3}} 2$$

$$x = 1 - \log_{\frac{1}{3}} 2$$

№6

**Обчисліть:**

$$1) 2^{\log_2 32}$$

$$3) 7^{2 \log_7 2}$$

$$2) 5^{\log_5 0,45}$$

**Розв'язок:**

$$1) 2^{\log_2 32} = 32$$

$$2) 5^{\log_5 0,45} = 0,45$$

$$3) 7^{2 \log_7 2} = 7^{\log_7 4} = 4$$

№7

**Знайдіть значення виразу:**

$$1) \log_6 3 + \log_6 2$$

$$2) \log_5 100 - \log_5 4$$

$$3) \log_{49} 84 - \log_{49} 12$$

$$4) \frac{\log_5 64}{\log_5 4}$$

**Розв'язок:**

$$1) \log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 3 \cdot 2 = \log_6 6 = 1$$

$$2) \log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2$$

$$3) \log_{49} 84 - \log_{49} 12 = \log_{49} \frac{84}{12} = \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$$

$$4) \frac{\log_5 64}{\log_5 4} = \frac{\log_5 4^3}{\log_5 4} = \frac{3 \log_5 4}{\log_5 4} = 3$$

№8

**Обчисліть:**

$$1) 64^{0,5 \log_2 12}$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$$

$$3) 6^{\frac{\log_1 3}{6}}$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$$

**Розв'язок:**

$$1) 64^{0,5 \log_2 12}$$

$$(2^6)^{0,5 \log_2 12} = 2^{3 \log_2 12} = (2^{\log_2 12})^3 = 12^3 = 1728$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 8 : \frac{4}{9} = 8 \cdot \frac{9}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

$$3) 6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$$

$$6^{\log_{\frac{1}{6}} 3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_{\frac{1}{6}} 3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}} 3^{-1}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2^{-3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2^{-3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2} : \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9^{-\frac{1}{2} \log_9 2} : \frac{1}{27} = 9^{\log_9 \frac{1}{\sqrt{2}}} : \frac{1}{27} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{27} = \frac{27}{\sqrt{2}}$$

№9

**Обчисліть:**

1)  $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

2)  $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$

3)  $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$

4)  $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

**Розв'язок:**

1)  $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

2)  $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$

$$\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{7^2} 7^3 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \log_7 7 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$$

3)  $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$

$$\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56 = \log_2 ((5:35) \cdot 56) = \log_2 \left( \left(5 \cdot \frac{1}{35}\right) \cdot 56 \right)$$

$$= \log_2 \frac{5 \cdot 56}{35} = \log_2 8 = 3$$

4)  $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

$$2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16 = \lg 5^2 + \lg \sqrt{16} = \lg 25 \cdot 4 = \lg 100 = 2$$

№10

**Знайдіть  $x$ , якщо:**

1)  $\log_9 x = \frac{1}{4} \log_9 16 + 2 \log_9 5$

2)  $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$

**Розв'язок:**

1)  $\log_9 x = \frac{1}{4} \log_9 16 + 2 \log_9 5$

$$\log_9 x = \log_9 \sqrt[4]{16} + \log_9 5^2 = \log_9 (2 \cdot 25) = \log_9 50$$

$$x = 9^{\log_9 50} = 50$$

2)  $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$

$$\log_7 x = \log_7 8^2 - \log_7 2^4 = \log_7 \frac{64}{16} = \log_7 4$$

$$x = 7^{\log_7 4} = 4$$

№11

Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2}$$

$$2) \log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9$$

Розв'язок:

$$1) \frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2} = \frac{\log_7 \frac{27}{3^2}}{\log_7 (45 \cdot 0,2)} = \frac{\log_7 3}{\log_7 9} = \log_9 3 = \frac{1}{2} \text{ (Так як за формулою переходу до іншої основи } \log_9 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 9} \text{)}$$

$$2) \log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 3^2 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot$$

$$2 \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 3 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot 2 \frac{1}{\log_3 \cos \frac{\pi}{9}} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (Використали наслідок 1)}$$

### III. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення логарифма додатного числа  $b$  за основою  $a$ .
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?
- Якою може бути основа логарифма?
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність.
- Які логарифми називаються десятковими, а які натуральними?
- Сформулюйте основні властивості логарифмів.
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї.

### IV. Домашнє завдання

|                                                                                                                |              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст.20-23)<br>Виконати № 4.3; 4.8 (1,3,5); 4.12; 4.14; 4.16<br>(1,4,5,7); 4.22 (1,4); 4.29 (1,2) | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §4<br>Виконати № 4.3; 4.7; 4.9; 4.11; 4.15; 4.21; 4.23                                              | Істер О.С.   |
| Опрацювати §3<br>Виконати № 3.2 (2,6,10); 3.3 (3,4,6); 3.4 (1,3,5); 3.5<br>(2,5); 3.8 (3,4); 3.9 (4,5)         | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §3 (22-24)<br>Виконати № 106; 109; 110; 122; 125; 127;                                              | Бевз Г.П.    |

#### 4. Методика вивчення логарифмічної функції та її властивостей

**Тема:** Властивості та графік логарифмічної функції

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення логарифмічної функції та властивості логарифмічної функції, навчитися будувати та розпізнавати графік логарифмічної функції
- *Розвиваюча:* розвивати вміння формулювати властивості функції на основі отриманого графіку; розв'язувати задачі на основі знань про логарифмічну функцію та її властивості;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

#### Хід уроку

##### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

##### II. Вивчення нового матеріалу

- Логарифмічна функція

**Означення**

Функція виду  $y = \log_a x \mid \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$  називається логарифмічною

*\*Де  $x$  – аргумент,  $a$  – додатне і відмінне від 1 дане дійсне число.*

Приклади логарифмічних функцій:

$$y = \log_4 x, y = \log_{\sqrt{3}} x, y = \log_{\frac{1}{7}} x, y = \log_e x$$

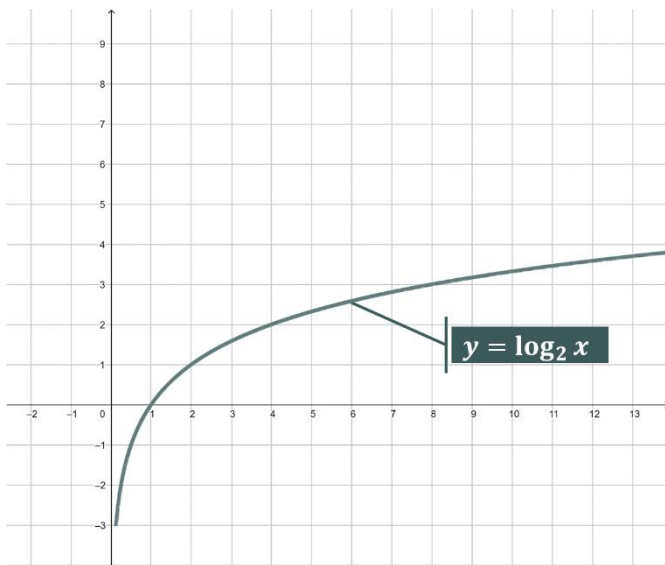
- Якщо  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то при яких значеннях « $x$ » вираз  $y = \log_a x$  буде мати зміст?

*(Тільки додатних)*

При  $a > 0$  і  $a \neq 1$  вираз  $y = \log_a x$  має змісти лише для додатних значень  $x$

При  $a > 0$  і  $a \neq 1$  вираз  $y = \log_a x$  має зміст лише для додатних значень  $x$   $\Rightarrow D(f) = (0; +\infty)$

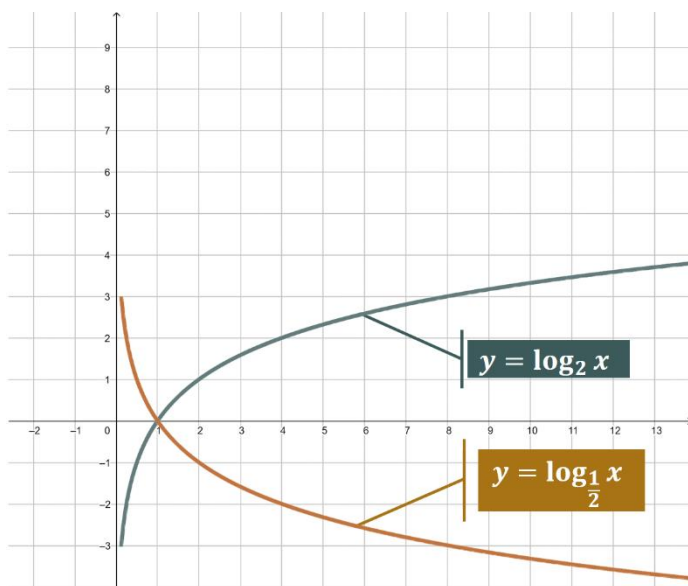
- Побудуємо за допомогою комп'ютера графік функції  $y = \log_2 x$ :



- Чи може отримана логарифмічна крива перетнути вісь ординат?  
(Так як  $x > 0$ , графік ніколи не перетне вісь ординат)

**Вісь  $y$  – асимптота цього графіка.**

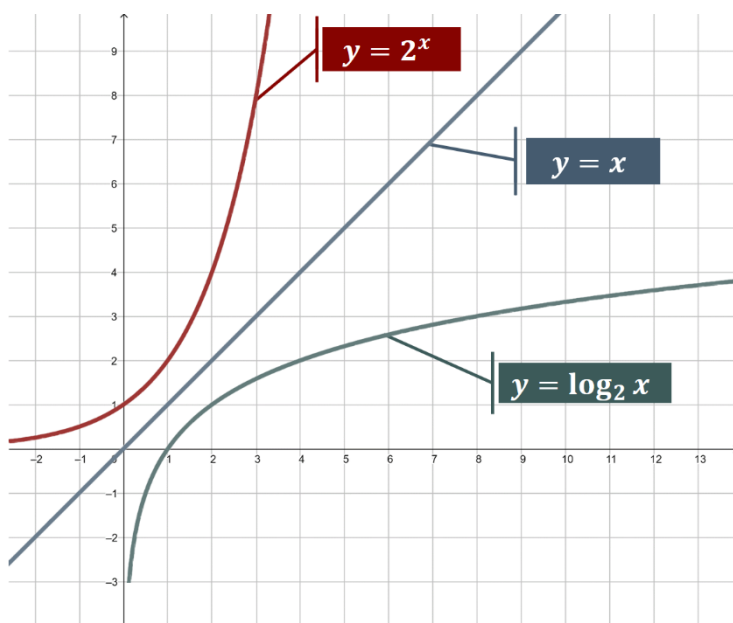
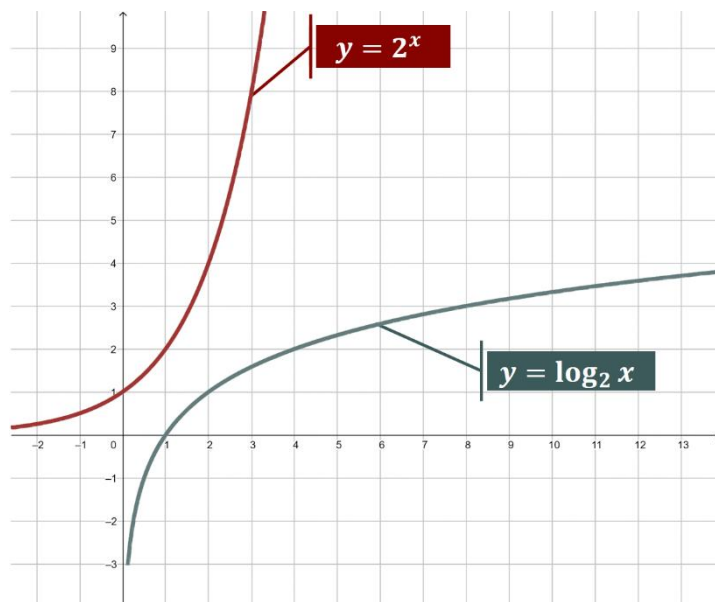
- Побудуємо за допомогою комп'ютера графік функції  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



- Що можемо на перший погляд сказати про ці функції?  
(Ці функції мають єдиний нуль  $x = 1$ ; мають два проміжки знакосталості; функції є зростаючими та спадними відповідно при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$ )

- Побудуємо графік функції  $y = 2^x$ :

- Що можемо сказати про графіки функцій  $y = \log_2 x$  і  $y = 2^x$ ?  
(Вони симетричні відносно прямої  $y = x$ )



- Як пояснити симетричність цих графіків відносно прямої  $y = x$ ?

$y = 2^x$  | виражають одну  
 $x = \log_2 y$  | й ту саму залежність  $\Rightarrow$  якщо в другій з рівностей замінити  $x$  на  $y$  (що рівнозначно заміні осі  $x$  на вісь  $y$  і навпаки)  
отримаємо функцію  
 $\Rightarrow y = \log_2 x$ , обернену до функції  
 $y = 2^x$

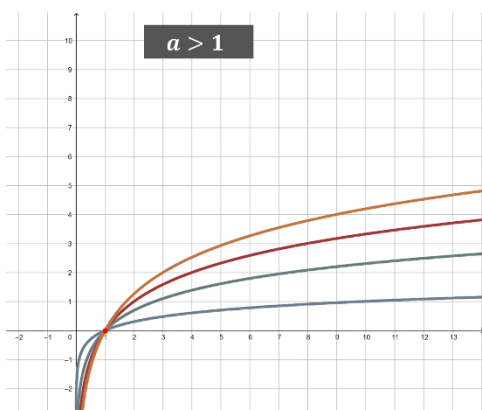
*Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої  $y = x$ , цим і пояснюється симетрія графіків  $y = 2^x$  і  $y = \log_2 x$  відносно прямої  $y = x$ .*

Отже, можемо зробити висновок:

**Графіки показникової функції  $y = a^x$  і логарифмічної функції  $y = \log_a x$ , що мають однакові основи  $a$ , симетричні відносно прямої  $y = x$ .**

## • Графік логарифмічної функції

➤ Побудуємо деякі графіки логарифмічної функції, коли  $a > 1$ :



$$y = \ln x$$

$$y = \lg x$$

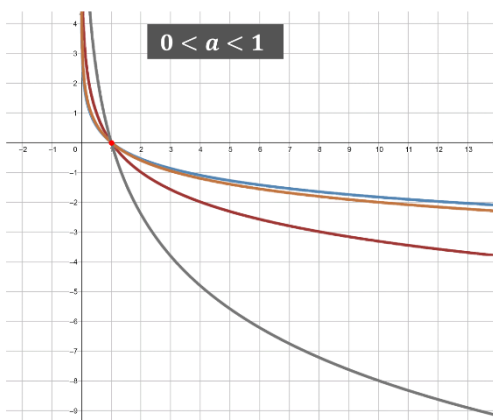
$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{\sqrt{3}} x$$

Отже, можемо зробити висновок:

*Графіки всіх функцій виду  $y = \log_a x$ , де  $a > 1$ , мають схематичний вигляд як графік функції  $y = \log_2 x$ .*

Побудуємо деякі графіки логарифмічної функції, коли  $0 < a < 1$ :



$$y = \log_2 x / 7$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$$

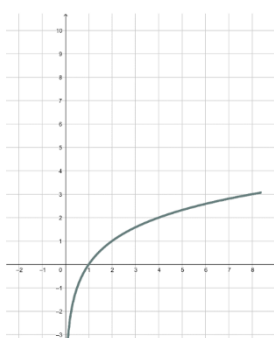
$$y = \log_{\frac{3}{4}} x$$

Отже, можемо зробити висновок:

*Графіки всіх функцій виду  $y = \log_a x$ , де  $0 < a < 1$ , мають схематичний вигляд як графік функції  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .*

## • Властивості логарифмічної функції

$$a > 1$$



1.  $y = 0$  при  $x = 1$  (Функція  $y = \log_a x$  має єдиний нуль  $x = 1$ )

2. Проміжки знакосталості:

$$a > 1 \quad \left| \begin{array}{l} y < 0 \text{ при } x \in (0; 1) \\ y > 0 \text{ при } x \in (1; +\infty) \end{array} \right.$$

(Якщо  $a > 1$ , то  $y < 0$  на проміжку  $(0; 1)$ ;  $y > 0$  на проміжку  $(1; +\infty)$ )

$$0 < a < 1 \quad \left| \begin{array}{l} y < 0 \text{ при } x \in (1; +\infty) \\ y > 0 \text{ при } x \in (0; 1) \end{array} \right.$$

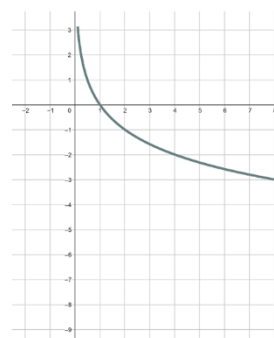
(Якщо  $0 < a < 1$ , то  $y < 0$  на проміжку  $(1; +\infty)$ ;  $y > 0$  на проміжку  $(0; 1)$ )

3. Проміжки монотонності

$a > 1$  зростає на  $(0; +\infty)$  (Функція  $y = \log_a x$  є зростаючою при  $a > 1$  на проміжку  $(0; +\infty)$ )

$0 < a < 1$  спадає на  $(0; +\infty)$  (Функція  $y = \log_a x$  є спадною при  $0 < a < 1$  на проміжку  $(0; +\infty)$ )

$$0 < a < 1$$



### III. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

**Зростаючою чи спадною є функція:**

1)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

2)  $y = \log_3 x$

3)  $y = \log_{0,1} x$

4)  $y = \lg x$

5)  $y = \log_{\sqrt{5}} x$

6)  $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$

**Розв'язок:**

Так як логарифмічна функція зростаюча при  $a > 1$ , то зростаючими функціями будуть функції: 2, 4, 5, 6

Так як логарифмічна функція спадна при  $0 < a < 1$ , то спадними функціями будуть функції: 1, 3

№2

**Порівняйте:**

1)  $\log_{12} 5$  і  $\log_{12} 6$

2)  $\log_5 \frac{1}{2}$  і  $\log_5 \frac{1}{3}$

3)  $\log_{\frac{1}{3}} 2$  і  $\log_{\frac{1}{3}} 4$

4)  $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$  і  $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$

**Розв'язок:**

1)  $\log_{12} 5 < \log_{12} 6$

2)  $\log_5 \frac{1}{2} > \log_5 \frac{1}{3}$

3)  $\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 4$

4)  $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7 > \log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$

№3

**Знайдіть область визначення функції:**

1)  $f(x) = \log_3(x + 1)$

2)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$

3)  $f(x) = \log_4(-x)$

4)  $f(x) = \log_{0,6}(5x - 6 - x^2)$

5)  $f(x) = 2\lg x + 3\lg(2 - x)$

6)  $f(x) = \lg(x^2 - 1)$

**Розв'язок:**

1)  $f(x) = \log_3(x + 1)$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

Відповідь:  $D(f) = (-1; +\infty)$

2)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$

Так як  $x^2 + 1 > 0$  для  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D(f) = (-\infty; +\infty)$

Відповідь:  $D(f) = (-\infty; +\infty)$

3)  $f(x) = \log_4(-x)$

$-x > 0$

$x < 0$

Відповідь:  $D(f) = (-\infty; 0)$

4)  $f(x) = \log_{0,6}(5x - 6 - x^2)$

$$5x - 6 - x^2 > 0$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

1. ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції  $f(x)$ :  $x^2 - 5x + 6 = 0$

За теоремою Вієта  $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

\*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок (2; 3)

$$2 < x < 3$$

Відповідь:  $D(f) = (2; 3)$

5)  $f(x) = 2\lg x + 3\lg(2 - x)$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$$

Відповідь:  $D(f) = (0; 2)$

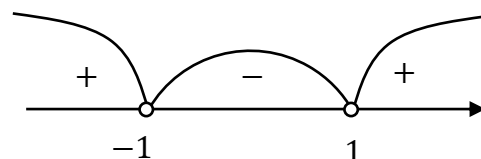
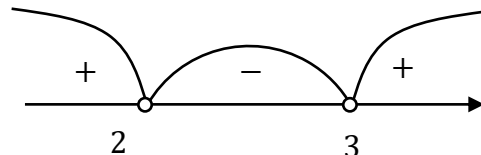
6)  $f(x) = \lg(x^2 - 1)$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x - 1)(x + 1) > 0$$

\*Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Відповідь:  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$



№4

Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1)  $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$

2)  $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$

3)  $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$

4)  $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$

\*Якщо більшому аргументу відповідає більше значення функції, то функція зростаюча, отже  $a > 1$ .

\*Якщо меншому аргументу відповідає більше значення функції, то функція спадаюча, отже  $0 < a < 1$ .

**Розв'язок:**

➤ Що можемо сказати про функцію, якщо більшому аргументу відповідає більше значення функції?

(Ця функція зростаюча)

➤ Що ми знаємо про основу зростаючої логарифмічної кривої?

( $a > 1$ )

$$1) \log_a 0,5 > \log_a 0,4$$

$$a > 1$$

$$2) \log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$$

$$0 < a < 1$$

$$3) \log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$$

$$a > 1$$

$$4) \log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$$

$$a > 1$$

#### IV. Підсумок уроку

- Яку функцію називають логарифмічною?
- Як розташовані графіки функцій  $y = a^x$  і  $y = \log_a x$ ?
- Сформулюйте властивості логарифмічної функції при  $a > 1$
- Сформулюйте властивості логарифмічної функції
- при  $0 < a < 1$
- Поясніть, як ураховуючи зростання та спадання логарифмічної функції порівняти значення:

$$1) \log_4 3 \text{ і } \log_4 5 \qquad 2) \log_{\frac{1}{4}} 7 \text{ і } \log_{\frac{1}{4}} 24$$

#### V. Домашнє завдання

|                                                                                                                    |              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст.27-29)<br>Виконати № 5.8; 5.10; 5.12; 5.14; 5.18; 5.20; 5.28                                     | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §5<br>Виконати № 5.4; 5.8; 5.12; 5.14; 5.18; 5.22; 5.28;<br>5.32; 5.34                                  | Істер О.С.   |
| Опрацювати §4 (п.4.1)<br>Виконати № 4.1.1 (2, 4, 6, 10); 4.1.2 (4, 5); 4.1.4 (2, 4, 5); 4.1.5 (2, 4); 4.1.6 (3, 2) | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §3 (ст.24-25)<br>Виконати № 115; 118; 137; 138                                                          | Бевз Г.П.    |

### 5. Методика вивчення логарифмічних рівнянь і нерівностей

**Тема:** Логарифмічні рівняння

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення логарифмічного рівняння; навчити розв'язувати логарифмічні рівняння різними методами (розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь; використання рівнянь-наслідків; Рівняння виду  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ; рівняння, які

зводяться до простіших за допомогою перетворень; заміна змінних у логарифмічних рівняннях та графічний спосіб)

- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні рівняння різними способами;
- *Виховна:* виховувати впевненість у власних силах, необхідність розкривати науковий потенціал;

### Компетенції:

- Інформаційно-цифрова компетентність
  - *Уміння:* структурувати дані; діяти за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних для розв'язання задачі; використовувати різні знакові системи; знаходити інформацію та оцінювати її достовірність; доводити істинність тверджень;
  - *Ставлення:* критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач;
  - *Навчальні ресурси:* візуалізація даних; побудова графіків за допомогою програмних засобів;

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

## Хід уроку

### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

### II. Актуалізація опорних знань

➤ Сформулюйте цю властивість, якщо:

$$\forall a > 0, a \neq 1 \text{ і } x > 0, y > 0:$$

$$\log_a xy =$$

(Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ )

➤ Сформулюйте цю властивість, якщо:

$$\forall a > 0, a \neq 1 \text{ і } x > 0, y > 0:$$

$$\log_a \frac{x}{y} =$$

$$\log_a \frac{x}{y} =$$

(Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ )

➤ Сформулюйте цю властивість, якщо:

Якщо  $a > 0, a \neq 1$  і  $x > 0$ , то  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\log_a x^\beta =$$

(Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня  $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$ )

- Сформулюйте цю властивість, якщо:

Якщо  $a > 0, a \neq 1$  і  $x > 0$ , то  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

$$(\log_a \sqrt[\beta]{x} = \frac{1}{\beta} \log_a x)$$

$$\log_a \sqrt[\beta]{x} =$$

- Сформулюйте властивість переходу від однієї основи до іншої:

$\forall a > 0, b > 0, c > 0$  і  $a \neq 1, c \neq 1$

$$\log_a b =$$

(Логарифм додатного числа  $b$  за старою основою  $a$  дорівнює логарифму цього самого числа  $b$  за новою основою  $c$ , поділеному на логарифм старої основи  $a$  за новою основою  $c$   
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ )

- Сформулюйте наслідок 1 для формули переходу від однієї основи до іншої:

**Наслідок 1**

Якщо  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ , то:

$$\log_a b =$$

$$\left( \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \right)$$

- Сформулюйте наслідок 2 для формули переходу від однієї основи до іншої:

**Наслідок 2**

Якщо  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ , то  $\forall \beta \neq 0$ :

$$\log_{a^\beta} b =$$

$$\left( \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b \right)$$

### III. Вивчення нового матеріалу

#### • Логарифмічні рівняння

$$\left. \begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x + \log_7 x = 47 \\ \ln(4x - 2) = 1 - \ln x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Логарифмічні рівняння містять змінну} \\ \text{тільки під знаком логарифма} \end{array}$$

- Розглянемо найпростіше логарифмічне рівняння:  
 $\log_a x = b$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

- Як можемо розв'язати найпростіше логарифмічне рівняння?  
 $x = a^b$  (За означенням логарифма)

- За означенням логарифма, при будь-якому дійсному  $b$ , скільки розв'язків має це рівняння?  
 (Єдиний розв'язок, так як логарифмічна функція монотонно зростає або монотонно спадає на всій своїй області визначення а область значень логарифмічної функції – всі дійсні числа)

## • Розв'язування логарифмічних рівнянь

### 1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь

*\*(найпростіші логарифмічні рівняння можна розв'язати використовуючи означення логарифма)*

Наприклад:

$$1) \log_4(x^2 - 14x + 65) = 2$$

$$4^2 = x^2 - 14x + 65 \text{ (За означенням логарифма)}$$

$$x^2 - 14x + 65 = 16$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$(x - 7)^2 = 0$$

$$x = 7$$

$$\text{Перевірка: } \log_4(7^2 - 14 \cdot 7 + 65) = \log_4 16 = 2$$

➤ Чи може найпростіше логарифмічне рівняння мати 2 корені?  
(Так)

$$2) \log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 2x - 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ (За означенням логарифма)}$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{За теоремо Вієта} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

➤ Чи будуть отримані корені квадратного рівняння розв'язками логарифмічного рівняння?  
(Виконаємо перевірку)

Перевірка:

$$\log_{\frac{1}{9}}(2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1) == \log_{\frac{1}{9}}(3) = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(2 \cdot (2)^2 - 2 \cdot 2 - 1) == \log_{\frac{1}{9}}(3) = -\frac{1}{2}$$

➤ Чому важливо виконувати перевірку?  
(При використанні наслідків початкових рівнянь не відбувається втрата коренів початкового рівняння але можлива поява сторонніх коренів)

### Використання рівнянь-наслідків

$$\log_x(x + 2) = 2$$

$$x^2 = x + 2 \text{ (за означенням логарифма)}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

За теоремо Вієта  $\left| \begin{array}{l} x_1 = -1 \text{ (сторонній корінь, так як в основі логарифма} \\ \text{не може бути від'ємне число)} \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$

$$3) \log_{25} \left( \frac{1}{5} \log_3 \left( 2 - \log_{\frac{1}{2}} x \right) \right) = -\frac{1}{2}$$

➤ Чи буде це рівняння найпростішим логарифмічним рівнянням?  
(Так, ми можемо його розв'язати використовуючи означення логарифма)

$$\frac{1}{5} \log_3 \left( 2 - \log_{\frac{1}{2}} x \right) = 25^{-\frac{1}{2}} \text{ (За означенням логарифма)}$$

$$\log_3 \left( 2 - \log_{\frac{1}{2}} x \right) = 1 \text{ (отримали внаслідок } \cdot 5, \text{ так як } 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} \text{)}$$

$$2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 3^1 = 3 \text{ (За означенням логарифма)}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1$$

$$x = \left( \frac{1}{2} \right)^{-1} = 2 \text{ (За означенням логарифма)}$$

## 2. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

### Теорема

Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то рівняння виду  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  рівносильне будь якій із систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}, \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

\*Можливий запис в зошиті:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Big|_{a > 0, a \neq 1} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

➤ Чому варто ураховувати обидві умови ОДЗ або виконувати перевірку

$$\text{коренів } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} ?$$

\*На відміну від показникових, особливістю логарифмічних рівнянь є поява сторонніх коренів:

$$1) \log_3(x^2 - 4) = \log_3(4x - 7)$$

ОДЗ цього рівняння задається нерівностями:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 4x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ x \in \left(\frac{7}{4}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in (2; +\infty)$$

Отже, отримали:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 4x - 7 \\ x^2 - 4 > 0 \\ 4x - 7 > 0 \end{cases} \Big| x \in (2; +\infty)$$

$$x^2 - 4 = 4x - 7$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1 - \text{не задовольняє умову ОДЗ}$$

$$x_2 = 3$$

### 3. Рівняння, які зводяться до простіших за допомогою перетворень

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1$$

ОДЗ цього рівняння задається нерівностями:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-11 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 11 \end{cases} \Rightarrow x \in (11; +\infty)$$

$$\frac{1}{2} \log_6(x-2) + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему} \\ \text{про логарифм степеня} \\ \log_a \sqrt[b]{x} = \frac{1}{b} \log_a x \end{array} \right)$$

$$\log_6(x-2) + \log_6(x-11) = 2$$

(Отримали внаслідок  $\cdot 5$ )

$$\log_6 x^2 - 13x + 22 = 2$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему} \\ \text{про логарифм добутку} \\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y \end{array} \right)$$

$$x^2 - 13x + 22 = 36$$

(За означенням логарифма)

➤ Чи будуть корені цього квадратного рівняння розв'язком логарифмічного рівняння?

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = -1 - \text{не задовольняє умову ОДЗ}$$

### 4. Заміна змінних у логарифмічних рівняннях

$$\log_2^2(2x-1) + \log_2(2x-1) - 2 = 0$$

$$\text{Виконаємо заміну: } t = \log_2(2x-1)$$

➤ Чи є необхідність враховувати ОДЗ вихідного рівняння?

(Немає. Якщо отримане рівняння буде мати розв'язки  $\Rightarrow \log_2(2x-1)$  існує, тобто  $2x-1 > 0$ )

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Отже, отримали:

$$\begin{cases} \log_2(2x-1) = -2 \\ \log_2(2x-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ 2x-1 = 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{8} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

### 5. Графічний спосіб

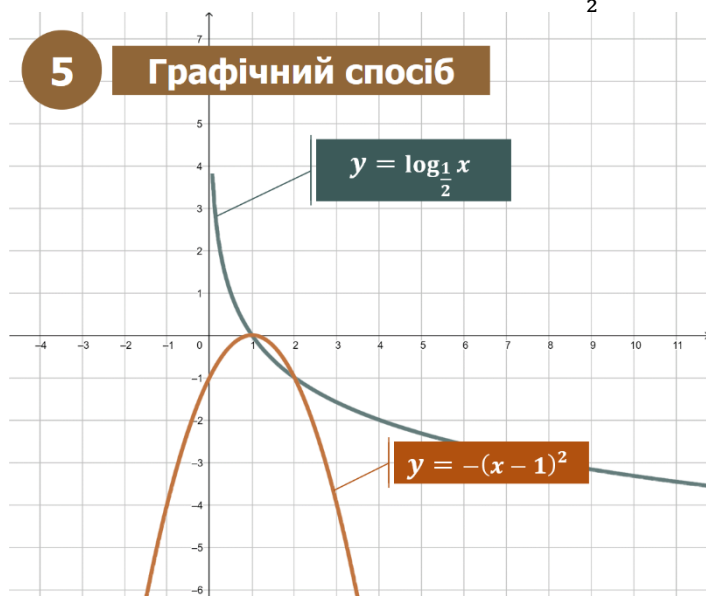
$$\log_{\frac{1}{2}} x = -x^2 + 2x - 1$$

➤ Що можемо помітити в правій частині рівняння?

$$\begin{pmatrix} -(x^2 - 2x + 1) \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{pmatrix}$$

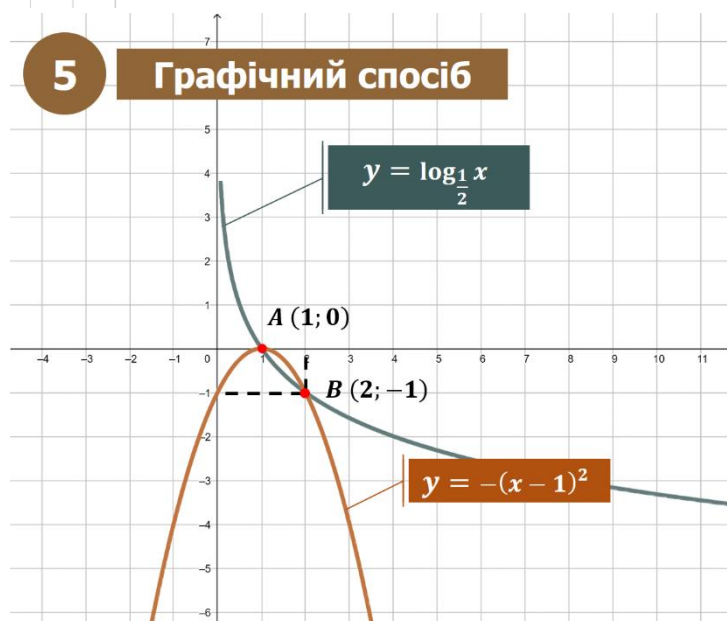
$$\log_{\frac{1}{2}} x = -(x-1)^2$$

Побудуємо графіки функцій  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  і  $y = -(x-1)^2$ :



➤ Які розв'язки має це рівняння?

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$



#### IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть рівняння:

1)  $\log_2(x - 1) = 1$

2)  $\lg(3 - 2x) = 2$

3)  $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$

Розв'язок:

1)  $\log_2(x - 1) = 1$

$x - 1 = 2^1 = 2$  (За означенням логарифма)

$x = 3$

Відповідь: 3

2)  $\lg(3 - 2x) = 2$

$3 - 2x = 10^2 = 100$  (За означенням логарифма)

$2x = -97$

$x = -48,5$

3)  $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$

$x^2 - 2x - 8 = 7^1 = 7$  (За означенням логарифма)

$x^2 - 2x - 15 = 0$

За теоремою Вієта  $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

№2

Розв'яжіть рівняння:

1)  $\log_\pi(x + 1) = \log_\pi(4x - 5)$

2)  $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$

Розв'язок:

1)  $\log_\pi(x + 1) = \log_\pi(4x - 5)$

$$\begin{cases} x + 1 = 4x - 5 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{За теоремою про рівняння виду} \\ \log_a f(x) = \log_a g(x) \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 4x - x = 1 + 5 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Відповідь: 2

2)  $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$

$$\begin{cases} 3x - 5 = x - 3 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{За теоремою про рівняння виду} \\ \log_a f(x) = \log_a g(x) \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 3x - x = 5 - 3 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x = \emptyset$$

Відповідь:  $\emptyset$ 

№3

Розв'яжіть рівняння:

1)  $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$

2)  $\log_7 \log_4(x - 2) = 0$

3)  $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$

Розв'язок:

$$1) \log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$$

$$\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6 \log_2 2$$

Так як  $6 \cdot 1 = 6$  і  $\log_2 2 = 1$

$$\log_2 \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} = 6 \log_2 2$$

Застосували теорему про логарифм частки  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$$\log_2 x \sqrt{x} = \log_2 2^6 = \log_2 64$$

Застосували теорему про логарифм степеня  $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$

$$\begin{cases} x \sqrt{x} = 64 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 64 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 64 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 4^3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} = 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} = 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 16$$

Відповідь: 16

$$2) \log_7 \log_4(x - 2) = 0$$

$$\log_4(x - 2) = 7^0 \text{ (за означенням логарифма)}$$

$$\log_4(x - 2) = 1$$

$$\begin{cases} \log_4(x - 2) = 1 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4^1 = 4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x = 6$$

Відповідь: 6

$$3) \log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$$

$$\log_6 x + \log_{6^2} x^2 + \log_{6^3} x^3 = 3 \text{ (Застосували теорему про логарифм степеня)}$$

$$\log_6 x + \frac{2}{2} \log_6 x + \frac{3}{3} \log_6 x = 3$$

$$\log_6 x + \log_6 x + \log_6 x = 3$$

$$3 \log_6 x = 3$$

$$\log_6 x = 1$$

$$x = 6^1 = 6$$

Відповідь: 6

№4

Розв'яжіть рівняння:

$$1) \lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$$

$$2) \log_{0,5}(x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5}(x - 2)$$

Розв'язок:

$$1) \lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2x + 12 \\ 2x + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 = 0 \\ 2x > -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 = 0 \\ x > -6 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \left| \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{array}$$

Відповідь: 6 і -2

$$2) \log_{0,5}(x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5}(x - 2)$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = x - 2 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x = \emptyset$$

Відповідь:  $\emptyset$

**№5**

**Розв'яжіть рівняння:**

$$1) \log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$$

$$2) \lg(x - 1) + \lg(x - 3) = \lg(1,5x - 3)$$

*Розв'язок:*

$$1) \log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$$

$$\log_{0,5}(4 - x) \cdot (x - 1) = \log_{0,5} 2 \left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему про логарифм добутку;} \\ \log_{0,5} 2 = -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} (4 - x)(x - 1) = 2 \\ 4 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 + x^2 + x - 2 = 0 \\ x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0 \\ x < 4 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

Відповідь: 2; 3

$$2) \lg(x - 1) + \lg(x - 3) = \lg(1,5x - 3)$$

$$\lg(x-1)(x-3) = \lg(1,5x-3) \quad \left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему про} \\ \text{логарифм добутку} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x-3) = 1,5x-3 \\ x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \\ 1,5x-3 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - x + 3 = 1,5x - 3 \\ x > 1 \\ x > 3 \\ x > 2 \end{array} \right. \Rightarrow x > 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 5,5x + 6 = 0 \\ x > 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 1,5 \\ x > 3 \end{array} \right. \Rightarrow x = 4$$

Відповідь: 4

№6

Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 = 0$$

$$2) \log_5 x + \log_x 5 = 2,5$$

Розв'язок:

$$1) \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 = 0$$

Виконаємо заміну:  $\log_2 x = t$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \log_2 x = -4 \\ \log_2 x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2^{-4} \\ x = 2^1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{16} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Відповідь:  $\frac{1}{16}; 2$

$$2) \log_5 x + \log_x 5 = 2,5$$

$$\text{ОДЗ} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2,5 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Використали наслідок 1 теореми про} \\ \text{перехід від однієї основи логарифма до іншої} \end{array} \right)$$

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} - 2,5 = 0$$

$$\frac{\log_5^2 x + 1 - 2,5 \log_5 x}{\log_5 x} = 0 \quad (\text{Зводимо до спільного знаменника})$$

Так як за умовою ОДЗ  $x \neq 1 \Rightarrow \log_5 x \neq 0$ , отже:

$$\log_5^2 x - 2,5 \log_5 x + 1 = 0$$

Виконаємо заміну:  $\log_5 x = t$

$$t^2 - 2,5t + 1 = 0$$

$$D = 6,25 - 4 = 2,25 = 1,5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2,5 \pm 1,5}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0,5 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = 0,5 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 5^2 \\ x = 5^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$$

Відповідь: 25;  $\sqrt{5}$

№7

**Розв'яжіть рівняння:**

$$1) \log_2(5-x) - \log_2(x-1) = 1 - \log_2(x+2)$$

Розв'язок:

$$1) \log_2(5-x) - \log_2(x-1) = 1 - \log_2(x+2)$$

$$\log_2(5-x) - \log_2(x-1) = \log_2 2 - \log_2(x+2) \quad (\text{Так як } \log_2 2 = 1)$$

$$\log_2 \frac{5-x}{x-1} = \log_2 \frac{2}{x+2} \quad (\text{Використали теорему про логарифм частки})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5-x}{x-1} = \frac{2}{x+2} \\ 5-x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (5-x)(x+2) = 2(x-1) \\ x < 5 \\ x > 1 \\ x > -2 \end{array} \right. \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 10 - x^2 - 2x = 2x - 2 \\ 1 < x < 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ 1 < x < 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ 1 < x < 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \\ 1 < x < 5 \end{array} \right. \Rightarrow x = 4$$

Відповідь: 4

## V. Підсумок уроку

- Які рівняння називають логарифмічним?
- Як розв'язати найпростіше логарифмічне рівняння?
- Скільки розв'язків має найпростіше логарифмічне рівняння?
- Як розв'язати рівняння виду  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ?
- Як розв'язувати більш складні логарифмічні рівняння? Чи можна дотримуватися якогось єдиного алгоритму?
- У чому полягає графічний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь?

## VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.32-34)

Виконати № 6.2 (1,4); 6.4; 6.6 (2); 6.8 (1); 6.10 (1,3); 6.12 (1,3); 6.16 (1)

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §6

Виконати № 6.2; 6.6; 6.10; 6.14; 6.18; 6.22; 6.26; 6.31; 6.35

Істер О.С.

Опрацювати §5 (п.5.1)  
Виконати № 5.1.1; 5.1.3; 5.1.5

Нелін Є.П.

Опрацювати §4 (Логарифмічні рівняння)  
Виконати № 153; 159; 172;

Бевз Г.П.

**Тема:** Логарифмічні нерівності

**Мета:**

- *Навчальна:* розглянути приклади логарифмічних нерівностей та найпростіших логарифмічних нерівностей, навчитися розв'язувати найпростіші та більш складні логарифмічні нерівності;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні нерівності різними способами;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

### Хід уроку

#### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

#### II. Актуалізація опорних знань

#### III. Вивчення нового матеріалу

$$\left. \begin{array}{l} \log_4 x > -3 \\ \log_5(2x - 3) = \log_5(x + 7) \\ \log_2(x^2 + 4x + 3) = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Логарифмічні нерівності містять змінну} \\ \text{тільки під знаком логарифма} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Найпростіші логарифмічні нерівності} \end{array} \left| \begin{array}{l} \log_a x > b, \log_a x < b, \\ \log_a x \geq b, \log_a x \leq b \\ (a > 0, a \neq 1, b - \text{число}) \end{array} \right.$$

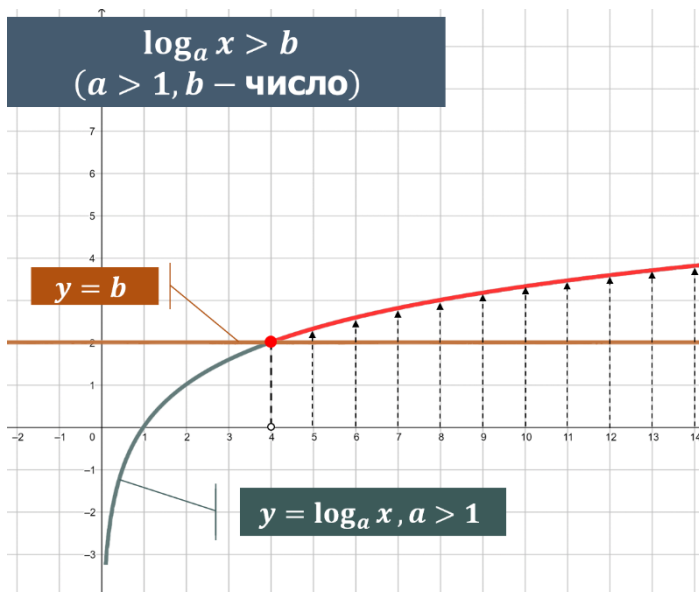
• Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей

➤ Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність:

$$\log_a x > b, a > 1, b - \text{число}$$

Нехай  $b = \log_a a^b \Rightarrow \log_a x > \log_a a^b$ .

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, отже:

$$\log_a x > \log_a a^b \Rightarrow x > a^b$$

*Знак нерівності не змінюється*

➤ Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$$\left. \begin{array}{l} a^b > 0 \\ \forall a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R} \\ x > a^b \end{array} \right| \Rightarrow x > 0 \quad \begin{array}{l} \text{Отже, умова ОДЗ} \\ \text{виконується} \end{array}$$

➤ Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

$$\log_4 x > 2$$

$$\log_4 x > \log_4 4^2 \quad (\text{Так як } 2 = \log_4 4^2)$$

$$x > 4^2 \quad (\text{Так як нерівність } \log_4 x > \log_4 4^2 \text{ рівносильна нерівності } x > 4^2)$$

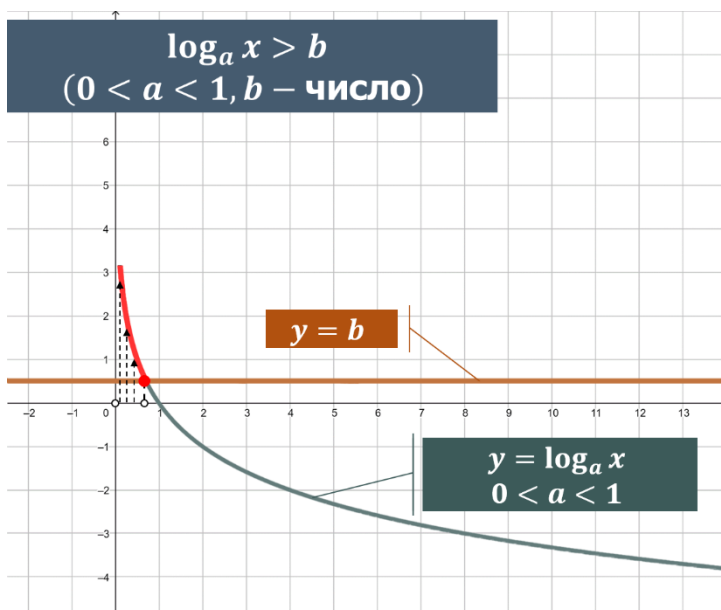
$$x > 16$$

$$\text{Відповідь: } x \in (16; +\infty)$$

Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність  $\log_a x > b$  у випадку  $0 < a < 1, b - \text{число}$ .

Нехай  $b = \log_a a^b \Rightarrow \log_a x > \log_a a^b$ .

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, отже:

$$\log_a x > \log_a a^b \Rightarrow x < a^b$$

Знак нерівності змінюється на протилежний

➤ Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$x < a^b$   
 ОДЗ:  $x > 0$   $\Rightarrow 0 < x < a^b$  *Отже, якщо в отриманій нерівності немає гарантії, що  $x > 0$  необхідно враховувати ОДЗ*

➤ Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

$$\log_{0,4} x \geq 2$$

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 0,16 \text{ (Так як } 2 = \log_{0,4} 0,16)$$

Отримана нерівність рівносильна системі  $\begin{cases} x \leq 0,16 \\ x > 0 \end{cases}$

Відповідь:  $x \in (0; 0,16]$

Розв'язування нерівностей виду  $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \end{cases}$

### Теорема

Якщо  $a > 1$ , то нерівність  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  рівносильна системі  $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Якщо  $0 < a < 1$ , то нерівність  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  рівносильна системі  $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$



|                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$     |
| $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ |

## IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть нерівність:

1)  $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$

2)  $\log_8(2x - 3) > \log_8 7$

3)  $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$

Розв'язок:

1)  $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$

$x > 9$

Відповідь:  $x \in (9; +\infty)$

2)  $\log_8(2x - 3) > \log_8 7$

$$\begin{cases} 2x - 3 > 7 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \\ 2x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x > 5$$

Відповідь:  $x \in (5; +\infty)$

3)  $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$

$$\begin{cases} x < 14 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь:  $x \in (0; 14)$

№2

Розв'яжіть нерівність:

1)  $\log_7 x > 2$

2)  $\log_{0,6}(x - 2) < 2$

3)  $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$

Розв'язок:

1)  $\log_7 x > 2$

$\log_7 x > \log_7 49$

$x > 49$

Відповідь:  $x \in (49; +\infty)$

2)  $\log_{0,6}(x - 2) < 2$

$\log_{0,6}(x - 2) < \log_{0,6} 0,36$

$$\begin{cases} x - 2 > 0,36 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2,36 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2,36$$

Відповідь:  $x \in (2,36; +\infty)$

3)  $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$

$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$

$x \geq \frac{1}{32}$

Відповідь:  $x \in \left[\frac{1}{32}; +\infty\right)$

**Скільки цілих розв'язків має нерівність:**

$$\log_{0,25}(3x - 5) > -3$$

*Розв'язок:*

$$\log_{0,25}(3x - 5) > -3$$

$$\log_{0,25}(3x - 5) > \log_{0,25} 64$$

$$\begin{cases} 3x - 5 < 64 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 69 \\ 3x > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 23 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$$

*Відповідь:* нерівність має 21 цілий розв'язок

## V. Підсумок уроку

- Які нерівності називають логарифмічними?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність?

Наведіть приклад.

- Як розв'язати нерівність типу  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , якщо  $a > 1$ ?
- Як розв'язати нерівність типу  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , якщо  $0 < a < 1$ ?

## VI. Домашнє завдання

|                                                                                                                    |              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Опрацювати §1 (ст.36-37)<br>Виконати № 7.2 (1,4); 7.4 (1,4); 7.6 (6); 7.8 (1);<br>7.10 (1,2); 7.12 (1,3); 7.14 (4) | Мерзляк А.Г. |
| Опрацювати §7<br>Виконати № 7.2 (1,2); 7.6 (1,2); 7.10 (1); 7.14 (1);<br>7.24; 7.28                                | Істер О.С.   |
| Опрацювати §5 (п.5.2)<br>Виконати № 5.2.1 (1,3); 5.2.3 (1,4); 5.2.5 (1,3);                                         | Нелін Є.П.   |
| Опрацювати §4<br>Виконати № 163 (а,в); №178 (а); 183 (а,г)                                                         | Бевз Г.П.    |

**Тема:** Контрольна робота №1 за темою «Показникова та логарифмічна функція»

**Мета:**

- *Навчальна:* перевірити рівень знань учнів, передбачений програмою з цього тематичного блоку, і вміння застосовувати отримані знання під час розв'язування задач;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння виконувати завдання застосовуючи набуті знання;

- *Виховна*: виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

**Компетенції (уміння вчитися впродовж життя):**

- *Загальнонавчальні*: спроможність організовувати власну діяльність під час виконання завдань;

**Тип уроку:** контроль і корекція знань, умінь та навичок;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, картки із завданнями та розв'язками контрольної роботи, мультимедійне обладнання;

### Хід уроку

#### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу (*пояснити учням вимоги до оформлення контрольної роботи, правила оформлення та розподіл часу на виконання*);

#### II. Виконання контрольної роботи

##### Варіант 1

*Початковий рівень*

1. Дано функцію  $f(x) = 0,4^x + 1$ , побудуйте її графік та знайдіть:

- 1) Область визначення функції (1 б)
- 2) Проміжки зростання або спадання функції (1 б)
- 3) Область значень функції (1 б)

*Середній рівень*

2. (3 б) Розв'яжіть рівняння і нерівність:

- 1)  $4^{x+3} + 4^x = 260$
- 2)  $\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 3$
- 3)  $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 5) > -1$

*Достатній рівень*

3. (1,5 б) Знайдіть область визначення функції

$$f(x) = 7 \sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3}$$

4. (1,5 б) Розв'яжіть рівняння:

$$\log_5 x^2 - \log_x 5 = 1$$

*Високий рівень*

5. (3 б) Знайдіть найменший цілий додатний розв'язок нерівності:

$$\frac{(5\sqrt{5})^x - \frac{1}{5}}{x - 4} > 0$$

## Варіант 2

*Початковий рівень*

1. Дано функцію  $f(x) = \log_3(x + 2)$ , побудуйте її графік та знайдіть:

- 1) Область визначення функції (1 б)
- 2) Проміжки зростання або спадання функції (1 б)
- 3) Область значень функції (1 б)

*Середній рівень*

2. (3 б) Розв'яжіть рівняння і нерівність:

- 1)  $5^{x+2} - 5^x = 120$
- 2)  $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(2x - 9) = 2$
- 3)  $7^{2-3x} < \frac{1}{49}$

*Достатній рівень*

3. (1,5 б) Знайдіть область визначення функції

$$f(x) = 5\sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x - 2}$$

4. (1,5 б) Розв'яжіть рівняння:

$$\log_2 x^4 = \log_{0,25} x + \log_3 3\sqrt{3}$$

*Високий рівень*

5. (3 б) Знайдіть найбільший цілий додатний розв'язок нерівності:

$$\frac{(6\sqrt{6})^x - 36}{x - 5} < 0$$

### III. Підсумок уроку

### IV. Домашнє завдання

|                |              |
|----------------|--------------|
| Повторити §1   | Мерзляк А.Г. |
| Повторити §1-7 | Істер О.С.   |
| Повторити §1-5 | Нелін Є.П.   |
| Повторити §1-4 | Бевз Г.П.    |

## Висновки

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, а саме логічного мислення, математичної культури, формувати вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження. Математика допомагає у вивченні фізики, біології, техніки та ін. Тому її викладання потрібно піднести до вимог сучасної науки.

Оскільки наука стрімко іде вперед, то разом із нею мають вдосконалюватися методичні системи, які б максимально враховували індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяли їх всебічному розвитку, тобто забезпечували диференціальний підхід організації навчально-виховного процесу.

Вивчення показникової та логарифмічної функцій, як одного з основних розділів алгебри і початків аналізу також повинно удосконалюватися.

У процесі дослідження і вивчення науково-методичної літератури, проведення експериментального дослідження ми прийшли до висновків.

Важливе завдання процесу вивчення показникової і логарифмічної функцій в школі полягає в тому, щоб:

- 1) домогтися глибокого і міцного засвоєння учнями теоретичних знань: показникових і логарифмічних понять, тверджень про їхні властивості (аксіоми, теореми), правил, законів;
- 2) сформувати навички й уміння застосування теоретичних знань на практиці і оволодіння способами творчої діяльності;
- 3) досягти глибокого усвідомлення учнями світоглядних і морально-етичних ідей.

Щоб знання учнів з теми «Показникова та логарифмічна функції» були справді дійовими, щоб вони змогли набути в школі міцних знань та практичних умінь, необхідно:

1. Спланувати викладання теми так, щоб уникнути відірваності окремих її розділів і добитись логічної послідовності та взаємозв'язку між ними.
2. При вивченні цього розділу з'ясовувати учням практичне його

значення і, поряд з розв'язуванням прикладів, розв'язувати і практичні задачі на застосування формул цього розділу.

3. Теоретичні висновки, формули ілюструвати прикладами та задачами з геометрії, фізики та інших дисциплін.

При вивченні даної теми в учнів формується:

- здатність адаптуватися до нових умов;
- уміння аналізувати ситуацію;
- здатність застосовувати набуті знання, вміння і навички;
- інтерес до геометрії та алгебри;
- вміння робити правильні висновки;
- узагальнюються і систематизуються знання учнів про функції.

Отже, сучасна школа орієнтована на диференційований підхід до організації навчання продиктована освітньою реформою є, на нашу думку, доцільною і необхідною, що вимагає створення новітніх методичних розробок і написання сучасних підручників, які б найбільшою мірою відповідали сучасним принципам організації навчально-виховного процесу в школі.

На закінчення відзначимо, що дана тема є актуальною. Матеріал, який подано у роботі, може бути використаний вчителями математики та студентами для підготовки до проведення занять з математики, а також для дослідження методики навчання показникових і логарифмічних функцій в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу.

Відповідно до розробленої нами методики вчителям математики можна дати такі рекомендації:

1. Перед початком вивчення нової теми обов'язково проводити актуалізацію опорних знань, що допоможе вчителям у поясненні матеріалу, а учні в свою чергу згадають відомості, які їм допоможуть зрозуміти новий матеріал.

2. При поясненні нового матеріалу необхідно обов'язково залучати учнів до діалогу. Це допоможе вчителю зосередити їх на роботі, а учні краще зрозуміють і засвоять новий матеріал.

Алгебра для учнів загальноосвітніх шкіл є обов'язковою дисципліною. Вивчення алгебри сприяє формуванню наукового стилю мислення та творчих здібностей учнів, розвитку в учнів раціонального мислення з характерними для нього такими рисами, як обґрунтованість, критичність, алгоритмічність; розвитку уяви, інтуїції, які є обов'язковою творчої діяльності особистості. Одне із завдань сьогодення – покращення математичної підготовки учнів середніх шкіл, що є актуальним у період реформування загальної середньої освіти і передбачає реалізацію принципу гуманізації освіти, методом переорієнтації процесу навчання інформативних повідомлень на розвиток особистості учня. В основу модернізації традиційної системи навчання має бути покладений індивідуально- диференціальний, особистісно-орієнтований підхід до навчання.

У зв'язку з впровадженням нових критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів, в основу системи навчання був покладений рівневий підхід і технологія рівневої диференціації як сукупність форм і методів навчання, що враховують індивідуальні особливості учнів, його потреби та інтереси.

Розв'язання задачі загальної освіти значною мірою залежить від створення і використання нових методичних систем, які б максимально враховували індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяли їх всебічному розвитку, тобто забезпечували диференціальний підхід організації навчально-виховного процесу.

Аналогічно тому, як учень не може творчо оволодіти знаннями поза активною розумовою працею, так і не може бути повноцінного розвиваючого функціонування проблемної ситуації поза пошуково-діалогічною діяльністю учня. У зв'язку з цим особливої ваги набувають такі слова В.О. Сухомлинського: «Одним з небезпечних джерел морального інфантилізму є те, що знання беруться в готовому вигляді а основна розумова діяльність при цьому – заучування. Запобігання цій небезпеці – в добуванні знань. Навчання стає працею за тієї умови, коли учень самотійно добуває знання».

Основний шлях включення учнів у творчу навчальну працю проходить через застосування методичних ситуацій, причому зростаючої трудності,

масштабності і діалогічності. Це водночас і реальний спосіб оптимізації навчально-виховного процесу в комплексі його основних функцій – освітні, розвиваючі, виховуючі, які в цьому разі нероздільно поєднуються між собою.

Запропонована методика дозволяє вчителю здійснювати навчання учнів алгебри і допомагає той спосіб організації навчального процесу, який оптимальним для учнів даного класу, школи.

Проведена експериментальна перевірка розробленої методики свідчить про існування тісного зв'язку між застосуванням методу до пояснення теоретичного матеріалу та розв'язання задач і досягнення учнями відповідного рівня знань. Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методичної системи в навчальний процес.

Отже, сучасна школа орієнтована на диференціальний підхід до організації, навчання продиктована освітньою реформою, є на нашу думку, доцільною і необхідною та вимагає створення новітніх методичних розробок і написання сучасних підручників, які б найбільшою мірою відповідали сучасним принципам організації навчально-виховного процесу в школі.

### Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Математика. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту /Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2010. – 152 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики /Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
3. Бурда М.І. Математика. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту /М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2011. – 290 с.
4. Гадеєв В. З історії шкільного підручника // Математика в школі, 2003. — №5, с. 51-54.
5. Зайченко І.В. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих пед. навч. закладів /І.В. Зайченко. – К.: Освіта України, 2006. – 528 с.
6. Калашніков І. Методичні вимоги до розвитку творчого мислення при вивченні функції в основній школі /І. Калашніков //Математика в школі. – 2002. – № 5. – с. 30-34.
7. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої школи //Математика, 2000. – № 6. – с. 2-6.
8. Мерзляк А.Г., Алгебра 11 клас (академічний і профільний рівні). /А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір - Х.: Гімназія, 2011 — 432с.
9. Михайловський В.І. Практикум з розв'язування задач з математики /В.І. Михайловський. – К.: Вища школа, 1975. – 427 с.
10. М'ясоїд П. Л. Загальна педагогіка: навчальний посібник /П.Л. М'ясоїд. – К.: Вища школа, 2001, – 487с.
11. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навання: Наук.-метод. посібник /О.І. Пометун, Л. В. Пироженко. – К: Видавництво А.С.К., 2003. – 212с.
12. Слєпкань З.І. Методика навчання математики /З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582с.

13. Стельмахович М. Г. Українська народна педагогіка. Навчально- методичний посібник /М. Г. Стельмахович. – К.: ІЗММ, 1997. – 232с.
14. Степанов О. М. Основи психології та педагогіки. Навчально- методичний посібник /О. М. Степанов, М. М. Фіцула. – К.: Академвидав, 2003. – 504с.
15. Сухомлинський В.О. Проблеми виховання всебічно розвиненої особистості /В.О Сухомлинський //Вибр. твори: У 5 т. – Т. 1. – с.89.
16. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів /М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-еко, 2001. - 656 с.
17. Шкіль М. І. Алгебра та початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. Освіти /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара - К.: Освіта, 2003. - 311с.