

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

№ 1

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ОБЛІКУ АНАЛІЗУ ТА АУДИТУ

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

№ 1

Ірпінь
2021

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54
С 88

Рекомендовано до друку
Вченою радою ННІ обліку аналізу та аудиту

Редакційна колегія: *М. М. Семко,* д-р фіз.-мат. наук, професор (голов. ред); *О. Ю. Бащук,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *Л. В. Скасків,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. Б. Чернобай,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. А. Ярова,* канд. фіз.-мат. наук, доцент.

С 88 **Студентські фізико-математичні записки :** збірник наукових праць. – Ірпінь : Університет ДФС України, 2021. – № 1. – 82 с.

Збірник складається з наукових робіт магістрів кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України, присвячених сучасним проблемам математики та методичним принципам її викладання.

Для студентів математичних спеціальностей.

Матеріали розміщено у авторській редакції.
Відповідальність за зміст матеріалів, їх відповідність вимогам чинного правопису і достовірність фактів та статистичних даних несуть автори та їх наукові керівники.

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54

© ННІ обліку, аналізу та аудиту, 2021
© Університет ДФС України, 2021

М. О. Скорик,
магістрантка спеціальності «Математика»
Науковий керівник:
М. М. Семко,
доктор фізико-математичних наук, професор
(Університет ДФС України, м. Ірпінь)

ПРО ОДНУ ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ НЕПЕРІОДИЧНИХ МЕТАГАМІЛЬТОНОВИХ ГРУП

Анотація. *Метагамільтоновими називаються групи, всі неабелеві підгрупи яких нормальні. В даній роботі вивчаються розв'язні неперіодичні неабелеві групи, у яких нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи (H(I)-групи). Доведено, що H(I)-група метагамільтонова.*

Ключові слова: *метагамільтонова група, нормальна підгрупа, неперіодична неабелева підгрупи, дедекіндова група, розв'язна група.*

Annotation. *Metahamiltonian groups are all non-Abelian subgroups of which are normal. In this paper, we study solvable non-periodic non-Abelian groups in which normal non-periodic non-Abelian subgroups (H (I)-groups). It is proved that the H (I)-group is metagamiltonian.*

Keywords: *metagamiltonian group, normal subgroup, non-periodic non-Abelian subgroup, Dedekind group, solvable group.*

Починаючи з класичних робіт Р. Дедекінда [1] та Р. Бера [2], у яких описані дедекіндові групи (групи, всі підгрупи яких нормальні), почалося вивчення довільних груп G, у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності. Цей напрямок є одним з важливих в теорії груп. Його головною метою є опис узагальнень дедекіндових груп, який здійснюється вивченням груп з малими системами ненормальних підгруп. Якщо в групі всі циклічні підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Тому виникає питання про будову груп, всі

нециклічні підгрупи яких нормальні, тобто система всіх ненормальних підгруп складається тільки з циклічних підгруп. Це питання було поставлено С. М. Черніковим [3]. Розв'язанню цього питання присвячена робота Ф. М. Лимана [4]. У цьому ряду слід також згадати метагамільтонові групи, вивчення яких потребувало досить великого проміжку часу, хоча про них не можна сказати, що система їх ненормальних підгруп буде малою. Але це можна стверджувати, якщо глянути на опис цих груп. Метагамільтоновими називаються групи, всі неабелеві підгрупи яких нормальні. Їх вивчення розпочали М. Ф. Сєсєкін та Г. М. Романіс [5–7]. Воно було продовжено В. Т. Нагребецьким [8] та О. О. Махньовим [9] і завершено у циклі робіт М. Ф. Кузенного та М. М. Семка [10–20].

В даній роботі вивчаються розв'язні неперіодичні неабелеві групи, у яких нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи (коротко H(I)-групи). Доведено, що H(I)-група метагамільтонова. Зауважимо, що опис таких груп одержано в роботі [14].

Лема 1. *Нехай G – H(I)-група. Якщо G містить таку нормальну неперіодичну підгрупу H, що $T(H)$ існує і скінченна, то G – метагамільтонова група.*

Доведення. Покажемо спочатку, що комутант G' групи G не містить елементів нескінченного порядку. Нехай G' містить елементи нескінченного порядку. Розглянемо підгрупу $G'\langle a\rangle$, де a – довільний елемент скінченного порядку із G. Покажемо, що група $G'\langle a\rangle$ абелева. Дійсно, в неабелевій групі $G'\langle a\rangle$ завдяки [3] знайдеться неперіодична неабелева підгрупа H як завгодно великого скінченного індексу в ній. Тому підгрупу H можна вибрати так, що $[G' : (G' \cap H)] > 2$. За означенням H(I)-груп $H \lhd G$. Зрозуміло, що фактор-група G/H дедекіндова і, значить, її комутант в силу [1, 2] має порядок не більше 2. Оскільки комутант групи G/H співпадає із $G'H/H$, то в силу ізоморфізму $G'H/H \cong G'/G' \cap H$ маємо, що індекс $[G' : (G' \cap H)] \leq 2$. Одержали суперечність, яка показує, що група $G'\langle a\rangle$ абелева. Завдяки довільності елемента a це означає,

що всі елементи скінченного порядку групи G містяться в централізаторі $C_G\ (G')$. Оскільки централізатор $C_G\ (G')$ є розширенням своєї центральної підгрупи при допомозі абелевої групи, то $C_G\ (G')$ – нільпотентна група і тому всі елементи скінченного порядку складають в ній її характеристичну підгрупу $T(G)$.

Розглянемо далі фактор-групу $G/\ T(G)$. Покажемо що вона абелева. Дійсно, нехай $B/\ T(G)$ – довільна неабелева підгрупа із $G/\ T(G)$. Оскільки всі елементи скінченного порядку із G містяться в $T(G)$ і група G – неперіодична, то $G/T(G)$ і $B/\ T(G)$ – групи без скруту. За означенням $H(I)$-груп $B/\ T(G) \lhd G/\ T(G)$ і тому в групі $G/\ T(G)$ нормальні всі неабелеві підгрупи. Відомо (див., наприклад, [3]), що метагамільтонові групи без скруту абелеві і тому $G/\ T(G)$ – абелева група. Звідси випливає співвідношення $T(G) \geq G'$, що завдяки періодичності підгрупи $T(G)$ суперечить вихідному припущенню про G'. Отже, G' – періодична група.

Нехай підгрупа H міститься в центрі $Z(G)$ групи G. Тоді в H існує нескінченна циклічна підгрупа $<a>$, яка нормальна в G. Оскільки G' – періодична група, то за означенням $H(I)$-груп фактор-група $G/ <a>$ метагамільтонова. Тоді комутант $D/ <a>$ групи $G/ <a>$ скінченний [3]. Оскільки:

$$D/ <a> \cong G'<a>/ <a> \cong G',$$

то G' – скінченна група.

Нехай тепер підгрупа H не міститься в центрі $Z(G)$ групи G. Користуючись цим, легко переконатися, що в групі G можна вибрати неабелеву підгрупу $A_1 = <x, y>$, де x – елемент нескінченного порядку із H. За означенням $H(I)$-груп $A_1 \lhd G$. Нехай B централізатор A_1' в A_1. Легко показати, що перетин $H \cap B$ нескінченний. За означенням $H(I)$-груп фактор-група G/ B метагамільтонова. Позначимо через D/B комутант групи G/ B. Завдяки [3] $/D/B/ < \infty$. Оскільки $D = G'B$, то $D/B \cong G'/ G' \cap B$ і, значить, $[G' : (G' \cap B)] < \infty$. Легко показати, що перетин

$G' \cap B$ скінченний і тому із співвідношення $[G' : (G' \cap B)] < \infty$ випливає скінченність G'.

Отже, G' – скінченна група і тому G – FC-група. Нехай M – довільна періодична неабелева підгрупа і $<a>$ – нескінченна циклічна підгрупа із центу $Z(G)$ групи G (див., наприклад, [3]). Розглянемо спадний ланцюг підгруп:

$$B_i = < a^{2^i} > \times M, \text{ де } i = 0, 1, 2, \ldots .$$

За означенням $H(I)$-груп підгрупи B_i нормальні в G і оскільки:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = M, \text{ то } M \lhd G.$$

Отже, в G нормальні всі неабелеві підгрупи і, значить, G – метагамільтонова група. Лема доведена.

Наслідок 2. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо G містить неперіодичну неабелеву нільпотентну підгрупу D, яка має скінченну множину твірних елементів, то G – метагамільтонова група.*

Доведення. Завдяки [3] і із локальної скінченності розв'язних періодичних груп одержуємо, що $/T(D)/ < \infty$. Оскільки G – $H(I)$-група, то $D \lhd G$. Тепер за лемою 1 G – метагамільтонова група. Наслідок доведений.

Наслідок 3. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо $Z(G) \geq G'$, то G – метагамільтонова група.*

Доведення майже очевидне.

Лема 4. *Нехай G – $H(I)$-група, N – неабелева нормальна підгрупа із G. Тоді фактор-група G/N – дедекіндова група.*

Доведення. Нехай x – елемент нескінченного порядку із G. Оскільки G – $H(I)$-група, то $N< x > \lhd G$ і тому підгрупа $N< x >/ N$ нормальна в G/N. Нехай далі $<a>$ – довільна циклічна підгрупа із G. Якщо підгрупа $<a>$ нескінченна, то по доведеному вище підгрупа $N< a >/ N$ нормальна в G/N. Нехай тепер $<a>$ – скінченна циклічна підгрупа із G. По доведеному

вище, підгрупа $N< x^{2^n} ><a>$ *(n = 1, 2, . . .)* нормальна в *G/N*. Оскільки перетин цих підгруп, очевидно, співпадає з підгрупою $N< a >/ N$, то $N< a >/ N \lhd G/N$. Завдяки довільності підгрупи $<a>$ звідси випливає, що *G/N* – дедекіндова група. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай неабелева група* $G = <a, b>$ *представлена у вигляді* $G = A< b >$, *де A – абелева нормальна в G підгрупа без скруту, яка містить елемент a. Тоді група G не є H(I)-групою.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $A \cap < b > = 1$. Тоді легко бачити, що *G'* – абелева група. Оскільки група *G* розв'язна і має скінченну множину твірних елементів, то вона фінітно апроксимуєма. Користуючись цією властивістю групи *G*, легко впевнитися, що в *G'* міститься нормальна підгрупа *R* групи *G* як завгодно великого скінченного індексу в *G'*.

Нехай $[G' : R] >2$. Розглянемо підгрупу $R< b >$. Якщо ця підгрупа неабелева і оскільки *G* є *H(I)*-групою, то $R< b > \lhd G$ і фактор-група $G/ R< b >$ абелева або гамільтонова. Проте абелевою групою вона не може бути, оскільки, очевидно, $R< b >$ не містить *G'* і, значить, гамільтонова. Но тоді її комутант $D/ R< b >$ має порядок 2 і тому:

$$/D/ R< b >/ = [G' : (G' \cap R< b >)] = 2.$$

Остання рівність суперечить співвідношенням $[G' : R] >2$ і $G' \cap < b > = 1$. Отримана суперечність показує, що $R< b >$ – абелева група.

Нехай *x* – довільний елемент групи *G'* і нехай $b^{-1}xb = y$. Підгрупа *R* має скінченний індекс в *G'* і тому існує таке натуральне число *n*, що $x^n \in R$. Оскільки підгрупа $R< b >$ – абелева, то $b^{-1} x^n b = x^n$. З іншої сторони, використовуючи співвідношення $b^{-1}xb = y$ одержимо, що $b^{-1} x^n b = y^n$ і тому $x^n = y^n$. Оскільки $x, y \in G'$ і *G'* – абелева група без скруту, то із співвідношення $x^n = y^n$ випливає, що $x = y$. Таким чином,

$Z(G) \geq G'$. Но тоді завдяки наслідку 3 G – метагамільтонова група і тому в силу [14] $/G'/ < \infty$. Проте, як було зазначено вище, G' – абелева група без скруту. Отримана суперечність показує, що у цьому випадку G не є $H(I)$-групою.

Розглянемо далі випадок, коли $A \cap < b > = < c >$, $c \neq 1$. Позначимо через C ізолятор елемента c в абелевій групі A. Якщо $C = A$, то фактор-група G/C абелева. Нехай $C \neq A$. Тоді якщо G є $H(I)$-групою і G/C – неабелева група, то G/C –$H(I)$-група і $G/C = A/C \lambda < bC >$, де A/C – абелева нормальна підгрупа без скруту. Ми знаходимося в умовах попереднього випадку і тому, очевидно, група G/C абелева.

Покажемо, що $Z(G) \geq C$. Дійсно, елемент b індукує в групі C автоморфізм скінченного порядку. Отже, для довільного елемента x із C виконується співвідношення $b^{-1} x b = x^m$, де m рівне 1 або – 1.Так як група C локально циклічна, то знайдуться такі цілі числа t і r, що $x^t = c^r$. Трансформуючи це співвідношення елементом b одержимо, що $x^{tm} = c^r = x^t$. Звідси $m = 1$. Таким чином, $C \leq Z(G)$.

Нехай x – довільний елемент із A і нехай $[b, x] = d$ ($d \in C$). Очевидно, існує таке натуральне число n, що $b^n \in C$. Оскільки $Z(G) \geq C$, то $x^{-1} b^n x = b^n$. Але тоді $b^n = b^n d^n$ і, значить, $d^n = 1$. З огляду на те, що порядок елемента d нескінченний, співвідношення $d^n = 1$ можливе лише в тому випадку, якщо $d = 1$. Таким чином, $[b, x] = 1$. Звідси випливає, що група G абелева. Суперечність. Отже і в даному випадку G не є $H(I)$-групою. Лема доведена.

Лема 6. *Нехай група G – $H(I)$-група, N– абелева нормальна підгрупа без скруту із G. Тоді $Z(G) \geq N$.*

Доведення. Нехай g – довільний елемент групи G, h – довільний елемент із N. Група $B = < g, h >$ можна представити у вигляді добутку $B = A< g >$, де A – абелева нормальна в G підгрупа без скруту, яка містить елемент h. Очевидно, що B не є $H(I)$-групою, якщо підгрупа B неабелева. Застосовуючи лему 4

одержуємо, що група B абелева і, значить, $[g, h] = 1$. Але тоді $Z(G) \geq N$. Лема доведена.

Лема 7. *Нехай група G – $H(I)$-група. Тоді комутант G' групи G не може бути абелевою групою без скруту.*

Доведення. Припустимо, що G' – абелева група без скруту. При цьому припущенні завдяки лемі 5 $Z(G) \geq G'$. Але тоді за наслідком 3 G – метагамільтонова група і тому $/G'/ < \infty$[14], що неможливо. Одержана суперечність і доводить лему. Лема доведена.

Лема 8. *Нехай G – $H(I)$-група. Тоді комутант G' групи G не може бути неперіодичною неабелевою групою.*

Доведення. Припустимо, що G'– неперіодична неабелева група. Тоді в неабелевій групі G' завдяки [3] знайдеться неперіодична неабелева підгрупа H як завгодно великого скінченного індексу в ній. Тому підгрупу H можна вибрати так, що $[G' : (G' \cap H)] > 2$. За означенням $H(I)$-груп $H \lhd G$. За лемою 4 фактор-група G/H дедекіндова і, значить, її комутант має порядок не більше 2. Оскільки комутант групи G/H співпадає з $G'H/H$, то в силу ізоморфізму $G'H/H \cong G'/G' \cap H$ маємо, що індекс $[G' : (G' \cap H)] \leq 2$. Одержали суперечність, яка показує, що група G' не може бути неперіодичною неабелевою групою. Лема доведена.

Наслідок 9. *Нехай G – $H(I)$-група. Тоді комутант G' групи G є періодичною групою.*

Доведення. Якщо комутант G' містить елементи нескінченного порядку, то завдяки лемі 8 він абелевий. Ясно, що комутант $G'/T(G')$ групи $G/T(G')$ є абелевою групою без скруту. Оскільки фактор-група $G/T(G')$ є $H(I)$-групою, то завдяки лемі 6 одержуємо суперечність. Отже, комутант G' групи G є періодичною групою. Наслідок доведений.

Лема 10. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо $Z(G) \geq G'$*, то *G' – скінченна група.*

Доведення. Дійсно, із наслідку 3 випливає, що G – метагамільтонова група. Твердження леми тепер слідує із [14]. Лема доведена.

Наслідок 11. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо комутант G' групи G нескінченний, то існують елементи нескінченного порядку групи G , які не належать $C_G(G')$.*

Наслідок легко отримати завдяки лемі 10.

Лема 12. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо комутант G' групи G є нескінченною абелевою групою, то порядки його елементів обмежені в сукупності.*

Доведення. Нехай підгрупа G' непримарна.Тоді $G' = H \times D$, де H – її силовська p-підгрупа з $p \neq 2$, D – доповнення підгрупи в G'. Завдяки наслідку 10 в групі G існує елемент x нескінченного порядку, який неналежить централізатору одній із підгруп H або D, наприклад, $C_G(H)$. У цьому випадку $H\langle x \rangle \lhd G$. Так як $H\langle x \rangle$ не містить G', то завдяки лемі 4 фактор-група $G/H\langle x \rangle$ гамільтонова. Комутант $R/H\langle x \rangle$ групи $G/H\langle x \rangle$ має порядок 2. Але тоді із очевидних співвідношень $G' \leq R$ і $H\langle x \rangle \not\lhd G'$ випливає, що $R = G'H\langle x \rangle$. Користуючись далі співвідношенням $G/D = H \times D$ одержимо, що $R = D\,H\langle x \rangle$ і $D \cap H\langle x \rangle = 1$. Звідси випливає, що порядок фактор-групи $R/H\langle x \rangle$ співпадає із порядком підгрупи D і, значить, $|D| = 2$.Тоді комутант групи G/D є нескінченною примарною абелевою групою G'/D. Звідси випливає, зокрема, що група G/D неабелева. Але тоді G/D – $H(I)$-група. Таким чином, доведення леми зводиться до розгляду випадку, коли комутант групи G, яка задовольняє умовам леми, є нескінченною примарною абелевою групою. В подальшому ми це і будемо припускати.

Допустимо, що група G' містить елементи як завгодно великих порядків. Тоді, очевидно, $G' = U_{k=1}^{\infty} G_k$, де $G_k = \omega_k(G')$. Завдяки наслідку 10 в групі G існує такий елемент a_1

нескінченного порядку, що $a_1 \notin C_G(G')$. Але тоді для деякого n $a_1 \notin C_G(G_n)$ і тому неабелева підгрупа $G_n < a_1 >$ нормальна в G. Так як $G_n < a_1 >$ не містить G', то завдяки лемі 4 фактор-група $G/ G_n < a_1 >$ гамільтонова і тому комутант $R/ G_n < a_1 >$ має порядок 2. Оскільки підгрупа R містить G', то звідси випливає, що порядки елементів із G' обмежені в сукупності всупереч припущенням. Лема доведена.

Лема 13. *Нехай G – $H(I)$-група. Якщо комутант G' групи G є абелевою групою, то G' – скінченна група.*

Доведення. Припустимо, що комутант G' групи G є нескінченною групою. При доведенні леми 11 було показано, що можна обмежитися випадком примарної групи G', порядки елементів яких обмежені в сукупності. Позначимо через $G_k = \omega_k(G')$. Тоді для деякого натурального числа s існує підгрупа G_s така, що фактор-група G/ G_s нескінченна, а фактор-група G/ G_{s+1} скінченна. Так як G/ G_s – $H(I)$-група, то доведення леми зводиться до розгляду випадку, коли максимальна елементарна абелева підгрупа U із G' є нескінченною групою, а фактор-група G/ U – скінченна група.

Легко показати, що $Z(G) \geq U$. Застосовуючи до групи G лему 10 одержимо, що $G' \neq U$.

Нехай y – елемент нескінченного порядку із G, який не міститься в $C_G(G')$. Його існування випливає із наслідку 11. Нехай далі a – елемент із G', $[a, y] \neq 1$. Доведемо, що підгрупа, яка породжена множиною елементів, спряжених з елементом a відносно підгрупи $< y >$, скінченна. Дійсно, так як група G'/ U скінченна, то індекс її централізатора $C(G'/ U)$ в групі G/ U скінченний. Звідси випливає, що $y^m U \in C(G'/ U)$ для деякого натурального числа m. Але тоді неважко переконатися, що всі елементи, які спряжені з елементом a відносно підгрупи $< y >$, містяться в підгрупі D, яка породжується скінченною кількістю елементів. Група D скінченна як скінченно породжена підгрупа локально скінчен-

ної групи G'. Розглянемо далі підгрупу $R = D \lambda < y >$. Зрозуміло, що підгрупа R неабелева і тому за означенням $H(I)$-груп $R \lhd G$ і $/T(R)/ < \infty$. Завдяки лемі 1 G – метагамільтонова група і тому $/ G'/ < \infty$ (див., наприклад, [14]). Отримана суперечність доводить, що G' не може бути нескінченною абелевою групою. Лема доведена.

Лема 14. *Нехай G – H(I)-група. Тоді комутант G' групи G є скінченною групою.*

Доведення. Оскільки за наслідком 8 комутант G' групи G є періодичною групою, то фактор-група G/G' містить елементи нескінченного порядку. У цьому випадку фактор-групи групи G по нескінченним неабелевим підгрупам із G' за лемою 4 не можуть бути гамільтоновими (відомо, що гамільтонові групи не містять елементів нескінченного порядку) і, значить, абелеві. Звідси випливає, що підгрупа G' не містить відмінних від неї нескінченних неабелевих підгруп. Так як G' – нескінченна неабелева група, то завдяки [3] вона черніковська з повною частиною R.

Покажемо, що підгрупа R міститься в центрі групи G. Справді, нехай r – елемент нескінченного поряку із G, k – елемент групи R, який не переставний із елементом r, і R_1 – нормальна в G скінченна підгрупа із R, яка містить елемент k. Тоді $R_1 < r >$ – неабелева неперіодична підгрупа із G і фактор-група $G / R_1 < r >$ абелева або гамільтонова. Проте абелевою вона не може бути так як тоді $G' \leq R_1 < r >$, що, очевидно, неможливо. Якщо ж вона гамільтонова, то в G існує така підгрупа D, у якій підгрупа $R_1 < r >$ має індекс 2 і для якої фактор-група G / D абелева. Але це неможливо, оскільки $G' \leq D$ і так як підгрупа D, очевидно, не має нескінченних періодичних підгруп. Отже, кожний елемент r нескінченного поряку із G перестановочний з кожним елементом із R.

Нехай тепер s – довільний елемент скінченного порядку із G і r_1 – фіксований її елемент нескінченного порядку. Тоді елемент sr_1 має нескінченний порядок (всі елементи

скінченного порядку із G складають в G, очевидно, нормальну підгрупу) і тому переставний з всіма елементами із R. Так як із кожним елементом із R перестановочний і елемент r_1, то звідси випливає, що із кожним елементом із R переставний і елемент $s = (s\ r_1)\ r_1^{-1}$. Разом з цим доведено, підгрупа R міститься в центрі групи G. Тому підгрупа G' представляється у вигляді $G' = RS$, де підгрупа S скінченна і неабелева. Звідси випливає, що підгрупа G' шарово скінченна і, значить, містить скінченну множину спряжених з підгрупою S. Підгрупа S_1, яка породжена в G цими підгрупами, скінченна неабелева і нормальна в G.

Нехай далі r – довільний елемент нескінченного порядку із G. Розглянемо неперіодичну неабелеву підгрупу $S_1 < r >$. Вона нормальна в G. Фактор-група $G / S_1 < r >$ абелева або гамільтонова (лема 4). Проте абелевою вона не може бути так як інакше $G' \leq S_1 < r >$, що, очевидно, неможливо завдяки очевидній скінченності періодичних підгруп групи $S_1 < r >$. Отже, група $G / S_1 < r >$ гамільтонова. Проте як і вище можна переконатися, що це неможливо. Отримана суперечність показує, що розглянутий випадок неможливий. Отже, комутант G' групи G не може бути нескінченною неабелевою групою. Лема доведена.

Теорема. *Розв'язна неперіодична неабелева група G, у якої нормальні всі неперіодичні неабелеві підгрупи, є метагамільтоновою групою.*

Доведення. Завдяки лемі 14 комутант G' групи G є скінченною групою. Нехай x – елемент нескінченного порядку із G. Тоді за означенням групи G $G' \lambda < x > \lhd G$, $/T(G' \lambda < x >)/ < \infty$. Застосовуючи лему 1 отримаємо, що G – метагамільтонова група. Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind //* Math. Annalen. – 1897. – **48. –** S. 548–561.

2. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //* S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2. –** S. 12–17.

3. **Черников С. Н.** *Исследование групп с заданными свойствами подгрупп //* Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193–209.

4. **Лиман Ф. М.** *Групи з інваріантними нециклічними підгрупами* // Доп. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1 073–1 075.

5. **Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.** *О метагамильтоновых группах I* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – **5**, № 3. – С. 45–49.

6. **Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.** *О метагамильтоновых группах II* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – **6**, № 5. – С. 50–53.

7. **Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.** *О метагамильтоновых группах III* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – **7**, № 3. – С. 195–199.

8. **Нагребецкий В. Т.** *Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – **6**, № 1. – С. 80–88.

9. **Махнев А. А.** *О конечных метагамильтоновых группах* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – **10**, № 1. – С. 60–75.

10. **Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.** *Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп* // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 179–188.

11. **Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф**. *Строение метациклических метагамильтоновых групп.* – К.: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22 с.

12. **Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.** *О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп* // Строение групп и их подгрупповая характеризация. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101–111.

13. **Кузенний М. Ф., Семко М.М.** *Будова розв'язних метагамільтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6–9.

14. **Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.** *О строении непериодических метагамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика.– 1986. – № 11. – С. 32–40.

15. **Кузенний М. Ф., Семко М. М.** Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.

16. **Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.** *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180–185.

17. **Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф**. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743–750.

18. **Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.** *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170–176.

19. **Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф**. *Строение метациклических метагамильтоновых групп* // Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173–183.

20. **Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.** *О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 168–175.

Наукове видання

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

№ 1

Матеріали друкуються в авторській редакції.

Здано до друку 23.12.2021. Формат 60×84/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman».
Друк. арк. 4,7.
Тираж 300 примірників. Замовлення № 986.

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром
Університету ДФС України
08200, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 5104 від 20.05.2016