Теорія ймовірностей та математична статистика

ПРАКТИКУМ

(частина І)



Національний університет державної податкової
служби України
Кафедра вищої математики

М.М. Семко
Л.В. Скасків

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ПРАКТИКУМ

(частина І)

Київ – 2007

УДК 519.2 (076)

Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум (частина І) /Семко М.М., Скасків Л.В. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007.– 107 с.

В посібнику подано основні відомості з теоретичного курсу, наведено типові приклади задач і методику їх розв'язання та завдання для самостійної роботи з теорії ймовірностей і математичної статистики.

Посібник рекомендується для студентів економічних спеціальностей очної і заочної форм навчання.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор **М.Ф. Кузенний** (Інститут математики НАН України);
кандидат фізико-математичних наук, доцент **Д.Я.Требенко** (Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Затверджено до друку на засіданні кафедри вищої математики
(протокол № 3 від 15.03.2007 р.)

ВСТУП

Кожне явище світу, що оточує нас, пов'язане з великою кількістю інших явищ більш чи менш тісними зв'язками. Кожна наука вивчає лише деяку частини цих зв'язків. На будь-якому етапі людського пізна. ня завжди залишається багато ще не вивчених (не пізнаних) таких зв'язків в кожному явищі. Тому кожна встановлена наукою закономірність відображає лише певну кількість основних (з точки зору даної науки) зв'язків. Це приводить до того, що закономірності виконуються завжди з деякими відхиленнями. Такі відхилення називаються випадковими явищами. Їх існування об'єктивно зумовлене принциповою неможливістю прослідкувати усі зв'язки досліджуваного явища з сукупністю інших явищ.

На жаль, при одному спостереженні даного явища неможливо наперед передбачити, яке саме матиме місце випадкове відхилення від закономірностей. Так, наприклад, при проведені вимірювань неможливо передбачити, якою буде похибка. Проте, як показала практика, при проведенні великої кількості спостережень даного явища в самих випадкових відхиленнях (випадковому явищі) виявляються певні закономірності, які можна вивчати і використовувати вплив цих випадкових відхилень на перебіг досліджуваного явища. Таким чином, відкривається можливість вивчення масових випадкових явищ, тобто таких випадкових явищ, які можна спостерігати практично необмежену кількість разів в однакових умовах. Теорія ймовірностей і є наукою, котра вивчає закономірності масових випадкових явищ.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.
1. ЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

1.1. Класичне визначення ймовірності.

1.1.1. Простір елементарних подій. Випадкова подія. Протилежна подія. Достовірна та неможлива події.

1.1.1.1. *Теоретичні відомості.*

Вихідними поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного (ймовірнісного, випадкового) експерименту, випадкової події і ймовірності випадкової події.

Стохастичним називається експеримент, результат якого передбачити неможливо. Крім того, вважатимемо, що стохастичний експеримент можна повторити як завгодно велике число разів.

Результати кожного стохастичного експерименту будемо описувати деякою множиною, елементи якої надають найбільш повну інформацію про можливі результати експерименту. Ця множина називається простором елементарних подій, а її елементи - елементарними подіями. Простір елементарних подій позначатимемо Ω.

Наведемо декілька прикладів.

П р и к л а д и.

1.1.1. На куплений лотерейний квиток може випасти будь-який з виграшів, що розігруються. До закінчення розіграшу неможливо визначити випаде на даний лотерейний квиток виграш чи ні. Отже, розіграш лотереї є стохастичний експеримент.

1.1.2. Розповсюдження епідемії інфекційної хвороби теж можна розглядати як стохастичний експеримент, результатами якого є той чи інший перебіг епідемії.

1.1.3. Проводиться експеримент: монету підкидають один раз. Розглянемо такі результати: Г - випав герб, Ц - випала цифра. Тоді простір елементарних подій складається з двох елементів

$$\Omega = \{ Г, Ц \}.$$

1.1.4. Частинка, яка приймає участь у броунівському русі переміщується в результаті зіткнень з молекулами рідини чи газу, що перебувають у хаотичному тепловому русі. Спостерігаючи за частинкою певний проміжок часу, можна намалювати траєкторію її руху. Вигляд цієї траєкторії наперед передбачити неможливо. Отже, маємо стохастичний експеримент, результатами якого є траєкторії руху броунівської частинки. Простором елементарних подій Ω в цьому випадку можна вважати, наприклад, множину неперервних функцій.

З цим стохастичним експериментом можна пов'язати ще і такий результат - кількість частинок n, які знаходяться в даний момент у виділеній ділянці. В цьому випадку Ω можна представити у вигляді

$$\Omega = \{ 0,1,2, \dots , n, \dots \}.$$

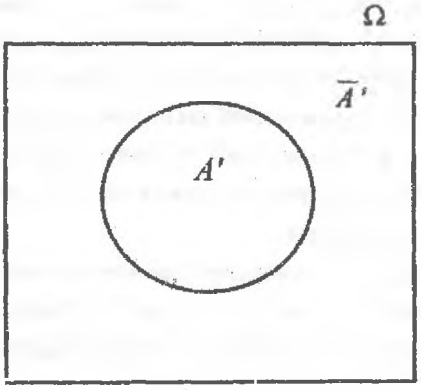
Коли в теорії ймовірностей ми говоримо про стохастичний експеримент, то нас не цікавить його технічна сторона, а тільки те, які випадкові події (явища) можуть спостерігатися в цьому експерименті і те, що в результаті проведеного експерименту спостерігалося. Таким чином, з кожним експериментом пов'язується деяка множина подій, про які можна стверджувати, здійснилися вони в даному експерименті чи ні. Про такі події говорять, що вони спостережні в даному експерименті. Випадкові події позначатимемо далі великими літерами латинського алфавіту. Якщо сутність події A описується словесно, то вживатимемо такий запис

$$A = \{ \dots\dots\dots\dots \},$$

де у фігурних дужках записується текст, що визначає зміст події.

Нехай A – довільна спостережна в даному експерименті подія. Оскільки кожна елементарна подія ω, дає повну інформацію про результати експерименту, то знаючи, що результат експерименту описується точкою ω, завжди можна сказати відбулася подія A чи ні. Таким чином, по відношенню до події A весь простір елементарних подій Ω можна розбити на дві підмножини A' і $\overline{A}'$ ($A' \cup \overline{A}' = \Omega$) так, що коли результат експерименту описується точкою ω з множини A'

, то подія A в цьому експерименті відбулася, коли ж $\omega \in \overline{A'}$, то подія A не відбулася (мал.1.1.1.



Мал.1.1.1

Точки ω з множини A називаються елементарними подіями, які сприяють події A , а множина A' - відображенням або інтерпретацією події A в Ω .

Подія, яка має місце тоді і тільки тоді, коли не має місця (не спостерігається) подія A називаються подією протилежною до A і позначається так $\overline{A}$. Очевидно, подія $\overline{A}$ відображається (інтерпретується) в Ω множиною $\overline{A'}$ (доповнення множини A' в Ω).

Далі ми ототожнюватимемо A і A' : $A = A'$. Таким чином, далі, випадкова подія A - це деяка підмножина з Ω, яка складається з таких точок ω (елементарних подій), які сприяють A . Отже, якщо результат певного експерименту описується точкою ω і $\omega \in A$, то в цьому експерименті подія A має місце або, інакше, спостерігається, якщо ж $\omega \notin A$, то A в експерименті не має місця (не спостерігається). Очевидно, в останньому випадку має місце (спостерігається) протилежна подія $\overline{A}$

Множина Ω інтерпретує подію, яка спостерігається (має місце) завжди в даному експерименті. Така подія називаються достовірною. Навпаки порожня підмножина $\varnothing$ з Ω інтерпретує подію, яка ніколи не постерігається (не має місця) в даному експерименті. Така подія називаються неможливою.

Приклади.

1.1.5. Стохастичний експеримент полягає в тому, що монету підкидають до першої появи герба. Розглянемо подію

A = { буде зроблено не більше трьох підкидань }.

В цьому випадку

$$\Omega = \left\{ Г,\ ЦГ,\ ЦЦГ,\ldots,\ \underbrace{Ц\ldots Ц}_{n-1 \text{ разі в}}\ Г,\ldots,\ Г^{\infty} \right\};$$

$$A = \{ Г,\ ЦГ,\ ЦЦГ \}.$$

(елементарна подія $Г^{\infty}$ означає, що усі рази випадатиме цифра).

1.1.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Наведемо приклади розв'язання задач, які ілюструють введені поняття.

Задача 1.1.1. Проводиться експеримент: монету підкидають тричі. Побудувати простір елементарних подій Ω цього експерименту, зобразити в ньому подію

A = { герб з'явиться не більше одного разу },

та подію протилежну до неї.

Розв'язання.

Розглянемо такі результати: ГГГ – першого, другого та третього разу випав герб, ГГЦ – першого, другого разу випав герб, третього разу випала цифра, ГЦГ другого разу випала цифра, першого та третього разу випав герб і т.д.. Тоді простір елементарних подій складається з восьми елементів

$$\Omega = \{ ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ \}.$$

Події А, очевидно, сприяють лише такі елементарні події з Ω:

$$\omega_5 = ЦЦГ, \omega_6 = ЦГЦ, \omega_7 = ГЦЦ, \omega_8 = ЦЦЦ.$$

Отже

$$A = \{ ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ \}.$$

Тоді протилежній події

$$\overline{A} = \{ \text{герб з'явиться принаймні один раз} \}$$

сприяють лише такі елементарні події

$$\omega_1 = ГГГ, \omega_2 = ГГЦ, \omega_3 = ГЦГ, \omega_4 = ЦГГ \text{ з } \Omega.$$

Тому

$$\overline{A} = \{ ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ \}.$$

Очевидно, що

$$|\Omega| = 8, |A| = 4, |\overline{A}| = 4 \text{ і } |\Omega| = |A| + |\overline{A}|.$$

(Запис |M| позначає кількість елементів або, інакше, потужність множини M).

Задача 1.1.2. Гральний кубик підкидається тричі. Побудувати простір елементарних подій Ω, представити в ньому подію

A = { сума цифр, які випали на кубику не перевищує 4 },

Розв'язання. Результатом та кого стохастичного експерименту можна вважати пару чисел (i,j,k), де i – число, яке випало першого разу, j – число, яке випало другого разу, k – число, яке випало третього разу. Тоді, очевидно, простір елементарних подій Ω можна представити у вигляді множини

$$\Omega = \{(i,j,k) \mid i=1,2,...,6 ; j = 1,2,...,6; k = 1,2,...,6 \} (|\Omega| = 6x6x6 = 256)$$

і

$$\Lambda = \{(1,1,1),(1,1,2), (1,2,1),(2,1,1)\ (|A| = 4).$$

Задача 1.1.3. На площину нанесені горизонтальні паралельні прямі з відстанню $2a$ між сусідніми прямими. На площину навмання кидається монета радіусом $r, 0 < r < a$. Побудувати простір елементарних подій та представити в ньому подію

A = { монета не перетинає жодну з прямих }

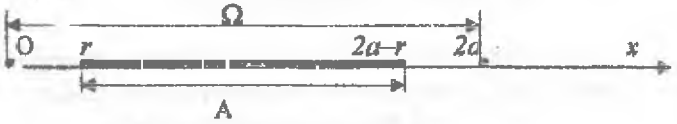
Розв'язання. Очевидно, розміщення монети повністю визначається положення її центру. Якщо через x позначити відстань центру монети від найближчої прямої знизу, то

$$\Omega = \{ x \mid 0 \le x \le 2a \}.$$

Очевидно, монета не перетинатиме жодну з прямих, якщо $r \le x \le 2a - r$. Тому

$$A = \{ x \mid r < x < 2a-r \}.$$

(див мал.1.1.2.).



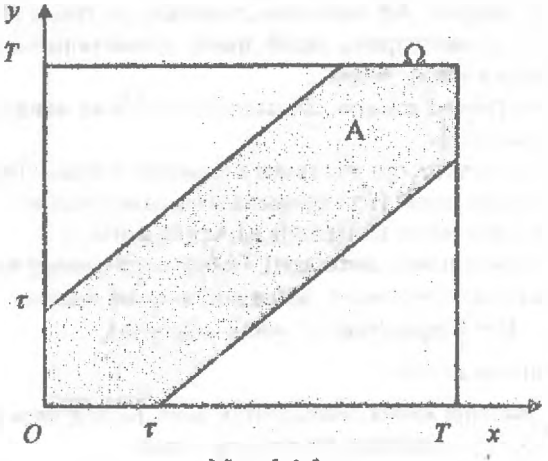
Мал.1.1.2.

Задача 1.1.4. (Задача про зустріч.) Дві особи А і Б домовилися зустрітися в інтервалі часу $[0, T]$, вибираючи момент приходу на місце зустрічі випадково. Припустимо, що кожна особа очікує партнера на протязі проміжку часу тривалістю не більше від τ, $0 \le \tau \le T$. Розглянемо подію А = { зустріч відбудеться }. Побудувати простір елементарних подій Ω цього експерименту, зобразити в ньому події А та $\bar{A}$.

Розв'язання. Якщо через x позначити час приходу А, через y – час приходу Б, то простором елементарних подій буде множина

$$\Omega = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le T, 0 \le y \le T \}.$$

Цю множину (простір Ω) можна представити як множину точок квадрата OPQR координатної площини (мал.1.1.3).



Мал. 1.1.3

Тоді, очевидно, зустріч відбудеться, якщо виконуватиметься умова $|y - x| \le \tau$. Отже (див. мал. 1.1.3),

$$A = \{(x,y) \mid |y - x| \le \tau, (x,y) \in \Omega\}$$

1.1.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

1.1.1. Монету підкидають двічі. Побудувати простір елементарних подій Ω цього експерименту, зобразити в ньому подію

A = { хоча б один раз з'явиться герб },

та подію протилежну до неї.

1.1.2. На відрізок довжиною L навмання ставиться точка M. Побудувати простір елементарних подій цього стохастичного експерименту та зобразити в ньому подію

A={ середнє геометричне утворених відрізків не менше 30% довжини усього відрізка. }

1.1.3. Гральний кубик підкидається двічі. Побудувати простір елементарних подій Ω, представити в ньому подію

A = { сума цифр, які випали на кубику не менша 10 }.

1.1.4. В ящику знаходяться 3 картки з літерами Т,О,Р. З ящика навмання без повернення витягують по одній усі картки і розкладають одна за одною зліва направо. Побудувати простір елементарних подій та представити в ньому подію

A = { перша літера голосна, остання – приголосна }.

1.1.5. На відрізок AB навмання ставиться дві точки M і N. Побудувати простір елементарних подій цього стохастичного експерименту та зобразити в ньому подію

A={середнє геометричне довжин відрізків AM та AN не менше довжини відрізка MN }.

1.1.6. Проведено три постріли з гармати в ціль. Побудувати простір елементарних подій Ω та представити в ньому подію

A={має місце рівно одне влучення в ціль }/

1.1.7. Монету підкидають двічі. Побудувати простір елементарних подій Ω цього експерименту, зобразити в ньому подію

B = { герб з'явиться рівно один раз },

та подію протилежну до неї.

1.1.8. Гральний кубик підкидається двічі. Побудувати простір елементарних подій Ω, представити в ньому подію

B = { першого разу випала цифра «2» }.

1.1.9. В ящику знаходяться 3 картки з літерами Т,О,Р. З ящика навмання витягують одну картку, записують літеру, яка з'явилася і

картку повертають в ящик. В такий же спосіб витягують другу картку і літеру, яка з'явилася записують праворуч попередньої. Побудувати простір елементарних подій такого стохастичного експерименту та представити в ньому подію

B = { серед записаних літер одна голосна інша приголосна }.

1...10. На відрізок AB навмання ставиться дві точки M і N. Побудувати простір елементарних подій цього стохастичного екс-перименту та зобразити в ньому подію

B={ довжина відрізка MN менше відстані від точки A до найближчої з точок M,N }.

1.1.2. Класичне визначення ймовірності.

1.1.2.1. *Теоретичні відомості*

Розглянемо стохастичний експеримент із скінченим або зліченим простором елементарних подій

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots \}.$$

Нехай кожному ω_i поставлено у відповідність певне число ("вага") $p_i = P(\omega_i)$ так, що мають місце властивості:

1) $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots$;

2) $\sum_i p_i = p1 + p2 + \dots + p_n + \dots = 1$

(числа p_i називаються ймовірностями елементарних подій або *елементарними* ймовірностями).

Тепер для будь-якої події A з Ω її ймовірність P(A) визначається таким чином.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.1. Ймовірністю P(A) події A називається сума ймовірностей елементарних подій, які сприяють події A, тобто

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \qquad (1.1.1)$$

В цьому випадку також говорять, що для стохастичного експерименту побудовано ймовірнісну модель (Ω,P), в якій ймовірність $P(A)$ події A визначається формулою (1.1.1).

Приклади.

1.1.6. В коробці знаходиться 5 карток з літерами А,О,Р,У,К. З коробки навмання витягують по одній картці і кладуть їх в ряд. Яка ймовірність, що остання літера буде голосною.

Елементарні події (результати стохастичного експерименту) будемо визначати за останньою літерою. Тому

$$\Omega = \{ А,О,Р,У,К \}.$$

Тоді для події $A = \{$ остання літера голосна$\}$ маємо

$$A = \{ А,О,У \}.$$

Оскільки літери витягуються навмання, то можна вважати, що елементарні події рівно можливі і, отже,

$$p(\omega_i) = 1/5.$$

Тоді

$$P(A) = 1/5+1/5+1/5 = 3/5.$$

В наведеному прикладі, очевидно,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

(запис $|M|$ означає кількість елементів множини M)

1.1.7 Нехай підкидається симетричний гральний кубик. Тоді в ролі Ω можна розглядати множину

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Якщо кубик симетричний, то природно вважати, що всі ω_i рівно можливі , і тому з властивості 2) випливає, що

$$P(\omega_i) = p_i = 1/6.$$

то $P(\omega_i) = p_i = 1/n$.

Нехай тепер A ($A \subseteq \Omega$) випадкова подія, яка містить m елементарних подій $A=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_m\}$ (події A сприяє m елементарних подій). Тоді, згідно з О.1.1.1,

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_m)=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{m \text{ разів}}=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}. \qquad (1.1.2)$$

Формула (1.1.2) виражає так зване класичне визначення ймовірності .

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.2 (Класичне визначення ймовірності). Нехай простір елементарних подій містить n рівно можливих елементарних подій, m з яких сприяють події A. Тоді ймовірністю події A називається число

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}. \qquad (1.1.3)$$

(Зовсім коротко це означення можна сформулювати так:

Якщо події A сприяє m з n єдино можливих і рівно можливих елементарних подій, то

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}.)$$

Очевидно, в Пр.1.1.6 та в першій половині Пр. 1.1.7 ймовірність P(A) обрахована за класичним визначенням ймовірності.

Якщо має місце ситуація, описана в О.1.1.2, то для протилежної події $\overline{A}$ маємо

$$|\overline{A}| = n - m.$$

Тому в класичній ймовірнісній моделі має місце формула

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (1.1.3')$$

оскільки

Якщо тепер подія A = {випала цифра кратна трьом}, то, очевидно, A = {3, 6} і, згідно з (1.1.2),

$$P(A) = 1/6+1/6=1/3.$$

В цьому прикладі теж, очевидно, має місце співвідношення

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Припустимо тепер, що гральний кубик не є симетричним і маса в ньому розподілена так, що маса кожної грані пропорційна її номеру. Тоді логічно вибрати p_i таким чином

$$p_i = \frac{i}{(1+2+3+4+5+6)} = i/21,\ i = 1,2,3,4,5,6$$

Тепер для події A = {3, 6} маємо

$$P(A) = 3/21 + 6/21 = 9/21 = 3/7.$$

1.1.8. Розглянемо Пр.1.1.5, де

$$\Omega = \{Ц, ЦГ, \dots\},\quad A = \{Г, ЦГ, ЦЦГ\}.$$

Припишемо подіям $\underbrace{Ц\dots Ц}_{n-1\text{ разів}}\,Г$, $n=1,2,\dots$, ймовірності $1/2^n$, а елементарній події $Г^\infty$ – ймовірність 0. Тоді, очевидно, $\sum_i p_i = 1$ і для P(A) маємо

$$P(A) = P(Г) + P(ЦГ) + P(ЦЦГ)=1/2+1/4 + 1/8 = 7/8.$$

Розглянемо тепер окремо ситуацію коли $|\Omega| = n \in \mathbf{N}$ і всі елементарні події Ω вважаються рівно можливими (див. Пр.1.1.7, перша частина). Тоді природно для усіх елементарних подій ω_i визначити однакові ймовірності p_i. Оскільки за властивістю 2)

$$\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1,$$

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Очевидно, $P(\Omega)=1$ і $P(\varnothing)=0$. Виявляється, що ці факти мають місце в кожній ймовірнісній моделі, що ми і будемо використовувати надалі. Крім того, в багатьох випадках ймовірність протилежної події обчислити значно простіше ніж самої події. Тому при розв'язуванні задач варто на початку з'ясувати ймовірність якої події шукати першою – A чи $\overline{A}$.

Приклади.

1.1.9. В урні знаходиться 10 куль: 4 білих і 6 чорних. З урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність, що вона біла?

Розв'язання. Нехай

A = {вибрана куля біла }

Очевидно, для даного стохастичного експерименту можливі 10 різних результатів (результат експерименту визначається по витягнутій кулі). Тому

$$n = |\Omega| = 10.$$

Кількість елементарних подій, які сприяють події A дорівнює числу білих куль. Отже

$$m = |A| = 4.$$

Оскільки кулі витягують навмання, то усі елементарні події рівно можливі. Тому за класичним визначенням ймовірності

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

1.1.10. На шахову дошку з 64 клітинок ставляться навмання дві тури: біла та чорна. Яка ймовірність, що вони не будуть "бити" одна одну?

Розв'язання. Нехай

A = { тури не будуть "бити" одна одну }.

1-ий спосіб.

Білу туру на шахівниці можна розмістити 64-ма різними способами. Другу туру після цього можна поставити на довільну з решти 63 клітинок. Тому існує всього 64·63 способи розмістити дві тури на шахівниці. Таким чином

$$n = |\Omega| = 64 \cdot 63$$

Очевидно, з будь-якої клітки шахівниці, біла тура "пробиває" 14 різних полів (поле на якому знаходиться вона сама не враховується. Тому для того , щоб елементарна подія сприяла події А, другу туру можна поставити тільки на одну з 64 -15=49 кліток. Отже,

$$m = |A| = 64 \cdot 49 .$$

Оскільки тури виставляються на шахівниці навмання, то усі елементарні події рівноможливі. Тому за класичним визначення ймовірності

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{64 \cdot 49}{64 \cdot 63} = \frac{7}{9} \approx 0{,}778 .$$

2 - ий спосіб.

Використаємо формулу (1.3'). Обчислимо ймовірність протилежної події $\overline{A}$. Оскільки перша тура "пробиває" 14 різних полів, то для того , щоб елементарна подія сприяла події $\overline{A}$, другу туру потрібно поставити тільки на одну з цих 14 кліток. Отже,

$$m = |\overline{A}| = 64 \cdot 14.$$

Тоді за формулою (1.3')

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \approx 0{,}778 .$$

1.1.11. В коробці знаходиться 10 деталей, 6 з яких стандартні, решта - нестандартні. З коробки навмання взято дві деталі. Яка ймовірність, що тільки одна з них стандартна.

Розв'язання. Результатом стохастичного експерименту в цьому випадку є 2-елементна підмножина множини, що має 10 елементів, а простір Ω складається з усіх таких підмножин. Підрахуємо їх кількість.

Число 2-елементних підмножин, що містять фіксовану деталь дорівнює 9, оскільки для одержання 2-елементної підмножини, до цієї деталі можна долучити будь-яку з решти 9 деталей. Якщо взяти одну з решти 9 деталей, то її можна включити у ще 8 різних інших 2-елементних підмножин (підмножину, в яку входить попередня деталь не враховуємо) і т.д.. Отже,

$$n = |\Omega| = 9+8+7+...+1=45.$$

Підмножини (елементарні події), які сприяють події

A = { одна деталь стандартна, інша - ні},

можна утворити за таким принципом: взяти довільну стандартну деталь і долучити до неї будь-яку нестандартну. Оскільки стандартних деталей 6, а нестандартних 4, то таких різних підмножин можна одержати $m = 6 \cdot 4 = 24$ ($|A| = 24$).

Оскільки деталі беруться навмання, то вважатимемо, що елементарні події рівно можливі. Тоді за класичним визначення ймовірності

$$P(A)= \frac{|A|}{|\Omega|} = 24/45 = 0,5333... = 0,5(3).$$

Застосування класичного визначення ймовірності потребує обчислення $n = |\Omega|$ і $m = |A|$. В багатьох випадках це зробити безпосередньо нелегко, що підтверджують попередні приклади .Подібні підрахунки можна значно спростити, якщо скористатися певними поняття-

ми та відповідними формулам такої науки як комбінаторика. Якщо говорити коротко, то комбінаторика - це наука, що вивчає розміщення об'єктів за певними правилами і методи та підрахунок числа усіх можливих способів, якими ці розміщення можна зробити.

Проаналізувавши міркування, застосовані в ряді попередніх прикладів для підрахунку числа елементарних подій, які сприяють події А, можна відмітити справедливість такого простого, але дуже важливого правила:

> Якщо деякий вибір А можна здійснити m різними способами, а для кожного з цих способів деякий інший вибір В можна здійснити n способами, то вибір А і В можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Це правило є частинним випадком такого основного принципу комбінаторики (правило множення).

> Нехай потрібно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати m_1 способами, другу – m_2 способами, третю m_3 – способами і так до k-ої дії, яку можна здійснити m_k способами, то згадані k дій можуть бути виконані
>
> $$m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$$
>
> способами.

Наведемо ще один приклад застосування цього принципу.

Приклад.

1.1.12. У ліфт шестиповерхового будинку зайшло чотири особи. Ліфт починає рухатися з цокольного (нульового) поверху. Скільки існує різних способів виходу пасажирів на поверхах. Вважається, що кожен пасажир обов'язково виходить на якомусь поверсі.

Розв'язання. Очевидно, для першого пасажира існує 5 різних варіантів вийти з ліфту, для другого, очевидно, теж 5 і т.д.. Тому загальна кількість варіантів N становить

$$N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 .$$

Нехай Ω - множина з n елементів. Довільна k-елементна підмножина множини з n елементів називається сполукою (комбінацією) з n елементів по k (без повторення). Число усіх сполук з n по k (без повторення) позначається C_n^k . Це число можна обрахувати за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Далі слова "без повторення" , якщо це зрозуміло з контексту, будемо опускати.

Очевидно, сполуку з n елементів по k можна одержати за такою схемою (безповторна вибірка, вибірка без повернення): з множини Ω вибираються по одному k елементів, причому вибраний елемент до множини Ω не повертається. Зрозуміло, також, що різні сполуки з n по k відрізняються принаймі одним елементом. Таким чином, сполуки з n по k є моделлю вибірки без повернення.

Приклади.

1.1.13. В шафі знаходиться 10 пар різних черевиків . З шафи навмання вибирають 4 черевики. Яка ймовірність, що серед вибраних черевиків відсутні парні.

Розв'язання. Нехай

A = {серед взятих навмання 4 черевиків немає парних}

Простір елементарних подій утворюють усі можливі підмножини з чотирьох елементів, які можна утворити з множини, яка складається з 20 елементів. Тому

$$n = |\Omega| = C_{20}^4 .$$

Кількість елементарних подій , які сприяють події А, підрахуємо, використовуючи правило множення. Зробимо перший вибір - виберемо чотири довільних пари черевиків. Це, очевидно, можна зробити C_{10}^4 способами. Після цього зробимо другий вибір - з кожної пари виберемо по одному черевику. Очевидно, це можна зробити 2^4 способами. Тому загальна кількість m елементарних подій, що сприяють А становить

$$m = C_{10}^4 \cdot 2^4 .$$

тоді

$$P(A) = \frac{C_{10}^4 \cdot 2^4}{C_{20}^4} .$$

Множина називається *впорядкованою,* якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність число (номер цього елемента) від 1 до *n*, де *n* – кількість елементів множини, так, що різним елементам відповідають різні числа.

Усяку скінчену множину можна зробити впорядкованою, якщо, наприклад, записати усі елементи множини у деякий список (a,b,...), а потім поставити у відповідність кожному елементу номер місця, на якому він стоїть у списку.

Очевидно, кожну множину, яка містить більше одного елемента можна впорядкувати не єдиним способом. Наприклад, множину {1,2,3} з трьох чисел можна впорядкувати 6-ма різними способами:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1),

Нехай Ω – невпорядкована множина з *n* елементів. Тоді кожна її підмножина може бути впорядкована одним з можливих способів.

Довільна *k*-елементна впорядкована підмножина множини Ω з *n* елементів називається розміщення з *n* елементів по *k* (без повторення).

Таким чинам, різні розміщення з n по k відрізняються або хоча б одним елементом, або порядком цих елементів.

Неважко переконатися , що розміщення без повторення можна отримати з допомогою вибору без повернення (без-повторна вибірка), з множини, яка містить n (різних) елементів, якщо результати вибору елементів впорядковуються у вигляді послідовного ланцюжка.

Число усіх розміщень з n елементів по k (без повторення) позначається A_n^k.

Справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Розміщення з n по n (без повторення) називаються перестановками з n елементів (без повторення). Кількість усіх перестановок з n елементів позначається через P_n.

З попередньої формули одержуємо

$$P_n = n!.$$

Очевидно, різні перестановки однієї і тієї ж множини відрізняються тільки порядком елементів. Далі, якщо це зрозуміло з контексту, слова "без повторення" опускатимемо.

Приклад.

1.1.14. В коробці знаходиться 6 карток з літерами Т,Е,О,Р,І,Я. З коробки навмання беруть по одній 3 картки і кладуть в ряд одна за одною зліва направо. Яка ймовірність, що отримаємо слово "ТОР".

Розв'язання. Нехай

A = {одержано слово "ТОР" }.

Стохастичний експеримент полягає у побудові впорядкованої 3-елементної підмножини з елементів множини, яка має 6 елементів (літер), тобто його результатами є розміщення з 6

елементів по 3. Тому Ω складається з усіх розміщень з 6 елементів по 3. Таким чином,

$$n = |\Omega| = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 .$$

Кількість елементарних подій m , які сприяють події A очевидно, дорівнює 1. Тоді

$$P(A) = \frac{1}{A_6^3} = 1/120 \approx 0.009 .$$

Нехай маємо n типів елементів причому кількість елементів кожного типу як завгодно велика, і є k занумерованих позицій, на кожну з яких потрібно помістити один елемент. Кожне таке розміщення елементів будемо називати *розміщенням з повтореннями з n по k.*

З точки зору лінійної алгебри розміщення з повтореннями з n по k є "k-вимірним вектором" , компоненти якого є одного з n можливих типів.

Неважко переконатися, що розміщення з повтореннями можна отримати з допомогою вибору з поверненням (повторна вибірка), з множини, яка містить n (різних) елементів, якщо результати вибору елементів впорядковуються у вигляді послідовного ланцюжка.

Число усіх розміщень з повтореннями з n по k позначають $\overline{A}_n^k$. Має місце формула

$$\overline{A}_n^k = n^k .$$

Розміщення по n елементів з повтореннями , в кожному з яких k_1 елементів 1-го виду, k_2 елементів 2-го виду,..., k_m елементів m-го виду , $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, називаються *перестановками з n елементів з повтореннями.* Підкреслимо, що для кожної такої перестановки числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ - сталі.

Загальна кількість перестановок з повтореннями, означених вище, позначається

$$\overline{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

Має місце формула

$$\overline{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!}$$

Приклад.

1.1.15. Підкидається 8 однакових симетричних гральних кубиків. Яка ймовірність, що не випаде жодної шістки.

Розв'язання. Нехай

A = { не випаде жодної шістки } .

Простір елементарних подій утворюють усі розміщення з повтореннями з 6 по 8 (див. Пр.1.26), тому

$$n = |\Omega| = 68.$$

Елементарні події, які сприяють А, це ті із згаданих розміщень, у яких відсутня цифра "6". Очевидно, всі вони є розміщеннями з повторенням з 5 по 8 (одна з цифр в утворенні потрібних розміщень не використовується). Отже,

$$m = |A| = \overline{A}_5^8 = 58.$$

Оскільки кубики симетричні, можна вважати, що усі елементарні події однаково можливі і тому за класичним визначенням ймовірності

$$P(A) = \frac{5^8}{6^8} \approx 0{,}233.$$

1.1.2.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 1.1.5. З слова "НАВМАННЯ" вибирається навмання одна літера. Яка ймовірність, що це літера "А" ?

Розв'язання. Нехай

A = {вибрана літера є "А" }

Стохастичний експеримент полягає у випадковому виборі літери із слова , що містить 8 літер. Тому можливі 8 різних результатів. Отже

$$n = |\Omega| = 8$$

Кількість елементарних подій, які сприяють події А дорівнює числу літер "А", тобто

$$m = |A| = 2 .$$

Оскільки літери вибираються навмання, то усі елементарні події рівно можливі. Тому за класичним визначення ймовірності

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0.25 .$$

Задача 1.1.6. В коробці знаходиться 6 карток з літерами А,О,Р,Т,А. (дві картка з літерою "А"). З коробки навмання беруть по одній картці і кладуть в ряд одна за одною зліва направо. Яка ймовірність, що остання літера буде приголосною.

Розв'язання. Нехай

$$A = \{\text{остання літера приголосна}\}$$

Результат стохастичного експерименту будемо фіксувати за останньою витягнутою літерою. Очевидно, останньою може бути витягнута будь-яка картка. Тому

$$n = |\Omega| = 6 .$$

Кількість елементарних подій, які сприяють події А, очевидно, дорівнює 2. Оскільки картки витягуються навмання, то усі елементарні події рівно можливі. Тому за класичним визначення ймовірності

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = 0,(3) \approx 0,33 .$$

Задача 1.1.7. Симетричний гральний кубик підкидається двічі. Яка ймовірність події А = { цифра "6" випала тільки один раз}.

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій Ω. Нехай і - число, яке випало першого разу, j - число, яке випало другого разу. Тоді результат експерименту можна описати парою чисел (i,j). Отже

$$\Omega = \{ (i,j) \mid 1 \le i,j \le 6 \} \text{ і } |\Omega| = 36 .$$

Події А сприяють, очевидно, події (6,j),j=1,2,3,4,5 та (i,6),i=1,2,3,4,5. Кількість таких подій, очевидно, дорівнює |A| = 10. Оскільки кубик симетричний, то вважатимемо, що усі елементарні події рівно можливі. Тоді за класичним визначенням ймовірності

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 10/36 = 0{,}277...$$

Задача 1.1.8. В коробці знаходиться 12 деталей, з яких 4 браковані. З коробки навмання беруть 5 деталей. Яка ймовірність того, що серед них рівно 3 браковані.

Розв'язання. Нехай

A= {серед взятих навмання 5 куль рівно 3 браковані }

Стохастичний експеримент полягає у виборі 5-елементної підмножини з множини, що має 12 елементів. Отже, кількість усіх елементарних подій дорівнює

$$n = |\Omega| = C_{12}^5$$

Кількість елементарних подій , які сприяють події A підрахуємо, використовуючи правило множення. Потрібний комплект деталей повинен містити 3 браковані деталі і 2 стандартні. Три браковані деталі можна вибрати C_4^3 способами, після цього дві стандартні деталі можна вибрати C_8^2 способами. Тому загальна кількість m елементарних подій , що сприяють A становить

$$m = C_4^3 \cdot C_8^2.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3 C_8^2}{C_{12}^5} = 14/99 \approx 0.14$$

Задача 1.1.9. В коробці знаходиться 9 карток, з різними цифрами від 1 до 9. З коробки навмання беруть по одній картці і кладуть в ряд одна за одною зліва направо. Яка ймовірність, що парні цифри стоять на місцях з парними номерами.

Розв'язання. Нехай

A = {парні цифри стоять на місцях з парними номерами }.

Стохастичний експеримент полягає у впорядкуванні множини з 9 елементів (цифр), тобто його результатами є перестановки з 9 елементів. Тому Ω складається з усіх перестановок з 9 елементів і, таким чином,

$$n = |\Omega| = P_9 = 9!\,.$$

Кількість елементарних подій , які сприяють події А підрахуємо, використовуючи правило множення. Зробимо перший вибір - розмістимо непарні цифри 1,3,5,7,9 на непарних місцях (котрих теж очевидно, 5). Кожне таке розміщення є перестановкою з 5 елементів. Тому перший вибір можна здійснити $m_1 = 5!$ способами.

Зробимо тепер другий вибір - на чотирьох місцях , що залишилися, розмістимо чотири парних числа. Очевидно, кожне таке розміщення є перестановкою з 4 елементів. Тому другий вибір можна здійснити $m_2 = 4!$ способами. Тоді, за правилом множення знаходимо

$$m = |A| = m_1 \cdot m_2 = 5!\,4!$$

Далі

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5!\cdot 4!}{9!} = 1/126 \approx 0.008\,.$$

Задача 1.1.10. В і С та ще 8 осіб стоять в черзі. Яка ймовірність, що В і С розділені один від одного трьома особами?

Розв'язання. Нехай

А={С і В розділені один від одного трьома особами }.

Розміщення людей в черзі є впорядкованою множиною. Тому

$$n = |\Omega| = 10!\,.$$

Для підрахунку $m=|A|$, використаємо правило множення. Перша дія - вибрати два місця для С і В . Це можна зробити 6-ма способами (1-ше і 5-те місця, 2-ге і 6-те місця і т.д.). Друга дія - на вибраних місцях розмісти В і С. Це можна зробити 2 способами. Третя дія -

на решті 8 місцях розмістити усіх останніх. Це можна здійснити 8! способами. Отже,

$$m = |A| = 6 \cdot 2 \cdot 8!.$$

Тому

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 2/15 \approx 0.133.$$

Задача 1.1.11. У ліфт семиповерхового будинку зайшло чотири особи. Ліфт починає рухатися з першого поверху. Кожен з пасажирів виходить на одному з поверхів , починаючи з другого, причому поверх для цього вибирається навмання. Яка ймовірність, що на другому поверсі вийде рівно два пасажири?

Розв'язання. Нехай

A = { на другому поверсі вийде рівно два пасажири }

Опишемо результат експерименту вектором

$$(j_1, j_2, j_3, j_4),$$

компоненти якого це номери поверхів, на яких вийшли відповідно 1-й, 2-й, 3-й і 4-й пасажир. Отже, стохастичний експеримент описується розміщеннями з повторенням з 6 по 4. Тому (див. також Пр.1.1.12) $n=|\Omega|=6^4$.

Елементарні події, які сприяють A, це ті із згаданих розміщень, у яких рівно дві цифри "2". Розмістити дві цифри "2" на чотирьох місцях можна C_4^2 способами. Після цього інші дві цифри ще на двох місцях утворюють розміщення з повтореннями з 5 по 2. Отже, за правилом множення

$$m = |A| = C_4^2 \cdot 5^2$$

Оскільки усі елементарні події рівно можливі, то за класичним визначенням ймовірності

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot 5^2}{6^4}.$$

1.1.2.3. *Задачі для самостійної роботи.*

1.1.11. Підкидається 5 гральних кубиків. Яка ймовірність, що одна з цифр повторюється рівно три?

1.1.12. Партія деталей містить 6 деталей вищого , 6 деталей першого та 5 деталей другого гатунку. З партії навмання взято 4 деталі. Яка ймовірність, що серед них буде дві першого і дві другого гатунку ;

1.1.13. В урні знаходиться 7 карток з буквами Р,О,Т,А,С,З,У. Із урни навмання без повернення витягують по одній усі картки і букви, що з'являються записують зліва направо. Яка ймовірність, що записане "слово" закінчується тільки двома голосними.

1.1.14. Навмання називається 5-значний телефонний номер, що не містить цифри 0. Яка ймовірність, що парні та непарні цифр чергуються.

1.1.15. Куб, усі грані якого пофарбовані в один колір, розрізаний на однакові кубики, ребро яких становить четверту частину ребра більшого куба. З одержаних кубиків навмання взято три кубики. Яка ймовірність, що в одного з них тільки одна грань пофарбована, а у решти по дві.

1.1.16. В урні знаходиться 9 карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Із урни навмання без повернення витягують по одній усі картки і цифри, що з'являються записують зліва направо. Яка ймовірність, що записане число закінчується тільки двома парними.

1.1.17. А. Знайти ймовірність, що дні народження 12 осіб при-йдуть на різні місяці?

1.1.18. На книжковій полиці навмання розставляють 4 різних підручники з економіки та 3 різних з теорії ймовірностей. Яка ймовірність, що усі підручники з економіки стоятимуть поруч?

1.1.19. В ліфт п'ятиповерхового будинку зайшло 4 осіб. Вважаю-чи, що ліфт починає рухатися з цокольного (нульового) поверху, знайти ймовірність того, що на другому поверсі вийде не більше однієї особи?

1.1.20.. В коробці знаходиться 12 червоних, 6 синіх та 4 зелених олівці. При падінні з коробки випало 6 олівців (усі варіанти рівно можливі). Яка ймовірність, що серед цих олівців 1 зелений, 2 синіх і 3 червоних.;

1.2. Геометрична ймовірність.

1.2.1. *Теоретичні відомості.*

В попередньому пункті було показано, як можна побудувати ймовірнісну модель для стохастичного експерименту із зліченим (скінченим) простором елементарних подій. Проте існують стохастичні

експерименти і з незліченим простором елементарних подій (див. 3.1.1.3,3.1.1.4.). Очевидно, для цього випадку потрібен інший підхід. Потрібно сказати, що цей випадок набагато складніший попереднього. Він потребує використання такого поняття як міра обмеженої множини з простору R^n, продовження міри, тощо. Не заглиблюючися в деталі визначення цих важливих і непростих математичних понять, наведемо тільки основні міркування цього підходу. Будемо грунтуватися на певних інтуїтивних представленнях про міру множини, як узагальнення поняття довжини відрізка (інтервалу) для n=1, площі фігури для n =2, об'єму тіла для n =3.

Розглянемо стохастичний експеримент який полягає у випадковому виборі точки із зліченого простору елементарних подій Ω, який, як множина точок з R^3, має скінчену міру $mes(\Omega)$. Випадковими подіями вважатимемо підмножини A з Ω які мають міру $mes(A)$.

Нехай виконуються такі вимоги:

1) вибрати можна будь-яку точку з Ω ;

2) ймовірність вибору точки з A пропорційна $mes(A)$;

3) ймовірність вибору точки з A не залежить від розміщення A в Ω та її форми.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3. Нехай A – випадкова подія і виконуються умови 1)–3). Тоді ймовірністю P(A) події A називається число

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} \qquad (1.2.1)$$

1.2.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 1.2.1. На відрізку AB довжини L навмання взято точку C. Яка ймовірність, що середнє геометричне довжин відрізків AB та BC не менше за 0,3L. Ймовірність попадання точки на відрізок пропорціональна його довжині і не залежить від його розміщення.

Розв'язання. Розмістимо відрізок AB на координатній прямій так , щоб початок координат O співпадав з точкою A, а додатній напрямок - від точки A до точки B (мал.1.2.1).

Нехай C - довільно взята точка на AB і x - її координата, тобто C = C(x) (очевидно, A = A(0), B = B(L)). Результат такого стохастичного експерименту, повністю визначається множиною

$$\Omega = \{ x \mid 0 \le x \le L \}.$$

Нехай

A = {середнє геометричне довжин відрізків AC та BC не менше за 0,3L }.

Тоді, очевидно, в Ω подія A інтерпретується множиною

$$A = \{ x \mid \sqrt{x(L-x)} \geq 0{,}3L, x \in \Omega \}.$$

Розв'язавши нерівність $\sqrt{x(L-x)} \geq 0{,}3L$, маємо

$$A = \{ x \mid 0{,}1L \leq x \leq 0{,}9L \}.$$

Тоді, за формулою (2.1)

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{0{,}9L - 0{,}1L}{L} = 0{,}8.$$



A C(x) B

Мал.1.2.1.

Задача 1.2.2. (Задача Бюфона.) На площині нанесені паралельні прямі, віддалені одна від одної на відстань $2a$. На площину навмання кидається голка довжиною $2l$ ($l<a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму. Вважається, що виконуються вимоги, щодо застосування поняття геометричної ймовірності.

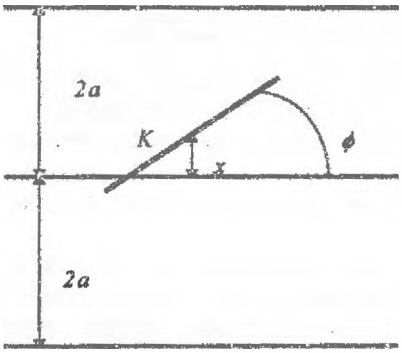
Розв'язання. Нехай x - віддаль від центру K голки до найближчої прямої (мал.1.2.2), кут φ - кут, утворений голкою з цією прямою.

Величини x, φ повністю визначають положення голки. Отже простір елементарних подій - прямокутник (див. мал.2.3)

$$\Omega = \{ (\varphi, x) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi \}.$$

Нехай

C = { голка перетинає яку-небудь пряму} .



Мал. 1.2.2

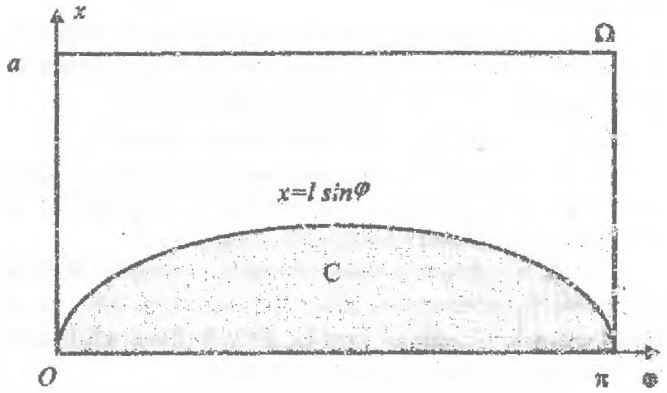
Очевидно, голка перетинає пряму тоді і тільки тоді, коли

$$x \le l\sin\varphi$$

Тоді (мал.1.2.3)

$$C = \{ (\varphi, x) \mid x \le l\sin\varphi,\ (\varphi, x) \in \Omega \}$$

$$P(C) = \frac{mes(C)}{mes(\Omega)} = \frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}$$



Мал.1.2.3

1.2.3. *Задачі для самостійної роботи.*

В усіх наступних задачах вважати, що виконуються усі умови для використання поняття геометричної ймовірності.

1.2.1. На відрізок довжиною L навмання ставиться точка M. Знайти ймовірність події

A={ середнє геометричне утворених відрізків не менше 30% довжини усього відрізка. }

1.2.2. Задача про зустріч (див. 3.1.1.4). Знайти ймовірність події A. Ймовірність попадання точки в плоску область пропорційна її площі і не залежить від її розміщення. Знайти значення ймовірності якщо T = 60 *хв* , τ = 20 *хв*

1.2.3. На відрізок AB навмання ставиться дві точки M і N. Знайти ймовірність події

A={середнє геометричне довжин відрізків AM та AN не менше довжини відрізка MN }.

1.2.4. На відрізок AB навмання ставиться дві точки M і N. Знайти ймовірність події

B={ довжина відрізка MN менше відстані від точки A до найближчої з точок M,N }.

1.2.5. На відрізок довжиною L навмання ставиться точка M. Знайти ймовірність події

A={ середнє геометричне утворених відрізків менше 30% довжини усього відрізка. }

1.2.6. На площину нанесені горизонтальні паралельні прямі з відстанню $2a$ між сусідніми прямими. На площину навмання кидають монета радіусом $r, 0<r<a$. Знайти ймовірність події

A = { монета не перетинає жодну з прямих }.

1.2.7. На відрізок OA довжиною L навмання ставиться дві точки M і N, причому друга з них не ближче до A від першої. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка MN менша L/2.

1.2.8. На площину нанесені горизонтальні та вертикальні паралельні прямі з відстанню $2a$ між сусідніми прямими. На площину навмання кидається монета радіусом $r, 0<r<a$. Знайти ймовірність події

A = { монета не перетинає жодну з прямих }.

1.2.9. На відрізок OA довжиною L навмання ставиться дві точки M і N. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка MN менша L/2.

1.2.10. На відрізку [-1,2] навмання взято два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша одиниці, а добуток менше одиниці.

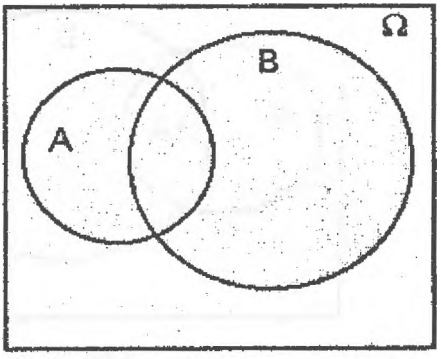
1.3. Алгебра подій. Теореми додавання та множення ймовірностей.

1.3.1. *Теоретичні відомості.*

Нехай події A і B належать одному простору елементарних подій Ω.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.1. Сумою подій A і B називається подія C, яка має місце тоді і тільки тоді, коли має місце хоча б одна з подій A або B. Сума подій A і B позначається $C = A + B = A \cup B$.

Очевидно, в просторі Ω події $C = A + B$ сприяють ті і тільки ті елементарні події, які сприяють хоча б одній з них, тобто C складається з усіх елементарних подій, які належать або A або/і B. Отже, якщо на події дивитися як на підмножини з Ω, то додаванню подій відповідає операція об'єднання множин (мал. 1.3.1).



A + B

Мал.1.3.1.

П р и к л а д 1.3.1. Симетричний гральний кубик підкидається двічі. Розглянемо події

A ={ сума цифр, які випали, кратна 6 },

B ={ сума цифр, які випали, кратна 4 }.

Тоді в просторі елементарних Ω (див.Пр.1.17)

A ={ (1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(6,6) },

B={(1,3),(3,1),(2,2),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3), (4,4),(6,6) },

Очевидно, що

C=A+B={сума цифр, які випали, дорівнює одному з чисел

4,6,8,12} і в Ω

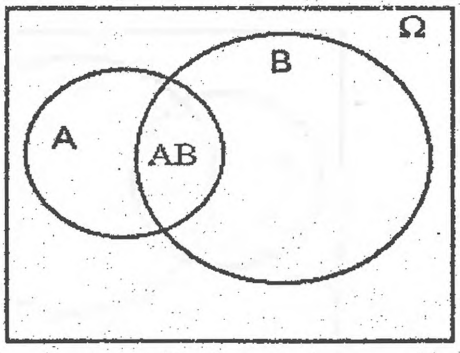
C=A+B={(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(1,3),(3,1),
(2,2),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4),(6,6) } .

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.2. Добутком подій А і В називається подія С , яка має місце тоді і тільки тоді, коли має місце і подій А і подія В. Добуток подій А і В позначається

$$C = A \cap B = AB = A \cdot B.$$

Очевидно, в просторі Ω події $C = AB$ сприяють ті і тільки ті елементарні події, які сприяють кожній з них, тобто С в Ω складається з усіх елементарних подій, які належать і А і В.

Отже, якщо на події дивитися як на підмножини з Ω, то множенню подій відповідає операція перетину множин (мал. 1.3.2).



A·B

Мал.1.3.2.

П р и к л а д 1.3.2. Розглянемо події А і В з Пр.1.3.1. Очевидно, що

C=AB={сума цифр, які випали, дорівнює 12 }

і в Ω

$$C = AB = \{(6,6)\} .$$

Розглянуті операції над множинами є бінарними оскільки визначаються двома операндами. Раніше була розглянута унарна операція над подіями – перехід до протилежної події. Ці операції відносяться до основних операцій над випадковими подіями (існують і інші).

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.3. Події А і В називаються несумісними, якщо їх добуток - неможлива подія, тобто $AB = \varnothing$. В решті випадків

події називаються сумісними.

Очевидно, подія А і протилежна їй подія $\overline{A}$ - несумісні (випливає з визначення протилежної події). Має місце така

ТЕОРЕМА 1.3.1. (Теорема додавання ймовірностей двох подій) Нехай А і В випадкові події. Тоді

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (1.3.1)$$

НАСЛІДОК 1.3.1. Якщо події А і В несумісні, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1.3.2)$$

НАСЛІДОК 1.3.2. Якщо подія $\overline{A}$ протилежна події A то

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (1.3.3)$$

Про використання формули (1.3.3) говорилося вище.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються несумісними, якщо несумісні кожні дві з них:

$$A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,n.$$

Формули (1.3.1),(1.3.2) можна узагальнити на будь-яке скінчене число подій, зокрема

НАСЛІДОК 1.3.3. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несумісні, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (1.3.4)$$

В ряді випадків при обчисленні ймовірності події А враховують той факт, що при цьому має місце деяка подія В (яка має додатну ймовірність). В такій ситуації говорять про умовну ймовірність події А при умові , що має місце подія В і позначають її так P(A/B). Ймовірність P(A) тепер ще будемо називати безумовною ймовірністю.

Перш ніж давати визначення умовної ймовірності для ймовірнісної моделі, розглянемо декілька прикладів , використовуючи наведене інтуїтивне розумінням умовної ймовірності.

П р и к л а д 1.3.3. Нехай гральний кубик підкидається двічі. Розглянемо події:

A = {першого разу випала цифра 1}

B = {сума очок, які випали, менша 4},

C = {другого разу випала цифра 1} .

Обчислимо умовні ймовірності P(A/B) , P(A/C).

Розв'язання. Очевидно,

$$\Omega = \{(i,j) \mid i=1,\ldots,6\ ;\ j = 1,\ldots,6\},$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\},$$

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$

$$C = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}.$$

Якщо відомо, що подія B має місце, то події A тоді сприяють лише елементарні події (1,1),(1,2). Тому P(A/B)= =2/3 . Аналогічно P(A/C) = 1/6.

Для з'ясування ймовірнісної суті поняття умовної ймовірності розглянемо попередній приклад і обчислимо ймовірності P(B), P(C), P(AB), P(AC) :

$$P(B) = 3/36=1/2\ ,\ P(C) = 6/36 = 1/6\ ,$$
$$P(AB) = 2/36 = 1/18,\ P(AC) = 1/36.$$

Тепер неважко переконатися, що в обох випадках

$$P(A/B) = P(AB)/\ P(B)\ ,\quad P(A/C) = P(AC)/\ P(C)\ .$$

Більше того, можна довести, що формула

$$P(A/B) = P(AB)/P(B)$$

має місце в класичній моделі ймовірності для будь-яких подій A і B, коли P(B)>0 . Тому умовну ймовірність визначають таким чином.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.4. Нехай A і B випадкові події і P(B)>0. Тоді умовною ймовірністю P(A/B) події A по події B називається число

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) \qquad (1.3.5.)$$

Знайдемо ймовірність події A з Пр. 1.3.3:

$$P(A) = 6/36 = 1/6\ .$$

Отже, взагалі кажучи, умовна та безумовна ймовірності події не співпадають. Проте для подій A і C маємо P(A/C) = P(A). Ці обставини покладені в основу означення поняття залежних та незалежних події.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.5. Нехай A і B випадкові події . Події A і B називаються <u>незалежними</u>, якщо P(A/B) = P(A)(або P(B/A) = P(B)). В супротивному випадку вони називаються <u>залежними</u>.

П р и к л а д 1.3.4. Розглянемо події A, B і C з попереднього прикладу. Оскільки P(A/B) ≠ P(A) і P(A/C) = P(A), то події A і B залежні , а події A і C незалежні.

З (1.3.5) безпосередньо випливає такий результат.

ТЕОРЕМА 1.3.2. (Теорема множення ймовірностей двох подій). Якщо A і B випадкові події, P(A)>0 (P(B)>0), то

$$P(AB)=P(A)P(B/A),\ (P(AB)=P(B)P(A/B)) \qquad (1.3.6)$$

У випадку добутку n подій має місце таке узагальнення попередньої теореми.

ТЕОРЕМА 1.3.3. (Теорема множення ймовірностей.) Якщо A_i, i=1,2,...,n , випадкові події, то

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}) \quad (1.3.7)$$

(вважається, що усі умовні ймовірності існують).

Якщо події А і В незалежні , то з Т.1.3.2 маємо такий

НАСЛІДОК 1.3.4. Якщо випадкові події А і В незалежні, то

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad (1.3.8)$$

У зв'язку з поняттям умовної ймовірності відмітимо наступне.

ЗАУВАЖЕННЯ 1.3.1. Співвідношення (1.3.8) рівносильне умові незалежності подій, тому може бути прийняте за означення незалежності подій.

Прийнявши до уваги попереднє зауваження, дамо визначення поняття подій, незалежних в сукупності

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.6. Події $A_1,A_2,...,A_n$ називаються незалежними в сукупності (взаємно незалежними), якщо

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n) \quad (1.3.9)$$

Очевидно, подією протилежною до події

$$A_1+A_2+...+A_m$$

є подія

$$\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_m$$

Тому з О.1.3.6 випливає

НАСЛІДОК 1.3.5. Якщо випадкові події $A_1,A_2,...,A_m$ незалежні в сукупності, то для ймовірності

$$P(A_1+A_2+...+A_m)$$

появи хоча б однієї з них маємо

$$P(A_1+A_2+...+A_m)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_m) \quad (1.3.10)$$

Надалі події незалежні в сукупності називатимемо незалежними.

1.3.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 1.3.1. В ящику знаходиться 7 деталей вищого та 4 деталі першого гатунку. З ящика навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірності подій

а) серед них не менше двох деталей вищого гатунку;

b) хоча б одна деталь першого гатунку.

Розв'язання.

Розглянемо події

А = {не менше двох деталей вищого гатунку},

B = {хоча б одна деталь першого гатунку},
A_0 = {усі деталі першого гатунку}.
A_1 = {лише одна деталь вищого гатунку}.
A_2 = {лише дві деталі вищого гатунку}.
A_3 = {лише три деталі вищого гатунку},
A_4 = {чотири деталі вищого гатунку}.
Знайдемо ймовірність події A.
Очевидно,

$$A = A_2 + A_3 + A_4.$$

$$\overline{A} = A_0 + A_1 .$$

Тому простіше знайти спочатку $P(\overline{A})$, а потім P(A). За класичним визначенням ймовірності

$$P(A_0) = \frac{C_4^4}{C_{11}^4} = \frac{1}{C_{11}^4} \quad , \quad P(A_1) = \frac{C_4^3 C_7^1}{C_{11}^4} .$$

Тому

$$P(\overline{A}) = P(A_0) + P(A_1) = \frac{1}{C_{11}^4} + \frac{C_4^3 C_7^1}{C_{11}^4}$$

Тоді

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1 + C_4^3 C_7^1}{C_{11}^4} .$$

Знайдемо ймовірність події B.

Очевидно, $B = \overline{A}_4$ і $P(A_4) = \frac{C_7^4}{C_{11}^4}$.

Тому $P(B) = 1 - P(A_4) = 1 - \frac{C_7^4}{C_{11}^4}$

Задача 1.3.2. Студент знає 20 з 25 програмних питань іспиту. Для успішного складання іспиту потрібно відповісти на два запропоновані навмання викладачем запитання. Яка ймовірність скласти іспит?

Розв'язання. Розглянемо події

A = { студент успішно здасть іспит },
B = { студент відповість на перше запитання },
C = { студент відповість на друге запитання } .

Очевидно, A=BC. Тоді згідно, (4.1)

$$P(A)=P(BC)=P(B)P(C/B).$$

За класичним визначенням ймовірності

$$P(B)=20/25 = 4/5.$$

Після відповіді на перше запропоноване запитання, залишилося всього 24 запитання, на 19 з яких студент може відповісти. Тому

$$P(C/B)=19/24.$$

Отже,

$$P(A)=P(BC)=P(B)P(C/B)= \frac{4}{5}\cdot\frac{19}{24} = \frac{19}{30} \approx 0{,}633$$

Задача 1.3.3. В приміщенні встановлено три сигналізатори про пожежу по одному трьох типів T1,T2 і T3. Ймовірність спрацювання сигналізатора при пожежі (його надійність), незалежно від інших, для типу T1 становить 0.9, для решти відповідно 0,8, 0,7. Знайти ймовірності подій:

A={ при пожежі спрацює тільки сигналізатор типу T1},

B={ при пожежі спрацює тільки один сигналізатор },

C={при пожежі не спрацює жоден сигналізатор },

D={при пожежі спрацює хоча б один сигналізатор }.

Розв'язання. Розглянемо події

S1 = { при пожежі спрацював сигналізатор типу T1},

S2 = { при пожежі спрацював сигналізатор типу T2},

S3 = { при пожежі спрацював сигналізатор типу T3}.

Очевидно

$$A = S1\cdot\overline{S2}\cdot\overline{S3}\ ,\ B = \overline{S1}\cdot\overline{S2}\cdot S3 + \overline{S1}\cdot S2\cdot\overline{S3} + S1\,\overline{S2}\,\overline{S3},$$

$$C = \overline{S1}\cdot\overline{S2}\cdot\overline{S3}\ ,\ D = S1+S2+S3.$$

Оскільки події S1,S2 і S3 незалежні за умовою, то згідно з (4.5)

$$P(A)=P(S1\cdot\overline{S2}\cdot\overline{S3}) = P(S1)\cdot P(\overline{S2})\cdot P(\overline{S3}) = 0{,}9(1-0{,}8)(1-0{,}7)= 0{,}90{,}20{,}3 = 0{,}054.$$

Очевидно, події $\overline{S1}\,\overline{S2}\,S3$, $\overline{S1}\,S2\,\overline{S3}$, $S1\,\overline{S2}\,\overline{S3}$ несумісні, тому , використовуючи Н.3.3 та Н.4.2, маємо

$$P(B) = P(\overline{S1}\,\overline{S2}\,S3 + \overline{S1}\,S2\,\overline{S3} + S1\,\overline{S2}\cdot\overline{S3}) =$$

$$= P(\overline{S1})\cdot P(\overline{S2})\cdot P(S3) +$$

$$+ P(\overline{S1})\cdot P(S2)\cdot P(\overline{S3}) + P(S1)\cdot P(\overline{S2})\cdot P(\overline{S3}) =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 + +0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 +$$

$$+ 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0.092\ .$$

Для події C за теоремою множення для незалежних подій має-

$$P(C) = P(\overline{S1} \cdot \overline{S2} \cdot \overline{S3}) = P(\overline{S1}) \cdot P(\overline{S2}) \cdot P(\overline{S3}) =$$
$$= 0.1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

Подія D протилежна події С (див. також Н.4.3), тому згідно (3.3)

$$P(D) = 1 - P(C) = 0{,}092 = 0{,}918.$$

1.3.3. *Задачі для самостійної роботи.*

1.3.1. Три стрільці стріляють в мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,75; для другого - 0,8; для третього - 0,9. Знайти ймовірність того, що:

а) усі три стрільці влучать в ціль;

б) усі три промахнуться;

в) тільки один стрілець влучить в ціль;

1.3.2. За деякий проміжок часу Т банк може збанкрутувати з ймовірністю 2/5, залишитися надалі автономним з ймовірністю 2/5 і утворити один дочірній банк (філіал) з ймо-вірністю 1/5. В наступний такий же проміжок часу з кожним банком незалежно від його "походження" відбувається теж саме. Яка ймовірність, що у кінці другого проміжку часу буде менше трьох банків ?

1.3.3. В першому ящику 6 білих і 4 чорних кулі, в другому - 7 білих і 3 чорних. З кожного ящика навмання виймають по одній кулі. Чому дорівнює ймовірність того, що

а) витягнуті кулі різного кольору;

б) серед витягнутих куль хоча б одна чорна?

1.3.4. Для знищення цілі досить влучення хоча б одного снаряду. Проведено два залпи з двох гармат. Знайти ймовірність знищення цілі, якщо ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,3 , а з другої - 0,4 (вважається, що може мати місце декілька влучень у ціль)?

1.3.5. В театральній касі в певний момент залишилися: 1 квиток в театр естради, 2 квитки в драматичний театр і 3 квитки в театр комедії. Кожен черговий покупець купує лише один квиток з однаковою ймовірністю в будь-який з можливих театрів. Три особи з черги послідовно придбали квитки. Знайти ймовірності подій:

А={ куплені квитки в різні театри},

В={ білет в театр комедії придбано раніше ніж в театр естради }.

1.3.6. Ймовірність відмови приладу, після того як він використовувався k разів дорівнює $p(k)$. Відомо, що при перших m застосуваннях прилад не відмовив. Яка ймовірність, що при наступних n застосуваннях прилад відмовить ?

1.3.7. В одному ящику 5 білих і 10 червоних куль, в другому ящику 8 білих і 3 червоних куль. З кожного ящика нав-мання витягують по дві кулі. Яка ймовірність того , що

а) білих куль в одержаному наборі буде рівно одна;

б) білих куль в одержаному наборі буде не більше однієї?

1.3.8. Для повідомлення про пожежу в приміщенні встановлені три сигналізатори, які працюють незалежно. Ймовірність того, що при пожежі спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,95. Для другого та третього сигналізаторів ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,9 та 0,8. Яка ймовір-ність, що при пожежі спрацює

а) рівно два сигналізатори;

б) принаймі два;

в) жоден сигналізатор?

1.3.9. Студенти виконують роботу в класі контролюючих машин. Робота складається з трьох задач. Для отримання позитивної оцінки досить розв'язати дві. Для кожної задачі зашифровано чотири різні відповіді, з яких тільки одна правильна. Студент Іванов матеріал знає погано, тому вибирав відповідь навмання. Яка ймовірність того, що він отримає позитивну оцінку ?

1.3.10. Іван та Петро придбали кожен по дві картки "Спорт-лото 5 з 36". Іван заповнив одну картку сам, а другу попросив заповнити одного з членів своєї сім'ї, не повідомивши йому свого варіанту заповнення. Петро заповнив обидві картки сам, причому в одній з них відмітив номери 1,3,5,32,33, а іншій - 1,3,5,22,23. У кого з них більше шансів отримати мінімальний виграш і у скільки разів? (Учасник лотареї отримує мінімальний виграш, якщо вгадає рівно три номери.)

1.4. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.

1.4.1. Повна група подій. Формула повної ймовірності.

1.4.1.1. *Теоретичні відомості.*

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.1. Події $H_1, H_2, \ldots, H_m$ утворюють *повну гру-*

ну подій, якщо вони несумісні, тобто $H_iH_j=\varnothing$, $i\neq j$ і їх сума є достовірна подія. Події $H_1, H_2,..., H_m$ іноді називають гіпотезами.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Якщо події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, А – випадкова подія , то

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i) \qquad (1.4.1)$$

Формула (1.4.1) називається формулою повної ймовірності.

1.4.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

П р и к л а д 1.4.1. В магазин надходить вироби з трьох швейних фабрик у співвідношенні 3:2:5. Для першої фабрики продукція вищого гатунку складає 90%, для другої і третьої - відповідно 85% і 80%. Яка ймовірність, що навмання взятий виріб згаданих фабрик буде вищого гатунку.

Розв'язання. Розглянемо події

A = { навмання взятий виріб вищого гатунку},

H1 = { виріб виготовлений першою фабрикою },

H2 = { виріб виготовлений другою фабрикою },

H3 = { виріб виготовлений третьою фабрикою }.

Події H1, H2, H3 ,очевидно, утворюють повну групу подій. Тому за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H1)\cdot P(A/H1) + P(H2)\cdot P(A/H2) + P(H3)\cdot P(A/H3),$$

Оскільки кількість виробів фабрик у магазині знаходяться у співвідношенні 3:2:5, то

$$P(H1)=0,3\ ,\ P(H2)=0,2,\ P(H3)=0,5.$$

За умовою

$$P(A/H1)=0,9,\ P(A/H2)=0,85,\ P(A/H3)=0,8\ .$$

Тепер маємо

$$P(A) = 0,3\cdot 0,9 + 0,2\cdot 0,85 + 0,5\cdot 0,8 = 0,84$$

1.4.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

1.4.1. В наявності є три партії комп'ютерів індивідуального користування, виготовлених на різних заводах у кількостях 20,30 і 50 штук. Ймовірність того, що комп'ютери поставлені різними заводами, попрацюють без ремонту заданий термін, відповідно дорівнює

для цих партій 0,7, 0,8, 0,9. Яка ймовірність того, що вибраний навмання комп'ютер з ста даних пропрацює без ремонту заданий час ?

1.4.2. В обчислювальній лабораторії розміщено 6 клавішних автоматів та 4 напівавтомати. Ймовірність того, що при ви-конанні розрахунків автомат не вийде з ладу, дорівнює 0,95, а для напівавтомата така ймовірність дорівнює 0,8. Знайти ймовірність, що до завершення обрахунків навмання взята машина не вийде з ладу?

1.4.3. Відомо, що 96% виробів, які випускаються заводом, відповідають стандарту. Спрощена схема контролю якості продукції визнає стандартну деталь придатною з ймовірністю 0,98, а нестандартну - з ймовірністю 0,05. Яку частку виробів система контролю відносить до придатних ?

1.4.4. Студент знає не усі екзаменаційні білети. В якому випадку ймовірність витягнути невивчений білет більша, коли він бере білет першим, другим (чи останнім)?

1.4.5. Клієнт має можливість покласти гроші на довготривалий рахунок в один з трьох банків. Ризик (тобто, можливість банкрутства банку протягом зазначеного терміну) при цьому становить 2% для першого банку, 3% та 4% відповідно для другого та третього. Яка ймовірність невигідного вкладання коштів в банк вибраний навмання?

1.4.6. В електронно-обчислювальній машині 10 % з усіх відмов приходиться на арифметичний пристрій, 20 % на оперативну пам'ять, 30% на пристрої зовнішньої пам'яті решта на периферійні пристрої. Ймовірність ліквідації відмови у цих пристроях з допомогою служби ТО відповідно дорівнює 0,1, 0,2, 0,4 і 0,8. Яка ймовірність що відмов, що виникла, буде ліквідована силами служби ТО?

1.4.7. В сітці знаходяться 28 футбольних м'ячів, серед яких 20 нових і 8, які були у вжитку. Із сітки навмання витягують два м'ячі і після гри повертають у сітку. Після цього із сіт-ки знову виймають два м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що обидва ці м'ячі будуть новими?

1.4.8. Радіолампи виготовляються на двох заводах, причому перший з них постачає 70% , другий - 30%. усієї продукції. З кожних 100 ламп першого заводу в середньому 80 стандартних, а з 100 ламп другого заводу лише 60. Яка ймовірність отримання замовником стандартної лампи ?

1.4.9. По телеграфному каналу хаотично передаються два типи сигналів "крапка" та "тире". Перший сигнал передається у тричі частіше ніж другий. Для сигналу "крапка" ймовірність прийняття йо-

го без спотворення дорівнює 0,9, для сигналу "тире" – 0,95. Яка ймовірність того, що відправлений сигнал буде прийнятий без спотворення?

1.4.10. В кожній з 10 урн міститься по 6 білих і 4 чорних кулі, а в кожній з наступних 5 урн міститься відповідно по 3 і 7 куль. З навмання взятої урни навмання витягнута куля. Яка ймовірність, що вона біла?

1.4.2. Формули Байєса.

1.4.2.1. *Теоретичні відомості.*

В багатьох задачах та прикладних застосуваннях теорії ймовірностей потрібно знайти умовні ймовірності гіпотез (подый, якы утворюють повну групу)

$$P(H_i/A),\ i = 1, \ldots, n.$$

За деякою випадковою подією А. Для таких ймовірностей мають місце формули (формули Байєса)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (5.2)$$

Іноді ймовірності $P(H_i)$ і $P(H_i/A)$ називають відповідно апріорними та апостеріорними ймовірностями гіпотез.

1.4.2.2. *Приклади розв'язування задач.*

П р и к л а д 1.4.2. На збиральний конвеєр надходять деталі з двох цехів. В продукції першого цеху брак складає 2%, для другого цеху – відповідно 4%. Випадково взята деталь з конвеєра виявилася бракованою. Яка ймовірність, що вона надійшла з першого цеху, якщо продуктивність першого цеху втричі менша за продуктивність другого?

Розв'язання. Розглянемо події

A = { випадково взята деталь виявилася бракованою },

H1 = { деталь виготовлена першим цехом },

H2 = { деталь виготовлена другим цехом }.

За умовою потрібно знайти ймовірність P(H1/A). За формулами Байєса маємо

$$P(H1/A)=\frac{P(H1)P(A/H1)}{P(H1)P(A/H1)+P(H2)P(A/H2)}.$$

З умови випливає, що P(H1)=0,25, P(H2)=0,75. Крім того P(A/H1)=0,02, P(A/H2)=0,04.

Тоді

$$P(H1/A)=\frac{0,25\cdot 0,02}{0,25\cdot 0,02+0,75\cdot 0,04}\approx 0,167$$

1.4.2.3. *Задачі для самостійної роботи.*

1.4.11. В наявності є три партії комп'ютерів індивідуального користування, виготовлених на різних заводах у кількостях 20,30 і 50 штук. Ймовірність того, що комп'ютери поставлені різ-ними заводами пропрацюють без ремонту заданий термін, відповідно дорівнюють для цих партій 0,7, 0,8, 0,9. Навмання вибраний комп'ютер пропрацював заданий термін без ремонту. Яка ймовірність того, що вибраний комп'ютер належав до першої партії?

1.4.12. В магазин надходять телевізори з трьох заводів. В продукції першого заводу 20 % телевізорів мають прихований дефект, для другого заводу ця величина становить 10 %, третього - 5%. В магазин надійшли для продажу 30 телевізорів першого заводу, 50 - другого і 20 третього. У навмання взятому телевізорі виявлено прихований дефект. Яка ймовірність, що він надійшов з другого заводу ?

1.4.13. Відомо, що 95% виробів, які випускаються заводом, відповідають стандарту. Спрощена схема контролю якості продукції визнає стандартну деталь придатною з ймовірністю 0,95, а нестандартну - з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що виріб, прийнятий такою системою контролю, відповідає стандарту ?

1.4.14. В кожній з 10 урн міститься по 6 білих і 4 чорних кулі, а в кожній з наступних 5 урн міститься відповідно по 3 і 7 куль. З навмання взятої урни навмання витягнута куля ви-явилася білою. Яка ймовірність, що вона витягнута з першої групи урн?

1.4.15. На трьох дочок у сім'ї (старшу, середню та молодшу) покладений обов'язок мити посуд. Старша дочка виконує 40% усієї роботи, інші по 30%. Ймовірність розбити при митті посуд для старшої дочки становить 0,02, для середньої та молодшої відповідно 0,03 та 0,04. Невідомо хто напередодні мив посуд, але одна тарілка виявилася розбитою. Яка ймовірність, що

а) посуд мила старша;

б) посуд мила середня;

в) посуд мила молодша дочка?

1.4.16. В ящику знаходяться однакові деталі двох заводів у співвідношенні 1:3. Серед деталей першого заводу брак становить 3% , серед деталей другого - 2%. Навмання взята деталь з ящика виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена першим заводом?

1.4.17. В електронно-обчислювальній машині 10 % з усіх відмов припадає на арифметичний пристрій, 20 % на оперативну пам'ять, 30% на пристрої зовнішньої пам'яті решта на периферійні пристрої. Ймовірність ліквідації відмови у цих пристроях з допомогою служби ТО відповідно дорівнює 0,1, 0,2, 0,4 і 0,8 . Відмова, що виникла, була ліквідована службою ТО . Яка ймовірність, що вона стосувалася оперативної пам'яті?

1.4.18. В одній із студентських груп навчається 20 дівчат та 10 юнаків. До практичного заняття по теорії ймовірностей не підготувалися 4 дівчини та 3 юнаки. Навмання опитаний студент виявився непідготовленим до заняття. Яка ймовір-ність, що опитаним був юнак?

1.4.19. Для приймання заліку викладач приготував 50 задач: 20 - з диференціального числення, 20 - з інтегрального числення та 10 з теорії ймовірностей. Для отримання заліку не-обхідно розв'язати навмання запропоновану задачу. Студент уміє розв'язувати лише 18 задач з диференціального числення, 15 - з інтегрального числення та 5 - з теорії ймо-вірностей. Відомо, що студент здав залік. Яка ймовірність, що він розв'язував задачу з теорії ймовірностей?

1.4.20. Технічний пристрій вийде з ладу, якщо відмовить будь-який з трьох незалежно працюючих елементів. Прилад вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що відмовили перший та другий, якщо ймовірності відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють: 0,2, 0,4, 0,3.

2. ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ.

2.1. Поліноміальна схема. Схема Бернуллі.

2.1.2. *Теоретичні відомості.*

Нехай стохастичний експеримент полягає в проведенні *n* випробувань, в кожному з яких можливі N різних результатів. Взагалі

кажучи, ймовірність одного і того ж результату в i-му випробуванні може залежати як від результатів попередніх випробувань, так і номера випробування i. Якщо відсутня перша обставина, говорять про незалежні випробування, коли ж відсутня залежність згаданих ймовірностей від номера випробування говорять про однорідні випробування (інакше випробування називають відповідно залежними та неоднорідними).

Послідовність з n незалежних однорідних випробувань називається поліноміальною схемою. Позначимо через

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_N)$$

ймовірність того, що в n випробуваннях поліноміальної схеми i-ий результат спостерігався (незалежно від порядку) рівно k_i разів ($k_1+k_2+\ldots+k_N=n$). Для цієї ймовірності має місце формула

$$\begin{aligned} P_n(k_1,k_2,\ldots,k_N) &= \\ &= \bar{P}(k_1,k_2,\ldots,k_n)\, p_1^{k_1} p_2^{k_2}\ldots p_N^{k_N} = \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_N!} p_1^{k_1} p_2^{k_2}\ldots p_N^{k_N} \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

де p_j - ймовірність того, що в окремому випробуванні спостерігався j-й результат, $j=1,\ldots,N$.

Поліноміальна схема з $N=2$ називається схемою Бернуллі. Оскільки результатів випробування всього два, то часто один з них позначають "У" ("Успіх"), а інший "Н" ("Неуспіх"), або закодовують відповідно цифрами 1 та 0. Відповідні ймовірності позначають p та q ($p+q=1$).

Позначимо через $P_n(k)$ ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі "Успіх" спостерігався k разів. Для цієї ймовірності з (2.1.1) одержуємо таку формулу (формула Бернуллі)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (2.1.2)$$

2.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 2.1.1. Кожен покупець магазину , незалежно від інших, робить покупку товару довготривалого користування за готівку з ймовірністю 0,05, товару іншого призначення за готівку - з ймовірністю 0,25, оформляє покупку в кредит з ймовірністю 0,01 і залишає магазин без покупки з ймовірністю 0,69.

Яка ймовірність, що з 6 покупців один оформить кредит, двоє придбають звичайні товари за готівку і троє не зроблять жодної покуп-

ки.

Розв'язання. Маємо поліноміальну схему з n=6, p_1 =0,05, p_2 = 0,25, p_3 = 0,01, p_4 =0,69. За умовою потрібно знайти ймовірність $P_6(0,2,1,3)$. За формулою (2.1.1) маємо

$$P_6(0,2,1,3) = \frac{6!}{0!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot 0,05^0\cdot 0,25^2\cdot 0,01\cdot 0,69^3 \approx 0,021.$$

Задача 2.1.2. Пара однакових гральних кубиків підкидається 7 разів. Які ймовірності наступних подій

A = { сума очок , рівна 7, випаде двічі},

B = { сума очок , рівна 7, випаде хоча б один раз },

C = { тільки три рази випаде сума очок, більша 7 },

D = { тільки чотири рази випаде сума рівна 12 }

Розв'язання. Маємо схему Бернулі з n = 7. Для подій A та B "Успіх" в цій схемі означає подію

F = { при підкиданні двох гральних кубиків випала сума очок рівна 7 }.

Знайдемо ймовірність цієї події. Використовуючи класичне визначення ймовірності, маємо

$$p = P(F) = 6/36 = 1/6.$$

Тоді q=5/6.

Для події A k=2, тому за формулою Бернулі (2.1.2)

$$P(A)= C_7^2(1/6)^2(7/6)^5.$$

Для події B k > 0 , а для протилежної події k = 0, тому за формулою Бернулі (або ж теоремою множення ймовірностей незалежних подій) маємо

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (5/6)^7 = 0,72\ldots .$$

Для події C "Успіх" означає подію

Q= {при підкиданні двох гральних кубиків випала сума очок більша 7},

а k=3. Знайдемо ймовірність події Q. Використовуючи класичне визначення ймовірності, маємо

$$p = P(Q) = 25/36 .$$

Тоді q=21/36. Тепер за формулою (2.1.2) маємо

$$P(C)= C_7^3(25/36)^3(11/36)^4.$$

Для події D k=4, а "Успіх" означає подію

R = { при підкиданні двох гральних кубиків випала сума очок рівна 12 },

Знайдемо ймовірність цієї події. Використовуючи класичне визначення ймовірності, маємо

$$p = P(R) = 1/36 .$$

Тоді q=35/36. Тому за формулою (2.1.2) маємо

$$P(D)= C_7^4 (1/36)^4 (35/36)^3 .$$

2.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

2.1.1. В квартирі чотири електролампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона вийде з ладу на протязі року, дорівнює 5/6. Яка ймовірність того, що на протязі року доведеться замінити не менше половини лампочок?

2.1.2. Гральний кубик підкидають тричі. Знайти ймовірність того , що

а) рівно двічі з'явиться число очок кратне трьом ;

б) парне число випаде принаймі двічі?

2.1.3. В ящику знаходиться однакова кількість деталей виготов-ленних заводами № 1 та № 2. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання відібраних деталей (вибір з поверненням), виготовлених заводом № 1 виявиться:

а) дві деталі;

б) менше двох деталей;

в) більше двох деталей?

2.1.4. Нехай ймовірність того, що телевізор вимагатиме ремонту впродовж гарантійного строку, дорівнює 0,2. Знайти ймо-вірність того, що на протязі гарантійного строку, з трьох телевізорів:

а) не більше ніж одному буде потрібен гарантійний ремонт;

б) хоча б один не вимагатиме ремонту.

2.1.5. Відділ технічного контролю перевіряє деталі на стандартність. Ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що :

а) з 3 перевірених деталей тільки одна нестандартна;

б) з 5 перевірених деталей принаймі 4 деталі будуть стандартними.

2.1.6. Мале підприємство виготовляє деякі вироби, в які, за бажанням клієнта можна додатково включити два види оздоблення, що виключають один одного. Ймовірність того, що черговий клієнт замовить послугу без оздоблення дорівнює 0,5, з оздобленням першого

виду 0,3, другого - 0,2. Знайти ймовірність, що з 5 чергових клієнтів три замовлять послугу без оздоблення;

2.1.7. В автопарку є 12 автобусів. Ймовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку в найближчий день, якщо для цього потрібно мати на лінії не менше 8 автобусів ?

2.1.8. Пристрій складається з 6 незалежно працюючих елементів, кожен з яких з ймовірністю 0,1 може на протязі певного часу T вийти з ладу. Яка ймовірність, що протягом цього часу вийде з ладу тільки два елементи?

2.1.9. Для повідомлення про пожежу в аудиторії встановлено 6 автоматичних сигналізаторів, кожен з яких при пожежі, незалежно від інших, спрацьовує з ймовірністю 0,9. Яка ймовірність, що при пожежі

1)спрацює тільки один сигналізатор; 2) спрацює 3 сигналізатори.

2.1.10. Ймовірність того, що деталь не задовольняє стандарту становить 0,05. Яка ймовірність, що серед 6 деталей 1) рівно одна не задовольняє стандарту; 2) деталей, які не задовольняють стандарту не більше двох?

2.2 Граничні теореми в схемі Бернулі.

2.2.1. Теорема Пуасона.

2.2.1.1. *Теоретичні відомості.*

Для обчислення ймовірності P(k) в схемі Бернулі за формулою (2.1.2) при великих n (що часто зустрічається на практиці) виникають певні труднощі. Ці труднощі ще більше зростають, коли потрібно обчислити ймовірність P(k,m) того, що в n випробуваннях схеми Бернулі "Успіх" з'явиться не менше k і не більше m разів, адже для цього потрібно обчислити суму

$$P_n(k,m) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(m).$$

Ці обставини змусили шукати наближені формули для обчислення таких ймовірностей. Наведемо три найбільш важливі результати в цьому напрямку.

ТЕОРЕМА 2.2.1.. (Теорема Пуасона) Якщо в схемі повторення випробувань $n \to \infty$ і $p_n \to 0$ так, що $np_n \to \lambda < \infty$, то

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

при будь-якому сталому k, $k = 0,1,2,\ldots$.

З теореми випливає що при великих n і малих p можна використовувати наближену формулу (формула Пуасона)

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ де } \lambda = np \qquad (2.2.1)$$

В простих розрахунках можна вважати, що використання формули Пуасона виправдане при $npq \le 9$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2.2.1. Якщо для великого n малим є q (тобто p близьке до 1), то формулу (7.1) можна використовувати для обчислення ймовірності числа "Невдач" в схемі Бернулі.

2.2.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 2.2.1. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені на протязі однієї хвилини дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на протязі однієї хвилини нитка обірветься більше ніж на трьох веретенах.

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі з n = 1000. "Успіх" в цій схемі означає обрив нитки на окремому веретені. Ймовірність p цієї події за умовою дорівнює p=0,002 і є досить малою. Тому використаємо формулу (2.2.1) ($\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$) . Розглянемо подію

A={ на протязі хвилини нитка обірветься більше ніж на трьох веретенах }.

Використовуючи протилежну подію, можна записати

$$P(A) = 1 - P_{1000}(k < 4) =$$

$$= 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3)) =$$

$$= 1 - \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} - \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}1428$$

Задача 2.2.2. Рибалка закинув спінінг 100 разів. Яка ймовірність того, що він спіймає хоча б одну рибину, коли відомо, що спіймана рибина приходиться в середньому на 200 закидань.

Розв'язання. Маємо схему Бернулі з n = 100. "Успіх" в цій схемі означає спіймати рибину. Ймовірність цієї події за умовою до-

рівнює p = 1/200 = 0,005. Потрібно знайти ймовірність $P_{100}(m>0)$. Використавши для протилежної події формулу (7.1) ($\lambda = np = 100 \cdot 0{,}005 = 0{,}5$), маємо

$$P_{100}(0) = \frac{0{,}5^0 e^{-0{,}5}}{0!} \approx 0.60653.$$

Тоді ймовірність спіймати хоча б одну рибку дорівнює

$$1 - P_{100}(0) \approx 0{,}39347 \approx 0{,}39 .$$

Зауважимо, що формула Бернуллі для ймовірності $P_{100}(0)$ дає такий результат

$$P_{100}(0) = 0{,}60577 !$$

2.2.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

2.2.1. Ймовірність помилкового з'єднання абонентів АТС дорів-нює 0,008. Яка ймовірність що серед 500 викликів, що надійшли на АТС, буде а) рівно 4 помилкових з'єднання; б) менше 3 помилкових з'єднань; в) не менше 3 помилкових з'єднань?

2.2.2. Ймовірність того, що конденсатор задовольняє технічним умовам дорівнює 0,998. Яка ймовірність, що партія з 1000 конденсаторів а) містить рівно 598 кондиційних; б) містить не більше 597 кондиційних; в) містить не менше 597 кондиційних?

2.2.3. При стабільній епідеміологічній обстановці ймовірність захворіти на інфекційну хворобу А становить приблизно 0,0003. Яка ймовірність, що серед 10000 осіб буде виявлено а) 3 хворих на хворобу А; б) менше 3 хворих; в) більше 3 хворих?

2.2.4. Ймовірність того, що пасажир запізниться до відправлення потягу, дорівнює 0,005. Знайти найбільш ймовірну кількість пасажирів, що запізняться, з 625 пасажирів, а також ймовір-ність цієї події.

2.2.5. Ймовірність виграшу в лотареї дорівнює 0,001. Яка ймовір-ність, що серед 3000 придбаних лотарейних квитків а) міс-титься рівно 3 з виграшем; б) міститься не менше 2 з виграшем; в) міститься не більше 2 з виграшем?

2.2.6. Ймовірність пошкодження при транспортуванні заводу до пункту збуту для одного пристрою, не залежно від інших, становить 0.002. Яка ймовірність, що при транспортуванні 1000 одиниць продукції

а) буде пошкоджено рівно 3 одиниці;

б) буде пошкоджено не більше двох одиниць;

в) буде пошкоджено не менше двох одиниць?

2.2.7. Ймовірність події А в одному випробуванні незалежно від інших становить 0.005. Яка ймовірність, що у 400 випробовуваннях

а) подія А відбудеться рівно 2 рази;

б) подія А відбудеться не більше двох 2 разів;

в) подія А відбудеться не менше 2 разів.

2.2.8. Ймовірність того, що деталь, яка пройшла систему контролю, кондиційна дорівнює 0,99. Яка ймовірність що серед 300 навмання відібраних деталей а) рівно 3 некондиційних; б) некондиційних не менше 3 разів; в) некондиційних менше 3?

2.2.9. Ймовірність того, що відвідувач універмагу придбає товар довготривалого користування становить 0,005 (незалежно від інших). Яка ймовірність що серед 200 відвідувачів товар довготривалого користування а) придбає тільки 2 відвідувачі; б) придбає не більше 2 відвідувачів; в) придбає хоча б один відвідувач ?

2.2.10. Електричне табло містить 1000 електролампочок. Ймовірність того, що лампочка протягом деякого часу Т вийде з ладу становить 0,002. Яка ймовірність що протягом цього часу вийде з ладу

а) тільки 2 лампочки;

б) не більше 2 лампочок;

в) принаймні 2 лампочки ?

2.2.2. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.

2.2.2.1. *Теоретичні відомості.*

ТЕОРЕМА 2.2.2. (Локальна теорема Муавра-Лапласа). Нехай $p\in(0,1)$ - стале, $x_k=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ - обмежене рівномірно по n і k. Тоді при $n\to\infty$

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k)\bigl(1+\alpha(n,k)\bigr),$$

де $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\}$, $|\alpha(n,k)|<q/\sqrt{n}$.

Згідно з цією теоремою для великих n

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k), \text{ де } x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (2.2.2)$$

З теореми випливає, що ця формула дає добрі наближення, коли n велике і n та k близькі. Потрібно також відмітити, що при досить малому p або q близькому до 1, для доброго наближення n і k повинні бути досить великими. Тому формулу (2.2.2) використовують, коли $p(q)$ значно відмінне від 0 та 1. В простих розрахунках можна вважати, що використання формули (2.2.2) виправдане при $npq>9$. Зауважимо також, що похибка формули (2.2.2) при сталих n і k зростає із зростанням $|p-q|$, а також те, що для функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \text{ існують таблиці.}$$

Для обчислення при великих n, згаданої вище ймовірності $P_n(k,m)$ того, що число успіхів μ_n в n випробуваннях схеми Бернуллі знаходиться між k і m використовується інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

ТЕОРЕМА 2.2.3. (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа). Нехай ймовірність успіху в кожному випробуванні $p\in(0,1)$ стала, тоді при $n\to\infty$ для будь-яких a і b

$$P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (2.2.3)$$

Оскільки, подія $k \le \mu_n \le m$ рівносильна події

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

то з цієї теореми можна одержати наближену формулу

$$P_n(k, \ldots) =$$

$$= P\left\{\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x1}^{x2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

або

$$P_n(k,m) \approx \Phi_0(x2) - \Phi_0(x1) = \Phi(x2) - \Phi(x1), \qquad (2.2.4)$$

де

$$x1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},\ x2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Для останніх функцій існують таблиці. Перша з цих функцій непарна, для другої має місце формула

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Крім того ці функції зв'язані співвідношенням

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x).$$

Зауважимо також, що обидві функції строго монотонні, і перша з них при $x \to \infty$ досить швидко наближається до 0,5. Тому практично при $x>3{,}5$ можна вважати, що $\Phi_0(x)=0{,}5$.

Загальні рекомендації щодо використання (2.2.4) такі ж, як і для (2.2.2).

2.2.2.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 2.2.3. Ймовірність того, що прилад задовольняє технічним умовам дорівнює 0,8. Яка ймовірність, що партія із 100 приладів містить рівно 85 приладів, які задовольняють технічним умовам.

Розв'язання. Застосуємо для обчислення ймовірності $P_{100}(85)$ формулу (7.2) (npq=100·0,8·0,2=16>9). Тоді

x_k=(85–100·0,8)/4=1,25.

За таблицями знаходимо $\varphi(1{,}25) \approx 0{,}18$. Тоді

$$P_{100}(85) \approx 0{,}18/4 = 0{,}045.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 2.2.2. Якщо шо ймовірність обчислити за формулою Бернуллі, то одержимо такий результат

$$P_{100}(85) \approx 0{,}048.$$

Задача 2.2.4.Задача про конкуренцію. Цей приклад ілюструє практичне застосування формули (2.2.4). Дві конкуруючі залізничні компанії мають по одному потязі між Чікаго та Лос-Анджелесом, які відправляються в один і той же час і обладнані приблизно однаково.

Нехай n пасажирів вибирають потяг навмання і незалежно один від одного так, що кількість пасажирів в кожному потязі є результат n випробувань схеми Бернуллі з p=0,5. Якщо число місць в потязі $s<n$, то з додатною ймовірністю в ньому може виявитися більше s пасажирів і усім місць невистачить. Використовуючи наближення (2.2.4) знаходимо

$$f(s) = P_n(>s) = P_n(s+1,n)$$

Якщо s настільки велике, що f(s)<0,01, то число місць буде достатнім в 99 випадків із 100 . Взагалі, компанія може встановити довільний рівень ризику r і визначити s з умови $f(s) < r$.

Для цього досить покласти $s \approx t\sqrt{npq} + np - 1$, де t – корінь рівняння $\Phi(t) = 1 - r$. Наприклад, якщо n = 1000 і r=0,01, то t=2,33 і

$$s = 2{,}33 \cdot 15{,}81 + 500 - 1 \approx 536.$$

2.2.2.3. *Задачі для самостійної роботи.*

2.2.11. Знайти ймовірність (наближено) того, що в партії з 900 виробів кількість виробів вищого гатунку знаходиться між 650 і 700. Яке найбільш ймовірне число виробів вищого гатунку в партії та яка його ймовірність. Ймовірність того, що виріб в партії є вищого гатунку дорівнює 0,8.

2.2.12. Гральний кубик підкинули 500 разів. Яка ймовірність того, що
а) цифра 1 при цьому з'явиться 85 разів ;
б) цифра кратна трьом з явиться не менше 160 і не більше 200 разів?

2.2.13. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі становить 0.8. Яка ймовірність що у 100 незалежних пострілах
а) буде зафіксовано рівно 82 влучення;
б) буде зафіксовано не більше 75 влучень;
в) буде зафіксовано від 75 до 85 влучень?

2.2.14. Ймовірність одужання хворого в результаті застосування нового способу лікування дорівнює 0,8. Яким має бути найбільше k, щоб ймовірність того, що з 100 хворих буде вилікувано не менше k можна чекати з ймовірністю не меншою за 0,75?

2.2.15. Гральний кубик підкидається 180 разів. Яка ймовірність що
а) цифра "6" з'явиться 32 рази;
б) цифра "6" з'явиться не менше 30 разів;
в) цифра "6" з'явиться не менше 25 і не більше 32 разів ?

2.2.16. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0,9. Яка ймовірність, що серед 400 навмання відібраних деталей

а) рівно 350 стандартних;

б) стандартних не менше 320 разів;

в)стандартних не менше 290 і не більше 380 ?

2.2.17. Ймовірність того, що відвідувач універмагу зробить покупку становить 0,2 (незалежно від інших). Яка ймовірність що серед 100 відвідувачів покупку

а) зробить рівно 18 відвідувачів;

б) зробить не більше 20 відвідувачів;

в) зробить не менше 18 і не більше 26 відвідувачів ?

2.2.18. Ймовірність того, що студент здасть сесію без заборгованості дорівнює 0,9. Яка ймовірність, що серед 400 навмання відібраних студентів

а) рівно 350 здали сесію успішно;

б) здали сесію успішно не менше 320 разів;

в) здали сесію успішно не менше 290 і не більше 380 ?

2.2.19. Ймовірність отримати в лотареї білет без виграшу дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 400 навмання купленних білетів не менше 30 і не більше 40 без виграшу? Яке найбільш ймовірне число виграшів та яка його ймовірність?

2.2.20. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,512. Знайти ймовірність, що серед 100 новонароджених 1) буде рівно 51 хлопчик; 2) буде більше хлопчиків ніж дівчаток; 3) хлопчиків буде не менше 50 і не більше 60.

3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.

3.1. Випадкова величина(вектор). Функція розподілу. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу та щільність ймовірності.

3.1.1. *Теоретичні відомості.*

Нехай для стохастичного експерименту побудовано простір елементарних подій Ω і визначена ймовірність P для випадкових подій. Розглянемо функцію $\xi = \xi(\omega)$ задану на Ω із значеннями в множини дійсних чисел. Множина значень такої функції може розглядатися як множина значень деякої дійсної величини, але ці значення наперед передбачити неможливо, оскільки вони визначаються елементарними (випадковими) подіями ω з Ω. Тому для розглянутої функції вживається термін випадкова величина.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.1. Випадковою величиною (дійсною) називається всяка функція

$$\xi = \xi(\omega) \qquad (3.1.1)$$

задана на Ω із значеннями з множини дійсних чисел, для якої подія $\{\xi < x\}$ належить Ω при будь-якому дійсному x.

Приклад.

3.1.1. Підкидається дві симетричні монети. Простір елементарних подій (див., наприклад, 3.1.1;1.) має вигляд

$$|\Omega| = \{ \text{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ} \}.$$

Задамо таку випадкову величину (функцію) $\xi = \xi(\omega)$ на Ω:

$$\xi(\text{ЦЦ}) = 0,\ \xi(\text{ЦГ}) = 1,\ \xi(\text{ГЦ}) = 1,\ \xi = \xi(\text{ГГ}) = 2.$$

Значення цієї випадкової величини очевидно, дорівнює кількості випадань герба на двох монетах в результаті їх підкидання.

Знайдемо ймовірності подій

$$\{\xi = 0\},\ \{\xi = 1\},\ \{\xi = 2\}.$$

Використовуючи класичне визначення ймовірності та теорему додавання ймовірностей для несумісних подій (при обчисленні другої ймовірності) маємо

$$P\{\xi = 0\} = 1/4,\ P\{\xi = 1\} = 1/4 + 1/4 = 1/2,\ P\{\xi = 2\} = 1/4.$$

Цю функцію (випадкову величину) можна представити у вигляді таблиці

ξ	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

В падкова величина, виявляється, може бути повністю визначена з допомогою певного класу ймовірностей, а саме сукупність ймовірностей $P(\xi<x)$ для усіх дійсних x повністю характеризує випадкову величину. У зв'язку з цим вводиться поняття функції розподілу випадкової величини.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.2. Функцією розподілу випадкової величини $\xi=\xi(\omega)$ називається функція

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) \qquad (3.1.2)$$

визначена для будь-яких дійсних чисел.

(Якщо це не викликає непорозуміння, нижній індекс будемо упускати.)

Функція розподілу випадкової величини має такі характеристичні властивості

1. $0 \le F(x) \le 1$,

2. Функція розподілу неспадна, тобто з $x_1<x_2$ випливає $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Функція розподілу неперервна зліва.

Має місце така важлива

ТЕОРЕМА 3.1.1. Для будь-якої випадкової величини

$$P(a\le\xi<b) = F(b)-F(a) \qquad (3.1.3)$$

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.2. Випадкова величина ξ називається дискретною (або випадковою величиною дискретного типу, скорочено В.В.Д.Т.), якщо і нує така скінчена чи злічена множина чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, що $P(\xi=x_i) = p_i \ge 0$, $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$.

З означення випливає, що дискретна випадкова величина повністю визначається ймовірностями $P(\xi=x_i) = p_i$. Ця відповідність між значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями називається законом розподілу дискретної випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини іноді подають у вигляді таблиці

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Закон розподілу випадкової величини має і геометричне представлення. Якщо побудувати ламану з вершинами в точках (x_i, p_i), то одержимо, так званий, багатокутник розподілу.

Приклад.

3.1.2. Нехай ймовірність події А в одному випробуванні дорівнює p, випробування незалежні і проводяться до першої появи події А.

Розглянемо випадкову величину ξ – кількість проведених випробувань. Тоді маємо

$$P(\xi = m) = q^m p\ ,\ m = 0,1,2, \ldots .$$

Такий розподіл випадкової величини називається *геометричним.*

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.3. Випадкова величина ξ називається абсолютно неперервною (або випадковою величиною неперервного типу, скорочено В.В.Н.Т.), якщо існує така невід'ємна функція $p_\xi(x)$, що

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt \qquad (3.1.4)$$

Функція $p_\xi(x)$ називається щільністю розподілу ймовірності або просто щільністю ймовірності (розподілу). Вважатимемо, що $p_\xi(x)$ неперервна всюди, за виключенням не більш ніж скінченого числа точок. Як і для функції розподілу нижній індекс в позначенні щільності ймовірності будемо опускати, коли він зрозумілий з контексту.

Очевидно,

$$p(x)=F'(x) \qquad (3.1.$$

Функція щільності ймовірності має такі характеристичні властивості

1. $p(x)\geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$.

Відмітимо також такі особливості неперервних випадкових величин:

3. $P(\xi = a) = 0$,

4. $P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b)$.

$$5.\ P(a \le \xi < b) = \int_a^b p(x)dx \qquad (3.1.6)$$

Часто випадкові явища характеризуються декількома випадковими величинами. Для моделювання таких ситуацій розглядають поняття випадкового вектора (іноді говорять про сукупність випадкових величин).

Випадковим вектором називають вектор $\xi = (\xi_1,.., \xi_n)$ компоненти якого є випадковими величинами.

Випадковий вектор ξ має функцію розподілу (функція сумісного розподілу випадкових величин $\xi_1,.., \xi_n$), яка визначається таким чином

$$F_\xi(\mathbf{x}) = F_\xi(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(\xi_1 < x_1,\ldots,\xi_n < x_n)$$

Знаючи функцію сумісного розподілу можна знайти функції розподілу окремих випадкових величин (компонент випадкового вектора), але не навпаки. Згадана зворотна задача має однозначний розв'язок для, так званих, незалежних випадкових величин.

Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ називаються незалежними, якщо їх сумісна функція розподілу та функції розподілу окремих випадкових величин зв'язані співвідношенням

$$F_\xi(\mathbf{x}) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{\xi_1}(x_1)\ldots F_{\xi_n}(x_n)$$

3.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.1.1. Побудуємо функцію розподілу випадкової величини з Пр.3.1.1.

Розв'язання. Для $x \le 0$ маємо
$F(x) = P(\xi < x) = 0$, оскільки завжди $\xi \ge 0$.

Для $0 < x \le 1$ маємо $F(x) = P(\xi < x) = P(\{\xi = 0\}) = =1/4$.

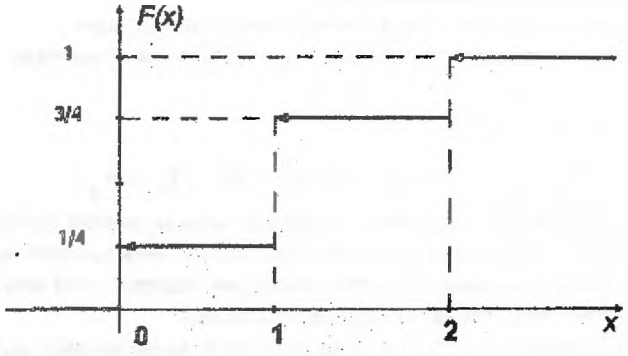
Для $1 < x \le 2$ маємо
$F(x)=P(\xi<x)=P(\{\xi=0\}+\{\xi=1\}) = P(\xi=0) + +P(\xi=1)= 1/4+1/2 = 3/4$.

Для $2 < x$ маємо $F(x) = P(\xi < x) = 1$, оскільки завжди $\xi \le 2$.

Отже, маємо таку функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x \le 0,\\ 1/4, & \text{коли } 0 < x \le 1,\\ 3/4, & \text{коли } 1 < x \le 2,\\ 1, & \text{коли } x > 2.\end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції.



Мал.3.1.1.

Задача 3.1.2. В ящику знаходиться 8 деталей, 3 з яких виготовлені першим заводом, решта - другим. З ящика навмання витягують три деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – числа деталей першого заводу серед відібраних.

Розв'язання. Очевидно, випадкова величина може приймати лише такі значення 0,1,2,3. Обчислимо відповідні ймовірності

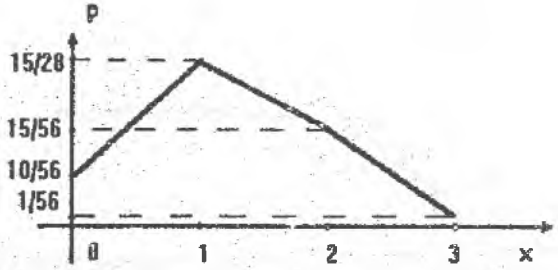
$$P(\xi = 0) = C_5^3/C_8^3 = 10/56,\ P(\xi = 1) = C_3^1C_5^2/C_8^3 = 15/28,$$

$$P(\xi = 2) = 15/56,\ P(\xi = 3) = 1/56.$$

Отже, маємо такий закон розподілу

ξ	0	1	2	3
p	10/56	15/28	15/56	1/56

Побудуємо багатокутник розподілу.



Мал.3.1.3.

Такий розподіл є частинним випадком розподілу, який носить назву *гіпергеометричного* розподілу.

Задача 3.1.3. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ sin2x, & 0 < x \le \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності та ймовірність $P(\pi/12 \le \xi \le \pi/6)$; побудувати графіки $F(x)$ та $p(x)$.

Розв'язання. Використавши формулу (3.1.5) отримуємо

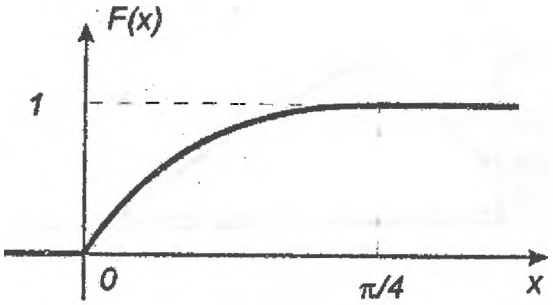
$p(x) = 2\cos 2x$, для $0 < x \le \pi/4$

$p(x) = 0$ для решти x.

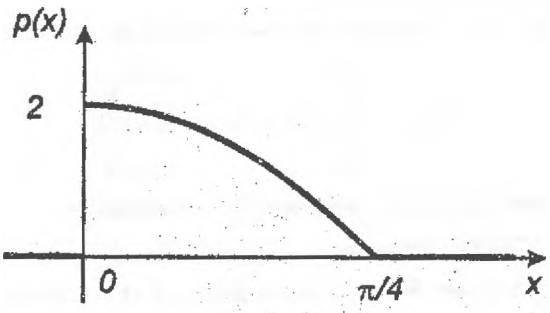
Для ймовірності $P(\pi/12; \pi/6)$ (див. властивість 4 неперервних випадкових величин) маємо

$P(\pi/12 \le \xi \le \pi/6) = F(\pi/6) - F(\pi/12) = \sin(\pi/3) - \sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 - 1/2 \approx 0{,}37$.

Побудуємо графіки.



Мал.8.4.



Мал.8.5.

Задача 3.1.4. Випадкова величина задана щільністю роз. поділу $p(x) = 1/x^2$, $1 \le x < \infty$, $p(x) = 0$ в решті випадків, Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Використаємо співвідношення (8.4).

Для $x \le 1$ маємо

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$$

Для $x > 1$ маємо

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{-\infty}^{1} 0du + \int_{1}^{x} u^{-2}du = -u^{-1}\Big|_{1}^{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Отже, отримали таку функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 1-1/x, & x>1.\end{cases}$$

Задача 3.1.5. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу $p(x) = A\sin x$, $0 \le \xi \le \pi/2$, $p(x)=0$ в решті випадків, Знайти параметр А та ймовірність $P(\pi/6 \le \xi \le \pi/4)$.

Розв'язання. Значення параметру А знайдемо, скориставшись властивістю 2) щільності ймовірності.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = -A\cos x\Big|_0^{\pi/2} = A.$$

Отже, А = 1.

Для ймовірності $P(\pi/6 \le \xi \le \pi/4)$ згідно з властивістю 3) неперервних випадкових величин маємо

$$P(\pi/6 \le \xi \le \pi/4) =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \sqrt{3}/2-\sqrt{2}/2 \approx 0{,}16$$

3.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

А. Для дискретної випадкової величин знайти функцію розподілу, побудувати її графік та багатокутник розподілу.

3.1.1.

ξ_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

3.1.2.

ξ_i	2	4	6	8	10
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3.1.3.

ξ_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

3.1.4.

ξ_i	-3	-1	1	3	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3.1.5.

ξ_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

3.1.6.

ξ_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

3.1.7.

ξ_i	2	4	6	8	10

3.1.8.

ξ_i	1	2	3	4	5

p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

3.1.9.

ξ_i	-3	-1	1	3	5
p_i	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3.1.10.

ξ_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Б. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу.

Потрібно:

1) **знайти щільність ймовірності;**
2) **побудувати графіки функції розподілу та щільності ймовірності;**
3) **знайти вказану ймовірність.**

3.1.11. $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{x^3}{8}, 0 \le x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$ $P(0{,}5<\xi<1)$.

3.1.12. $F(x) = \begin{cases} 0, x < 1, \\ \ln x, 1 \le x \le e, \\ 1, x > e. \end{cases}$ $P(1<\xi<e/2)$.

3.1.13. $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}, 0 \le x \le 4 \\ 1, x > 4. \end{cases}$ $P(1<\xi<4)$.

3.1.14. $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{x^4}{16}, 0 \le x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$ $P(0{,}5<\xi<1)$.

3.1.15. $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}, 0\le x\le 8,\\ 1, x>8.\end{cases}$ $P(0<\xi<1)$.

3.1.16. $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ x^3, 0\le x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$ $P(0,5<\xi<1)$.

3.1.17. $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \sqrt[3]{x}, 0\le x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$ $P(0<\xi<0,5)$.

3.1.18. $F(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ e^x-1, 0\le x\le \ln 2,\\ 1, x>\ln 2.\end{cases}$ $P(0<\xi<\ln 1,25)$.

3.1.19. $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \dfrac{x^2}{9}, 0\le x\le 3,\\ 1, x>9.\end{cases}$ $P(1<\xi<2)$.

3.1.20. $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}, 0\le x\le 16,\\ 1, x>16.\end{cases}$ $P(0<\xi<1)$.

3.2. Числові характеристики випадкових величин.

3.2.1. Математичне сподівання.

3.2.1.1. *Теоретичні відомості*

Функція розподілу випадкової величини повністю її характеризує. Проте в багатьох задачах практики виявляється важко або навіть неможливо повністю описати функцію розподілу. В той же час для розв'язання численних практичних завдань досить знати лише деякі параметри (числа) , які характеризують випадкову величину з тієї чи іншої точки зору. Такі параметри називаються числовими характеристиками випадкових величин (значна частина з них носить загальну назву моментів випадкових величин). Найбільш вживаними числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення. Вони, крім того, легко знаходяться (наближено) з експериментальних (статистичних) даних. Перша з них грунтується на понятті арифметичного середнього та зв'язку між частотою та ймовірністю випадкової події.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.1. Нехай ξ дискретна випадкова величина ,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

її значення і

$$p_i = P(\xi = x_i),\ i = 1,2, \dots, n, \dots .$$

Математичним сподіванням випадкової величини ξ називається число

$$E\xi = \sum_i x_i p_i \qquad (3.2.1.)$$

за умови , що цей ряд абсолютно збіжний. В цьому випадку говорять що випадкова величина ξ має (скінчене) математичне сподівання, в супротивному випадку говорять , що ξ не має (скінченого) математичного сподівання.

Відмітимо деякі властивості математичного сподівання.

1. Якщо C - стала величина, то EC = C.
2. Якщо C - стала величина, ξ - випадкова величина, що має математичне сподівання, то
$$E(C\xi) = CE\xi$$
3. Якщо випадкові величини ξ , η мають математичне сподівання, то
$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta \ .$$
4. Якщо випадкові величини ξ, η незалежні, то
$$E\xi\eta = E\xi E\eta \ .$$

Для функції $\eta = \varphi(\xi)$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ дискретного випадкового вектора ξ ([1],стр.79) математичне сподівання визначається аналогічно.

ОЗНАЧЕННЯ 9.2. Нехай $\xi = (\xi_1,\dots, \xi_n)$ - дискретний випадковий вектор, для якого

$P(\xi = x_i)=p_i$, $x_i=(x_{i1},x_{i2},...,x_{in}) \in R^n$, $\sum_i p_i = 1$.

Якщо ряд $\sum_i \varphi(x_i)p_i$ збіжний, то математичним сподіванням випадкової величини $\eta=\varphi(\xi)$ називається число

$$E\xi = \sum_i \varphi(x_i)p_i \qquad (3.2.2)$$

Очевидно, (3.2.1.) є частинним випадком (3.2.2.).

Для неперервної випадкової величини ξ означення математичного сподівання одержуємо узагальненням формули (3.2.1.), замінивши в ній знак суми на знак інтеграла а ймовірність p_i - на щільність ймовірності p(x).

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.3. Нехай ξ неперервна випадкова величина, p(x) - її щільність ймовірності, $\eta = \varphi(\xi)$ і інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| p(x)dx$ збіжний. Тоді математичним сподіванням величини η називається число

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p(x)dx \qquad (3.2.3)$$

Якщо $\xi = (\xi_1, \xi_2,..., \xi_n)$ - неперервний випадковий вектор, $p(x_1,x_2,...,x_n)$ - його щільність ймовірності, $\eta=\varphi(\xi_1, \xi_2,..., \xi_n)= =\varphi(\xi)$, то

$$E\eta = \int_{R^n}...\int \varphi(x_1,...,x_n)p(x_1,...,x_n)dx_1,...,dx_n \qquad (3.2.4)$$

за умови, що цей інтеграл абсолютно збіжний.

3.2.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.2.1. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ із законом розподілу

ξ	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Розв'язання. Згідно (3.2.1)
$E\xi = -1\cdot0,1+0\cdot0,2+1\cdot0,4+2\cdot0,3 = 0,9$.

Задача 3.2.2. Знайти математичне сподівання функції випадкової величини $\eta=\xi^2+1$, де ξ - випадкова величина з попереднього прикладу.

Розв'язання.

1-й спосіб. Згідно (3.2.2) маємо

$E\eta =$

$=((-1)^2+1)\cdot 0,1+(0+1)\cdot 0,2+(1^2+1)0,4+(2^2+1)\cdot 0,3=2,7.$

2-й спосіб. Знайдемо закон розподілу η і скористаємося означенням 3.2.1. Очевидно, різними значеннями випадкової величини η є 1, 2 і 5. Знайдемо відповідні ймовірності.

$P(\eta=1)=P(\xi=0)=0,2;\ P(\eta=2)=P(\{\xi=-1\}+\{\xi=1\})=$

$=P(\{\xi=-1\})+P(\{\xi=1\})=0,1+0,4=0,5;$

$P(\eta=5)=P(\xi=2)=0,3$

Отже, маємо закон розподілу

η	1	2	5
p_j	0,2	0,5	0,3

Тоді, згідно (3.2.1)

$$E\eta = 1\cdot 0,2+2\cdot 0,5+5\cdot 0,3=2,7.$$

Задача 3.2.3. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Розв'язання. За означенням маємо

$$E\xi = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -x\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda}(0-1)=\frac{1}{\lambda}$$

Задача 3.2.4. Знайти математичне сподівання випадкової величини, розглянутої в 3.3.1.5.

Розв'язання. За означенням маємо

$$E\xi = \int_0^{\pi/4} sin2x\,dx = -0{,}5cos2x\Big|_0^{\pi/4} = -0{,}5(0-1) = 0{,}5$$

3.2.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

А. 3.2.1-3.2.10.

Для випадкових величин задач 3.1.1–3.1.10 знайти математичне сподівання

Б. 3.2.11-3.2.20.

Для випадкових величин задач 3.1.11–3.1.20 знайти математичне сподівання

3.2.2. Дисперсія.

3.2.2.1. *Теоретичні відомості.*

В теорії ймовірностей на основі поняття математичного сподівання будується ціла система числових характеристик випадкових величин. Певна частина їх характеризує величину розсіювання (варіацію) випадкової величини відносно центру групування (математичного сподівання). Однією з таких характеристик є дисперсія випадкової величини $D\xi$.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.4. Дисперсією випадкової величини ξ називається число $D\xi$, що дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \qquad (3.2.5)$$

Таким чином, для дискретної випадкової величини ξ -

$$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$

для неперервної -

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 p(x)dx .$$

В багатьох випадках, для обчислення дисперсії користуються формулою

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \qquad (3.2.6)$$

Відмітимо деякі властивості дисперсії.

1. Якщо C - стала випадкова величина , то DC = 0.

2. Якщо C - стала випадкова величина , ξ - випадкова величина, що має математичне сподівання, то

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

3. Якщо випадкові величини ξ , η незалежні, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$$

Для характеристики відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання використовують також таку величину як середнє квадратичне (стандартне) відхилення $\sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}$.

3.2.2.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.2.5. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини з 3.3.2.1.

Розв'язання. Використаємо формулу (3.2.6) . Для цього знайдемо

$E\xi^2$ ($E\xi = 0{,}9$, див. 3.3.2.1):

$E\xi^2 = 1\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3=1{,}7.$

Тоді $D\xi = 1{,}7 - 0{,}92 = 1{,}7 - 0{,}81 = 0{,}89$ і $\sigma(\xi)= \sqrt{D\xi} =$

$=\sqrt{0{,}89} \approx 0{,}94$.

Задача 3.2.6. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

Розв'язання. Використаємо формулу (3.2.6). Для цього знайдемо $E\xi^2$ ($E\xi=1/\lambda$, див. 3.3.2.3):

$$E\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} +$$

$$+2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\frac{2x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

Отже,

$$D\xi = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2 .$$

Таким чином, для показникового розподілу

$$D\xi = (E\xi)^2, \sigma(\xi) = E\xi.$$

3.2.2.3. *Задачі для самостійної роботи.*

А. 3.2.21-3.2.30.

Для випадкових величин задач 3.1.1–3.1.10 знайти $D\xi$ та $\sigma(\xi)$.

Б. 3.2.31-3.2..40.

Для випадкових величин задач 3.1.11–3.1.20 знайти $D\xi$ та $\sigma(\xi)$.

3.2.3. Залежні випадкові величини. Коваріація та коефіцієнт кореляції.

3.2.3.1. *Теоретичні відомості.*

Вище було введене поняття випадкового вектора. Аналогічно до випадкової величини, розглядаються дискретні та неперервні випадкові вектори. Для них відповідно, вводиться поняття закону розподілу та щільності ймовірності. Умову незалежності таких випадкових величин можна виразити відповідно через закон розподілу або щільність ймовірності (Див. [1], § 3.4, стр.69).

Для двовимірного дискретного випадкового вектора (ξ,η) закон розподілу можна подати у вигляді таблиці з двома входами (див.таб. 3.2.1). У верхньому рядку цієї таблиці записані значення випадкової величини η, у лівому стовпці - значення випадкової величини ξ, на перетину i-го рядка та j-го стовпця – ймовірність p_{ij} події $\{\xi=x_i, \eta=y_j\}$, тобто

$$P(\xi=x_i, \eta=y_j)=p_{ij}$$

Підсумовуючи таблицю по рядках, отримаємо закон розподілу випадкової величини ξ, якщо те ж саме зробити із стовпцями - отримаємо закон розподілу η. Тоді умову незалежності випадкових величин x та h можна подати у вигляді

$$P(\xi=x_i\ ,\ \eta=y_j)= P(\xi=x_i)\ P(\eta=y_j) \qquad (3.2.7)$$

Таблиця 3.2.1.

ξ\ η	y_1	y_2	...	y_j	...	ξ
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	$p(\xi=x_1)$
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	$p(\xi=x_i)$
...	...	...	...	...	...	...
η	$p(\eta=y_1)$	$p(\eta=y_2)$		$p(\eta=y_j)$	...	

Приклад.

3.2.1. Задано закон розподілу випадкового вектора (ξ,η). Знайти закони розподілу компонент.

ξ\ η	-1	0	1	2	3
1	0,1	0,1	0,05	0,05	0
2	0	0,2	0,1	0,1	0,05
3	0	0,05	0,1	0,05	0,05

Розв'язання. Підсумовуючи таблицю за стовпцями та рядками, отримуємо шукані розподіли.

Для ξ :

ξ	1	2	3
p	0,3	0,45	0,25

Для η :

η	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,35	0,25	0,2	0,1

У випадку, коли розглядається сукупність декількох випадкових величин (випадковий вектор), як зазначалося раніше вводиться таке поняття як залежність (незалежність) цих величин. Для якісного представлення такої залежності існує декілька характеристик. Розгля-

немо ті з них, які стосуються двох випадкових величин.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.5. Коваріацією випадкових величин ξ та η називається число

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)] \qquad (3.2.8)$$

Для обчислення коваріації зручно користуватися формулою

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta \qquad (3.2.9)$$

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.6. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η називається число

$$\rho(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\xi,\eta)/(\sigma(\xi)\sigma(\eta)) \qquad (3.2.10)$$

Якщо випадкові величини незалежні, то коваріація (тому і коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, але не навпаки.

3.2.3.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.2.7. Задано закон розподілу випадкового вектора (ξ,η)

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1	2	3
1	0,1	0,1	0,05	0,05	0
2	0	0,2	0,1	0,1	0,05
3	0	0,05	0,1	0,05	0,05

Знайти коваріацію та коефіцієнт кореляції компонент.

Розв'язання. Запишемо закони розподілу компонент (Пр.3.2.1):

Для ξ

ξ	1	2	3
p_i	0,3	0,45	0,25

Для η

η	–1	0	1	2	3
p_j	0,1	0,35	0,25	0,2	0,1

Знайдемо $\sigma(\xi)$ та $\sigma(\eta)$:

$E\xi=1,95$, $E\eta=0,85$, $E\xi^2=0,3+1,8+2,25=4,35$,

$E\eta^2=2,05$, $D\xi=4,35-1,95^2=0,5475$,

$D\eta=2,05-0,85^2=1,3275$,

$\sigma(\xi)\approx 0,7399$, $\sigma(\eta)\approx 1,1522$.

Знайдемо $E(\xi\eta)=2,055$.

Тепер

$cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta=2,055-1,95\cdot0,85=0,397$,

$\rho(\xi,\eta)=cov(\xi,\eta)/(\sigma(\xi)\sigma(\eta))\approx 0,397/(0,7399\cdot1,1522)\approx 0,466$.

3.2.3.3 *Задачі для самостійної роботи.*

3.2.41–3.2.50. Якість продукції контролюється за наявністю в ній дефектів двох видів ξ та η. Ці дефекти є випадковими величинами, що мають закон розподілу, вказаний в таблиці 3.2. Потрібно:

a) знайти закони розподілу компонент;

b) знайти коваріацію та коефіцієнт кореляції дефектів та з'ясувати залежні вони чи ні.

(Дані беруться з таблиці 3.2.2)

Таблиця 3.2.

1

ξ \ η	–1	0	1	2
1	0.1	0.1	0	0
2	0.1	0.2	0.2	0
3	0	0.1	0.1	0.1

2

ξ \ η	1	2	3	4
-1	0.1	0.1	0.1	0
0	0	0.2	0.2	0
1	0		0.1	0.2

3

ξ \ η	1	3	5	7
-3	0.1	0.1	0.1	0.1
-1	0.2	0.1	0.1	0
1	0	0	0.2	0

4

ξ \ η	2	5	8	11
-1	0.1	0	0	0
0	0.1	0.1	0.2	0.2
1	0	0.2	0	0.1

5

ξ \ η	2	3	4	5
3	0.1	0.1	0.2	0
5	0	0.3	0.1	0.1
7	0	0	0.1	0

6

ξ \ η	1	3	5	7
-2	0.1	0	0	0
-1	0.1	0.2	0.3	0
0	0	0.1	0.1	0.1

7

ξ \ η	4	5	6	7
1	0.1	0.1	0	0
3	0.1	0.2	0.1	0.1
5	0	0	0.2	0.1

8

ξ \ η	-3	-2	-1	1
3	0.05	0.1	0.1	0
4	0.1	0.2	0.1	0.05
5	0	0	0.1	0.2

9

ξ \ η	-3	-1	1	2
5	0.1	0.05	0.05	0.1
6	0	0.2	0.2	0.15
7	0	0	0.05	0.1

10

ξ \ η	1	3	4	5
2	0.1	0.1	0.1	0.05
4	0.1	0.1	0.2	0.05
6	0	0.1	0	0.1

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda .$$

Для обчислення дисперсії знайдемо $M\xi(\xi-1)$:

$$M\xi(\xi-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 .$$

Оскільки $M\xi(\xi-1) = M\xi^2 - M\xi$, то $M\xi^2 = M\xi(\xi-1) + M\xi$. Тоді

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Таким чином, для розподілу Пуасона $M\xi = D\xi$.

Найпростіший потік подій. *Потоком подій* називають послідовність подій, які наступають у випадкові моменти часу.

Найпростішим (пуасонівським) називають потік подій, який має наступні три характеристичні властивості: стаціонарність, «відсутність післядії», ординарність.

Властивість стаціонарності полягає в тому, що ймовірність появи k подій в будь-якому проміжку часу залежить тільки від k та довжини проміжку t.

Властивість «відсутність післядії» полягає в тому, що ймовірність появи k подій в будь-якому проміжку часу не залежить від того, що відбувалося на попередньому проміжку часу.

Властивість ординарності полягає в тому, що поява двох або більше подій за досить (точніше нескінченно малий проміжок часу) практично неможлива (є нескінченно малою вищого порядку за проміжок часу).

Потік подій (зокрема найпростіший) найчастіше подають (описують) з допомогою *сукупності випадкових величин* ξ_t (t - час) – кількості подій, які спостерігалися протягом часу (від початку; з властивостей найпростішого потоку випливає, що для нього це число не залежить від початку відліку).

Інтенсивністю потоку λ називають середнє число замовлень (математичне сподівання), які з'являються за одиницю часу.

Якщо інтенсивність найпростішого потоку відома, то ймовірність $P_t(k)$ появи k подій за проміжок часу t визначається зо формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (3.3.3)$$

3.3.1.2. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.3.1. Відомо, що велика партія товарів містить 80% продукції, придатної для реалізації. З цієї партії навмання відібрано 5 зразків. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ={число придатних до реалізації зразків} та вказати значення ξ, яке має найбільшу ймовірність. Знайти також математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для ξ.

Розв'язання. Ймовірність того, що навмання взятий зразок продукції придатний для реалізації згідно з умовою дорівнює p=0,8. Тому випадкова величина ξ має розподіл Bi(5;0,8). За формулою (3.3.1) знаходимо

$$P_5(\xi=0)=C_5^0 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5=0{,}00032,$$

$$P_5(\xi=1)=C_5^1 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}0016=0{,}0064,$$

$$P_5(\xi=2)=C_5^2 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 10\cdot 0{,}64\cdot 0{,}008=0{,}0512,$$

$$P_5(\xi=3)=C_5^3 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04=0{,}2048,$$

$$P_5(\xi=4)=C_5^4 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 = 5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2=0{,}4096,$$

$$P_5(\xi=5)=C_5^5 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}32768.$$

Отже, отримали такий розподіл

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

З отриманих результатів знаходимо, що найбільш ймовірне значення величини ξ дорівнює 4.

Математичне сподівання знайдемо за формулою $E\xi=np$: $E\xi=5\cdot 0{,}8=4$. В даному випадку найбільш ймовірне значення співпадає з математичним сподіванням.

Знайдемо дисперсію величини ξ:

$$D\xi=npq=5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}8.$$

Тоді

$$\sigma(\xi)=0{,}8^{0.5}\approx 0{,}894.$$

Задача 3.3.2. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0,75. Знайти найбільш ймовірне число стандартних деталей в партії, та ймовірність цього числа.

Розв'язання. Знайдемо межі для шуканого числа за формулою $np-q \le k_o \le np+p$ (n=10,p=0,75,q=0,25):

$$np-q=10\cdot0{,}75-0{,}25=7{,}25,\ np+p=10\cdot0{,}75+0{,}75=8{,}25.$$

Отже, найбільш ймовірно, що в партії буде 8 стандартних деталей. Знайдемо ймовірність цієї події.

$$P_{10}(\xi=8)= C_{10}^{8}0{,}75^{8}\cdot0{,}25^{2} \approx 0{,}28.$$

Задача 3.3.3. Коректура в 500 сторінок містить 1300 помилок. Вважаючи застосовним закон рідкісних явищ, знайти найбільш ймовірне число помилок на сторінці та його ймовірність цього числа (наближено).

Розв'язання. Нехай ξ – випадкова величина, значення якої дорівнюють кількості помилок на сторінці. За умовою можна вважати, що ξ має розподіл Пуасона. Знайдемо значення параметра λ (наближено). За наближене значення цього параметра приймемо середню кількість помилок на одній сторінці. Підставою для цього є те, що 1) для розподілу Пуасона значення параметра співпадає з математичним сподіванням; 2) середнє значення випадкової величини при великій кількості спостережень (в умові їх 500) близьке до математичного сподівання.

Таким чином, вважатимемо, що λ=1300/500=2,6 і

$$P(\xi=k)= \frac{2{,}6^{k}e^{-2.6}}{k!}.$$

Для знаходження найбільш ймовірного значення обчислимо послідовно ймовірності $P(\xi=k)$ для k=0,1,2,... .

$$P(\xi=0)= \frac{2{,}6^{0}e^{-2.6}}{0!}\approx0{,}074,\ P(\xi=1)= \frac{2{,}6^{1}e^{-2.6}}{1!}\approx0{,}193,$$

$$P(\xi=2)= \frac{2{,}6^{2}e^{-2.6}}{2!}\approx0{,}251,\ P(\xi=3)= \frac{2{,}6^{3}e^{-2.6}}{3!}\approx0{,}218.$$

Врахувавши відмічену вище властивість ймовірності (3.3.2), знаходимо, що найбільш ймовірне число помилок на сторінці дорівнює 2 і

$$P(\xi=2)= \frac{2{,}6^{2}e^{-2.6}}{2!}\approx0{,}251.$$

Задача 3.3.4. Середнє число викликів, які надходять на АТС за хвилину дорівнює двом (потік викликів, які надходять вважати найпростішим). Знайти ймовірність того, що за 4 *хв* надійде а) три виклики; б) менше трьох викликів.

Розв'язання. Якщо час вимірювати в хвилинах, то маємо найпростіший потік з параметром λ=2. Тому у випадку а) маємо

$$P_4(3)=\frac{(2\cdot 4)^3 e^{-2\cdot 4}}{3!}\approx 0{,}029.$$

Для випадку б) знаходимо

$$P_4(<3)=P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=e^{-8}\left(\frac{8^0}{0!}+\frac{8^1}{1!}+\frac{8^2}{2!}\right)=e^{-8}\cdot 41\approx 0{,}014.$$

3.3.1.3. *Задачі для самостійної роботи.*

3.3.1. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного елемента в одному експерименті дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ={число елементів, що відмовили} та вказати значення ξ, яке має найбільшу ймовірність. Знайти також математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для ξ.

3.3.2. Для спортсмена ймовірність влучити в «яблучко» при одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює 0,25. Спортсмен виконав 5 пострілів. Скласти закон розподілу випадкової величини x={число влучень у «яблучко»} та вказати значення x, яке має найбільшу ймовірність. Знайти також математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для x.

3.3.3. Прилад складається з 5 елементів. Які працюють незалежно. ймовірність відмови елемента в момент ввімкнення приладу дорівнює 0,2. Знайти а) найбільш ймовірне число елементів, що відмовили. б) ймовірність відмови приладу, якщо для цього досить відмови хоча б чотирьох елементів.

3.3.4. Скільки потрібно провести незалежних випробувань з ймовірність настання події в кожному випробуванні p=0,4, щоб найбільш ймовірне число настання події в цих випробуваннях дорівнювало 25?

3.3.5. Чому дорівнює ймовірність p настання події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо найбільш ймовірне число настання події в цих випробуваннях дорівнює 25.

3.3.6. Великовантажний автомобіль перевозить партію мінеральної води у скляних пляшках. Вважається, що кількість пляшок, які розіб'ються при транспонуванні, є випадковою величиною з розподілом Пуасона. Знайти математичне сподівання цієї величини, якщо ймовірність того, що розіб'ється принаймні одна пляшка, дорівнює 0,98.

3.3.7. Ймовірність виграшу для одного лотерейного білету становить 0,01. Скільки потрібно придбати білетів, щоб з ймовірністю не меншою за 0,95 виграшним був хоча б один з придбаних білетів (застосувати закон рідкісних явищ)?

3.3.8. Середня кількість замовлень, які надходять на АТС за хвилину, становить 120. Знайти ймовірність наступних подій:
A={за дві секунди не надійде жодного замовлення},
B={ за дві секунди менше двох замовлень}.

3.3.9. Середнє число замовлень таксі, які надходять на диспетчерський пункт за одну хвилину, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде: а)чотири замовлення; б) менше чотирьох замовлень.

3.3.10. Радіостанція веде автоматичну передачу цифрового тексту на протязі 10 *мкс*. Робота її відбувається при наявності хаотичної імпульсної перешкоди, середня кількість імпульсів якої за одну секунду дорівнює 10^4. Для зриву передачі досить попадання k імпульсів перешкоди в період роботи станції. Застосувавши закон рідкісних явищ, обчислити ймовірність p_k зриву передачі для значень k=1,2.

3.3.2. Рівномірний, нормальний та показниковий (експоненціальний) розподіли.

3.3.2.1. *Теоретичні відомості.*

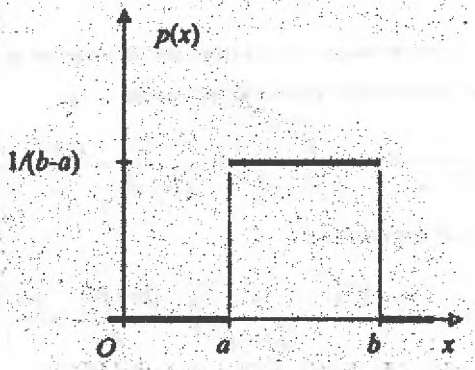
Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина ξ має розподіл рівномірний на проміжку $[a,b]$, якщо її щільність ймовірності $p(x)=1/(b-a)$ для $x\in[a,b]$ і $p(x)=0$ для решти x. Такий розподіл позначають іноді так $R[a,b]$. Очевидно, випадкова величина

$\eta=(\xi-a)/(b-a)$ має розподіл R[0,1].

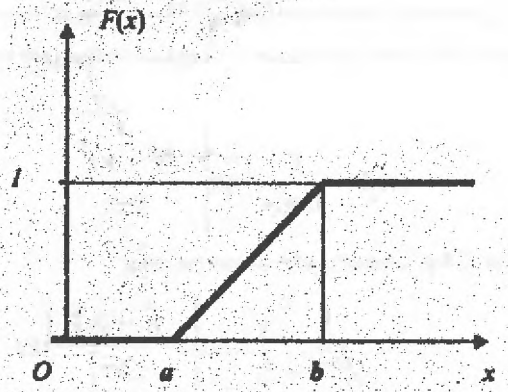
Легко переконатися, що

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графіки цих функцій подані на мал. 3.3.1 та мал.3.3.2



Мал. 3.3.1.



Мал. 3.3.2.

Помилки, які виникають при заокругленні чисел (наприклад,

при зчитуванні з лінійної шкали задовільно описуються розподілом R[-0,5;0,5].Рівномірний розподіл широко застосовується в статистичному моделюванні (метод Монте-Карло). Це грунтується на такій його важливій властивості:

Якщо випадкова величина ξ з функцією розподілу $F(x)$ має неперервний розподіл, то випадкова величина $\eta=F(\xi)$ має розподіл R[0,1].

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію рівномірного розподілу. Для математичного сподівання маємо

$$\mathrm{E}\xi = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Для дисперсії отримуємо

$$\mathrm{D}\xi = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Нормальний розподіл. Широке застосування в практиці має нормальний закон розподілу. Неперервна випадкова величина має нормальний закон розподілу з параметрами (m, σ), $m\in R$, $\sigma>0$, якщо

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Функція розподілу має такий вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dt$$

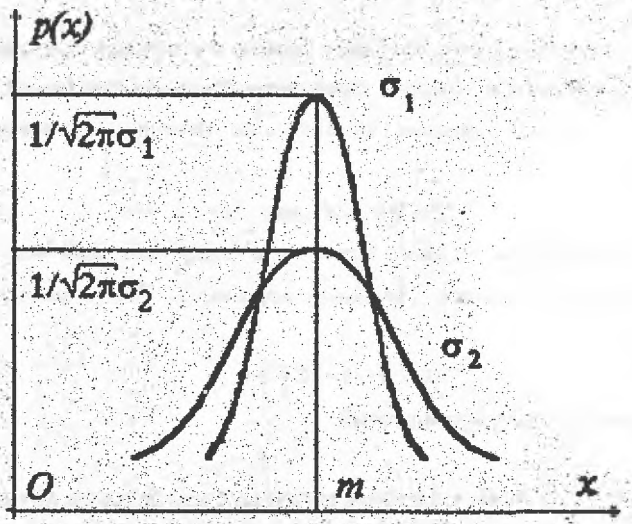
Такий розподіл позначається іноді так $N(m,\sigma)$. Нормальний розподіл $N(0,1)$ називається стандартним. Легко показати, що лінійні функція від нормального розподілу теж має нормальний розподіл. Тому, очеви-

дно, коли ξ має розподіл $N(m,\sigma)$, то $\eta=(\xi-m)/\sigma$ має стандартний розподіл $N(0,1)$.

Фундаментальна роль, яку відіграє нормальний розподіл в теорії ймовірностей і математичній статистиці, пояснюється тим, що при досить широких припущеннях сума випадкових величин з ростом їх числа веде себе приблизно як нормальна випадкова величина (асимптотично нормальна). Відповідні умови складають зміст центральної граничної теореми. Наведені в п.2.2.2 теореми Муавра-Лапласа є найпростішими наслідками такої теореми для схеми Бернуллі.

Для функції щільності ймовірності та функції розподілу стандартного нормального розподілу $N(0,1)$ складені таблиці. Ці функції часто позначають (зокрема в таблицях)

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad \text{та} \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt.$$



Мал.3.3.3

Перша з них парна, для другої має місце співвідношення

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

Іноді табулюється функція

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt$$

яка, очевидно, непарна. Зв'язок між функціями $\Phi(x)$ та $\Phi_0(x)$ такий

$$\Phi(x)=0{,}5+\Phi_0(x).$$

Графік функції $p(x)$ для різних σ ($\sigma_1<\sigma_2$) подано на мал.3.3.3.

Оскільки, для нормального розподілу табулюються тільки відповідні функції стандартного розподілу, розглянемо способи розв'язування деяких типових задач для довільного нормального розподілу $N(m,\sigma)$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Якщо величина ξ має розподіл $N(m,\sigma)$, то

$$P(a<\xi<b)=\Phi_0((b-m)/\sigma)-\Phi_0((a-m)/\sigma)=\Phi((b-m)/\sigma)-\Phi((a-m)/\sigma) \quad (3.3.3)$$

На практиці часто потрібно знайти ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання. Іншими словами, йдеться про ймовір-ність виконання нерівності

$$|\xi - E\xi| < \varepsilon, \text{ де } \varepsilon > 0, \quad (3.3.4)$$

або ж про ймовірність заданого відхилення випадкової вели-чини від її математичного сподівання. Оскільки нерівність (3.3.4) рівносильна нерівності

$$E\xi - \varepsilon < \xi < E\xi + \varepsilon,$$

то з теореми 3.3.1 одержуємо такий

НАСЛІДОК 3.3.1. Якщо випадкова величина ξ має розподіл $N(m,\sigma)$, то

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) = 2\Phi_0(\varepsilon/\sigma) \quad (3.3.5)$$

Показниковий (експоненціальний) розподіл. Випадкова величин ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$,

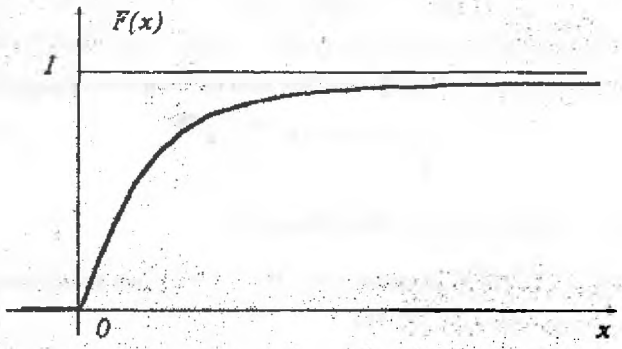
якщо її функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

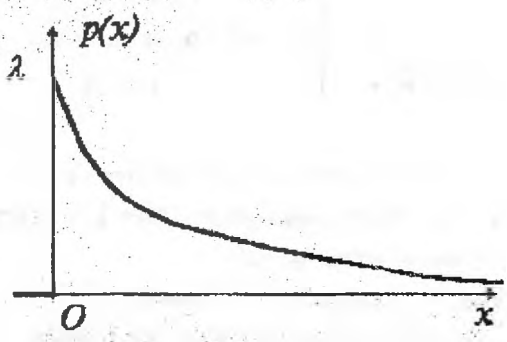
Щільність ймовірності такої величини має вигляд (див. 3.3.2.3)

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ подано на мал.3.3.4, графік $p(x)$ - на мал.3.3.5.



Мал.3.3.4



Мал.3.3.5

Показниковий розподіл має важли властивість відсутності післядії:

$$P(\xi>t+s/\ \xi>s)=P(\xi>t),$$

у зв'язку з чим має широке застосування в теорії стрибкоподібних марковських процесів, систем масового обслуговування, теорії на-дійності. Серед неперервних розподілів тільки показниковий має властивість відсутності післядії. Математичне сподівання та дисперсія цього розподілу відповідно дорівнюють (див. 3.3.2.3, 3.3.2.6):

$$E\xi = 1/\lambda\ ,\ D\xi = 1/\lambda^2\ .$$

Отже, для показникового розподілу $E\xi = \sigma(\xi)$. Ймовірність події $P(0\le a<\xi<b)$ для показникового розподілу можна знайти за формулою

$$P(a<\xi<b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \qquad (3.3.5)$$

3.3.2.1. *Приклади розв'язування задач.*

Задача 3.3.1. Знайти ймовірність $P(2< \xi <6)$ для випадкової величини ξ, яка має розподіл R[4,10].

Розв'язання.

Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ (x-4)/6, & 4 \le x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Тоді

$$P(2< \xi <6)=F(6)-F(2)= 2/6-0 = 1/3.$$

Задача 3.3.2. Знайти ймовірність $P(8< \xi <11)$ для випадкової величини ξ, яка має розподіл N(10,2).

Розв'язання. За теоремою 3.3.1 маємо

$$P(8< \xi <11) = \Phi_0((11-10)/2) - \Phi_0((8-10)/2) =$$
$$= \Phi_0(0,5) - \Phi_0(-1) = \Phi_0(0,5) + \Phi_0(1).$$

За таблицею (додаток 2):

$$\Phi_0(0,5) = 0,1915,\ \Phi_0(1) = 0,3413.$$

Отже,

$$P(8< \xi <11) = 0,1915 + 0,3413 = 0,5328.$$

Задача 3.3.3. Коробки з шоколадом запаковуються автоматично. Маса коробки має нормальний розподіл з середнім 1,06 кг. Знайти стандартне відхилення, якщо 5% коробок мають масу менше 1 кг.

Розв'язання. За теоремою 3.3.1 маємо

$$P(-\infty < \xi <1) = \Phi_0((1-1,06)/\sigma) - \Phi_0(-\infty) =$$

$$\Phi_0(-0,06/\sigma) + 0,5 = 0,5 - \Phi_0(0,06/\sigma) = 0,05.$$

Звідси $\Phi_0(0,06/\sigma) = 0,45$. За таблицею знаходимо

$$\Phi_0(1,65) \approx 0,45.$$

Отже, $0,06/\sigma = 1,65$. Звідси $\sigma \approx 0,0365$.

Задача 3.3.4. Проводиться зважування деякої речовини без систематичної похибки. Випадкові похибки зважування мають нормальний закон розподілу із середнім квадратичним відхи-ленням σ=20*г*. Знайти імовірність того, що зважування буде проведено з похибкою, яка не перевищує по абсолютній величині 10*г*.

Розв'язання. Нехай випадкова величина ξ - результат зважування. За умовою ξ має нормальний закон роз-поділу, математичне сподівання якого дорівнює 0 (відсутність систематичної похибки) і стандартне від-хилення σ=20 *г*.

Використаємо формулу (3.3.5), в якій, за умовою, ε=10. Тоді маємо

$$P(|\xi - 0|<10) = P(|\xi|<10) = 2\Phi_0(10/20) = 2\Phi_0(0,5).$$

За таблицею (додаток 2):

$$\Phi_0(0,5)=0,1915.$$

Тому

$$P(|\xi|<10) = 2\cdot 0,1915 = 0,383.$$

Задача 3.3.5. Тривалість ξ перебування в черзі для оформлення замовлення в ательє має показниковий розподіл з середнім t_c. Знайти ймовірності наступних подій

$$A=\{ t_0/2 \le \xi < 3t_0/2\}, \quad B=\{ \xi \ge 2t_0\}.$$

Розв'язання. Маємо показниковий розподіл з параметром $\lambda=1/t_0$. Згідно з формулою (3.3.5) маємо

$$P(A) = P(t_0/2 \le \xi \le 3t_0/2) =$$

$$= e^{-\frac{t_0}{2t_0}} - e^{-\frac{3t_0}{2t_0}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}61 - 0{,}22 = 0{,}39.$$

$$P(B) = 1 - F(2t_0) = 1 - e^{-\frac{2t_0}{t_0}} = 1 - e^{-2} \approx 1 - 0{,}14 = 0{,}86.$$

3.3.2.1. *Задачі для самостійної роботи*

Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал (α,β), якщо вона розподілена:

а) рівномірно на $[a,b]$;

б) за нормальним законом і має математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення α;

б) за показниковим законом і має математичне сподівання b.

В кожному з випадків знайти ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж на півтора середнього квадратичного відхилення (дані беруться з таблиці 3.3.1).

Таблиця 3.3.1

Варіант	α	β	a	b
1	1	10	8	15
2	2	8	3	12
3	3	8	5	10
4	4	12	6	15
5	5	9	7	11
6	6	10	8	12
7	7	12	9	14

Варіант	α	β	a	b
8	8	15	12	16
9	9	14	10	15
10	6	10	8	13

4. ЛІТЕРАТУРА

1. В.А.Калемаев, О.В.Староверов, В.Б.Турундаевский. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: ВШ,1991.

2. В.П.Чистяков. Курс теории вероятностей.- М.: Наука,1987.

3. Е.С.Вентцель. Теория вероятностей.-М.:Наука,1969.

4. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы /под редакцией Ф.Е.Ефимова.-М.:Наука,1984.

5. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 1979.

6. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей.- М.: ВШ, 1986.

7. Теорія ймовірностей та математичної статистики. Ч.І. Методичні вказівки та завдання контрольних робіт для студентів заочної форми навчання / В.Е.Горецький.-Хмельницький: ТУП, 1997.-147 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Значення функції щільності ймовірності для $N(0,1)$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.39894	0.39892	0.39886	0.39876	0.39862	0.39844	0.39822	0.39797	0.39767	0.39733
0.1	0.39659	0.39654	0.39608	0.39559	0.39505	0.39448	0.39387	0.39322	0.39253	0.39178
0.2	0.39104	0.39024	0.38940	0.38853	0.38762	0.38667	0.38568	0.38466	0.38361	0.38251
0.3	0.38139	0.38023	0.37903	0.37780	0.37654	0.37524	0.37391	0.37255	0.37115	0.36973
0.4	0.36827	0.36678	0.36526	0.36371	0.36213	0.36053	0.35889	0.35723	0.35553	0.35381
0.5	0.35207	0.35029	0.34849	0.34667	0.34482	0.34294	0.34105	0.33912	0.33718	0.33521
0.6	0.33322	0.33121	0.32918	0.32713	0.32506	0.32297	0.32086	0.31874	0.31659	0.31443
0.7	0.31225	0.31006	0.30785	0.30563	0.30339	0.30114	0.29887	0.29659	0.29431	0.29200
0.8	0.28969	0.28737	0.28504	0.28269	0.28034	0.27798	0.27562	0.27324	0.27086	0.26848
0.9	0.26609	0.26369	0.26129	0.25888	0.25647	0.25406	0.25164	0.24923	0.24681	0.24439
1.0	0.24197	0.23955	0.23713	0.23471	0.23230	0.22988	0.22747	0.22506	0.22265	0.22025
1.1	0.21785	0.21546	0.21307	0.21069	0.20831	0.20594	0.20357	0.20121	0.19886	0.19652
1.2	0.19419	0.19186	0.18954	0.18724	0.18494	0.18265	0.18037	0.17810	0.17585	0.17360
1.3	0.17137	0.16915	0.16694	0.16474	0.16256	0.16038	0.15822	0.15608	0.15395	0.15183
1.4	0.14973	0.14764	0.14556	0.14350	0.14146	0.13943	0.13742	0.13542	0.13344	0.13147
1.5	0.12952	0.12758	0.12566	0.12376	0.12188	0.12001	0.11816	0.11632	0.11450	0.11270
1.6	0.11092	0.10915	0.10741	0.10567	0.10396	0.10226	0.10059	0.09893	0.09728	0.09566
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.7	0.09405	0.09246	0.09089	0.08933	0.08780	0.08628	0.08478	0.08329	0.08183	0.08038
1.8	0.07895	0.07754	0.07614	0.07477	0.07341	0.07206	0.07074	0.06943	0.06814	0.06687
1.9	0.06562	0.06438	0.06316	0.06195	0.06077	0.05959	0.05844	0.05730	0.05618	0.05508
2.0	0.05399	0.05292	0.05186	0.05082	0.04980	0.04879	0.04780	0.04682	0.04586	0.04491
2.1	0.04398	0.04307	0.04217	0.04128	0.04041	0.03955	0.03871	0.03788	0.03706	0.03626
2.2	0.03547	0.03470	0.03394	0.03319	0.03246	0.03174	0.03103	0.03034	0.02965	0.02898
2.3	0.02833	0.02768	0.02705	0.02643	0.02582	0.02522	0.02463	0.02406	0.02349	0.02294
2.4	0.02239	0.02186	0.02134	0.02083	0.02033	0.01984	0.01936	0.01888	0.01842	0.01797
2.5	0.01753	0.01709	0.01667	0.01625	0.01585	0.01545	0.01506	0.01468	0.01431	0.01394
2.6	0.01358	0.01323	0.01289	0.01256	0.01223	0.01191	0.01160	0.01130	0.01100	0.01071
2.7	0.01042	0.01014	0.00987	0.00961	0.00935	0.00909	0.00885	0.00861	0.00837	0.00814
2.8	0.00792	0.00770	0.00748	0.00727	0.00707	0.00687	0.00668	0.00649	0.00631	0.00613
2.9	0.00595	0.00578	0.00562	0.00545	0.00530	0.00514	0.00499	0.00485	0.00470	0.00457
3.0	0.00443	0.00430	0.00417	0.00405	0.00393	0.00381	0.00370	0.00358	0.00348	0.00337
3.1	0.00327	0.00317	0.00307	0.00298	0.00288	0.00279	0.00271	0.00262	0.00254	0.00246
3.2	0.00238	0.00231	0.00224	0.00216	0.00210	0.00203	0.00196	0.0019	0.00184	0.00178
3.3	0.00172	0.00167	0.00161	0.00156	0.00151	0.00146	0.00141	0.00136	0.00132	0.00127
3.4	0.00123	0.00119	0.00115	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100	0.00097	0.00094	0.0009
3.5	0.00087	0.00084	0.00081	0.00079	0.00076	0.00073	0.00071	0.00068	0.00066	0.00063
4.0	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011	0.00011	0.00011	0.0001	9.7E-05	9.3E-05
4.5	1.6E-05	1.5E-05	1.5E-05	1.4E-05	1.3E-05	1.3E-05	1.2E-05	1.2E-05	1.1E-05	1.1E-05
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

Додаток 2.

А. Функція розподілу для $N(0,1)$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54775	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.9732	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.9996	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
4.5	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999998	0.999998	0.999998
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

Додаток 3. Значення функції $exp(-x)= e^{-x}$

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
0	1	0,99501	0,99005	0,98511	0,9802	0,97531	0,97045	0,96561	0,96079	0,956
0,05	0,95123	0,94649	0,94176	0,93707	0,93239	0,92774	0,92312	0,91851	0,91393	0,90937
0,1	0,90484	0,90032	0,89583	0,89137	0,88692	0,8825	0,8781	0,87372	0,86936	0,86502
0,15	0,86071	0,85642	0,85214	0,84789	0,84366	0,83946	0,83527	0,8311	0,82696	0,82283
0,2	0,81873	0,81465	0,81058	0,80654	0,80252	0,79852	0,79453	0,79057	0,78663	0,7827
0,25	0,7788	0,77492	0,77105	0,76721	0,76338	0,75957	0,75578	0,75201	0,74826	0,74453
0,3	0,74082	0,73712	0,73345	0,72979	0,72615	0,72253	0,71892	0,71534	0,71177	0,70822
0,35	0,70469	0,70117	0,69768	0,6942	0,69073	0,68729	0,68386	0,68045	0,67706	0,67368
0,4	0,67032	0,66698	0,66365	0,66034	0,65705	0,65377	0,65051	0,64726	0,64404	0,64082
0,45	0,63763	0,63445	0,63128	0,62814	0,625	0,62189	0,61878	0,6157	0,61263	0,60957
0,5	0,60653	0,60351	0,6005	0,5975	0,59452	0,59156	0,5886	0,58567	0,58275	0,57984
0,55	0,57695	0,57407	0,57121	0,56836	0,56553	0,5627	0,5599	0,55711	0,55433	0,55156
0,6	0,54881	0,54607	0,54335	0,54064	0,53794	0,53526	0,53259	0,52994	0,52729	0,52466
0,65	0,52205	0,51944	0,51685	0,51427	0,51171	0,50916	0,50662	0,50409	0,50158	0,49907
0,7	0,49659	0,49411	0,49164	0,48919	0,48675	0,48432	0,48191	0,47951	0,47711	0,47473
0,75	0,47237	0,47001	0,46767	0,46533	0,46301	0,4607	0,45841	0,45612	0,45384	0,45158
0,8	0,44933	0,44709	0,44486	0,44264	0,44043	0,43823	0,43605	0,43387	0,43171	0,42956
0,85	0,42741	0,42528	0,42316	0,42105	0,41895	0,41686	0,41478	0,41271	0,41066	0,40861
0,9	0,40657	0,40454	0,40252	0,40052	0,39852	0,39653	0,39455	0,39259	0,39063	0,38868
0,95	0,38674	0,38481	0,38289	0,38098	0,37908	0,37719	0,37531	0,37344	0,37158	0,36972
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
1	0,36788	0,36604	0,36422	0,3624	0,36059	0,3588	0,35701	0,35523	0,35345	0,35169
1,05	0,34994	0,34819	0,34646	0,34473	0,34301	0,3413	0,3396	0,3379	0,33622	0,33454
1,1	0,33287	0,33121	0,32956	0,32792	0,32628	0,32465	0,32303	0,32142	0,31982	0,31822
1,15	0,31664	0,31506	0,31349	0,31192	0,31037	0,30882	0,30728	0,30575	0,30422	0,3027
1,2	0,30119	0,29969	0,2982	0,29671	0,29523	0,29376	0,29229	0,29083	0,28938	0,28794
1,25	0,2865	0,28508	0,28365	0,28224	0,28083	0,27943	0,27804	0,27665	0,27527	0,2739
1,3	0,27253	0,27117	0,26982	0,26847	0,26714	0,2658	0,26448	0,26316	0,26185	0,26054
1,35	0,25924	0,25795	0,25666	0,25538	0,25411	0,25284	0,25158	0,25032	0,24908	0,24783
1,4	0,2466	0,24537	0,24414	0,24293	0,24171	0,24051	0,23931	0,23812	0,23693	0,23575
1,45	0,23457	0,2334	0,23224	0,23108	0,22993	0,22878	0,22764	0,2265	0,22537	0,22425
1,5	0,22313	0,22202	0,22091	0,21981	0,21871	0,21762	0,21654	0,21546	0,21438	0,21331
1,55	0,21225	0,21119	0,21014	0,20909	0,20805	0,20701	0,20598	0,20495	0,20393	0,20291
1,6	0,2019	0,20089	0,19989	0,19889	0,1979	0,19691	0,19593	0,19495	0,19398	0,19301
1,65	0,19205	0,19109	0,19014	0,18919	0,18825	0,18731	0,18637	0,18544	0,18452	0,1836
1,7	0,18268	0,18177	0,18087	0,17996	0,17907	0,17817	0,17728	0,1764	0,17552	0,17464
1,75	0,17377	0,17291	0,17204	0,17119	0,17033	0,16948	0,16864	0,1678	0,16696	0,16613
1,8	0,1653	0,16447	0,16365	0,16284	0,16203	0,16122	0,16041	0,15961	0,15882	0,15803
1,8	0,15724	0,15645	0,15567	0,1549	0,15412	0,15335	0,15259	0,15183	0,15107	0,15032
1,9	0,14957	0,14882	0,14808	0,14734	0,14661	0,14588	0,14515	0,14442	0,1437	0,14299
1,95	0,14227	0,14156	0,14086	0,14016	0,13946	0,13876	0,13807	0,13738	0,1367	0,136[illegible]
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
2	0,13534	0,13466	0,13399	0,13332	0,13266	0,13199	0,13134	0,13068	0,13003	0,12938
2,05	0,12873	0,12809	0,12745	0,12682	0,12619	0,12556	0,12493	0,12431	0,12369	0,12307
2,1	0,12246	0,12185	0,12124	0,12063	0,12003	0,11943	0,11884	0,11824	0,11765	0,11707
2,15	0,11648	0,1159	0,11533	0,11475	0,11418	0,11361	0,11304	0,11248	0,11192	0,11136
2,2	0,1108	0,11025	0,1097	0,10915	0,10861	0,10807	0,10753	0,10699	0,10646	0593
2,25	0,1054	0,10487	0,10435	0,10383	0,10331	0,1028	0,10228	0,10177	0,10127	0,10076
2,3	0,10026	0,09976	0,09926	0,09877	0,09827	0,09778	0,0973	0,09681	0,09633	0,09585
2,35	0,09537	0,09489	0,09442	0,09395	0,09348	0,09301	0,09255	0,09209	0,09163	0,09117
2,4	0,09072	0,09027	0,08982	0,08937	0,08892	0,08848	0,08804	0,0876	0,0871	0,08673
2,45	0,08629	0,08586	0,08543	0,08501	0,08458	0,08416	0,08374	0,08333	0,08291	0,0825
2,5	0,08208	0,08168	0,08127	0,08086	0,08046	0,08006	0,07966	0,07926	0,07887	0,07847
2,55	0,07808	0,07769	0,0773	0,07692	0,07654	0,07615	0,07577	0,0754	0,07502	0,07465
2,6	0,07427	0,0739	0,07353	0,07317	0,0728	0,07244	0,07208	0,07172	0,07136	0,07101
2,65	0,07065	0,0703	0,06995	0,0696	0,06925	0,06891	0,06856	0,06822	0,06788	0,06754
2,7	0,06721	0,06687	0,06654	0,0662	0,06587	0,06555	0,06522	0,06489	0,06457	0,06425
2,75	0,06393	0,06361	0,06329	0,06298	0,06266	0,06235	0,06204	0,06173	0,06142	0,06111
2,8	0,06081	0,06051	0,0602	0,0599	0,05961	0,05931	0,05901	0,05872	0,05843	0,05813
2,85	0,05784	0,05756	0,05727	0,05698	0,0567	0,05642	0,05613	0,05585	0,05558	0,0553
2,9	0,05502	0,05475	0,05448	0,0542	0,05393	0,05366	0,0534	0,05313	0,05287	0,0526
2,95	0,05234	0,05208	0,05182	0,05156	0,0513	0,05105	0,05079	0,05054	0,05029	0,05004
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
3	0,04979	0,04954	0,04929	0,04905	0,0488	0,04856	0,04832	0,04807	0,04783	0,0476
3,05	0,04736	0,04712	0,04689	0,04665	0,04642	0,04619	0,04596	0,04573	0,0455	0,04528
3,1	0,04505	0,04482	0,0446	0,04438	0,04416	0,04394	0,04372	0,0435	0,04328	0,04307
3,15	0,04285	0,04264	0,04243	0,04221	0,042	0,04179	0,04159	0,04138	0,04117	0,04097
3,2	0,04076	0,04056	0,04036	0,04016	0,03996	0,03976	0,03956	0,03936	0,03916	0,03897
3,25	0,03877	0,03858	0,03839	0,0382	0,03801	0,03782	0,03763	0,03744	0,03725	0,03707
3,3	0,03688	0,0367	0,03652	0,03633	0,03615	0,03597	0,03579	0,03561	0,03544	0,03526
3,35	0,03508	0,03491	0,03474	0,03456	0,03439	0,03422	0,03405	0,03388	0,03371	0,03354
3,4	0,03337	0,03321	0,03304	0,03288	0,03271	0,03255	0,03239	0,03223	0,03206	0,0319
3,45	0,03175	0,03159	0,03143	0,03127	0,03112	0,03096	0,03081	0,03065	0,0305	0,03035
3,5	0,0302	0,03005	0,0299	0,02975	0,0296	0,02945	0,0293	0,02916	0,02901	0,02887
3,55	0,02872	0,02858	0,02844	0,0283	0,02816	0,02802	0,02788	0,02774	0,0276	0,02746
3,6	0,02732	0,02719	0,02705	0,02692	0,02678	0,02665	0,02652	0,02638	0,02625	0,02612
3,65	0,02599	0,02586	0,02573	0,0256	0,02548	0,02535	0,02522	0,0251	0,02497	0,02485
3,7	0,02472	0,0246	0,02448	0,02436	0,02423	0,02411	0,02399	0,02387	0,02375	0,02364
3,75	0,02352	0,0234	0,02328	0,02317	0,02305	0,02294	0,02282	0,02271	0,0226	0,02248
3,8	0,02237	0,02226	0,02215	0,02204	0,02193	0,02182	0,02171	0,0216	0,02149	0,02139
3,85	0,02128	0,02117	0,02107	0,02096	0,02086	0,02075	0,02065	0,02055	0,02045	0,02034
3,9	0,02024	0,02014	0,02004	0,01994	0,01984	0,01974	0,01964	0,01955	0,01945	0,01935
3,95	0,01925	0,01916	0,01906	0,01897	0,01887	0,01878	0,01869	0,01859	0,0185	0,01841
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
4	0,01832	0,01822	0,01813	0,01804	0,01795	0,01786	0,01777	0,01769	0,0176	0,01751
4,05	0,01742	0,01734	0,01725	0,01716	0,01708	0,01699	0,01691	0,01682	0,01674	0,01666
4,1	0,01657	0,01649	0,01641	0,01633	0,01624	0,01616	0,01608	0,016	0,01592	0,01584
4,15	0,01576	0,01569	0,01561	0,01553	0,01545	0,01538	0,0153	0,01522	0,01515	0,01507
4,2	0,015	0,01492	0,01485	0,01477	0,0147	0,01463	0,01455	0,01448	0,01441	0,01434
4,25	0,01426	0,01419	0,01412	0,01405	0,01398	0,01391	0,01384	0,01377	0,0137	0,01364
4,3	0,01357	0,0135	0,01343	0,01337	0,0133	0,01323	0,01317	0,0131	0,01304	0,01297
4,35	0,01291	0,01284	0,01278	0,01271	0,01265	0,01259	0,01253	0,01246	0,0124	0,01234
4,4	0,01228	0,01222	0,01216	0,01209	0,01203	0,01197	0,01191	0,01186	0,0118	0,01174
4,45	0,01168	0,01162	0,01156	0,0115	0,01145	0,01139	0,01133	0,01128	0,01122	0,01116
4,5	0,01111	0,01105	0,011	0,01094	0,01089	0,01083	0,01078	0,01073	0,01067	0,01062
4,55	0,01057	0,01051	0,01046	0,01041	0,01036	0,01031	0,01025	0,0102	0,01015	0,0101
4,6	0,01005	0,01	0,00995	0,0099	0,00985	0,0098	0,00975	0,00971	0,00966	0,00961
4,65	0,00956	0,00951	0,00947	0,00942	0,00937	0,00933	0,00928	0,00923	0,00919	0,00914
4,7	0,0091	0,00905	0,009	0,00896	0,00892	0,00887	0,00883	0,00878	0,00874	0,0087
4,75	0,00865	0,00861	0,00857	0,00852	0,00848	0,00844	0,0084	0,00835	0,00831	0,00827
4,8	0,00823	0,00819	0,00815	0,00811	0,00807	0,00803	0,00799	0,00795	0,00791	0,00787
4,85	0,00783	0,00779	0,00775	0,00771	0,00767	0,00764	0,0076	0,00756	0,00752	0,00748
4,9	0,00745	0,00741	0,00737	0,00734	0,0073	0,00726	0,00723	0,00719	0,00715	0,00712
4,95	0,00708	0,00705	0,00701	0,00698	0,00694	0,00691	0,00687	0,00684	0,00681	0,00677
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
5	0,00674	0,0067	0,00667	0,00664	0,0066	0,00657	0,00654	0,00651	0,00647	0,00644
5,05	0,00641	0,00638	0,00635	0,00631	0,00628	0,00625	0,00622	0,00619	0,00616	0,00613
5,1	0,0061	0,00607	0,00604	0,00601	0,00598	0,00595	0,00592	0,00589	0,00586	0,00583
5,15	0,0058	0,00577	0,00574	0,00571	0,00568	0,00566	0,00563	0,0056	0,00557	0,00554
5,2	0,00552	0,00549	0,00546	0,00543	0,00541	0,00538	0,00535	0,00533	0,0053	0,00527
5,25	0,00525	0,00522	0,0052	0,00517	0,00514	0,00512	0,00509	0,00507	0,00504	0,00502
5,3	0,00499	0,00497	0,00494	0,00492	0,00489	0,00487	0,00484	0,00482	0,0048	0,00477
5,35	0,00475	0,00472	0,0047	0,00468	0,00465	0,00463	0,00461	0,00458	0,00456	0,00454
5,4	0,00452	0,00449	0,00447	0,00445	0,00443	0,00441	0,00438	0,00436	0,00434	0,00432
5,45	0,0043	0,00427	0,00425	0,00423	0,00421	0,00419	0,00417	0,00415	0,00413	0,00411
5,5	0,00409	0,00407	0,00405	0,00403	0,00401	0,00399	0,00397	0,00395	0,00393	0,00391
5,55	0,00389	0,00387	0,00385	0,00383	0,00381	0,00379	0,00377	0,00375	0,00374	0,00372
5,6	0,0037	0,00368	0,00366	0,00364	0,00362	0,00361	0,00359	0,00357	0,00355	0,00354
5,65	0,00352	0,0035	0,00348	0,00347	0,00345	0,00343	0,00341	0,0034	0,00338	0,00336
5,7	0,00335	0,00333	0,00331	0,0033	0,00328	0,00326	0,00325	0,00323	0,00321	0,0032
5,75	0,00318	0,00317	0,00315	0,00314	0,00312	0,0031	0,00309	0,00307	0,00306	0,00304
5,8	0,00303	0,00301	0,003	0,00298	0,00297	0,00295	0,00294	0,00292	0,00291	0,00289
5,85	0,00288	0,00287	0,00285	0,00284	0,00282	0,00281	0,00279	0,00278	0,00277	0,00275
5,9	0,00274	0,00273	0,00271	0,0027	0,00269	0,00267	0,00266	0,00265	0,00263	0,00262
5,95	0,00261	0,00259	0,00258	0,00257	0,00255	0,00254	0,00253	0,00252	0,0025	0,00249
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
6	0,00248	0,00247	0,00245	0,00244	0,00243	0,00242	0,00241	0,00239	0,00238	0,00237
6,05	0,00236	0,00235	0,00233	0,00232	0,00231	0,0023	0,00229	0,00228	0,00227	0,00225
6,1	0,00224	0,00223	0,00222	0,00221	0,0022	0,00219	0,00218	0,00217	0,00215	0,00214
6,15	0,00213	0,00212	0,00211	0,0021	0,00209	0,00208	0,00207	0,00206	0,00205	0,00204
6,2	0,00203	0,00202	0,00201	0,002	0,00199	0,00198	0,00197	0,00196	0,00195	0,00194
6,25	0,00193	0,00192	0,00191	0,0019	0,00189	0,00188	0,00187	0,00186	0,00185	0,00185
6,3	0,00184	0,00183	0,00182	0,00181	0,0018	0,00179	0,00178	0,00177	0,00176	0,00176
6,35	0,00175	0,00174	0,00173	0,00172	0,00171	0,0017	0,0017	0,00169	0,00168	0,00167
6,4	0,00166	0,00165	0,00165	0,00164	0,00163	0,00162	0,00161	0,0016	0,0016	0,00159
6,45	0,00158	0,00157	0,00156	0,00156	0,00155	0,00154	0,00153	0,00153	0,00152	0,00151
6,5	0,0015	0,0015	0,00149	0,00148	0,00147	0,00147	0,00146	0,00145	0,00144	0,00144
6,55	0,00143	0,00142	0,00142	0,00141	0,0014	0,00139	0,00139	0,00138	0,00137	0,00137
6,6	0,00136	0,00135	0,00135	0,00134	0,00133	0,00133	0,00132	0,00131	0,00131	0,0013
6,65	0,00129	0,00129	0,00128	0,00127	0,00127	0,00126	0,00126	0,00125	0,00124	0,00124
6,7	0,00123	0,00122	0,00122	0,00121	0,00121	0,0012	0,00119	0,00119	0,00118	0,00118
6,75	0,00117	0,00117	0,00116	0,00115	0,00115	0,00114	0,00114	0,00113	0,00112	0,00112
6,8	0,00111	0,00111	0,0011	0,0011	0,00109	0,00109	0,00108	0,00108	0,00107	0,00106
6,85	0,00106	0,00105	0,00105	0,00104	0,00104	0,00103	0,00103	0,00102	0,00102	0,00101
6,9	0,00101	0,001	0,001	0,00099	0,00099	0,00098	0,00098	0,00097	0,00097	0,00096
6,95	0,00096	0,00095	0,00095	0,00094	0,00094	0,00093	0,00093	0,00093	0,00092	0,00092
x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045

ЗМІСТ

Вступ

Теорія ймовірностей.

1. Числення ймовірностей 4
1.1 Класичне визначення ймовірності 4
1.1.1. Простір елементарних подій. Випадкова подія. Протилежна подія 4
1.1.1.1. Теоретичні відомості 4
1.1.1.2. Приклади розв'язування задач 7
1.1.1.3. Задачі для самостійної роботи 10
1.1.2. Класичне визначення ймовірності 11
1.1.2.1. Теоретичні відомості 11
1.1.2.2. Приклади розв'язування задач 23
1.1.2.3. Задачі для самостійної роботи 27
1.2. Геометрична ймовірність 28
1.2.1. Теоретичні відомості 28
1.2.2. Приклади розв'язування задач 29
1.2.3. Задачі для самостійної роботи 32
1.3. Алгебра подій. Теореми додавання та множення ймовірностей 33
1.3.1. Теоретичні відомості 33
1.3.2. Приклади розв'язування задач 37
1.3.3. Задачі для самостійної роботи 40
1.4. Формула повної ймовірності. Формули Байєса 41
1.4.1. Повна група подій. Формула повної ймовірності 41
1.4.1.1. Теоретичні відомості 41
1.4.1.2. Приклади розв'язування задач 42
1.4.1.3. Задачі для самостійної роботи 42
1.4.2. Формули Байєса 44
1.4.2.1. Теоретичні відомості 44
1.4.2.2. Приклади розв'язування задач 44
1.4.2.3. Задачі для самостійної роботи 45
2. Повторення випробувань 46
2.1. Поліноміальна схема. Схема Бернуллі 46
2.1.1. Теоретичні відомості 46
2.1.2. Приклади розв'язування задач 47
2.1.3. Задачі для самостійної роботи 49
2.2. Граничні теореми в схемі Бернулі 50

2.2.1. Теорема Пуасона 50
2.2.1.1 Теоретичні відомості 50
2.2.1.2. Приклади розв'язування задач 51
2.2.1.3. Задачі для самостійної роботи. 52
2.2.2. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа 53
2.2.2.1. Теоретичні відомості 53
2.2.2.2. Приклади розв'язування задач 53
2.2.2.3. Задачі для самостійної роботи 55
3. Випадкові величини 58
3.1. Випадкова величина(вектор). Функція розподілу, Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу та щільність ймовірності 58
3.1.1. Теоретичні відомості 58
3.1.2. Приклади розв'язування задач 61
3.1.3. Задачі для самостійної роботи 65
3.2. Числові характеристики випадкових величин 68
3.2.1. Математичне сподівання 68
3.2.1.1. Теоретичні відомості 68
3.2.1.2. Приклади розв'язування задач 69
3.2.1.3. Задачі для самостійної роботи 71
3.2.2. Дисперсія 71
3.2.2.1. Теоретичні відомості 71
3.2.2.2. Приклади розв'язування задач 72
3.2.2.3. Задачі для самостійної роботи 73
3.2.3. Залежні випадкові величини. Коваріація та коефіцієнт кореляції 73
3.2.3.1. Теоретичні відомості 73
3.2.3.2. Приклади розв'язування задач 75
3.2.3.3. Задачі для самостійної роботи 76
3.3. Приклади деяких розподілів 78
3.3.1. Біноміальний розподіл. Розподіл Пуасона 78
3.3.1.1. Теоретичні відомості 78
3.3.1.2. Приклади розв'язування задач 81
3.3.1.3. Задачі для самостійної роботи 83
3.3.2. Рівномірний, нормальний та показниковий (експоненціальний) розподіли 84
3.3.2.1. Теоретичні відомості 84
3.3.2.2. Приклади розв'язування задач 90

Навчальне видання

Семко Микола Миколайович
Скасків Ліля Василівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ПРАКТИКУМ (частина І)

Підписано до друку 3.05.2007. Формат 60 ×84/16. Папір друк. Офсет. друк.
Умовн. друк. арк. 6,2. Обл.-вид. арк. 5,3.Тираж 100 прим. Зам. 128.