

Österreichisches Multiscience Journal

VOL 1, No44 (2021)

Österreichisches Multiscience Journal (Innsbruck, Austria)

The journal is registered and published in Austria.

The journal publishes scientific studies, reports and reports about achievements in different scientific fields.

Journal is published in German, English, Hungarian,

Polish, Russian, Ukrainian, and French.

Articles are accepted each month.

Frequency: 12 issues per year.

Format - A4

All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

Edition of journal does not carry responsibility

for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws.

Chief editor: Fabian Huber

Managing editor: Daniel Müller

Matthias Leitner - Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Moritz Winkler - Universität Salzburg

Philipp Mayr - Johannes Kepler University

Sebastian Berger - Medizinische Universität Wien

Sophia Hartl - Technische Universität Graz

Jonas Aigner - Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Elias Holzer - Donau-Universität Krems

Simon Lackner - Fachhochschule Wiener Neustadt

Marie Brandstatter - Fachhochschule Technikum Wien

Julian König - Management Center Innsbruck

«Österreichisches Multiscience Journal»

Editorial board address: Universitätsstraße 22, 6020 Innsbruck, Austria

E-mail: editor@osterr-science.com

Web: <http://osterr-science.com>

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ АЛГЕБРАІЧНИХ ЗАДАЧ

Скасків Л. В.,

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Університет державної фіскальної служби України,
м. Ірпінь*

Руденко В. В.

*здобувач вищої освіти
Університет державної фіскальної служби України,
м. Ірпінь*

APPLICATION OF GRAPHIC METHOD TO SOLVE SOME ALGEBRAIC PROBLEMS

Skaskiv L.,

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin*

Rudenko V.

*master's student
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin*

Анотація:

У статті розглядаються основні принципи застосування графічного методу до алгебраїчних задач, зокрема до розв'язування рівнянь з параметрами.

Abstract:

The article considers the basic principles of applying the graphical method to algebraic problems, in particular, to solving equations with parameters.

Ключові слова: графічний метод; графік функції; рівняння з параметром.

Keywords: graphic method; function schedule; equation with parameter.

Орієнтація освіти на особистісний розвиток, варіативність школи вимагає переусвідомлення всіх чинників, в тому числі змісту, методів, форм і засобів навчання, від яких залежить якість навчально-виховного процесу. Реалізація цієї мети можлива у збагаченні шкільного курсу математики таким навчальним матеріалом, який міг би забезпечити учню можливість активно залучатися до дослідницької діяльності, у процесі якої в нього відбувалося б формування дослідницьких умінь. Таким матеріалом можуть стати системи задач із параметрами, тобто задачі, в яких умова, хід розв'язку і форма результату залежать від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими.

У методичній літературі зустрічається ряд робіт, пов'язаних із задачами з параметрами, автори яких В.І.Голубев, О.М.Гольдман, Г.В.Дорофєєв, М.Я.Ігнатенко, К.С.Кочарова, О.А.Корміхін, В.С.Крамор, В.М.Лейфура, В.К.Марков, С.І.Мещерякова, Г.Ф.Олійник, Н.О.Тарасенкова, І.І.Чучаєв, І.Ф.Шаригін, але анкетування учнів 10-11 класів й їх учителів показало, що задачам з параметрами, навіть у класах із поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики, не надається належної уваги.

Таким чином, проблема формування й розвитку дослідницьких умінь учнів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами є актуальною з точки зору розвитку творчої особистості школярів в умовах впровадження нової парадигми освіти.

На актуальність даної проблеми вказують проблеми шкільної практики: завдання пов'язані з розв'язуванням рівнянь з параметрами, часто трапляються на шкільних олімпіадах різних рівнів, на різноманітних конкурсах. Також слід відмітити, що результати зовнішнього оцінювання показали, що значних труднощів викликали в учнів розв'язування рівнянь з параметрами.

Починаючи з сьомого класу в центрі уваги шкільної математики знаходиться поняття функції, її графіка. Але об'єм шкільного підручника не дозволяє показати різноманітність задач, їх красу і глибину математичних знань, необхідних для їх розв'язання, а також прикладне застосування.

Метою дослідження є створення системи вправ за допомогою якої здійснюється процес навчання та закріплення вмінь та навичок розв'язувати рівняння та нерівності з параметрами графічним методом.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та основам аналізу в 10-11 класах. *Предметом* дослідження є класи рівнянь та їх систем, що містять параметри.

Одним із способів розв'язання рівнянь є графічний спосіб. Суть цього способу полягає в побудові графіків заданих функцій. У випадку, якщо графіки перетинаються, абсциси точок перетину графіків будуть коренями рівняння. Якщо ж графіки не перетинаються, ми робимо висновок, що рівняння коренів не має [1].

Графічне розв'язування квадратних рівнянь.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перепишемо його таким чином:

$$ax^2 = -bx - c \quad (1)$$

В одній координатній площині побудуємо графіки функцій $y = ax^2$ і $y = -bx - c$. Графіки цих залежностей нам відомі: перша залежність – квадратична (її графіком є парабола); друга – лінійна (її графіком є пряма). З рівняння (1) бачимо: в тому випадку, якщо x є його розв'язком, ординати точок обох графіків рівні між собою. Отже, значенню x відповідає одна й та ж точка як на параболі, так і на прямій, тобто парабола і пряма перетинаються в точці з абсцисою x .

Звідси наступний графічний спосіб розв'язання квадратного рівняння. Будуємо параболу і пряму; якщо пряма і парабола перетинаються, то абсциси точок перетину є коренями квадратного рівняння.

Цей спосіб зручний, якщо не вимагається великої точності або необхідно вказати лише кількість розв'язків. У наступних прикладах проілюструємо розв'язування деяких рівнянь за допомогою програми динамічного моделювання GeoGebra [2, 3].

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді $x^2 = 3x - \frac{7}{4}$. Будуємо параболу $y = x^2$ та пряму $y = 3x - \frac{7}{4}$ (Рис.1)

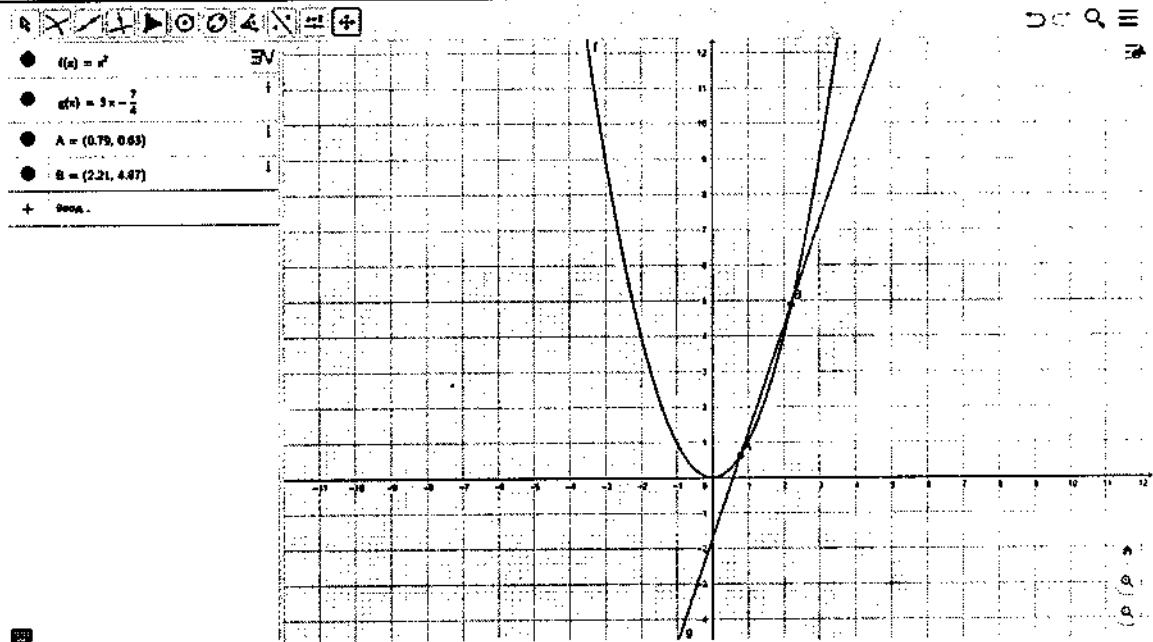


Рис.1. Графічний розв'язок

За допомогою інструменту «Перетин» визначаємо координати точок перетину параболи та прямої (рівняння відповідних ліній та координати точок перетину вказано зліва від рисунка). Отже, парабола і пряма перетинаються у двох точках з абсцисами $x_1 = 0,79, x_2 = 2,21$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 - x + 1 = 0$
Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді $x^2 = x - 1$. Парабола і пряма не перетинаються (Рис.2), отже, рівняння не має коренів.

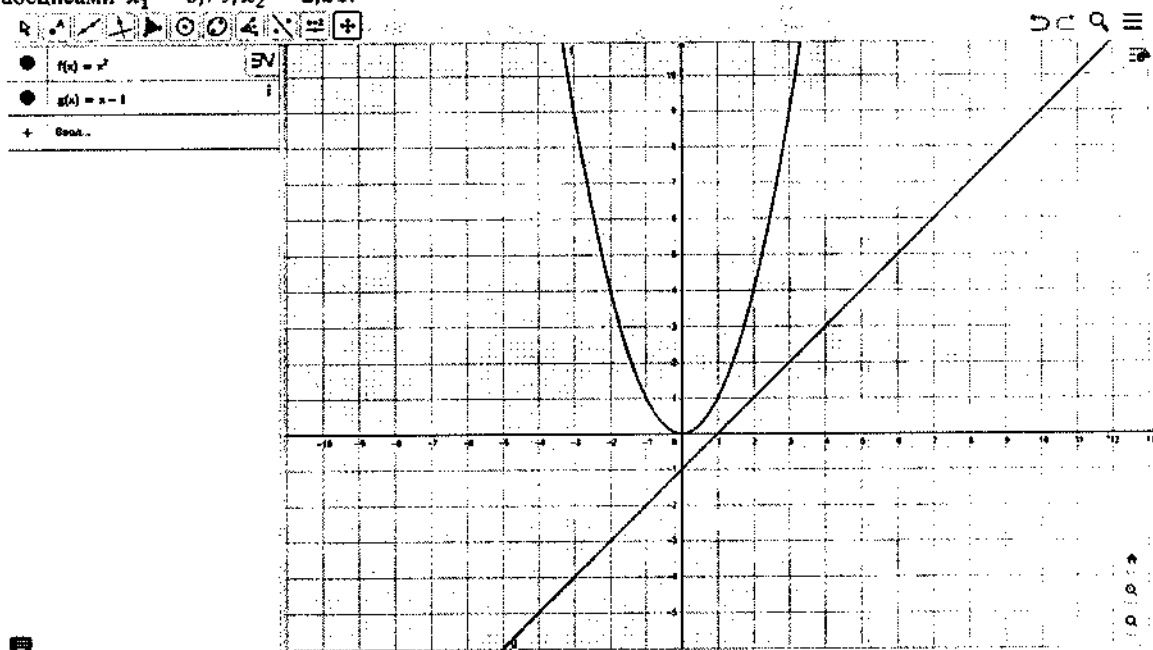


Рис.2. Графічний розв'язок

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Розв'язання. Побудувавши параболу і пряму, бачимо, що вони мають лише одну спільну точку A (1;1) (Рис.3). Отже, рівняння має один корінь.

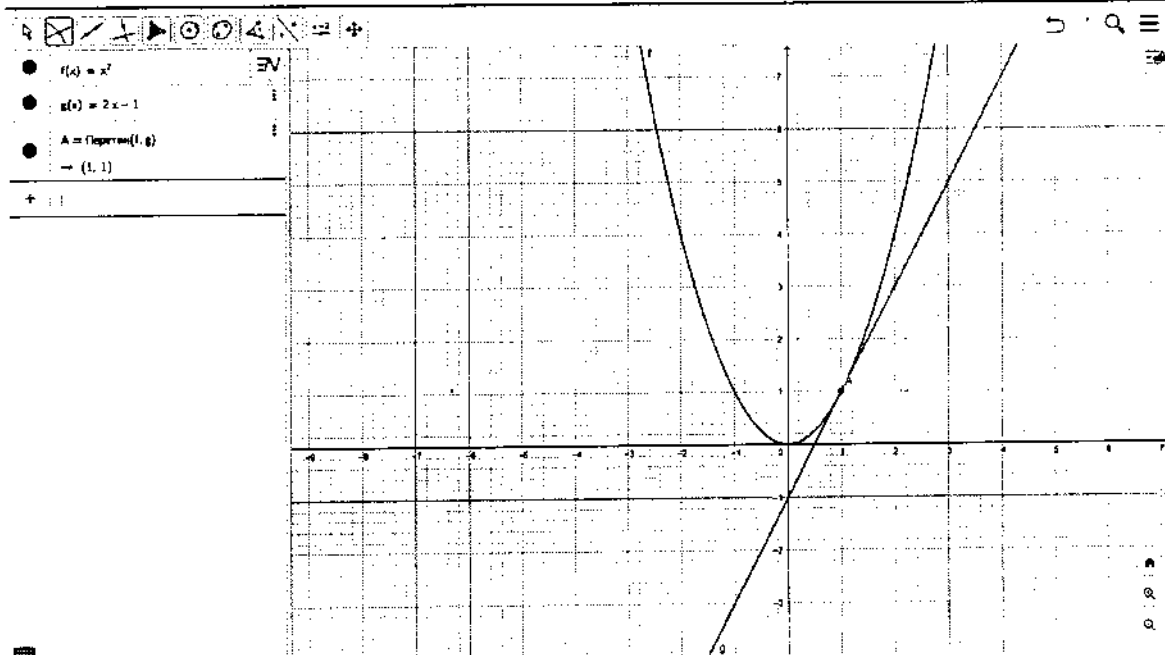


Рис.3. Графічний розв'язок

Розглянемо графічний метод розв'язування систем двох рівнянь із двома невідомими, який полягає в наступному:

- в одній системі координат будується графік кожного з рівнянь системи;
- знаходяться точки перетину побудованих графіків (якщо вони перетинаються);

— координати цих точок — розв'язки системи.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$$

Розв'язання. Щоб розв'язати цю систему, побудуємо в одній системі координат графіки цих рівнянь (Рис.4)

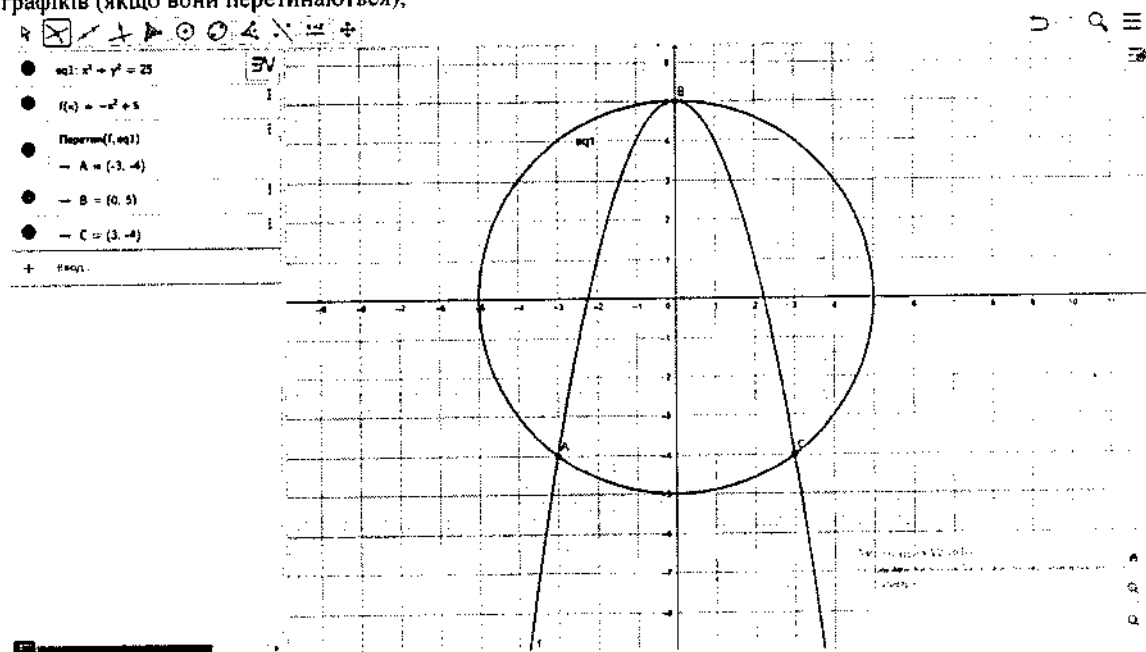


Рис.4. Графічний розв'язок

Координати кожної з точок перетину кола і параболи задовольняють як перше рівняння системи, так і друге, тобто є розв'язком даної системи. Бачимо, що таких точок перетину — три. Використовуючи рис.4 знаходимо значення координат точок перетину графіків: $A(-3; -4)$, $B(0; 5)$, $C(3; -4)$.

Отже, система рівнянь має три розв'язки.

Знаходити розв'язки рівнянь з параметрами можна різними методами. Одні типи задач можна розв'язати лише аналітично, а для інших зручно застосовувати графічний метод. До останніх типів рівнянь з параметрами відносять ті задачі, в яких потрібно знайти кількість розв'язків або вказати найбільший (найменший) розв'язок рівняння.

Сформулюємо задачу про розв'язування рівняння з параметром.

Нехай дано рівність вигляду

$$f(x, a) = g(x, a)$$

де x – невідоме; a – довільне стале число (параметр).

Потрібно знайти значення параметра, при якому рівняння має розв'язки, та встановити значення невідомої величини при знайдених значеннях параметра.

Складність такої задачі полягає в тому, що з одного боку, параметр a вважається фіксованим, а це дає можливість оперувати ним як із числом, з іншого, – параметр вважається фіксованим, але довільним, тобто невідомим числом, що потребує проведення відповідних досліджень.

Універсальних методів розв'язування задач із параметрами немає. Часто користуються алгебраїчними і геометричними (графічними) методами. Алгебраїчний метод ґрунтується на перетворенні аналітичних виразів. У разі застосування геометричного методу використовують геометричні образи певних рівнянь, тобто будують графіки функцій чи рівнянь.

Для використання цих методів потрібно добре знати властивості елементарних функцій, властивості рівнянь, зокрема властивості симетрії.

Крім цього, потрібно добре знати умови, що забезпечують рівносильність перетворень, а також за потреби користуватися обмеженістю функцій.

Так, рівняння $f(x) = g(x)$, де $f(x) \leq c, g(x) \leq c$ є рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$$

Застосування графічних методів потребує вміння виконувати побудови графіків функцій, зокрема за допомогою елементарних перетворень. При цьому зауважимо, що графічними методами часто користуються тоді, коли потрібно знайти не самі розв'язки, а встановити кількість розв'язків рівняння залежно від параметра a .

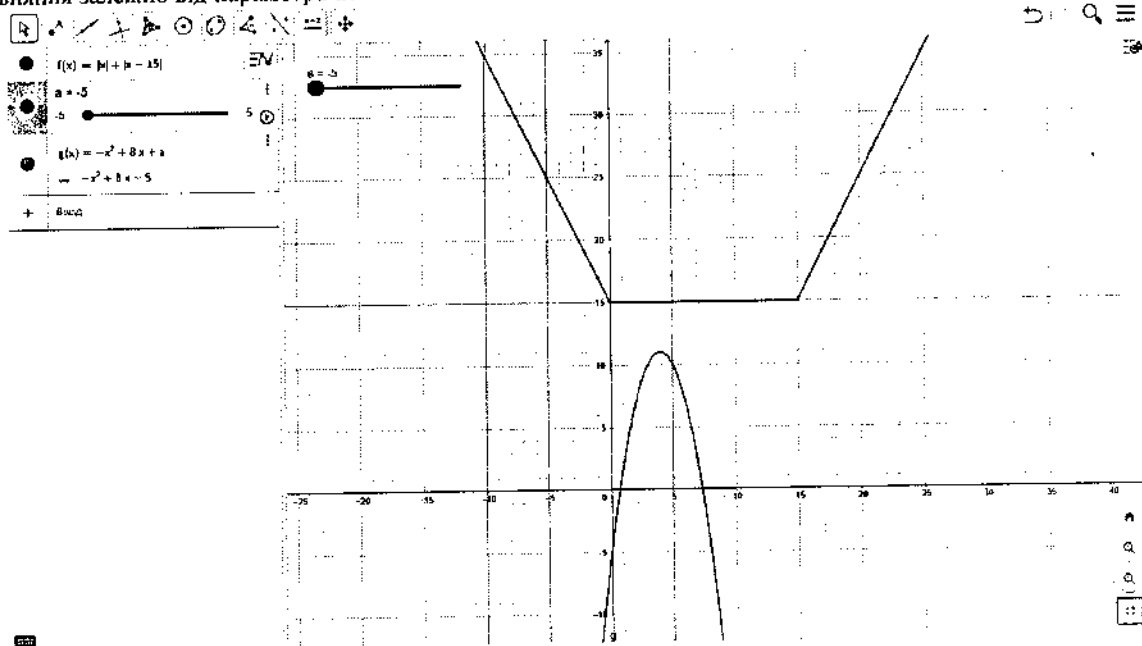


Рис.5. Графічний розв'язок

Наприклад, рівняння $f(x) = g(x)$ має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$.

Рівняння з параметром вигляду $f(x) = a$ має стільки розв'язків, скільки разів горизонтальна пряма $y = a$ (при зміні a пряма зміщується вздовж осі Oy) перетинає графік функції $y = f(x)$.

Під час дослідження рівнянь виду $f(x) = g(x, a)$ часто користуються методом перерізів, який полягає в наступному: функція $y_1 = f(x)$ визначає деяку фіксовану криву, співвідношення $y_2 = g(x, a)$ – цілу сім'ю кривих, в якій кожному допустимому значенню параметра a відповідає одна крива.

Залежно від a криві сімейства $y_2 = g(x, a)$ можуть займати різні положення відносно кривої $y_1 = f(x)$. Вивчаючи різні положення кривих $y_2 = g(x, a)$ відносно графіка функції $y_1 = f(x)$, можемо визначити значення параметра a , яким вони відповідають, і таким чином дослідити питання розв'язання відповідного рівняння з параметром. У простіших випадках функція y_2 задається формулами:

1) $y_2 = a$ – сім'я горизонтальних прямих.

2) $y_2 = a \cdot (x - x_0) + y_0$ – сім'я прямих, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ (крім вертикальної прямої $x = x_0$).

3) $y_2 = |x - a|$ – сім'я кутів, які отримують у результаті зсуву графіка $y = |x|$ уздовж осі Ox .

4) $y_2 = ax^2$, де $a \neq 0$ – сім'я парабол, вершини яких знаходяться у початку координат.

Приклад 5. При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $|x| + |x - 15| = -x^2 + 8x + a$ має два розв'язки?

Розв'язання. На одному рисунку побудуємо графіки лівої та правої частин рівняння. Змінюючи значення повзунка a , який власне і відповідає за зміну параметра a , отримаємо можливі варіанти перетину:

При $a < -1$. Розв'язку немає (Рис.5)

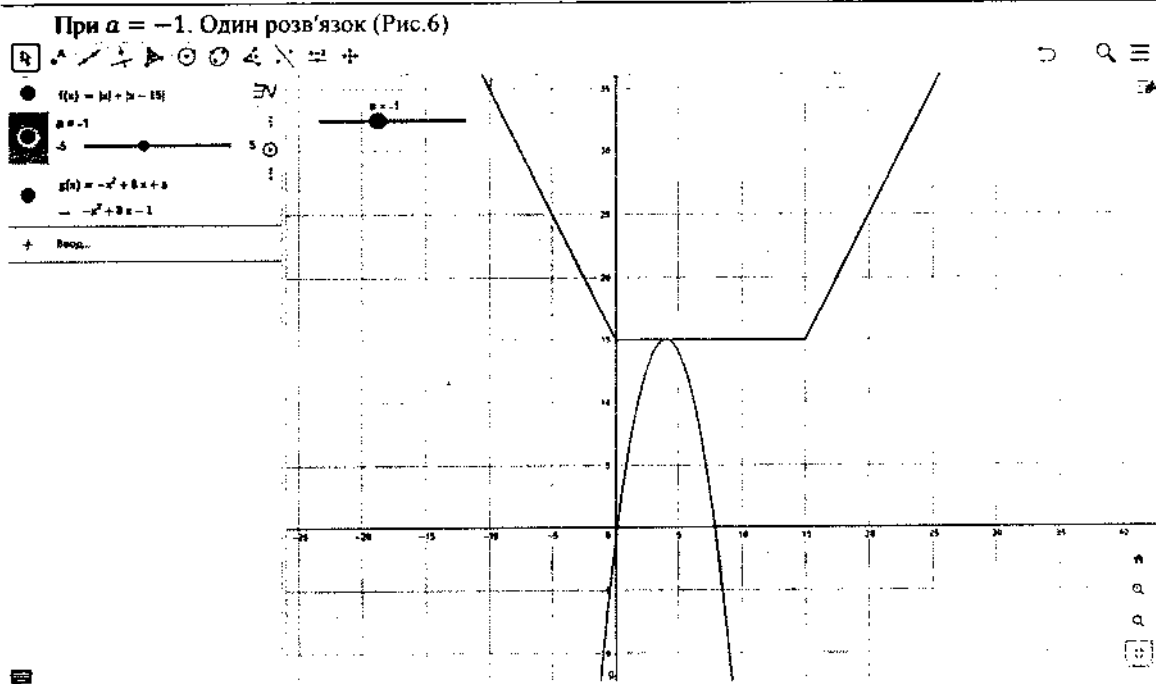


Рис.6. Графічний розв'язок

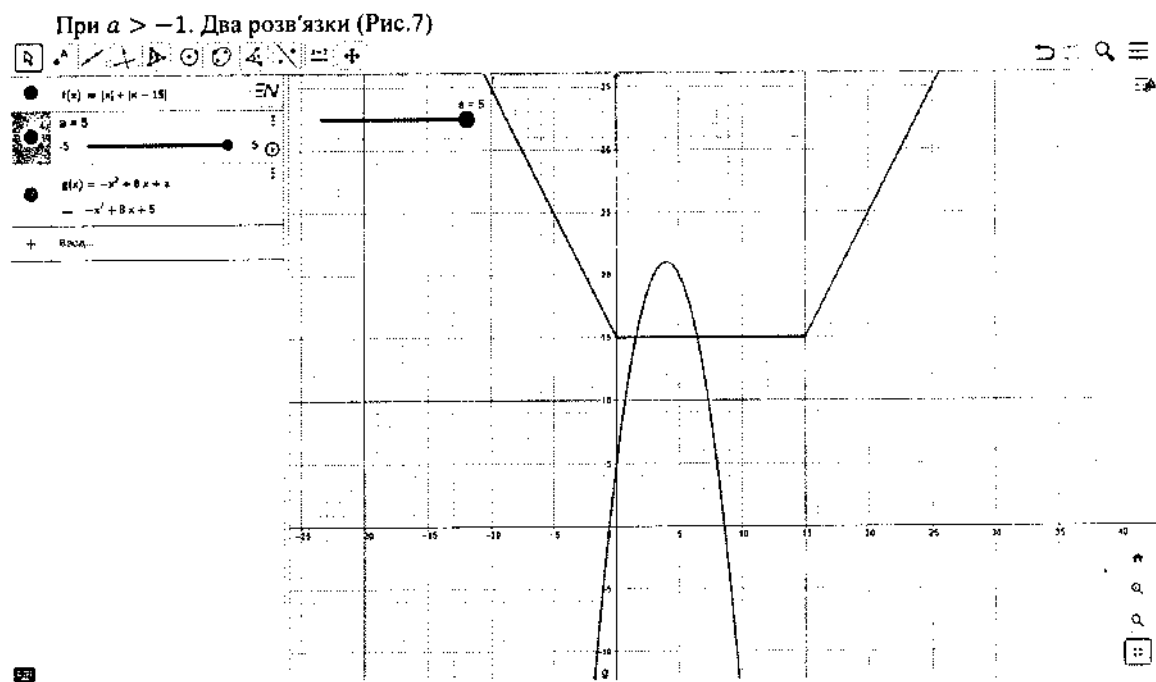


Рис.7. Графічний розв'язок

Отже, найменше ціле значення параметра a , при якому рівняння має два розв'язки, є $a = 0$.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos x = ax^2 + a^3 + \frac{7}{2}a^2 - \frac{5}{2}a - 1$ має тільки один розв'язок?

Розв'язання. Очевидно, що необхідною умовою існування тільки одного розв'язку є виконання умови $x = 0$.

Підставивши у рівняння $x = 0$, отримаємо рівняння $2a^3 + 7a^2 - 5a - 4 = 0$, коренями якого є: $a = 1, a = -\frac{1}{2}, a = -4$.

Розглянемо випадки:

1) $a = 1$. Тоді $\cos x = x^2 + 1$, графіки функцій перетинаються в точці $(0; 1)$ (Рис.7)

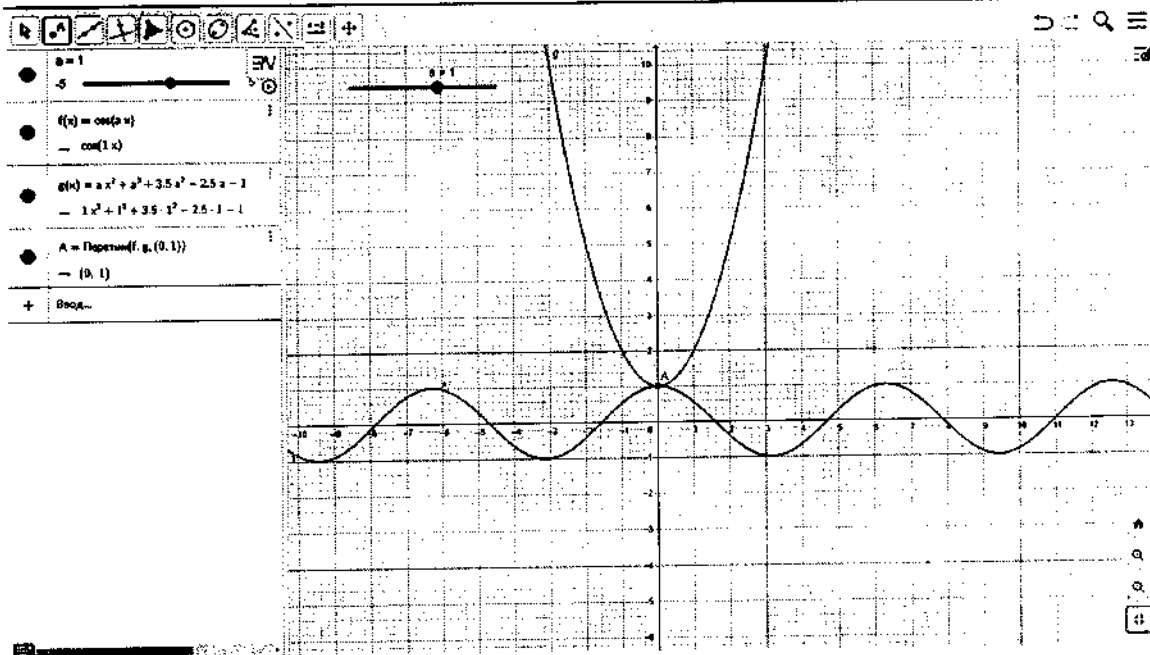


Рис.7. Графічний розв'язок

2) $a = -\frac{1}{2}$. Тоді $\cos \frac{x}{2} = -\frac{x^2}{2} + 1$, графіки функцій перетинаються в точці $(0, 1)$ (Рис.8)

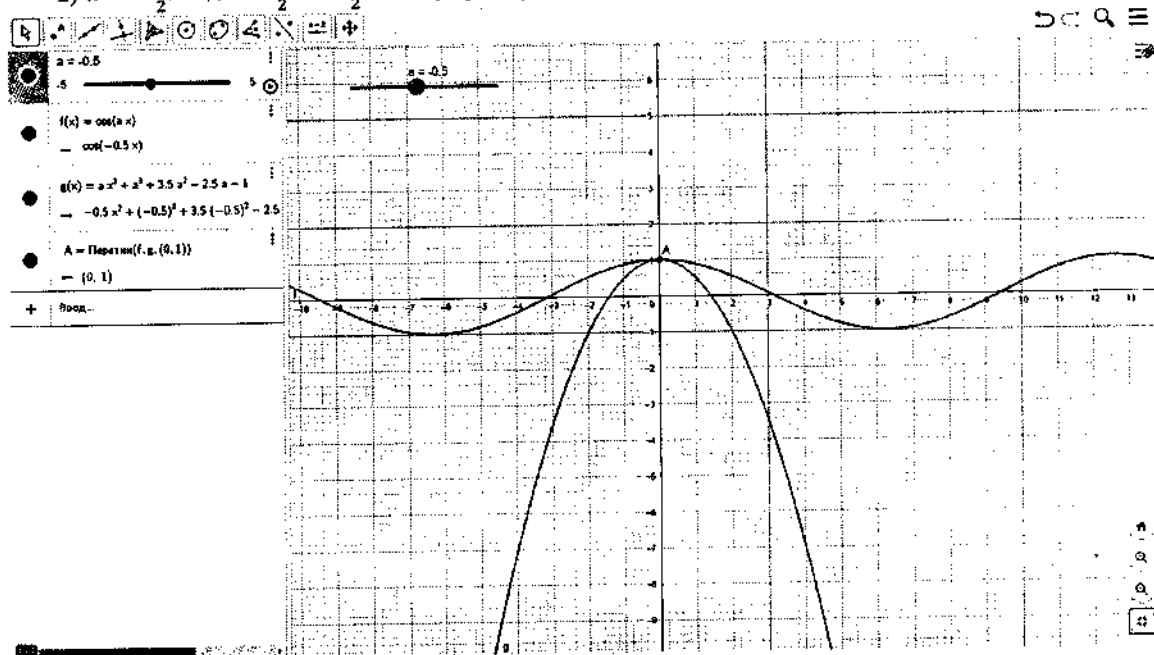


Рис.8. Графічний розв'язок

3) $a = -4$, початкове рівняння набуває вигляду $\cos 4x = -4x^2 + 1$. Із рисунка 9 видно, що графіки перетинаються тричі:

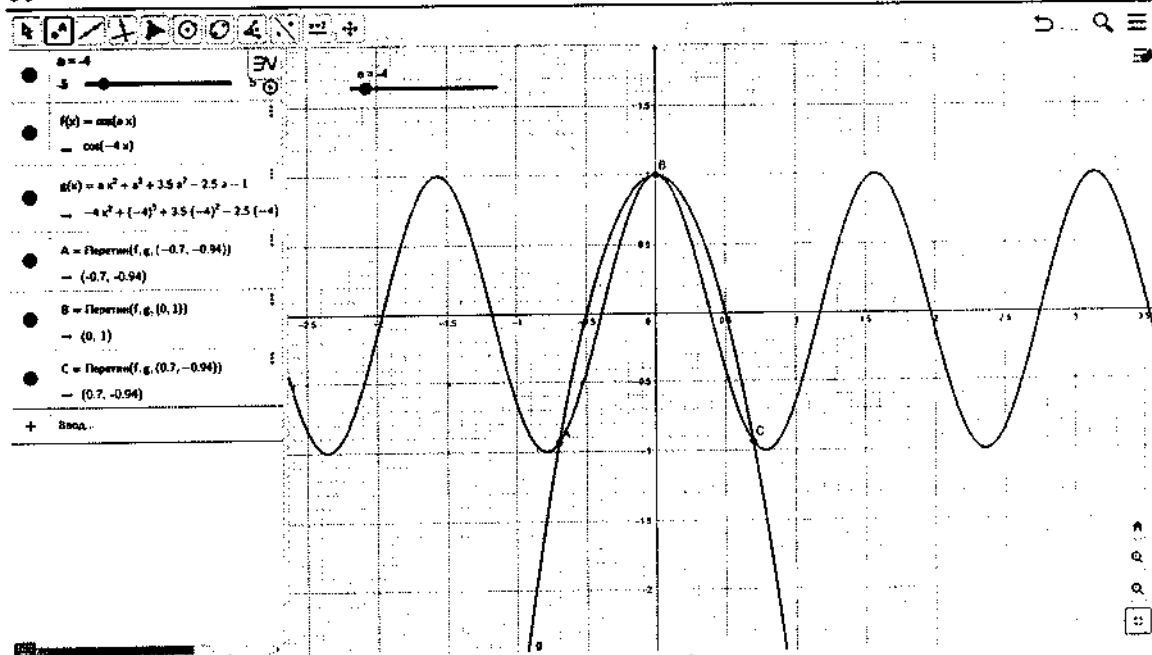


Рис.9. Графічний розв'язок

З метою удосконалення набутих вмінь та навичок застосування графічного методу розв'язування рівнянь та їх систем можна проводити факультативні заняття з даної теми.

Проведене нами дослідження дозволяє зробити такі висновки: специфіка нестандартних методів розв'язування рівнянь та нерівностей сприяють розвитку самостійного математичного мислення.

Основна мета навчання юних математиків - ознайомлення на доступному для учнів рівні з деякими питаннями сучасної математики та задачами, які виходять за рамки шкільної програми. Залишаючись в межах елементарної математики, вони сприяють поширенню знань по розв'язуванню рівнянь та нерівностей з точки зору теоретико-множинної інтерпретації, допомагають орієнтуватися в нестандартних математичних ситуаціях.

Список літератури

1. Богданович М.В., Козак М.В., Король Я.А. Методика викладання математики: Навч. пос. – 3-є вид., перероб. і доп. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 336 с.
2. Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С. 35-40.
3. Скасків Л. В. Застосування графічного методу до розв'язування квадратних рівнянь //Л.В.Скасків //Priority directions of science and technology development: Abstracts of VI International Scientific and Practical Conference, 20-22 February, 2021. – Kyiv, Ukraine, 2021. – P. 551–554.