МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

Методика використання проблемного методу навчання при вивченні степеневої, показникової та логарифмічної функцій

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, ІІ курсу, СОМ-23-1 групи,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Тростогона Вадима Олександровича

Науковий керівник Оксана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Керівник освітньо-професійної програми Микола СЕМКО, д.ф-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
кібернетики та прикладної математики
протокол від «29» 04 2024 № 1

Завідувач кафедри Оксана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Ірпінь – 2024

Реєстрація № 3 19.12.2024 Сласків Л.В.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 23.12.2024
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 90б 29.01.2025
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії: Трацовецький М.В.
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії:

(підпис) Сласків Л.В.
(ініціали, прізвище)

(підпис) Семко М.М.
(ініціали, прізвище)

(підпис) Орлова О.А.
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	26		29.01.2025
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	10		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	46		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	10		29.01.2025
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	4		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	25		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	44		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	90		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
90	A	5 (відмінно)	29.01.2025	

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

Анотація. Тростогон Вадим. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ПРОБЛЕМНОГО МЕТОДУ НАВЧАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ СТЕПЕНЕВОЇ, ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ

У даній роботі проаналізовано дидактичну, психологічну та методичну літературу по темі дослідження. Розроблено методику проблемного вивчення теоретичного матеріалу та методику розв'язування задач проблемним методом при вивченні степеневої, показникової та логарифмічної функцій. Встановлено, що проблемне навчання має значний виховний потенціал, оскільки воно дозволяє учням самостійно досліджувати математичні закономірності та переконуватися в правильності тверджень на основі власного досвіду. Описано застосування проблемного навчання, яке сприяє розвитку самостійності учнів і вихованню навичок самостійного здобуття знань, що важливо для їх подальшого розвитку.

Ключові слова: методика навчання математики, проблемний метод, степенева, показникова, логарифмічна функція.

Annotation. Trostohon Vadym. METHODS OF USING THE PROBLEM-BASED LEARNING METHOD IN STUDYING POWER, EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS

Didactic, psychological and methodical literature on the topic of the study was analyzed in this work. The method of problem-based study of theoretical material and the method of solving problems using the problem-based method when studying power, exponential, and logarithmic functions have been developed. It has been established that problem-based learning has a significant educational potential, as it allows students to independently investigate mathematical patterns and make sure of the correctness of statements based on their own experience. The application of problem-based learning is described, which contributes to the development of students' independence and the education of independent knowledge acquisition skills, which is important for their further development.

Keywords: mathematics teaching method, problem method, exponent, exponential, logarithmic function

ЗМІСТ

Вступ	6
Розділ 1. Дидактична суть проблемного методу навчання	10
1.1. Проблемний метод навчання і його особливості	10
1.2. Аналіз підручників щодо забезпечення проблемного викладу матеріалу	18
Розділ 2. Методика проблемного методу навчання при вивчені степеневої, показникової, логарифмічної функції у загальноосвітніх навчальних закладах	24
2.1. Методика використання проблемного методу при вивченні тем «Корінь n-го степеня» та «Степенева функція»	24
2.2. Методика використання проблемного методу при вивченні тем «Показникова функція» та «Логарифмічна функція»	40
Висновки	65
Список використаних джерел	67

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасна школа повинна бути спрямована на всебічний розвиток учнів, що включає як підвищення науково-теоретичного рівня викладання, так і розвиток практичних навичок, розумових здібностей, інтересу до предметів та самостійного здобування знань.

Для успішного досягнення цих цілей необхідне постійне удосконалення організаційних форм і методів навчання. Це може включати в себе використання інтерактивних методів, проектну роботу, практичні завдання, колективні проекти, залучення до практичної діяльності та залежне від віку учнів впровадження самостійної роботи та дослідницької діяльності.

Важливо також створити стимулююче навчальне середовище, яке сприяє активному і пізнавальному інтересу учнів до предметів, розвитку творчого мислення та навичок критичного мислення. Також важливо розвивати учнівську самостійність, пошукові навички та навички самоорганізації, що дозволить їм ефективно здобувати знання і розвиватися поза межами класної кімнати.

У процесі навчання важливо забезпечити активну взаємодію між вчителем і учнями. Занадто часто спостерігається ситуація, коли на уроці активність проявляє лише вчитель, а учні залишаються пасивними спостерігачами. Велика частина часу витрачається на пояснення, демонстрацію і виклад вчителем, при цьому більшість учнів лише слухають, не виявляючи активності. На таких уроках відсутні елементи пошуку та дослідження.

Очевидно, що такий підхід не дозволяє вчителю вирішити складні завдання, що стоять перед сучасною школою. Тому необхідно застосовувати форми і методи навчання, які допомагатимуть учням отримати глибокі та міцні знання. Для цього важливо активно залучати учнів до процесу навчання, створювати ситуації, які стимулюють їх думку і пошук. Застосування інтерактивних методів, групової роботи, проектів та практичних завдань може допомогти залучити учнів до активної діяльності, сприяти самостійному мисленню, розвитку критичного мислення та творчих навичок.

Окрім того, важливо створити сприятливу навчальну атмосферу, де учні відчувають зацікавленість і мотивацію до вивчення предметів. Вчителю слід надавати можливості для самостійного виявлення учнями своїх інтересів і обдарувань, сприяти розвитку їхнього потенціалу.

Активізація навчального процесу завжди була, є і буде основною проблемою педагогіки. Протягом різних періодів часу, залежно від мети і завдань навчання, активізацію розуміли і вирішували по-різному. Починаючи з евристичних бесід та активного вивчення нового матеріалу, до використання наочності, впровадження практичних робіт та збільшення самостійних тренувальних завдань.

Зміст активізації навчального процесу постійно змінюється, відповідаючи сучасним педагогічним вимогам. Сьогодні активізація навчання означає створення такого середовища, де учні активно залучаються до процесу вивчення, розуміють його значущість та застосовують отримані знання у практичних ситуаціях.

Активізація навчального процесу може включати в себе використання інтерактивних методів, групову роботу, проекти, дослідницьку діяльність, спільне вирішення проблемних завдань та інші форми активного залучення учнів. Важливо також стимулювати самостійність, критичне мислення, творчість та самодисципліну учнів.

Головна мета активізації навчального процесу полягає не лише у передачі знань, але й у розвитку учнів навичок самостійної праці, критичного мислення та творчого підходу до вирішення завдань. Це сприятиме активній участі учнів у власному навчанні та особистому розвитку, а також готуватиме їх до успішного функціонування в сучасному суспільстві.

Необхідно зосередитися на розвитку навчального процесу, забезпечуючи активну участь учнів. Важливо створити такі умови для навчання, за яких знання, вміння і навички стануть особистими досягненнями кожного учня.

Основою активної діяльності учнів є розуміння. Учні повинні мати можливість самостійно вибирати об'єкти пізнання, ставити завдання та цілі, вибирати методи дослідження і здійснювати самостійне дослідження. Активність проявляється у здатності зв'язувати нові знання з вже відомими, визначати нові ознаки об'єкта, який вивчається. Досягнення такого рівня мисленнєвої активності в школі можливе завдяки організації проблемного навчання.

Роль вчителя в навчанні полягає не лише у передачі знань з конкретного предмета, але й у навчанні учнів самостійно навчатися і оволодівати методами, які використовуються у математиці. [11]

Проблемне навчання має значний виховний потенціал, оскільки воно дозволяє учням самостійно досліджувати математичні закономірності та переконуватися в правильності тверджень на основі власного досвіду.

Крім того, застосування проблемного навчання сприяє розвитку самостійності учнів і вихованню навичок самостійного здобуття знань, що важливо для їх подальшого розвитку.

Існує підтримка цієї думки з боку дослідників в галузі психології, таких як С.Л. Рубінштейн, Дьюї Джон, Лаєм, Едуард Клапаред, Керштейнер, В.В. Заботін, Є.М. Ільїн, О.М. Матюшкін, А.М. Лєонтєв, В.С. Мерлін, Д.Н. Узнадзе, Н.Л. Еман, а також педагогів Ю.К. Бабанського, Т.В. Кудрявцева, В. Оконя, Т. Новацького, Б. Навроченського, А.В. Брушлінського, І.Я. Лернара, Д.В. Вількєєва, І.А. Ільніцької, Л.П. Доблаєва, Ю.Н. Кулюткіна. Проте, жоден з них не розробив чітку методику використання проблемного методу у шкільному курсі алгебри і початків аналізу. [2, 3, 9,10]

Саме тому і було вибрано темою нашого дослідження – «Методика використання проблемного методу навчання при вивченні степеневої, показникової та логарифмічної функцій».

Об’єктом дослідження є процес навчання математики в середній загальноосвітній школі.

Предметом дослідження є проблемний метод навчання при вивченні степеневої, показникової та логарифмічної функцій. **Мета** дослідження полягає в тому, щоб розробити систему дидактичних матеріалів для проблемного викладу матеріалу при вивченні степеневої, показникової та логарифмічної функції.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

1. Оцінити, наскільки методична література, підручники, посібники та дидактичні матеріали відповідають вимогам проблемного підходу до викладання матеріалу.

2. Розробити методику застосування дидактичних матеріалів для навчання степеневим, показниковим та логарифмічним функціям з урахуванням проблемного підходу до викладання.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при викладанні степеневої, показникової та логарифмічної функції, в підборі та складані відповідних завдань до кожного уроку з даних тем, використовуючи проблемний метод.

РОЗДІЛ 1. ДИДАКТИЧНА СУТЬ ПРОБЛЕМНОГО МЕТОДУ НАВЧАННЯ

1.1. Проблемне навчання і його характеристика

Ідея активізації навчання має власну історію. Ще в давнину було відомо, що розумова активність сприяє і кращому запам'ятовуванню, і глибшому проникненню в суть предметів, процесів та явищ. В основі прагнення спонукання інтелектуальної активності учнів лежать певні філософські погляди. Постановка проблемних питань співрозмовнику та її утруднення у пошуках відповіді них були притаманні дискусіям Сократа, цей же прийом був відомий і піфагорійської школі.

Одним із перших прихильників активного навчання учнів був відомий чеський педагог Ян Амос Коменський (1592-1670). Його праця «Велика дидактика» містить вказівки щодо необхідності спонукати в суб'єкта навчання спрагу знань і старанність до навчання, вона спрямована проти словесно догматичного навчання, яке вчить учнів мислити чужим розумом.

Удосконалення теорії словесно-наочного навчання пов'язане з діяльністю К.Д. Ушинського (1824-1870), який створив дидактичну систему, спрямовану на розвиток розумових здатностей учнів. Будучи прихильником активного навчання, він висунув ідею пізнавальної самостійності.

У руслі ідей активного навчання на чільне місце було поставлено завдання розвитку утилітарно-емпіричного мислення. Я.А. Коменський, а за ним і І.Г. Песталоцці (Іоганн Генріх Песталоцці (1746-1827) – швейцарський педагог, один відомих педагогів-гуманістів кінця XVIII - початку XIX ст, який вніс вагомий вклад у розвиток педагогічної теорії і практики) прямо пов'язували активність вчення із запровадженням навчання принципу наочності. У своєму класичному формулюванні (що виходить від Я. А. Коменського та його послідовників) принцип наочності був спрямований на культивування типу мислення, яке має класифікуючий, катологізуючий характер і забезпечує орієнтацію людини в системі вже накопичених відомостей про зовнішні особливості предметів. Така орієнтація абсолютно необхідна при виконанні стереотипних трудових операцій, але вона недостатня як для оволодіння справжнім духом сучасної науки, так і

початком творчого, змістовно-активного ставлення до дійсності. У такому вигляді принцип наочності не лише не забезпечує активного навчання та формування у ньому початків творчого мислення, а й перешкоджає цьому. [5, 6]

Наприкінці XIX - на початку XX ст. у європейській педагогіці розроблявся дослідницький метод навчання. Цей метод знайшов подальше теоретико-експериментальне обґрунтування й у вітчизняній педагогіці 20-х років. XX ст. На його основі будували низку нових підходів до навчання: «лабораторно-евристичний метод» (Ф.А. Вінтергальтер), «дослідно- дослідницький метод» (А.Я. Герд), «евристичний метод» (Армстронг), «природничо-науковий метод» (А.П. Пінкевич) «метод проєктів» Кілпатріка, дальтон-план тощо.

Дослідницький метод застосовували (переважно у викладанні предметів природничого циклу) багато відомих радянських педагогів і методистів В.В. Половцев, Б.Б. Райков, С.Т. Шацький, К.П. Ягодовський. Сутність його полягає у побудові таких технологій навчання за яких учень ставав у позицію відкривача нових знань. Однак основний наголос робився на розвиток навичок емпіричного мислення в ході практичних занять. Дослідницький метод майже не стосувався викладання теорії предмета, що вивчався. Треба сказати, що тепер деякі педагоги вважають недоцільним проблемне введення базових основних понять допускаючи водночас проблемне засвоєння часткових знань умінь і навичок.

Третя особливість ідей активізації навчання полягала в тому, що їх прихильники приділяли основну увагу зовнішній стимуляції пізнавальної активності, що досягалося шляхом постановки нових питань показу несподіваних емпіричних фактів тощо. Найважливішим при цьому є поставити учня у ситуацію затруднення, спантеличити його, викликати пізнавальний інтерес. Як зазначав А. Дістервег (Фрідріх Адольф Вільгельм Дістервег (1790-1866) - видомий німецький педагог-демократ, послідовник Песталоцці), все мистецтво виховання та освіти є не більше і не менш як мистецтво збудження. Але інтерес викликано, а далі що? А далі учень впадав у стихію повністю самостійного, не контрольованого педагогом пошуку (адже будь-який контроль сприймався як повернення позиції авторитарно-догматичного навчання). [16, 17]

Зауважимо, що у працях представників «активізаторської» течії у педагогіці (окрім певних методичних робіт) можна знайти описи конкретних способів організації діяльності учнів щодо вирішення проблемних ситуацій. Це випливало з основної установки прихильників активізації – створити умови для розкриття природних обдарувань за мінімального втручання педагога в процес їхнього спонтанного саморозгортання. У межах ідей активізації був відсутній цілісний теоретико-методичний підхід щодо засвоєння знань, характерний сучасній концепції проблемного навчання.

Відомі педагоги минулого залишили нам принципів розробки проблематизованої системи змісту навчання, засобів управління творчою діяльністю учнів, опис якісних особливостей навчальних проблем. Проте в їхній опублікованій спадщині можна виявити низку блискучих висловлювань про необхідність розвитку творчого мислення. Наприклад, як зазначав А. Дистервег, розвиток та освіту жодній людині не можуть бути дані або повідомлені. Кожен, хто бажає до них долучитися, повинен досягти цього власною діяльністю. Те, чого людина не здобула шляхом своєї самостійності, – не її; поганий вчитель подає істину, добрий – вчить її шукати; а П.Ф. Каптерев вказував, що вивчати науку – означає не лише набувати відомості з цієї науки, але ... піддаватися своєрідному розумовому збудженню, яке повідомляє ця наука. Кожне таке висловлювання може бути епіграфом до будь-якої фундаментальної праці з проблемного навчання.

Далі елементи проблемного навчання наявні у деяких дидактичних системах минулого. Але, як зазначав з цього приводу Т.В. Кудрявцев, адже ми говоримо не про елементи, а про систему, струнку теорію, про структуру взаємопов’язанихпонять. Це варто враховувати тим, хто вважає, що проблемне навчання лише добре забуте старе, або змішує його з дослідницьким методом. Водночас прихильники ідей активізації зробили значний крок уперед, вони усвідомили необхідність руйнування основ рецептивно-догматичної системи навчання та побудови теорії і практики навчання принципово нового типу, у низці випадків виокремили його шляхи. Проте ідеї активізації, як слушно вказує М.І.

Махмутов, не мали розвиненої філософсько-психологічної бази, чим стримувався їх продуктивний розвиток. Зазначимо, що у педагогічній свідомості не отримало належного резонансу солідне філософсько-діалектичне обґрунтування активного навчання, представлене у працях Г. Гегеля та Ф. Фребеля. Непростою виявилася історія практичного застосування ідей активізації. Вони не змогли прижитися на ґрунті рутинної загальної освіти, яка зберігала свою загальну догматичну орієнтацію і в епоху А. Дістервега, і в епоху Дж. Дьюї. [19, 20]

В основу проблемного навчання покладено ідеї американського психолога, філософа та педагога Джона Дьюї (1859-1952), який у 1894 році заснував у Чикаго дослідну школу, в якій основу навчання становив не навчальний план, а ігри та трудова діяльність. Він наголосив на розвитку власної активності учнів і незабаром переконався, що навчання, побудоване з урахуванням інтересів учнів та пов’язане з їхніми життєвими потребами, дає набагато кращі результати, ніж «вербальне» навчання, засноване на запам’ятовуванні знань. Основним внеском Дьюї у теорію навчання є розроблена ним концепція «повного акту мислення». Згідно з філософськими і психологічними поглядами автора, мислити людина починає тоді, коли стикається з труднощами, подолання яких має для неї велике значення. У кожному «повному акті мислення» виокремлюються такі ступені:

- відчуття проблеми;
- її виявлення та визначення;
- висування задуму його вирішення (формулювання гіпотези);
- формулювання висновків, що випливають з передбачуваного рішення (логічна перевірка гіпотези);
- наступні спостереження та експерименти, що дозволяють прийняти чи відкинути гіпотезу.

Методи, прийоми, нові принципи навчання, що застосовувалися в цій школі, не були теоретично обґрунтовані та сформульовані у вигляді концепції, але набули поширення у 20-30 роках XX ст.

Проте, попри революційний у багатьох відношеннях характер дидактики Дьюї, у ній є і недоліки. Практика показує, що навчання не може бути «суцільно проблемним» – за Дьюї. Обмеженість дидактики Дьюї полягає в тому, що учні не беруть участь у процесі закріплення знань, розвитку певних умінь. А фрагментарні курси, вибіркові «проєкти», що прийшли на зміну стабільним, загальним для всіх учнів програмам, неспроможні пояснити ні наступності, ні систематичності у навчанні.

Сьогодні, зберігаючи все найкраще з прогресивної системи Д. Дьюї, розроблено сучасну технологію навчання, яка дотримується концепції, висунутої американським ученим.

Умовами успішності навчання є: проблематизація навчального матеріалу (знання дають здивування та цікавість); активність учня (знання мають бути асимільовані з «апетитом»); зв’язок навчання з життям учня, грою, працею.

Проблемне навчання – це тип навчання, зміст якого представлено системою проблемних завдань різного рівня складності; в процесі вирішення яких учнями разом з учителем та під його загальним керівництвом відбувається оволодіння новими знаннями та способами дії, а через це й формування творчих здібностей: продуктивного мислення, уяви, пізнавальної мотивації, інтелектуальних емоцій.

Традиційне та проблемне навчання відрізняються одне від одного за схемами їх побудови. Схема традиційного, інформативного навчання: повідомлення «готових» знань учителем та їх засвоєння учнями шляхом копіювання способів дій, тренування цих способів у стереотипних ситуаціях та «тренування» у виконанні навчальних завдань з використанням засвоєних знань, де вони остаточно закріплюються. [23]

Схема проблемного навчання виглядає принципово по-іншому: постановка вчителем навчально-проблемного завдання, що створює в учнів проблемну ситуацію; усвідомлення, прийняття та вирішення виниклої проблеми, у процесі якої вони опановують узагальненими способами набуття нових знань; застосування даних способів щодо розв’язання конкретних задач.

Отже, схема проблемного навчання є послідовністю процедур, що включають: постановку викладачем навчально-проблемного завдання, створення для учнів проблемної ситуації; усвідомлення, прийняття та вирішення проблеми, в процесі якої вони опановують узагальненими способами набуття нових знань; застосування даних способів щодо розв'язання конкретних задач.

Сутність проблемного навчання. Проблемне навчання – навчання, у якому вчитель, спираючись знання закономірностей розвитку мислення, спеціальними педагогічними засобами веде роботу з формуванню розумових здібностей і пізнавальних потреб учнів у процесі навчання.

Функції проблемного навчання:

• засвоєння учнями системи знань та способів розумової практичної діяльності;

• розвиток пізнавальної діяльності та творчих здібностей учнів;

• виховання навичок творчого засвоєння знань;

• виховання навичок творчого застосування знань та вміння вирішувати навчальні проблеми;

• формування та накопичення досвіду творчої діяльності.

Діяльність вчителя при проблемному навчанні полягає у поясненні змісту найбільш складних понять, систематичним створенням проблемних ситуацій, повідомлення учням фактів та організація їхньої навчально- пізнавальної діяльності таким чином, щоб на основі аналізу фактів учні самостійно зробили висновки та узагальнення.

В результаті в учнів виробляються:

• навички розумових операцій та дій;

• навички перенесення знань тощо.

Основні психологічні умови для успішного застосування проблемного навчання

• Проблемні ситуації мають відповідати цілям формування системи знань.

• Бути доступними для учнів.

- Повинні викликати власну пізнавальну діяльність та активність.
- Завдання повинні бути такими, щоб учень не міг виконати їх, спираючись на вже наявні знання, але достатніми для самостійного аналізу проблеми та знаходження невідомого.

Переваги проблемного навчання:

- Висока самостійність учнів.
- Формування пізнавального інтересу чи особистісної мотивації учня.
- Поява діалектичного мислення учнів.

Недоліки проблемного навчання:

- Незначне застосування для формування практичних умінь та навичок;
- Витрачається багато часу для засвоєння певного обсягу знань.

Отже, виходячи з вище розглянутих статей, можна говорити про те, що існуючі методичні системи не задовольняють сучасні концепції навчання. Тому з'являється потреба у створені нових методик математики, які б реалізовували проблемний метод навчання. А оскільки в курсі математики провідна роль належить задачам, існує необхідність створення не тільки методики викладання теоретичного матеріалу, а й методики розробки і використання задач до деяких тем курсу алгебри і початків аналізу. [27, 28]

Проведемо порівняльну характеристику традиційного і проблемного навчання (табл. 1).

Таблиця 1.

Порівняльна характеристика традиційного і проблемного навчання

Традиційне навчання	**Проблемне навчання**
Навчальний матеріал подається у готовому вигляді. Педагог основну увагу звертає на програму навчання, дотримання її вимог, оцінювання учнів.	Новий навчальний матеріал учні отримують під час вирішення теоретичних і практичних проблем, в процесі пошукової, дослідницької, самостійної діяльності.
Під час учіння виникають певні прогалини, перепони й труднощі, викликані тимчасовим вилученням учня з процесу навчання.	Під час вирішення проблемної ситуації учні навчаються самостійно долати труднощі. Підвищена пізнавальна активність учнів сприяє розвитку позитивних мотивів

Контроль навчальних досягнень тільки частково пов’язаний з процесом навчання: він не є складовою цього процесу.	навчальної діяльності, зменшує необхідність формальної перевірки результатів.
Темп навчання залежить від навчальної програми.	Темп навчання залежить від індивідуально-психічних якостей учнів. Вчитель створює різні дидактичні ситуації, що відповідають особливостям тих, хто вчиться, їх рівню знань та інтелектуальним можливостям.
Відсутність можливості досягнення більшістю учнів високих навчальних результатів; найбільше утруднення викликає використання й застосування отриманих знань й інформації на практиці.	Результати навчання є достатньо високими та стійкими. Учні з легкістю використовують отримані знання на практиці та водночас розвивають свої вміння й здібності.

Отже, головна особливість проблемного навчання – пошукова, дослідна діяльність учнів. При цьому знання не даються в готовому вигляді, а ставиться проблема для самостійного вирішення. Найбільш суттєвою рисою проблемного навчання є не постановка запитань, як думає більшість вчителів, а створення навчальних проблемних ситуацій.

1.2. Аналіз підручників щодо забезпечення проблемного вивчення матеріалу.

У програмі тільки перелічуються розділи і теми, які потрібно опрацьовувати з учнями. Докладний зміст шкільного курсу математики дається в підручниках або навчальних посібниках. [13-15]

Підручник – навчальне видання в якому міститься систематичний виклад певної навчальної дисципліни або її розділу чи частини.воно має відповідати навчальній програмі і бути офіційно затвердженим як даний вид видання.

Якщо підручником користуються багато років їх називають стабільними.

На думку К.Леха, підручник виконує наступні функції:

1. Матеріал викладення дає конкретний і точний, відповідним чином упорядкований, сконцентрований за допомогою відповідних ілюстрацій; наглядних схем або описів і пояснень; диференціює при цьому тексти для виділення в них різних складових, особливо тих, до яких учні звертатимуться в подальшій роботі.

2. Полегшує учням пізнавальну роботу на уроках шляхом звільнення їх від необхідності здійснення механічних записів, скорочень, малюнків, через надання їм можливості повернутися до матеріалу, що був опрацьований, нагадування відомих проблем в скороченій формі.

3. Знайомить з методом, з прикладами моделей робіт, які учні будуть пізніше виконувати самостійно, як індивідуально, так і у складі групи, як в школі, так і вдома.

4. Дозволяє вчителю і учневі за допомогою відповідних тестів швидко перевірити, чи всі правильно зрозуміли зміст уроку.

5. Удосконалює постановку і перевірку домашнього завдання, яке може мати на меті: а) завершення або доповнення роботи на уроці, наприклад використання одержаної інформації на практиці; б) підготовку до наступного уроку, наприклад, шляхом прчитання текстів, зміст яких буде предметом вправ на наступному уроці.

6. Учить отриманню нових знань за допомогою книги, самостійному читанню текстів наукового характеру, розумінню їх змісту, виділенню в них основних моментів.

7. Направляє самостійну роботу при здійсненню синтезу матеріалу в різних структурах й на різних їх рівнях узагальнення, що включає загальні дефініції й зразки, що відносяться до певних проблем, особливо до технічних. [1, 4, 8, 12]

Підручники для середніх загальноосвітніх шкіл.

За останні роки видано альтернативні підручники з математики для загальноосвітніх шкіл. В них реалізовано чимало авторських задумів і наукових підходів. Вдало, як правило, розв’язанні питання єдності змісту й апарату засвоєння, структури і логічної організації навчального матеріалу, добору ілюстративних засобів і повноти реалізації їх функцій. Однак, залишається питання, чи розв'язано питання диференціації способів розгортання матеріалу, яке є досить важливим на даному етапі розвитку і розбудови освіти на нових прогресивних концепціях? Відповідати на це питання можна лише після аналізу викладу матеріалу в підручниках і перевірки забезпечення в них проблемного вивчення матеріалу.

Розглянемо порівняно новий підручник для учнів 10-11 класів під редакцією М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук «Алгебра і початки аналізу 10 кл.» [25]. В цьому підручнику розглядаються п’ять розділів: тригонометричні функції, тригонометричні рівняння, степенева функція, показникова функція, логарифмічна функція.

Автори пропонованого підручника ставили за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу.

Крім теоретичного матеріалу, передбаченого чинною програмою, до підручника включено деякі питання теорії, що виходять за межі програми і розраховані на учнів, які бажають вивчати предмет на поглибленому рівні.

Кожен розділ складається з певної кількості параграфів, після кожного параграфа запропоновано задачний матеріал. Серед цих задач є й зразки розв'язання. В кінці підручника запропоновано задачі для повторення, запитання

для повторення. Після кожного пункту пропонується приблизно 25-40 задач. Зауважимо, що це достатня кількість задач для певного об'єму теоретичного матеріалу.

З метою закріплення, контролю й самоконтролю щодо вивчення навчального матеріалу після кожного параграфа підручника пропонується система запитань і завдань. На кожне із запитань можна знайти пряму відповідь у тексті відповідного параграфа.

В §18 "Узагальнення поняття степеня. Степенева функція" розглядається степінь з натуральним показником, степінь з раціональним показником. Дається означення степеня та степеневої функції , подаються графіки та властивості степеневої функції . На закріплення запропоновано запитання і завдання для повторення, в кількості 30 запитань.

До цього параграфа запропоновано 28 задач. Вони досить різноманітного характеру і спрямовані на розвиток уяви учнів.

В §19 "Поняття показникової функції" дається означення і показуються графіки показникової функції, даються загальні властивості показникової функції, подаються властивості графіка показникової функції, приклади застосування показникових функцій, як використовуються показникові функції під час вивчення явищ навколишнього середовища, наводяться приклади основних показникових тотожностей. На закріплення запропоновано запитання і завдання для повторення, в кількості 28 запитань.

В §21 "Логарифм числа" учням пропонується для вивчення поняття логарифма, вивчається основна логарифмічна тотожність, наводяться приклади розв'язання вправ, подаються основні властивості логарифмів деякі важливі тотожності, що містять логарифми, вивчається, що такс потенціювання, вивчається перехід від однієї основи логарифмів до іншої. розглядаються натуральні логарифми.

На закріплення запропоновано 144 задачі.

В §22 "Логарифмічна функція, її графік і властивості" крім введення поняття логарифмічної функції також подаються властивості логарифмічних

функцій, властивостей логарифмів чисел за основою a>1, властивості логарифмів чисел з основою 0<a<1.

На закріплення запропоновано запитання і завдання для повторення, а також 57 задач. Очевидно, це достатня кількість задач для такого об'єму матеріалу.

Ми можемо зробити висновок, що підручник мало забезпечений матеріалом, який можна використати для проблемного викладу. Отже, застосування його при проблемному навчанні не доцільно.

Підручники для класів і шкіл з поглибленим вивченням математики.

Звичайно, порівнюючи підручники для звичайних шкіл і шкіл з поглибленим вивченням математики, треба зауважити, що виклад матеріалу повинен дещо відрізнятися.

По-перше, підручники для шкіл із поглибленим вивченням математики містять більше теоретичного матеріалу, по-друге, учням, які навчаються у класі з поглибленим вивченням математики, ще й на інших уроках формують мислення математичного спрямування, по-третє, класи із поглибленим вивченням математики характеризуються тим, що в них проводиться більше уроків математики.

Розглянемо новий підручник для учнів 11 класів під редакцією М.І.Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара «Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 11 класів з поглибленим вивченням математики» [26]. Це досить зручний підручник. В цьому підручнику розглядаються п'ять розділів: первісна та інтеграл, показникова, логарифмічна та степенева функції, системи рівнянь та нерівностей, елементи комбінаторики, початки математичної статистики та теорії ймовірностей.

Автори пропонованого підручника ставили за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу.

Кожен розділ складається з певної кількості параграфів, після кожного параграфа запропоновано задачний матеріал. Серед цих задач є й зразки

розв'язання. В кінці підручника запропоновано задачі для повторення, запитання для повторення. Після кожного пункта пропонується приблизно 10-20 задач. Зауважимо, що це достатня кількість задач для певного об'єму теоретичного матеріалу.

З метою закріплення, контролю й самоконтролю щодо вивчення навчального матеріалу після кожного параграфа підручника пропонується система запитань і завдань. На кожне із запитань можна знайти пряму відповідь у тексті відповідного параграфа.

В §3 2-го розділу "Показникова та логарифмічна функції" розглядається степінь з раціональним показником, степінь з дійсним показником, показникова функція та її властивості, логарифмічна функція та її властивості, основні властивості логарифмів.

До кожного пункту запропоновано 10-20 задач. До цього параграфа загалом запропоновано 93 задачі. Вони досить різноманітного характеру і спрямовані на розвиток уяви учнів.

В §4 "Похідна показникової та логарифмічної функції" розглядається число e, натуральні логарифми, степенева функція та її похідна, порівняння зростання показникової, логарифмічної та степеневої функцій. До кожного пункту запропоновано 10-20 задач. До цього параграфа загалом запропоновано 73 задачі. Вони досить різноманітного характеру і спрямовані на розвиток уяви учнів.

На закріплення запропоновано запитання і завдання для повторення, в кількості 21 задача.

Ми можемо зробити висновок, що підручник мало забезпечений матеріалом, який можна використати для проблемного викладу. Отже, застосування його при проблемному навчанні не доцільно.

Використовуючи лише матеріал підручника, а саме таку послідовність викладу матеріалу та методи доведення тих чи інших фактів, значну частину уроку вчитель розповідає, пояснює, демонструє, звертаючись час від часу до окремих учнів. Переважна ж частина класу при цьому пасивно стежить за ходом думок учителя, не виявляючи будь-якої активності. На таких уроках відсутні

елементи пошуку, дослідництва. Зрозуміло, що організовуючи так навчання, вчитель не спроможний розв’язати тих відповідальних завдань, що стали перед школою на сучасному етапі її розвитку. Необхідно застосувати такі форми і методи навчання які б забезпечували здобуття учнями глибоких і міцних знань, а саме проблемне викладання.

Таким чином аналіз зазначеного матеріалу підручників з алгебри показує, що вони слабо виражають ідею проблемного навчання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ПРОБЛЕМНОГО МЕТОДУ НАВЧАННЯ СТЕПЕНЕВОЇ, ПОКАЗНИКОВОЇ, ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ У ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

2.1. Методика використання проблемного методу при вивченні тем «Корінь n-го степеня» та «Степенева функція»

Такі теми як степенева, показникова та логарифмічна функції в школі вивчаються в 10-11 класах. Розглянемо використання проблемного методу при вивченні цих тем.

Тема: Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня.
Мета:

- *Навчальна:* пригадати поняття оберненої операції; розібратися, в чому відмінність між арифметичним і алгебраїчним коренями; навчитися знаходити корені парного і непарного степеня; розглянути тотожності кореня n-го степеня;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити корінь n-го степеня та ОДЗ коренів n-го степеня;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

// Обернені операції

➢ Пригадайте, яка операція називається оберненою?
(Учні висловлюють власну думку)

Операція	Обернена операція
Встати	Сісти
Вдягнути	Зняти
$2 + 4 = 6$	$6 - 4 = 2$
Додавання	Віднімання
$2 \cdot 4 = 8$	$8 : 4 = 2$
Множення	Ділення

III. Вивчення нового матеріалу

// Проблемне питання

Операція	Обернена операція
$2^4 = 16$	
Піднесення до степеня	*(Учні висловлюють свої думки щодо операції, оберненої до піднесення степеня)*

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Знаходження кореня n – го степеня з числа a

Коренем (алгебраїчним) n-го степеня із числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

n – показник кореня $\quad \sqrt[n]{a} \quad$ $\sqrt{}$ – знак кореня *(радикал)*; a – підкореневий вираз

- Чи може якесь число, відмінне від числа 2, при піднесенні до 4 степеня дати число 16?

$$x^4 = 16$$

Алгебраїчні корені: $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[4]{16} = -2$

Арифметичний корінь *існує тільки для невід'ємного числа і може дорівнювати тільки невід'ємному числу* ***(!)***

Арифметичний корінь: $\sqrt[4]{16} = 2$

- Як зрозуміти, коли перед нами алгебраїчний, а коли – арифметичний квадратний корінь?

Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ означає арифметичний корінь n-го степеня із числа a.

Знайдіть:

	Розв'язання:	***Отже, ОДЗ для функції $\sqrt[n]{a}$:***	
$\sqrt[3]{-8}$	$= -2$, так як $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$	**n – не парне**	$a \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-8}$	Не існує на $\mathbb{R}$ *(немає такого числа, яке при піднесенні до парного степеня дає від'ємне число)*	**n - парне**	$a \geq 0$

Чи мають зміст дані записи?

Якщо так, які з даних записів ***є не тільки алгебраїчними коренями***?

		Відповідь:			***Відповідь:***
1)	$\sqrt{4}$	*Арифметичний корінь*	2)	$\sqrt[3]{-4}$	*Алгебраїчний корінь*
3)	$\sqrt{-4}$	*Не існує*	4)	$\sqrt[7]{3}$	*Арифметичний корінь*
5)	$-\sqrt[7]{3}$	*Арифметичний корінь*	6)	$\sqrt[8]{-3}$	*Не існує*
7)	$\sqrt[8]{(-3)^2}$	*Арифметичний корінь*	8)	$-\sqrt[7]{-3}$	*Алгебраїчний корінь*
9)	$\sqrt[7]{0}$	*Арифметичний корінь*	10)	$\sqrt[10]{1}$	*Арифметичний корінь*

// Тотожності для кореня n-го степеня

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	n – не парне n - парне	$a \in \mathbb{R}$ $a \geq 0$	*Наприклад:* $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3 = -2$; $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$; $\left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = 7$; $\left(\sqrt[8]{-7}\right)^8 = \emptyset$
$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$	Тільки для коренів непарного степеня (!)		*Наприклад:* $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{-16} = \emptyset$; $-\sqrt[7]{-4} = \sqrt[7]{4}$; $\left(\sqrt[121]{-2}\right)^{121} = -2$

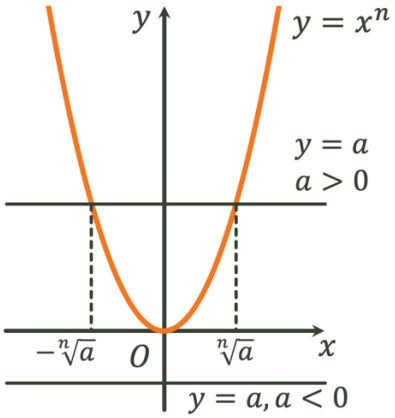
Остання тотожність дає можливість виразити не алгебраїчний корінь з від'ємного числа як алгебраїчний корінь того ж степеня:

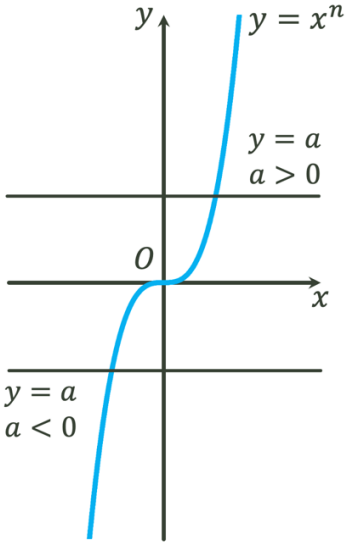
$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$\sqrt[n]{-a}$ *// не алгебраїчний корінь;* $-\sqrt[n]{a}$ *// алгебраїчний корінь*

// Рівняння $x^n = a$

$$x^n = a,\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$





$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	$a \in \mathbb{R}$
$x_1 = \sqrt[n]{a}$	$x = 0$	Коренів немає	$x = \sqrt[n]{a}$
$x_2 = -\sqrt[n]{a}$			

Наприклад:

$x^2 = 9$	$x^{12} = 0$	$x^4 = -3$	$x^7 = 5$	$x^{11} = 0$	$x^{15} = -8$
$x_1 = 3$	$x = 0$	Коренів немає	$x_1 = \sqrt[7]{5}$	$x = 0$	$x = \sqrt[15]{-8}$
$x_2 = -3$					

IV. Розв'язування завдань

№1

Доведіть, що:

1) Число 10 – арифметичний кубічний корінь з 1000
2) Число -4 не є арифметичним квадратним коренем з 16
3) Число 0,2 не є арифметичним квадратним коренем з 0,4
4) Число 0,1 є арифметичним коренем сьомого степеня з 0,0000001
5) Число 1 не є арифметичним коренем сто першого степеня з 1

Доведення:

1) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
10 і 1000 – невід'ємні числа.
Отже $\sqrt[3]{1000} = 10$, а число 10 є арифметичним кубічним коренем з 1000.

Доведено.

2) -4 – від'ємне число, тому воно не може бути арифметичним квадртаним коренем.

Доведено.

3) $0{,}2^2 = 0{,}04$

Так як $0{,}2^2 \neq 0{,}4$, то число $0{,}2$ не є арифметичним квадратним коренем з $0{,}4$

Доведено.

4) $0{,}1^7 = 0{,}0000001$
$0{,}1$ і $0{,}0000001$ – невід'ємні числа.
Отже $\sqrt[7]{0{,}0000001} = 0{,}1$, а число $0{,}1$ є арифметичним коренем сьомого степеня з $0{,}0000001$.

Доведено.

5) $1^{101} = 1$
1 і 1 – невід'ємні числа.
Отже $\sqrt[101]{1} = 1$, а число 1 є арифметичним коренем сто першого степеня з 1.

Доведено.

№2

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
2) $\sqrt[4]{16}$
3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$
4) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$
5) $\sqrt[3]{-27}$
6) $10\sqrt{0{,}64}$
7) $0{,}25\sqrt[3]{64}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$
2) $\sqrt[4]{16} = 2$
3) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$
4) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$
5) $\sqrt[3]{-27} = -3$
6) $10\sqrt{0{,}64} = 8$
7) $0{,}25\sqrt[3]{64} = 1$

№3

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt{100}$
2) $0{,}2\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{-0{,}008}$
3) $13 - 10\sqrt[3]{0{,}000216}$
4) $\left(-\sqrt[4]{3}\right)^4$
5) $\left(2\sqrt[5]{-1}\right)^5$
6) $\left(2\sqrt[3]{-0{,}1}\right)^3$

Розв'язання:

1) $\sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt{100} = 0{,}1 + 10 = 10{,}1$
2) $0{,}2\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{-0{,}008} = 0{,}2 \cdot 2 - 0{,}2 = 0{,}2$
3) $13 - 10\sqrt[3]{0{,}000216} = 13 - 10 \cdot 0{,}06 = 13 - 0{,}6 = 12{,}4$
4) $\left(-\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3$

5) $\left(2\sqrt[5]{-1}\right)^5 = -32$

6) $\left(2\sqrt[3]{-0{,}1}\right)^3 = -0{,}8$

№4

При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{x+7}$
2) $\sqrt[3]{3m-12}$
3) $\sqrt{-a}$
4) $\sqrt{-23n}$
5) $\sqrt{\frac{1}{4a-16}}$

Розв'язання:

1) $\sqrt{x+7}$
$x + 7 \geq 0$
$x \geq -7$
$x \in [-7; +\infty)$

2) $\sqrt[3]{3m-12}$
$m \in \mathbb{R}$

3) $\sqrt{-a}$
Вираз матиме зміст, якщо $a \leq 0$
$a \in (-\infty; 0]$

4) $\sqrt{-23n}$
Вираз матиме зміст при $n \leq 0$
$n \in (-\infty; 0]$

5) $\sqrt{\frac{1}{4a-16}}$
Так як знаменник не повинен дорівнювати нулю і увесь підкореневий вираз має бути більше або рівно нулю, то:
$4a - 16 > 0$
$4a > 16$
$a > 4$
$a \in (4; +\infty)$

№5

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$
2) $x^3 = 8$
3) $x^8 = -1$
4) $x^{134} = 0$
5) $x^{13} = 1$
6) $x^7 = -5$
7) $16x^4 - 1 = 0$
8) $0{,}01x^3 + 10 = 0$
9) $\frac{1}{7}x^2 - 7 = 0$
10) $4x^3 - \frac{1}{2} = 0$
11) $\frac{1}{4}x^5 + 8 = 0$

Розв'язання:

1) $x^2 = 25$

$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

2) $x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8} = 2$

3) $x^8 = -1$
$\emptyset$

4) $x^{134} = 0$
$x = \pm\sqrt[134]{0} = 0$

5) $x^{13} = 1$
$x = \sqrt[13]{1} = 1$

6) $x^7 = -5$
$x = \sqrt[7]{-5} = -\sqrt[7]{5}$

7) $16x^4 - 1 = 0$
$16x^4 = 1$
$x^4 = \frac{1}{16}$
$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$

8) $0{,}01x^3 + 10 = 0$
$0{,}01x^3 = -10$
$x^3 = -1000$
$x = \sqrt[3]{-1000} = -\sqrt[3]{1000} = -10$

9) $\frac{1}{7}x^2 - 7 = 0$
$x^2 - 49 = 0$
$x^2 = 49$
$x = \pm 7$

10) $4x^3 - \frac{1}{2} = 0$
$8x^3 - 1 = 0$
$8x^3 = 1$
$x^3 = \frac{1}{8}$
$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

11) $\frac{1}{4}x^5 + 8 = 0$

$x^5 + 32 = 0$
$x^5 = -32$
$x = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

V. Підсумок уроку

- Що ми називаємо коренем n-го степеня із числа a?
- В чому відмінність арифметичного кореня від алгебраїчного кореня?
- Якою є ОДЗ для виразу $\sqrt[n]{a}$, якщо n – парне
- Якою є ОДЗ для виразу $\sqrt[n]{a}$, якщо n – непарне
- Які ви знаєте тотожності для кореня n-го степеня?
- Як знайти корені рівняння $x^n = a,\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, для парного і непарного n?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §3 Виконати № 3.7; 3.10; 3.12 (1-3); 3.16(3,4); 3.25(2,4); 3.29(1,3,5)	О.С. Істер
Опрацювати П.4; Вміти відповідати на запитання на ст.25 Виконати № 4.5; 4.7; 4.9	А.Г. Мерзляк

Тема: Властивості кореня n-го степеня.
Мета:

- *Навчальна:* розглянути та засвоїти властивості кореня n-го степеня;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння використовувати властивості кореня n-го степеня та розпізнавати ситуації в завданнях, які можна розв'язати за допомогою властивостей кореня n-го степеня;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

// Пригадаємо властивості квадратного кореня

➢ Продовжіть вже відомі Вам з 8 класу рівності:

$\boldsymbol{a \geq 0, ; b \geq 0}$ *Відповідь:*

$\boldsymbol{\sqrt{ab} =}$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Наприклад:

$\sqrt{4 \cdot 81} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{81} = 2 \cdot 9 = 18$

$\boldsymbol{a \geq 0; b > 0}$ *Відповідь:*

$\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}} =}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Наприклад:

$$\sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

III. Вивчення нового матеріалу

// Властивості арифметичного кореня n – го степеня

1) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ якщо } n - \text{парне} \\ a, \text{ якщо } n \ - \text{непарне} \end{cases}$ $a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$
2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $a \geq 0; b \geq 0$
3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $a \geq 0; b > 0$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{Z}; a > 0$
5) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$ $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; a \geq 0$
6) $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$ $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; a \geq 0$

IV. Розв'язування завдань

№1

1. $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ якщо } n - \text{парне} \\ a, \text{ якщо } n \ - \text{непарне} \end{cases}}$ $\boldsymbol{a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}}$

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{7^3}$
2) $\sqrt[3]{-8}$
3) $\sqrt[8]{(-3)^8}$
4) $\sqrt[4]{\left(3-\sqrt{10}\right)^4} + \sqrt[4]{\left(4-\sqrt{10}\right)^4}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[3]{7^3} = 7$
2) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$
3) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$
4) $\sqrt[4]{\left(3-\sqrt{10}\right)^4} + \sqrt[4]{\left(4-\sqrt{10}\right)^4} = \left|3-\sqrt{10}\right| + \left|4-\sqrt{10}\right| =$

$$= -3 + \sqrt{10} + 4 - \sqrt{10} = 1$$

**Використали властивість модуля числа*
$3 = \sqrt{9}; 4 = \sqrt{16}$*, отже* $\sqrt{10} \in (3;4)$. *Тому:*
$\left|3 - \sqrt{10}\right| = -3 + \sqrt{10}$
$\left|4 - \sqrt{10}\right| = 4 - \sqrt{10}$

№2

2. $\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$ $\qquad \boldsymbol{a \geq 0; b \geq 0}$

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$
2) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$
3) $\sqrt[5]{2\sqrt{17} + 10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17} - 10}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{125} = 4 \cdot 5 = 20$
2) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
3) $\sqrt[5]{2\sqrt{17} + 10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17} - 10} = \sqrt[5]{\left(2\sqrt{17} + 10\right) \cdot \left(2\sqrt{17} - 10\right)}$
$= \sqrt[5]{\left(2\sqrt{17}\right)^2 - 10^2} = \sqrt[5]{68 - 100} = \sqrt[5]{-32} = -2$

№3

3. $\sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \dfrac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$ $\qquad \boldsymbol{a \geq 0; b > 0}$

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$
2) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$
3) $\dfrac{\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[5]{-288}}$
4) $\dfrac{\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{243}}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{3}{2}$
2) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
3) $\dfrac{\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[5]{-288}} = \sqrt[5]{\dfrac{-9}{-288}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{1}{2}$
4) $\dfrac{\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{243}} = \sqrt[3]{-\dfrac{9}{243}} = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}} = -\dfrac{1}{3}$

№4

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $\quad n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{Z}; a > 0$

Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$ 2) $\left(3\sqrt[5]{-3}\right)^5$

3) $\sqrt[7]{128^3}$

Розв'язання:

1) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

2) $\left(3\sqrt[5]{-3}\right)^5 = 3^5\sqrt[5]{(-3)^5} = 3^5 \cdot (-3) = -(3)^6 = -729$

3) $\sqrt[7]{128^3} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^3 = 2^3 = 8$

№5

5. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$ $\quad n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; a \geq 0$

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

3) $\sqrt{\sqrt{16}}$ 4) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

Розв'язання:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot3]{7} = \sqrt[6]{7}$

2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3\cdot4]{5} = \sqrt[12]{5}$

3) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2\cdot2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

4) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5\cdot2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$

№6

6. $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$ $\quad n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; a \geq 0$

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{9^2}$ 2) $\sqrt[4]{25^6}$

3) $\sqrt[8]{16^5}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt[2\cdot2]{9^2} = \sqrt[2]{9} = 3$

2) $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(5^2)^6} = \sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{5^{4\cdot3}} = 5^3 = 125$

3) $\sqrt[8]{16^5} = \sqrt[8]{(2^4)^5} = \sqrt[8]{(2^5)^4} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{\mathbf{16 \cdot 2}} = \mathbf{4\sqrt{2}}$

Зверніть увагу, в останньому прикладі ми **винесли множник з-під знака кореня*

До тотожних перетворень виразу також можна віднести операцію ***внесення множника під знак кореня***, наприклад в такому завданні:

Яке число є більшим: $2\sqrt{5}$ чи $5\sqrt{2}$?

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20} \\ 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50} \end{array}\right| \rightarrow 5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$$

Відповідь: $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$

V. Підсумок уроку

- Індивідуальна робота з учнями, що не зрозуміли матеріал

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §4 Виконати № 4.2; 4,4; 4.6; 4.10; 4.16 (1,5,3); 4.18 (1,3)	О.С. Істер
Опрацювати п.5, вміти відповідати на запитання 1-6 на стор. 30 Виконати № 5.2; 5.4; 5.6.	А.Г. Мерзляк

Тема: Розв'язування типових вправ. Самостійна робота «Властивості арифметичного кореня n-го степеня. Степінь з раціональним показником і його властивості»

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати і використовувати отримані знання та навички, правильно користуватися креслярським приладдям.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук.

Тип уроку: закріплення знань.

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання Д/З
- Налаштування на роботу

II. Розв'язування завдань

№1

Запишіть у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt[8]{0{,}2^5}$
2) $\sqrt[7]{-3^3}$
3) $\sqrt[5]{7^{-4}}$

Розв'язання:

1) $\sqrt[8]{0{,}2^5} = 0{,}2^{\frac{5}{8}}$
2) $\sqrt[7]{-3^3} = -3^{\frac{3}{7}}$
3) $\sqrt[5]{7^{-4}} = 7^{-\frac{4}{5}}$

Відповідь: 1) $0{,}2^{\frac{5}{8}}$; 2) $-3^{\frac{3}{7}}$; 3) $7^{-\frac{4}{5}}$

№2

Знайдіть значення виразу:

1) $8^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{2}} + 5^0$
2) $\dfrac{6^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 4^0$

Розв'язання:

1) $8^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{2}} + 5^0 = \sqrt[3]{8^2} : \sqrt{4^{-1}} + 1 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 : \sqrt{\dfrac{1}{4}} + 1 = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{4}}{1} + 1$
$= 4 \cdot 2 + 1 = 9$

2) $\dfrac{6^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 4^0 = \dfrac{\sqrt[4]{6^3}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 1 = \dfrac{(2 \cdot 3)^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^{-5}}}$
$= \sqrt[4]{\dfrac{2^3}{2^{-5}}} = \sqrt[4]{2^{3-(-5)}} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$

Відповідь: 1) 9; 2) 4.

№3

Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a-b}\right)^{-1}$$

Розв'язання:

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a-b}\right)^{-1} = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}\right) \cdot (a-b)$$
$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Відповідь: $\sqrt{a}$

№4

Внесіть множник під знак кореня,

якщо $m > 0, n > 0$:

4.1) $-2mn^4\sqrt[3]{\frac{m}{n^4}}$

Винесіть множник за знак кореня,
якщо $a > 0$:

4.2) $\sqrt[3]{-27a^{17}}$

Розв'язання:

4.1) $-2mn^4\sqrt[3]{\frac{m}{n^4}} = \sqrt[3]{\frac{-8m^3n^{12}\cdot m}{n^4}} = \sqrt[3]{-8m^4n^8}$

4.2) $\sqrt[3]{-27a^{17}} = \sqrt[3]{(-3)^3\cdot a^{15}\cdot a^2} = -3a^5\sqrt[3]{a^2}$

Відповідь: 4.1) $\sqrt[3]{-8m^4n^3}$; 4.2) $-3a^5\sqrt[3]{a^2}$.

Самостійна робота

III. Підсумок уроку

- Дати відповідь на запитання учнів
- Індивідуальна робота з учнями, що не зрозуміли матеріал

IV. Домашнє завдання

Повторити §4-6 Виконати № 5.16; 5.40; 6.13(2,4); 6.21.	О.С. Істер
Повторити п.6-7, відповідати на запитання Виконати № 7.7; 7.9; 7.11	А.Г. Мерзляк

САМОСТІЙНА РОБОТА

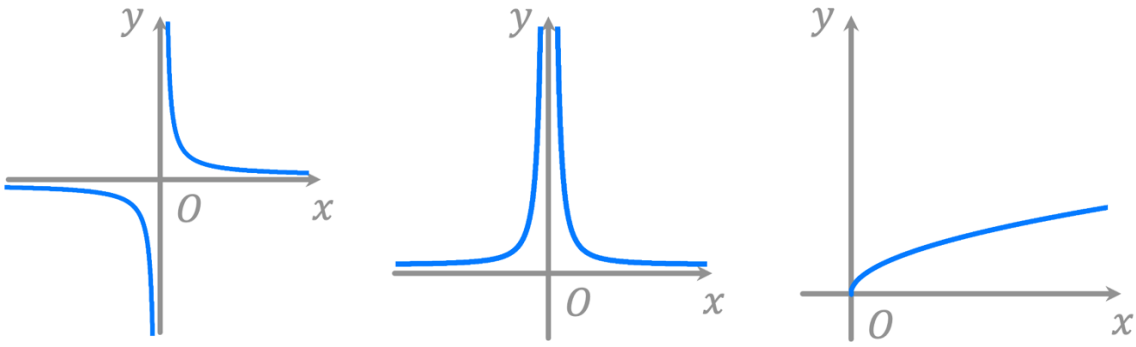
І Варіант

1. *(1 б)* Запишіть у вигляді кореня з числа:

   А) $2^{-\frac{4}{5}}$ Б) $3^{0,3}$

2. *(1 б)* Порівняйте числа $\sqrt[4]{5^7}$ і $5^{\frac{7}{5}}$

3. *(1 б)* На якому з рисунків схематично зображено графік функції $y = x^{-1}$:



А) Б) В)

4. *(1,5 б)* Знайдіть значення виразу:

   А) $\sqrt[4]{(-5)^4}$ Б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4}$

5. *(1,5 б)* Спростіть вираз:

   А) $\sqrt[8]{\sqrt{3}}$ Б) $\sqrt[15]{10^{12}}$

6. *(1,5 б)* Внесіть множник під знак кореня, якщо $m > 0$ і $n > 0$

   $-3m^2n\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$

7. *(1,5 б)* Винесіть множник за знак кореня

   $\sqrt[5]{-32m^{16}}$

8. *(3 б)* Спростіть вираз

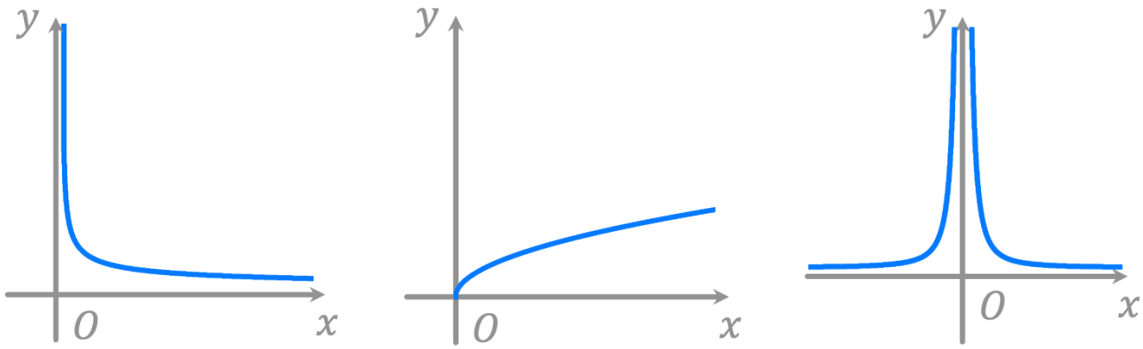
   $\left(\frac{m^2+n^2}{mn^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{3}{2}}} - \frac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot mn^{-1}$

II Варіант

1. *(1 б)* Запишіть у вигляді кореня з числа:
   А) $2^{1\frac{1}{4}}$ Б) $3^{-0,6}$

2. *(1 б)* Порівняйте числа $\sqrt[5]{4^8}$ і $4^{\frac{6}{5}}$

3. *(1 б)* На якому з рисунків схематично зображено графік функції $y = x^{\frac{1}{2}}$:



А) Б) В)

4. *(1,5 б)* Знайдіть значення виразу:
   А) $\left(\sqrt[7]{0,5}\right)^7$ Б) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$

5. *(1,5 б)* Спростіть вираз:
   А) $\sqrt[30]{5^{18}}$ Б) $\sqrt[4]{\sqrt[7]{9}}$

6. *(1,5 б)* Внесіть множник під знак кореня, якщо $m > 0$ і $n > 0$
   $2mn^3\sqrt[4]{\frac{n}{m^7}}$

7. *(1,5 б)* Винесіть множник за знак кореня
   $\sqrt[3]{125n^{20}}$

8. *(3 б)* Спростіть вираз
   $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\right)$

2.2. Методика використання проблемного методу при вивченні тем «Показникова функція» та «Логарифмічна функція»

Тема: Показникова функція та її властивості
Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової функції, властивості показникової функції, навчитися будувати графіки показникової функції; засвоїти властивості степенів з дійсним показником на основі властивості степенів з раціональним показником;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати графіки показникової функції та користуючись побудованими графіками аналізувати властивості показникової функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук, показати, де саме застосовують у житті властивості показникової функції;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

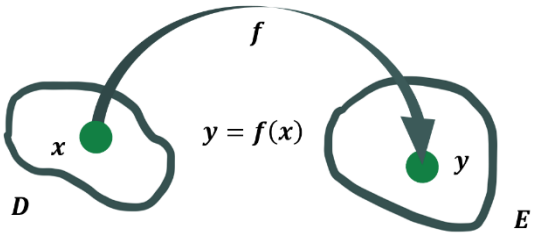
I. Організаційний етап

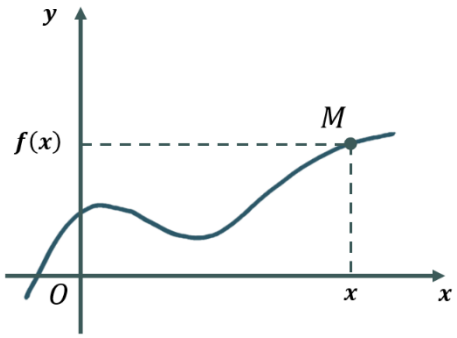
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Числовою функцією називається….

Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D(області визначення) ставиться у відповідність єдине число y.
x – аргумент(незалежна змінна), y – функція(залежна змінна)
f – функція
$f(x_0)$ – значення функції f у точці x_0





- Графіком функції називається…

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$.

➢ Область визначення функції…

Область визначення функції f *– це множина тих значень, яких може набувати аргумент* x. *Позначення:* $D(f)$

➢ Область значень функції…

Область значень функції f *– це множина, яка складається із всіх чисел* $f(x)$, *де* x *належить області визначення. Її позначають* $E(f)$.

➢ Функція зростаюча, якщо…

Функція $f(x)$ *називається зростаючою на множині* M, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.*

➢ Функція спадна, якщо…

Функція $f(x)$ *називається спадною на множині* M, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.*

- Які існують типи чисел?



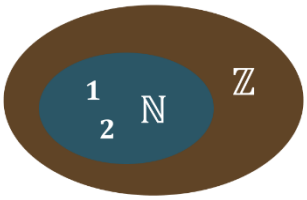
Натуральні числа (лат. «natura» - природа)

Натуральні числа – числа, що виникають природним чином при лічбі.

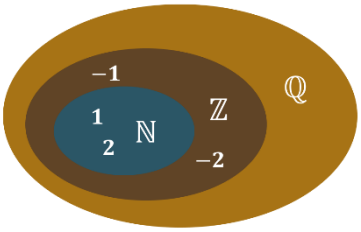
➢ Наведіть приклади натуральних чисел $(1,2,3\ldots)$

Цілі числа

Цілі числа – це натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль.



➢ Наведіть приклади цілих чисел $(-2,-1,0,1,2)$



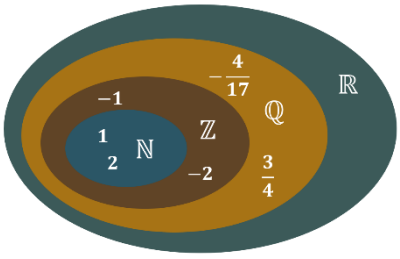
Раціональні числа

Раціональні числа – додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові), число нуль.

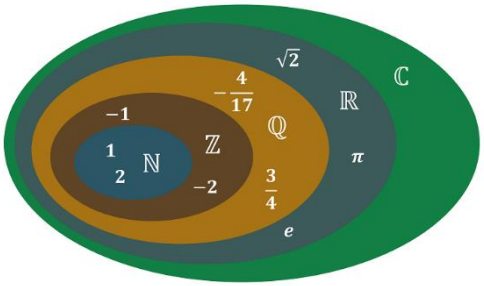
➢ Наведіть приклади раціональних чисел $\left(-\frac{4}{17}; \frac{3}{4}\right)$

Дійсні числа

Множина раціональних та ірраціональних чисел(числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілих чисел, їх можна виразити за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів)



➢ Наведіть приклади дійсних чисел $\left(\sqrt{2}, \pi, e\right)$

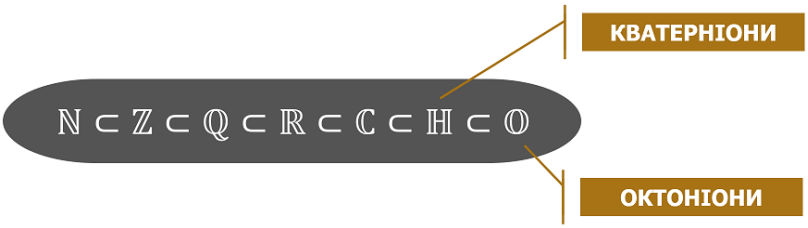


Комплексні числа

Комплексні числа можна подати у вигляді як формальну суму $x + iy$, x *і* y *– дійсні числа,* i *– уявна одиниця* $(i = \sqrt{-1}, i^2 = -1)$

➢ Наведіть приклади комплексних чисел $(1 + i\sqrt{3})$

➢ Чи існують інші типи чисел?





Кватерніони й октоніони є прикладами гіперкомплексних чисел.

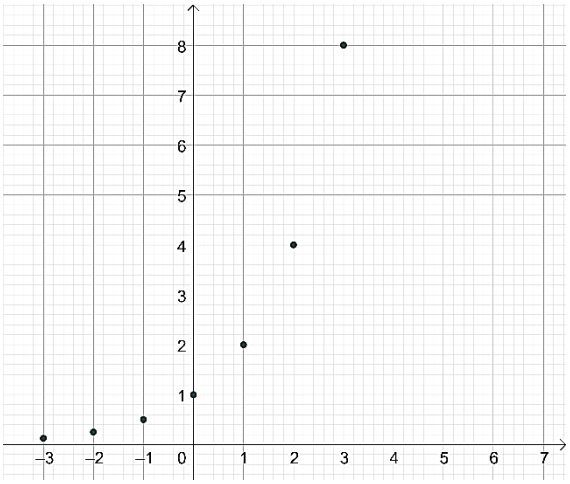
III. Вивчення нового матеріалу

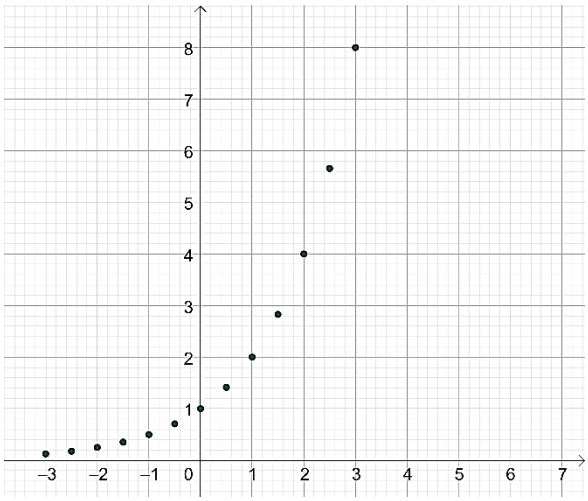
- **Показникова функція**

Функція виду $y = a^x \begin{vmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{vmatrix}$ називається **показниковою.**

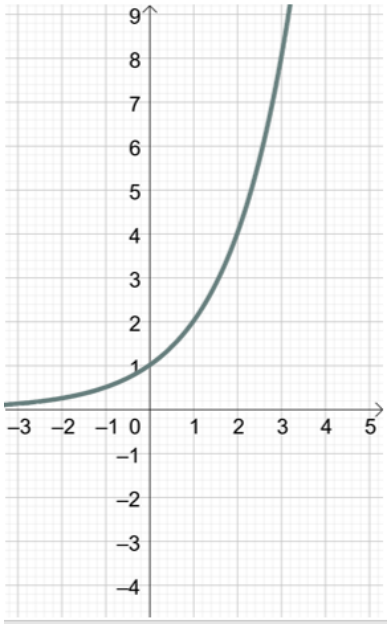
Наприклад: $y = 2^x, y = 0{,}3^x, y = \left(\sqrt{2}\right)^x$

Побудуємо $y = 2^x$ для деяких цілих значень.





Тепер на цьому ж графіку добудуємо деякі дробові значення функції $y = 2^x$

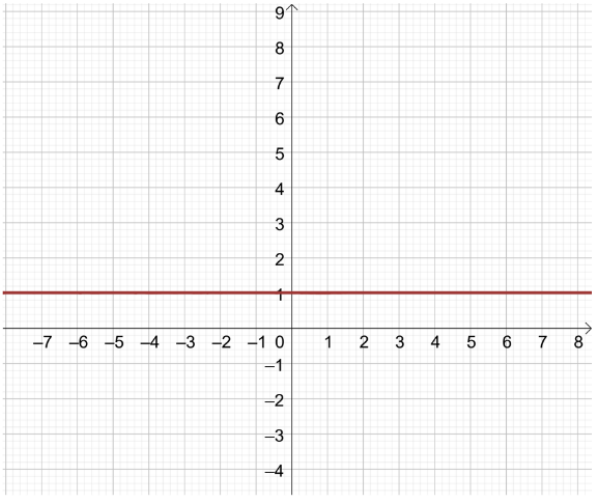


Якщо побудуємо всі значення з множини $x \in \mathbb{R}$, то отримаємо графік показникової функції $y = 2^x$ (можливий інший запис, наприклад: $g(x) = 2^x$).

**Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником x.*

- Чи існує функція при $a = 1$?

- Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.



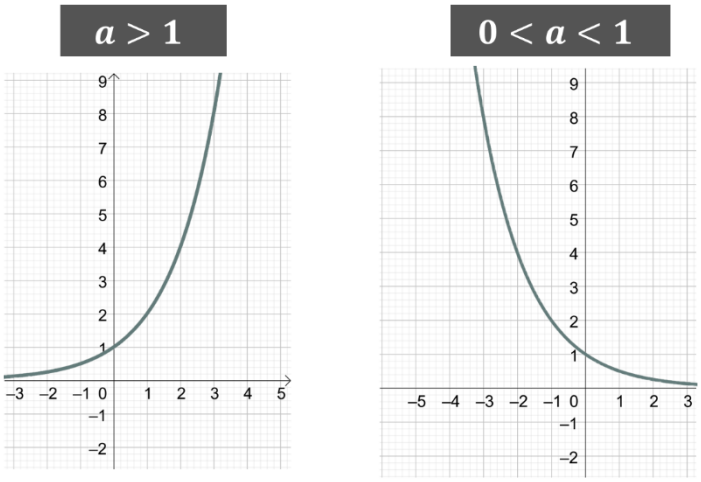
- Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?

- Ні, навіть якщо ми візьмемо від'ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення $\left(x^{-n} = \frac{1}{x^n};\ 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}\right)$

Отже, **вісь x є асимптотою цього графіка.**

**Асимпто́та крибо́ї* (грец. ασυμπτωτος — що не збігається, не дотикається) — це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.

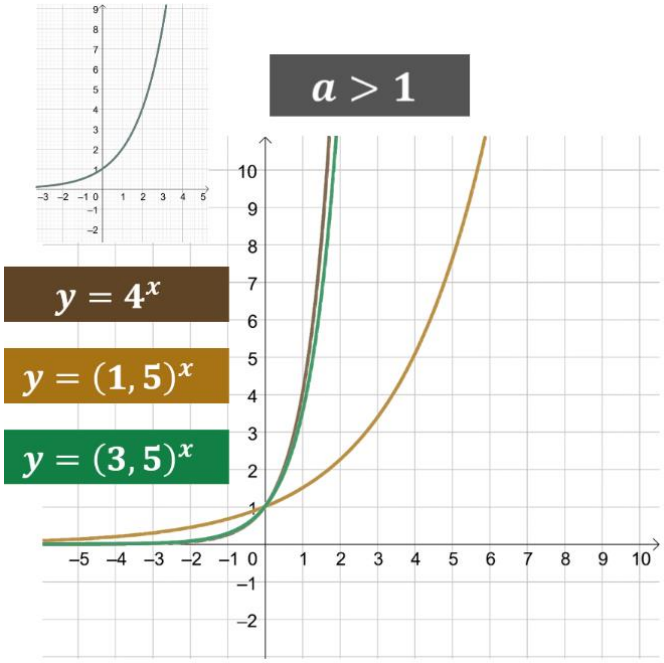
Проаналізуємо графіки показникової функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$:



- Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?

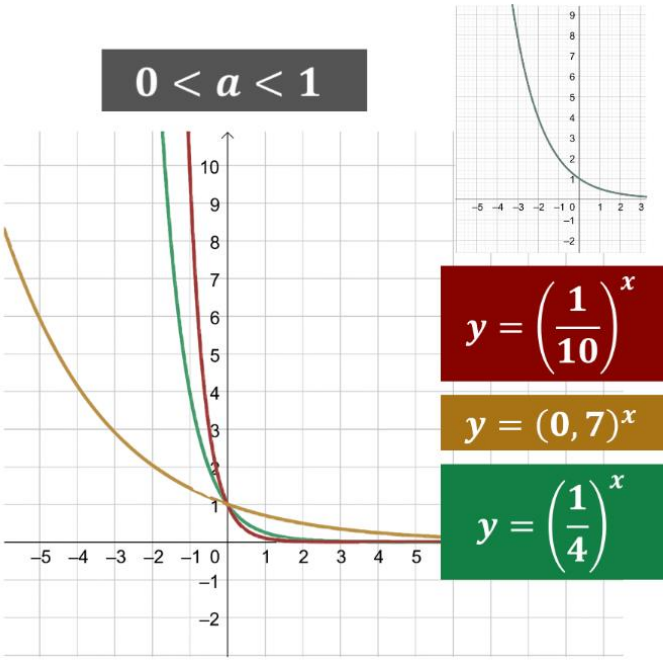
(при $a > 1$ функція зростаюча, при $0 < a < 1$ функція спадна)

Побудуємо деякі графіки функцій $y = a^x$ при $a > 1$ і $0 < a < 1$



Чим більшою є основа $a > 1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y = a^x$, якщо рухатися вправо.

Чим меншою є основа $0 < a < 1$, *тим крутіше «піднімається» графік функції* $y = a^x$, *якщо точка рухається вліво.*



Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

$\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$
$\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$
$\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$
$\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$
$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$

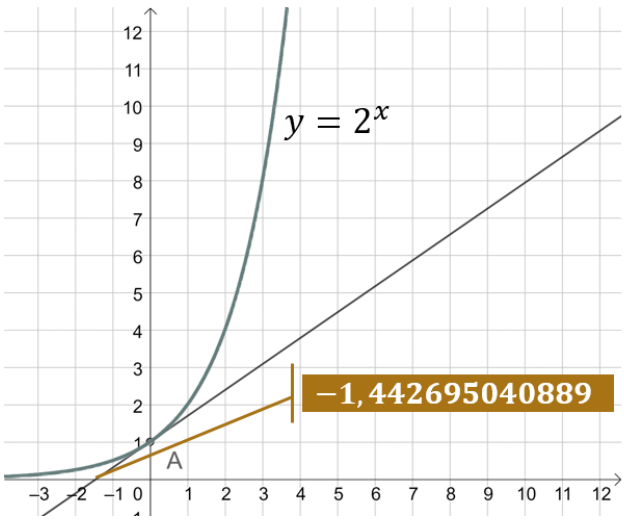
Всі ці властивості справедливі для > 0, $b > 0$ *та будь-яких дійсних* x *і* y

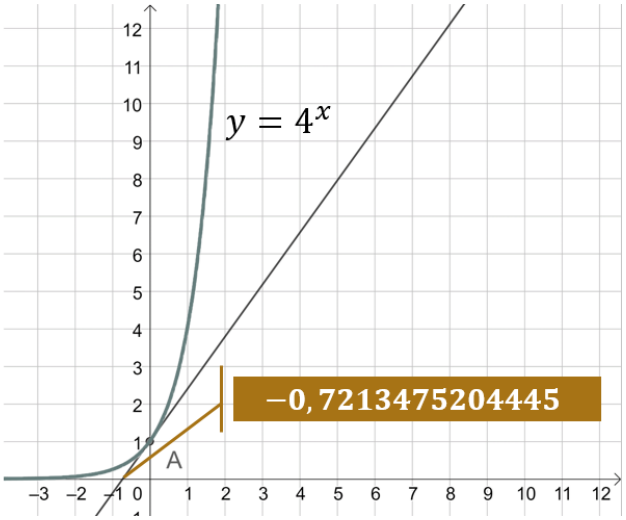
- **Властивості показникової функції**
  1. $D(f) = \mathbb{R}$ *(Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)*
  2. $E(f) = (0; \infty)$ *(Областю значень показникової функції є множина* $(0; \infty)$*)*
  3. $y > 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$ *(Показникова функція немає нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є проміжком її знакосталості)*
  4. При $a > 1$ зростаюча *(При* $a > 1$ *зростає на всій області визначення)*

При $0 < a < 1$ спадна *(При* $0 < a < 1$ *спадає на всій області визначення)*

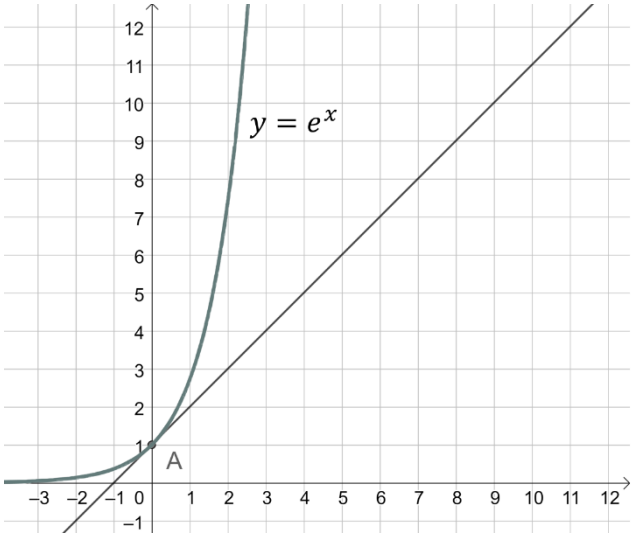
- **Цікаво**

Розглянемо графіки показникових функцій $y = 2^x$ *і* $y = 4^x$.
У них кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці $A(0; 1)$ до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.





- Чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в т.$A(1;0)$ дорівнював 1?



Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число $e = 2{,}71828\ldots$

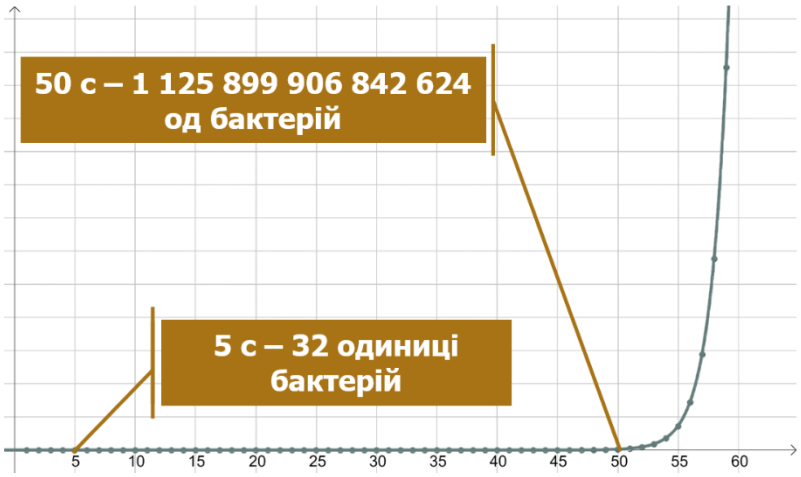
Така показникова функція називається **експонентою**.

- Чому графік кожної показникової функції обов'язково проходить через точку $A(0;1)$?

$$y = a^x \begin{vmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{vmatrix} \Rightarrow a^0 = 1$$

- **Процеси, що описує показникова функція**

Показникова функція описує значну кількість процесів, що відбуваються в природі. Наприклад, зростання кількості бактерій за сприятливих для них умов існування можна описати за законом $N = 5^t$ (t – час дослідження, N – кількість бактерій у колонії).



- Як людина використовує ріст і розмноження бактерій?

(Виробництво антибіотиків, кисломолочних продуктів, виноробство, медицина)

- Зростання кількості деревини можна порахувати за законом $A = A_0 \cdot a^{kt}$ *(A_0 – початкова кількість деревини, A – кількість деревини через час t, k і a – сталі)*
- Зменшення маси речовини під час радіоактивного розпаду відбувається за законом $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ *(M_0 – початкова маса речовини, M – маса в момент часу t, T – період напіврозпаду речовини (час розпаду половини атомів заданої речовини))*
- Зменшення тиску повітря з висотою відбувається за законом $p = p_0 \cdot a^{-kh}$ *(p_0 – тиск на рівні моря, p – тиск на висоті h, a і k - сталі)*

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$	2) $y = \sqrt[6]{x}$
3) $y = 6^x$	4) $y = 6$

№2

Ґрунтуючись на які властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$ 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

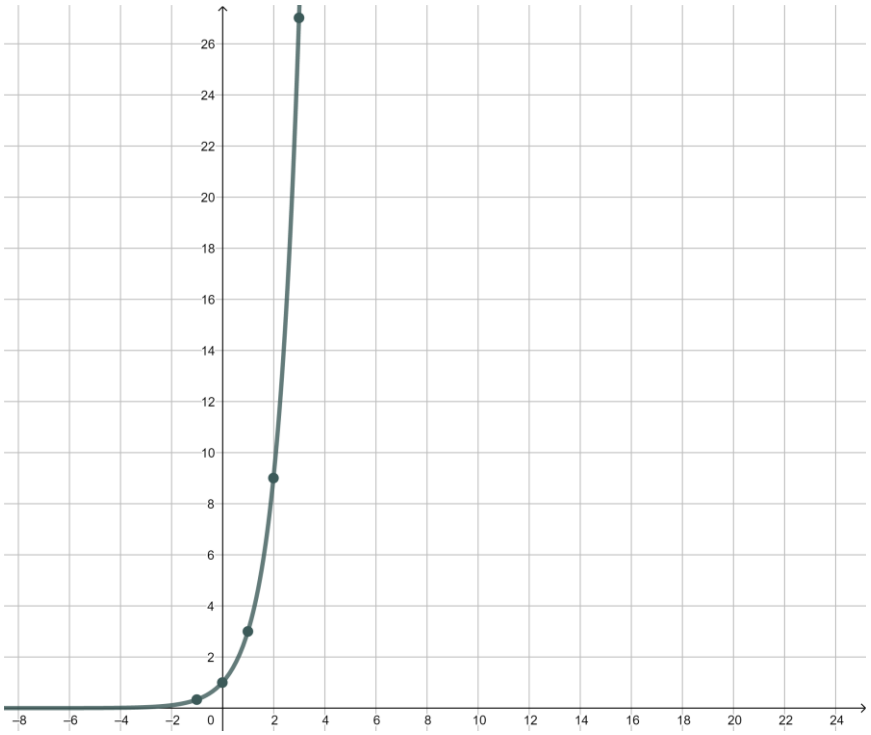
Відповідь: При $a > 1$ показникова функція є зростаючою, при $0 > a > 1$ – спадною.

№3

Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

Розв'язок:

x	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



Відповідь: значення функції змінюється від $\frac{1}{3}$ до 27.

№4

Порівняйте:

1) $5^{3,4} > 5^{3,26}$	2) $0{,}3^{0,4} < 0{,}3^{0,3}$	3) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0} < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$
4) $0{,}17^{-3} > 0{,}17^{0}$	5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}} < \sqrt{2}^{\sqrt{7}}$	6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$

№5

Обчисліть значення виразу:

1) $3^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$

Розв'язок:

$3^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$

2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

Розв'язок:

$\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(3\sqrt[3]{7}\right)^3 = 3^3 + \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 27 \cdot 7 = 189$

3) $\sqrt[3]{6^{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$

Розв'язок:

$\sqrt[3]{6^{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot 6^{-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{6+\cancel{2\sqrt{5}}-\cancel{2\sqrt{5}}}} = \sqrt[3]{6^6} = 6^{\frac{6}{3}} = 6^2 = 36$

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$

Розв'язок:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

№6

Чи є правильним твердження:

1) Найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;

Розв'язок:

$0 < 0{,}2 < 1| \Rightarrow$ функція $y = 0{,}2^x$ – спадна

На проміжку $[-1; 2]$ її найбільшим значенням буде $0{,}2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$, отже твердження правильне.

2) Областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;

Розв'язок:

Твердження правильне, за означенням показникової функції.

3) Областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$

Розв'язок:

$6^x -$ додатне число за означенням$| \Rightarrow\ 6^x + 5 > 5\ \Rightarrow E(y) = (5; +\infty)$

Твердження не правильне.

4) Найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16

Розв'язок:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

Твердження не правильне.

№7

На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше дорівнює $\frac{1}{4}$?

Розв'язок:

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

$$2^x = \frac{1}{4}$$

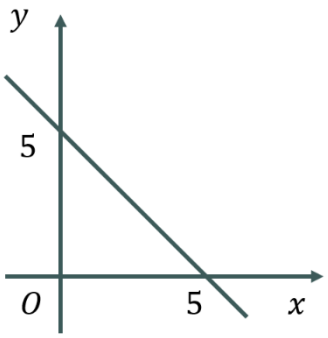
$2^x = 2^{-2}$

$x = -2$

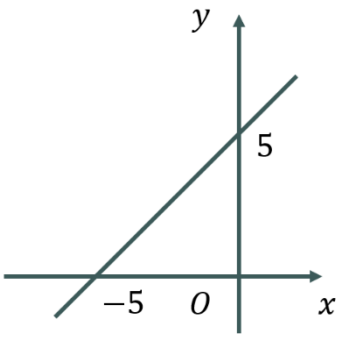
Відповідь: $[-2; 4]$

№8

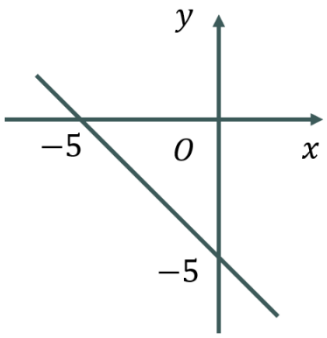
Графік якої з функцій, зображених на рисунках, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



А)



Б)



В)

V. Підсумок уроку

- Яку функцію називають показниковою?
- Чи може показникова функція перетнути вісь абсцис?
- Які властивості має степінь з дійсним показником?
- Зобразіть схематично графік функції $y = a^x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$
- Через яку точку проходять всі графіки всіх показникових функцій?
- Користуючись побудованими графіками показникових функцій, охарактеризуйте всі їх властивості
- Що називають експонентою?
- Яку цікаву особливість має експонента?
- За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
- Чи може значення показникової функції бути від'ємним?
- Чи може значення показникової функції дорівнювати нулю?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст. 6-9) Виконати № 1.5; 1.7; 1.11; 1.17	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §1 Виконати № 1,5; 1.7; 1.9; 1.21;	Істер О.С.
Опрацювати §1 Виконати № 1.2(2,4); 1.6(3-7); 1.7; 1.11(2);	Нелін Є.П.
Опрацювати §1 Виконати № 8; 23; 27(в); 31;	Бевз Г.П.

Тема: Властивості та графік логарифмічної функції
Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення логарифмічної функції та властивості логарифмічної функції, навчитися будувати та розпізнавати графік логарифмічної функції
- *Розвиваюча:* розвивати вміння формулювати властивості функції на основі отриманого графіку; розв'язувати задачі на основі знань про логарифмічну функцію та її властивості;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

- **Логарифмічна функція**

Означення

Функція виду $y = \log_a x \Big|_{a \neq 1}^{a > 0}$ називається логарифмічною

**Де x – аргумент, a – додатне і відмінне від 1 дане дійсне число.*

Приклади логарифмічних функцій:
$y = \log_4 x\,, y = \log_{\sqrt{3}} x\,, y = \log_{\frac{1}{7}} x\,, y = \log_e x$

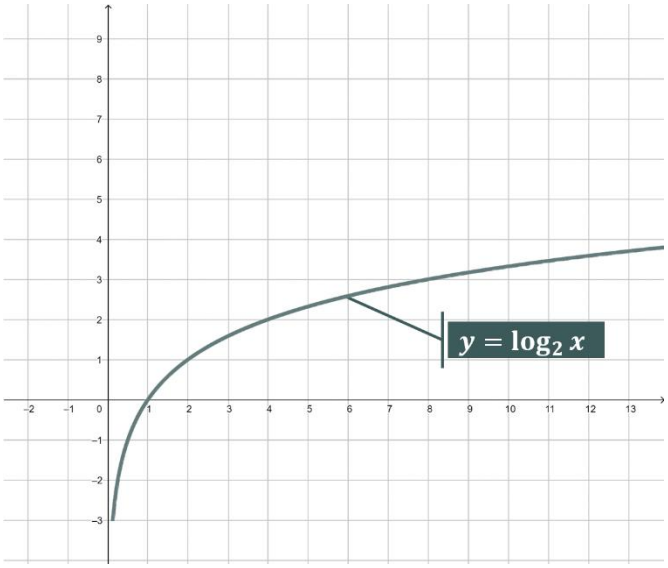
- Якщо $a > 0\ i\ a \neq 1$, то при яких значеннях «x» вираз $y = \log_a x$ буде мати зміст?

(Тільки додатних)

При $a > 0\ i\ a \neq 1$ вираз $y = \log_a x$ має змісти лише для додатних значень x

При $a > 0\ i\ a \neq 1$ вираз $y = \log_a x$ має зміст лише для додатних значень $x \Big| \Rightarrow D(f) = (0; +\infty)$

- *Побудуємо за допомогою комп'ютера графік функції* $y = \log_2 x$*:*

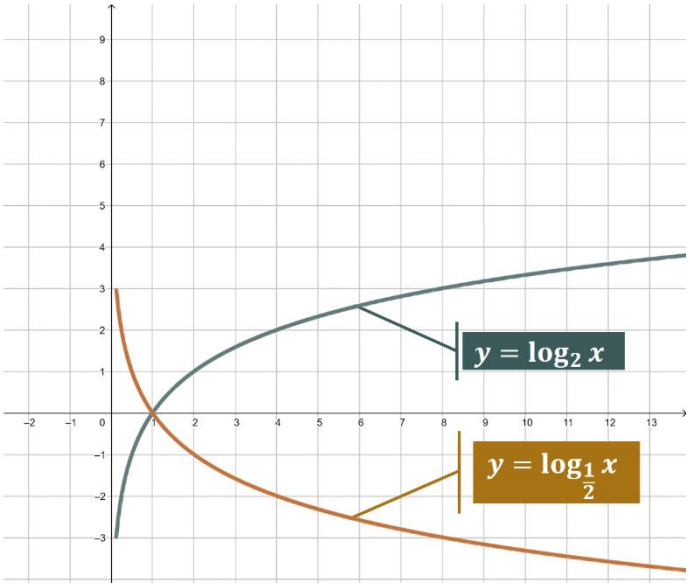


➢ Чи може отримана логарифмічна крива перетнути вісь ординат?

(Так як $x > 0$*, графік ніколи не перетне вісь ординат)*

Вісь y **– асимптота цього графіка.**

- *Побудуємо за допомогою комп'ютера графік функції* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



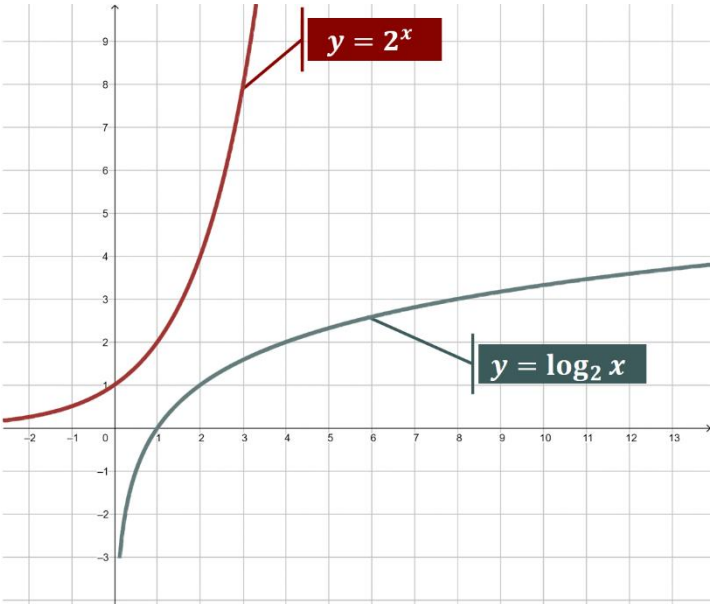
➢ Що можемо на перший погляд сказати про ці функції?

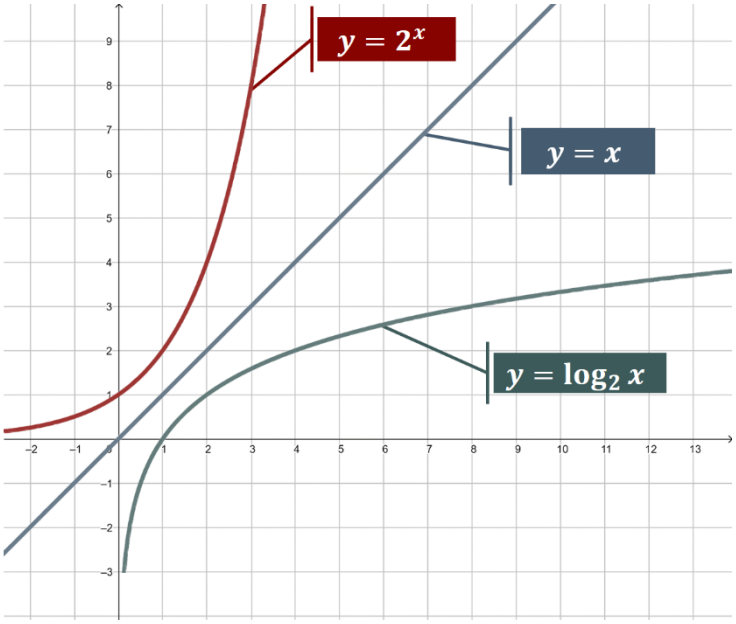
(Ці функції мають єдиний нуль $x = 1$*; мають два проміжки знакосталості; функції є зростаючими та спадними відповідно при* $a > 1$ *і* $0 < a < 1$*)*

- *Побудуємо графік функції* $y = 2^x$*:*

➢ Що можемо сказати про графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = 2^x$?

(Вони симетричні відносно прямої $y = x$)





➢ Як пояснити симетричність цих графіків відносно прямої $y = x$?

$y = 2^x$
$x = \log_2 y$ | виражають одну й ту саму залежність $\Rightarrow$ якщо в другій з рівностей замінити x на y (що рівнозначно заміні осі x на вісь y і навпаки)

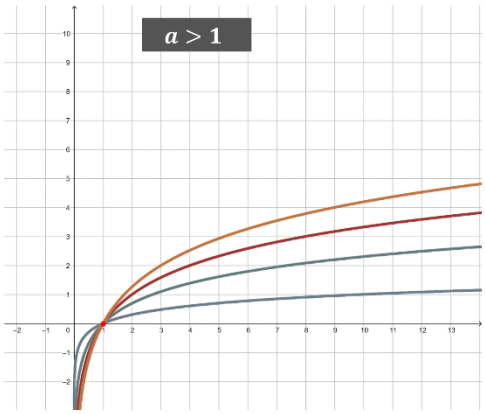
$\Rightarrow$ отримаємо функцію $y = \log_2 x$, обернену до функції $y = 2^x$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, цим і пояснюється симетрія графіків $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ відносно прямої $y = x$.

Отже, можемо зробити висновок:
Графіки показникової функції $y = a^x$ і логарифмічної функції $y = \log_a x$, що мають однакові основи a, симетричні відносто прямої $y = x$.

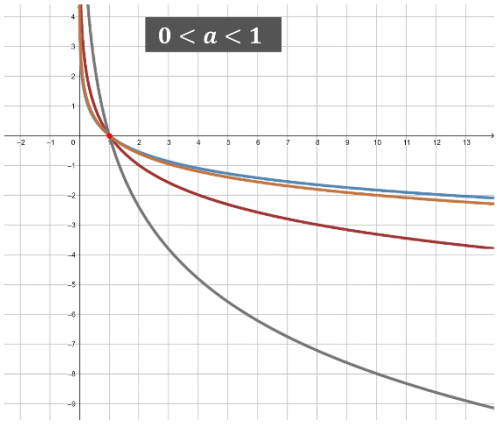
- **Графік логарифмічної функції**

➢ Побудуємо деякі графіки логарифмічної функції, коли $a > 1$:



Отже, можемо зробити висновок: ***Графіки всіх функцій виду*** $y = \log_a x$, ***де*** $a > 1$, ***мають схематичний вигляд як графік функції*** $y = \log_2 x$.

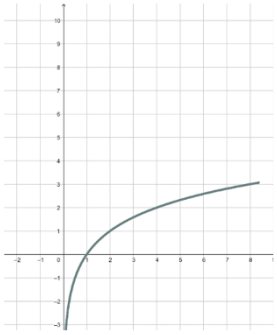
➢ Побудуємо деякі графіки логарифмічної функції, коли $0 < a < 1$:



Отже, можемо зробити висновок: ***Графіки всіх функцій виду*** $y = \log_a x$, ***де*** $0 < a < 1$, ***мають схематичний вигляд як графік функції*** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

- **Властивості логарифмічної функції**

$a > 1$

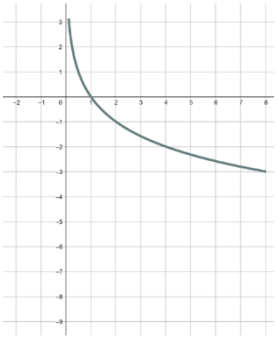


1. $y = 0$ **при** $x = 1$ *(Функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$*)*
2. Проміжки знакосталості:

$$a > 1 \left| \begin{matrix} y < 0 \text{ при } x \in (0;1) \\ y > 0 \text{ при } x \in (1;\ +\infty) \end{matrix} \right.$$

(Якщо $a > 1$*, то* $y < 0$ *на проміжку* $(0;1)$*;* $y > 0$ *на проміжку* $(1;\ +\infty)$*)*

$0 < a < 1$



$$0 < a < 1 \left| \begin{matrix} y < 0 \text{ при } x \in (1;\ +\infty) \\ y > 0 \text{ при } x \in (0;1) \end{matrix} \right.$$

(Якщо $0 < a < 1$*, то* $y < 0$ *на проміжку* $(1;\ +\infty)$*;* $y > 0$ *на проміжку* $(0;1)$*)*

3. Проміжки монотонності

$a > 1$ ***зростає на*** $(0;\ +\infty)$ *(Функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *на проміжку* $(0;\ +\infty)$*)*

$0 < a < 1$ ***спадає на*** $(0;\ +\infty)$ *(Функція* $y = \log_a x$ *є спадною при* $0 < a < 1$ *на проміжку* $(0;\ +\infty)$*)*

III. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 2) $y = \log_3 x$ 3) $y = \log_{0,1} x$

4) $y = \lg x$ 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$ 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$

Розв'язок:

Так як логарифмічна функція зростаюча при $a > 1$, то зростаючими функціями будуть функції: 2, 4, 5, 6

Так як логарифмічна функція спадна при $0 < a < 1$, то спадними функціями будуть функції: 1, 3

№2

Порівняйте:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$ 2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$

3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$ 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}6$

Розв'язок:

1) $\log_{12} 5 < \log_{12} 6$ 2) $\log_5 \frac{1}{2} > \log_5 \frac{1}{3}$

3) $\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 4$ 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}7 > \log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}6$

№3

Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3(x+1)$ 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$

3) $f(x) = \log_4(-x)$ 4) $f(x) = \log_{0,6}(5x - 6 - x^2)$

5) $f(x) = 2\lg x + 3\lg(2-x)$ 6) $f(x) = \lg(x^2 - 1)$

Розв'язок:

1) $\boldsymbol{f(x) = \log_3(x+1)}$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

Відповідь: $D(f) = (-1; +\infty)$

2) $\boldsymbol{f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)}$

Так як $x^2 + 1 > 0$ для $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow D(f) = (-\infty; +\infty)$

Відповідь: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

3) $\boldsymbol{f(x) = \log_4(-x)}$

$-x > 0$

$x < 0$
Відповідь: $D(f) = (-\infty; 0)$

4) $\boldsymbol{f(x) = \log_{0,6}(5x - 6 - x^2)}$

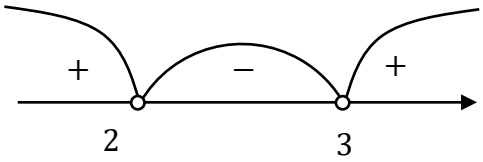
$5x - 6 - x^2 > 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$
2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{vmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{vmatrix}$

**Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок* $(2; 3)$



$2 < x < 3$

Відповідь: $D(f) = (2; 3)$

5) $\boldsymbol{f(x) = 2\lg x + 3\lg(2 - x)}$

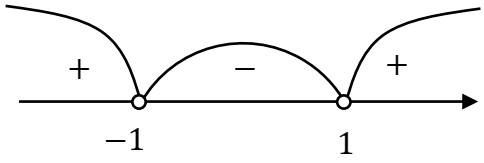
$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$

Відповідь: $D(f) = (0; 2)$

6) $\boldsymbol{f(x) = \lg(x^2 - 1)}$

$x^2 - 1 > 0$
$(x - 1)(x + 1) > 0$

**Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок* $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$



Відповідь: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

№4

Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0{,}5 > \log_a 0{,}4$
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$

**Якщо більшому аргументу відповідає більше значення функції, то функція зростаюча, отже* $a > 1$.

**Якщо меншому аргументу відповідає більше значення функції, то функція спадаюча, отже* $0 < a < 1$.

Розв'язок:

- Що можемо сказати про функцію, якщо більшому аргументу відповідає більше значення функції?

(Ця функція зростаюча)

- Що ми знаємо про основу зростаючої логарифмічної кривої?

$(a > 1)$

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$

$a > 1$

2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$

$0 < a < 1$

3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$

$a > 1$

4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$

$a > 1$

№5

Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$
2) $\log_{0,3} 3$
3) $\log_2 0,27$
4) $\log_\pi 3$

Розв'язок:

- Якщо ми підносимо до від'ємного степеня деяке число, яке число отримаємо в результаті виконаної операції?

$(x^{-n} = \frac{1}{x^n})$

1) $\log_{0,5} 0,6$

$\log_{0,5} 0,6 > 0$

2) $\log_{0,3} 3$

$\log_{0,3} 3 < 0$

3) $\log_2 0,27$

$\log_2 0,27 < 0$

4) $\log_\pi 3$

$\log_\pi 3 > 0$

№6

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $y = \log_2 x,\ \left[\frac{1}{4};\ 8\right]$
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x,\ \left[\frac{1}{16}; 8\right]$
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x,\ \left[\frac{4}{9};\ \frac{81}{16}\right]$

Розв'язок:

Ми знаємо, що логарифмічна крива або монотонно зростає при $a > 1$ *або монотонно спадає при* $0 < a < 1$ *на всій області визначення. Отже логарифмічна крива не може набувати на деякому проміжку свого найбільшого або найменшого значення всередині цього проміжку, тому:*

1) $\boldsymbol{y = \log_2 x}$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$

$y\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

$y(8) = \log_2 8 = 3$

$\max\limits_{\left[\frac{1}{4}; 8\right]} y = y(8) = 3; \min\limits_{\left[\frac{1}{4}; 8\right]} y = y\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

2) $\boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{2}} x}$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$

$y\left(\frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} = 4$

$y(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

$\max\limits_{\left[\frac{1}{16}; 8\right]} y = y\left(\frac{1}{16}\right) = 4; \min\limits_{\left[\frac{1}{16}; 8\right]} y = y(8) = -3$

3) $\boldsymbol{y = \log_{\frac{2}{3}} x}$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$

$y\left(\frac{4}{9}\right) = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) = 2$

$y\left(\frac{81}{16}\right) = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{81}{16}\right) = -4$

$\max\limits_{\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]} y = y\left(\frac{4}{9}\right) = 2; \min\limits_{\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]} y = y\left(\frac{81}{16}\right) = -4$

№7

На якому проміжку найбільше значення функції $\boldsymbol{y = \log_2 x}$ **дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?**

Розв'язок:

Так як логарифмічна крива $y = \log_2 x$ монотонно зростає на всій області визначення, то найбільшого і найменшого свого значення вона буде набувати на кінцях цього проміжку.

$y = \log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$

$y = \log_2 x = -1$

$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Отже, функція $y = \log_2 x$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 3 і найменшого значення, що дорівнює -1 на проміжку $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$

Відповідь: $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$

№8

Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \lg x^2$
2) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$
3) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$
4) $f(x) = \frac{4}{\log_5(10-x)}$

Розв'язок:

1) $\boldsymbol{f(x) = \lg x^2}$

Так як $x^2 > 0$ для $\forall\, x$, за винятком $0 \Rightarrow D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Відповідь: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2) $\boldsymbol{f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x}$

$\operatorname{tg} x > 0$

**Так як для випадку $tg\ x > a$ маємо $arctg\ a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то:*

$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Відповідь: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\lg x}}$

$D(f)$: $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Відповідь: $(0; 1) \cup (1;\ +\infty)$

4) $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{\log_5(10-x)}}$

$D(f)$: $\begin{cases} 10 - x > 0 \\ \log_5(10 - x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 \\ 10 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x \neq 9 \end{cases}$

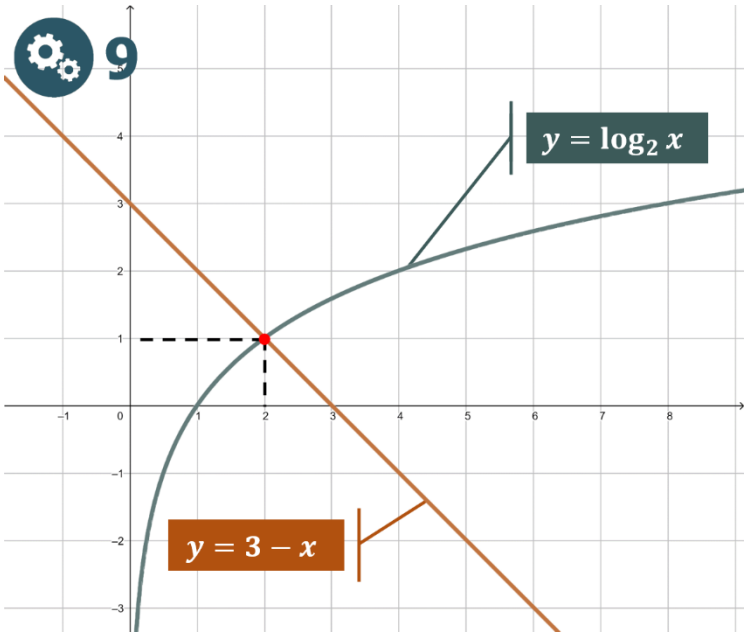
Відповідь: $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$

№9

Розв'яжіть графічно рівняння:

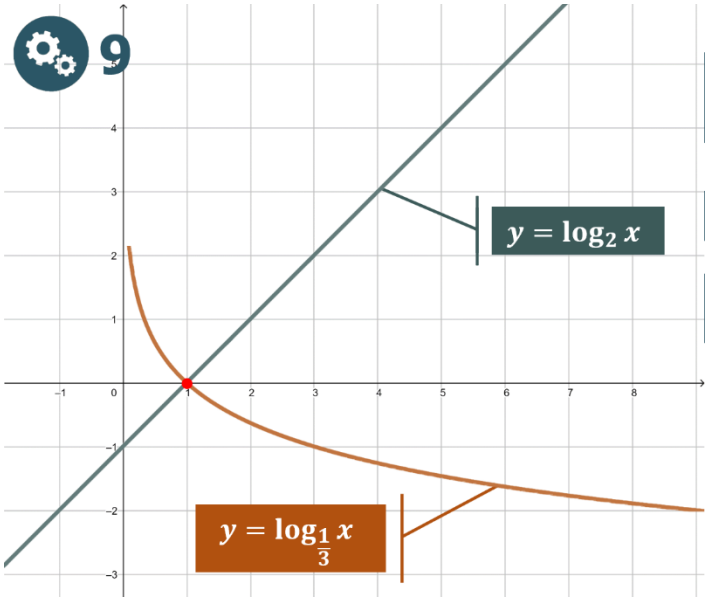
1) $\log_2 x = 3 - x$
2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$
3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$

Розв’язок:



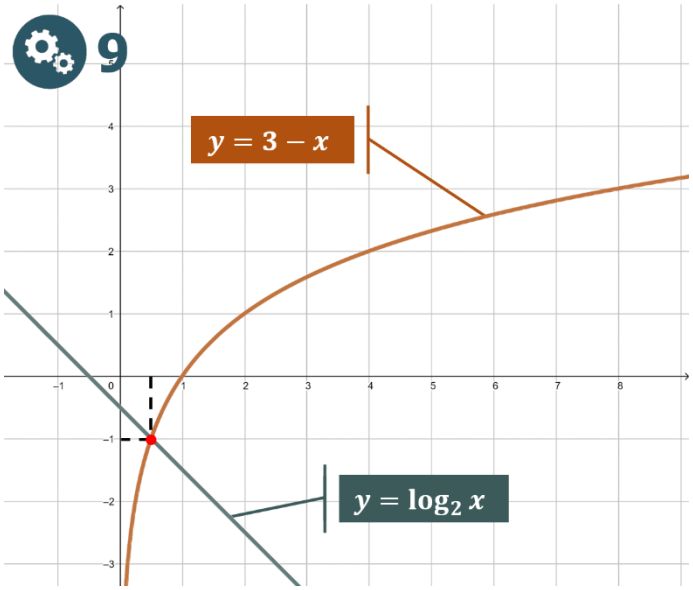
1) $\log_2 x = 3 - x$

Відповідь: 2



2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$

Відповідь: 1



3) $\log_2 x = -x - 0,5$

Відповідь: 0,5

№10

Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$
2) $\log_2 5$
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$
4) $\log_{0,1} 2$

Розв'язок:

1) $\log_3 10$ $\quad 2 < \log_3 10 < 3$ $\quad \log_3 9 < \log_3 10 < \log_3 27$
2) $\log_2 5$ $\quad 2 < \log_2 5 < 3$ $\quad \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ $\quad -2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$ $\quad \log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 3$
4) $\log_{0,1} 2$ $\quad -1 < \log_{0,1} 2 < 0$ $\quad \log_{0,1} 10 < \log_{0,1} 2 < \log_{0,1} 1$

№11

Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg(1 - \sin x)$
2) $y = \sqrt{\lg \cos x}$
3) $y = \frac{1}{\lg(4-x^2)}$
4) $y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6-x}$
5) $y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)$
6) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$
7) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$
8) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$

Розв'язок:

1) $\boldsymbol{y = \lg(1 - \sin x)}$

$1 - \sin x > 0$

$\sin x < 1$

$$\left.\begin{matrix} E(\sin x) = [-1;1] \\ \sin x < 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \text{нам необхідно виключити} \\ \text{всі значення при яких } \sin x = 1 \end{matrix}$$

Отже, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Відповідь: Усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\boldsymbol{y = \sqrt{\lg \cos x}}$

$\lg \cos x \geq 0$

$\cos x \geq 1$

$$\left.\begin{matrix} E(\cos x) = [-1;1] \\ \cos x \geq 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \text{нам необхідно врахувати всі значення} \\ \text{при яких } \cos x = 1 \end{matrix}$$

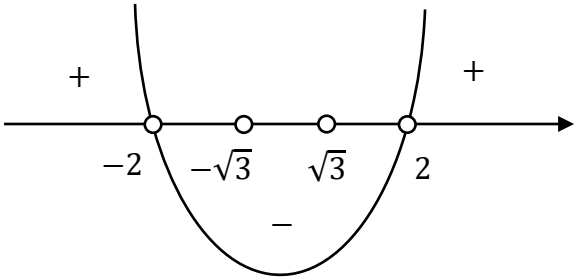
Отже, $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Відповідь: Усі числа виду $\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $\boldsymbol{y = \frac{1}{\lg(4 - x^2)}}$

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ \lg(4 - x^2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 4 \\ 4 - x^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ x^2 \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

$D(y) = (-2;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$

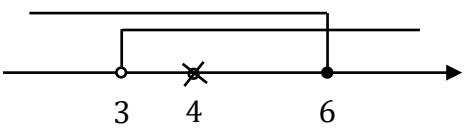


Відповідь: $(-2;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$

4) $\boldsymbol{y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6 - x}}$

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \log_6(x - 3) \neq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x - 3 \neq 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 4 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$D(y) = (3;\ 4) \cup (4; 6]$

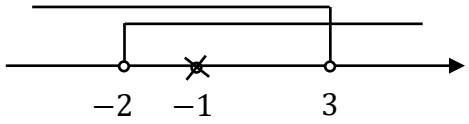


Відповідь: $(3;\ 4) \cup (4; 6]$

5) $\boldsymbol{y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)}$

$$\begin{cases} x+2>0 \\ \lg(x+2)\neq 0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x+2\neq 1 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \\ x<3 \end{cases}$$

$D(f) = (-2;\ -1) \cup (-1; 3)$

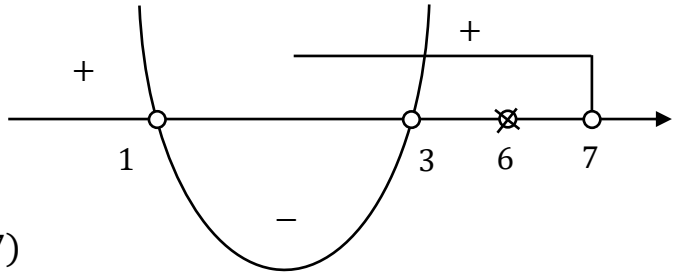


Відповідь: $(-2;\ -1) \cup (-1; 3)$

6) $\boldsymbol{y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}}$

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ 7-x>0 \\ \log_5(7-x)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)>0 \\ x<7 \\ 7-x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \text{ або } x>3 \\ x<7 \\ x\neq 6 \end{cases}$$

$D(f) = (-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$

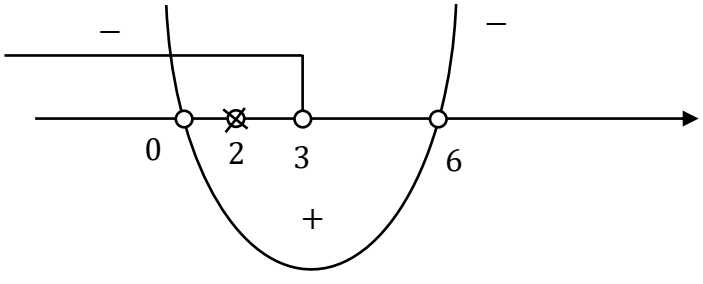


Відповідь: $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$

7) $\boldsymbol{y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}}$

$$\begin{cases} 6x-x^2>0 \\ 3-x>0 \\ \lg(3-x)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(6-x)>0 \\ x<3 \\ 3-x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<6 \\ x<3 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$D(y) = (0; 2) \cup (2; 3)$

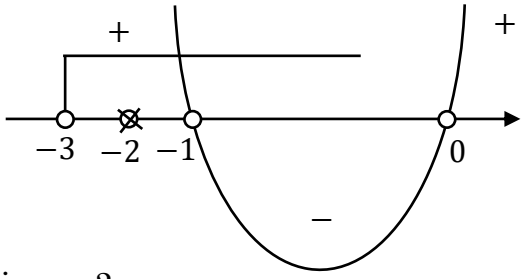


Відповідь: $(0; 2) \cup (2; 3)$

$\boldsymbol{y = \log_{x+3}(x^2 + x)}$

$$\begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ або } x > 0 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$D(y) = (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$



Відповідь: $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$

IV. Підсумок уроку

- Яку функцію називають логарифмічною?
- Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$?
- Сформулюйте властивості логарифмічної функції при $a > 1$
- Сформулюйте властивості логарифмічної функції
- при $0 < a < 1$
- Поясніть, як ураховуючи зростання та спадання логарифмічної функції порівняти значення:

1) $\log_4 3 \ \ i \ \ \log_4 5$ 2) $\log_{\frac{1}{4}} 7 \ \ i \ \ \log_{\frac{1}{4}} 24$

V. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.27-29) Виконати № 5.8; 5.10; 5.12; 5.14; 5.18; 5.20; 5.28	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §5 Виконати № 5.4; 5.8; 5.12; 5.14; 5.18; 5.22; 5.28; 5.32; 5.34	Істер О.С.
Опрацювати §4 (п.4.1) Виконати № 4.1.1 (2, 4, 6, 10); 4.1.2 (4, 5); 4.1.4 (2, 4, 5); 4.1.5 (2, 4); 4.1.6 (3, 2)	Нелін Є.П.
Опрацювати §3 (ст.24-25) Виконати № 115; 118; 137; 138	Бевз Г.П.

ВИСНОВКИ

Формування наукового світогляду учнів неможливе без вивчення математичних методів пізнання, математичного моделювання та зв'язків математики з реальністю. У загальноосвітніх школах алгебра є обов'язковою дисципліною, яка сприяє розвитку наукового стилю мислення та творчих здібностей учнів. Вивчення алгебри і початків аналізу сприяє розвитку раціонального мислення з характерними рисами, такими як обґрунтованість, критичність та алгоритмічність. Воно також сприяє розвитку уяви та інтуїції, які є важливими складовими творчої діяльності особистості. Це передбачає застосування принципу гуманізації освіти та переорієнтацію процесу навчання на розвиток особистості учня. Оновлення традиційної системи навчання повинно ґрунтуватись на індивідуально-диференціальному, особистісно-орієнтованому підході до навчання.

З метою вдосконалення оцінювання навчальних досягнень учнів, було введено нові критерії, що передбачають застосування рівного підходу та технології рівневої диференціації. Ця технологія включає різноманітні методи та форми навчання, що враховують особливості, потреби та інтереси кожного учня. Розв'язання проблем загальної освіти невід'ємно пов'язане з розробкою та застосуванням нових методичних систем, які максимально враховують індивідуальні інтереси та здібності учнів, сприяють їх всебічному розвитку та забезпечують диференційований підхід до організації навчально-виховного процесу.

Аналогічно тому, як учень не може творчо оволодіти знаннями поза активною розумовою працею, так і не може бути повноцінного розвиваючого функціонування проблемної ситуації поза пошуково- діалогічною діяльністю учня. У зв’язку з цим особливої ваги набувають такі слова В.О. Сухомлинського: «Одним з небезпечних джерел морального інфантилізму є те, що знання беруться в готовому вигляді а основна розумова діяльність при цьому – заучування. Запобігання цій небезпеці – в добуванні знань. Навчання стає працею за тієї умови, коли учень самостійно добуває знання». [21]

Основний шлях включення учнів у творчу навчальну працю проходить через застосування проблемних ситуацій, причому зростаючої трудності, масштабності і діалогічності. Це водночас і реальний спосіб оптимізації навчально-виховного процесу в комплексі його основних функцій – освітні, розвиваючі, виховуючи, які в цьому разі нероздільно поєднуються між собою.

Більшість дидактичних матеріалів з алгебри і початків аналізу не задовольняють сучасне проблемне навчання.

В курсі математики провідна роль належить не тільки поясненню теоретичного матеріалу, а й розв'язуванню задач, тому існує необхідність створення методики розробки і використання проблемного викладу матеріалу та розв'язання задач.

Аналіз матеріалу підручників з алгебри і початків аналізу показав, що вони не виражають ідею проблемного викладу матеріалу.

Оскільки стосовно подачі проблемним методом матеріалу виникають деякі суперечності, то використання діючих підручників в умовах проблемного навчання не завжди є доцільним. Проведений аналіз показав, що існує необхідність створення такої методики.

Взявши це до уваги, ми розробили методику проблемного вивчення теоретичного матеріалу та методику розв'язування задач проблемним методом.

Запропонована методика дозволяє вчителю здійснювати проблемне навчання учнів і допомагає той спосіб організації навчального процесу, який оптимальним для учнів даного класу, школи.

Отже, сучасна школа орієнтована на диференціальний підхід до організації, навчання продиктована освітньою реформою, є на нашу думку, доцільною і необхідною та вимагає створення новітніх методичних розробок і написання сучасних підручників, які б найбільшою мірою відповідали сучасним принципам організації навчально-виховного процесу в школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. - 288 с.

2. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184-189.

3. Бриштан Т. Проблемне навчання на уроках математики //Газета «Математика». – 2007. – № 13. – С. 20-22.

4. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти /М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. - К.: УОВЦ «Оріон», 2018. - 288 с.

5. Василенко А. В. Психолого-педагогічні умови розвитку просторового мислення учнів /А. В. Василенко //Наука і школа. - 2013. - № 12 - С. 69-72.

6. Забранський В., Забранська Н. Організація письмових самостійних та контрольних робіт при диференційованому навчанні математики //Математика в школі. - 2000. - №5. - с. 30-33.

7. Зеленська О. П. Взаємозв’язок проблемного навчання, мислення та мови //Педагогічний альманах. – 2017. – Вип. 33. – С. 26-30.

8. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О.С. Істер. - Київ: Генеза, 2018. - 384 с.

9. Кафтанова О. В. Методи проблемного навчання на уроках математики як засіб розвитку пізнавального інтересу учнів. – Харків, 2024. – 71 с.

10. Кафтанова О. Особливості застосування методів проблемного навчання на уроках математики //Науково-дослідна робота студентів як чинник удосконалення професійної підготовки майбутнього вчителя: зб. наук. пр. – Харків, 2023. – Вип. 22. – С. 56–63.

11. Королюк О.М., Прус А.В. Методика навчання математики в старшій школі: навчально-методичний посібник. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. - 61 с.

12. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: Гімназія, 2018. - 256 с.

13. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: http://surl.li/xxthjt

14. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Рівень стандарту). URL: http://surl.li/xxthjt

15. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: http://surl.li/xxthjt

16. Павленко В.В. Методи проблемного навчання //Нові технології навчання: наук.-пед. зб. //Інститут інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки, Академія міжнародного співробітництва з креативної педагогіки. – Київ, 2014. – Вип.81 (спецвипуск). – 84 с. – С. 75-79.

17. Петрук Л. П. Становлення і розвиток проблемного навчання у педагогіці //Оновлення змісту, форм та методів навчання і виховання в закладах освіти. – 2014. – Вип. 8. – С. 15-18.

18. Розвиток творчих здібностей у процесі навчання математики: зб. метод. матеріалів [Г. В. Мовчан та ін.; уклад. Т. В. Свєтлова]. - Харків: Основа, 2019. – 91 с.

19. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. - Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.

20. Созанська О. Проблемне навчання – основа розвитку творчого мислення учня //Заст. директора шк. – 2013. – № 8. – С. 30–39.

21. Сухомлинський В.О. Проблеми виховання всебічно розвиненої особистості //Вибрані твори: У 5 т. - Київ, 1976.

22. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: монографія /Н.А. Тарасенкова. - Черкаси: Відлуння-плюс, 2002. - 400 с.

23. Теслюк В. М. Сутність та особливості проблемного навчання //Вісник Національного університету оборони України. – 2012. – Вип. 6. – С. 167-170.

24. Фіцула М. М. Педагогіка: навч. посіб. – К.: Академія, 2001. – 528 с.

25. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальн. освіт, навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 272 с.

26. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальн. освіт, навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 311 с.

27. Ямкова Л. І. Проблемний метод на уроці //Математика в школах України. – 2010 р. – № 30. – С. 18-19.

28. Янц Н.Д. Класифікація проблемних ситуацій як напрям наукових пошуків //Засоби навчальної та науково-дослідної роботи: Зб. наук. пр. – Харків: Харківський національний педагогічний університет імені Г.С.Сковороди, 2008. – Вип.27. – С.149-155.