ДЕРЖАВНА ФІСКАЛЬНА СЛУЖБА УКРАЇНИ
УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

СЕРІЯ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ»
Заснована у 2016 році

Б. Д. Пацай

Дослідження операцій: практикум

Навчальний посібник

Ірпінь
2017

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
П 21

Рекомендовано до друку Вченою радою
Університету державної фіскальної служби України
(протокол № 5 від 27 квітня 2017 року)

Рецензенти:

Семко Микола Миколайович, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України;

Моцний Федір Васильович, д.ф.-м.н., професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, завідувач кафедри прикладної математики Національної академії статистики обліку та аудиту.

Пацай Б. Д.

П 21 Дослідження операцій: практикум : навчальний посібник / Б. Д. Пацай ; Державна фіскальна служба України, Університет державної фіскальної служби України. – Ірпінь, 2017. – 212 с. – (Серія «На допомогу студенту УДФСУ», т. 14).

ISBN 978-966-337-452-9

У навчальному посібнику розкривається зміст, структура, методи та підходи розв'язування прикладних економічних задач дослідження операцій.

Структура навчального посібника відповідає робочій навчальній програмі, вирізняється системністю: його зміст поділений на окремі теми, кожна з яких містить теоретичну довідку, приклади, завдання з відповідними інструкціями та задачі для самостійного виконання. Особливу увагу приділено аналізу результатів побудованої моделі.

Призначений для викладачів, студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для усіх бажаючих, кого цікавить розв'язок прикладних питань дослідження операцій засобами MS Excel.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

© Пацай Б. Д., 2017
© Університет державної фіскальної служби України, 2017

ISBN 978-966-337-452-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 5
Тема 1. Лінійне програмування 7
Лабораторна робота 1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у Microsoft Excel 7
Лабораторна робота 2. Розв'язування транспортної задачі із штрафними санкціями. 17
Лабораторна робота 3. Транспортна задача з фіксованими доплатами. 28
Лабораторна робота 4. Багатопродуктова модель ТЗ з незалежними та залежними продуктами 31
Тема 2. Дискретне програмування 36
Лабораторна робота 5. Дискретне програмування. Задача призначення на посаду. 36
Лабораторна робота 6. Задача про розкрій матеріалу 41
Лабораторна робота 7. Розв'язування задачі комівояжера за допомогою симплекс-методу 46
Лабораторна робота 8. Розв'язування задачі комівояжера методом «гілок і границь» дискретного програмування та еволюційним методом 55
Тема 3. Нелінійне програмування 65
Лабораторна робота 9. ЗНП. Оптимальний портфель інвестицій. Модель Марковіца 65
Лабораторна робота 10. Оптимальний портфель інвестицій. Модель Шарпа. 74
Лабораторна робота 11. Нелінійне програмування. Оптимальний план виробництва. 82
Лабораторна робота 12. Задача управління запасами. 84
Тема 4. Динамічне програмування 98
Лабораторна робота 13. Динамічне програмування. Задача про оптимальний шлях. 98
Лабораторна робота 14. Динамічне програмування. Задача про заміну обладнання. 108
Лабораторна робота 15. Динамічне програмування. Оптимальна дивідендна політика. 113

Тема 5. Стохастичне програмування 116
Лабораторна робота 16. Задачі стохастичного програмування 116
Тема 6. Мережне планування 130
Лабораторна робота 17. Потік мінімальної вартості. 130
Лабораторна робота 18. Критичний шлях. 142
Тема 7. Системи масового обслуговування 146
Лабораторна робота 19. Обчислення основних параметрів системи масового обслуговування. 146
Лабораторна робота 20. Аналіз витрат у системах масового обслуговування. 171
Тема 8. Аналіз результатів виконання лабораторних робіт 176
1. Звіт зі стійкості 176
2. Перевірка адекватності та корегування моделі 177
Індивідуальні завдання 179
Тести 183
Рекомендована література 192
Термінологічний словник 194
Предметний покажчик 200
Додатки 201

ПЕРЕДМОВА

Інформатизація суспільства потребує висококваліфікованих спеціалістів, які б володіли сучасними засобами інформаційних технологій. В умовах інтеграції України у світову економіку виникає необхідність збільшення оптимізації процесу управління, реструктуризації підприємств, збільшення ефективності виробництва, зменшення витрат. А отже, постає гостра потреба у висококваліфікованих кадрах, які володіють навичками роботи із використанням сучасних математичних методів прийняття рішень.

Підготовка фахівців у сфері управління організаційними системами, насамперед підприємствами, підвищення ефективності їх функціонування можливе лише за умови формування у майбутніх фахівців теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих математичних методів. Навчальний посібник «Дослідження операцій: практикум» ставить за мету формування у студентів практичних навичок побудови моделей, їх аналізу, реалізації та дослідження з використанням сучасних програмних засобів, застосування у прийнятті управлінських рішень.

Він містить лабораторні роботи, які тематично згруповані у 7 тем. Кожна із лабораторних робіт має теоретичну довідку, що необхідна для формалізації та розв'язання задач відповідного типу у середовищі MS Excel, а також приклади розв'язання та методичні рекомендації. Значна увага приділяється особливостям розв'язування задач мережевого та динамічного програмування. Містяться також індивідуальні завдання та завдання для самостійної роботи.

Курс «Дослідження операцій: практикум» – один з фундаментальних курсів у процесі формування сучасного фахівця зі спеціальності «Економіка». Він має теоретичне, методологічне та конкретне прикладне значення, в якому найбільш чітко реалізується ідея математичного моделювання.

Для розв'язання практичних економічних задач дослідження операцій має цілий арсенал математичних засобів. До них

належать: математичні методи оптимізації – від найпростіших до сучасних, таких як лінійне програмування, принцип динамічного програмування, задачі багатокритеріальної оптимізації тощо.

Серед цих методів та задач у посібнику, адресованому студентам, які навчаються на економічних спеціальностях, висвітлюються найуживаніші в економічних, гуманітарних та технічних дослідженнях та їх практичне розв'язування за допомогою персонального комп'ютера. Для розуміння тексту студентові достатньо володіти основами вищої математики, теорії ймовірності та статистики і мати базові навички роботи із табличним процесором MS Excel.

ТЕМА 1
ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лабораторна робота 1
Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у Microsoft Excel

Теоретичні відомості

Система лінійних алгебраїчних рівнянь – система рівнянь, кожне рівняння в якій є лінійним алгебраїчним рівнянням першого ступеня.

У загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд [1,3]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при змінних (матриця системи);

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець (вектор) вільних членів;

$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець (вектор) невідомих.

Систему лінійних рівнянь можна записати у матричному вигляді, як

$$A \cdot X = B, \quad (1.2)$$

Якщо виконується умова

$$detA = |A| \neq 0,$$

то система має один розв'язок.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь можливі три випадки:

а) система має єдиний розв'язок;

б) система має безліч розв'язків;

в) система не має розв'язків.

Сумісна СЛАР – система, яка має принаймні один розв'язок.

Несумісна СЛАР – система, яка не має розв'язків.

Визначена СЛАР – система, яка має точно один розв'язок.

Невизначена СЛАР – система, яка має більше ніж один розв'язок.

Розглянемо детальніше такі випадки:

- **При m<n**, якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими є сумісною, то вона не визначена і має нескінченну кількість розв'язків;
- **При m=n**, система (1.1) буде мати n лінійних рівнянь з n невідомими. Тоді розв'язок системи можна отримати методом оберненої матриці, методом Крамера тощо.

Відповідь на питання сумісності системи дає теорема Кронекера-Капеллі.

СЛАР має розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг її матриці А дорівнює рангу її розширеної матриці B=[A| B].

Причому система має єдиний розв'язок, якщо ранг дорівнює кількості невідомих, і нескінченно багато розв'язків, якщо ранг менший кількості невідомих.

Метод оберненої матриці розв'язування системи лінійних рівнянь

Помножимо ліву і праву частину (1.2) на обернену матрицю A^{-1}, тоді $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, де $A^{-1} \cdot A = E$(одинична матриця).

Після необхідних перетворень розв'язок лінійної системи методом оберненої матриці матиме вигляд

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.3)$$

Метод Крамера розв'язування системи лінійних рівнянь

Цей метод базується на формулах:

$$X_i = |\Delta i| / |A|, \qquad (1.4)$$

де $|\Delta i|$ – визначник матриці, одержаної з матриці А заміною і–го стовпця на стовпець вільних членів В;

$|A|$ – визначник матриці А.

$m>n$.

У випадку, якщо $m>n$ і система є сумісною, то матриця А має принаймні $m-n$ лінійно незалежних рядків. Тут розв'язок може бути отримано добором n будь-яких лінійно незалежних рівнянь і застосуванням формули (1.3).

Метод найменших квадратів

Однак із застосуванням комп'ютера зручніше використовувати більш загальний підхід – метод найменших квадратів. Для цього обидві частини матричного рівняння системи (1.2) множимо ліворуч на транспоновану матрицю системи A^T:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B.$$

Потім обидві частини рівняння множимо ліворуч на матрицю $(A^T \cdot A)^{-1}$. Якщо ця матриця існує, то система визначена.

З врахуванням того, що $(A^T \cdot A)^{-1} \times (A^T \cdot A) = E$, одержуємо:

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B. \qquad (1.5)$$

Матричне рівняння (1.5) є розв'язком системи m лінійних рівнянь з n невідомими при $m>n$.

Метод Гауса

Одним із найпоширеніших методів вирішення систем лінійних рівнянь є метод Гауса. Цей метод (який також називають методом послідовного виключення невідомих) відомий у різних варіантах вже більше 2000 років.

Обчислення за допомогою методу Гауса полягають у послідовному виключенні невідомих із системи для перетворення її до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Обчислення значень невідомих здійснюють на етапі зворотного ходу.

Схема єдиного ділення

Розглянемо спочатку найпростіший варіант методу Гауса, так званий схемою єдиного ділення.

Прямий хід складається з n - 1 кроків виключення.

1-й крок. Метою цього кроку є виключення невідомого x_1 з рівнянь з номерами i = 2, 3,..., n. Припустимо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Будемо називати його головним елементом 1-го кроку.

Знайдемо величини

$$q_{i1} = a_{i1}/a_{11} \ (i = 2, 3, \ldots, n),$$

так звані множники 1-го кроку. Віднімемо послідовно з другого, третього,..., n-го рівнянь системи перше рівняння, помножене відповідно на q_{21}, q_{31},..., q_{n1}. Це дозволить перетворити на нуль коефіцієнти при x_1 в усіх рівняннях, крім першого. В результаті отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},\\
&a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)},
\end{aligned}$$

в якій $a_{ij}^{(1)}$ и $b_{ij}^{(1)}$ обчислюються за формулами:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - q_{i1}a_{1j}, \ b_i^{(1)} = b_i - q_{i1}b_1.$$

2-й крок. Метою цього кроку є виключення невідомого x_2 з рівнянь з номерами i = 3, 4, ..., n. Нехай $a_{22}^{(1)} \neq 0$, де $a_{22}^{(1)}$ – коефіцієнт, який називають головним (або ведучим) елементом 2-го кроку. Обчислимо множники 2-го кроку:

$$q_{i2} = a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \ (i = 3, 4, \ldots, n)$$

і віднімемо послідовно з третього, четвертого,..., n-го рівняння системи друге рівняння, помножене відповідно на q_{32}, q_{42},..., q_{m2}. У результаті отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \ ,\\
&a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} = b_2^{(1)},\\
&a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Тут коефіцієнти $a_{ij}^{(2)}$ і $b_{ij}^{(2)}$ обчислюються за формулами:

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - q_{i2}a_{2j}^{(1)}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - q_{i2}b_2^{(1)}$.

Аналогічно проводяться інші кроки. Опишемо черговий k-й крок.

k-й крок. У припущенні, що головний (провідний) елемент k-го кроку $a_{kk}^{(k-1)}$ відмінний від нуля обчислимо множники k-го кроку:

$$q_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \ (i = k + 1, \ldots, n)$$

і віднімемо послідовно з (k + 1) -го,..., n-го рівнянь отриманої на попередньому кроці системи k-е рівняння, помножене відповідно на $q_{k+1,k}, q_{k+2,k}, \ldots, q_{nk}$.

Після (n - 1) -го кроку виключення отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},\\
&a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)},
\end{aligned}$$

матриця $\mathbf{A}^{(n-1)}$ якої є верхньою трикутною. На цьому обчислення прямого ходу закінчуються.

Зворотний хід. З останнього рівняння системи знаходимо x_n. Підставляючи знайдене значення x_n у передостаннє рівняння, отримаємо x_{n-1}. Здійснюючи зворотну підстановку, далі послідовно знаходимо $x_{n-1}, x_{n-2},\ldots, x_1$. Обчислення невідомих тут проводяться за формулами

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)},$$

$$x_k = (b_n^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(k-1)}x_n) / a_{kk}^{(k-1)}, \ (k = n - 1, \ldots, 1).$$

Необхідність вибору головних елементів. Зауважимо, що обчислення множників, а також зворотна підстановка вимагають поділу на головні елементи $a_{kk}^{(k-1)}$. Тому якщо один з головних елементів виявляється рівним нулю, то схема єдиного ділення не може бути реалізована. Очевидно, що і в ситуації, коли всі головні елементи відмінні від нуля, але серед них є близькі до нуля, можливе неконтрольоване зростання похибки.

Метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю (схема часткового вибору)

Опис методу. На k-му кроці прямого ходу коефіцієнти рівнянь системи з номерами i = k + 1,..., n перетворюються за формулами:

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - q_{ik}a_{kj}$, $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - q_{ik}b_k^{(k-1)}$, $i = k + 1, \ldots, n$.

Інтуїтивно зрозуміло, що щоб уникнути сильного зростання коефіцієнтів системи та пов'язаних з цим помилок, не можна допускати появи великих множників q_{ik}.

У методі Гауса з вибором головного елемента по стовпцю гарантується, що $|q_{ik}| \leq 1$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ і $i = k + 1, \ldots, n$. Відмінність цього варіанта методу Гауса від схеми єдиного ділення полягає в тому, що на k-му кроці виключення як головний елемент вибирають максимальний по модулю коефіцієнт a_{ikk} при змінній x_k у рівняннях з номерами $i = k + 1, \ldots, n$. Потім відповідне обраному коефіцієнту рівняння з номером i_k міняють місцями з k-м рівнянням системи для того, щоб головний елемент зайняв місце коефіцієнта $a_{kk}^{(k-1)}$. Після цієї перестановки виключення невідомого x_k здійснюють, як у схемі єдиного ділення.

Метод Гауса з вибором головного елемента по всій матриці (схема повного вибору)

У цій схемі допускається порушення природного порядку виключення невідомих.

На 1-му кроці методу серед елементів a_{ij} визначають максимальний по модулю елемент $a_{i_1j_1}$. Перше рівняння системи і рівняння з номером i_1 міняють місцями. Далі стандартним чином виробляють виключення невідомого x_{j_1} з усіх рівнянь, крім першого.

На k-му кроці методу серед коефіцієнтів $a_{ij}^{(k-1)}$ при невідомих у рівняннях системи з номерами $i = k, \ldots, n$ вибирають максимальний за модулем коефіцієнт $a_{ikjk}^{(k-1)}$. Потім k-е рівняння і рівняння, що містить знайдений коефіцієнт, міняють місцями і виключають невідоме x_{jk} з рівнянь з номерами $i = k + 1, \ldots, n$.

На етапі зворотного ходу невідомі обчислюють у такому порядку:

$$x_{jn}, x_{jn-1}, \ldots, x_{j1}.$$

Завдання

Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

де b_1 – порядковий номер студента в журналі, b_2 – день місяця народження студента, b_3 – місяць народження студента, матриця А – довільні числа.

Хід роботи

Завдання 1

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

1. Запустити програму Microsoft Excel.
2. Переконатись, що система має розв'язок (знайти визначник матриці **MDETERM).**
3. Перевірте, чи СЛАР є сумісною.
4. Побудуйте електронну таблицю та оформіть її таким чином:

A13 | =MDETERM(A3:C5)

	A	B	C	D	E
1	Розвязок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці				
2	Матриця коефіцієнтів			Вільні члени	
3	-5	3	14		2
4	4	1	3		-2
5	56	-1	18		2
6					
7	Обернена матриця				Розв'язок
8	-0,0319635	0,1035008	0,0076104		-0,255707763
9	-0,1461187	1,3302892	-0,108067		-3,168949772
10	0,0913242	-0,2480974	0,0258752		0,730593607
11					
12	Визначник				
13	-657				

Рис. 1.1. Зображення аркуша розв'язування СЛАР методом оберненої матриці

• Знайти обернену матрицю до матриці А, використовуючи функцію – **MINVERSE.**

5. Знайти розв'язок системи, використовуючи функцію **MMULT.**

Важливо. Для роботи з масивами в формулах необхідно натиснути **Ctrl+Shift+Enter.**

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

1. Побудувати електронну таблицю на новому аркуші та оформити відповідно до рис. 1.2.

2. Знайти визначник для матриці коефіцієнтів.

3. Знайти визначник для матриці 1, яка одержана із матриці А заміною першого стовпця на стовпець вільних членів.

4. Аналогічно п.3. отримати значення визначника матриці 2 та матриці 3.

5. Знайти розв'язок системи відповідно до (1.4).

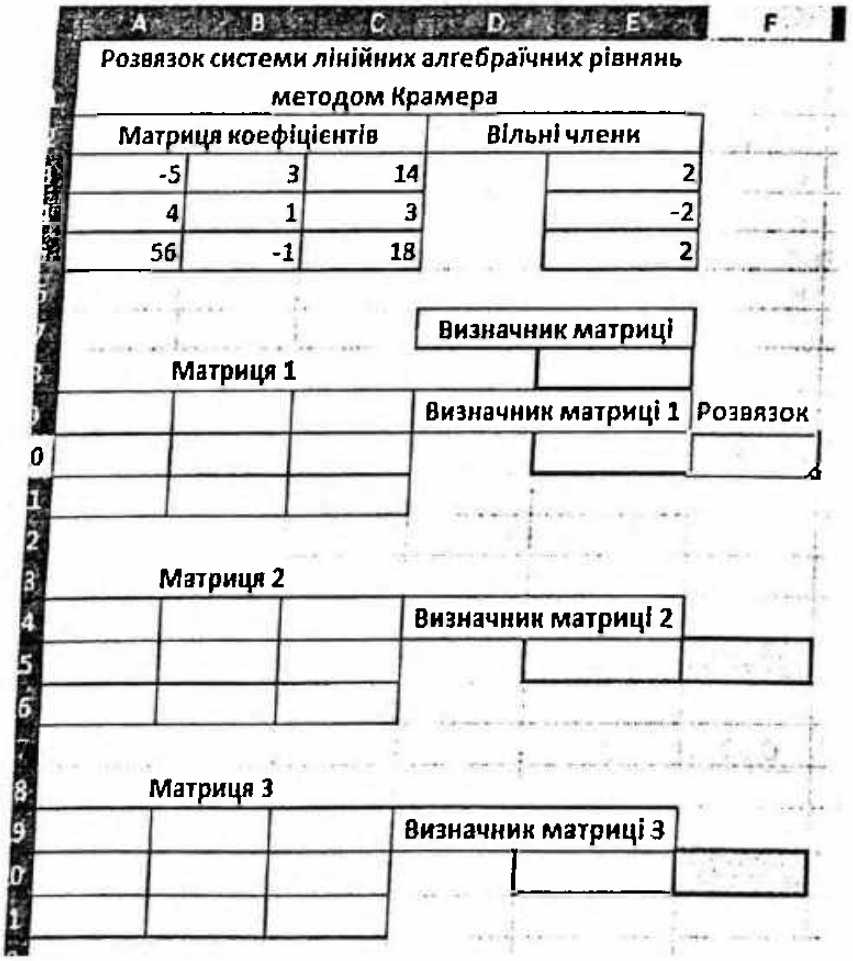


Рис. 1.2. Зображення аркуша розв'язування СЛАР методом Крамера

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом найменших квадратів

1. Побудувати електронну таблицю на новому аркуші та оформити відповідно до рис. 1.3.

2. Знайти транспоновану матрицю до матриці коефіцієнтів, використовуючи функцію – **TRANSPOSE**.

3. Знайти добуток матриці коефіцієнтів на транспоновану матрицю.

4. Знайти обернену матрицю до матриці одержаної в п. 3.

5. Знайти добуток транспонованої матриці, на матрицю вільних членів.

6. Знайти розв'язок системи множенням матриць, отриманих у п. 4 і п. 5.

	A	B	C	D	E
1	Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом найменших квадратів				
2	Матриця коефіцієнтів			Вільні члени	
3	-5	3	14		2
4	4	1	3		-2
5	56	-1	18		2
6					
7	Транспонована матриця				
8					
9					Добуток трансп.матриці на матрицю вільних членів
10					
11					
12	Добуток матриць				
13					
14					
15					
16					
17	Обернена матриця				Розв'язок
18					
19					
20					

Рис. 1.3. Зображення аркуша розв'язування СЛАР методом найменших квадратів

7. Порівняти розв'язки, отримані різними методами.

Завдання 2

Розв'язати СЛАР на окремому аркуші відповідно до варіанта трьома розглянутими методами та методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15; \\ x_1 - x_3 + 7x_4 = 26; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -10; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 20; \\ x_1 + x_3 - x_4 + 10x_5 = 50 \end{cases}.$$

Проаналізувати результати, отримані трьома способами, та вказати на найпростіший із них. Обґрунтувати свій вибір.

Контрольні питання

1. Які три випадки можливі при розв'язуванні системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?

2. У чому полягає метод оберненої матриці розв'язування системи лінійних рівнянь?

3. У чому полягає метод Крамера розв'язування системи лінійних рівнянь?

4. У чому полягає метод найменших квадратів розв'язування системи лінійних рівнянь?

5. У чому полягає розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гауса?

Лабораторна робота 2
Розв'язування транспортної задачі зі штрафними санкціями

Теоретична довідка

Загальний вигляд задачі лінійного програмування [2]

Потрібно знайти вектор $\mathbf{X}^*=(x_1,x_2,...,x_n)$, який забезпечує найбільше (max) або найменше (min) значення функції:

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \Rightarrow \max(\min) \qquad (2.1)$$

за виконання умов:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1;\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2;\\ &\ldots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m; \qquad (2.2)\\ &x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots,x_n\ge 0. \end{aligned}$$

Числа $c_i\ \forall\, i=\overline{1,n}$, $a_{ij}\ \forall i,j$, $b_i\ \forall\, i=\overline{1,m}$ – довільні дійсні числа.

Будемо вважати, що завжди в (2.1) стоїть знак «max». Це припущення не зменшує загальності міркувань, адже заміною змінних $L'=-L$ будь-яку ЗЛП можна завжди звести до процедури максимізації L, якщо для L у (2.1) стояла вимога її мінімізації. Так само в (2.2) множенням на «–» правої та лівої частини нерівності, у якій стоїть знак «≥», можна досягнути стандарту (2.2). Якщо в нерівностях (2.2) є знак «=«, наприклад, при i_0-ій нерівності, тоді замість однієї рівності можна записати дві еквівалентні нерівності:

$$\begin{cases} a_{i01}x_1+a_{i02}x_2+\ldots+a_{i0n}x_n \le b_1;\\ -a_{i01}x_1-a_{i02}x_2-\ldots-a_{i0n}x_n \le -b_1. \end{cases}$$

Задачу (2.2), (2.3) можна розв'язати за допомогою симплекс-методу [3], а задачі малої розмірності (n=2,3) – графічно.

Симплекс-метод

Алгоритм симплекс-методу дозволяє повністю дослідити ЗЛП. Якщо розв'язок існує, то його буде знайдено симплекс-процедурою, якщо розв'язку немає, то в процесі реалізації

симплекс-процедури буде встановлено факт його відсутності. Схема розв'язання має такий вигляд:

I. Згідно з [3] записуємо ЗЛП (5.1), (5.2) у нормальному стандартному вигляді.

$$
\begin{aligned}
&L' = 0-(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) \Rightarrow \min;\\
&y_1 = b_1-(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n);\\
&y_2 = b_2-(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n);\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&y_m = b_m-(a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n);\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

II. Будуємо симплекс-таблицю.

Таблиця 2.1

Симплекс-таблиця

	b	x_1	x_2	x_3	...	x_n
L'	0	c_1	c_2	c_3	...	c_n
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
y_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
...	...	...	...	...	...	...
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}

Змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ назвемо базовими змінними; змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вільними змінними. Узагалі кажучи, змінні, які стоять у лівій частині, будемо називати базовими, ті, що стоять у правій верхній частині, – вільними.

Суть симплекс-методу полягає у взаємозаміні базових змінних на вільні за спеціальною (описаною нижче) процедурою для одержання спочатку допустимого, а потім і оптимального розв'язку задачі. Розв'язок називатимемо допустимим, якщо він задовольняє нерівності (2.2).

III. Шукаємо допустимий розв'язок. Для цього побудуємо нову симплекс-таблицю 2.2 відповідно до таких правил:

1. Беремо будь-який від'ємний елемент у першому стовпчику таблиці 2.1 (за винятком першого). Якщо такого елемента немає, переходимо до виконання пункту IV.

Нехай таким елементом є $b_m < 0$.

2. У рядку, де розміщений вибраний елемент (у цьому прикладі рядок m), вибираємо будь-який від'ємний елемент (якщо такий є). Стовпчик з цим елементом призначаємо базовим. Якщо від'ємного елемента в рядку немає, вибираємо інший рядок з від'ємним елементом у першому стовпчику. Якщо у всіх рядках від'ємних елементів немає, то й задача розв'язку не має. Область порожня.

3. У базовому стовпчику перебираємо всі елементи (крім першого), які мають однакові знаки з відповідними елементами першого стовпчика. Для них обчислюємо відношення $\frac{b_k}{a_{kj_0}} = d_k$, j_0 – номер базового стовпчика. Нехай $j_0 = 2$ $min\frac{b_k}{a_{kz}} = \frac{b_m}{a_{m2}}$, тоді m рядок призначаємо базовим, а елемент am2, який стоїть у клітинці, де перетинаються базовий рядок і базовий стовпчик, – базовим елементом. Проводимо взаємозаміну вільної та базової змінних, які відповідають базовому стовпчику та базовому рядку.

4. У базовій клітинці таблиці 2.2 записуємо елемент, обернений до відповідного елемента табл. 2.1.

5. Усі елементи базового рядка ділимо на цей елемент, але обчислень ніяких не виконуємо; b_m, a_{m1}, a_{m3}, … a_{mn} виписуємо з таблиці 2.1.

6. Усі елементи базового стовпчика ділимо на базовий елемент, а результат записуємо з протилежним знаком.

7. Усі інші елементи табл. 2.2 утворюються як результат додавання відповідного елемента табл. 2.1 та добутку відповідного елемента базового стовпчика табл. 2.2 на чисельник відповідного елемента базового рядка тієї самої таблиці.

8. Після заповнення табл. (2.2) повторюємо процедуру, починаючи з п. 1, використовуючи як вихідну табл. 2.2.

9. Процедуру повторюємо доти, доки в першому стовпчику останньої таблиці (за винятком першого, знак якого не враховується) не зникнуть від'ємні елементи.

Таблиця 2.2

Симплекс-таблиця 2

	b	x_1	y_m	x_3	…	x_n
L'	$0+\frac{-c_2}{a_{m2}}b_m$		$\frac{-c_2}{a_{m2}}$		…	
y_1	$b_1+\frac{-a_{12}}{a_{m2}}b_m$		$\frac{-a_{12}}{a_{m2}}$		…	
y_2	…		$\frac{-a_{22}}{a_{m2}}$		…	
y_3	…	$a_{31}+(-\frac{a_{32}}{a_{m2}}a_{m1})$	$\frac{-a_{32}}{a_{m2}}$		…	
…	…	…	…	…	…	…
x_2	$\frac{b_m}{a_{m2}}$	$\frac{a_{m1}}{a_{m2}}$	$\frac{1}{a_{m2}}$	$\frac{a_{m3}}{a_{m2}}$	…	$\frac{a_{mn}}{a_{m2}}$

IV. Будуємо оптимальний розв'язок ЗЛП.

1. Знаходимо серед елементів першого рядка (крім першого елемента) додатні числа. Якщо таких елементів немає, переходимо до виконання п. V.

2. Стовпчик, де знаходиться шуканий додатний елемент (будь-який з них), позначаємо базовим. Далі повторюємо процедуру п. III, починаючи з підпункту 3 доти, доки не зникнуть додатні елементи в першому рядку. Якщо в першому рядку додатних елементів немає, переходимо до виконання наступного пункту.

V. Усі вільні змінні (змінні, які стоять у верхній частині останньої симплекс-таблиці) покладаємо рівними нулю. Усі базові змінні (змінні, які стоять у лівій частині таблиці) покладаємо відповідно числам, які стоять у першому стовпчику останньої симплекс-таблиці. Це означає, що змінна, яка стоїть у першому рядку таблиці (після L'), покладається рівною першому числу цього рядка першого стовпчика, друга змінна – другому числу першого стовпчика і т.д. L^{opt} покладається рівним $-L'^{opt}$, де $-L'^{opt}$ дорівнює числу, яке стоїть у першій верхній лівій клітинці фінальної симплекс-таблиці.

Зауваження 1. Якщо в задачі (2.1), (2.2) $L \to \min$, тоді в (2.3) перша нерівність виглядатиме так:

$$L = 0 - (-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n) \Rightarrow \min,$$

а в першій симплекс-таблиці перший рядок матиме такий вигляд:

	b	x_1	x_2	...	x_n
L'	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$

Кінцева таблиця симплекс-процедури I-V у першій клітинці міститиме число, яке дорівнює L^{opt}.

Зауваження 2. Якщо під час виконання пункту IV з'являється ситуація, коли перший рядок симплекс-таблиці містить додатні елементи, а в стовпчику, де вони розміщенні, додатних елементів немає, тоді й задача розв'язку не має, область необмежена і розв'язок перебуває в нескінченності.

Транспортна задача

Транспортна задача – це задача, в якій роботи та ресурси вимірюються в одних і тих же одиницях.

Перша строга постановка транспортної задачі належить Ф. Хічкоку, тому в зарубіжній літературі її називають проблемою Хічкока.

Перший точний метод вирішення транспортної задачі розроблений Л. В. Канторовичем[1] і М. К. Гавуріним.

У такого типу задачах ресурси можуть бути розділені між роботами і окремі роботи можуть бути виконані за допомогою різних комбінацій ресурсів.

Прикладом типової транспортної задачі (ТЗ) є розподіл (транспортування) продукції, що перебуває на складах, на підприємствах-споживачах.

---

[1] Леоніду Віталійовичу Канторовичу (19.01.1912–07.04.1986 рр) за внесок у теорію оптимального розподілу ресурсів Леоніду Канторовичу та Тяллінгу Купмансу в 1975 р. було присуджено Нобелівську премію банку Швеції. Л. Канторович серед усіх Нобелівських лауреатів банку Швеції – єдиний професійний математик.

Розрізняють два типи транспортних задач:

- за критерієм вартості (план перевезень оптимальний, якщо досягнути мінімум витрат на його реалізацію);
- за критерієм часу (план оптимальний, якщо на його реалізацію витрачається мінімум часу).

Класична ТЗ формулюється таким чином:

нехай є m пунктів відправлення продукції: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у яких сконцентровано запаси певного однорідного товару (вантажу) в кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одиниць. Крім того, є n пунктів призначення: $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які подали замовлення відповідно на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць товару.

Математична модель ТЗ

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Тоді умови задачі зручно подати у вигляді таблиці:

Таблиця 2.3

Приклад таблиці вихідних даних для ТЗ

	Вартість перевезень (від постачальника до споживача)				**Кількість (попит)**
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	6	4	6	3	12
B_2	1	7	5	2	13
B_3	4	6	8	12	25
Кількість (пропозиція)	15	12	18	5	

Причому повинні виконуватись умови:

1. Сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного і-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в цьому пункті;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

2. Сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j-му споживачеві, має дорівнювати його потребам;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

3. Сумарна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} +$$
$$+ c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (2.4)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (2.6)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (2.7)$$

У розглянутій задачі повинна виконуватись умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2.8)$$

Транспортну задачу називають **збалансованою** або **закритою**, якщо виконується умова (2.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають **незбалансованою**, або **відкритою**.

Планом транспортної задачі є будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (2.2) – (2.4), який позначають матрицею $X = x_{ij}\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Значення невідомих величин x_{ij} – обсяги продукції, що мають бути перевезені від і-х постачальників до j-х споживачів, називатимемо **перевезеннями**.

Завдання

1.Розв'язати такі задачі, попередньо побудувавши математичну модель до кожного із завдань. Математична модель повинна буди записана на кожному із аркушів відповідно до задач і завдань у вигляді

$$L(X) = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, j = \overline{1,n} \\ \forall x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}) \end{cases}.$$

2. Кожне завдання виконується на окремому аркуші.

Задача 1

Заводи деякої автомобільної фірми розташовані у містах **A, B і C**. Основні центри розподілу продукції зосереджені у містах **D і E.** Обсяги виробництва зазначених трьох заводів дорівнюють **1000, 1300 і 1200** автомобілів щоквартально. Величини квартального попиту в центрах розподілу складають **2300 і 1400** автомобілів відповідно. Вартості перевезення автомобілів залізницею по кожному з можливих маршрутів наведено в табл.

Таблиця 2.4

Таблиця вихідних даних для транспортної задачі

	D	**E**
A	80	215
B	100	108
C	102	68

До кожного із завдань побудувати Звіт про стійкість та зробити його аналіз (див. тема 8).

Завдання 1

Побудуйте математичну модель, що дозволяє визначити кількість автомобілів, що перевозяться з кожного заводу в кожен центр розподілу, таким чином, щоб загальні транспортні витрати були мінімальні.

Завдання 2

Побудуйте транспортну модель для вихідних даних задачі за умови, що квартальний попит у пункті розподілу D знизився до **1900+n·10 (n –порядковий номер студента в журналі)** автомобілів, а випуск на заводі B збільшився до **1500+n·10** автомобілів за квартал.

Важливо. Якщо транспортна задача є незбалансованою, то її можна розв'язувати 2 способами. Введенням фіктивного постачальника (споживача), тобто зводячи її до збалансованого типу, або ж використовуючи у Пошуку рішення нерівності. На рис. 2.1 зображено розв'язування транспортної задачі, використовуючи 2 спосіб.

F15 =SUMPRODUCT(B3:C5;B10:C12)

	A	B	C	D	E
1	Матриця вартості перевезень (грн.)				
2	Центри розподілу / Заводи	D	E	Обсяги виробництва	n
3	A	80	215	1000	24
4	B	100	108	1740	
5	C	102	68	1200	
6	Попит	2140	1400		
7					
8	Матриця перевезень (од.)				
9	Центри розподілу / Заводи	D	E	Обсяги виробництва	Використано	Різниця
10	A	1000	0	1000	1000	0
11	B	1140	200	1740	1340	400
12	C	0	1200	1200	1200	0
13	Попит	2140	1400			
14	Задоволення попиту	2140	1400			
15	Різниця	0	0	Транспортні витрати		297200
16						
17						
18	$L(X)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_{ij} = 80x_{11}+215x_{12}+100x_{21}+108x_{22}+102x_{31}+68x_{32} \to \min$					
19						
20	$\begin{cases} x_{11}+x_{12} \le 1000 \end{cases}$					

Рис. 2.1. Розв'язування незбалансованої транспортної задачі

Завдання 3

Ускладнимо задачу. Побудуйте транспортну модель для вихідних даних задачі пошуку сумарного мінімального часу перевезень для кожного із заводів за умови, що задана таблиця тривалості перевезень. Відхилення від оптимальної вартості перевезень не може перевищувати 20 %. (табл. заповнюється самостійно).

Завдання 4

Взявши за основу завдання 2, побудуйте математичну модель задачі за умови, що за кожен недопоставлений автомобіль у розподільні центри **D** і **E** введені штрафи **200+n·10** і **300+n·10** грн відповідно. Крім того, поставки із заводу **A** в розподільний центр **E** не плануються взагалі.

1	Матриця вартості перевезень (грн.)				
2	Центри розподілу / Заводи	D	E	Обсяги виробництва	n
3	A	150	35	1000	24
4	B	180	108	1300	
5	C	102	68	1200	
6	Попит	2300	1400		
7					
8	Матриця перевезень (од.)				
9	Центри розподілу / Заводи	D	E	Використано	Різниця
10	A	1000	0	1000	0
11	B	100	1200	1300	0
12	C	1200	0	1200	0
13	Задоволення попиту	2300	1200		
14	Різниця	0	200	Транспортні витрати	312 000,00₴
15					
16	Штрафи за од. (грн.)	440	540	Σ	
17	Сума штрафу (грн.)	0	108000	108000	

Рис. 2.2. Приклад виконання завдання 4

Задача 2

Деякій компанії належать три ферми, де вирощують овочі, призначені для подальшої обробки на двох холодильних заводах компанії. Одним з вирощуваних овочів є боби, які холодильні заводи продають по 200 грн. за 1 т. У табл. 2.3 наведені витрати виробництва для кожної ферми і кожного холодильного заводу, максимальні значення врожаю для кожної ферми, прогнозні значення попиту на наступний сезон для кожного заводу.

Витрати на виробництво і максимальний урожай бобів.

Таблиця 2.5

Вихідні дані для ТЗ про план виробництва

		Витрати виробництва, грн/т	Максимальний урожай, т
Ферми	**1**	90	2000
	2	95	3000
	3	87	500
			Прогнозний попит, т
Заводи	**1**	20	2750
	2	23	3250

У табл. 2.6 наведена вартість транспортування бобів.

Таблиця 2.6

Вартість транспортування бобів

Ферми	**Холодильний завод**	
	1	**2**
1	10	15
2	12	12
3	18	9

Завдання

Побудуйте транспортну модель, що дозволяє знайти оптимальний виробничий план для ферм і холодильних заводів на наступний сезон, який гарантує максимальний дохід.

Контрольні питання

1. Які варіанти розв'язування незбалансованої транспортної задачі Вам відомі?
2. Які умови накладаються на цільову комірку у Пошуку рішення?
3. До якого типу задач відносять транспортну задачу?
4. Наведіть три приклади транспортних задач відповідно до їх типів.

Лабораторна робота 3
Транспортна задача з фіксованими доплатами

Завдання 1
Транспортна задача з фіксованими доплатами (лінійна задача)

Є 3 постачальники, які мають обмежену кількість запасів продуктів, і 5 споживачів, у яких є певний попит (замовлення) на ці продукти. Задана матриця вартості перевезення одиниці продукції від певного постачальника до певного споживача, а також за експлуатацію кожної ділянки встановлюється додаткова плата незалежно від відстані та обсягів перевезень, тільки тоді, коли по ньому здійснюється перевезення. Тобто вартість перевезення рівна фіксованій сумі + витрати, які пропорційні кількості продукції. Очевидно, що на практиці вартість перевезення 1 кг борошна та 1 т борошна не співвідносяться як 1 до 1000.

Вихідні дані:

Попит > пропозиції (для парного номера n);

Попит < пропозиції (для непарного номера n);

«Матриця затрат» та «матриця доплат» заповнюють випадковими числами від 1 до 10.

Хід роботи

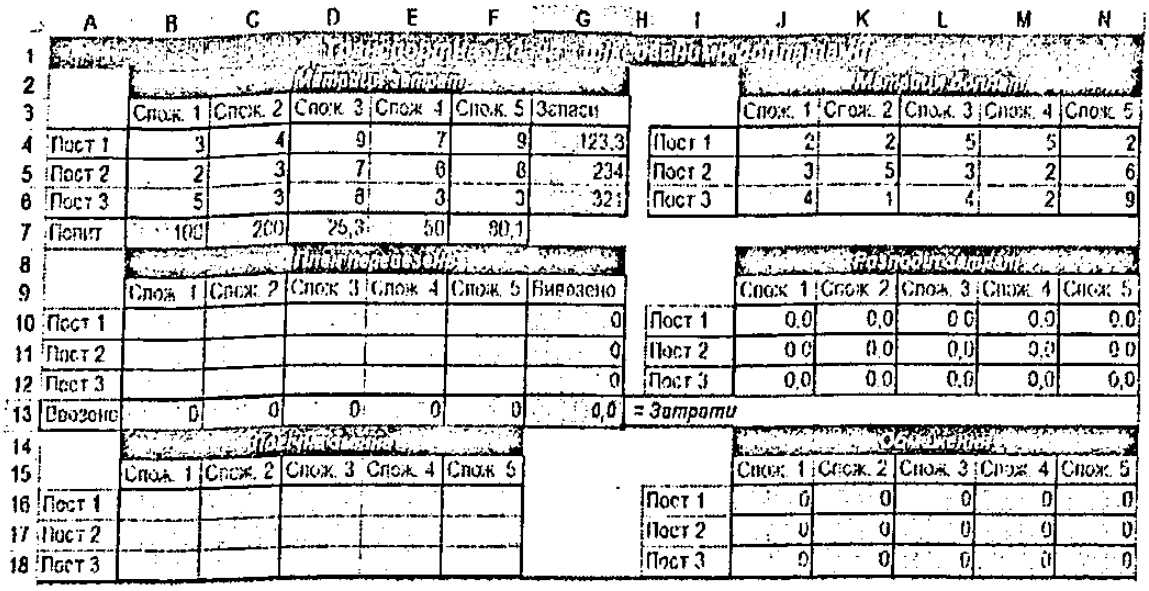
Потрібно знайти такий план перевезень, щоб загальні витрати були мінімальні.

Побудуйте математичну модель.

Ця задача вже є нелінійною (є функція = If), але шляхом введення альтернативної змінної (0 або 1) без застосування логічної функції «If» ми збережемо модель у класі лінійного програмування.

Для збереження лінійності моделі додатково будуємо матрицю обмежень, значення якої обчислюються за формулою:

=MIN(Запас_n_постачальника;
попит_n_споживача)×Логічну_змінну.



	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5	Запаси
Пост 1	3	4	9	7	9	123,3
Пост 2	2	3	7	6	8	234
Пост 3	5	3	6	3	3	321
Попит	100	200	25,3	50	80,1	

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1	2	2	5	5	2
Пост 2	3	5	3	2	6
Пост 3	4	1	4	2	9

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5	Вивезено
Пост 1						0
Пост 2						0
Пост 3						0
Ввезено	0	0	0	0	0	0,0

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Пост 2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Пост 3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

= Затрати

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1					
Пост 2					
Пост 3					

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1	0	0	0	0	0
Пост 2	0	0	0	0	0
Пост 3	0	0	0	0	0

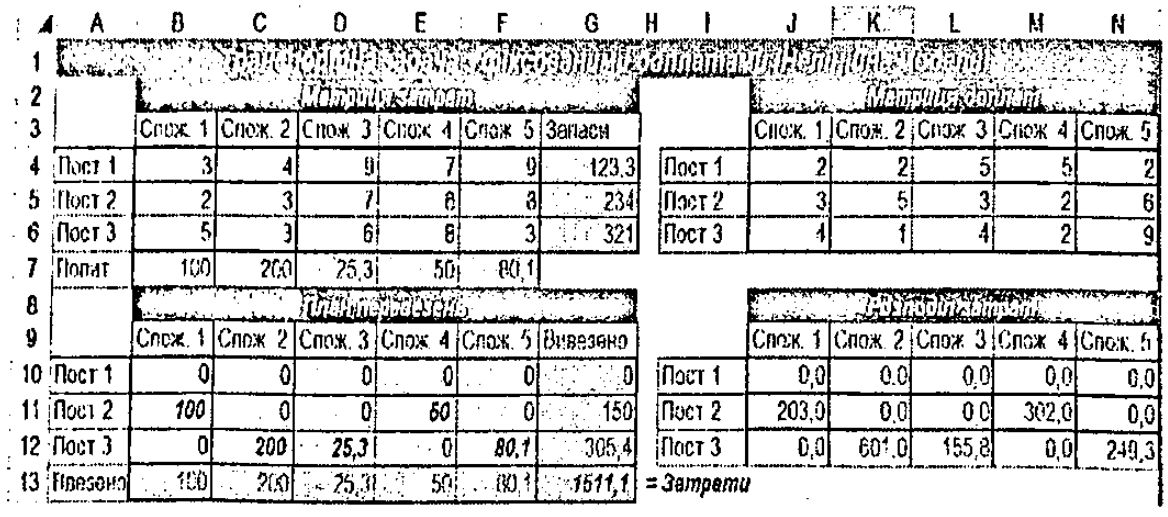
Рис. 3.1. Орієнтовний вигляд аркуша для парного номера студента

Важливо. У цій задачі необхідно задати два діапазони підбору значень.

Завдання 2

На новому аркуші розв'яжіть дану нелінійну задачу, не використовуючи матрицю «Логічна змінна» та «Обмеження», змінивши цільову функцію в таблиці розподіл затрат, використовуючи логічну функцію **If** (нелінійність).

У вікні Розв'язувача необхідно вказати нелінійність моделі (за методом зведеного градієнта).



	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5	Запаси
Пост 1	3	4	9	7	9	123,3
Пост 2	2	3	7	6	8	234
Пост 3	5	3	6	6	3	321
Попит	100	200	25,3	50	80,1	

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1	2	2	5	5	2
Пост 2	3	5	3	2	6
Пост 3	4	1	4	2	9

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5	Вивезено
Пост 1	0	0	0	0	0	0
Пост 2	100	0	0	50	0	150
Пост 3	0	200	25,3	0	80,1	305,4
Ввезено	100	200	25,3	50	80,1	1511,1

	Спож. 1	Спож. 2	Спож. 3	Спож. 4	Спож. 5
Пост 1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Пост 2	203,0	0,0	0,0	302,0	0,0
Пост 3	0,0	601,0	155,8	0,0	249,3

= Затрати

Рис. 3.2. Зображення аркуша розв'язування транспортної задачі з фіксованими доплатами (нелінійна модель)

Завдання 3

Транспортна компанія, що здійснює перевезення, вирішила запровадити систему знижок на перевезення для кожного із можливих маршрутів від споживача до постачальника за умови, що кількість одиниць перевищує певне значення: >30 +n– 3 %; >50+n –5 %.

Необхідно побудувати математичну модель та знайти оптимальний план перевезень.

Завдання для самостійної роботи

Деяка фірма володіє трьома магазинами, яким щотижня слід постачати товар: першому магазину – 1050 кг. сиру, другому – 600 мішків борошна, третьому – 2400 упаковок соку. Товари постачаються вантажними машинами чотирьох транспортних підприємств. Кількість транспортних засобів на цих підприємствах становить 65, 40, 45 і 20 машин. Усі машини мають різну вантажопідйомність [од.тов./маш.] залежно від типу машини і типу вантажу, що перевозиться.

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг.} & \text{мішків} & \text{упак.} \\ \hline \text{маш.} & \text{маш.} & \text{маш.} \end{pmatrix}$$

Вартості використання машин [грн/маш.] Залежно від дальності перевезення і ємності машини рівні.

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 25 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}$$

Складіть оптимальний план перевезення товарів.

Важливо. Будьте уважні при визначенні вихідних собівартостей перевезень.

Контрольні питання

1. До якого типу задач належать дані задачі?
2. Яка особливість задач із фіксованими доплатами?
3. Яка задача називається незбалансованою?
4. Який зміст Т-ціни у даній лабораторній роботі?
5. Як трактуються від'ємні Т-ціни?

Лабораторна робота 4
Багатопродуктова модель ТЗ із незалежними та залежними продуктами

Хід роботи

1. Розв'яжіть наступні завдання.
2. Побудуйте Звіт по стійкості та проаналізуйте його значення. Який зміст Т-ціни і Зменшеної вартості (Н-вартість) у даній задачі?
3. Занотуйте свої висновки на аркуші.

Завдання 1

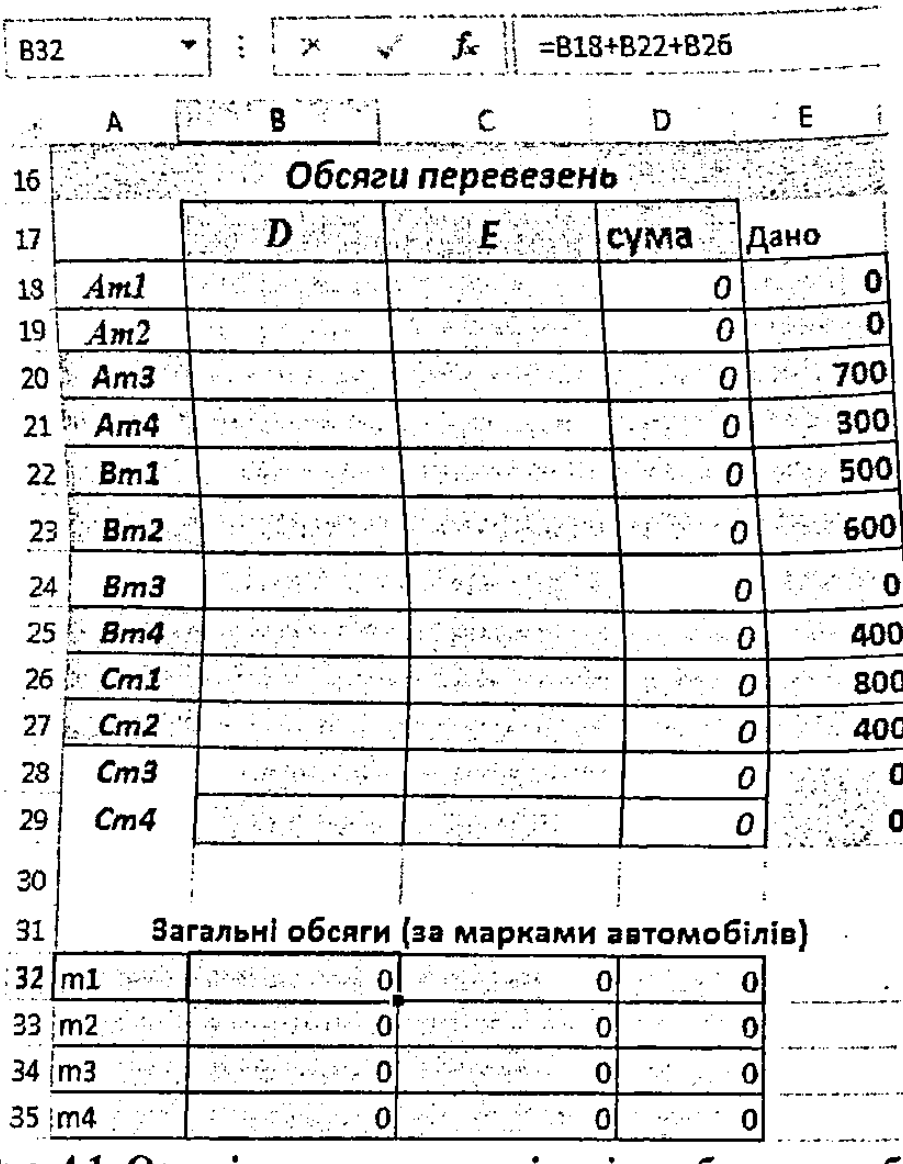
Деяка фірма виробляє автомобілі чотирьох різних марок **M1, M2, M3, M4.** Завод у місті **A** виробляє тільки автомобілі марок **M3, M4,** у місті **B** – тільки автомобілі марок **M1, M2, M4,** а в місті **C** – тільки автомобілі марок **M1, M2.** Щоквартальні обсяги випуску кожного заводу і величини попиту в кожному пункті розподілу наведено в табл. 4. Побудуйте відповідну модель економічних перевезень. Тарифи перевезень відповідають **задачі 1** (лабораторна робота 2).

Таблиця 4.1

Обсяги виробництва заводів і попиту пунктів розподілу автомобілів, шт./квартал

	Марка автомобіля			
	M_1	M2	M3	M_4
Заводи				
A	–	–	700	300
B	500	600	–	400
C	800	400	–	–
Пункти розподілу				
D	700	500	500	600
E		500	200	100

Пропонований зразок транспортної матриці представлений на рис. 4.1.



B32 : =B18+B22+B26

	A	B	C	D	E
16		Обсяги перевезень			
17		D	E	сума	Дано
18	Am1			0	0
19	Am2			0	0
20	Am3			0	700
21	Am4			0	300
22	Bm1			0	500
23	Bm2			0	600
24	Bm3			0	0
25	Bm4			0	400
26	Cm1			0	800
27	Cm2			0	400
28	Cm3			0	0
29	Cm4			0	0
30					
31	Загальні обсяги (за марками автомобілів)				
32	m1	0	0	0	
33	m2	0	0	0	
34	m3	0	0	0	
35	m4	0	0	0	

Рис. 4.1. Один із можливих варіантів побудови таблиці

Рекомендація. Пункти відправлення у транспортній матриці необхідно вводити відповідно з марками автомобілів, що випускаються кожним заводом, а пункти призначення – відповідно з марками автомобілів, необхідними в кожному пункті розподілу. Тобто a3 на рис. 4.1 відповідає за постачання автомобілів марки М3 із пункту розподілу А. Відповідно, значення комірки m1 пункту розподілу d буде рівним a1+b1+c1. Аналогічно можна записати і для інших комірок.

Значення у таблиці вартість обчислюється як добуток вартості перевезення від заводу до пункту розподілу (початкові дані) відповідної марки автомобіля на значення таблиці Обсяги перевезень, рис. 4.2.

H33 | 700

	G	H	I	J
16		Вартість		
17		D	E	
18	Am1	=B18*B$2	=C18*C$2	=SUM(H18:I18)
19	Am2	=B19*$B$2	=C19*C$2	=SUM(H19:I19)
20	Am3	=B20*$B$2	=C20*C$2	=SUM(H20:I20)
21	Am4	=B21*$B$2	=C21*C$2	=SUM(H21:I21)
22	Bm1	=B22*B$3	=C22*C$3	=SUM(H22:I22)
23	Bm2	=B23*B$3	=C23*C$3	=SUM(H23:I23)
24	Bm3	=B24*B$3	=C24*C$3	=SUM(H24:I24)
25	Bm4	=B25*B$3	=C25*C$3	=SUM(H25:I25)
26	Cm1	=B26*B$4	=C26*C$4	=SUM(H26:I26)
27	Cm2	=B27*B$4	=C27*C$4	=SUM(H27:I27)
28	Cm3	=B28*B$4	=C28*C$4	=SUM(H28:I28)
29	Cm4	=B29*B$4	=C29*C$4	=SUM(H29:I29)
30				=SUM(J18:J29)
31		Обмеження		
32		D	E	
33	m1	700	600	1300
34	m2	500	500	1000
35	m3	500	200	700
36	m4	600	100	700
37		=SUM(H33:H36)	=SUM(I33:I36)	

Рис. 4.2. Таблиця обчислення вартості перевезень

У вікні Роз'язувача за цільову комірку потрібно вказати комірку сумарної вартості (рис. 4.2.). Комірки, які підлягають зміні, необхідно вибрати із таблиці Обсяги перевезень. Таблиця Обмеження будується із вихідних даних і слугує як обмеження для таблиці Загальні обсяги. Також обмеження накладаються на поле Сума таблиці Обсяги перевезень, які повинні бути рівними полю Дано.

Завдання 2

Багатопродуктова модель із залежними продуктами

На основі попереднього завдання розв'яжіть задачу за умови, що деяку частину попиту на одну з марок можна задовольнити за рахунок іншої відповідно до табл. 4.2. Побудуйте відповідну модель економічних перевезень.

Таблиця 4.2

Дані про взаємозамінні марки автомобілів

Центр розподілу	Частина попиту яка може бути замінена в %	Взаємозамінні марки
D	10	M1, M2
	20	M3, M4
E	10	M1, M3
	6	M2, M4

Рекомендація. Введіть чотири нові пункти призначення, що відповідають комбінаціям (M1 або M2), (M3 або M4), (M1 або M2) і (M2 або M4) (рис. 4.3). Величини потреб нових пунктів призначення визначаються на підставі даних про відсоткове співвідношення замінних моделей автомобілів.

	d		*e*	
	min	*max*	*min*	*max*
m1				
m2				
m3				
m4				

Рис. 4.3. Зразок матриці обмежень

Важливо. У таблиці на рис. 4.3 потрібно врахувати, що зміна в «+» і «–» по кожному з продуктів буде несиметричною відносно попиту. Тобто у пункт Е може постачатись від 500-500*6 % до 500+100*6 % автомобілів марки М2 та від 100–100*6 % до 100+500*6 % автомобілів М4 (табл. 4.1 та табл. 4.2).

Завдання 3

Розв'яжіть задачу із взаємозамінними продуктами за умови, що пропозиція більша за попит для парного номера студента та пропозиція менша за попит – для непарного.

Вартість			
	D	E	Сума
Am1	- ₴	- ₴	- ₴
Am2	- ₴	- ₴	- ₴
Am3	41 600,00₴	38 700,00₴	80 300,00₴
Am4	24 000,00₴	- ₴	24 000,00₴
Bm1	50 000,00₴	- ₴	50 000,00₴
Bm2	52 500,00₴	8 100,00₴	60 600,00₴
Bm3	- ₴	- ₴	- ₴
Bm4	30 500,00₴	10 260,00₴	40 760,00₴
Cm1	14 280,00₴	44 880,00₴	59 160,00₴
Cm2	- ₴	27 200,00₴	27 200,00₴
Cm3	- ₴	- ₴	- ₴
Cm4	- ₴	- ₴	- ₴
	Загальні витрати		342 020,00₴

Обмеження			
	D	E	Сума
m1	700	600	1300
m2	500	500	1000
m3	500	200	700
m4	600	100	700
Сума	2300	1400	

	d		e	
	min	max	min	max
m1	630	750	540	620
m2	450	570	475	505
m3	400	620	180	260
m4	480	700	95	125

Рис. 4.4. Зразок матриці обмежень

Контрольні питання

1. До якого типу задач належить транспортна задача?
2. Яка особливість транспортних задач?
3. Наведіть приклад задачі, яка зводиться до транспортної?
4. Яка особливість розв'язування транспортної задачі із взаємозамінними продуктами?
5. Який зміст від'ємних значень Т-ціни і Зменшеної вартості (Н-вартість)?

ТЕМА 2. ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лабораторна робота 5
Дискретне програмування.
Задача призначення на посаду

Теоретична довідка
Цілочисельне (дискретне) програмування

Цілочисельне (дискретне) лінійне програмування – це розділ дослідження операцій, що орієнтований на рішення задач, у яких усі змінні або частина з них є цілочисловими (повністю або частково цілочислові задачі).

Умова дискретності є, по суті, нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У цій роботі розглянемо задачі математичного програмування, в яких, крім умови дискретності, усі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву **цілочислових задач лінійного програмування.**

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max\ (\min)\ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right); \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{5.3}$$

$$x_j - \text{цілі числа} \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{5.4}$$

Слід зазначити, що у розглянутих у попередній темі класичній транспортній задачі та інших задачах транспортного типу (у задачах про призначення, про найкоротший шлях тощо) з цілочисловими параметрами початкових умов забезпечується цілочисловий розв'язок без застосування спеціальних методів, однак у загальному випадку вимога цілочисельності змінних значно ускладнює розв'язування задач математичного програмування.

Методи розв'язування ЗЦП

Методи розв'язування ЦЗЛП діляться на три основні групи:

1. **Методи відсікання**

Метод відсікаючих площин вперше розробив Р. Гоморі в 1957–1958 рр. для задач лінійного цілочисельного програмування.

Для групи методів відсікаючих площин використовується ідея «регуляризації» задачі. Вона полягає в зануренні вихідної незв'язаної області допустимих розв'язків (дискретних точок) у відповідну неперервну опуклу область, тобто в тимчасовому відкиданні умов дискретності. Далі до одержаної регулярної задачі застосовують стандартні методи оптимізації.

2. **Комбінаторні методи** (метод гілок та границь);

3. **Наближені методи.** У методах цієї групи використовуються два основних підходи:

- розробка детермінованих евристичних алгоритмів, які враховують специфіку конкретної задачі;
- застосування спрямованого випадкового пошуку з локальною оптимізацією.

Класичним прикладом цілочисельних задач лінійного програмування (ЦЗЛП) є задача **комівояжера.**

Класична задача формулюється в такий спосіб. Комівояжер повинен відвідати ряд міст, відстані між якими відомі. Він обирає найкоротший замкнутий маршрут, що починається й закінчується в місті його проживання, при цьому він повинен відвідати кожне місто один і тільки один раз.

Очевидно, що завдання комівояжера полягає в оптимальному виборі його маршруту.

Задача про рюкзак

Іншою класичною задачею ЦЗЛП є **задача про рюкзак.** Розглянемо формулювання цієї задачі. Є n предметів, при цьому відомо: a_j – вага j-го предмета, c_j – цінність j-го предмета, A – вантажопідйомність рюкзака. Необхідно завантажити рюкзак набором предметів максимальної цінності.

Математична модель задачі про рюкзак

На першому етапі введемо змінні:

$$x_j = \begin{cases} 1, \textit{якщо } j \text{ предмет } \textit{завантажується}; \\ 0, \textit{якщо } j - \text{тий предмет в ранець не } \textit{завантажується}. \end{cases}$$

У такому випадку цільова функція буде мати такий вигляд:

$$F = \sum_{j=0}^{n} c_j x_j \qquad (5.1)$$

Задача вирішується в рамках наступних обмежень:

$$x_j = \begin{cases} 1; \\ 0; \; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j \le A$$

Задача про призначення на посаду

Назва задачі про призначення на посаду (assignment problem) – безпосередньо випливає із практичної кадрової ситуації, коли претендентів потрібно призначити на вакантні посади найкращим чином.

Критерій максимізації загального ефекту використовується тоді, коли відомі оцінки здатності виконання певної функції (чим вище, тим краще), про кожного претендента, мінімізації – коли, скажімо, для кожного претендента задана величина витрат на його підготовку для певної діяльності (чим вище, тим гірше).

Хід роботи

Задача 1. Призначення на посаду

Підприємство оголосило набір працівників для нового цеху – вказало назви семи посад і кількість вакансій з кожної. Кадрова служба відібрала 18 претендентів на ці посади, провела тестування з кожної з них і за результатами визначила 5 груп з однаковими оцінками і можливостями, отримавши відповідну таблицю середніх оцінок їх умінь та знань.

Потрібно призначити на вакантні посади претендентів таким чином, щоб загальна ефективність виконання ними відповідних обов'язків була максимальною.

Зауваження. Наявність високої оцінки не гарантує успіх, оскільки метою оптимізації призначення є максимальний загальний ефект.

Початкові дані

	Посада 1	Посада 2	Посада 3	Посада 4	Посада 5	Посада 6	Посада 7	Всього претендентів
Група А	4	4	7	5	7	4	3	2
Група Б	2	5	6	4	6	4	2	3
Група В	3	4	5	5	5	4	3	3
Група Г	7	2	4	4	4	4	4	4
Група Д	5	4	3	2	3	4	5	7
Всього вакансій	3	2	1	2	1	1	2	19

	Посада 1	Посада 2	Посада 3	Посада 4	Посада 5	Посада 6	Посада 7	Призначено	Залишилось	Т-ціна
Група А	0	0	1	0	1	0	0	2	0	
Група Б	0	2	0	0	0	1	0	3	0	
Група В	0	0	0	2	0	0	0	2	1	
Група Г	3	0	0	0	0	0	0	3	1	
Група Д	0	0	0	0	0	0	2	2	5	
Зайнято	3	2	1	2	1	1	2	Заг. Ефект	69	
Т-ціна	7	5	7	5	7	4	5			

Рис. 5.1. Зображення аркуша призначення на посаду

Завдання 1

При розв'язуванні задачі слід врахувати:

1. Дані вихідної матриці заповнюються довільними числами від 1 до 10;

2. 1 людина із групи В повинна бути призначено на посаду 7.

3. Заповнити рядок і стовпець **Т-ціна** відповідними значеннями, виходячи із «Звіту про стійкість».

Проаналізуйте значення Т-цін для кожної з посад та груп.

Завдання 2

Керівництвом було вирішено виділити кошти на підвищення кваліфікації, оскільки прийнято рішення, що ефективність на усіх посадах не повинна бути меншою ніж 6 од. Загальна сума виділених коштів рівна 5000 грн. Підготовка одного фахівця збільшує його ефективність на 3 одиниці і коштує 1000 грн. Знайдіть оптимальний план призначення на посади з урахуванням підвищення кваліфікації.

Задача 2. Задача про рюкзак

На окремому аркуші побудуйте математичну модель та знайдіть оптимальний вміст рюкзака за умови, що максимальна маса рюкзака не повинна перевищувати **30+n** кілограм.

1. Доповніть таблицю принаймні 3 записами.
2. Заповніть таблицю значеннями «ваги» та «цінності» на власний розсуд.
3. Згрупуйте предмети за призначенням (продукти, необхідні предмети, необов'язкові) та спробуйте розв'язати задачу за умови альтернативного вибору предметів (сірники – запальничка, гречка – картопля тощо).
4. *Додайте до таблиці поле «Вартість» або ж «Об'єм» та розв'яжіть задачу.

Таблиця 5.1

Вхідні дані для задачі про рюкзак

Предмет	Вага	Цінність
Сірники		
Макарони		
Гречка		
Вода		
Радіо		
Подушка		
Палатка		
Коремат		
Книжка		

Контрольні питання

1. До якого типу задач належить задача про рюкзак?
2. Яка суттєва особливість задачі комівояжера?
3. Яким методом розв'язується задача про призначення на посаду?
4. Яка відмінність у розв'язуванні розглянутих задач?
5. Наведіть приклад задачі дискретного програмування.

Лабораторна робота 6
Задача про розкрій матеріалу

Теоретична довідка

Більшість матеріалів, що використовуються в промисловості, надходить на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє використання таких матеріалів, як правило, неможливе. Попередньо їх ділять на заготовки необхідних розмірів. Це можна зробити, використовуючи різні способи розкрою матеріалу.

Завдання оптимального розкрою полягає в тому, щоб вибрати один або кілька способів розкрою матеріалу і визначити, яка кількість матеріалу слід розкроювати, застосовуючи кожен з обраних способів.

Задачі такого типу виникають у металургії і машинобудуванні, лісовій, лісопереробній, легкій промисловості тощо.

Виділяють два етапи вирішення задачі оптимального розкрою:

- на першому етапі визначаються раціональні способи розкрою матеріалу;
- на другому етапі вирішується завдання лінійного програмування для визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

1. Визначення раціональних способів розкрою матеріалу.

У задачах оптимального розкрою розглядаються так звані раціональні (оптимальні за Парето) способи розкрою. Припустимо, що з одиниці матеріалу можна виготовити заготовки декількох видів.

Спосіб розкрою одиниці матеріалу називається раціональним (оптимальним за Парето), якщо збільшення числа заготовок одного виду можливе тільки за рахунок скорочення числа заготовок іншого виду.

Нехай k – індекс виду заготовки, k = 1,..., q;

i – індекс способу розкрою одиниці матеріалу, i = 1,..., q;

a_{ik} – кількість (ціле число) заготовок виду k, отриманих при розкрою одиниці матеріалу i-м способом.

Наведене визначення раціонального способу розкрою може бути формалізоване у такий спосіб.

Спосіб розкрою v називається раціональним (оптимальним за Парето), якщо для будь-якого іншого способу розкрою із співвідношень $a_{ik} > a_{vk}$, k = 1,..., q слідують співвідношення $a_{ik} = a_{vk}$, k = 1,..., q.

2. Визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

Позначення:

j – індекс матеріалу, j = 1,..., n;

k – індекс виду заготовки, k = 1,..., q;

i – індекс способу розкрою одиниці матеріалу, i = 1,..., p;

a_{jik} – кількість (ціле число) заготовок виду до отриманих при розкрої одиниці j-го матеріалу i-м способом;

b_k – число заготовок виду k у комплекті, що поставляється замовнику;

d_j – кількість матеріалу j-го виду;

x_{ji} – кількість одиниць j-го матеріалу, розкроюємо i-м способом (інтенсивність використання способу розкрою);

c_{ji} – величина відходу, отриманого при розкрою одиниці j-го матеріалу i-м способів;

y – число комплектів заготовок різного виду, що постачаються замовнику.

Модель розкрою з мінімальною витратою матеріалів

Цільова функція (мінімум кількості використаних матеріалів):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \to min \qquad (6.1)$$

Система обмежень, що визначають кількість заготовок, необхідних для виконання замовлення:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{ji}x_{ji} \geq b_k \qquad (6.2)$$

де k = 1,..., q.

Умови невід'ємності змінних:

$$x_{ji} \geq 0, \text{ де } j = 1,..., n;\ i = 1,..., p. \qquad (6.3)$$

Специфічними для цієї галузі застосування моделі лінійного програмування є обмеження (2).

Модель розкрою з мінімальними відходами.

Аналогічно можна записати відповідні рівняння для випадку із мінімальними відходами.

Цільова функція (мінімум відходів при розкрою матеріалів):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_{ji} \to min. \qquad (6.4)$$

Система обмежень, що визначають кількість заготовок, що необхідні для виконання замовлення:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_{ji} \geq b_k, \qquad (6.5)$$

де k = 1,..., q.

$$x_{ji} \geq 0, \text{ де } j = 1,..., n;\ i = 1,..., p. \qquad (6.6)$$

Хід роботи

Задача 1

На розкрій поступають заготовки певного матеріалу (металевий прокат, листи скла, фанери, тканини, шкіри, гуми тощо) стандартного розміру, з якого виробляють вироби різного виду: деталі одягу або взуття, елементи будівельних конструкцій, меблів і так далі.

Існують декілька способів розкрою заготовки, за допомогою яких можна виробляти певну кількість виробів певних видів, для кожного з яких відомі відходи матеріалу.

O5 =A5*N5

Довжина заготовки, см	Кількість заготовок, що викроюють із 1 листа при розрізі способом № 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Необхідна кількість заготовок	Загальна довжина, см	Довжина листа, см
60	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1200	72000	199
65	0	1	0	1	0	0	2	3	2	0	0	1	650	42250	
80	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	430	34400	
100	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	980	98000	
													Разом	246650	

	Кормсне використання частини листа довжиною ... см											
60	180	120	120	60	60	60	60	0	0	0	0	0
65	0	65	0	65	0	0	130	195	130	0	0	65
80	0	0	0	0	80	0	0	0	0	160	80	0
100	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0	100	100
Разом	180	185	120	125	140	160	190	195	130	160	180	165
Відходи, см	19	14	79	74	59	39	9	4	69	39	19	34

Рис. 6.1. Результат першого етапу розв'язування задачі про розкрій матеріалів

Необхідно виконати замовлення на виробництво заданої кількості виробів певного виду таким чином, щоб мінімізувати загальні відходи.

Причому необхідна кількість заготовок обчислюється виходячи із порядкового номера студента.

Таблиця 6.1

Таблиця вихідних даних

Довжина заготовки, см	Необхідна кількість заготовок
60	1000+10*n
65	500+10*n
80	400+10*n
100	1000-10*n

1. **Разом** обчислюється як кількість заготовок, помножених на його довжину. Відповідно **відходи** обчислюються як **довжина листа – разом.**

2. Матриця **Кількість отриманих заготовок** обчислюється як кількість листів, розрізаних відповідним способом, помножена на кількість заготовок, що викроюють із 1 листа при розрізі способом № і.

3. Відповідно обчислюються:

a) Загальні відходи (від числа листів, розкроєних кожним зі способів);

b) Зайві заготовки (в шт. і см.);

c) Таблиця Співвідношення (відсотки від загальної довжини використаних ресурсів).

4. Необхідно мінімізувати цільову комірку при обмеженні: загальна кількість отриманих заготовок менша необхідної кількості;

5. Доповнити даний аркуш рядками Т-цін та проаналізувати їх зміст для даної задачі.

Зразок аркуша представлений на наступному рисунку.

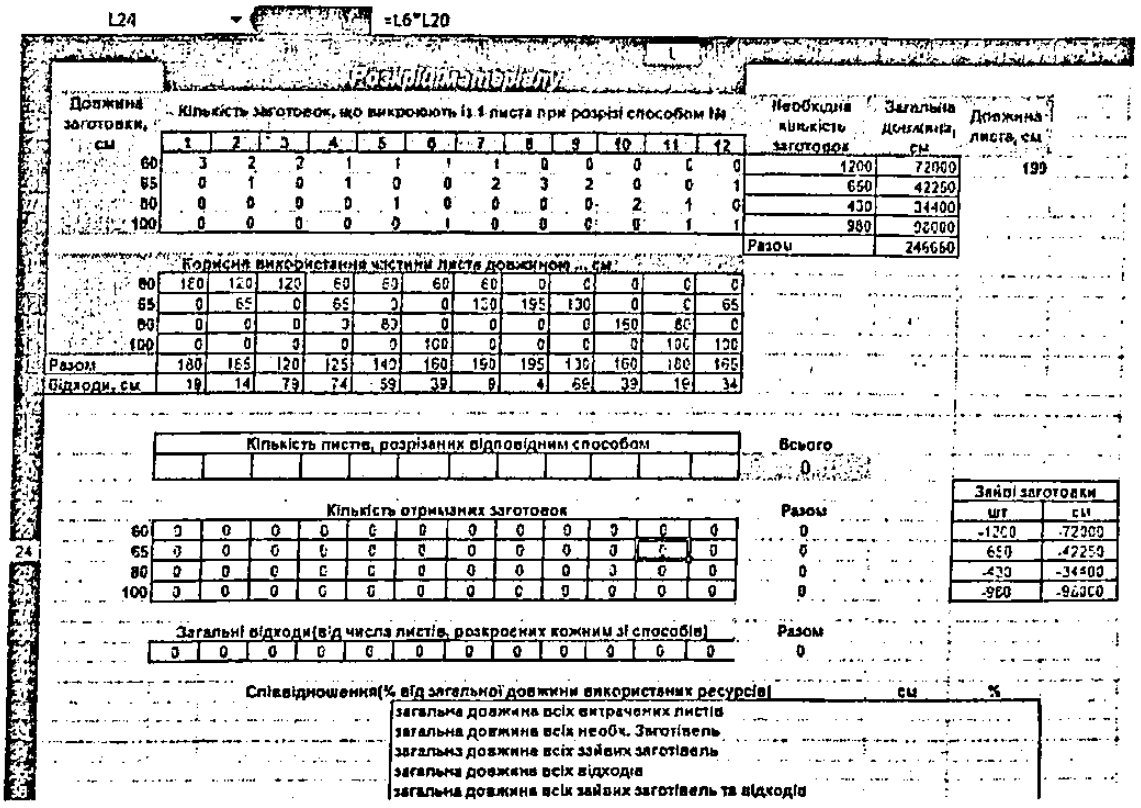


Рис. 6.2. Відображення аркуша для розв'язування задачі про розкрій матеріалу

Задача 2

Працівникам столярної майстерні дали завдання з мінімальними відходами нарізати однакову кількість брусків двох видів: розміром 27 і 37 см з семи рейок, що мають розміри: 165; 202; 210; 258; 330; 338 і 422 см.

Таблиця 6.2

Таблиця вихідних даних

Довжина, см	Кількість, шт
165	n
202	5
210	5
258	8
230	3
338	6
422	40-n

Завдання 2

Розв'язати задачу за умови, що брусків розміром 27 см повинно бути вдвічі більше ніж 37 см.

На основі *Звіту зі стійкості* проаналізувати Т-ціну та Н-вартість і сформулювати зміст даних категорій для даної задачі.

Контрольні питання

1. До якого типу задач належать задачі розкрою матеріалу?
2. Які задачі належать до ЦЗЛП?
3. Які способи розв'язування ЦЗЛП вам відомі?
4. Який зміст Т-ціни для задачі розкрій матеріалів?
5. Які способи одержання Т-ціни вам відомі?
6. Як перевірити справедливість припущень про зміст Т-цін та Н-вартостей?

Лабораторна робота 7
Розв'язування задачі комівояжера за допомогою симплекс-методу

Теоретична довідка

Задача комівояжера

Переважну більшість практичних задач оптимізації відносять до «важких» для комп'ютерної реалізації задач за явної нелінійності цільової функції й обмежень і необхідності врахування спеціальних граничних значень для шуканих невідомих. Тому найбільш популярний шлях до пошуку глобального оптимуму – зведення цих задач до класичних моделей лінійного, дискретного або хоча б опуклого програмування, зрозуміло, із втратою певних характерних властивостей об'єкта дослідження.

Однією з таких «важких» задач, яка має безліч застосувань, є класична задача про комівояжера (який має відвідати n міст з мінімальною довжиною контуру обходу), де кінцевий результат критично й експоненційно залежить від розміру задачі (значення n) – кількість можливих контурів обходу складає фантастичну величину n!.

Починаючи із MS Excel 2010, у табличний процесор вбудовано вдосконалену надбудову Premium Solver, де для гладкої нелінійної оптимізації застосовується потужний метод

узагальненого приведеного градієнта (Generalized Reduced Gradient, GRG).

У прикладній математиці складними вважаються задачі оптимізації, що належать до класу нелінійних задач із негладкою цільовою функцією й обмеженнями на невідомі різного типу, для яких безсилі класичні моделі й методи нелінійного програмування градієнтного типу щодо пошуку глобального оптимуму. Тож надбудова Premium Solver має у своєму складі модуль негладкої нелінійної оптимізації під назвою Evolutionary Solver (в україномовній версії Excel 2016 – Розвиваний розв'язувач), що відповідає новітньому класу математичних моделей еволюційного програмування. В основі цього потужного, але мало ще відомого масовому користувачу модулю реалізація специфічного алгоритму направленого перебору під назвою «генетичний алгоритм» (ГА), де спільно застосовується генератор випадкових чисел й оригінальний обчислювальний механізм пошуку оптимуму, що відтворює еволюційні процеси живої природи. На відміну від стихійних методів спроб і помилок чи випадкового пошуку із накопиченням статистики в ГА на кожному кроці здійснюється певне перекомбінування значень шуканих невідомих (мовою біології – мутація та схрещення) й розв'язується набір проміжних підзадач, щоб сформувати оновлений набір значень шуканих невідомих, який визначає краще за попереднє значення цільової функції. За цим алгоритмом можна знайти досить близький до оптимального розв'язок поставленої негладкої нелінійної задачі оптимізації солідного розміру.

Цей же модуль має ще одну цікаву й ефективну властивість, яка дозволяє застосувати для шуканих невідомих оригінальний вид обмежень під назвою alldifferent (в Excel 2016 – «всі різні»).

Для задачі про комівояжера цей вид обмежень є надзвичайно корисним, бо приводить до суттєвого збільшення допустимого розміру задачі, що розв'язується в Excel, – замість задачі з $n^2 + n$ невідомими за цим обмеженням розв'язується задача лише з n невідомими. Скажімо, за допомогою методу «гілок і границь» в Excel можна точно розв'язати задачу

комівояжера за моделлю булевого програмування з n < 13, зате еволюційним методом з обмеженням «всі різні» наближено, з відхиленням від оптимуму на 2–3 %, що для практики цілком прийнятно, розв'язується задача комівояжера з $\mathbf{n < 200^3}$.

Задача комівояжера

Задача комівояжера (у теорії графів (тема 6) – задача пошуку найкоротшого гамільтонового контуру) дуже близька за своєю постановкою до типових потокових задач на графах: про найкоротший шлях, про призначення та про мінімальне покриття. Але ці задачі розв'язуються значно простіше, ніж задача комівояжера, тому й розв'язок задачі комівояжера базується на алгоритмах цих дещо простіших задач.

Уперше математична модель задачі про комівояжера (TSP, travelling salesmam problem) була визначена в 1930 р. (К. Менгер) у класі моделей комбінаторного програмування; для її комп'ютерної реалізації у 1950-ті роки (Дж. Данциг) була поставлена відповідна задача лінійного програмування[4] (ЛП) через її схожість з транспортною задачею та задачею про призначення матричного типу. Виявилася непередбачувана проблема – при використанні лінійної моделі для задачі про призначення шуканий гамільтонів контур розривається на сукупність часткових підконтурів, що з'єднують певні групи точок. Ця постановка для повного графа з п вершинами містить $п^2$ + п змінних і не менше половини цієї величини – це явні обмеження на невідомі, наступні неявні обмеження у процесі обчислень ставлять за мету ліквідацію часткових контурів. Тож хоча принципово симплекс-методом можна користуватися, але на практиці від нього відмовляються з-за його громіздкості й неефективності моделі ЛП. В Excel застосовується вбудований в «Розв'язувач» точний симплекс-метод.

Наступний етап розробки алгоритмів для розв'язання задачі про комівояжера – більш продуктивний дискретний підхід з використанням розгалужень, алгоритмів направленого й скороченого перебору варіантів (адже повний перебір астрономічної п! кількості варіантів відпадає одразу) за

допомогою дерева пошуку та моделі булевого програмування. У цьому напрямку розробляються точні й наближені методи і алгоритми пошуку оптимуму. В Excel для цього застосовується вбудований у «**Розв'язувач**» точний метод «гілок і границь» (модель булевого програмування) і наближений еволюційний метод (модель еволюційного програмування).

Постановка задачі

Комівояжер (агент роздрібної торгівлі) має обійти n клієнтів (замовників, певних об'єктів, традиційно – міст) найкоротшим шляхом (якнайшвидше, з мінімальними витратами ресурсів) і повернутися у початковий пункт, побувавши у кожного клієнта лише раз.

У ролі комівояжера може бути транспортний засіб з доставки товарів у заклади роздрібної торгівлі чи в певні пункти для поповнення запасів ресурсів (харчів, питної води, палива, ліків, джерел електроенергії) чи заміни персоналу, сміттєзбиральна техніка, кандидат у депутати, персонал контрольно-ревізійної служби, бригада обслуговування банкоматів, автобус з групою туристів тощо – усі вони мають на меті визначити оптимальний контур обходу відповідних об'єктів, щоб мінімізувати довжину, час чи інші витрати.

Аналогічну постановку має виробнича задача про переналагодження універсального обладнання для послідовного виконання на ньому n різних операцій із мінімальною загальною тривалістю усього процесу, задача про найкоротше з'єднання n електронних елементів на мікросхемі та багато інших.

Класична постановка задачі комівояжера доповнюється рядом специфічних чи узагальнених задач, коли, скажімо, комівояжер має відвідувати певні групи міст у межах певних регіонів чи коли треба визначити «вузьке місце» в контурі обходу – ці умови ще додатково ускладнюють й без цього непросту задачу в класичній постановці, але ж досягнення оптимального чи хоча би близького до нього варіанта забезпечує явну економічну чи іншу ефективність.

Ця математична задача припускає просту наочну інтерпретацію, з чого й розпочинається її постановка: на площині задано n

точок із відповідними координатами, де кожна точка з'єднана із усіма іншими n точками. Це – набір даних (V, D, A, X, S), де

V = {1,..., n} – задана множина n вузлів (номери, назви, коди);

D ={(i, j)} – задана множина n^2 дуг: (1, 1), (1, 2),., (n, n), кожна (i, j)-та дуга ($i \neq j$) графа з'єднує певну пару вузлів i, j $\in$V, це – повний граф, для якого існує розв'язок; для неповного графа існування розв'язку не гарантується;

A = $\{a_{ij}\}$ – задана множина вагових коефіцієнтів чи параметрів дуг – це: відстань, тривалість, витрати палива, коштів чи будь-яких ресурсів, для i = j, $a_{ij} = \infty$; при $a_{ij} = a_{ji}$ задача симетрична, інакше, у загальному випадку, несиметрична;

X =$\{x_{ij}\}$ – шуканий результат у матричній формі, множина шуканих невідомих, де

$x_{ij} = 1$, якщо (i, j)-та дуга належить шуканому контуру;

$x_{ij} = 0$ – в іншому випадку, або X = $\{x_i\}$ – шуканий результат у векторній формі, множина шуканих невідомих у вигляді комбінації n номерів вузлів;

S – схема контуру на площині.

Відповідно для постановки та розв'язання задачі про комівояжера маємо граф (або неорієнтовану мережу), де треба знайти найкоротший замкнений контур, який складається точно з n дуг і проходить через кожен вузол один лише раз (це задача про мінімальний гамільтонів контур, що визначена ірландським математиком Гамільтоном у 1800-ті роки, яка довгі роки сприймалася як звичайна головоломка).

Постановка задачі

На площині задано координати 6 пунктів, розв'язати задачу комівояжера як закриту задачу про призначення (кількість претендентів = кількості вакансій).

Математична модель:

1. Знайти план X = $\{x_{ij}\}$, щоб
2. ЦФ

$$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to min$$

3. за обмежень:

а)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

з кожного вузла можна вийти 1 раз;

б)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

у кожен вузол можна увійти 1 раз;

ці два обмеження забезпечують умову 1-разового відвідування кожного міста та граничних умов: усі $x_{ij}. \in \{0,1\}$.

У цій та наступній лабораторній роботі розглянемо три способи розв'язку даної задачі.

Завдання 1. Симплекс-метод лінійного програмування

Постановка задачі

На площині задано координати 6 пунктів, розв'язати задачу комівояжера як закриту задачу про призначення (кількість претендентів = кількості вакансій). Математична модель:

1. Знайти план $X = \{x_{ij}\}$, щоб
2. ЦФ

$$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to min$$

3. за обмежень:

a. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, з кожного вузла можна вийти 1 раз;

b. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, у кожен вузол можна увійти 1 раз;

ці два обмеження забезпечують умову 1-разового відвідування кожного міста та граничних умов: усі $x_{ij}. \in \{0,1\}$.

Хід роботи

1. Увести назви міст і їхні координати.

2. Побудувати діаграму «Точкова»:

М-1	3	6
М-2	4	2
М-3	6	4
М-4	2	9
М-5	4	8
М-6	1	3

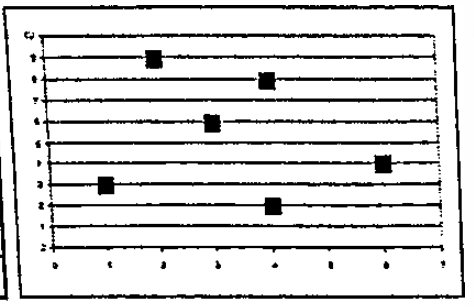


Рис. 7.1. Відображення точок на діаграмі

3. Сформувати матрицю відстаней A(6,6) обчисленнями значень a_{ij} за формулою: $a_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, усі діагональні елементи $(a_{ii}) = 100$ (аналог ∞):

Таблицю початкових даних координат заповнюють випадковими числами.

Відстані обчислюються.

Розмірність таблиці повинна бути іншою.

Таблиця 7.1

(дана таблиця є ілюстративною)

			М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6
			3	4	6	2	4	1
			6	2	4	9	8	3
М-1	3	6	100	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6
М-2	4	2	4,1	100	2,8	7,3	6,0	3,2
М-3	6	4	3,6	2,8	100	6,4	4,5	5,1
М4	2	9	3,2	7,3	Б.4	100	2,2	6.1
М-5	4	8	2,2	6,0	4,6	2,2	100	5,8
М-6	1	3	3.6	3,2	5,1	6,1	6,8	100

4. Сформувати матрицю X, знайти суми елементів за рядками та стовпцями й обчислити значення цільової функції (ЦФ):

5. Сформувати табличну модель задачі комівояжера й знайти її розв'язок. Як і передбачалося, шуканий контур розпався на три підконтури: (1-6-1), (2-3-2), (4-5-4), які побудовано на діаграмі, значення плану: $(x_{16}, x_{23}, x_{32}, x_{45}, x_{54}, x_{61}) = 1$, інші – нулі, ЦФ = 17,34:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	
2				3	4	6	2	4	1	
3				6	2	4	9	8	3	
4	M-1	3	6	100,0	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6	
5	M-2	4	2	4,1	100,0	2,8	7,3	6,0	3,2	
6	M-3	6	4	3,6	2,8	100,0	6,4	4,5	5,1	
7	M-4	2	9	3,2	7,3	6,4	100,0	2,2	6,1	
8	M-5	4	8	2,2	6,0	4,5	2,2	100,0	5,8	
9	M-6	1	3	3,6	3,2	5,1	6,1	5,8	100,0	
10										
11					M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	Сума
12				M-1							0
13				M-2							0
14				M-3							0
15				M-4							0
16				M-5							0
17				M-6							0
18				Сума	0	0	0	0	0	0	0,00

Рис. 7.2. Розв'язування задачі комівояжера за допомогою симплекс-методу

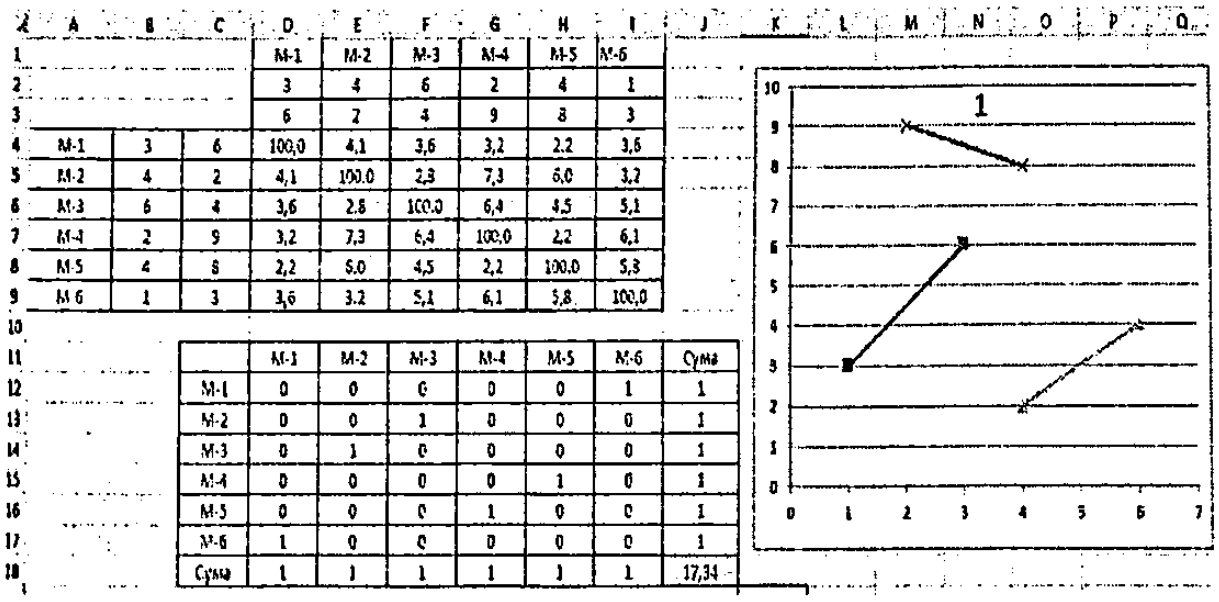


Рис. 7.3. Результат після першого запуску «Розв'язувача»

6. Необхідно розірвати підконтур (1-6-1), для цього формуємо додаткове обмеження: $x_{16} + x_{61} < 1$ й уводимо в модель; отримано новий результат, за яким є два підконтури: (1-3-2-6-1) та (4-5-4), значення ЦФ збільшилося на 0,33:

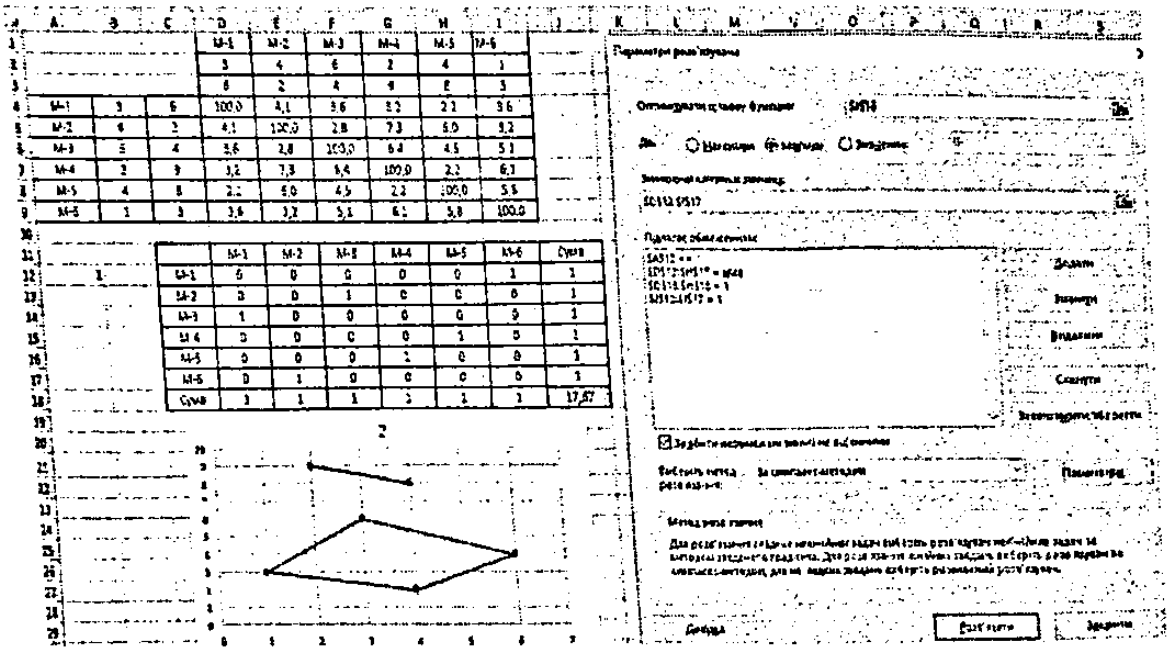


Рис. 7.4. Результат після другого запуску «Розв'язувача»

7. Вирішуємо розірвати підконтур (4-5-4), для цього формуємо друге додаткове обмеження: $x_{45} + x_{54} < 1$ і вводимо в модель; отримано новий результат, за яким є два підконтури: (1-5-4-1) та (2-3-6-2), значення ЦФ збільшилося на 1,05:

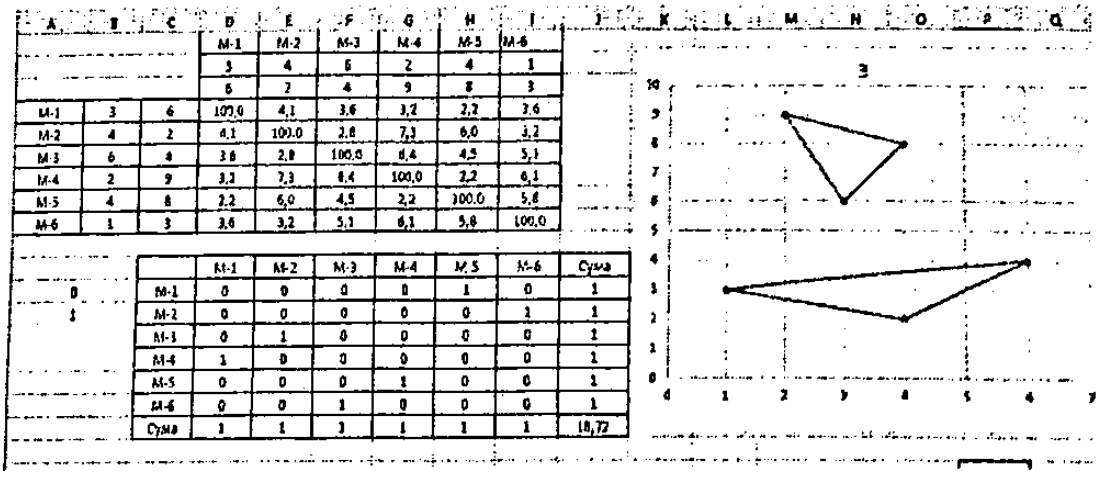


Рис. 7.5. Результат після третього запуску «Розв'язувача»

8. Необхідно розірвати підконтур (1-5-4-1), для цього формуємо третє додаткове обмеження: $x_{15} + x_{51} + x_{54} + x_{45} + x_{41} + x_{14} < 2$ і вводимо його в модель; отримано новий результат, за яким знайдено оптимальний контур (1-4-5-3-2-6-1), його мінімальна довжина (значення ЦФ) дорівнює 19,47:

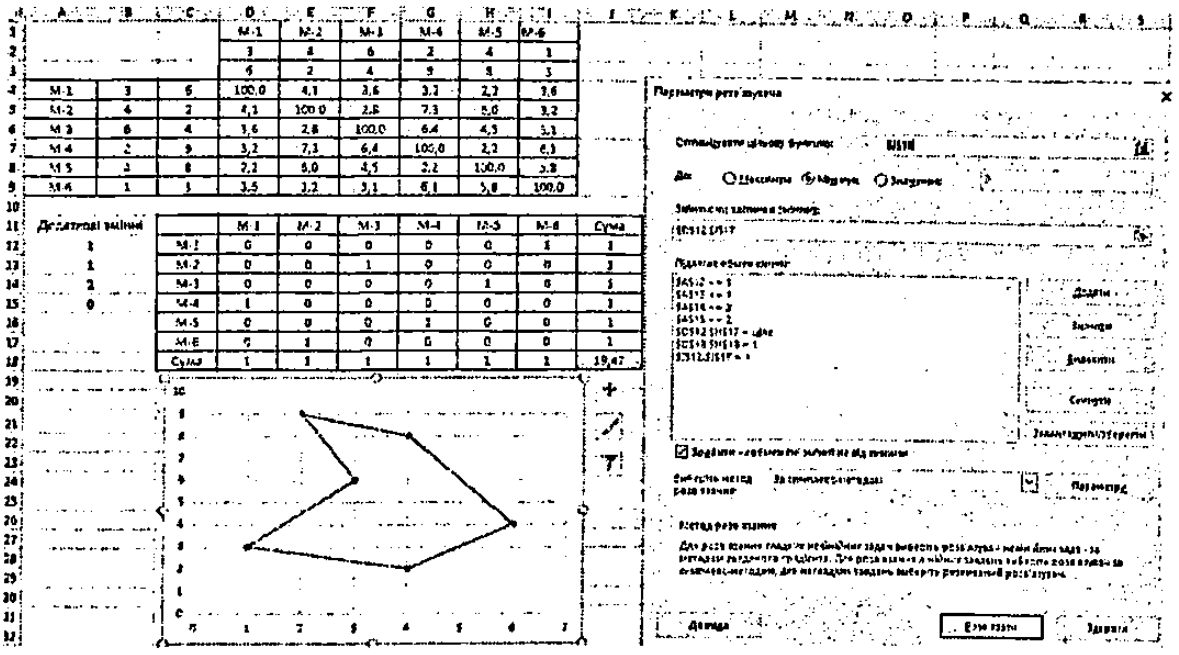


Рис. 7.6. Результат після четвертого запуску «Розв'язувача»

Отже модель лінійного програмування вимагає виконувати багато допоміжної роботи щодо визначення підконтурів для розірвання та введення відповідних обмежень.

Контрольні питання

1. Яка максимальна кількість вузлів можлива при розв'язуванні даної задачі за допомогою симплекс-методу?
2. Як побудувати замкнутий контур на діаграмі MS Excel?
3. Яка процедура розірвання контуру?

Лабораторна робота 8
Розв'язування задачі комівояжера методом «гілок і границь» дискретного програмування та еволюційним методом

Теоретична довідка

Уперше метод гілок і границь щодо до ЗЦЛП був запропонований у 1960 році у роботі Ленда й Дойга. Цей підхід не відіграв істотного впливу на розвиток методів розв'язування задач дискретного програмування.

Вдруге народження методу гілок і границь пов'язане з роботою Літла, Муті, Суіні й Керела (1963 р.). Ця робота[1] присвячена розв'язуванню задачі комівояжера. Використання методу пояснюється тим, що автори відзначили надзвичайну широту методу та показали важливість використання специфіки задачі при його застосуванні.

У загальному випадку ЦЗЛП формулюється в такий спосіб: знайти оптимум функції:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt; \tag{8.1}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad i=\overline{1,m}; \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0; \quad j=\overline{1,n}; \tag{8.3}$$

$$x_j => цілі; \quad j=\overline{1,n}. \tag{8.4}$$

Особливості методу

1. Безпосередньо з алгоритму необхідно, щоб метод гілок і границь застосовувався як для задач повністю цілочисельного програмування, так і для задач частково цілочисельного програмування.

2. Для цього методу несуттєва проблема помилок округлення.

3. Геометрична інтерпретація методу: гіперплощина, що визначається функцією мети задачі, переміщається в середину області припустимих рішень до зустрічі з найбільш близьким цілочисельним планом (рис. 8.1.).

---

[1] Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W. and. Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operations Research.. 1963. № 11 P. 972–989.

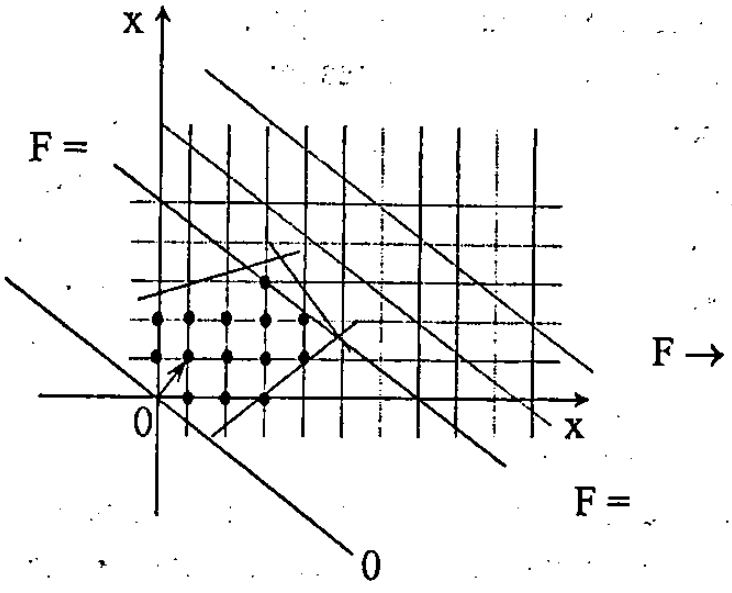


Рис. 8.1. Геометрична інтерпретація методу гілок та границь

4. Нові обмеження виду $x_j \le [x_{j0}];\ x_j \ge [x_{j0}]+1$ відіграють роль розсічень ОПР.

5. Коли вводять нові обмеження зазначеного типу, то немає необхідності розв'язувати ЗЛП заново, а можна скористатися попередньою ітерацією, уводячи нові обмеження. Розглянемо приклад.

Спосіб 2. Метод гілок та границь

Постановка задачі (Л.Р.5.).

Математична модель

1. Знайти план $X = \{x_{ij}\}$ та $U = \{u_i\}$, щоб
2. ЦФ
3. $$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to min$$
4. за обмежень:

а) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

з кожного вузла можна вийти 1 раз;

б) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

у кожен вузол можна увійти 1 раз;

ці два обмеження забезпечують умову 1-разового відвідування кожного міста та граничних умов: усі x_{ij}. $\in \{0,1\}$.

в) $u_i-u_j+nx_{ij}\leq n-1$, j,i=2,3,…,n, i≠j, u_i, u_j довільні значення, при i=j, $u_i-u_j+nx_{ij}=0$; це обмеження забезпечує неможливість розриву контуру на окремі підконтури та граничних умов: усі x_{ij}. $\in \{0,1\}$.

Таким чином, для задачі обходу n міст треба знайти: n^2 значень матриці X, n-1 значень вектора U, разом: $n^2 + n - 1$ невідомих із загальним числом обмежень $n^2 + 1$. Отже, з допустимим числом невідомих (200) і обмежень (100) в Excel можна розв'язати задачу комівояжера з числом міст до 13.

Хід роботи

Виконати пункти 1–4 із попередньої лабораторної роботи.

5. Сформувати допоміжну матрицю з метою реалізації обмеження (b), використавши шаблон матриці X.

6. Визначити стовпець із 5 клітинок для елементів u. шуканого вектора U, **транспонуванням u_i** визначити рядок з 5 клітинок для елементів u_j.

7. Сформувати матрицю лівих частин обмежень, на її діагоналі нулі:

D25 =SJ25-D$29+5*D14

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21			Обмеження по додаткових змінних						
22			M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	Ui
23		M-1							10
24		M-2	-4	0	4	-3	-2	1	6
25		M-3	-3	1	0	-2	4	2	7
26		M-4	4	3	2	0	1	4	9
27		M-5	-2	2	1	4	0	3	8
28		M-6	-5	4	-2	-4	-3	0	5
29			10	6	7	9	8	5	

Рис. 8.2. Матриця обмежень по додаткових змінних

8. У табличну модель внести обмеження (в), для цього у вікні Розв'язувач:

• у поле Змінюючи клітинки змінних додати адреси елементів u_j;

• у полі Обмеження додати обмеження на двійковий тип матриці X та обмеження (в);

• у вікні Параметри розв'язувача зняти прапорець з позиції Невід'ємні значення, оскільки змінна u. може набувати довільних значень.

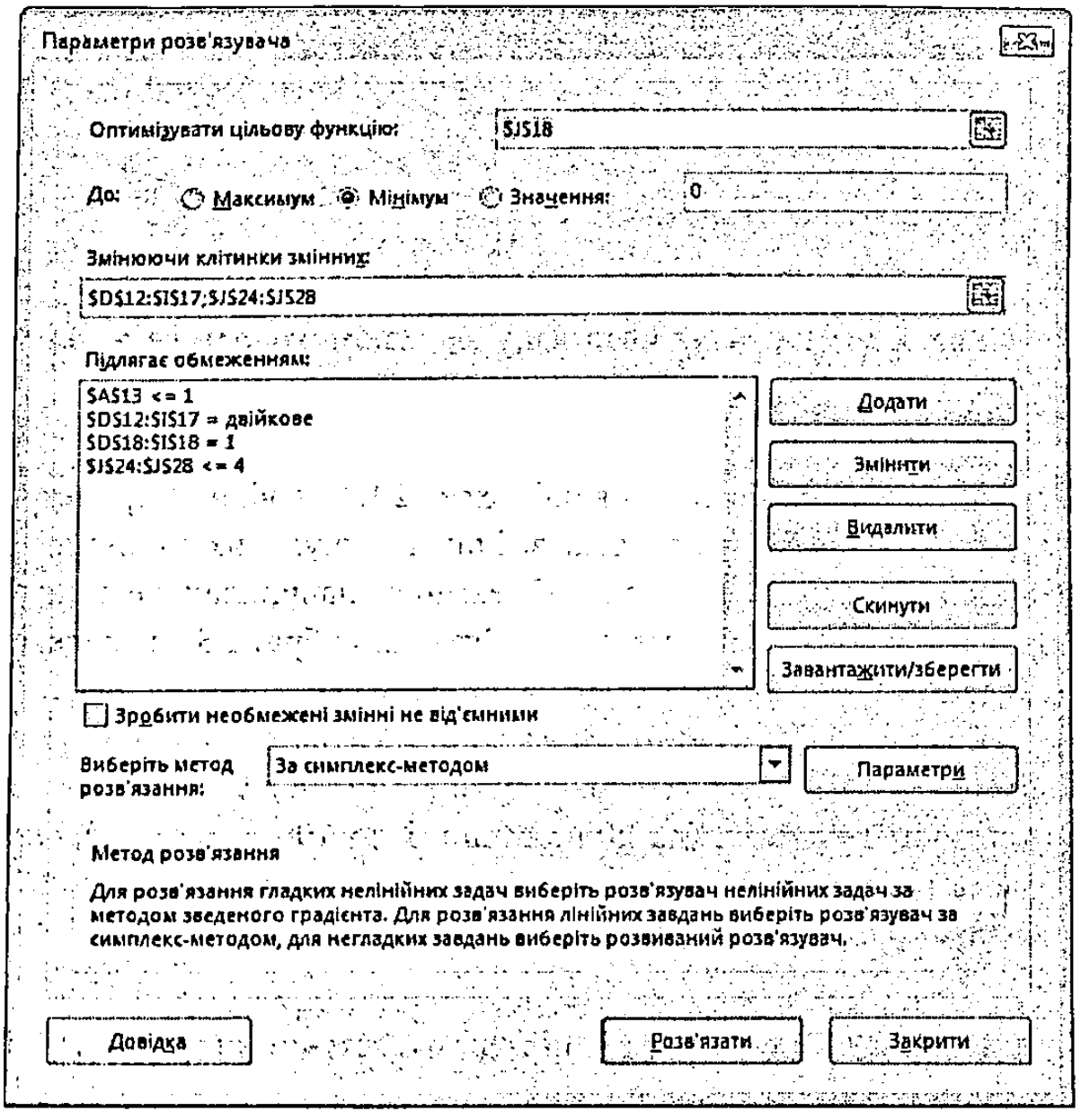
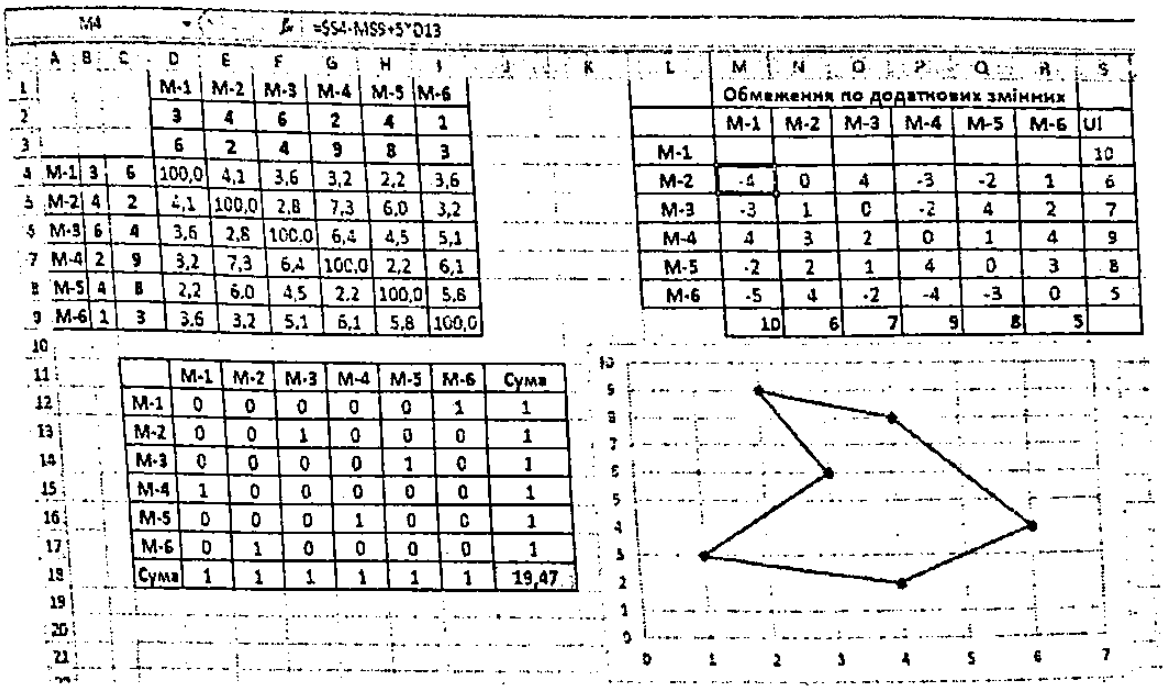


Рис. 8.3. Вікно параметрів розв'язувача

У результаті отримаємо матрицю обходу, де рядки відображають виходи, а стовпці входи. На основі матриці обходу побудуємо діаграму. Результат зображено на рис. 8.4.



	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6
	3	4	6	2	4	1
	6	2	4	9	8	3
M-1	100,0	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6
M-2	4,1	100,0	2,8	7,3	6,0	3,2
M-3	3,6	2,8	100,0	6,4	4,5	5,1
M-4	3,2	7,3	6,4	100,0	2,2	6,1
M-5	2,2	6,0	4,5	2,2	100,0	5,8
M-6	3,6	3,2	5,1	6,1	5,8	100,0

	Обмеження по додаткових змінних						
	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	Ui
M-1							10
M-2	-4	0	4	-3	-2	1	6
M-3	-3	1	0	-2	4	2	7
M-4	4	3	2	0	1	4	9
M-5	-2	2	1	4	0	3	8
M-6	-5	4	-2	-4	-3	0	5
	10	6	7	9	8	5	

	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	Сума
M-1	0	0	0	0	0	1	1
M-2	0	0	1	0	0	0	1
M-3	0	0	0	0	1	0	1
M-4	1	0	0	0	0	0	1
M-5	0	0	0	1	0	0	1
M-6	0	1	0	0	0	0	1
Сума	1	1	1	1	1	1	19,47

Рис. 8.4. Результат розв'язку за допомогою методу гілок та границь

Зауваження. У середовищі Excel 2016 у вікні Параметри розв'язувача треба внести такі зміни: для шуканих змінних Ui рекомендується внести певне обмеження, наприклад не менше 10, далі у полі Виберіть метод розв'язання вибрати За симплекс-методом.

Важливо! Цим методом можна знайти відразу шуканий контур обходу, але необхідно відзначити додаткові технічні можливості MS Excel (до 200 змінних і до 100 обмежень), тож область роботи цього методу суттєво обмежується граничними значеннями кількості невідомих та обмежень.

Спосіб 3. Еволюційний метод розв'язування задачі комівояжера

Цю ж задачу комівояжера для найкоротшого обходу 6 пунктів розв'яжемо за допомогою методу **Розвиваний розв'язувач** в Excel 2016.

Позначення:

i – поточний номер шуканої змінної (збігається із номером міста в контурі), i = 1,..., 6;

X ={x_{ij}} – шуканий вектор невідомих, X = {X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6};

D ={d(i,j)} – вектор відстаней між парами сусідніх вузлів у контурі обходу розміром з 6 елементів, де i < j (i передує j).

Задача оптимізації:

1) знайти план обходу X ={x_{ij}}, такий, щоб

2) ЦФ: довжина контуру рівна повинна бути мінімальною

3) $$K = \sum_{i,j=1}^{6} d_{ij} \rightarrow \min$$

i, j=1

4) за обмежень: $x_i \in$ **{всі різні}.**

Хід роботи

Повторити пункти 1–3.

4. Сформувати рядок X і заповнити його порядковими номерами, у наступній (n+1)-й клітинці зробити посилання на 1-й елемент цього рядка (щоб замкнути контур або цикл). Обчислити відстані між сусідніми клітинками за допомогою функції INDEX й обчислити їхню суму за допомогою функції SUM.

5. Командою Дані → Розв'язувач викликати вікно Параметри розв'язувача і заповнити його поля відповідним чином.

E12 =INDEX($D$4:$I$9;D11;E11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6		
2				3	4	6	2	4	1		
3				6	2	4	9	8	3		
4	M-1	3	6	100,0	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6		
5	M-2	4	2	4,1	100,0	2,8	7,3	6,0	3,2		
6	M-3	6	4	3,6	2,8	100,0	6,4	4,5	5,1		
7	M-4	2	9	3,2	7,3	6,4	100,0	2,2	6,1		
8	M-5	4	8	2,2	6,0	4,5	2,2	100,0	5,8		
9	M-6	1	3	3,6	3,2	5,1	6,1	5,8	100,0		
10											
11			X=	4	5	3	2	6	1	4	ЦФ
12			Відстань =		2,24	4,47	2,83	3,16	3,61	3,16	19,47

Рис. 8.5. Результат обчислення 3 способом

6. Натиснути на Параметри, визначити у цьому вікні режим роботи програми, ОК і в попередньому вікні натиснути Розв'язати.

Починається процес обчислень – у рядку стану внизу вікна поступово виводиться повідомлення такого вигляду, де зазначено: нове значення ЦФ, номер підзадачі і попереднє значення ЦФ.

Процес припиняється, коли значення ЦФ не змінюється в межах заданої точності або вичерпані граничні значення заданих параметрів і пропонується альтернатива: Продовжити/Зупинити.

Процес оптимізаційного моделювання завершується за командою Зупинити.

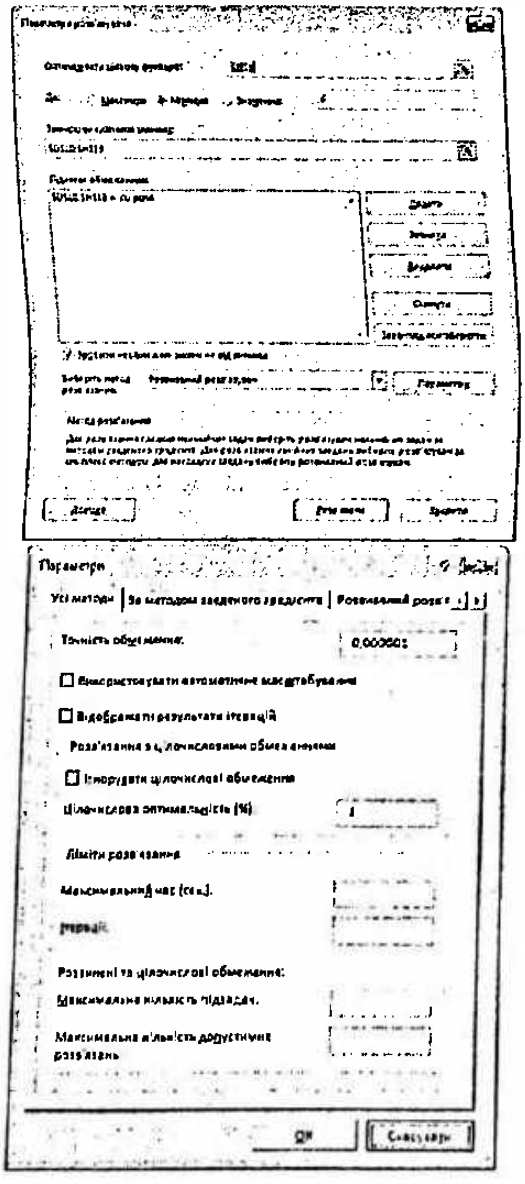
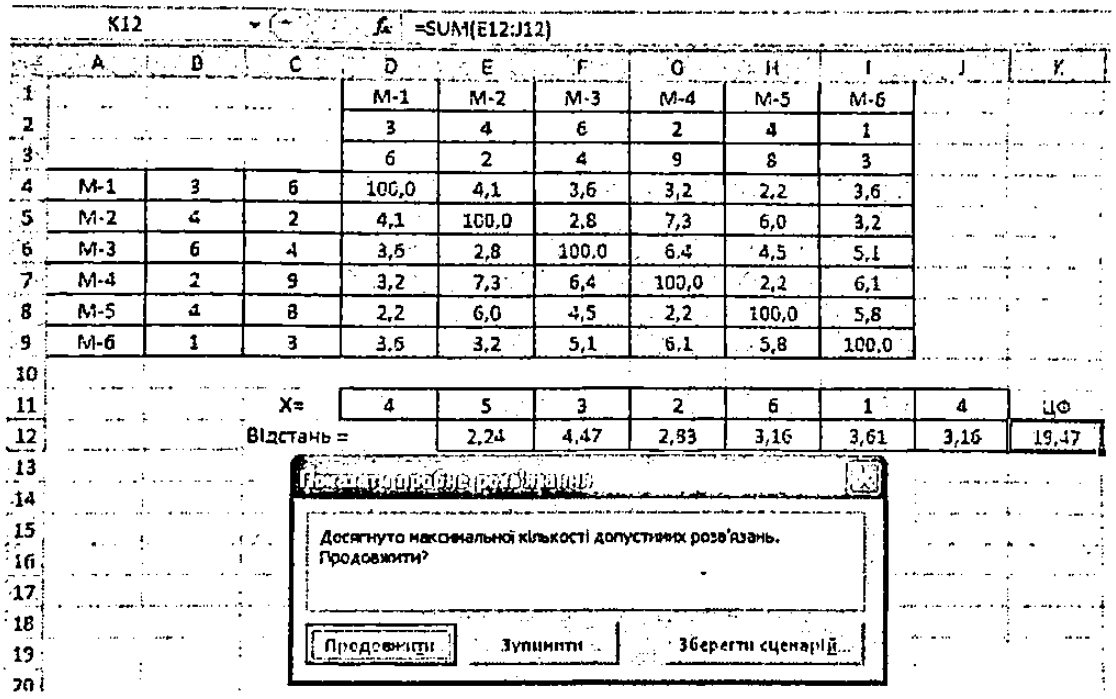


Рис. 8.6. Вікно параметрів роз'язувача

Знайдено оптимальний контур обходу X = {4, 5, 3, 2, 6, 1, 4} із мінімальною довжиною 19,47. Результат співпав з усіма попередніми результатами, але отримано його значно швидше з мінімальними витратами часу.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6		
2				3	4	6	2	4	1		
3				6	2	4	9	8	3		
4	M-1	3	6	100,0	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6		
5	M-2	4	2	4,1	100,0	2,8	7,3	6,0	3,2		
6	M-3	6	4	3,6	2,8	100,0	6,4	4,5	5,1		
7	M-4	2	9	3,2	7,3	6,4	100,0	2,2	6,1		
8	M-5	4	8	2,2	6,0	4,5	2,2	100,0	5,8		
9	M-6	1	3	3,6	3,2	5,1	6,1	5,8	100,0		
10											
11			X=	4	5	3	2	6	1	4	ЦФ
12			Відстань =		2,24	4,47	2,83	3,16	3,61	3,16	19,47

Рис. 8.7. Результат використання Розвиваного розв'язувача

Задача 2

Крім очевидного застосування задачі комівояжера на практиці, існує ще ряд задач, що приводяться до вирішення задачі комівояжера.

Розв'яжіть наступну задачу будь-яким зручним способом. Таблицю вхідних даних заповніть самостійно (кількість кольорів 4 та 8 біт).

Задача про виробництво фарб. Є виробнича лінія для виробництва n фарб різного кольору; позначимо ці фарби номерами 1,2... n. Усю виробничу лінію будемо вважати одним процесором. Вважатимемо також, що одноразово процесор виробляє тільки одну фарбу, тому фарби потрібно виробляти в деякій послідовності. Оскільки виробництво циклічне, то фарби треба робити в циклічному порядку $\pi=(j_1,j_2,..,j_n,j_1)$. Після закінчення виробництва фарби і перед початком виробництва фарби j треба відмити обладнання від фарби i. Для цього потрібен час C [i, j]. Очевидно, що C [i, j] залежить як від i, так і від j, та C [i, j] ≠ C [j, i]. При деякому обраному порядку доведеться на цикл виробництва фарб витратити час.

$$f = \sum_{(i,j)\in x} C_{ij} + \sum_{k=1}^{n} t_k,$$

де t_k – чистий час виробництва k-ої фарби (не враховуючи переналагодження). Однак друга сума у правій частині постійна, тому повний час на цикл виробництва мінімізується разом із загальним часом на переналагодження.

Контрольні питання

1. У чому суть задачі комівояжера?
2. Які способи розв'язування задачі комівояжера вам відомі?
3. Які обмеження на кожен спосіб розв'язування?
4. Який розмір матриці допускається?
5. У чому перевага еволюційного методу розв'язування?
6. Які висновки можете зробити із Звіту зі стійкості для кожного з методів?

ТЕМА 3. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лабораторна робота 9
ЗНП. Оптимальний портфель інвестицій. Модель Марковіца

Теоретична довідка
Нелінійне програмування

Математична модель задачі нелінійного програмування

Нелінійне програмування (НП) розглядає математичну модель, у якій використовуються нелінійні залежності або у цільової функції F, або у системі обмежень.

Універсального методу розв'язання нелінійних екстремальних задач НП не існує, тому що вони надзвичайно різноманітні. Це пояснюється тим, що система нерівностей дає множину рішень, яка в загальному випадку не є випуклою, або кількість крайніх точок нескінченна. У зв'язку з цим методи НП розробляються під спеціальні класи задач.

До найбільш відомих методів нелінійного програмування можна віднести:

- класичний метод оптимізації (за допомогою множників Лагранжа);
- метод Куна-Таккера;
- метод прямого пошуку;
- градієнтний метод;
- метод Ньютона та його модифікації;
- оптимізація при наявності обмежень (методи змінних допусків),
- метод множників Лагранжа, метод штрафних функцій та інші.

Метод штрафних функцій у поєднанні **з методами пошуку безумовного екстремуму є універсальним засобом** рішення задач математичного нелінійного програмування.

Математична модель ЗНП

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.1}$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\leq, =, \geq\} b_i \ (i=\overline{1,m}); \tag{9.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,n}). \tag{9.3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо **задачу нелінійного програмування.**

Основні труднощі розв'язування ЗНП

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок.

Лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок, близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак при побудові наближених лінійних задач можна отримати надто неточний розв'язок, який непридатний для використання.

Навіть питання щодо існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом – симплексним. При цьому не існує проблеми щодо доведення існування такого розв'язку, тобто в результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв'язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

1. Для задач нелінійного програмування **не існує універсального методу** розв'язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв'язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують **кілька локальних оптимумів**, що потребує пошуку серед них глобального.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає **оптимальний план**, може бути як граничною, так і знаходитися **всередині допустимої області розв'язків** (планів).

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати **множину допустимих розв'язків як неопуклу** або навіть складатися з довільних не пов'язаних між собою частин.

Одним з найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування. Нагадаємо, що вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків, утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення відшукання розв'язків такого типу задач.

Кожна із зазначених особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

Метод множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою,

яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Виходячи із умови існування локального екстремуму неперервної та диференційовної функції двох змінних.

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб критична точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, достатньо, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була визначена в околі критичної точки (x_1^0, x_2^0) та мала в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку.

Узагальнення необхідної умови існування локального екстремуму функції n змінних має аналогічний вигляд. Отже, для розв'язування задачі необхідно знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. У результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min) Z = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \tag{9.4}$$

за умов:

$$q_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{9.5}$$

де функції $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ і $q_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ мають бути диференційованими.

Задача (9.5), (9.6) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень q_i, $(i = \overline{1,m})$.

Детальніше про метод множників Лагранжа можна ознайомитись у посібнику із математичного програмування[1].

Економічна інтерпретація множників Лагранжа

З економічної точки зору множники Лагранжа інтерпретують як неявні (тіньові) ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями.

Отримані оптимальні значення множників Лагранжа відіграють важливу роль в аналізі чутливості рішень.

Таким чином, швидкість зміни оптимального значення функції мети, яка викликається зміною величини ресурсу b_i, визначається оптимальним значенням множника Лагранжа. Тобто ціна, яка визначається як величина зміни оптимального значення функції мети під впливом одиничного збільшення ресурсу, задається множником Лагранжа.

Побудова портфеля Г. Марковіца в Excel для фондового ринку

У цій роботі за допомогою засобів Excel розглянуто пошук оптимального за Г. Марковіцем портфеля інвестицій для акцій фондового ринку.

Портфель – це сукупність фінансових активів, об'єднаних разом для реалізації цілей інвестора, для максимізації прибутку і мінімізації збитків.

Модель Марковіца має такі основні припущення:

- за дохідність цінних паперів приймається математичне очікування дохідності;
- за ризик цінних паперів приймається середньоквадратичне відхилення дохідності;
- вважається, що дані минулих періодів, які використані при розрахунках дохідності і ризику, повністю відображають майбутні значення дохідності;
- ступінь і характер взаємозв'язку між цінними паперами виражається косфіцієнтом лінійної кореляції.

---

[1] Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. К.: КНЕУ, 2003. 452 с.

У моделі Марковіца допустимими є тільки стандартні портфелі, портфелі без коротких позицій (без продажу), тобто портфель складається тільки з придбаних акцій. Звідси перше обмеження, яке накладається на портфель, це позитивні частки всіх цінних паперів (x_i).

$$x_i > 0 \tag{9.6}$$

Друге обмеження полягає в тому, що сума всіх часток цінних паперів повинна складати 1, це правило нормування частин (2).

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{9.7}$$

Так само дохідність портфеля буде виглядати як сума дохідностей окремих акцій з вибраними ваговими коефіцієнтами. Оскільки кожен інвестор намагається максимізувати отримувану прибутковість, то необхідно буде максимізувати цю цільову функцію. У підсумку це буде представлено у вигляді (9.3):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i \to max \tag{9.8}$$

Крім прибутковості, інвестору необхідно також врахувати і ризик, пов'язаний з тією чи іншою акцією. Ризик, за Г. Марковіцем, виражається у вигляді середньоквадратичного відхилення δ_i кожної акції. Значення δ_P – це рівень прийнятного ризику для інвестора. Крім обліку середньоквадратичного відхилення окремих акцій, необхідно врахувати кореляцію між прибутковістю акцій – r_{ij}. Кореляція в нашому випадку для моделі Марковіца дорівнює нулю. У підсумку ризик усього портфеля представлений (9.4):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \delta_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot r_{ij} \cdot \delta_j \cdot \delta_i} < \delta_P \tag{9.9}$$

Економіко-математична модель задачі формування оптимального портфеля акцій максимальної ефективності, при якій ризик портфеля не перевищує заданого значення δ_P, і при врахуванні всіх обмежень на портфель прийме такий вигляд (10.5):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i \to max \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \delta_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot r_{ij} \cdot \delta_j \cdot \delta_i} < \delta_p \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ x_i > 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Зворотна задача оптимізації портфеля зводиться до вибору такої структури портфеля, дохідність якого вища або дорівнює заданому значенню m_p, а ризик мінімальний. Економіко-математична модель задачі в цьому випадку набуде вигляду (9.6):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i \geq m_r \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \delta_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot r_{ij} \cdot \delta_j \cdot \delta_i} \to min \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ x_i > 0 \end{cases} \quad (9.11)$$

Зрозуміло, що для N цінних паперів необхідно розрахувати N(N-1)/2 коефіцієнтів кореляції.

Модель портфеля Джеймса Тобіна та оцінка вартості активів

Розглянемо модель формування портфеля цінних паперів за моделлю ще одного видатного американського економіста – Джеймса Тобіна.

Отже, є дві ключові відмінності моделі Тобіна від моделі Марковіца: це використання так званих «Безризикових активів», що дають певну прибутковість без ризику просідання (найчастіше це облігації або банківські депозити); і можливість застосування коротких угод поряд з довгими (у моделі Марковіца застосовується стратегія «only long»). Таким чином, у моделі Джеймса Тобіна при відборі інвестиційних інструментів не потрібно застосовувати фільтрацію за чинниками потенційного просідання.

Крім того, важливою відмінністю є також і те, що, на відміну від моделі Марковіца або скажімо Блека, у цій моделі більший акцент робиться на структурі ринку, ніж структурі допустимих портфелів. Тобто іншими словами – класифікація можливих активів ширша і може включати навіть синтетичні опціонні позиції. Однак є одне обмеження – сума всіх складових повинна дорівнювати 100 %, включаючи частку безризикових активів і синтетичних угод. Це дозволяє хеджувати цілий ряд ризиків і навіть сформувати так званий «Бета-нейтральний портфель».

Бета-нейтральний портфель – інвестиційний портфель з величиною бета-коефіцієнта поблизу нульових значень. Основною перевагою Бета-нейтрального портфеля є практично повна відсутність залежності його прибутковості від прибутковості ринкового індексу.

Хід роботи

Задача 1. Модель Марковіца. Максимальний дохід

Розрахувати максимальну дохідність при заданому ризику до 0,2 %.

1. Використовуючи таблицю котирувань акцій компаній (додаток), побудувати таблицю відсоткових змін котирувань акцій щодо попереднього періоду (відношення поточного періоду до попереднього – 100 %).

2. Очікувана дохідність обчислюється як середнє значення із таблиці відсоткових змін акцій для кожної з компаній.

3. Побудувати матрицю коваріації (кожен з кожним), використовуючи функцію **Covar**.

4. Дохідність портфеля обчислюється як сума добутків елементів векторів – очікувана дохідність × вага, використовуючи функцію SUMPRODUCT.

5. Ризик портфеля обчислюється як добуток вектора вага на матрицю коваріації та на транспонований вектор вага, використовуючи функцію MMULT (повертає добуток матриць із двох масивів).

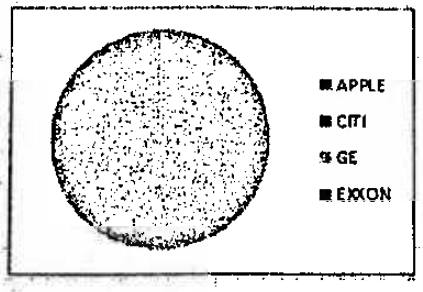
=MMULT(MMULT(B27:F27;B17:F21);C8:C12)

=COVAR($S$6:$S$57;S6:S57)

	B
1	Розрахуємо максимальну дохідність при заданому ризику
2	Розглянемо чотири акції: APPLE, CITI, General Electric, Exxon Mobil ()
3	Знайдемо максимальну дохідність при ризику не більше 0,2%

1) Розрахунок індивідуальної дохідності

	Очікувана дохідність	Вага
	e	w
APPLE	1,8%	0,889927563
CITI	0,4%	0
GE	0,3%	0
EXXON	0,2%	0,110072437
ALCOA	1,2%	0
сума		100,0%



2) Розрахунок коваріації матриці

	APPLE	CITI	GE	EXXON	ALCOA
APPLE	0,0023	0,0052	0,0022	0,0007	0,0024
CITI	0,0052	0,0359	0,0124	0,0022	0,0083
GE	0,0022	0,0124	0,0080	0,0013	0,0047
EXXON	0,0007	0,0022	0,0013	0,0011	0,0015
ALCOA	0,0024	0,0083	0,0047	0,0015	0,0072

3) Розрахунок ризику і дохідності портфеля

Дохідність портфеля	1,58%

Рис. 9.1. Відображення вихідних даних для моделі Марковіца

Важливо. При завершенні введення останньої формули потрібно натиснути Ctrl+Shift+Enter. Ця комбінація використовується під час роботи із масивами.

{=MMULT(MMULT(B27:F27;B17:F21);C8:C12)}

	C	D	E	F	G
23	3) Розрахунок ризику і дохідності портфеля				
24	Дохідність портфеля	1,58%			
25					
26		APPLE	CITI	GE	EXXON	ALCOA
27	Вага	0,889927563	0	0	0,1100724	0
28						
29	Ризик портфеля	0,2%				
30						
31	4) Пошук рішення					

Рис. 9.2. Результат розв'язування прямої задачі Марковіца

Задача 2. Модель Марковіца. Мінімальний ризик.

Розв'язати зворотну задачу Марковіца за умови дохідності портфеля інвестицій 1,5 % та мінімального ризику.

Проаналізуйте зміст значення множника Лагранджа та перевірте власні припущення, використовуючи побудовані моделі.

Завдання для самоконтролю

Розв'яжіть сформульовану задачу та знайдіть оптимальний портфель інвестицій використовуючи модель Джеймса Тобіна.

Контрольні питання

1. Які припущення характерні для моделі Марковіца?
2. Які дві задачі моделі Марковіца Вам відомі?
3. Які обмеження характерні для моделі Марковіца?
4. Яка відмінність між моделями Марковіца та Шарпа?

Лабораторна робота 10
Оптимальний портфель інвестицій. Модель Шарпа

Теоретична довідка

Це типова, важлива і поширена фінансова задача, яка з'являється у практиці ресурсного забезпечення, страхування, інвестування, банківської справи тощо, де йдеться про пошук оптимального варіанта розподілу цілого (як правило, суми грошей) на окремі частини.

На відміну від моделі Марковіца, яка розглядає взаємозв'язок прибутковості цінних паперів, модель Шарпа розглядає взаємозв'язок прибутковості кожного цінного паперу з прибутковістю ринку в цілому.

Шарп мав на меті спростити вхідні дані (перш за все коваріації між дохідностями цінних паперів), необхідні для рішення задачі оптимізації портфеля за Марковіцем.

Для цього була використана **однофакторна модель залежності дохідності довгострокового цінного папера від фактора – середньозваженої за капіталізацією фондових активів дохідності ринку.**

Основні припущення моделі Шарпа:

• як дохідність цінного папера використовується математичне сподівання дохідності;

• існує деяка безризикова ставка дохідності R_t, тобто дохідність певного цінного папера, ризик якого завжди мінімальний порівняно з іншими цінними паперами;

• взаємозв'язок відхилень дохідності цінного папера від безризикової ставки та відхилення дохідності ринку загалом від безризикової ставки описується лінійною регресійною функцією;

• під ризиком цінного папера мається на увазі ступінь залежності змін дохідності цінного папера від змін дохідності ринку загалом;

• вважається, що дані минулих періодів, які вико ристовуються при розрахунку дохідності та ризику, відображають повною мірою майбутні значення дохідності.

За моделлю Шарпа дохідність портфеля цінних паперів – це середньозважена дохідність цінних паперів, що його складають, з урахуванням їх ризику β.

Дохідність портфеля визначається за формулою:

$$R_p = R_f + \sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i \cdot W_i\right) + \left(R_m - R_f\right) \cdot \sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right), \quad (10.1)$$

де R_f – безризикова дохідність;

R_m – очікувана дохідність ринку в цілому.

Ризик портфеля цінних паперів може бути знайдений за допомогою оцінки середнього квадратичного відхилення функції (1), і визначається за формулою:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)\right)^2 \cdot \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{\varepsilon i}{}^2 \cdot W_i^2\right)}, \quad (10.2)$$

де σ_m – середньоквадратичне відхилення дохідності ринку загалом, тобто ризикованість ринку; β_i – β-ризик і-го цінного паперу. $\sigma_{\varepsilon i}$ – середньоквадратичне відхилення і-го цінного паперу.

При використанні моделі Шарпа для розрахунку характеристик портфеля пряма задача, при якій дохідність максимізується, набуває вигляду:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{N}(\alpha_i \cdot W_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{N}(\beta_i \cdot W_i) \to \max; \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(\beta_i \cdot W)_i\right)^2 \cdot \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{ai}{}^2 \cdot W_i^2\right)} \le \sigma_{req}; \\ 0 \le W_i \le W_i^* \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \quad (10.3)$$

Зворотна задача, при якій ризик мінімізується:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{N}(\alpha_i \cdot W_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{N}(\beta_i \cdot W_i) \ge R_{req}; \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(\beta_i \cdot W)_i\right)^2 \cdot \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{ai}{}^2 \cdot W_i^2\right)} \to \min; \\ 0 \le W_i \le W_i^* \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \quad (10.4)$$

При практичному застосуванні моделі Шарпа для оптимізації фондового портфеля використовуються такі припущення і формули:

1. За безризикову ставку дохідності беруть прибутковість державних цінних паперів, наприклад, облігацій внутрішньої державної позики.

2. Як прибутковість ринку цінних паперів у цілому в період використовуються експертні оцінки ринкової прибутковості від аналогічних компаній, із засобів масової інформації. В умовах розвиненого фондового ринку для цих цілей прийнято використовувати будь-які фондові індекси. Для невеликого за кількістю цінних паперів фондового ринку приймається середнє значення прибутковості цінних паперів, що становлять ринок, за цей же період і:

$$r_{mt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_{it}}{N}, \quad (10.5)$$

де r_{mt} – дохідність ринку цінних паперів у період t, r_{it} – дохідність і-го цінного паперу за період t.

3. β_i – ризик і-го цінного паперу обчислюється за формулою:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{var}(R_m)}. \tag{10.6}$$

4. Надлишкова дохідність цінного паперу розраховується за формулою:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - R_{ft})}{T} - \beta_i \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_{mt} - R_{ft})}{T}. \tag{10.7}$$

5. Залишковий ризик цінного паперу має такий вигляд:

$$\sigma_{\varepsilon i} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(r_{it} - R_f - \alpha_i - \beta_i \cdot (r_{mt} - R_f)\right)^2}{T}. \tag{10.8}$$

6. Ризик ринку цінних паперів загалом визначається за формулою:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T}\right)^2}{T}}. \tag{10.9}$$

Основний недолік моделі Шарпа – необхідність прогнозування дохідності фондового ринку і безризикової ставки дохідності. Модель не враховує ризик коливань безризикової дохідності. Крім того, при значній зміні співвідношення між безризиковою дохідністю та дохідністю фондового ринку модель дає похибки. Таким чином, модель Шарпа може застосовуватися при розгляді великої кількості цінних паперів, що описують велику частину відносно стабільного фондового ринку.

Задача

Інвестор бажає вкласти певну суму грошей у певну кількість цінних паперів (ЦП) і хоче визначити, яку частину цієї суми

найкраще вкласти у кожен вид ЦП. Обраний набір ЦП носить назву інвестиційний портфель.

Кращим може бути один з двох альтернативних варіантів:

- мінімізація ризику при обмеженні на дохід;
- максимізація доходу при обмеженні на ризик.

В інвестиційному менеджменті набір частин суми інвестування називається портфелем, оптимальним портфелем є такий набір, який інвестор визначає для себе кращим згідно з відношенням між прибутковістю вкладень і ризиком втрати.

Дохід, отриманий за певний період часу від інвестування певної суми, яка виросла за цей період до деякої величини, тобто числом (позитивним чи негативним), обчислюється за такою формулою:

$$R = \frac{S - I}{I},$$

де S – сума, отримана за період, I – сума інвестицій.

Ризик у теорії інвестування прийнято вимірювати величиною можливого розкиду доходу портфеля від середнього значення, цей розкид у статистиці називають варіацією або дисперсією. Він обчислюється за формулою:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} D_i I_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} COV_i I_i I_j$$

Початкові дані для цього завдання відображені в таблиці статистики доходів для всіх ЦП, зібраних за певну кількість періодів. З цією таблиці можна отримати:

- **середнє значення** доходу від визначеного ЦП:=AVERAGE(Діапазон);
- **варіацію (дисперсію)** доходу від визначеного ЦП:=VAR.P(Діапазон);
- **коваріацію** (число, яке характеризує залежність доходу від двох ЦП, які певним способом пов'язані між собою і впливають один на одного) доходу від визначеного ЦП:= COVARIANCE.P (Діапазон 1; Діапазон 2).

Існує два варіанти цієї задачі:

1) значення середніх доходів, їх варіацій і коваріацій задані (модель Марковіца);

2) задана статистика доходів, з якої знаходять значення середніх доходів, їх варіацій і коваріацій (модель Шарпа).

Хід роботи

Розглянемо два варіанти моделі Шарпа (на мінімум і максимум).

Задача 1. Мінімальний ризик

Інвестування стосується трьох цінних паперів, для яких відомо тільки прибутковість за 12 місяців, а дисперсію і коваріацію, які є оцінками ризику, потрібно знайти із даної статистики прибутковості ЦП. Необхідно визначити значення оптимального портфеля, яке забезпечить мінімальний ризик. При чому зафіксоване обмеження на величину доходу (5 %) і на величину першого ЦП (не більше як (50-n[1]) % від загальної суми).

Необхідно знайти план інвестування (портфель) такий, щоб

1. Загальний ризик:

$$ЗР = D(ЦП_1) \times I(ЦП_1)^2 + D(ЦП_2) \times I(ЦП_2)^2 + D(ЦП_3) \times I(ЦП_3)^2 + 2 \times (COV(ЦП_{12}) \times I(ЦП_1) \times I(ЦП_2) + COV(ЦП_{13}) \times I(ЦП_1) \times I(ЦП_3) + COV(ЦП_{23}) \times I(ЦП_2) \times I(ЦП_3)) \rightarrow min$$

де D – дисперсія;

ЗР – загальний ризик;

COV – коваріація;

I – сума інвестицій.

2. При обмеженнях:

- сума частин портфеля = 100 %;
- сума доходу = 5 %;
- вкладення в $ЦП_1 \leq (50\text{-}n)$ %;
- всі змінні більші нуля.

---

[1] n – порядковий номер студента в журналі.

H14 =SUM(E14:G14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Оптимальний портфель інвестицій								
2	Статистика								
3		Дохід			Дисперсія				
4	Місяць	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3		
5	Січень	3,0%	2,5%	4,9%	0,0012	0,0013	0,0612		
6	Лютий	1,3%	2,0%	2,0%	Коваріація				
7	Березень	2,6%	2,6%	1,9%	ЦП 1-ЦП 2	ЦП 1-ЦП 3	ЦП 2-ЦП 3		
8	Квітень	-1,6%	-2,2%	-2,8%	0,0008	-0,0012	0,0034		
9	Травень	-2,1%	1,4%	6,9%					
10	Червень	3,6%	1,7%	-3,5%	Портфель			Сума	Обмеження
11	Липень	3,8%	3,1%	1,3%	26,0%	46,1%	27,9%	100,0%	100%
12	Серпень	8,9%	3,5%	7,2%					
13	Вересень	9,0%	9,5%	2,1%	Дохід			Дохідність ПЦП	
14	Жовтень	8,3%	9,0%	1,1%	0,91%	1,47%	2,62%	5,00%	5%
15	Листопад	3,5%	-2,2%	0,6%					
16	Грудень	1,6%	7,5%	90,8%	Ризик		Мн. Лагр.		
17	Ср. дохід	3,49%	3,20%	9,38%	0,60%	min	53,70%		

Рис. 10.1. Зображення аркуша розв'язку прямої задачі моделі Шарпа

Множник Лагранжа отримуємо зі **«Звіту про стійкість».**

Проаналізуйте значення та зміст множника Лагранжа для такої задачі.

Задача 2. Максимальний дохід.

Взявши за основу формулювання із попередньої задачі,. потрібно знайти значення оптимального портфеля, яке забезпечить максимальний дохід. Зафіксоване обмеження на величину ризику (1 %) і на величину ЦП (не більше як 0,4 загальної суми).

1. Знайти план інвестування (портфель) такий, щоб

2. **Загальний дохід** = Середній дохід * Сума інвестування → мах.

3. **При обмеженнях**: Сума частин портфеля = 100 %.

а) загальний ризик

$$ЗР = D(ЦП_1) \times I(ЦП_1)^2 + D(ЦП_2) \times I(ЦП_2)^2 + D(ЦП_3) \times I(ЦП_3)^2 + 2 \times (COV(ЦП_{12}) \times I(ЦП_1) \times I(ЦП_2) + COV(ЦП_{13}) \times I(ЦП_1) \times I(ЦП_3) + COV(ЦП_{23}) \times I(ЦП_2) \times I(ЦП_3)) \leq 1\ \%;$$

b) вкладення в ЦП ≤ 40 %,

c) всі невідомі більше нуля.

H11 =SUM(E11:G11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Оптимальний портфель інвестицій								
2	Статистика								
3		Дохід			Дисперсія				
4	Місяць	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3		
5	Січень	3,0%	2,5%	4,9%	0,0012	0,0013	0,0612		
6	Лютий	1,3%	2,0%	2,0%	Коваріація				
7	Березень	2,6%	2,6%	1,9%	ЦП 1-ЦП 2	ЦП 1-ЦП 3	ЦП 2-ЦП 3		
8	Квітень	-1,6%	-2,2%	-2,8%	0,0008	-0,0012	0,0034		
9	Травень	-2,1%	1,4%	6,9%					
10	Червень	3,6%	1,7%	-3,5%	Портфель			Сума	Обмеження
11	Липень	3,8%	3,1%	1,3%	40,0%	20,7%	39,3%	100,0%	40%
12	Серпень	8,9%	3,5%	7,2%					
13	Вересень	9,0%	9,5%	2,1%	Дохід			Дохідність ПЦП	
14	Жовтень	8,3%	9,0%	1,1%	1,40%	0,66%	3,68%	*5,74%*	макс
15	Листопад	3,5%	-2,2%	0,6%					
16	Грудень	1,6%	7,5%	90,8%	Ризик		Мн. Лагр.		
17	Ср. дохід	3,49%	3,20%	9,38%	*1,00%*	<=1%	*53,70%*		

Рис. 10.2. Зображення аркуша розв'язку зворотної задачі моделі Шарпа (про максимальний дохід)

Проаналізуйте зміст значення множника Лагранджа та перевірте власні припущення, використовуючи побудовану модель.

Контрольні питання

1. Який зміст коефіцієнта Лагранжа?
2. Що таке дисперсія?
3. Що таке коваріація?
4. Як обчислюється ризик інвестицій?
5. Які два варіанта цієї задачі вам відомі?
6. За якою формулою обчислюється надлишкова дохідність цінного паперa?
7. За якою формулою обчислюється залишковий ризик цінного паперу?
8. За якою формулою обчислюється ризик ринку цінних паперів загалом?

Лабораторна робота 11
Нелінійне програмування.
Оптимальний план виробництва

Задача 1

У задачі вважається, що дохід нелінійно залежить від обсягів випуску, оскільки ціна реалізації за продукт представлена нелінійною функцією, яка залежить від обсягу реалізації. Потрібно знайти оптимальний план виробництва трьох видів продуктів з використанням наявних чотирьох видів машин і покупки п'яти видів сировини, де дохід від реалізації продукту визначається величиною:

Дохід = К-сть продукції × Ціна реалізації,

де ціна реалізації – задана нелінійна функція, яка залежить від обсягу реалізації:

$$\text{ціна р-ції} = \begin{cases} \text{БЦ}, & \text{к-сть} \le \dfrac{\text{попит}}{4} \\ \text{БЦ} - \dfrac{\text{к-сть} * \text{БЦ}}{2 * \text{попит}}, & \text{к-сть} \le \dfrac{\text{попит}}{2} \\ \dfrac{\text{БЦ}}{2}, & \text{к-сть} > \dfrac{\text{попит}}{2} \end{cases},$$

де БЦ – базова ціна.

Завдання

Знайти оптимальний план виробництва за умови одержання максимального прибутку.

Хід роботи

Цільова функція (прибуток) є різниця між доходом від реалізації всієї продукції і витратами на їх виробництво.

Економіко-математична модель

Знайти такий план виробництва, якщо

Прибуток = Дохід – Витрати → мах,

де

- Дохід = Ціна реалізації × План;
- Вартість = К-сть сировини × Ціна.

Необхідно врахувати, що запас часу задається відповідно до номера студента в журналі.

Таблиця 11.1

Запаси обробки деталей кожною із машин

	Машина 1	Машина 2	Машина 3	Машина 4
Запас (хв.)	1000+n·10	1100+n·10	1200+n·10	1200-n·10

Особливістю цієї задачі є те, що на оптимальний план виробництва впливає ряд параметрів, які вимірюються у різних одиницях. Зокрема, для випуску певного продукту потрібно залучити всі машини із різною тривалістю, використати матеріали у певній пропорції, причому накладаються обмеження як на матеріали, максимальну тривалість залучення машин, так і попит на даний продукт.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3				
3	План	*25,0*	*19,2*	*28,9*				
4	Баз. ціна	90	100	70	Дохід	Затрати	Прибуток	
5	Дохід	2250,0	1458,8	1536,5	*5245,1*	*2777,0*	*2468,1*	
6	Попит	100	40	60				
7	Ціна р-ції	90,0	76,0	53,1				
8	Машинні ресурси	Тривалість обробки (хв/од.)			Запас (хв.)	Затрати (хв.)	Залишок	Мн. Лагр.
9	Машина 1	20	10	10	1200	981,1	218,9	0
10	Машина 2	12	28	16	1300	1300,0	0,0	0,25
11	Машина 3	15	6	16	1100	952,8	147,2	0
12	Машина 4	10	15	0	1000	537,8	462,2	0
14	Сировинні ресурси	Потреби сировини (на од.)			Ціна	К-сть сировини	Вартість	
15	Матеріал 1	1	0	0	20	25,0	500,0	
16	Матеріал 2	1	1	0	20	44,2	883,8	
17	Матеріал 3	0	1	1	20	48,1	962,2	
18	Матеріал 4	1	0	0	5	25,0	125,0	
19	Матеріал 5	1	1	2	3	102,0	306,1	
20						Затрати	*2777,0*	

Рис. 11.1. Зображення аркуша задачі про оптимальний план виробництва

Проаналізуйте зміст множників Лагранжа для цієї задачі та перевірте свої припущення, змінивши ресурсні обмеження.

Задача 2

Розв'яжіть попередню задачу на окремому аркуші, за умови, що використання обладнання супроводжується витратами на обслуговування, а простій обладнання також потребує 15 % від використання (додайте поле «Вартість використання машинних ресурсів»).

Доповніть задачу обмеженнями по запасах сировини та розв'яжіть її на окремому аркуші.

Побудуйте звіт зі стійкості та проаналізуйте результати та зміст множників Лагранжа.

Контрольні питання

1. Який зміст множника Лагранжа в даній оптимізаційній моделі?
2. Чому ця задача належить до НЗМП?
3. Як обчислюється попит?
4. Як обчислюється тривалість обробки?
5. За яких умов задача може набути лінійного стану?

Лабораторна робота 12
Задача управління запасами

Теоретична довідка

Основи оптимального управління запасами (ОУЗ) – це розділ дослідження операцій, присвячений розробці математичних моделей та методів оптимізації запасів у постачанні, виробі та здобутті продукції.

Запас – це будь-який ресурс, який використовується для задоволення поточної або майбутньої потреби.

Загальна постановка задачі в ОУЗ

Необхідно визначити оптимальний рівень (обсяг) запасів у будь-якому місці зберігання, а також період поповнення та оптимальний розмір партії поповнення запасів.

За статистикою середні витрати на утримання запасів становлять майже третину вартості цих запасів. Це дуже багато, і цей показник зростає з ускладненням сучасного виробництва, де номенклатура всього, що використовується, вимірюється десятками і сотнями тисяч найменувань, і тому дуже високий ризик збою або зупинки виробництва через відсутність хоча б однієї складової.

Запаси на виробництві – це предмети, які стають частиною продукції або вносять вкладення у виробництво: сировина, готова

продукція, комплектуючі, допоміжні матеріали тощо. Запас у сфері послуг (магазин, салони, пошта, банки, ресторани, служби прокату тощо.) – це товари на продаж, запасні частини, гроші, їжа, транспортні засоби, атракціони.

Якщо запасів багато, це одночасно добре (надійно забезпечується попит) і погано (великі витрати на зберігання) – тому повинна бути «золота середина» у вигляді оптимального запасу.

Оптимальне управління запасами – це мінімізація загальних витрат на створення і отримання запасів відповідно з їх використанням (попит) завдяки прогнозуванню, моментів і обсягів постачання для поповнення запасів.

У класичній постановці задачі УЗ критерієм оптимальності є мінімізація сукупних витрат, які складаються з трьох основних частин:

1. Витрати, пов'язані зі створенням і формуванням запасів.
2. Витрати, пов'язані з утриманням або зберіганням запасів.
3. Витрати з дефіцитом:

- потенційні витрати;
- витрати, пов'язані зі створенням надлишкових запасів, коли обсяг запасів переважає обсяг споживання;
- потенційна втрачена вигода, коли обсяг запасів менший за обсяг споживання.

Залежно від постановки задачі під запасами можна розуміти:

- готову продукцію;
- сировину;
- напівфабрикати;
- станки;
- інструменти;
- транспортні засоби;
- готівку тощо.

Помилковий розрахунок необхідних запасів може призвести як до незначних збитків (втрата частини прибутку від дефіциту товару), так і до катастрофічних наслідків (при помилковій оцінці запасів палива на літаку).

До економічних збитків призводить як надлишкова кількість запасів, так і їх недостача.

З точки зору теорії управління запасами попит можна задовольнити двома шляхами:

1. Однократним створенням запасу на плановий період (надлишковий запас).

2. Створенням запасу на кожну одиницю певного періоду часу (день, тиждень, місяць).

Реалізація будь-якої моделі управління запасами повинна дати відповідь на два запитання:

1. Яку кількість продукції потрібно замовляти? (обсяг замовлення чи партії товару);

Відповідь на яке надається за допомогою поняття **«розмір замовлення», тобто кількості ресурсів, що треба поставляти для поповнення запасів.**

2. Коли замовляти? (термін видачі замовлення).

Відповідь на яке пов'язана з поняттям точки замовлення (**критичним рівнем запасів, при якому потрібно подавати замовлення на поставку кожної наступної партії ресурсу**).

Сумарні витрати у системі управління запасами складаються з таких груп:

1. **І група – витрати на придбання товару:**

1.1. **Витрати, що не змінюються у часі і не залежать від розмірів замовлень.** Такі витрати можна прийняти за константу і вони не впливають на прийняття рішення.

1.2. **Ціна одиниці товару**, яка здебільшого залежить від розміру партії та часу придбання, тому є важливим фактором при прийнятті рішення (гуртові знижки, сезонні коливання цін на с/г продукцію, розпродажі тощо).

2. **ІІ група – витрати на здійснення замовлень:**

2.1. Витрати на оформлення замовлення (оформлення документів, банківські послуги, оплата відрядження тощо).

2.2. Витрати на доставку замовлення.

Витрати цієї групи повторюються стільки разів, скільки поповнюються запаси незалежно від обсягів замовлень.

3. III група – витрати на зберігання:

3.1. Заробітна плата персоналу з нарахуваннями.

3.2. Утримання та оренда складських приміщень.

3.3. Тара, упаковка, сортування, псування, охорона тощо.

Витрати на фізичне зберігання запасу на складі здебільшого зростають пропорційно зі збільшенням рівня запасів.

4. IV група – втрати від дефіциту:

4.1. Витрати, обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції.

Вони можуть бути викликані більш високою платою за термінову доставку товару, погіршенням репутації у споживача, потенційною втратою прибутку.

Модель управління запасами не обов'язково повинна містити всі перераховані види витрат, оскільки деякі з них можуть бути незначними, відсутніми або суттєво ускладнювати задачу. Отже, на практиці деякі фактори можна не враховувати.

Якщо всі чотири групи витрат просумувати, отримаємо криву сумарних витрат.

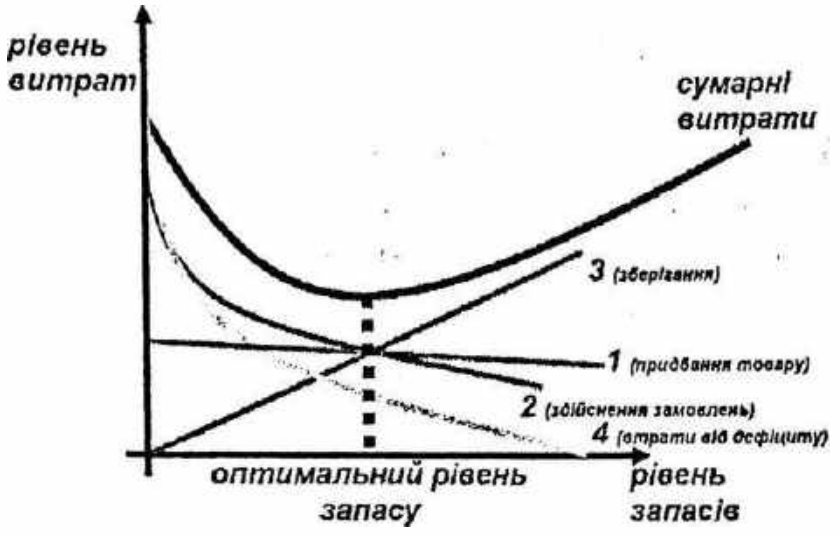


Рис. 12.1. Узагальнена графічна модель управління запасами

Ефективність моделі залежить від того, наскільки точно буде передбачений попит на ресурс, що є досить складним завданням.

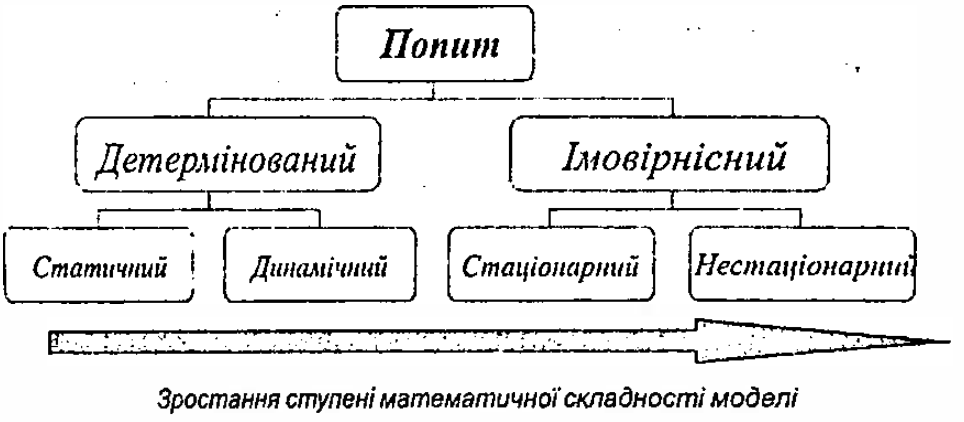


Рис. 12.2. Види попиту та їх вплив на складність моделей

Управління запасами полягає у знаходженні такої стратегії поповнення та витрачання запасів, при якій функція затрат приймає мінімальне значення.

Рівень запасу у момент t визначається основним рівнянням запасів:

$$J(t)=J_0+A(t)-B(t)$$

Наведене рівняння можна записати в інтегральній формі:

$$J(t)=J_0+\int_0^t a(t)dt-\int_0^t b(t)dt,$$

де A(t) – функція, що описує поповнення запасів;

a(t) – інтенсивність поповнення;

B(t) – функція, що описує витрачання запасів;

b(t) – інтенсивність витрачання;

R(t) – функція, що описує попит на продукт;

r(t) – інтенсивність попиту;

Jo – початковий запас у момент часу t=0.

Введемо такі припущення:

1. Запас витрачається рівномірно з постійною інтенсивністю.

2. Запас може поповнюватися миттєво, у момент виникнення потреби.

3. Дефіцит неприпустимий.

Нехай на підприємстві є виробничий запас певного виду, а у початковий час t_0 запас максимальний. У ході виробництва цей запас рівномірно витрачається від моменту часу T=0.

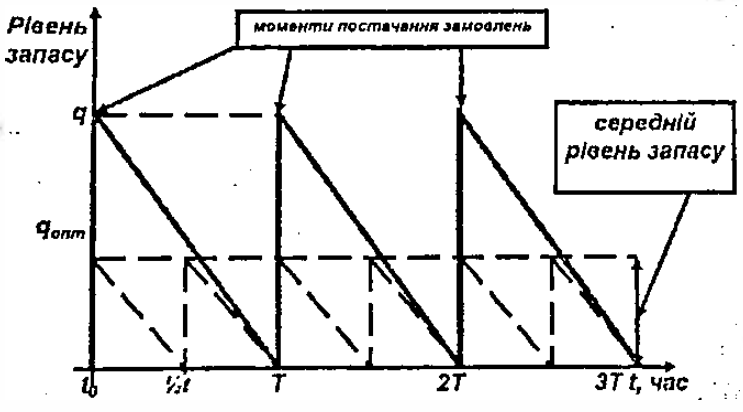


Рис. 12.3. Графічна інтерпретація найпростішої моделі управління запасами

Найбільш економічно обґрунтованим критерієм є сумарні витрати на створення і зберігання запасів, які повинні бути мінімальними.

У зв'язку з припущенням відсутності дефіциту втрати від дефіциту не враховуються, тоді сумарні витрати складаються з двох груп:

1. Витрати на зберігання запасів (F_1).

а) Витрати, пов'язані з фізичним зберіганням товарно-матеріальних цінностей (заробітна плата, з нарахуваннями, амортизаційні відрахування). Ці витрати визначаються прямим розрахунком і пропорційні об'ємам запасів;

b) Витрати від іммобілізаційних оборотних коштів (кошти заморожені на тривалий період).

2. Витрати на поповнення запасів (F_2).

а) Транспортні і вантажні роботи пропорційні об'ємам поповнення запасів;

b) Управлінські витрати не залежать від фізичних об'ємів і повторюються стільки разів, скільки поповнюються запаси.

Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення:

T – тривалість планового періоду;

W – загальна потреба підприємства у ресурсі на плановий період;

C – оптова ціна одиниці запасу даного виду;

ν – коефіцієнт, що враховує витрати на зберігання одиниці запасу;

C_0 – витрати на однократне поповнення матеріалів;

k – коефіцієнт, що враховує витрати на поповнення;

q – розмір однократного поповнення запасів;

n – кількість поповнень протягом планового періоду;

t_n – інтервал часу між двома поповненнями;

$q_{опт}$ – оптимальний розмір однократного поповнення запасів.

Відповідно **витрати на зберігання запасів** обчислюються за формулою:

$$F_1 = \frac{q}{2} \cdot C \cdot \nu,$$

витрати на поповнення запасів:

$$F_2 = \frac{W}{q} \cdot (C_0 + k \cdot q) = \frac{W}{q} \cdot C_0 + \frac{W}{q} \cdot k \cdot q = \frac{W}{q} \cdot C_0 + W \cdot k,$$

сумарні витрати підприємства на зберігання і поповнення запасів:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{q}{2} \cdot C \cdot \nu + \frac{W}{q} \cdot C_0 + W \cdot k.$$

А оптимальний розмір поповнення запасів можна знайти виходячи із наступних формул:

$$\frac{dF}{dq} = \left(\frac{q}{2} \cdot C \cdot \nu\right)' + \left(\frac{W \cdot C_0}{q}\right)' + (W \cdot k)' = 0;$$

$$\left(\frac{q}{2} \cdot C \cdot \nu\right)' + \left(\frac{W \cdot C_0}{q}\right)' = 0.$$

Звідси:

$$\frac{C \cdot \nu}{2} = \frac{W \cdot C_0}{q^2}$$

можна записати **оптимальний розмір поповнення запасів**

$$q_{опт}=\sqrt{\frac{2\cdot W\cdot C_0}{C\cdot v}} \qquad (12.1)$$

Формула (12.1) називається формулою Уілсона.

Справедливими також будуть формули: **оптимальна кількість поставок протягом планового періоду:**

$$n_{опт}=\frac{W}{q_{опт}}=\sqrt{\frac{W\cdot v\cdot C}{2\cdot C_0}}. \qquad (12.2)$$

Оптимальний інтервал часу між двома поставками

$$t_{опт}=\frac{T}{n_{опт}}=T\cdot\sqrt{\frac{2\cdot C_0}{W\cdot v\cdot C}}. \qquad (12.3)$$

Мінімальні витрати підприємства на зберігання і поповнення запасів

$$F_{min}=\frac{C\cdot v}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot W\cdot C_0}{C\cdot v}}+\frac{W\cdot C_0}{\sqrt{\frac{2\cdot W\cdot C_0}{C\cdot v}}}+W\cdot k=\sqrt{2\cdot W\cdot C_0\cdot C\cdot v}+W\cdot k,$$

$$F_{\min}=q_{опт}\cdot C\cdot v+W\cdot k. \qquad (12.4)$$

Ускладнена модель управління запасами

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ на підприємство починають поставляти запас певного виду з інтенсивністю λ.

Припустимо, що до цього моменту часу запас був рівний нулеві.

У цей же момент підприємство починає працювати і споживати запас з інтенсивністю μ.

Умова нормального функціонування підприємства $\lambda \geq \mu$. При цьому випадок, коли $\lambda = \mu$ означає «роботу з коліс».

Якщо $\lambda > \mu$, то величина запасу буде збільшуватись до тих пір, поки у точці t_1 досягне свого максимуму. Далі збільшувати запас недоцільно і поставки припиняються. Запас починає поступово зменшуватись з інтенсивністю $-\mu$.

У точці t_2 рівень запасу скоротиться до нуля, однак підприємство буде продовжувати працювати за рахунок наявності страхового запасу.

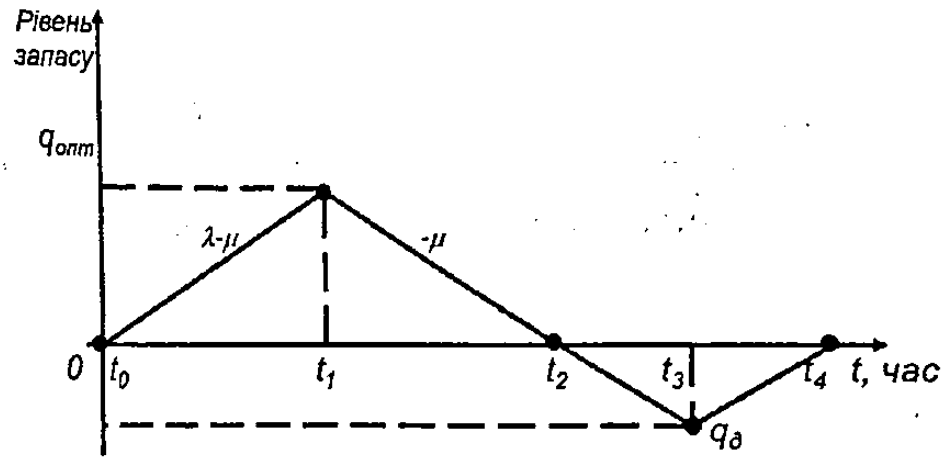


Рис. 12.4. Графічна інтерпретація ускладненої моделі управління запасами

У точці t_3 рівень запасу досягне нижнього гранично допустимого рівня $q_д$ (страховий запас вичерпався) і в цей момент поставки відновлюються.

Оскільки $\lambda>\mu$, то дефіцит буде поступово скорочуватись і в точці t_4 буде ліквідований.

Досліджувана система повертається у початковий стан.

Інтервал часу $[0; t_4]$ називається циклом «поставка-споживання», тривалість якого необхідно визначити разом із оптимальним значенням об'єму запасу.

Введемо такі додаткові позначення:

Сз – витрати на зберігання одиниці запасу в одиницю часу;

Сш – штраф за дефіцит одиниці запасу в одиницю часу.

Загальні витрати підприємства за один цикл «постачання–споживання»:

$$F = (C_0 + C_3 \cdot \int_{t_0}^{t_2} q(t)dt + C_ш \cdot \int_{t_2}^{t_4} q(t)dt) \to \min$$

$$F = C_0 - \frac{\lambda \cdot C_з}{2 \cdot \mu \cdot (\lambda - \mu)} \cdot q_{опт}^2 + \frac{\lambda \cdot C_ш}{2 \cdot \mu \cdot (\lambda - \mu)} \cdot \left(\frac{\mu \cdot (\lambda - \mu)}{\lambda} \cdot t_4 - q_{опт} \right)^2 \quad (12.5)$$

Відповідно **оптимальний об'єм запасу** рівний:

$$\bar{q}_{опт} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu \cdot C_0 \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)}{C_з \cdot \left(1 + \frac{C_з}{C_ш}\right)}}, \qquad (12.6)$$

а тривалість циклу «постачання-споживання»:

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_0 \cdot \left(1 + \frac{C_з}{C_ш}\right)}{\mu \cdot C_з \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)}} \qquad (12.7)$$

та мінімальні середні витрати підприємства на створення та зберігання запасів

$$\bar{F}_{ср} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu \cdot C_0 \cdot C_з \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)}{1 + \frac{C_з}{C_ш}}}. \qquad (12.8)$$

Історична довідка

Модель управління запасами вперше була розроблена Фордом У. Харрісом[1] у 1913 році, але консультант Р. Уільсон (R.H Wilson) у 1934 році вперше її використав, тому вона і носить назву **«формула Уілсона«**[2]:

$$\text{ЕРЗ} = \sqrt{\frac{2 \times \text{Попит} \times \text{Затрати}_{\text{оформлення}}}{\text{Затрати}_{\text{зберігання}}}}.$$

---

[1]Форд Уітмен Харріс (08.08.1877– 27.10.1962) – американський інженер. Харріс працював інженером на електротехнічній фірмі і використовував для аналізу свій досвід. При цьому він не мав диплому – закінчив тільки середню школу. Будучи самоуком, був феноменально успішним – опублікував 70 статей і зареєстрував 50 патентів.

[2]У 1934 році з'являється нова публікація в Harvard Business Review, в якій автор R.H. Wilson (Уїлсон або Вільсон) без посилання на попередні роботи приводить формулу оптимального розміру партії. І за дивним збігом обставин саме його ім'я дало назву формулі і закріпилося в подальшій історії. У результаті пріоритет Харріса був через деякий час забутий. І тільки 1990 року в США була зроблена спроба розібратися з пріоритетом і датою першої публікації на цю тему.

В англомовній літературі оптимальний запас називається **економічний розмір запасу, ЕРЗ** (Economic Order Quantity, EOQ).

Але поки американці розбиралися в тому, хто ж перший навчився розраховувати оптимальний розмір партій, німці, погоджуючись з першістю Харріса, стверджують, що по справжньому розвинув цю тему вперше в 1929 році їх співвітчизник – Курт Андлер (Kurt Andler) і називають відповідну формулу його ім'ям, при цьому про Вілсона не згадують.

Німці зазначають, що в англосаксонській літературі домінує термін «економічний обсяг замовлення» (economic order quantity – EOQ), що пов'язано не з виробництвом, а з оптимальним обсягом замовлення на склад товару. Хоча підходи, пов'язані з оцінкою витрат залежно від кількості товару або обсягу партії виробів, схожі і математичне рішення збігається. При цьому Андлер все-таки більш детально дослідив саме виробничі проблеми.

Формула Андлера для оптимального розміру партії деталей у найпростішому варіанті виглядає таким чином:

$$y_{min} = \sqrt{\frac{2VCr}{Cl}},$$

де y_{min} – оптимальний розмір партії;

V – необхідний обсяг продукції за період часу (швидкість збуту);

Cr – витрати, пов'язані зі зміною партій (умовно – на наладку);

Cl – питомі витрати на складування в періоді часу.

Формула Уілсона для оптимальної партії замовлення товару на склад (для перепродажу або для переробки) виглядає аналогічно. Але її складові мають дещо інший зміст та інші позначення (у класичному вигляді):

$$EOQ = \sqrt{\frac{2QP}{C}},$$

де EOQ – економічний розмір замовлення (economic order quantity – EOQ);

Q – кількість товару в рік (Quantity in annual units);

P – витрати на реалізацію замовлення (Placing an order cost);

C – витрати на складування одиниці товару в рік (Carry costs).

Задача

Потрібно визначити оптимальний розмір замовлення чотирьох товарів, для кожного із них відомі ціни для покупки, попит, витрати на оформлення та зберігання одиниці продукції, а також обмеження на розмір складу та суму фінансування покупки.

Економіко-математична модель

Знайти оптимальний план замовлення, щоб

Загальні витрати = Витрати на оформлення + Витрати на зберігання → min.

При обмеженнях:

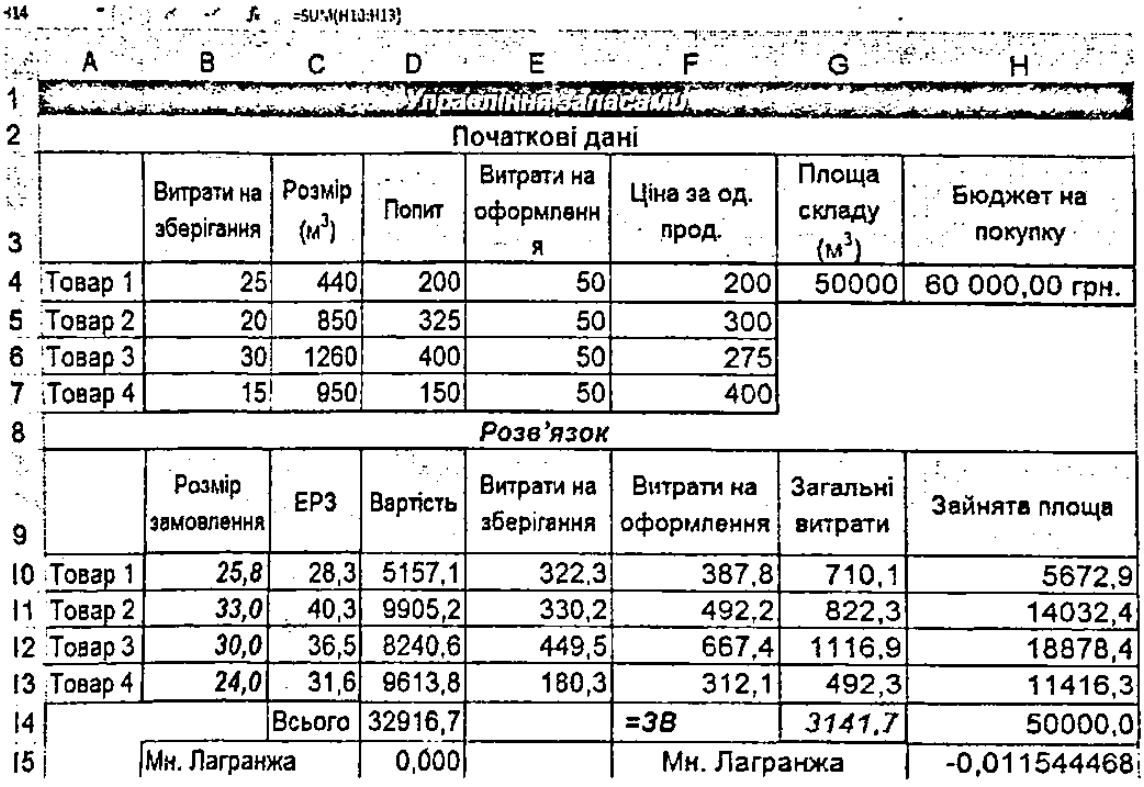
- зайнята площа на складі ≤ Площа складу;
- всього Вартість ≤ Бюджет на покупку;
- план ≥ 0.

Хід роботи

1. Створіть таблицю з формулами, які пов'язують план, обмеження і цільову функцію (ЗВ), та заповніть відповідні поля:

- у поле ЕРЗ вводимо формули Уілсона;
- у поле Вартість вводимо формули: Розмір замовлення × Ціна;
- у поле Витрати на зберігання вводимо формули: (Розмір замовлення × Витрати на зберігання) / 2;
- у поле Витрати на оформлення вводимо формули: (Витрати на оформ. × Попит)/Розмір замовлення;
- у поле Загальні витрати вводимо формули суми стовпців Витрати на зберігання та оформлення;
- поле Зайнята площа заповнюємо формулами: (Розмір замовлення × Розмір товару) / 2;

• у рядок Всього вводимо формули суми за відповідними стовпцями.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Управління запасами							
2	Початкові дані							
3		Витрати на зберігання	Розмір ($м^3$)	Попит	Витрати на оформлення	Ціна за од. прод.	Площа складу ($м^3$)	Бюджет на покупку
4	Товар 1	25	440	200	50	200	50000	60 000,00 грн.
5	Товар 2	20	850	325	50	300		
6	Товар 3	30	1260	400	50	275		
7	Товар 4	15	950	150	50	400		
8	*Розв'язок*							
9		Розмір замовлення	ЕРЗ	Вартість	Витрати на зберігання	Витрати на оформлення	Загальні витрати	Зайнята площа
10	Товар 1	*25,8*	28,3	5157,1	322,3	387,8	710,1	5672,9
11	Товар 2	*33,0*	40,3	9905,2	330,2	492,2	822,3	14032,4
12	Товар 3	*30,0*	36,5	8240,6	449,5	667,4	1116,9	18878,4
13	Товар 4	*24,0*	31,6	9613,8	180,3	312,1	492,3	11416,3
14			Всього	32916,7		*=38*	*3141,7*	50000,0
15		Мн. Лагранжа		0,000		Мн. Лагранжа		-0,011544468

Рис. 12.5. Зображення аркуша вирішення задачі УЗ

2. Відкрийте вікно Роз'язувача (Пошук рішення) та виберіть цільову комірку, змінюючи клітинки змінних та обмеження.

3. Врахуйте, що розмір замовлення повинен буди ≤ ЕРЗ.

4. У звіті зі стійкості проаналізуйте зміст множника Лагранжа та перевірте власні припущення. Множник Лагранжа вказує, як зміниться цільова функція при зміні обмежень на 1 одиницю.

5. Проекспериментуйте, в якому випадку множник Лагранжа приймає нульове значення і для якої змінної. Спробуйте збільшити Бюджет (Площу складу).

Контрольні питання

1. Який вигляд має формула Уілсона?
2. За якою формулою обчислюються загальні витрати?
3. За якою формулою обчислюються витрати на зберігання запасів?
4. За якою формулою обчислюються витрати на оформлення?
5. За якою формулою обчислюються витрати на поповнення запасів?
6. За якою формулою обчислюються сумарні витрати підприємства на зберігання і поповнення запасів?
7. За якою формулою обчислюється оптимальний розмір поповнення запасів?
8. За якою формулою обчислюється оптимальна кількість поставок протягом планового періоду?
9. За якою формулою обчислюється оптимальний інтервал часу між двома поставками?
10. За якою формулою обчислюються мінімальні витрати підприємства на зберігання і поповнення запасів?

ТЕМА 4. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лабораторна робота 13
Динамічне програмування.
Задача про оптимальний шлях

Теоретична довідка

На відміну від термінів «лінійне програмування», «нелінійне програмування», «стохастичне програмування», які мають відношення до певного типу задач, термін «динамічне програмування» стосується як обчислювального методу, так і певного типу задач.

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дає змогу здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі.

В основі методу лежить ідея використання апарату рекурентних співвідношень. Запропонований Р. Беллманом[1] у 1950–1953 роках метод дозволяє звести процес оптимізації функції n змінних до крокового процесу оптимізації функцій однієї змінної.

Задачі, для розв'язування яких можливе застосування методу динамічного програмування, повинні задовольняти таким вимогам:

- можливості фактичного або умовного розподілу початкової задачі на окремі підзадачі, кожна з яких містить меншу кількість змінних (навіть до одиєї);
- однотипності підзадач;
- можливості вимірювання однаковими одиницями ефекту від прийнятого рішення в результаті розв'язування кожної підзадачі;
- можливості обчислення загального ефекту, як суми ефектів в окремих підзадачах.

---

[1] Річард Ернест Беллман – американський математик, один з провідних фахівців у галузі математики та обчислювальної техніки. Отримав численні результати, пов'язані із застосуванням динамічного програмування в різних галузях математики, опублікував більше 600 статей і близько 40 книг.

Постановка задачі

Припустимо, що існує певна кількість деякого ресурсу. Це може бути запас сировини, енергетичні ресурси, фінансові, трудові тощо. Існують альтернативні варіанти використання цього ресурсу.

Під варіантами будемо розуміти різні способи розподілу ресурсу між окремими споживачами або у різних цілях.

Споживачами ресурсу можуть бути галузі економіки, окремі підприємства, різні технологічні способи, різновиди продукції тощо.

У результаті використання ресурсу за тим чи іншим варіантом отримується деякий прибуток, розмір якого залежить від кількості ресурсу, а також від процесу, де конкретно використовується ресурс.

Необхідно знайти такий розподіл ресурсу, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Ці припущення дають можливість оцінити прибуток від розподілу всієї кількості ресурсів простим додаванням прибутків, одержаних від окремих процесів таким чином, щоб максимізувати загальний прибуток.

Математична модель задачі ДП

Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення:

n – кількість різних технологічних процесів;

j – номер технологічного процесу $j = \overline{1,n}$;

x_j – кількість ресурсу, яка виділяється j-му технологічному процесу;

$f_j(x_j)$ – прибуток від j-го технологічного процесу, одержаний у результаті використання ресурсу в кількості x_j одиниць, $j = \overline{1,n}$;

b – загальна кількість ресурсу.

Необхідно знайти такі значення змінних x_j, $j = \overline{1,n}$, щоб максимізувати загальний прибуток.

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{13.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \tag{13.2}$$

$$\begin{cases} a_j > 0 \\ x_j \ge 0 \\ b > 0 \end{cases}. \tag{13.3}$$

Нехай $f_j(x_j)$, $j = \overline{1,n}$ – лінійні функції відповідних змінних.

Симплекс-метод дозволяє одержати в оптимальному плані додатних змінних не більше ніж кількість обмежень у задачі. Змістовно це означає, що всі ресурси будуть направлені у той процес, який дає найбільший прибуток. Такий розв'язок, звичайно, не буде відповідати поставленій меті вибору сукупності ефективних процесів.

Метод динамічного програмування позбавлений цього недоліку

Рекурентні співвідношення ДП

Процес розподілу ресурсу між n технологічними процесами можна розбити на n етапів, на кожному з яких будуть прийматись рішення щодо окремого технологічного процесу залежно від стану запасу ресурсу. Крім того, постановка задачі дає можливість оцінити загальний прибуток як суму прибутків від кожного технологічного процесу.

Зрозуміло, що оптимальне значення загального прибутку залежить від кількості ресурсу b, а також від кількості різних технологічних процесів n, серед яких розподіляється ресурс. Відобразимо цю залежність, задавши функцію:

$$g_n(b) = max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

на множині, яка описується умовами (13.2) та (13.3).

Функція $g_n(b)$ виражає максимальний прибуток, одержаний від розподілу b одиниць ресурсу між n технологічними процесами.

Знайдемо рекурентні співвідношення між величинами прибутку від n технологічних процесів g_n та від $(n-1)$-го технологічного процесу – g_{n-1}. Для цього виберемо значення змінної x_n, $0 \le x_n \le b$. Ресурси, які залишилися ($b-x_n$), повинні бути використані оптимальним чином, тобто необхідно знайти:

$$g_{n-1}(b-x_n) = \max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j \le b - x_n;$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n-1}.$$

Ефективність цих двох кроків визначається сумою прибутків від n-го технологічного процесу та всіх інших:

$$f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n).$$

Вимога максимальної ефективності від реалізації цих кроків еквівалентна запису:

$$g_n(b) = \max_{0 \le x_n \le b} \left(f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n)\right),$$

причому n-му технологічному процесу може бути виділена будь-яка кількість ресурсів у межах величини b.

З аналогічних міркувань максимальний прибуток від розподілу залишку ресурсу ($b-x_n$) визначається формулою:

$$g_{n-1}(y) = \max_{0 \le x_{n-1} \le y} \left(f_{n-1}(x_{n-1}) + g_{n-2}(y - x_{n-1})\right),$$

де

$$y = b - x_n.$$

Максимальний прибуток від розподілу ресурсу на проміжному кроці k визначається формулою:

$$g_k(y) = \max_{0 \le x_k \le y} \left(f_k(x_k) + g_{k-1}(y - x_k)\right),\ k = \overline{2, n}, \qquad (13.4)$$

де

$$y = b - \sum_{j=k+1}^{n} x_j$$

Враховуючи, що на останньому кроці

$$y - x_1 = 0,$$

природно вважати $g_0(0)=0$.

Таким чином, максимальний прибуток від розподілу ресурсу на n-му кроці дорівнює:

$$g_1(y) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le y \\ 0 \le y \le b}} f_1(x_1)$$

Рівняння типу (13.4) називається **основним рекурентним співвідношенням**, яке є математичним відображенням так званого **принципу оптимальності**: оптимальна поведінка має таку властивість, що, в якому б стані не перебувала система і які б рішення не приймалися у попередні моменти, наступні рішення повинні бути оптимальними щодо стану, в якому опинилася система.

Для прийняття оптимального рішення на k-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх його попередніх кроках, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв'язок задачі лише в тому разі, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і є сутністю так званого принципу оптимальності Р. Беллмана, який формулюється так:

– оптимальний розв'язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ має ту властивість, що яким би не був стан системи b_i у результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління x_{i+1}^* на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.

Принцип оптимальності Беллмана стверджує, що оптимальне управління системою на кожному кроці не залежить

від передісторії процесу, тобто як система досягла поточного стану, а визначається тільки цим станом.

Системи (процеси), яким притаманна ця властивість, називають марківськими.

Задача про вибір траєкторії

Нехай літак, що перебувають в точці S_0 на висоті H_0 і має швидкість V_0, повинен бути піднятий на задану висоту H_{kin}, а його швидкість доведена до значення V_{kin}. Відомі витрата пального для підйому з будь-якої висоти H_1 на висоту H_2 при постійній швидкості V і витрата пального для збільшення швидкості від V_1 до V_2 при незмінній висоті. Знайти оптимальну траєкторію набору висоти і швидкості, при якій загальна витрата пального буде мінімальна.

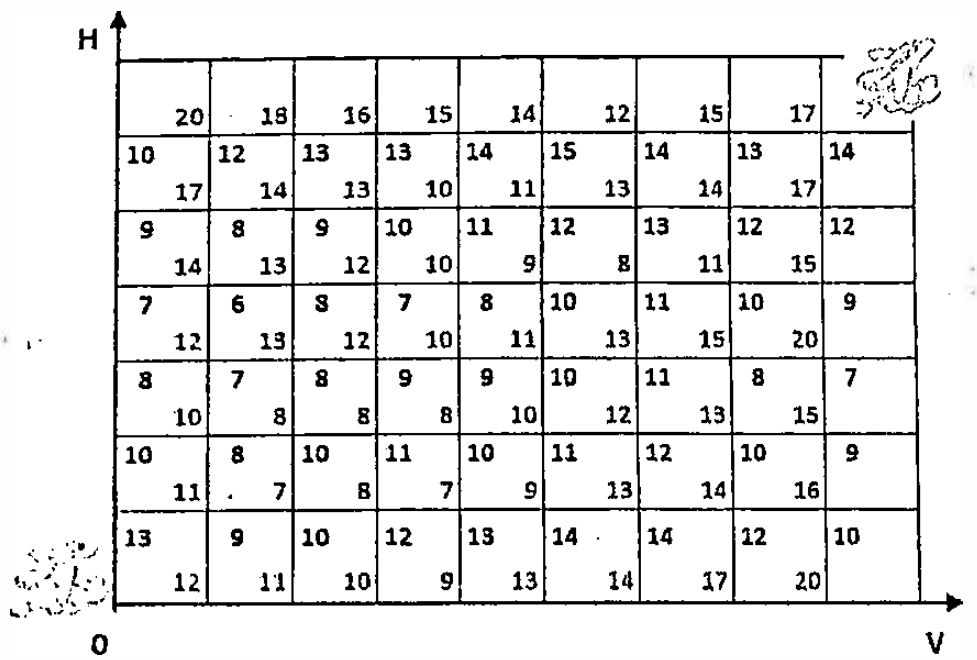


Рис. 13.1. Відображення таблиці вихідних даних

Припустимо, що весь процес набору висоти і швидкості можна розділити на ряд елементарних послідовних кроків (етапів), на будь-якому з яких літак збільшує тільки висоту або тільки швидкість.

Тобто на підставі цього можна побудувати матрицю оптимальних локальних рішень між значеннями набору висоти та швидкості.

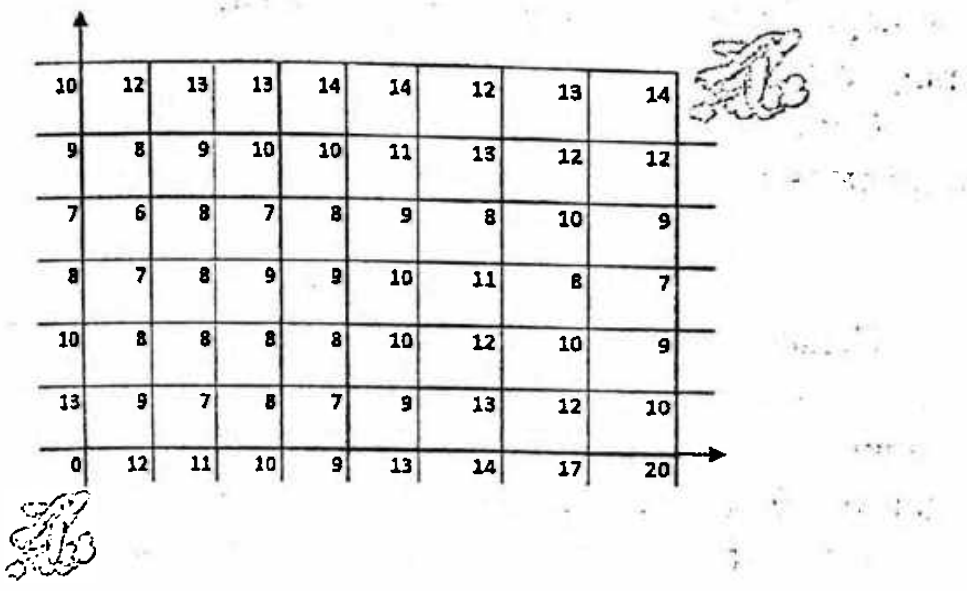


Рис. 13.2. Відображення таблиці оптимальних локальних значень

На підставі побудованої таблиці будуємо таблицю сумарних значень витрат для кожної із точок простору, що рівна мінімальному сумарному значенню серед попередніх вузлів плюс значення поточного вузла.

Використовуючи дані отриманої таблиці, можна відобразити маршрут літака, який будується на підставі принципу оптимальності Беллмана.

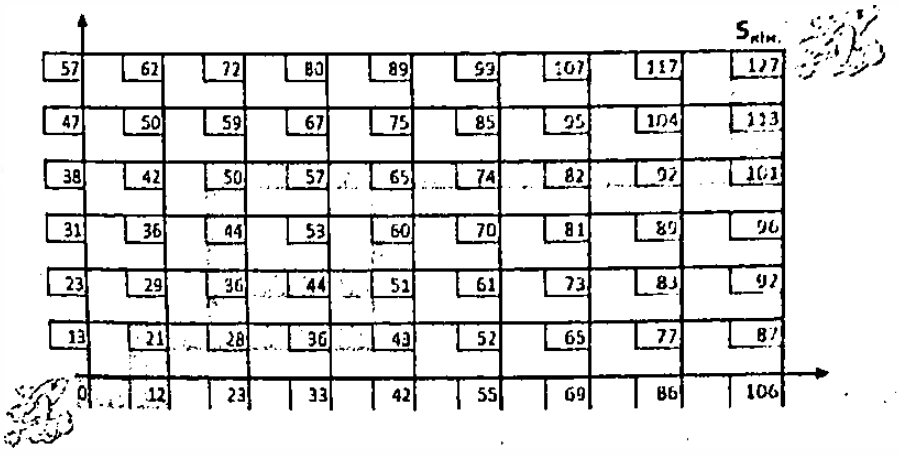


Рис. 13.3. Результат відображення оптимального маршруту літака

Завдання 1

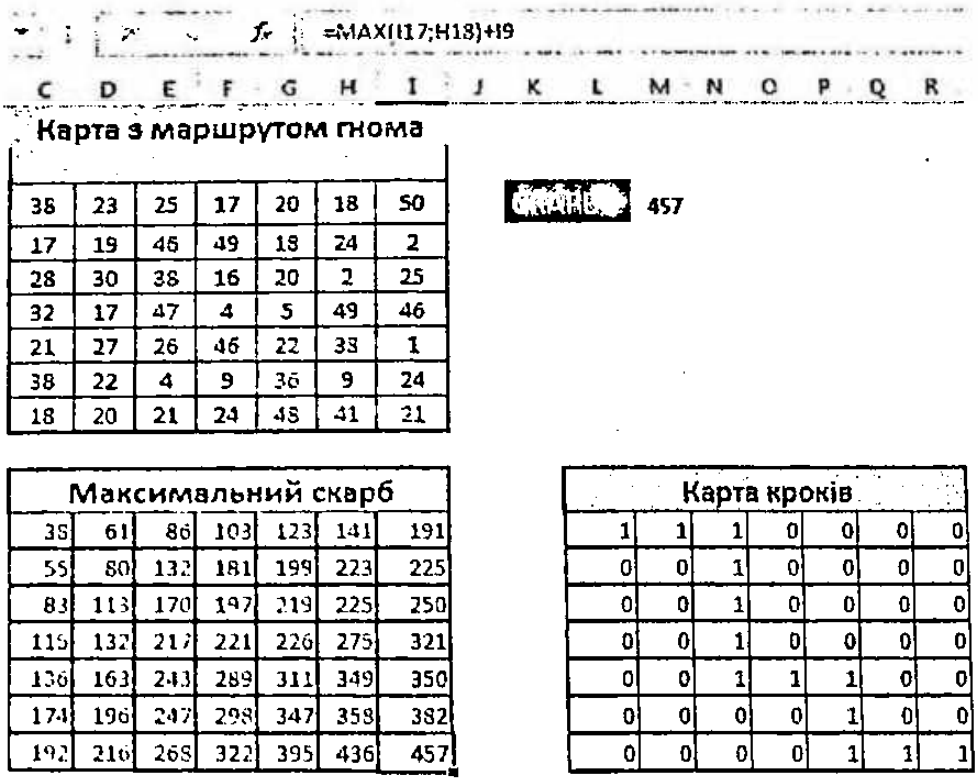
Відома карта поля зі скарбами у вигляді матриці розміром 10+n (порядковий номер студента в журналі). Розмір скарбу на

кожному кроці рівний випадковій величині від n до n+50. Гном знаходиться у верхній лівій точці (1,1) і може рухатись або вниз або вправо. Допоможіть гному зібрати максимальний скарб. Шлях гнома повинен відображатись на матриці скарбів (карта з маршрутом гнома).

Ця задача є різновидом класичної задачі динамічного програмування про вибір траєкторії.

Хід роботи

1. Побудувати вихідну матрицю, використовуючи функцію генерування випадкових чисел у заданому діапазоні (від n до n+50).



=MAX(I17;H18)+I9

C D E F G H I J K L M N O P Q R

Карта з маршрутом гнома

38	23	25	17	20	18	50
17	19	46	49	18	24	2
28	30	38	16	20	2	25
32	17	47	4	5	49	46
21	27	26	46	22	38	1
38	22	4	9	36	9	24
18	20	21	24	48	41	21

[redacted] 457

Максимальний скарб						
38	61	86	103	123	141	191
55	80	132	181	199	223	225
83	113	170	197	219	225	250
119	132	217	221	226	275	321
136	163	243	289	311	349	350
174	196	247	298	347	358	382
192	216	268	322	395	436	457

Карта кроків						
1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

Рис. 13.4. Зразок виконання даного завдання для матриці 7×7

2. На основі вихідної матриці побудувати матрицю знаходження максимального скарбу, враховуючи що:

максимальний сумарний скарб у даній комірці = максимальному значенню із попередніх кроків + значення скарбу в поточній комірці (рис. 13.4), тобто:

$$S_{ij} = \max S_{i-1,j}, S_{i,j-1} + a_{ij}.$$

3. Із побудованої матриці можна вказати шлях гнома. Для відображення карти кроків необхідно записати умову проходження за допомогою логічних функцій.

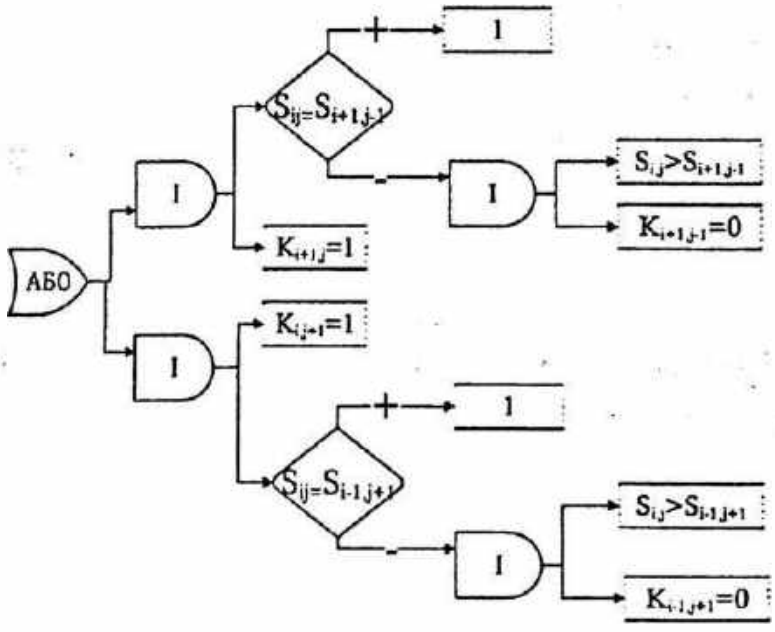


Рис. 13.5. Логічна схема побудови функції для матриці кроків

де k_{ij} – елемент матриці **карти кроків;**

S_{ij}. – елемент матриці **максимальний скарб.**

4. Відображення кольором шляху проходження гнома можна забезпечити за допомогою **умовного форматування.**

5. Спробуйте побудувати власну функцію для матриці карта кроків, використовуючи логічні функції.

Важливо. Якщо після введення функції у матрицю карти кроків з'явилась помилка, причиною може бути не ввімкнений параметр повторного обчислення. Щоб увімкнути параметр, необхідно зайти Файл-Параметри Excel-Формули і вибрати параметр Увімкнути повторне обчислення.

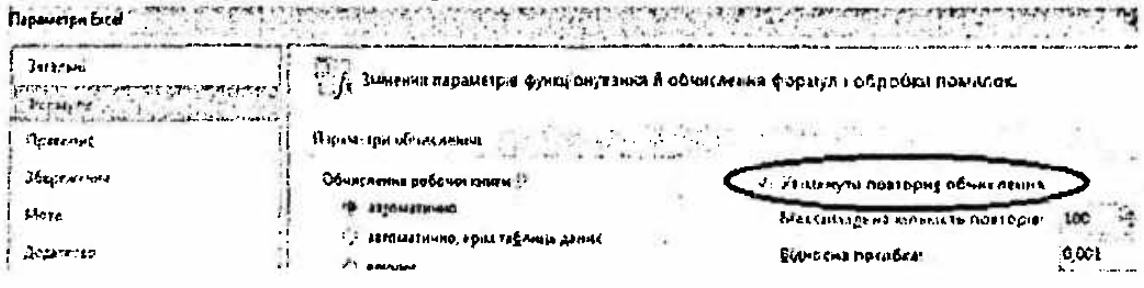
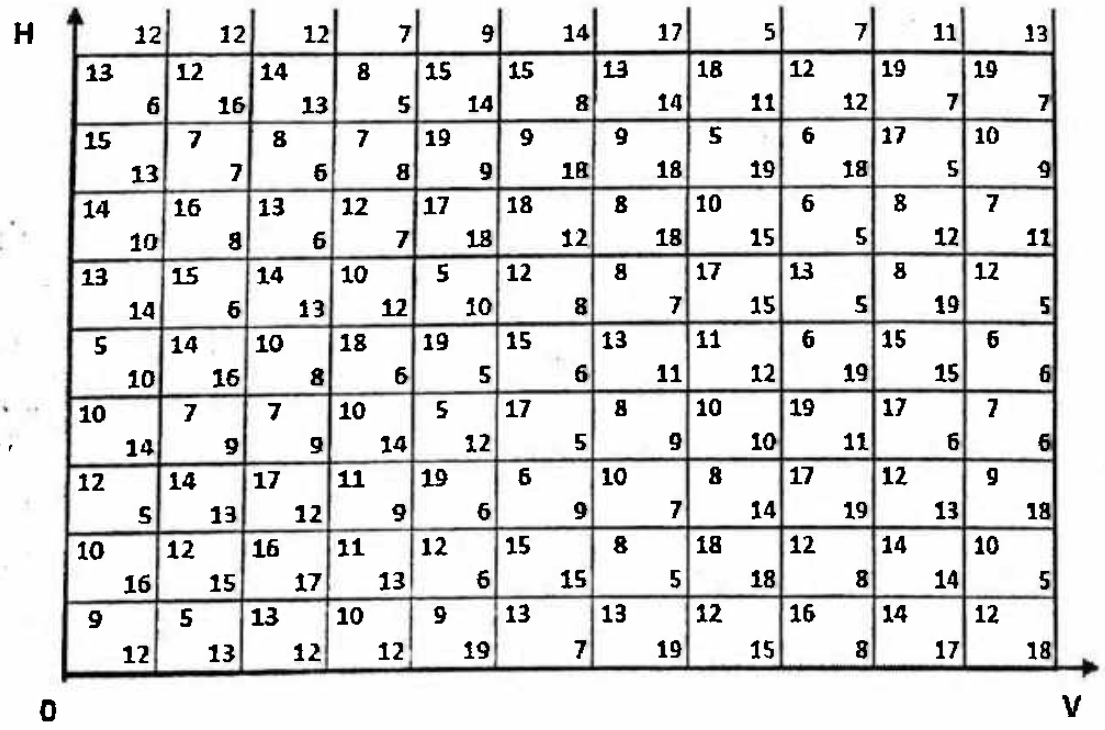


Рис. 13.6. Вибір параметра «Увімкнути повторне обчислення»

Завдання 2

Аналогічно попередній задачі побудуйте карту мінімальних витрат для задачі про набір висоти (задача про літак).

Тобто на кожному кроці прийняття рішення існує вибір або набору висоти, або набору швидкості (теоретична довідка).



12	12	12	7	9	14	17	5	7	11	13
13 6	12 16	14 13	8 5	15 14	15 8	13 14	18 11	12 12	19 7	19 7
15 13	7 7	8 6	7 8	19 9	9 18	9 18	5 19	6 18	17 5	10 9
14 10	16 8	13 6	12 7	17 18	18 12	8 18	10 15	6 5	8 12	7 11
13 14	15 6	14 13	10 12	5 10	12 8	8 7	17 15	13 5	8 19	12 5
5 10	14 16	10 8	18 6	19 5	15 6	13 11	11 12	6 19	15 15	6 6
10 14	7 9	7 9	10 14	5 12	17 5	8 9	10 10	19 11	17 6	7 6
12 5	14 13	17 12	11 9	19 6	6 9	10 7	8 14	17 19	12 13	9 18
10 16	12 15	16 17	11 13	12 6	15 15	8 5	18 18	12 8	14 14	10 5
9 12	5 13	13 12	10 12	9 19	13 7	13 19	12 15	16 8	14 17	12 18

Рис. 13.7. Матриця вихідних даних для задачі про літак

На відміну від попередньої задачі цільова повинна приймати мінімальне значення.

Для простоти розв'язку зобразіть маршрут літака на матриці мінімальних витрат, виділивши комірки іншим кольором (не будуючи карту кроків).

Контрольні питання

1. Які задачі називаються ЗДП?
2. Яка функція називається мультиплікативною?
3. Яка функція називається адитивною?
4. У чому полягає принцип оптимальності Беллмана?
5. Як зміниться задача у випадку її мінімізації?
6. Яка максимальна розмірність матриці в цій задачі допускається?

Лабораторна робота 14
Динамічне програмування. Задача про заміну обладнання

Теоретична довідка

Розглянемо приклад задачі динамічного програмування, в якій змінні є булевими (логічними), і опишемо процедуру прийняття рішення на прикладі задачі про заміну обладнання.

Задача про заміну обладнання полягає у такому. Планується експлуатація обладнання протягом n років. Залежно від терміну експлуатації знаходиться прибуток від експлуатації r(t), де t- вік обладнання. На початку кожного року існує можливість продажу старого обладнання за ціною s(t), яка також залежить від його віку, та купити нове за ціною P. Знайти оптимальний план заміни обладнання з метою максимізації загального прибутку за n років, якщо на початок планового періоду вік обладнання склав t_0 років.

Змінні моделі $x_k(t)$, k=1, n будуть приймати значення тільки 1 або 0.

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо обладнання віку t років слід} \\ & \text{замінити на початку року планування k} \\ 0, & \text{якщо обладнання віку t років} \\ & \text{зберігається в році планування k} \end{cases}$$

Введемо функцію F(k), яка визначає максимально можливий прибуток від експлуатації обладнання від k-го до n-го року, якщо на початок k-го року вік обладнання складав t років.

Якщо на початок k-го року обладнання зберігається, то на початок (k+1)-го року його вік збільшується на 1 рік. А якщо обладнання замінюється, тоді на початок наступного року воно досягає віку 1 рік.

Прибуток у кожний рік рахується як сума двох доданків – прибутку в рік t та наслідок від прийнятого рішення в році t. Якщо обладнання зберігається на початку k-го року, вік якого t років, воно за цей рік приносить прибуток r(t). На початок (k+1) го року вік його стає (t+1) рік та максимально можливий прибуток з (k+1)-го року по n-ий рік складе $F_{k+1}(t+1)$.

Якщо на початку k-го року приймається рішення про заміну обладнання, тоді виручка від реалізації обладнання віку t років складе s(t), витрати на нове обладнання дорівнюють P, а експлуатація нового обладнання принесе прибуток r(0). На початок наступного року вік обладнання буде 1 рік. Максимальний прибуток за всі роки, починаючи з k+1-го по n-ний рік, складе $F_{k+1}(1)$.

З цих двох варіантів управління вибираємо той, який принесе найбільший прибуток:

$$F_k(t) = \max_{1 \le s \le k-1} \begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1), & \text{якщо } x_k(t) = 0 \\ s(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & \text{якщо } x_k(t) = 1. \end{cases}$$

На кожному кроці необхідно обчислити $F_k(t)$ для всіх $t \in [1, t_0 + k - 1]$.

Для k = n

$$F_n(t) = \max \begin{cases} r(t), & \text{якщо } x_n(t) = 0; \\ s(t) - P + r(0), & \text{якщо } x_n(t) = 1 \end{cases}$$

Знаючи $F_n(t)$, можна обчислити $F_{n-1}(t), F_{n-2}(t)$ і т.д. до $F_1(t)$. $F_1(t)$ представляє максимально можливий прибуток за n років.

Графічно множина можливих станів обладнання може виглядати таким чином:

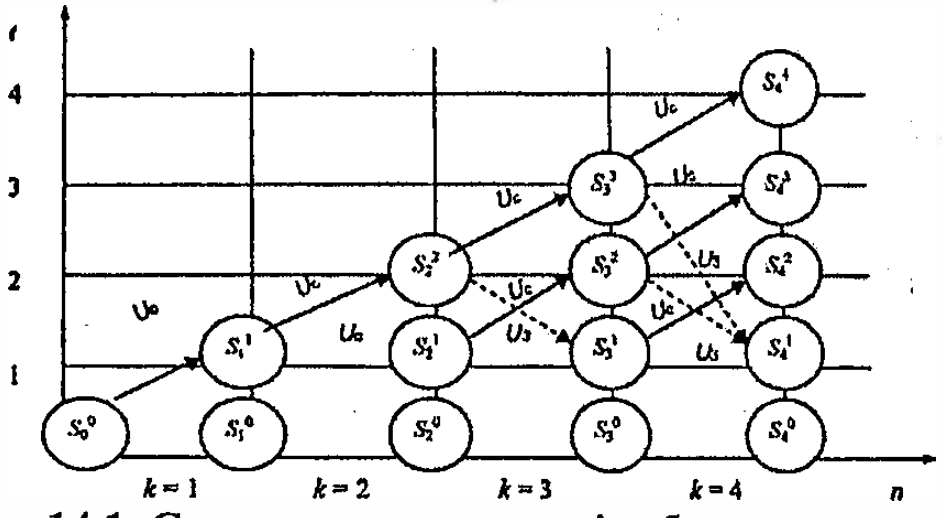


Рис. 14.1. Схема можливих станів обладнання

де U_c – збереження і тривалість використання обладнання; $U_з$ – заміна обладнання новим; S_k^t – стан обладнання відповідно віку t.

Завдання

Знайти оптимальну стратегію експлуатації обладнання на період тривалістю 6 років, якщо річний дохід r(t) і залишкова вартість S(t) залежно від віку задані в табл. 14.1. Вартість нового обладнання дорівнює P = 11, а вік обладнання на початок експлуатаційного періоду становив 1 рік.

Таблиця 14.1

Параметри обладнання по роках

t, роки	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	10	10	9	8	8	7	6
s(t)	9	8	7	7	6	6	5

Хід роботи

На першому кроці, де k = 6 і можливі стани системи t = 1, 2, ..., 6, розрахунок будемо вести за формулою (14.1):

$$F_n(t) = \max \begin{Bmatrix} r(t), & (E) \\ S(t) - P + r(0), & (3) \end{Bmatrix} \qquad (14.1)$$

Одержані значення: $F_6(1) = 10$, $F_6(2) = 9$, $F_6(3) = 8$, $F_6(4) = 8$, и т.д.

Далі розрахунок здійснюється за формулою(14.2):

$$F_k(t) = \max \begin{Bmatrix} r(t) + F_{k+1}(t+1), & (E) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1), & (3) \end{Bmatrix} . \qquad (14.2)$$

Складемо матрицю значень функції Беллмана:

Таблиця 14.2

Матриця значень функції Беллмана

k	t					
	1	2	3	4	5	6
1	52					
2	44	42				
3	35	34	33			
4	27	25	25	24		
5	19	17	16	15	15	
6	10	9	8	8	7	6

Тепер складемо матрицю логічних значень (Зберегти / Замінити), дотримуючись правила:

IF $r(t)+F_{k+1}(t+1) \geq S(t)-P+r(0)+F_{k+1}(1)$, то значення = «Експлуатація», інакше, значення «Заміна».

Результат представлено в таблиці 14.3:

Таблиця 14.3

Матриця значень заміни-експлуатації обладнання

k	t, роки					
	1	2	3	4	5	6
1	E					
2	E	E				
3	E	E	З			
4	E	E	З	З		
5	E	E	E	E	З	
6	E	E	E	E	E	E

Виділене в таблиці значення функції Беллмана відповідає заміні обладнання. Максимально можливий прибуток при експлуатації обладнання досягається, якщо заміну обладнання провести на початку третього року його експлуатації.

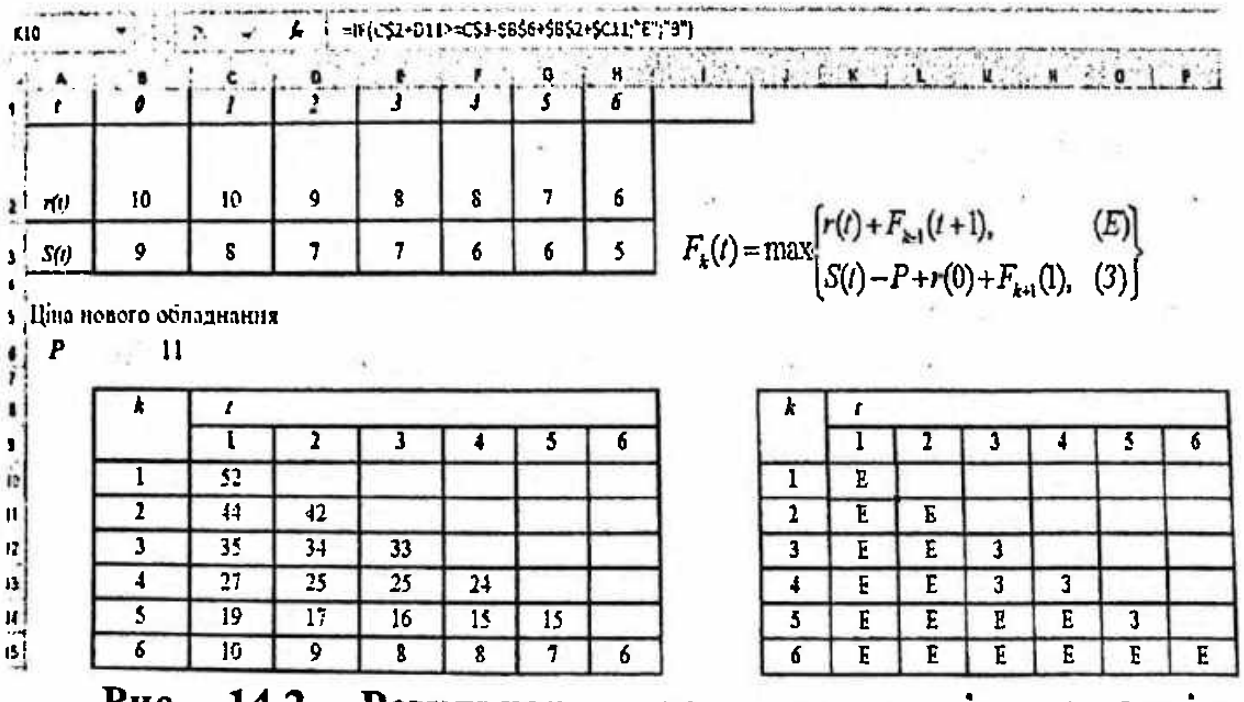


Рис. 14.2. Результат виконання задачі про заміну обладнання в середовищі MS Excel

Завдання 2

Знайти оптимальну стратегію експлуатації обладнання на період тривалістю 6 років, якщо річний дохід $r_i(t)$ і залишкова вартість $S_i(t)$ залежно від віку задані в таблиці, вартість нового обладнання дорівнює $P_1=12$, $P_2=14$, $P_1=9$, а вік обладнання на початок експлуатаційного періоду становив 1 рік.

Таблиця 14.4

Матриця вихідних даних

t	0	1	2	3	4	5	6
$r_1(t)$	10	10	9	8	8	7	6
$S_1(t)$	9	8	7	7	6	6	5
$r_2(t)$	12	10	9	9	8	7	5
$S_2(t)$	13	12	11	9	8	8	7
$r_3(t)$	12	10	9	9	8	7	5
$S_3(t)$	8	6	5	4	3	2	2

Додатково накладається обмеження на максимальну суму заміни обладнання за і період – 25 умовних одиниць.

Контрольні питання

1. Яка принципова відмінність у задачі про набір висоти та задачі про заміну обладнання?
2. Вкажіть на результуючій матриці план оптимальної заміни обладнання.
3. Яким чином задається функція Беллмана для задачі про заміну обладнання?
4. До якого типу задач також можна віднести задачу про заміну обладнання?

Лабораторна робота 15
Динамічне програмування. Оптимальна дивідендна політика

Задача

Акціонерне товариство (АТ) ставить за мету, отримавши суму інвестицій, визначити таку дивідендну політику за тимчасовими періодами (коли і скільки віддати), відповідно до якої за умови виконання зобов'язань перед акціонерами щодо виплат певної суми максимізувати загальний дохід («віддати з розумом»).

Завдання 1

Постановка: маємо суму інвестицій у розмірі 100 гр. од., Потрібно визначити фінансову політику АТ протягом 4-х періодів, для кожного з періодів задана величина внутрішньої норми рентабельності (ВНР), згідно з якою визначається прибуток у певний період.

Потрібно визначити суму дивідендів у кожному періоді за умови задоволення вимог щодо їх загальної суми таким чином, щоб загальний прибуток від інвестування був максимальний.

Хід роботи

Економіко-математична модель

Знайти такий план дивідендної політики, щоб

Загальний прибуток = Сум. Вихід – Сум. Вхід → мах

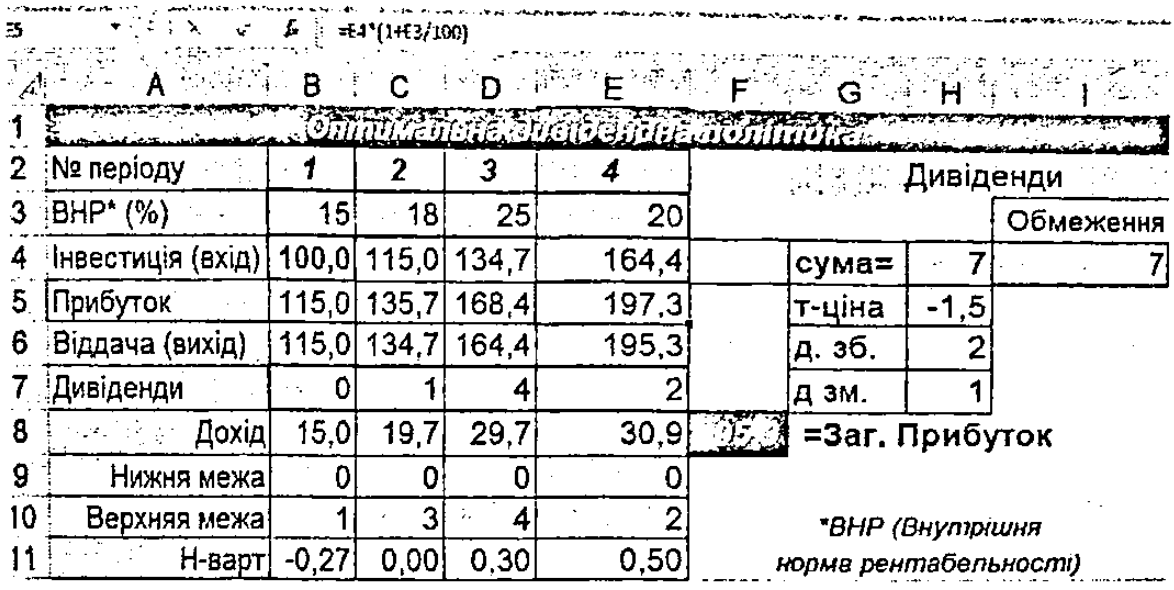
При обмеженні:

- Сума дивідендів = Обмеження на дивіденди;
- Верхня межа ≥ Дивіденди ≥ Нижня межа.

1. Створюємо таблицю з початковими даними.

2. У першу клітинку рядка Інвестиція вводимо значення початкової інвестиції, в наступні вводимо формули посилання на клітинку рядка Віддача попереднього періоду.

3. Рядок Прибуток заповнюємо формулами: Інвестиція поточного періоду×(1 + ВНР/100).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Оптимальна дивідендна політика								
2	№ періоду	1	2	3	4		Дивіденди		
3	ВНР* (%)	15	18	25	20				Обмеження
4	Інвестиція (вхід)	100,0	115,0	134,7	164,4		сума=	7	7
5	Прибуток	115,0	135,7	168,4	197,3		т-ціна	-1,5	
6	Віддача (вихід)	115,0	134,7	164,4	195,3		д. зб.	2	
7	Дивіденди	0	1	4	2		д зм.	1	
8	Дохід	15,0	19,7	29,7	30,9	95	=Заг. Прибуток		
9	Нижня межа	0	0	0	0				
10	Верхняя межа	1	3	4	2		*ВНР (Внутрішня норма рентабельності)		
11	Н-варт	-0,27	0,00	0,30	0,50				

Рис. 15.1. Зображення аркуша розв'язування задачі про оптимальну дивідендну політику

4. У вікні засобу Розв'язувач (пошук рішення) встановіть параметри:

a) виберіть цільову комірку – загальний прибуток;

b) комірки Дивіденди підлягають зміні.

c) дивіденди повинні бути в межах від нижньої до верхньої межі;

d) сума інвестицій рівна Обмеженню.

5. Побудуйте звіт про стійкість та дайте відповіді на такі запитання:

a) чому Н-вартість для першого періоду приймає від'ємне значення?

b) чому Н-вартість для другого періоду приймає нульове значення?

c) чому Н-вартість для третього та чствертого періодів приймає додатні значення?

d) який прогноз можна дати на підставі аналізу Н-вартостей?

e) як зміниться загальний прибуток, якщо змінити обмеження на 1 одиницю?

6. Перевірте власні припущення, змінюючи обмеження (верхню межу та обмеження) та аналізуючи загальний прибуток.

Завдання 2

Спробуйте розв'язати задачу за умови, що інвестиції взяті в кредит під 17 % за період. Тобто прибуток буде зменшений на заборгованість з кредиту, яка нараховується на залишок.

Контрольні питання

1. Як обчислюється внутрішня норма рентабельності?
2. Як обчислюється прибуток?
3. Який зміст зменшеної вартості?
4. Який зміст Т-ціни?
5. Який зміст дозволеного збільшення?
6. Який зміст дозволеного зменшення?
7. Що таке дивіденди?
8. Що таке інвестиція?
9. До якого типу задач належить дана задача (лінійного, нелінійного програмування)?

ТЕМА 5. СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лабораторна робота 16
Задачі стохастичного програмування

Теоретична довідка

Якщо відомий розподіл відповідних вхідних параметрів, то для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, суть яких полягає в тому, що, відшукуючи оптимальне рішення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, тобто значення керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових чинників $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, керувати якими немає можливості. Наприклад, у разі планування діяльності сільськогосподарських підприємств є можливість точно передбачати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності значною мірою залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики тощо (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку – випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише при розробці методів розв'язування задач, а також у разі їх постановки. Адже у постановці кожної задачі мають відображатися особливості прийняття рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

Математична постановка задачі СП

Типову задачу математичного програмування в де терміноваиій постановці формулюють так: визначити вектор $X=(x_1, x_2, ...x_n)$, для компонент якого:

$\max(\min) F = f(X)$

$q_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1, m})$,

$X \geq 0$.

Якщо функції в цій задачі, крім керованих параметрів X, залежать від деяких випадкових величин $\omega=(\omega_1,\omega_2,...\omega_n)$, то маємо справу із **задачею стохастичного програмування**:

$\max(\min) F = f(X,\omega)$,

$q_i(X,\omega) \leq 0 \ (i=\overline{1,m})$,

$X \geq 0$, $\omega \in \Omega$,

де Ω – простір подій ω.

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію щодо детермінованості (стохастичності) функцій f(X, ω), q_i(X, ω), постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

- стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;
- детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;
- стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

- **детермінованим чи випадковим є вектор X.** Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω – X(ω), тобто залежить від випадкових змінних;
- **як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції** – як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50? У першому випадку платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому – лише від 400 до 500;
- **як виконуються обмеження**: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з урахуванням евристичних міркувань.

Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора X зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, наприклад, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи – прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X, \omega)$ і $g_i(X, \omega) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$ на базі інформації щодо параметра ω.

Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку – випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

Особливості математичної постановки задач СП

У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції, так і виду обмежень. ЦФ визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи.

Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- **максимізація математичного сподівання** відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву **М-моделей**;

• **мінімізація дисперсії** деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву **V-моделей**;

• **ймовірність перевищення (неперевищення)** економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до **P-моделей**.

У загальному випадку спостереження уможливлюють неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища.

Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення → спостереження → рішення → спостереження...

або

спостереження → рішення → спостереження → рішення...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N разів, то модель називають N-етапною **задачею (моделлю) стратегічного СП**, а якщо зі слова «спостереження» – то **задачею тактичного СП**.

Кожен з N етапів, у свою чергу, також може бути поділений. У такому разі маємо **одноетапні** чи **двоетапні** задачі СП.

Одноетапна задача СП – коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу СП зводять до детермінованої.

Двоетапна задача СП виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому – розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових

параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі.

Приклад

• Відомо, що у комерційних банках нараховується більша процентна ставка на вкладені кошти порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується.

• Перед кожним вкладником постає дилема: мати менший, але гарантований дохід, або більший, проте з ризиком втратити внесок.

• З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок в Ощадний банк. Визначити оптимальний розподіл вкладень у банки.

Розв'язання

Позначимо через S загальну суму грошей певного власника; x – обсяг вкладень в Ощадний банк, y – у комерційний;

a, b – відповідно процентні ставки нарахувань в Ощадному та комерційному банках;

p – ймовірність повернення вкладу з комерційного банку;

(1-p) – ймовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання доходів:

ax + by – за умов успішного функціонування комерційного банку;

ax – y – у протилежному разі.

Економіко-математична модель має такий вигляд:

$$maxF(x,y) = (1-p)\cdot(ax-y) + p\cdot(ax+by)$$

за умов:

$$x + y \le S$$

$$x, y \ge 0.$$

Особливості аналізу регресійної статистики функцій LINEST та LOGEST у середовищі MS Excel

LINEST(функція ЛИНЕЙН)

Функція **LINEST** розраховує статистику для ряду із застосуванням методу найменших квадратів. Функцію **LINEST** також можна поєднувати з іншими функціями для обчислення інших видів моделей, які є лінійними з невідомими параметрами, включаючи поліноміальні, логарифмічні, експоненціальні й степеневі ряди. Оскільки повертається масив значень, функція повинна задаватися у вигляді формули масиву. Рівняння для прямої лінії має такий вигляд: $y = mx + b$ або $y = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + b$.

Якщо існує кілька діапазонів значень x, тоді значення m – коефіцієнти, що відповідають кожному значенню x, а b – константа. Функція **LINEST** повертає масив $\{m_n; m_{n-1}; ...; m_1; b\}$. Функція **LINEST** може також повертати додаткову регресійну статистику (необхідно вибрати діапазон і, ввівши функцію, натиснути Ctrl + Shift + Enter).

Синтаксис:

LINEST(відомі_значення_y; [відомі_значення_x]; [конст]; [статистика]),

де:

- відомі_значення_**y**. Обов'язковий аргумент. Множина відомих значень y;
- відомі_значення_**x**. Необов'язковий аргумент. Множина відомих значень x.

Якщо масив **відомі_значення_x** відсутній, то передбачається, що це масив {1; 2; 3;...}, що має таку ж розмірність, що і масив відомі_значення_y.

- **Конст.** Необов'язковий аргумент. Логічне значення, яке вказує, чи потрібно, щоб константа b дорівнювала 0. Якщо аргумент **конст** має значення False, то значення b визначається рівним 0.
- **Статистика.** Необов'язковий аргумент. Логічне значення, яке вказує, чи повернути додаткову регресійну статистику.

Якщо аргумент статистика – True, функція LINEST повертає додаткову регресійну статистику $\{m_n; m_{n-1};...; m_1; b: se_n; se_{n-1};...; se_1; se_b: r_2; se_y: F; d_f: ss_{reg}; ss_{resid}\}$.

Де параметри регресійної статистики

Статистичні значення	Опис
$se_1;se_2;...;se_n$	Стандартні значення помилок для коефіцієнтів $m_1;m_2;...;m_n$.
se_b	Стандартна похибка для константи b
r_2	Коефіцієнт детермінованості. Якщо коефіцієнт визначення дорівнює 1, то спостерігається досконала кореляція. Якщо 0 – рівняння регресії не допоможе у прогнозуванні y-значення
se_y	Стандартна помилка для очікуваного y
F	F-статистика, або спостережувані F-значення. Використовується для визначення, чи спостережуване відношення між залежною і незалежною змінними має випадковий характер
d_f	Ступені вільності. Використовується для пошуку критичних F-значень у статистичній таблиці
ss_{reg}	Регресійна сума квадратів
ss_{resid}	Залишкова сума квадратів. Для отримання додаткових відомостей щодо обчислення значень ss_{reg} і ss_{resid}

На наведеному нижче рисунку показано порядок повернення статистики додаткової регресії.

	A	B	C	D	E	F
1	m_n	m_{n-1}	...	m_2	m_1	b
2	se_n	se_{n-1}	...	se_2	se_1	se_b
3	r_2	se_y				
4	F	d_f				
5	ss_{reg}	ss_{resid}				

Рис. 16.1. Зображення схеми розміщення статистики

Функції апроксимації **LINEST** і **LOGEST** можуть обчислити пряму або експоненційну криву, яка найкраще описує дані. Проте необхідно визначити, який із двох результатів найкраще підходить для опису даних. Для цього можна використати функцію **TREND(відомі_значення_y;відомі_значення_x)** для прямої або

функцію **GROWTH(відомі_значення_y; відомі_значення_x)** для експоненційної кривої, порівняти прогнозовані значення з фактичними. Можна також побудувати діаграми для візуального порівняння.

Здійснюючи регресійний аналіз, Excel обчислює для кожної точки квадрат різниці між прогнозованим значенням y та фактичним значенням y. Сума цих квадратів різниць називається залишковою сумою квадратів (SS_{resid}). Потім Excel обчислює загальну суму квадратів (SS_{total}). Якщо аргумент **конст** приймає значення TRUE (істина) або цей аргумент не вказано, загальна сума квадратів дорівнюватиме сумі квадратів різниць між фактичними значеннями y та середніми значеннями y. Якщо аргумент **конст** приймає значення FALSE (хибність), загальна сума квадратів дорівнюватиме сумі квадратів фактичних значень y (без віднімання середнього значення y від кожного окремого значення y). Після цього регресійну суму квадратів (SS_{reg}) можна обчислити таким чином: $SS_{reg}=SS_{total} - SS_{resid}$. Чим менше залишкова сума квадратів, тим більше значення коефіцієнта детермінованості r_2, який показує, наскільки вдало рівняння, отримане в результаті регресійного аналізу, пояснює взаємозв'язок між змінними. Коефіцієнт $r_2 = SS_{reg}/SS_{total}$.

Важливо. Значення F-test, яке повертає функція LINEST, відрізняється від значення F-test, яке повертає функція FTEST1 та F.TEST. LINEST повертає статистику F, у той час як F.TEST повертає ймовірність.

Значення F і d_f у результатах функції LINEST можна використати для оцінки ймовірності випадкового отримання найбільшого значення F.

F можна порівняти із критичними значеннями в опублікованих таблицях F-розподілу критерію Фішера (F.INV.RT – для визначення критерію Фішера).

Також можна використати функцію **FDIST** для обчислення ймовірності випадкового отримання більш високого значення F. Відповідний розподіл F має ступені вільності v1 і v2. Якщо n є кількістю точок даних, а аргумент «конст» має значення TRUE (істина), або цей аргумент не вказано, то v1=n-df-1 і v2=df. (Якщо аргумент «конст» має значення FALSE (хибність), то v1=n-df і v2=df).

Функція FDIST із синтаксисом FDIST(F;v1;v2) повертатиме ймовірність випадкового отримання більш високого значення F.

Якщо значення F набагато вище, ніж значення критерію Фішера, що повертає функція F.INV.RT для відповідного значення імовірності («альфа») та ступенів вільності, то дуже малоймовірно, що таке високе значення F було отримано випадково.

Тобто припущення, що немає залежності між аргументами відомі_значення_y і відомі_значення_x, відкидається, якщо значення F перевищує критичний рівень – значення критерію Фішера.

За допомогою функції FDIST у програмі Excel можна отримати ймовірність того, що таке високе значення F було отримано випадково.

Наприклад, FDIST(459,753674; 4; 6)=1,37E-7, тобто ймовірність надзвичайно низька.

Обчислення t-статистики

Інша перевірка припущення використовується для визначення, чи кожний коефіцієнт нахилу важливий у цьому рівнянні. Наприклад, щоб визначити статистичну значність конкретної змінної, необхідно поділити відповідний коефіцієнт нахилу на очікувану стандартну помилку відповідного коефіцієнта.

$$t = m_4 \div se_4.$$

Якщо абсолютне значення t досить високе, можна зробити висновок, що коефіцієнт нахилу є важливим.

Звернувшись до таблиць у довіднику зі статистики, можна дізнатися, що **t-критичне двобічне значення коефіцієнта Стьюдента** з 6 ступенями вільності та «Альфа» = 0,05 дорівнює 2,447. Це критичне значення можна також знайти за допомогою функції **T.INV.2T** або **TINV** у програмі Excel. **T.INV.2T**(0,05;6)= 2,447. **Якщо абсолютна величина t більша за t-критичне** (у даному випадку 2,447), то ця змінна є важливою для значення y. Аналогічно можна визначити статистичну значимість усіх інших змінних.

Аналогічно здійснюється аналіз, використовуючи функцію **LOGEST,** яка повертає масив значень, що описує криву.

Оскільки ця функція повертає масив значень, її також потрібно вводити як формулу масиву.

Формула кривої має такий вигляд:

$$y = b \cdot m^x$$

або

$$y = (b \times (m_1^{x1}) \times (m_2^{x2}) \times \ldots).$$

Задачі нелінійного програмування

Крім задач лінійного програмування, існує цілий клас задач, залежність між змінними цільової функції яких не можна визначити лінійними рівняннями, крім того, системи обмежень також можуть (і, як правило, так воно і є) визначатися рівняннями та нерівностями, змінні в яких мають степені вищі за одиницю. Розглянемо задачу нелінійного програмування, коли на змінні цільової функції не накладено жодних обмежень. Таку задачу називають **задачею без обмежень.**

Коли в деякій точці значення є оптимальним, то воно буде оптимальним і по будь якій її змінній, а для них у цій точці похідна дорівнює нулю.

Швидкість зростання функції в такій точці дорівнює нулю і її можна назвати **точкою спокою.**

Наведемо алгоритм знаходження максимуму цільової функції задачі НЛП без обмежень.

1. Знаходимо критичні точки, тобто ті, в яких частинні похідні 1-го порядку рівні нулеві або не існують.

2. Визначаємо величини:

$$A = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}; \; B = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}; C = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$$

3. Складаємо детермінант $\Delta = AC - B^2$.

4. Якщо $\Delta > 0$, то функція має в M_0 – екстремум. А саме: якщо $A > 0$ (чи $C > 0$) – мінімум; якщо $A < 0$ (чи $C > 0$) – мінімум; якщо $A < 0$ (чи $C < 0$) – максимум.

Якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

Якщо $\Delta = 0$, то проблема потребує додаткових досліджень.

Табличний процесор Excel дозволяє розв'язувати задачі нелінійного програмування за допомогою вже добре відомої нам

програми «Розв'язувач». Наведемо приклад типової задачі нелінійного програмування з конкретним економічним змістом.

Задача

Органолептична оцінка випечених виробів із дріжджового тіста Y залежить від режиму температури – X1 та швидкості циркуляції повітря у жарильній шафі – X2. Експериментальні дані для Y, X1, X2 наведено в таблиці:

Таблиця 16.1

Таблиця вихідних даних

Y	X_1	X_2
4.25	200+0,75n	1+0,05n
4.3	200+0,55n	3.5+0,05n
4.35	200+0,42n	5+0,05n
4.42	220+0,70n	2.6+0,05n
4.53	220+0,40n	3.5+0,05n
4.72	220+0,65n	4.4+0,05n
4.73	230+0,60n	3.5+0,05n
4.75	230+0,78n	5+0,05n

де n – порядковий номер студента в журналі.

Завдання 1

На основі статистичних даних знайти регресійну залежність показника Y від змінних X_1, X_2. Визначити такий режим випічки виробів з тіста, при якому органолептична оцінка виробів буде максимальною.

Хід роботи

Припустимо, що між Y та X_1, X_2 існує стохастична залежність

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2 + a_4 x_2^2$$

1. Для оцінки параметрів будуємо таблицю, вводячи блоки даних:

- для Y – A3:A10;
- для X1 – B3:B10;
- для X2 – D3:D10.

2. У блоках C3:C10 та E3:E10 формуємо квадрати відповідних значень X1 та X2.

3. Оцінки параметрів регресії та додаткову статистику формуємо у полі A12:E16:

- відзначимо блок, де будуть розміщенні розрахункові дані: ширина блоку рівна числу оцінюваних параметрів, а висота має п'ять рядків;
- вибираємо функцію **LINEST** та поступово вводимо вхідні дані й параметри;
- для того, щоб побачити у блоці всі розрахункові дані, натискаємо **F2**, а потім **Ctrl+Shift+Enter**.

4. Оптимальний режим визначаємо з використанням **«Розв'язувача»**:

- у комірки змінних вводимо початкові значення (мінімальні значення);
- у цільову комірку вводимо формулу функції, для якої потрібно знайти максимальне значення. У формулі замість X1, X2, a0, a1, a2, a3, a4 вказуємо адреси відповідних комірок;
- використовуючи **Розв'язувач,** знаходимо значення x_1, x_2.

5. Отриманий результат має вигляд таблиці, наведеної нижче.

	A	B	C	D	E
1	Розрахунок оптимального процесу випічки				
2	Y	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2
3	4,2	200	40000	1	1
4	4,3	200	40000	3,5	12,25
5	4,35	200	40000	5	25
6	4,62	220	48400	2,6	6,76
7	4,83	220	48400	3,5	12,25
8	4,75	220	48400	4,4	19,36
9	4,73	230	52900	3,5	12,25
10	4,7	230	52900	5	25
11	*a4*	*a3*	*a2*	*a1*	*a0*
12	-0,011265214	0,107795	-0,000802	0,3577147	-35,363163
13	0,018231833	0,117014	0,000325	0,1390475	14,796685
14	0,956544909	0,076346	#N/A	#N/A	#N/A
15	16,50919765	3	#N/A	#N/A	#N/A
16	0,384913671	0,017486	#N/A	#N/A	#N/A
17	Змінні				
18	X_1	X_2	max Y	4,7648	
19	222,9157124	4,784397			

Рис. 16.2. Відображення результату використання функції LINEST

Завдання 2

Використовуючи викладений у теоретичній довідці матеріал, необхідно також розв'язати на окремому аркуші задачу із використанням функції **LOGEST.**

Здійснити порівняльний аналіз кожного із завдань і дати відповіді на питання:

1. Чи існує кореляція між змінними x та y?
2. Чи існує залежність між змінними x та y?
3. Який критерій Фішера для задачі і як його знайти?
4. Яка ймовірність отримання найвищого значення F було випадковим?
5. Обчисліть критерій Стьюдента для цієї задачі.
6. Побудуйте таблицю значимості усіх змінних та проаналізуйте її.
7. Використання якої із функцій є більш ефективним для цієї задачі? Обґрунтуйте відповідь.

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну задачу нелінійного програмування. Які її особливості?
2. Що таке задача без обмежень?
3. Що називається частинною похідною, градієнтом, частинною похідною другого порядку?
4. Що таке точка спокою?
5. Наведіть алгоритм знаходження екстремуму цільової функції задач нелінійного програмування без обмежень.
6. Яке призначення статистичної функції **LINEST**? Яким чином організувати вхідні дані для її використання?
7. Як визначити оптимальне значення цільової функції з використанням програми **Розв'язувач**?
8. Охарактеризуйте можливості діалогового вікна **Розв'язувач**?
9. Яким чином потрібно змінити опції вікна для відшукання лінійної регресії? Мінімального значення функції?
10. Як накласти обмеження на початкові значення параметрів?

11. Які вихідні дані функції **LINEST**?

12. Сутність задач стохастичного програмування.

13. За якими ознаками можлива класифікація задач стохастичного програмування?

14. Яка стохастична задача називається одноетапною?

15. Яка стохастична задача називається двоетапною?

ТЕМА 6. МЕРЕЖНЕ ПЛАНУВАННЯ

Лабораторна робота 17
Потік мінімальної вартості

Теоретична довідка
Основні поняття теорії графів

Теорія графів – спеціальний розділ математичного програмування, який вивчає кількісні і якісні характеристики графів.

Граф визначається двома характеристиками **L(X,T)**:

1. Множинами певних елементів **X**, які називаються вершинами.

2. Законами, які дозволяють встановити час чи відстань (**T**) між кожним елементом множини **X**.

Ребро – відповідність між будь-якою парою вершин. Вершини графічно позначаються крапками або кружечками. Ребра позначаються ненаправленими лініями.

Дві вершини графа називаються **суміжними,** якщо вони мають спільне ребро.

Ребра можуть характеризуватись такими властивостями:

- пропускна здатність каналу;
- відстань між парою вузлів;
- вартість перевезень;
- ймовірність проходження сигналу по ланцюгу;
- кількість необхідних ресурсів для виконання операції тощо.

Оскільки завдання на графах відносять до оптимізаційних задач, вони складають самостійний і поширений клас мережевих моделей оптимізації.

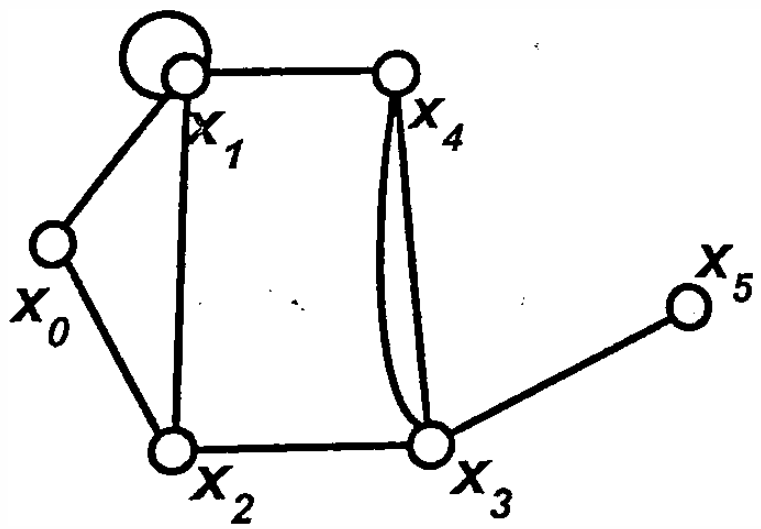
Дуга зі стрілкою і певним значенням відповідного параметра визначає універсальне поняття – **потік (flow)**, що рухається з початкового вузла до кінцевого.

Об'єктом потоків у практичних завданнях виступають рідина, вантаж, сигнали зв'язку, темп виконання операцій із залученням ресурсів, енергія, газ, пасажири, капітал, транспортні засоби тощо.

Одна і та ж пара вершин може з'єднуватись більше ніж одним ребром.

Певна вершина може бути з'єднана ребром сама з собою, тоді таке ребро називається **петлею**.

Певна послідовність попарно суміжних ребер графа утворює **ланцюг**.



Ланцюги

$x_0x_2 - x_2x_3 - x_3x_4$

$x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_5$

Цикл

$x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_0$

Рис. 17.1. Графічне відображення графа

Деревом називається скінчений зв'язний граф, який складається принаймні з двох вершин і не має циклів.

Дерево цілей – це графічне відображення процесу, що визначає альтернативи рішення, стан рішення та їх відповідні ймовірності віддачі для кожної комбінації альтернатив і станів рішень. Дерево цілей – один з найбільш популярних методів в економіці для вирішення складних задач.

Для будь-якої пари вершин дерева існує **один** і лише один ланцюг, що їх зв'язує.

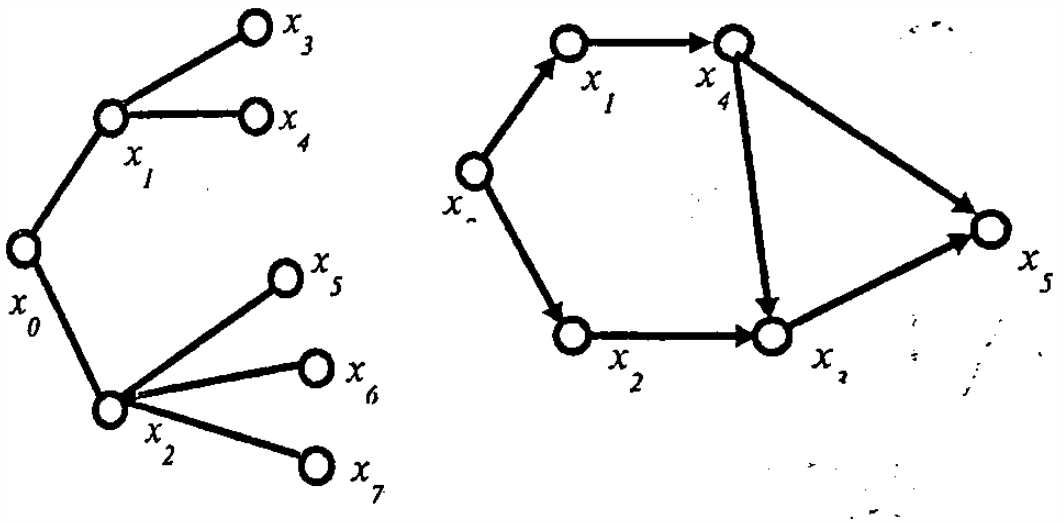
Для дерева, що має n вершин, кількість ребер завжди рівна (n-1).

Часто зв'язки між вершинами є упорядкованими (різниця між початковою і кінцевою вершинами є суттєвою).

У цьому випадку ребра називаються **дугами,** а граф – **орієнтованим** (направленим). Графічно дуги позначаються лініями зі стрілками.

Мережевий графік – орієнтований граф без петель.

Можуть бути змішані графи, які містять і ребра, і дуги, і петлі (мережа автомобільних шляхів).



Дерево цілей *Мережевий граф*

Рис. 17.2. Графічне відображення дерева цілей та орієнтованого графа

Якщо завдання можна подати в графічній формі у вигляді сітки, тоді можна за допомогою досить ефективних потокових алгоритмів отримати її оптимальне рішення на основі математичних графів з меншими витратами комп'ютерних ресурсів.

Орієнтований граф називають сіткою, мережею (network), якщо володіє такими **властивостями**:

1) зовнішній вузол-джерело має тільки вихідні дуги;

2) зовнішній вузол-сток має тільки вхідні дуги;

3) всі інші вузли – внутрішні (проміжні, транзитні), у яких є вхідні і вихідні дуги, які пов'язують вузли.

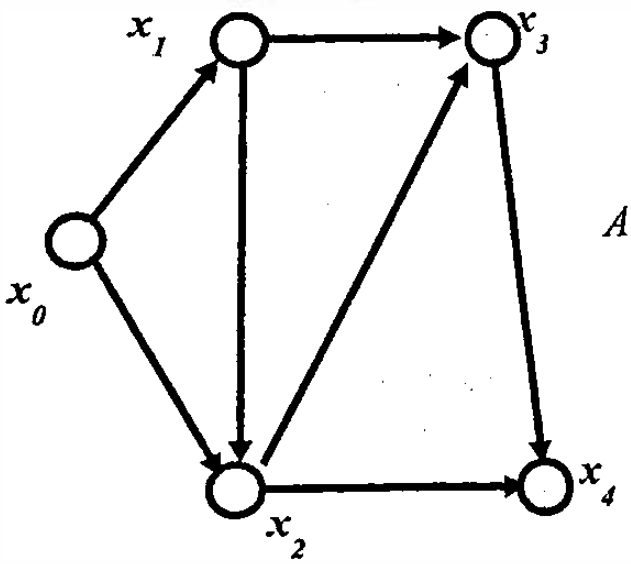
Граф може бути представлений у вигляді матриці.

Існує три типи матриць:

- матриця **суміжності;**
- матриця **Кірхгофа;**
- матриця **інцидентій**.

Матриця суміжності – це квадратна матриця $A = |a_{ij}|$ порядку n, елементи a_{ij} якої рівні кількості дуг, що з'єднують вершини x_i з вершинами x_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершини } x_i \textit{ та } x_j \textit{ суміжні,} \\ 0 - \textit{в протилежному випадку.} \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рис. 17.3. Графічне відображення матриці суміжності для орієнтованого графа

Закономірності

1. Якщо матриця складається лише з **0** та **1**, то граф не має дуг.
2. Якщо на головній діагоналі всі елементи рівні **0**, то граф не має петель.

Теорема 1. Графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжностей можна одержати одну з іншої однаковими перестановками рядків і стовпців.

Теорема 2. Якщо A – матриця суміжностей графа **L(X,T)**, який має порядок n, то елемент a_{ij} матриці A^k є числом маршрутів довжини k, які з'єднують вершини x_i та x_j у графі **L(X,T)**.

Матриця суміжності – квадратна матриця зв'язку типу «кожен з кожним» розміром n × n, де n – число вузлів.

Елемент такої матриці приймає ненульове значення (відстань, витрати), якщо існує дуга між вузлами, або 0 у протилежному випадку.

Ця матриця повністю визначає структуру мережі. Для аналізу та розрахунків використовується апарат матричної і лінійної алгебри.

Важливо. Цей спосіб використовується при вирішенні класичної транспортної задачі, задачі комівояжера, тобто там, де кількість дуг значно перевищує кількість вузлів. **Наприклад**, для опису графа, який складається з 15 вузлів і, відповідно, 225 дуг, краще застосувати матрицю для компактного запису даних.

Матриця Кірхгофа

Матриця $B = |b_{ij}|$ називається матрицею Кірхгофа, якщо

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \textit{якщо } (\mathrm{i},\mathrm{j}) \in \mathrm{T}; \\ 0, \textit{якщо } \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \textit{ та } (\mathrm{i},\mathrm{j}) \notin \mathrm{T}; \\ \mathrm{n}, \textit{якщо } \mathrm{i} = \mathrm{j}. \end{cases}$$

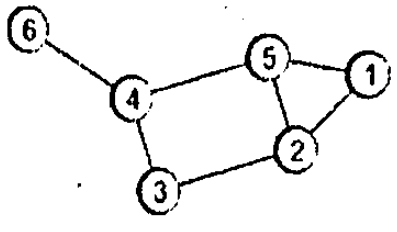
за умови обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 0,$$

$$i = \overline{1,..,n}, \qquad j = \overline{1,..,n}.$$

Наприклад



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

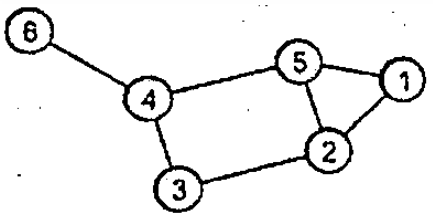
Рис. 17.4. Графічне відображення матриці Кірхгофа для заданого графа

Матриця інцидентності

Матриця $C = |c_{ij}|$ називається матрицею інцидентності, якщо для неорієнтованого графа

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{коли вершина i та ребро}_{\mathrm{j}} \textit{ інцидентні} \\ 0 - \textit{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Наприклад



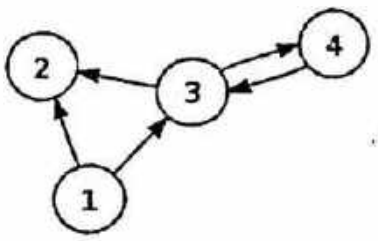
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 17.5. Приклад матриці інцидентності для неорієнтованого графа

або для орієнтованого графа

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } \text{i} - \textit{ початок дуги } \text{t}_\text{j}; \\ -1, \text{ якщо } \textit{вершина } \text{i} - \textit{ кінець дуги } \text{t}_\text{j} \\ 0, \textit{ якщо вершина } \text{i} \textit{ і дуга } \text{t}_\text{j} \textit{ не інцидентні}. \end{cases}$$

Наприклад



$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рис. 17.6. Приклад матриці інцидентності для орієнтованого графа

Мережа – кінцевий зв'язний орієнтований граф без петель, в якому виконуються такі умови:

• граф має лише дві специфічні вершини: одна з них не має дуг, що входять до неї (ця вершина називається **витоком** (A) а інша не має дуг, що виходять з неї (така вершина називається **стоком** (E));

• усім дугам відповідають певні **кількісні характеристики** (час, вартість, відстань, пропускна спроможність тощо).

Вектор координат

Вектор координат і характеристик коефіцієнтів дуг – таблиця з трьох і більше стовпців (початок дуги, кінець дуги, одна і більше характеристик дуги, наприклад, її довжина) і рядків. **Цей спосіб застосовують там, де число вузлів і дуг приблизно однакове.**

Наприклад, у мережевій транспортній задачі з проміжними пунктами краще і більш природно використовувати векторну форму подання транспортної мережі, ніж матричну.

Для мережевих моделей оптимізації фундаментальним є принцип збереження потоку в будь-якому вузлі (економісти називають це балансом), а саме: **сума потоків на виході вузла рівна сумі потоків на його вході плюс потенціал вузла (+ пропозицію /-попит).**

Методичні рекомендації з побудови мережевих моделей

При побудові мережевого графіка необхідно дотримуватись таких **правил**:

- довжина стрілки не залежить від часу виконання роботи;
- стрілка може не бути прямолінійним відрізком;
- для дійсних робіт використовуються суцільні, а для фіктивних –пунктирні стрілки;
- кожна операція повинна бути представлена тільки однією стрілкою;
- між одними і тими ж подіями не повинно бути паралельних робіт, тобто робіт з однаковими кодами;
- слід уникати перетину стрілок;
- не повинно бути стрілок, спрямованих справа наліво;
- номер початкової події повинен бути менше номера кінцевої події;
- не повинно бути висячих подій (тобто не мають попередніх подій), крім вихідного;
- не повинно бути тупикових подій (тобто не мають подальших подій), крім завершального;
- не повинно бути циклів.

Вихідні дані для побудови мережевої моделі можуть задаватися різними способами, наприклад:

- **описом передбачуваного проекту**. У цьому випадку необхідно самостійно розбити його на окремі роботи і встановити їх взаємні зв'язки;
- **списком робіт проекту**. У цьому випадку необхідно проаналізувати зміст робіт та встановити існуючі між ними зв'язки;

• **списком робіт проекту із зазначенням їх упорядкування.** У цьому випадку необхідно тільки відобразити роботи на мережевому графіку.

Алгоритм побудови мережевого графіка

1. Побудову мережевого графіка необхідно починати з виявлення вихідних робіт моделі.

2. Якщо, згідно з умовою, деяка робота може виконуватися, не чекаючи закінчення інших робіт, то така робота є **вихідною** у мережевій моделі і її початковою подією є вихідна подія.

Якщо вихідних робіт декілька, то їх стрілки виходять усі з однієї вихідної події.

3. Якщо, згідно з умовою, після закінчення деякої роботи не повинні виконуватися жодні інші роботи, то така робота є завершальною роботою мережевої моделі та її кінцевим подією є завершальна подія.

Якщо завершальних вихідних робіт декілька, то всі їх стрілки заходять в одну завершальну подію.

4. Якщо, згідно з умовою, кілька робіт мають загальну початкову і загальну кінцеву подію, то вони є паралельними, мають однаковий код, що неприпустимо.

Для усунення паралельності робіт вводять додаткову подію і **фіктивну роботу** (якій у реальності не відповідає ніяка дія) таким чином, щоб кінцеві події робіт розрізнялися.

Приклад. Задача Ейлера

У 1738 році відомий математик Леонард Ейлер (1707–1782), у той час професор Петербурзького університету, розв'язав задачу про кенігсберзькі мости. Конкурс на розв'язання цієї задачі був оголошений мером міста Кенігсберга.

Суть задачі полягала в тому, що у місті Кенігсберзі на річці Преголь розташовані два острови, які з'єднані сімома мостами.

Острови позначено літерами AD, береги – літерами BC.

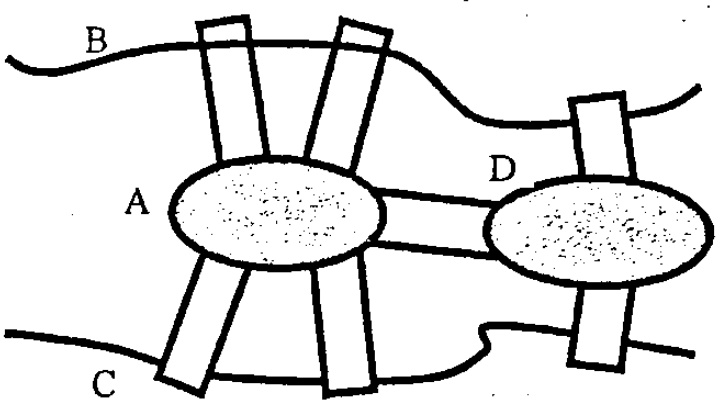


Рис. 17.7. Схема мостів у м. Кенігсберзі

На островах був розташований міський парк.

Невідомо чому, але громадян почало хвилювати питання, чи можна пройти по всіх мостах так, щоб, вийшовши з будь-якої точки суші (берега чи острова), пройти по кожному мосту рівно один раз і повернутися у вихідну точку.

На підставі введеної Ейлером нової формалізації було доведено, що такого маршруту не існує.

Для знаходження розв'язку Ейлер позначив кожну частину суші точкою (вершиною), а кожен міст – лінією (ребром), що з'єднує відповідні точки.

Отриману структуру, яку тепер називаємо графом, зображено на рисунку.

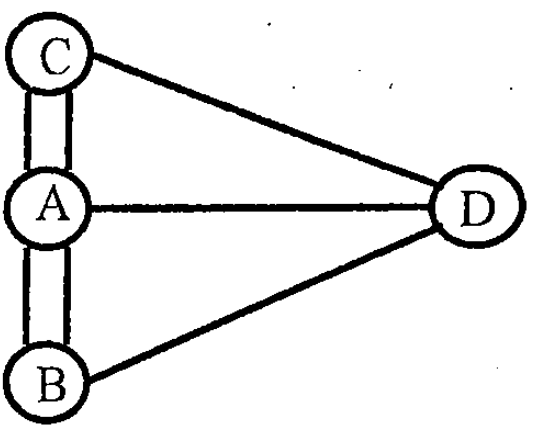


Рис. 17.8. Зображення графа задачі про кенігсберзькі мости

На ньому точки позначені тими ж буквами, що й на попередньому рисунку, а ребра відповідають мостам.

Твердження про відсутність позитивного розв'язку в цій задачі еквівалентне твердженню про неможливість обійти спеціальним чином граф.

Для доведення Ейлер ввів поняття степені кожної вершини як кількості ребер, інцидентних їй, і довів у загальному вигляді теорему про те, що маршрут, згодом названий його іменем, існує тільки для графів спеціального вигляду.

А саме, **розв'язок можливий лише для зв'язних графів, у яких степені всіх вершин парні.**

Задача 1. Потік мінімальної вартості

Завдання

Це класична потокова задача, де дуги сітки характеризуються питомими витратами на перевезення і пропускною здатністю.

Необхідно визначити оптимальні маршрути доставки заданого обсягу з вузла-джерела у вузол-сток мінімальної загальної вартості. Усі проміжні вузли мають нульові потенціали і є суто транзитними.

Постановка

Транспортна мережа задана змішано-орієнтованою сіткою,

Початкові дані містять відомості про мережу, що складається з 12 вузлів і 22 спрямованих дуг. На рис. 17.9 представлено зображення графа. На кожній із дуг вказано вартість перевезення одиниці товару та пропускну здатність дуги. Вузол-сток під номером 11.

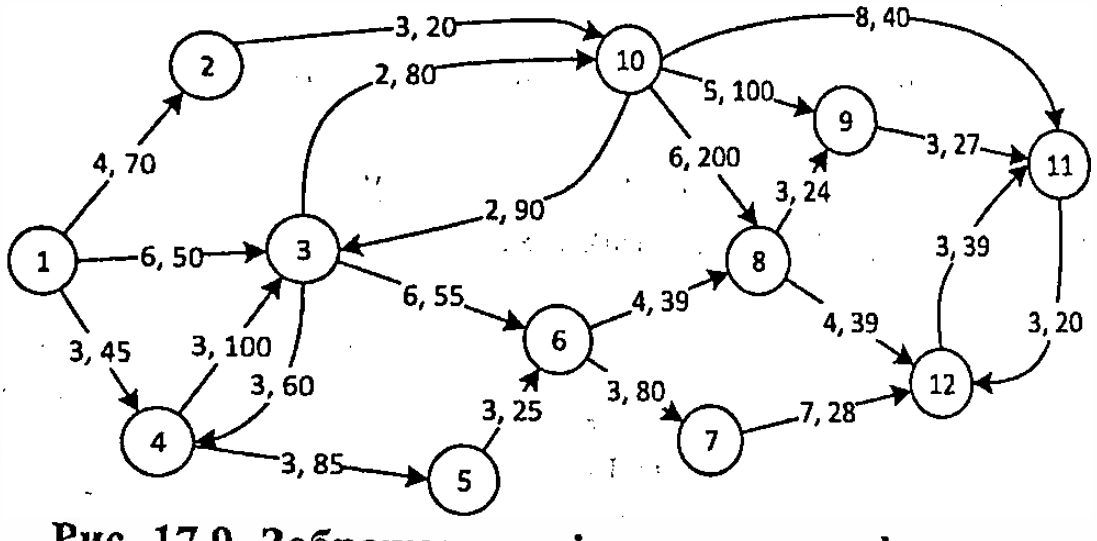


Рис. 17.9. Зображення орієнтованого графа транспортної мережі

Для першого вузла задано пропозиція (100), для останнього – попит (–100), потенціали всіх інших – нуль (вони транзитні).

Для дуг задані питомі витрати на перевезення ними вантажу і їх пропускну здатність.

Знайти **потік перевезення** вантажу, за умови

1. Загальні витрати = Потік × Витрати → min
2. При обмеженні:

- Вихід – Вхід (Сума) = Попит / Пропозиція;
- Потоки ≤ Пропускна здатність;
- Потоки ≥ 0.

Хід роботи

1. Витрати на перевезення кожної із дуг задаються довільно.

2. Для обчислення потоку у вузлах використовують функцію обчислення суми величин, координати яких задовольняють певні умови (тобто якщо певна величина належить відповідній множині). (SUMIF).

Наприклад, для комірки E4 формула буде виглядати таким чином =SUMIF($J$4:$J$25;A4;$H$4:$H$25). Тобто сумарний потік на виході із вузла рівний сумі потоків по дугах, які починаються у даному вузлі.

На практиці зображення даного орієнтованого графа можна відобразити таким чином.

3. На основі звіту зі стійкості заповніть відповідні поля. Проаналізуйте дані Т-цін та Н-вартостей. Перевірте власні припущення, змінивши обмеження та запустивши на виконання Розв'язувач.

4. Спробуйте розв'язати задачу за умови, що вводиться потенціал вузла, тобто додаткові витрати за обслуговування в аеропорті в розмірі 5 од.

Нормовані вартості нульових ділянок вказують на збільшення загальних витрат при примусовому включенні їх у маршрут. Нормовані вартості не нульових ділянок вказують на зменшення загальних витрат, оскільки вони обмежені пропускною здатністю.

Тіньові ціни для потенціалів вузлів вказують на збільшення або зменшення загальних витрат за умови розміщення джерела у відповідному вузлі.

E4 =SUMIF($J$4:$J$25;A4;$H$4:$H$25)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	*Задача про потік мінімальної вартості*													
2	Вузли							Дуги						
3	Вузол	Поп/Пр	Т-ціна	Вхід	Вихід	Сума		Потік	Н-вартість	Початок	Кінець	Витрати	ПЗ	Всього
4	Київ	100		0	0	0			0	Київ	Донецьк	4	70	0
5	Донецьк	0		0	0	0			0	Київ	Варшава	6	50	0
6	Варшава	0		0	0	0			0	Київ	Львів	3	45	0
7	Львів	0		0	0	0			0	Донецьк	Париж	3	20	0
8	Бухарест	0		0	0	0			0	Варшава	Париж	2	80	0
9	Осло	0		0	0	0			0	Париж	Варшава	2	90	0
10	Берлін	0		0	0	0			0	Львів	Варшава	3	100	0
11	Мюнхен	0		0	0	0			0	Варшава	Львів	3	60	0
12	Лондон	0		0	0	0			0	Варшава	Осло	6	55	0
13	Париж	0		0	0	0			0	Львів	Бухарест	3	85	0
14	Відень	-100		0	0	0			0	Бухарест	Осло	3	25	0
15	Брюсель	0		0	0	0			0	Осло	Мюнхен	4	39	0
16									0	Осло	Берлін	3	80	0
17									0	Париж	Мюнхен	6	200	0
18									0	Париж	Лондон	5	100	0
19									0	Париж	Відень	8	40	0
20									0	Мюнхен	Лондон	3	24	0
21									0	Мюнхен	Брюсель	4	39	0
22									0	Берлін	Брюсель	7	28	0
23									0	Лондон	Відень	3	27	0
24									0	Брюсель	Відень	3	39	0
25									0	Відень	Брюсель	3	20	0
26												*Зав_Затрати=*		0

Рис. 17.10. Зображення векторів координат і характеристик дуг на аркуші MS Excel

Задача 2

1. Знайти потік мінімальної вартості за умови перевезення 100 од. товару з пункту 1 в пункт 14. Вартість перевезення по дугах одиниці товару вказано на графі.

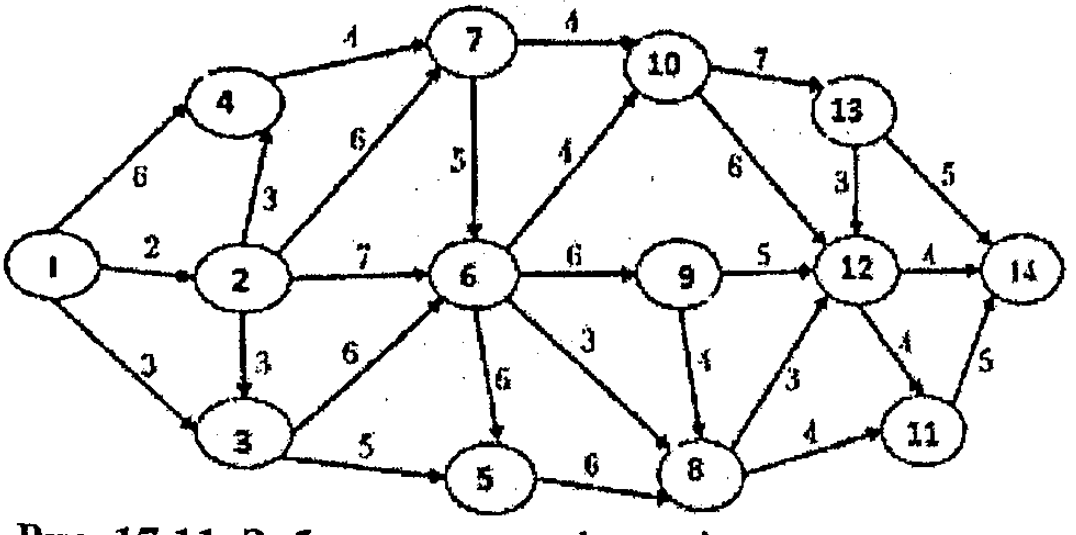


Рис. 17.11. Зображення графа вихідних даних

2. Розв'яжіть цю задачу за умови, що загальні витрати по дузі не повинні перевищувати 200 од.

3. Побудувати звіт зі стійкості та проаналізувати Т-ціни та Н-вартості.

Контрольні питання

1. Які способи розв'язування мережних задач Вам відомі?
2. Що таке вузол?
3. Який граф ми називаємо орієнтованим?
4. Що таке петля?
5. Які параметри дуг можливі?
6. Що таке потенціал вузла?
7. У чому полягає суть задачі про Кенігсберзькі мости?

Лабораторна робота 18
Критичний шлях

Теоретична довідка

У середині 50-х років у теорії графів сформувалася досить дивна на перший погляд потокова задача про пошук максимального шляху на мережі, адже логічно було б шукати шляхи, які мінімізують певний інтегральний показник, що зводиться найчастіше до витрат.

Причиною даної задачі стала практика сучасного менеджменту щодо управління складними проектами, заснована в США (1968 р.). Відповідна методологія отримала назву «мережеве планування і управління» (МПУ).

Вузли в цій мережі називаються подіями, а дуги – операціями (роботами). Подія є результатом виконання всіх операцій, від яких вона залежить, на мережі це вузол, в який входять відповідні дуги, тобто їх кінці мають ознаку (номер, назва). Після досягнення події починаються такі операції, що залежать від неї, на мережі це вузол, з якого виходять відповідні дуги.

У мережевому графіку реалізовані два принципи:

- операція починається тільки тоді, коли виконана її початкова подія;
- подія вважається досягнутою, якщо виконані всі операції, які є входами.

. Для розрахунку мережевого графіка розроблені два методи:

• критичного шляху (Critical Path Method, CPM), де тривалість операцій однозначно визначено і задано конкретними числами;

• аналізу та перегляду програм (Program Evaluation and Review Technique, PERT), де тривалість операцій невизначено, тому їх задають певними ймовірнісними оцінками.

Мета обох методів однакова – вона полягає у визначенні мінімальної тривалості виконання всіх операцій проекту. Виявилося, що, для того щоб визначити мінімальний термін виконання всього проекту, потрібно знайти конфігурацію та довжину максимального шляху, що з'єднує початковий вузол з кінцевим. Цей шлях називають критичним шляхом, операції, що його утворюють, є критичними, оскільки повинні бути виконані у визначений для них термін, їх затримка призведе до збільшення тривалості проекту. Усі інші операції некритичні, оскільки мають резерв часу. Отже, основна увага менеджера повинна бути зосереджена на критичних роботах.

Задача

Задано мережевий графік у вигляді орієнтованого графа, який складається з 9 вузлів (подій) і 13 дуг (операцій). Потрібно знайти критичний шлях від вузла № 1 до вузла № 2.

Економіко-математична модель

Знайти вектор невідомих (Дуга), щоб:

1. Загальна довжина шляху = Дуга × Тривалість → max
2. За умови збереження балансу потоків для кожного вузла:

- для вузла-джерела – Вихід – Вхід = 1;
- для проміжних вузлів – Вихід– Вхід = 0;
- для вузла-стоку – Вихід – Вхід = –1;
- усі невідомі більше нуля.

Хід роботи

Дані про тривалість робіт для кожного студента відбираються випадково.

1. У таблиці для операцій визначаємо діапазон для невідомих (Дуга) і обчислюємо значення цільової комірки (Тривалість), використовуючи **SUMPRODUCT**(Дуга; Тривалість).

2. У таблиці для подій обчислити **суму** входів і виходів потоків, задати колонку правих обмежень (Обмеження), враховуючи, що сума потоків для всіх проміжних вузлів рівна нулю, а для початкового та кінцевого – протилежна за знаком.

3. Для обчислення потоку у вузлах використовують функцію обчислення суми величин, координати яких задовольняють певні умови (**SUMIF**).

4. Аналогічно підсумовують вихідні потоки.

Необхідно

1. Знайти тривалість критичного шляху.

2. Заповнити та пояснити значення Т-цін та Н-вартостей для дуг та вузлів.

3. Побудувати (графічно) орієнтований граф із виділенням критичного шляху іншим кольором.

N13 =SUMPRODUCT(B4:B17;E4:E17)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	*Задача про критичний шлях*													
2	*Операції (роботи)*							*Події*						
3	Назва операції	Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Н вартість		Подія	№ вузла	Вхід	Вихід	Сума	Обмеження	Т-ціна
4	Розробка документації	1	1	2	3			Старт	1	0	1	1	1	48
5	Підготовка території	1	2	3	8			Дозвіл на будівництво	2	1	1	0	0	45
6	Замовлення матеріалів	0	2	4	6			Замовлення матеріалі	3	1	1	0	0	37
7	Підготовка кадрів	1	3	4	5			Початок буд. Робіт	4	1	1	0	0	32
8	Постачання матеріалів	0	3	8	6			Закладання фундаменту	5	1	1	0	0	23
9	Закладання фундаменту	1	4	6	9			Підготовка до буд. стін	6	1	1	0	0	20
10	Огородження території	1	6	6	3			Закінчення буд. основних елементів	7	1	1	0	0	16
11	Будівництво основних елементів	0	6	7	2			Закінчення зовнішніх робіт	8	1	1	0	0	10
12	Проведення рекламної компанії	0	6	9	6			Готовність до здачі	9	1	0	-1	-1	0
13	Будівництво стін	1	6	7	4								*Тривалість*	
14	Будівництво підвалу	0	6	8	7									
15	Будівництво вікон	1	7	8	6									
16	Будівництво даху	0	7	9	6									
17	Внутрішні роботи	1	8	9	10									

Рис. 18.1. Зображення аркуша розв'язування задачі про критичний шлях

Аналіз результатів

Нормовані вартості (Н-вартості) некритичних робіт вказують на резерв часу.

Задача 2

1. Знайти найкоротший шлях із вузла 1 у вузол 12. Відстань між вузлами позначено на графі як характеристики дуг (рис. 18.2).

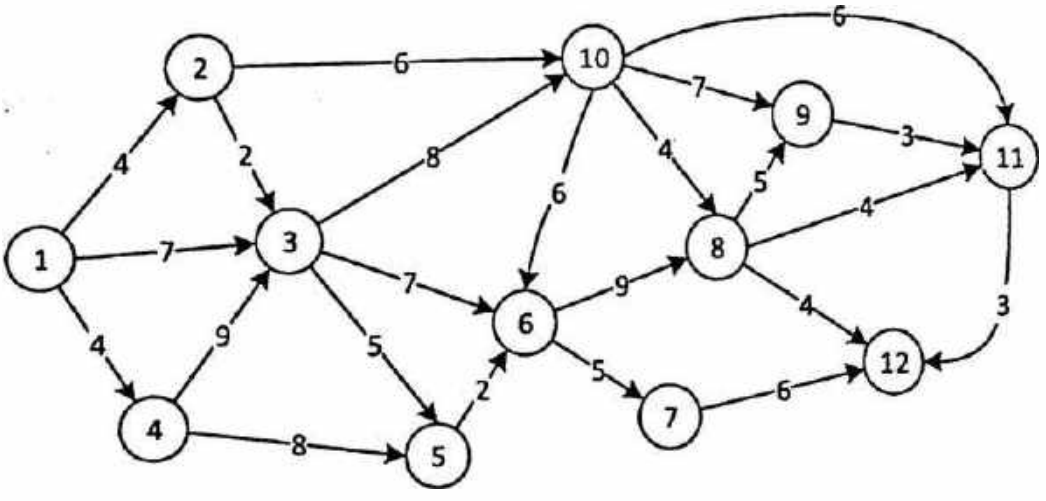


Рис. 18.2. Зображення аркуша розв'язування задачі про критичний шлях

2. Побудувати звіт зі стійкості для даної задачі та проаналізувати зміст Т-цін та нормованих вартостей.

3. *Спробуйте розв'язати цю задачу за умови, що це не орієнтований граф (напрям руху по дугах не вказано).

Контрольні питання

1. Що таке резерв часу?
2. Який шлях називаємо критичним?
3. Яка сфера застосування задач про критичний шлях?
4. Зміст нормованої вартості у задачі про критичний шлях?
5. До якого типу задач (ЗЛП чи ЗНЛП) відносяться розглянуті? Обґрунтуйте відповідь.

ТЕМА 7. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Лабораторна робота 19
Обчислення основних параметрів системи масового обслуговування

Теоретична довідка

Діяльність будь-якого торговельного підприємства, перш за все, пов'язана з обслуговуванням покупців. Успішність його діяльності багато в чому визначається оптимальною організацією роботи продавців, кількістю зон обслуговування потоку покупців, своєчасного розвантаження товарів, що надходять, тощо.

Основною ознакою такої діяльності є існування деякої обслуговуючої системи (системи масового обслуговування (СМО), яка забезпечує обробку заявок, що надходять для обслуговування. Як правило, заявки в систему надходять нерегулярно (випадковим чином) і, враховуючи те, що будь-яка обслуговуюча система має обмежені можливості (інакше вона виявляється збитковою), періодично в системі можуть виникати черги на обслуговування, а частина заявок може отримати відмову, а в окремих випадках СМО може просто простоювати через відсутність заявок (покупців).

У зв'язку з цим одним із критеріїв роботи торговельного підприємства є час виконання окремих операцій з обслуговування покупців.

Для населення витрати часу на покупку включають час на дорогу, повторні відвідування магазину, вибір товару, очікування в чергах, оплату і упаковку товару тощо.

Проведені дослідження структури витрат часу як продавців, так і покупців говорять про те, що значна частина часу витрачається непродуктивно. Так, наприклад, за оцінкою економістів, на очікування в чергах покупці витрачають більше 25–30 % часу й практично стільки ж на очікування черги на оплату і упаковку придбаного товару.

Як інший приклад, може бути наведене завдання визначення кількості розрахункових вузлів (кас), необхідних для якісного й економічно виправданого обслуговування покупців. Оптимальним варіантом вирішення задачі буде той, при якому час обслуговування буде мінімальним; якість – високою; витрати на створення місць обслуговування і їх роботу мають бути мінімальними.

Подібні завдання можуть вирішуватися з використанням математичного апарату теорії систем масового обслуговування.

Основні положення теорії систем масового обслуговування

Системи масового обслуговування можна розділити на три типи:

1. СМО з відмовами

Особливістю систем такого типу є те, що:

- час чекання заявок (k) у черзі $t_{чер} = 0$;
- оскільки існування черги неможливе, довжина черги $I_{чер} = 0$;
- ймовірність виникнення черги на обслуговування заявок (покупців.) $P_{чер} = 0$;
- за відсутності заявок на обслуговування ($k = 0$) – спостерігається простій каналів;
- при $1 \leq k \leq n$ – відбувається обслуговування заявок;
- при $k > n$ відбувається виконання заявок, утворення черги і відмова у виконанні заявок, що надійшли, на обслуговування (при зайнятості всіх каналів).

Основними показниками таких СМО є:

- $P_{відм}$ – ймовірність відмови в обслуговуванні заявок, що надійшли;
- $P_{обс}$ – ймовірність обслуговування заявок, що надійшли;
- P_0 – ймовірність простою каналів обслуговування (відсутність заявок);
- $t_{пр}$ – середній час простою каналу обслуговування;
- $t_{обсл}$ – середній час обслуговування;
- $n_{зайн}$ і $n_{вільн}$ – кількість зайнятих і вільних каналів обслуговування, відповідно;

- A – абсолютна пропускна спроможність СМО.

2. **СМО з необмеженим очікуванням**

Для **СМО з необмеженим очікуванням** характерно, що ймовірність обслуговування заявки $P_{обс} = 1$, оскільки будь-яка заявка, що надійшла, рано чи пізно буде оброблена.

Така СМО може мати такі стани:

- при $k = 0$ – система простоює (перебуває в режимі очікування заявок);
- при $1 \le k \le n$ – обслуговування;
- при $k > n$ – утворюється черга.

Основні показники:

- $L_{чер}$ – середнє число заявок у черзі;
- Z – середнє число заявок у СМО;
- $T_{смо}$ – середній час перебування заявки в СМО;
- A – абсолютна пропускна спроможність СМО.

3. СМО з очікуванням і обмеженням на довжину черги.

Для СМО з очікуванням і обмеженням на довжину черги ($\max L_{чер}=m$) характерними особливостями є:

- при $k = 0$ – система простоює (перебувас в режимі очікування заявок);
- при $1 \le k \le n$ – обслуговування;
- при $1 \le k \le n+m$ – обслуговування, черга і відмова в обслуговуванні.

Основні показники:

- $P_{відм}$ – ймовірність відмови в обслуговуванні заявок, що надійшли;
- $P_{обс}$ – ймовірність обслуговування заявок, що надійшли;
- $L_{чер}$ – середнє число заявок у черзі;
- Z – середнє число заявок у СМО;
- $T_{смо}$ – середній час перебування заявки в СМО;
- A – абсолютна пропускна спроможність СМО.

1. Визначення інтенсивності потоку заявок і завантаження каналів обслуговування

Однією з найважливіших характеристик СМО є потік заявок. Ця характеристика визначає порядок обслуговування

заявок, що надходять на вхід системи. Найчастіше використовується порядок черги – «першим прийшов – першим обслужений».

Для визначення середньої величини інтенсивності потоку заявок на обслуговування проводять хронометражні виміри потоку заявок на обслуговування за одиницю часу.

Наприклад, розглянемо ситуацію, коли протягом 10 днів здійснювався підрахунок кількості покупців, що приходять у магазин протягом кожної години.

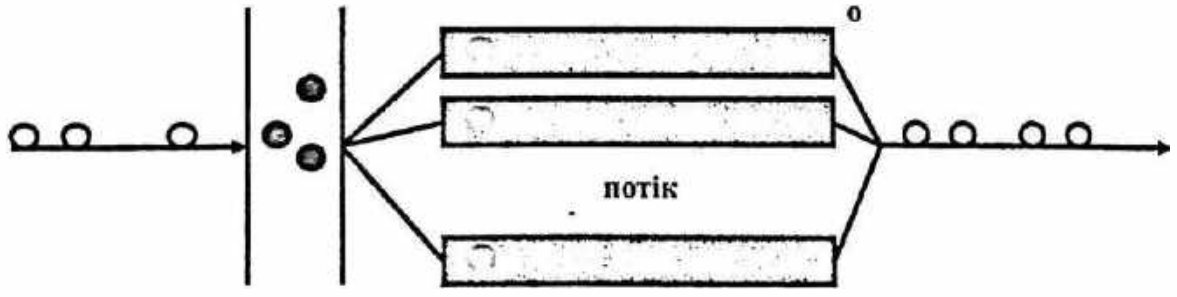


Рис.19.1. Структурна модель елементарної СМО

Для обчислення інтенсивності потоку покупців (λ) згрупуємо дані за числом покупців (k), що відвідали магазин протягом години (визначимо частоту відвідин магазину покупцями). Іншими словами, повинні побудувати гістограму частоти відвідин магазину покупцями.

Таблиця 1								
	Години							
День	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Рис. 19.2. Фрагмент аркуша Excel з таблицею частоти відвідин магазину покупцями

• Виконайте команду ДАНІ (Data Analysis).

• У діалоговому вікні, що відкрилося, Data Analysis виберіть ПП Histogram (Гістограма).

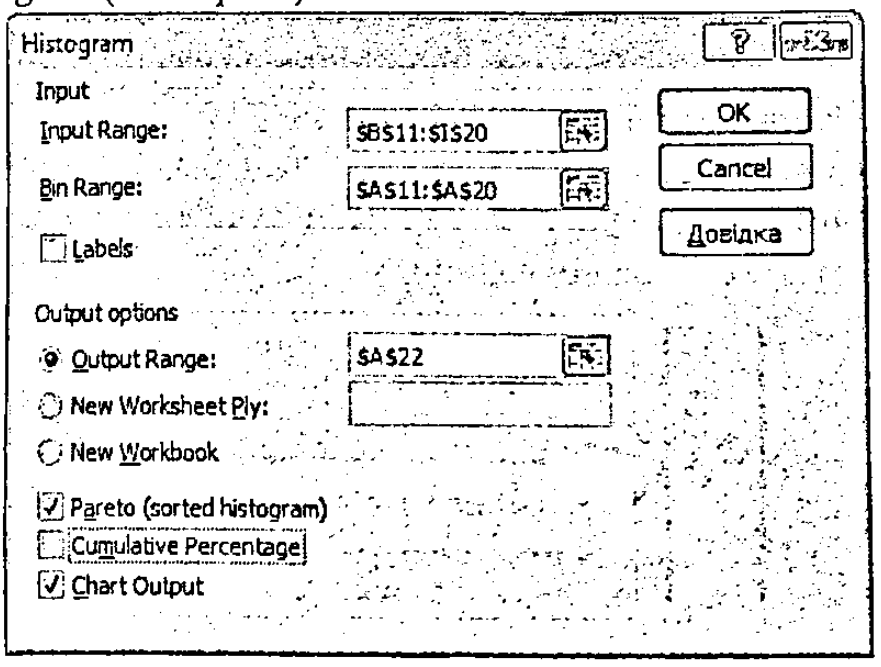


Рис. 19.3. Діалогове вікно «Гістограма»

У діалоговому вікні, що відкрилося, Histogram необхідні установки:

• у поле «**Input range**» введіть адреси комірок, що містять значення відвідуваності магазину покупцями (у нашому прикладі – комірки B11:I20);

• у поле «**Bin range**» введіть діапазон комірок і набір значень, що визначають відрізки. Ці значення мають бути введені в зростаючому порядку. У Microsoft Excel обчислюється число попадань даних між поточним початком діапазону і сусіднім за порядком, якщо такий є. При цьому включаються значення на нижніх діапазонах і не включаються значення на верхніх діапазонах. У нашому прикладі, як інтервал кишень вкажемо адреси A11:A20, що містять числа від 1 до 10, розміщені за зростанням значень;

• у поле «**Output range**» введіть посилання на ліву верхню комірку вихідного діапазону. Розмір вихідного діапазону буде визначений автоматично, і на екран буде виведено повідомлення в разі можливого накладення вихідного діапазону на вихідні дані. У нашому прикладі вкажемо адресу A22.

При бажанні встановіть прапорці:

- **«Paretto** (відсортована діаграма)» – дані будуть представлені в порядку зменшення частоти. Якщо прапорець знятий, то дані у вихідному діапазоні будуть представлені в порядку зростання відрізків, а трьох крайніх правих стовпців з відсортованими даними не буде відображено;
- **інтегральний відсоток.** Встановіть прапорець для генерації інтегральних відсоткових відношень і включення в гістограму графіка інтегральних відсотків. Зніміть прапорець, щоб не обчислювати інтегральні відсоткові співвідношення.
- **виведення графіка**. Встановіть прапорець для автоматичного створення вбудованої діаграми на аркуші, що містить вихідний діапазон.

У результаті виконаних дій у MS Excel отримаємо таблицю розподілу частот відвідин магазину покупцями.

22	Bin	Frequency	Cumulative %	Bin	Frequency	Cumulative %
	1	3	3,75%	3	23	28,75%
	2	19	27,50%	4	21	55,00%
	3	23	56,25%	2	19	78,75%
	4	21	82,50%	5	6	86,25%
	5	6	90,00%	6	4	91,25%
	6	4	95,00%	1	3	95,00%
	7	2	97,50%	7	2	97,50%
	8	1	98,75%	8	1	98,75%
	9	1	100,00%	9	1	100,00%
	10	0	100,00%	10	0	100,00%
	More	0	100,00%	More	0	100,00%

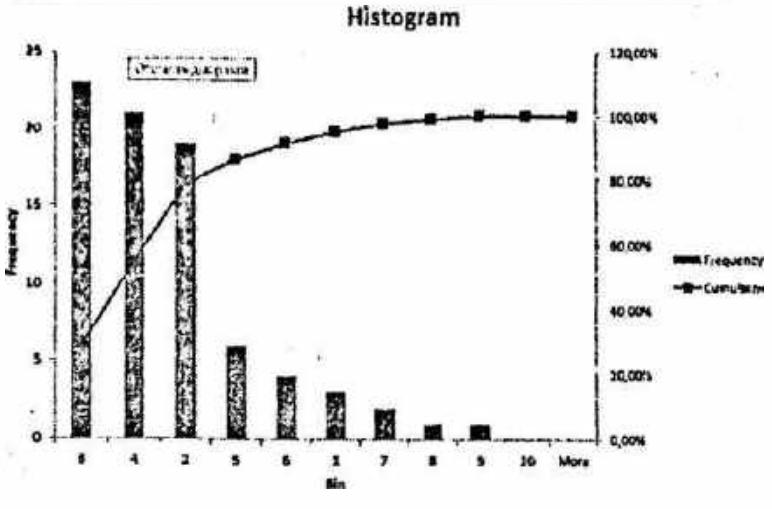


Рис. 19.4. Фрагмент аркуша Excel з таблицею розподілу частот відвідин магазину покупцями та гістограми Паретто

Інтенсивність потоку покупців може бути знайдена як **SUMPRODUCT** числа відвідин (**Bin**) на спостережувану частоту відвідин (f) ділене на загальне число відвідин:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \times f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \tag{19.1}$$

У нашому прикладі кількість покупців в одиницю часу визначається як:

λ==SUMPRODUCT(A23:A32;B23:B32)/SUM(B23:B32)=3.48 покупців/год.,

а **середній час приходу одного покупця** визначиться як

1/λ = 0,286 години (або 17,2 хв).

Аналогічно може бути визначений **середній час обслуговування покупців** продавцями ($t_{обсл}$) і **інтенсивність обслуговування** (μ) – середня кількість клієнтів, що обслуговуються в одиницю часу:

$$t_{обсл} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \tag{19.2}$$

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}}.$$

У випадку, коли **λ < μ**, (тобто частота появи заявок нижча за інтенсивність обслуговування часу їх обслуговування) черги не виникає, оскільки задоволення вимог відбувається не раніше їх появи.

2. Аналіз функціонування системи масового обслуговування

Вважаючи, що покупці прибувають у магазин «випадково», можна вважати, що ймовірність прибуття покупця за будь-який малий проміжок часу [t, t+τ], що починається в довільний момент часу t і має тривалість τ з точністю до нехтує малих величин пропорційно величині τ з деяким коефіцієнтом **λ>0**.

Ймовірність того, що за цей проміжок часу у магазин не прибуде жодного покупця, може бути приблизно оцінена як $1-\lambda\cdot\tau$.

Виходячи з цього можна зробити **висновки**:

- проміжки часу (між двома покупцями, відповідають експоненціальному розподілу):

$$\varphi(t) = \lambda * e^{-\lambda\tau}, \quad t \geq 0;$$

- ймовірність того, що за будь-який проміжок часу **t** у магазин прибуде **k** покупців (клієнтів, заявок), може бути визначена як:

$$P_t = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тобто вхідний потік покупців є **пуассонівським**.

λ – **інтенсивність вхідного потоку**, тобто середнє число заявок, що надходять у СМО за одиницю часу:

$$\lambda = 1/\tau \text{ [л/хв; грн/год; чеків/год; кг/год]},$$

де τ – середнє значення інтервалу часу між двома сусідніми заявками (появою покупців).

Випадковий час очікування в черзі початку обслуговування теж можна вважати розподіленим експоненціально:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\nu t_{чер}},$$

де ν – інтенсивність руху черги (середнє число заявок, що поступають на обслуговування в одиницю часу);

$$\nu = \frac{1}{t_{чер.}}.$$

$t_{чер}$ – середнє значення часу очікування в черзі.

Вихідний потік заявок (заявок, що пройшли обслуговування) пов'язаний з потоком обслуговування в каналі СМО також, в більшості випадків, підкоряється закону розподілу з щільністю.

$$F(t_{обсл}) = \mu \cdot e^{-\mu t_{обсл}}, \qquad (19.3)$$

де μ – інтенсивність обслуговування в каналі (одним продавцем.), тобто середнє число заявок (клієнтів), що обслуговуються в одиницю часу.

$\mu = 1/t_{обсл}$ = [людей/хв; грн/день; кг/год; докум./день].

Одній з найбільш важливих характеристик СМО, що зв'язує показники λ і μ – **інтенсивність навантаження** (ρ),

$$\rho = \lambda/\mu, \qquad (19.4)$$

яка показує міру узгодженості вхідного потоку заявок з інтенсивністю їх обслуговування.

Величину ρ **часто називають приведеною щільністю потоку вимог** (заявок) або **інтенсивністю навантаження** – середнє число вимог, що припадає на середній час обслуговування однієї вимоги.

Важливо зазначити, що параметр ρ характеризує міру узгодженості вхідного потоку (наприклад, покупців у магазині) з інтенсивністю потоку обслуговування. Процес обслуговування буде стабільний при $\rho < n$. Якщо ж $\rho \geq n$, то в системі зростатиме середня довжина черги і середній час чекання покупців початку обслуговування, отже, спроектована СМО буде нестійкою.

Розглянемо найбільш загальний випадок СМО, коли **n** – канальна система працює в режимі з очікуванням обслуговування і з обмеженням на довжину черги (у черзі не може бути більше за **m** вимог). При цьому ми передбачаємо, що вхідний потік вимог на обслуговування описується пуассонівським законом розподілу з інтенсивністю λ, а час обслуговування вимог розподілений за показниковим законом з інтенсивністю μ.

Ймовірність того, що в системі відсутні вимоги (P_0), може бути визначена за формулою:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{n!} + \frac{\rho^{n+1} \times \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n!\, n \times \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1} \quad \text{де } \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (19.5)$$

Ймовірність того, що в системі обслуговування знаходяться k вимог на обслуговування (P_k) може бути визначена як:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \text{ при } 0 \leq k \leq n; \qquad (19.6)$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{n!\,k^{k-n}} P_0 \text{ при } 0 \le k \le n+m. \qquad (19.7)$$

Відношення ρ/n часто позначається через **X** і називається **рівнем завантаження системи:**

$$X = \frac{\rho}{n} \qquad (19.8)$$

Якщо X < 1, то черга на обслуговування не утворюється і система перебуває в стаціонарному стані, який характеризується тим, що ймовірність обслуговування певної кількості вимог за визначений проміжок часу залежить лише від його тривалості.

Ймовірність відмови в обслуговуванні вимоги (заявки, клієнта), якщо в систему надходить **n + m** заявок на обслуговування

$$P_{відм} = P_{n+m} = \frac{\rho^k}{n!\,n^m} P_0 \qquad (19.9)$$

Ймовірність обслуговування заявки, що надійшла (або відносна пропускна здатність СМО)

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}. \qquad (19.10)$$

Абсолютна пропускна здатність системи (число фактично обслугованих вимог за одиницю часу)

$$A = \lambda \times P_{обсл}. \qquad (19.11)$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування

$$N_{ср} = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обсл} \qquad (19.12)$$

оскільки **A – це інтенсивність потоку обслуговування заявок**, а кожен канал здатний за одиницю часу (в середньому) обслуговувати μ заявок.

Коефіцієнт використання (зайнятості) каналів:

$$K_{зайн} = X \times P_{обсл} = z_{ср}/n \qquad (19.13)$$

Коефіцієнт простою каналів обслуговування:

$$K_{прост} = 1 - K_{зайн} = 1 - N_{ср}/n = 1 - X \times P_{обсл.} \qquad (19.14)$$

Середнє число вимог (заявок) у черзі:

$$L_{ср} = 1 \times P_{n+1} + 2 \times P_{n+2} + \ldots m \times P_{n+m} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1}}{n!\, n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \times \left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} P_o \qquad (19.15)$$

Середній час обслуговування вимог:

$$T_{ср(обсл)} = P_{обсл}/\mu \qquad (19.16)$$

Середній час очікування в черзі:

$$T_{срр(чер} = \frac{1}{n\mu} P_n + \frac{2}{n\mu} P_{n+1} \ldots + \frac{m}{n\mu} P_{n+m+1} = \frac{\rho^n}{n! n \cdot \mu} \times \frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m \times \left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} \times P_0 \qquad (19.17)$$

Якщо заявка на обслуговування надійде в той момент, коли всі канали зайняті і черги немає, то час очікування складе в середньому **1/nμ**, а якщо заявка надійде в той момент, коли в черзі знаходиться одна вимога, то час очікування на обслуговування складе **2/nμ** і так далі.

Середній час перебування заявки в СМО

$$T_{ср.\,СМО} = T_{ср(оч.\,чер)} + T_{ср(обсл)}. \qquad (19.18)$$

Утворення черги можливе лише тоді, коли заявка, що знов надійшла, застане на обробці в системі не менше **n** вимог на обслуговуванні, тобто коли в СМО знаходитиметься **n, n+1, n+2, n+m-1** вимог на обслуговуванні. Враховуючи те, що заявки в СМО надходять незалежно одна від одної, ймовірність того, що всі канали обслуговування будуть зайняті, дорівнює сумі ймовірності $P_n, P_{n+1}, P_{n+2} \ldots P_{n+m-1}$.

Звідси ймовірність утворення черги:

$$P_{чер} = \sum_{i=n}^{n+m-1} P_i = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{1 - \frac{\rho}{n}} \times P_0 \qquad (19.19)$$

Вище були наведені формули для розрахунку основних характеристик СМО для випадку, в якому допускається виникнення черги за наявності обмеження на її довжину.

Якщо **m=0**, то ми маємо справу з першим частинним випадком СМО – системи з відмовами. Найбільш типовим прикладом такої СМО є робота столу замовлень (або довідкової служби) по телефону – якщо всі телефони зайняті, прийом замовлень неможливий, тоді дзвінок нового покупця дістає відмову – сигнал зайнято.

У тому випадку, коли m $\to\infty$, то отримуємо СМО з чеканням без обмеження на довжину черги.

3. Критерії якості функціонування СМО

Значна частина показників функціонування СМО, визначені в попередньому розділі, суперечливі, оскільки поліпшення одних показників неминуче призводить до погіршення інших. Наприклад, скорочення довжини черги (або часу очікування початку обслуговування) шляхом збільшення числа каналів обслуговування (збільшення кількості продавців, телефонів, підсобних приміщень тощо) пов'язане з погіршенням таких показників, як збільшення часу простою каналів, збільшення, витрат на їх обслуговування тощо. Таким чином, необхідно проектувати СМО так, щоб досягти розумного компромісу між показниками обслуговування заявок і використанням можливостей СМО, тобто необхідно оперувати критерієм, що дозволяє оцінити якість роботи СМО з тих чи інших позицій.

У простому випадку (наприклад, для систем з відмовою) таким критерієм може бути вибрана ймовірність відмови в обслуговуванні ($P_{відм}$). Можна вибрати, щоб $P_{відм}$ не перевищувала заздалегідь заданої величини. Наприклад, вимога $P_{відм} < 0{,}1$ означає, що СМО при заданій інтенсивності потоку заявок (λ) справлятиметься з їх обслуговування не менше ніж в 90 % від їх загального числа.

Можна розглянути обмеження середнього часу перебування заявки в черзі (або системі).

Як критерій може виступати або число каналів **n** при заданій інтенсивності обслуговування заявок μ, або інтенсивність обслуговування μ при заданому числі каналів, або найкращий варіант з n_1, n_2 n_3 каналів з інтенсивністю обслуговування μ_1, μ_2,. μ_3.

Як узагальнений критерій, що враховує всі суперечливі особливості показників роботи СМО, може бути показник, що характеризує її економічну ефективність, тобто включає як витрати звернення ($C_{витр.\ зверн}$), так і витрати заявок ($C_{витр.заявок}$), які набуватимуть мінімального значення при мінімумі загальних витрат ($C_{витр}$):

$$C_{витр} = C_{витр.\ зверн} + C_{витр.заявок.}$$

Оскільки при оцінці витрат необхідно враховувати не лише втрати, пов'язані з відмовами (або виникненням черг), але й втрати, викликані витратами від простою каналів в очікуванні обслуговування, а також з витратами експлуатації СМО, узагальнений критерій якості роботи СМО може бути записаний таким чином:

$$C_{витр} = (C_{експл} \times N_{ср} + C_{прост} \times (n - N_{ср}) + C_{відм} \times P_{відм} \times \lambda + + C_{сист} \times T_{ср.СМО}) \rightarrow \min, \qquad (19.20)$$

де $C_{експл}$ – витрати, пов'язані з експлуатацією системи;

N_c – середній кількість каналів, зайнятих обслуговуванням;

$C_{прост}$ – витрати, пов'язані з простоєм каналів обслуговування;

$C_{відм}$ – витрати, пов'язані з відмовою в обслуговуванні (втратою клієнтів);

$C_{сист}$ – витрати, пов'язані з перебуванням заявки в СМО;

$T_{ср.СМО}$ – середня. час перебування заявки в системі.

Слід зауважити, що **критерієм ефективності роботи СМО** (цільової функції) може виступати товарообіг підприємства (наприклад, рентабельність). Тоді оптимальні значення керованих показників СМО знаходяться при їх максимальному значенні, відповідно виникає потреба провести перетворення цільової функції.

Після побудови цільової функції необхідно визначити умови вирішення задачі, тобто знайти обмеження, встановити вихідні

значення показників, виділити некеровані показники і побудувати (або підібрати) сукупність моделей взаємозв'язку всіх показників для аналізованого типу СМО, щоб у кінцевому розв'язку знайти оптимальні значення показників, наприклад, кількість продавців, касирів, підсобних робітників, обсяги складських приміщень та ін.

Хід роботи

Розрахунок основних характеристик СМО

Приклад 1

Постановка задачі

У торговельному залі фірми обслуговуванням покупців займаються 2 продавці (**n = 2**). На обслуговування одного покупця продавець у середньому витрачає 20 сек (або 1/3 хв, тобто (=3 люд./хв).

Інтенсивність вхідного потоку покупців складає 5 л/хв ($\lambda = 5$).

Керівництвом фірми встановлено, що довжина черги не повинна перевищувати 2 людини ($m \leq 2$).

Використовуючи наведені вище формули, визначте основні показники СМО.

Хід роботи

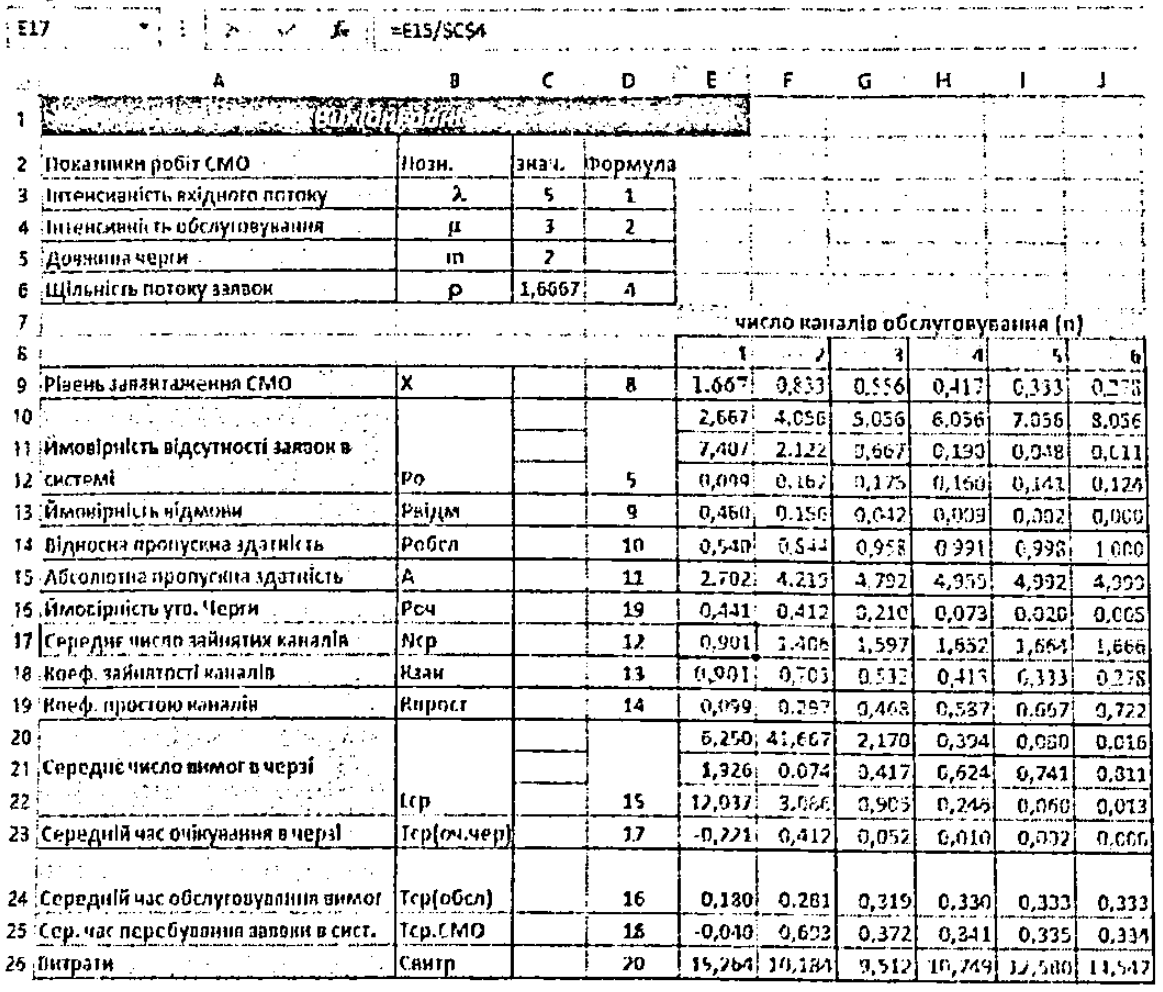
1. На аркуші Excel розробимо таблицю вихідних даних, подібну приведеної на рисунку.

	A	B	C	D
1	*Вихідні дані*			
2	Показники робіт СМО	Позн.	знач.	Формула
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	5	1
4	Інтенсивність обслуговування	μ	3	2
5	Довжина черги	m	2	
6	Щільність потоку заявок	ρ	1,6667	4

Рис. 19.5. Фрагмент аркуша Excel з таблицею вихідних даних

- У комірках **C3:C5** розмістимо вихідні дані завдання.
- У комірці **C6,** відповідно до формули (19.4), розрахуємо величину щільності потоку заявок ρ, записавши відповідну формулу.

2. Розробимо таблицю розрахунку основних показників роботи СМО. Таблиця може мати вигляд, подібний зображеному на рис. 19.6.



E17 =E15/$C$4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Показники робіт СМО	Позн.	знач.	Формула						
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	5	1						
4	Інтенсивність обслуговування	μ	3	2						
5	Довжина черги	m	2							
6	Щільність потоку заявок	ρ	1,6667	4						
7					число каналів обслуговування (n)					
8					1	2	3	4	5	6
9	Рівень завантаження СМО	X		8	1,667	0,833	0,556	0,417	0,333	0,278
10					2,667	4,056	5,056	6,056	7,056	8,056
11	Ймовірність відсутності заявок в				7,407	2,122	0,667	0,190	0,048	0,011
12	системі	Po		5	0,099	0,167	0,175	0,160	0,141	0,124
13	Ймовірність відмови	Рвідм		9	0,460	0,156	0,042	0,009	0,002	0,000
14	Відносна пропускна здатність	Qобсл		10	0,540	0,844	0,958	0,991	0,998	1,000
15	Абсолютна пропускна здатність	A		11	2,702	4,219	4,792	4,955	4,992	4,999
16	Ймовірність уто. Черги	Роч		19	0,441	0,412	0,210	0,073	0,020	0,005
17	Середнє число зайнятих каналів	Nср		12	0,901	1,406	1,597	1,652	1,664	1,666
18	Коеф. зайнятості каналів	Кзан		13	0,901	0,703	0,532	0,413	0,333	0,278
19	Коеф. простою каналів	Кпрост		14	0,099	0,297	0,468	0,587	0,667	0,722
20					5,250	41,667	2,170	0,394	0,080	0,016
21	Середнє число вимог в черзі				1,326	0,074	0,417	0,624	0,741	0,811
22		Lср		15	12,037	3,066	0,963	0,246	0,060	0,013
23	Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)		17	-0,221	0,412	0,052	0,010	0,002	0,000
24	Середній час обслуговування вимог	Тср(обсл)		16	0,180	0,281	0,319	0,330	0,333	0,333
25	Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО		18	-0,040	0,693	0,372	0,341	0,335	0,334
26	Витрати	Свитр		20	15,264	10,184	9,512	10,749	12,580	14,547

Рис. 19.6. Фрагмент аркуша Excel з таблицею розрахунку основних показників СМО

Зауваження. Перш ніж записувати у комірки таблиці формули, уважно проаналізуйте їх та виділіть у них елементи, що найчастіше зустрічаються. Це може не лише значно полегшити їх запис, але і дозволить уникнути зайвих помилок. Наприклад, у формулах досить часто зустрічається величина (ρ/n), може виявитися зручним у подальших обчисленнях використовувати саме її.

При записі досить складних формул (наприклад, таких, як P_0 або L_q) зручно записувати їх частини в окремих комірках.

Наприклад, при записі формули може виявитися зручним в одній комірці записати

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{n!} + \frac{\rho^{n+1} * \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n!\, n * \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right]^{-1},$$

формулу для обчислення $\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{n!}$,

а в іншій комірці обчислити

$$\frac{\rho^{n+1} * \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n!\, n * \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)},$$

і тільки тоді знаходити значення P_0.

- У комірку **E9** запишіть формулу **=$C$6/E8**, значення **X** – рівня завантаження СМО;
- У комірку **E10** введіть формулу для обчислення:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{n!},$$

=($C$6^0)/FACT(0)+($C$6^1)/FACT(1);

- у комірку **F10** введіть формулу =E10+($C$6^F8)/ФАКТР(F8);
- скопіюйте вміст комірки **F10** у комірки **G10:I10**
- у комірку **E11** введіть формулу $\frac{\rho^{n+1} * \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n!\, n * \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}$

=($C$6^(E8+1))/((FACT(E8))*E8)*((1-($C$6/E8)^$C$5)/(1-$C$6/E8));

- у комірку **E12** введіть формулу **=1/(E10+E11)**, що реалізовує обчислення ймовірності відсутності вимоги в СМО (P_0);
- у комірці **E13** введіть формулу обчислення $P_{відм}$ **=(($C$6^(E8+$C$5))/(FACT(E8)*E8^$C$5))*E12** і скопіюйте її у комірки **F13:I13;**
- у комірці **E14** введіть формулу обчислення $P_{обсл}$ **=1-E13** і скопіюйте її у комірки **F14:I14;**

• у комірці **E15** введіть формулу обчислення абсолютної пропускної спроможності (А) **=$C$3*E14** і скопіюйте її у комірки **F15:I15;**

• у комірці **E16** введіть формулу обчислення вірогідності відмови обслуговування заявки (ймовірність утворення черги ($P_{чер}$) **=(($C$6^E8)/FACT(E8))*(((1-($C$6/E8)^$C$5)/(1-($C$6/E8)))*E12)** і скопіюйте її у комірки **F16:I16;**

• у комірці **E17** введіть формулу обчислення середнього числа зайнятих каналів обслуговування ($N_{ср}$) **=E15/$C$4** і скопіюйте її у комірки **F17:I17;**

• у комірках **E18:E19** введіть формули для обчислення коефіцієнта зайнятості і простою каналів обслуговування ($К_{зайн}$ **і** $К_{прост}$), відповідно **=E17/E8** і **=1-E18**. Скопіюйте їх у комірки **F18:I19;**

• у комірках **E20:E21** введіть частини формули для обчислення множників формули визначення довжини черги заявок ($L_{чер}$):

• E20 =($C$6^(E8+1))/(((E8-$CS6)^2)*FACT(E8-1))

і

• E21 =1-(($C$5+1)*($C$6/E8)^$C$5) +$C$5*($C$6/E8)^($C$5+1);

• у комірці **E22** введіть формулу, що реалізовує обчислення $L_{чер}$ **=E20*E21;**

• у комірках **E23:E25** введіть формули для обчислення середнього часу чекання в черзі; середнього часу обслуговування вимоги і середнього часу перебування вимоги в СМО (від моменту вступу вимоги до його виконання) відповідно.

E23 =E16/($C$4*(E8-$C$6))

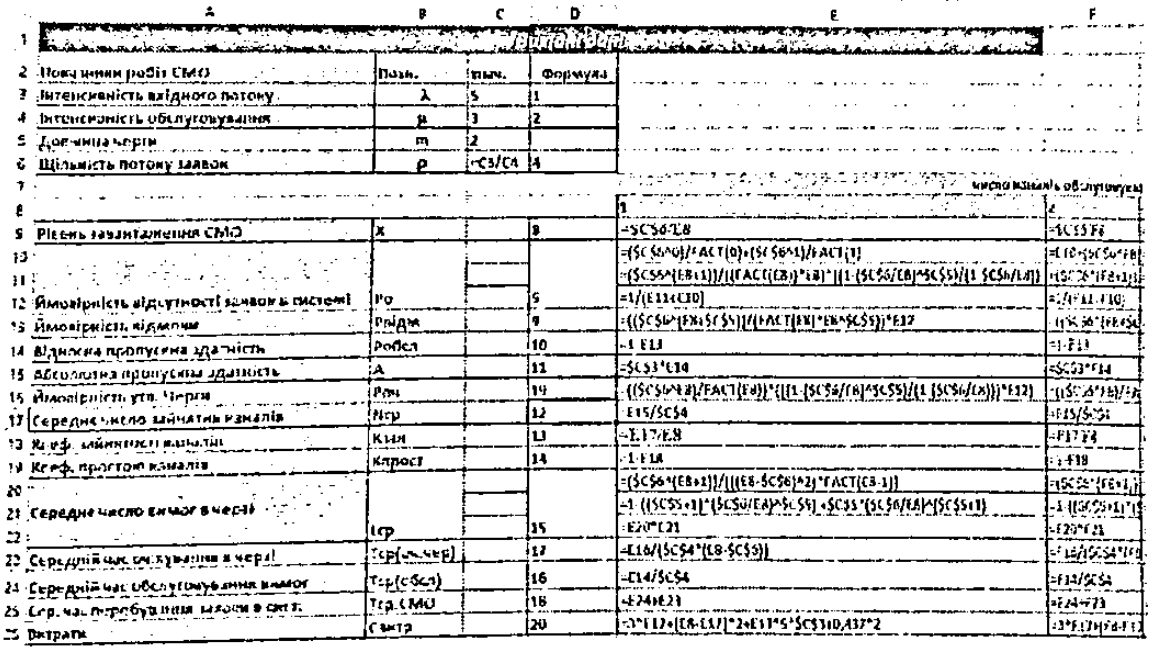
E24 =E14/$C$4

E25 =E24+E23.

Таким чином, у результаті виконаних дій на аркуші Excel буде отримана таблиця (рис. 19.7) з даними, що характеризують роботу СМО.

З аналізу отриманої таблиці виходить, що за наявності двох продавців СМО перебуватиме в стаціонарному стані (**X<0**), проте

середня довжина черги становитиме $L_{ср}$ = 3.086. При трьох продавцях середня довжина черги складе $L_{ср}$ = 0,905, що задовольняє умовам завдання. При цьому ймовірність відмови в обслуговуванні покупців становитиме менше 5 % ($P_{відм}$ =0,043).



	A	B	C	D	E	F
1	[illegible]					
2	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула		
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	5	1		
4	Інтенсивність обслуговування	μ	3	2		
5	Довжина черги	m	2			
6	Щільність потоку заявок	ρ	=C3/C4	4		
7					число каналів обслуговуван	
8					1	2
9	Рівень завантаження СМО	X		8	=$C$6/E8	=$C$5/F8
10					=($C$6^0)/FACT(0)+($C$6^1)/FACT(1)	=E10+($C$6^F8)
11					=($C$6^(E8+1))/((FACT(E8))*E8)*((1-($C$6/E8)^$C$5)/(1-$C$6/E8))	=($C$6^(F8+1))
12	Ймовірність відсутності заявок в системі	Po		9	=1/(E11+E10)	=1/(F11+F10)
13	Ймовірність відмови	Pвідм		9	=(($C$6^(E8+$C$5))/(FACT(E8)*E8^$C$5))*E12	=(($C$6^(F8+$C$5
14	Відносна пропускна здатність	Pобсл		10	=1-E13	=1-F13
15	Абсолютна пропускна здатність	A		11	=$C$3*E14	=$C$3*F14
16	Ймовірність утв. Черги	Pоч		19	=(($C$6^E8)/FACT(E8))*(((1-($C$6/E8)^$C$5)/(1-($C$6/E8)))*E12)	=(($C$6^F8)/F8
17	Середнє число зайнятих каналів	Nср		12	=E15/$C$4	=F15/$C$4
18	Коеф. зайнятості каналів	Кзан		13	=E17/E8	=F17/F8
19	Коеф. простою каналів	Кпрост		14	=1-E18	=1-F18
20					=($C$6*(E8+1))/(((E8-$C$6)^2)*FACT(E8-1))	=($C$6*(F8+1))
21	Середнє число вимог в черзі				=1-(($C$5+1)*($C$6/E8)^$C$5)+$C$5*($C$6/E8)^($C$5+1)	=1-(($C$5+1)*($
22		Lср		15	=E20*E21	=F20*F21
23	Середній час очікування в черзі	Tср(оч.чер)		17	=E16/($C$4*(E8-$C$6))	=F16/($C$4*(F8
24	Середній час обслуговування вимог	Tср(обсл)		16	=E14/$C$4	=F14/$C$4
25	Сер. час перебування заявок в сист.	Tср.СМО		18	=E24+E23	=E24+F23
26	Витрати	Свитр		20	=3*E17+(E8-E17)*2+E17*5*$C$3+0,437*2	=3*E17+(F8-E17

Рис. 19.7. Фрагмент робочого аркуша Excel з таблицею розрахунку основних показників СМО в режимі відображення формул

Зауваження. Побудована таблиця може бути використана як шаблон при вирішенні таких завдань СМО.

Задача 2

Овочевий магазин отримує овочі з теплиць приміських ферм. Автомобілі з вантажем прибувають протягом дня з інтенсивністю λ =6 автомашин у день.

Підсобне приміщення і устаткування для фасування овочів і підготовки їх до продажу дозволяють обробляти і зберігати товар, привезений двома автомобілями (ρ =2).

У магазині працюють 4 робітники (n = 3), кожен з яких на обробку вантажу з однієї машини витрачає в середньому 4 години. Тривалість робочої зміни складає 12 годин, (тобто μ=12/4 =3).

Визначте, яка оптимальна місткість (кількість) підсобних приміщень (m =?) повинна бути для того, щоб ймовірність повної обробки товарів $P_{об\ сл} \geq 0,96$.

Хід виконання

Для вирішення завдання може бути використаний шаблон таблиці, створеної в попередньому прикладі.

У комірки **B3, B4 і B5** введемо вихідні дані завдання **λ, μ і m** відповідно.

Після занесення вихідних даних на екрані відображуватимуть основні характеристики СМО завдання.

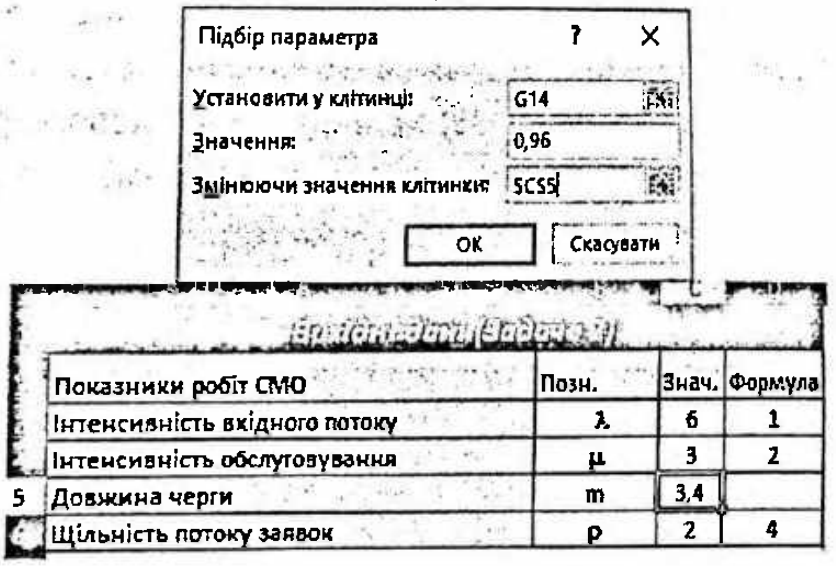
Як видно із заданих умов завдання, ймовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}885$.

1	Вихідні дані задачі					
2	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула		
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	6	1		
4	Інтенсивність обслуговування	μ	3	2		
5	Довжина черги	m	3,4			
6	Щільність потоку заявок	ρ	2	4		
7					Число каналів об	
8					3	4
9	Рівень завантаження СМО	X		8	0,667	0,500
10					6,333	7,000
11	Ймовірність відсутності заявок в				1,995	0,604
12	системі	Po		5	0,120	0,132
13	Ймовірність відмови	Рвідм		9	0,040	0,008
14	Відносна пропускна здатність	Робсл		10	0,960	0,992
15	Абсолютна пропускна здатність	A		11	5,758	5,950
16	Ймовірність утв. Черги	Роч		19	0,359	0,159
17	Середнє число зайнятих каналів	Nср		12	1,919	1,983
18	Коеф. зайнятості каналів	Кзан		13	0,640	0,496
19	Коеф. простою каналів	Кпрост		14	0,360	0,504
20					0,889	0,333
21	Середнє число вимог в черзі				4,163	2,977
22		Lср		15	3,700	0,992
23	Середній час очікування в черзі	Tсер(ом чер)		17	1,233	0,331

Рис. 19.8. Фрагмент аркуша Excel з таблицею вихідних даних прикладу 2 і таблицею розрахунку основних характеристик СМО

Для визначення кількості необхідних підсобних приміщень (m) з метою досягнення заданої величини $P_{обсл.}$ скористаємося операцією побудови сценарію (**команда ДАНІ→АНАЛІЗ ЯКЩО→ДИСПЕТЧЕР СЦЕНАРІЇВ** і виконаємо розрахунки для значень **m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.**

Для визначення величини m також можна скористатися засобом **ПІДБІР ПАРАМЕТРА** (команда ДАНІ→АНАЛІЗ ЯКЩО→ ПІДБІР ПАРАМЕТРА).



	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула
	Інтенсивність вхідного потоку	λ	6	1
	Інтенсивність обслуговування	μ	3	2
5	Довжина черги	m	3,4	
	Щільність потоку заявок	ρ	2	4

Рис. 19.9. Результат використання підбору параметра

За результатами розрахунку сценаріїв побудуємо звіт, вибравши тип звіту – структурний, і як комірки результату вкажемо адресу комірки, що містить значення $\mathbf{P_{обсл}}$**(G14)**.

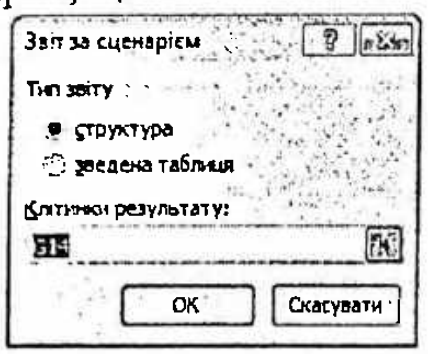


Рис. 19.10. Діалогове вікно вибору побудови звіту за сценарієм

У результаті виконаних дій до робочої книги Excel буде додано додатковий аркуш із звітом за сценарієм.

Виконаємо необхідне редагування звіту і побудуємо діаграму, що ілюструє зміну величини $\mathbf{P_{обсл}}$ залежно від значення величини **m.**

Виходячи з таблиці звіту за сценарієм, необхідна величина $\mathbf{P_{обсл}}$ може бути досягнута при збільшенні числа підсобних приміщень до $\mathbf{m = 4}$.

Зазначимо, що з таблиці, наведеної на рис.19.8, випливає, що необхідна величина $\mathbf{P_{обсл}}$ може бути досягнута не збільшенням кількості підсобних приміщень, а збільшенням кількості робітників до **n =4**. Рішення цього питання залишається за особою, яка приймає рішення: що вигідно (доцільніше) прийняти додаткового робітника або орендувати (або використовувати порожнє) приміщення.

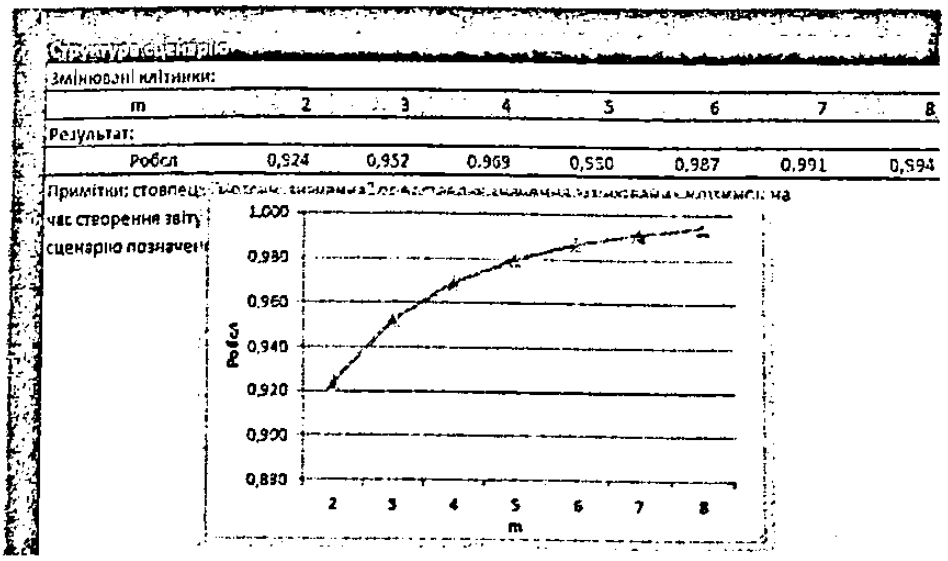


Рис. 19.11. Фрагмент аркуша Excel із звітом за сценарієм

Задача 3

Торговельна фірма спеціалізується на продажі товарів при оформленні замовлень по телефону. Керівництво фірми для обслуговування клієнтів має намір придбати міні-АТС, що забезпечує підключення **трьох, п'яти або десяти** телефонних апаратів. Витрати, пов'язані з експлуатацією цих міні-АТС, наведені в таблиці.

Таблиця 19.1

Таблиця параметрів витрат

Витрати ($C_{витр}$)	Міні-АТС на 3 телефони	Міні-АТС на 5 телефонів	Міні-АТС на 10 телефонів
Пов'язані з експлуатацією в хвилину, у.о. ($C_{експл}$)	2,5	4	4
Пов'язані з простоєм в хвилину, у.о. ($C_{прост}$)	0,5	1	1
Пов'язані з відмовою в обслуговуванні, у.о.($C_{відм}$)	45	45	45

Інтенсивність потоку замовлень клієнтів становить 1,2 зам./хв. Інтенсивність обслуговування замовлень рівна 0,5 зам./хв.

Необхідно визначити, яка з міні-АТС дозволить забезпечити найбільш ефективну роботу при мінімальній величині витрат.

Хід роботи

Для вирішення задачі скористаємося шаблоном, розробленим при розгляді прикладу 1.

У комірки **B3, B4 і B5** введемо вихідні дані завдання **λ, μ і m**, відповідно.

Після занесення вихідних даних на екрані буде відображено основні характеристики СМО завдання (рис.19.12).

I26 =4*127+(18-117)*1+113*45*$C$3

	A	B	C	D	G	I	N
1	[illegible]						
2	Показники робіт СМО	Позн.	Зна	Формула			
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	1,2	1			
4	Інтенсивність обслуговування	μ	0,5	2			
5	Довжина черги	m	0				
6	Щільність потоку заявок	ρ	2,4	4			
7					Число каналів обслуговування		
8					9	5	10
9	Рівень завантаження СМО	X		8	0,800	0,480	0,240
10					8,584	10,630	11,023
11	Ймовірність відсутності заявок в				0,000	0,000	0,000
12	системі	Po		5	0,116	0,094	0,091
13	Ймовірність відмови	Рвідм		9	0,268	0,062	0,000
14	Відносна пропускна здатність	Робсл		10	0,732	0,938	1,000
15	Абсолютна пропускна здатність	A		11	0,878	1,125	1,200
16	Ймовірність утв. Черги	Роч		19	0,000	0,000	0,000
17	Середнє число зайнятих каналів	Nср		12	1,756	2,250	2,400
18	Коеф. зайнятості каналів	Кзан		13	0,585	0,450	0,240
19	Коеф. простою каналів	Кпрост		14	0,415	0,550	0,760
20					1,843	0,319	0,000
21	Середнє число вимог в черзі				0,000	0,000	0,000
22		Lср		15	0,000	0,000	0,000
23	Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)		17	0,000	0,000	0,000
24	Середній час обслуговування	Тср(обсл)		16	1,463	1,875	2,000
25	Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО		18	1,463	1,875	2,000
26	Витрати	Свитр		20	19,506	*15,121*	17,207

Рис. 19.12. Фрагмент аркуша Excel з таблицею розрахунку основних характеристик СМО різних міні-АТС

Важливо. Зверніть увагу на **приховані стовбці**. Розрахунки здійснювались для всього діапазону каналів, а відображено тільки для 3, 5 та 10 каналів.

Визначимо величини витрат для кожної міні-АТС

$$C_{витр} = C_{затр} = C_{експл} \times N_{ср} + C_{прост} \times (n - N_{ср}) + C_{відм} \times P_{відм} \times \lambda$$

Таблиця 19.2

Таблиця розрахунку витрат міні-АТС

Тип МІНІ-АТС	Формула	Величина витрат
На 3 тел. апарату	=2.5*G17+(G8-G17) *0.5+G13*45*$C$3	19,506
На 5 тел. апаратів	=4*I17+(I8-I17)*1+I13*45*$C$3	15,121
На 10 тел. апаратів	=4*N17+(N8-N17)*1+N13*45*$C$3	17,206

Таким чином, виконаний аналіз дозволяє упевнено говорити, що найбільш доцільне придбання міні-АТС, що допускає підключення 5 телефонних апаратів.

Завдання для самостійної роботи

Задача 4

У магазині протягом тижня проводилася реєстрація потоку покупців і часу обслуговування їх продавцями.

Дані реєстрації наведені на рис. 19.13.

1. Визначте інтенсивність потоку покупців (λ) і обслуговування їх продавцями (μ).

2. Знайдіть кількість продавців, що обслуговують покупців, робота яких забезпечить найменші витрати роботи магазину (дані за окремими видами витрат наведені в табл. 19.3). При цьому в черзі на обслуговування повинні знаходитися не більше 2 покупців.

3. Побудуйте діаграму витрат.

Виконані розрахунки показують, що при інтенсивності потоку вимог λ= **5,68** і інтенсивності обслуговування μ = **3,73** найменша величина витрат може бути досягнута при використанні трьох каналів обслуговування.

B15 =60/(SUMPRODUCT(B12:I12;B13:I13)/SUM(B13:I13))

	B							
Таблиця 1								
День	Години							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	8	5	7	3	8	9	7
2	7	4	6	6	6	5	8	6
3	6	5	5	6	5	6	6	7
4	5	5	6	5	6	5	8	5
5	6	6	5	8	7	6	7	5
6	6	6	4	6	5	5	6	4
7	4	4	3	4	6	4	3	5
Таблиця 2								
Середній час обслуговування, хв	3	6	15	20	25	30	35	40
Частота, f	2	7,42	4,47	2,8	2,52	1,8	1,2	1
λ	5,679							
15 μ	3,738							

Рис. 19.13. Дані спостережень

Таблиця 19.3

Дані витрат за категоріями

Витрати ($C_{затр}$)	
Пов'язані з роботою одного продавця в хвилину, у.о. ($C_{експл}$)	3
Пов'язані з простоєм в хвилину, у.о. ($C_{прост}$)	2
Пов'язані з відмовою покупцям в обслуговуванні, у.о.($C_{відм}$)	10
Пов'язані з перебуванням заявки торговельного відділу в СМО,у.е ($T_{ср.СМО}$)	2

Хід виконання

G26 =G27+G28+G29+G30

	A	B	C	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1														
2	Показники робот СМО	Позн.	Знач.											
3	Інтенсивність вхідного потоку	λ	5,68											
4	Інтенсивність обслуговування	μ	3,73											
5	Довжина черги	m	2											
6	Щільність потоку заявок	ρ	1,52											
7								число каналів обслуговування (n)						
8				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	Рівень завантаження СМО	X		1,522	0,761	0,507								
10				2,522	3,681	4,269								
11	Ймовірність відсутності заявок			5,846	1,554	0,450								
12	в системі	Ро		0,119	0,191	0,212								
13	Ймовірність відмови	Рвідм		0,422	0,128	0,032								
14	Відносна пропускна здатність	Робсл		0,578	0,872	0,968								
15	Абсолютна пропускна здатність	A		3,284	4,950	5,496								
16	Ймовірність утв. Черги	Роч		0,459	0,390	0,188								
17	Середнє число зайнятих каналів	Nср		0,881	1,327	1,474								
18	Коеф. зайнятості каналів	Кзан		0,881	0,664	0,491								
19	Коеф. простою каналів	Кпрост		0,119	0,336	0,509								
20				2,318	0,892	0,298								
21	Середнє число вимог в черзі			4,045	2,522	2,015								
22		Lср		9,375	2,225	0,601								
23	Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)		2,513	0,597	0,161								
24	вимог	Тср(обсл)		0,155	0,234	0,259								
25	Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО		2,668	0,830	0,421	0,306	0,277	0,270	0,268	0,268	0,268	0,268	
26	Витрати	Свитр		32,160	14,272	10,187	10,524	12,152	14,075	16,061	18,059	20,059	22,059	

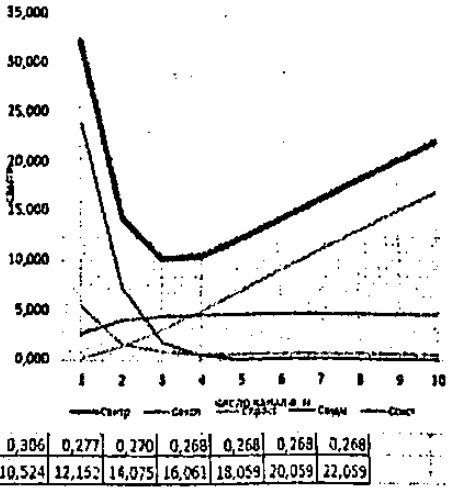


Рис. 19.14. Зображення аркуша розв'язку задачі 4

Задача 2

У відділі самообслуговування магазину передбачається розмістити каси сканування для розрахунку з покупцями за придбані ними товари.

Спостереження за потоком покупців дозволили встановити, що інтенсивність потоку (λ) рівна **λ=7 л/хв**. Інтенсивність обслуговування покупців (μ) складає **μ=1,8 л/хв**. Допустима довжина черги не повинна перевищувати 4 людини.

Визначте

1. Яка мінімальна кількість кас має бути встановлена для того, щоб виконувалася умова стаціонарності системи, а також розрахуйте основні показники СМО при використанні такої кількості кас.

2. Якою має бути інтенсивність обслуговування, щоб у знайденій необхідній кількості кас відносна пропускна спроможність системи дорівнювала (не менше) 0,95.

Відповідь

Показники робіт СМО	Позн.	Знач.
Інтенсивність вхідного потоку	λ	7
Інтенсивність обслуговування	μ	2,31
Довжина черги	m	4
Щільність потоку заявок	ρ	3,04

			число каналів обслуго				
			1	2	3	4	5
Рівень завантаження СМО	X		3,036	1,518	1,012	0,759	0,607
			4,036	8,643	13,306	16,845	18,993
			379,925	58,180	15,212	7,444	2,869
Ймовірність відсутності заявок в системі	Ро		0,003	0,015	0,031	0,041	0,046
Ймовірність відмови	Рвідм		0,671	0,366	0,150	0,048	0,013
Відносна пропускна здатність	Робсл		0,329	0,634	0,850	0,952	0,987
Абсолютна пропускна здатність	A		2,303	4,438	5,948	6,662	6,907
Ймовірність утв. Черги	Роч		0,676	0,574	0,584	0,404	0,216
Середнє число зайнятих каналів	Nср		0,997	1,925	2,579	2,889	2,995
Коеф. зайнятості каналів	Кзан		0,997	0,962	0,860	0,722	0,599
Коеф. простою каналів	Кпрост		0,003	0,038	0,140	0,278	0,401
			9,215	6,994	4,718	2,686	1,804
Середнє число вимог в черзі			146,620	24,935	10,240	5,994	4,215
	Lср		1351,176	174,393	48,314	16,098	5,498
Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)		585,967	75,629	20,952	6,981	2,385
Середній час обслуговування вимог	Тср(обсл)		0,147	0,275	0,368	0,413	0,428
Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО		586,110	75,904	21,321	7,394	2,812
Витрати	Свитр		1222,218	183,353	61,744	29,060	19,555

Рис. 19.15. Результат розв'язку задачі 5

Інтенсивність обслуговування μ (для того, щоб відносна пропускна спроможність СМО була рівною 0,95) має бути рівна **μ=2.32**

Контрольні питання

1. Як обчислюються основні параметри СМО?
2. Яка умова стаціонарності СМО?
3. Як обчислюється відносна пропускна здатність СМО?
4. Як обчислюється ймовірність відмови в обслуговуванні вимоги?
5. Як обчислюється рівень завантаження системи?
6. Як обчислюється ймовірність обслуговування заявки?
7. Як обчислюється абсолютна пропускна здатність системи?
8. Як обчислюється середнє число зайнятих каналів?
9. Як обчислюється коефіцієнт використання (зайнятості) каналів?
10. Як обчислюється коефіцієнт простою каналів обслуговування?
11. Як обчислюється середній час чекання в черзі?
12. Як обчислюється середній час перебування заявки?
13. Як обчислюється ймовірність утворення черги?

Лабораторна робота 20
Аналіз витрат у системах масового обслуговування

Задача 6

Адміністрація вирішила відкрити бензозаправну станцію.

Виконані спостереження вказують, що в тому місці, де заплановано розмістити АЗС, очікуваний середній інтервал між прибуттям автомобілів на заправку становить 4 хв.

Варіанти устаткування можуть мати час обслуговування автомобіля в межах від 2 до 10 хв.

Необхідно визначити:

1. Яка кількість бензозаправного устаткування з часом обслуговування автомобілів $\mathbf{T_{обсл} = 5}$ **хв** має бути придбана, аби відносна пропускна спроможність СМО була не менше 0,85. **При цьому коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування має бути** $\mathbf{K_{зайн} \geq 0{,}5}$ **(відповідь n = 2).**

2. Скільки пунктів обслуговування і якої продуктивності (часу обслуговування) мають бути встановлені для того, щоб вартість встановлюваного обладнання була мінімальною $\mathbf{C_{обл} = (50* n)/T_{обсл}}$

При цьому:

2.1. Середній час перебування автомобіля на бензоколонці (СМО) був $\mathbf{T_{ср.СМО} \leq 5мин}$.

2.2. Відносна пропускна спроможність СМО має бути $P_{обсл} \geq 0{,}85$.

2.3. Вважаючи, що вартість устаткування обернено пропорційна його продуктивності, а витрати на його придбання і вміст мають бути $\mathbf{C_{обл} = 50/T_{обсл} \leq 20 у.е}$.

Важливо. Для вирішення завдання можуть бути використані процедури «Підбір параметра», «Пошук рішення» і «Сценарії».

Хід виконання

1. Для вирішення завдання вихідні дані зручно представити у вигляді таблиці, подібної до показаної на рисунку 20.1.

1				
	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула
3	Інтервал прибуття авто	Твх		
4	Інтенсивність вхідного потоку	λ		1/Твх
5	Тривалість обслуговування авто Тобсл	Тобсл		
6	Інтенсивність обслуговування	μ		1/Тобсл
7	Довжина черги	m		
8	Щільність потоку заявок	ρ		
9	Кількість встановленого обладнання	n		

Рис. 20.1. Зображення таблиці обчислення параметрів СМО

2. При використанні для вирішення завдання процедури «**Пошук рішення**» або «**Підбір параметра**» найбільш складним є обчислення виразу.

Одним з варіантів вирішення цієї проблеми може бути запис цього виразу з використанням функції «IF». Так, наприклад, при

розміщенні цієї формули у комірці **E12** створеного раніше шаблону ця формула може мати вигляд (для $n \leq 3$):

=IF(C9=1;(C8^0)/FACT(0)+(C8^1)/FACT(1);...IF(C9=2;(C8^0)/FACT(0)+(C8^1)/FACT(1)+(C8^2)/FACT(2);IF(C9=3;(C8^0)/FACT(0)+(C8^1)/FACT(1)+(C8^2)/FACT(2)+(C8^3)/FACT(3)))).

3. Враховуючи те, що частина формул містить нелінійні елементи, при вирішенні задачі як початкові значення $T_{обсл}$ і **n** встановіть:

- для $T_{обсл}$ значення, близьке до нуля, наприклад $T_{обсл}$ = 0,01;
- для **n** – мінімальне значення **n=1**.

Розв'язання

	A	B	C	D	E
1					
2	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула	
3	Інтервал прибуття авто	Твх	4		
4	Інтенсивність вхідного потоку	λ	0,25	1/Твх	
5	Тривалість обслуговування авто Тобсл	Тобсл	4,478		
6	Інтенсивність обслуговування	μ	0,2233	1/Тобсл	
7	Довжина черги	m	1		
8	Щільність потоку заявок	ρ	1,1195		
9	Кількість встановленого обладнання	n	2		
10	Витрати на обладнання	22,331	0		
11	Рівень завантаження СМО	X			0,560
12					2,746
13	Ймовірність відсутності заявок в				0,351
14	системі	Ро			0,323
15	Ймовірність відмови	Рвідм			0,113
16	Відносна пропускна здатність	Робсл			0,887
17	Абсолютна пропускна здатність	А			0,222
18	Ймовірність утв. Черги	Роч			0,202
19	Середнє число зайнятих каналів	Nср			0,993
20	Коеф. зайнятості каналів	Кзан			0,496
21	Коеф. простою каналів	Кпрост			0,504
22					0,003
23	Середнє число вимог в черзі				1,000
24		Lср			0,003
25	Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)			1,571
26	Середній час обслуговування вимог	Тср(обсл)			3,971
27	Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО			5,542
28	Витрати	Свитр			16,359

Рис. 20.2

На автозаправці доцільно встановити дві одиниці устаткування з часом обслуговування $T_{обсл}$ =4,47 хв.

4. Мінімальний інтервал прибуття автомобілів на автозаправку $T_{вх}$, при якому зберігаються умови стаціонарності роботи СМО

(для вирішення використовуйте величину $\mathbf{T_{обсл}}$, знайдену при вирішенні попереднього завдання: $\mathbf{T_{обсл} = 4{,}47}$ **хв**).

Відповідь. При заданому часі обслуговування автомобіля (виходячи із попереднього завдання) мінімальний інтервал їх прибуття на автозаправку становить 2,26 хв (при цьому рівень завантаження СМО =0,99).

	Показники робіт СМО	Позн.	Знач.	Формула
	Інтервал прибуття авто	Твх	2,2614	
	Інтенсивність вхідного потоку	λ	0,4422	1/Твх
	Тривалість обслуговування авто Тобсл	Тобсл	4,4781	
	Інтенсивність обслуговування	μ	0,2233	1/Тобсл
	Довжина черги	m	1	
	Щільність потоку заявок	ρ	1,9802	
9	Кількість встановленого обладнання	n	2	

Рис. 20.3. Результат розв'язку завдання 3

Задача 7

Торговельний центр розміщується в багатоповерховій будівлі. У підвальному поверсі будівлі розміщені склади, а на його верхніх поверхах – торговельні зали.

Товари в торговельні зали доставляються за допомогою ліфтів, завантаження яких забезпечується трьома авто навантажувачами. Складування товару біля ліфтів (в очікуванні їх приходу) категорично заборонене.

Інтенсивність вхідного потоку вимог на завантаження ліфтів складає **3 вимоги/год**, а інтенсивність їх обслуговування рівна **2 вимоги/год**.

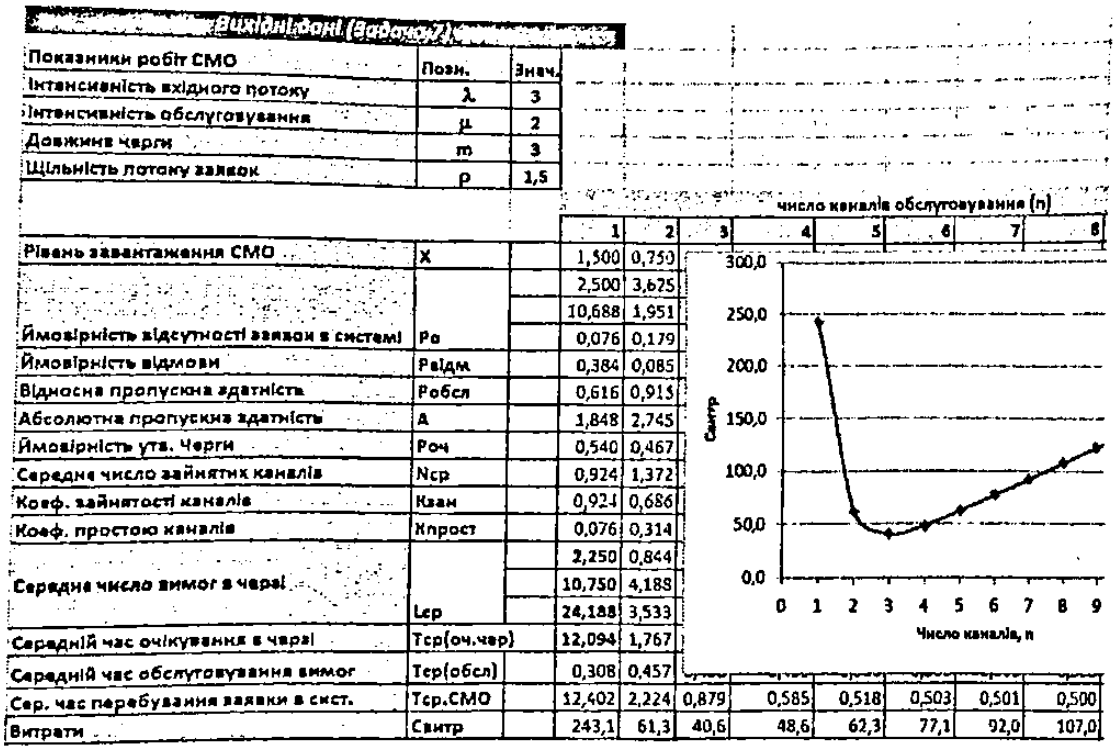
Необхідно визначити:

1. Яка мінімальна кількість ліфтів може забезпечити стаціонарність роботи СМО магазину.

Розв'язання

n =2, оскільки при n=1 рівень завантаження СМО **X** =1,5, що порушує умову стаціонарності.

2. Яка мінімальна кількість ліфтів дозволяє отримати мінімальну величину витрат (значення окремих видів витрат наведені в таблиці).



Показники робіт СМО	Позн.	Знач.
Інтенсивність вхідного потоку	λ	3
Інтенсивність обслуговування	μ	2
Довжина черги	m	3
Щільність потоку заявок	ρ	1,5

			число каналів обслуговування (n)							
			1	2	3	4	5	6	7	8
Рівень завантаження СМО	X		1,500	0,750						
			2,500	3,625						
			10,688	1,951						
Ймовірність відсутності заявок в системі	Po		0,076	0,179						
Ймовірність відмови	Рвідм		0,384	0,085						
Відносна пропускна здатність	Робсл		0,616	0,915						
Абсолютна пропускна здатність	A		1,848	2,745						
Ймовірність утв. Черги	Роч		0,540	0,467						
Середнє число зайнятих каналів	Nср		0,924	1,372						
Коеф. зайнятості каналів	Кзан		0,924	0,686						
Коеф. простою каналів	Кпрост		0,076	0,314						
Середнє число вимог в черзі			2,250	0,844						
			10,750	4,188						
	Lср		24,188	3,533						
Середній час очікування в черзі	Тср(оч.чер)		12,094	1,767						
Середній час обслуговування вимог	Тср(обсл)		0,308	0,457						
Сер. час перебування заявки в сист.	Тср.СМО		12,402	2,224	0,879	0,585	0,518	0,503	0,501	0,500
Витрати	Свитр		243,1	61,3	40,6	48,6	62,3	77,1	92,0	107,0

Рис. 20.4. Зображення аркуша розв'язку задачі 7

Таблиця 20.1

Таблиця витрат

Витрати ($C_{затр}$)	
Пов'язані з роботою одного ліфта в годину, у.о. ($C_{експл}$)	3
Пов'язані з простоєм ліфта в годину, у.о. ($C_{прост}$)	15
Пов'язані з відмовою доставки товару в торговельний відділ, у.о.($C_{відм}$)	100
Пов'язані з перебуванням заявки торговельного відділу в СМО, у.е ($T_{ср.СМО}$)	10

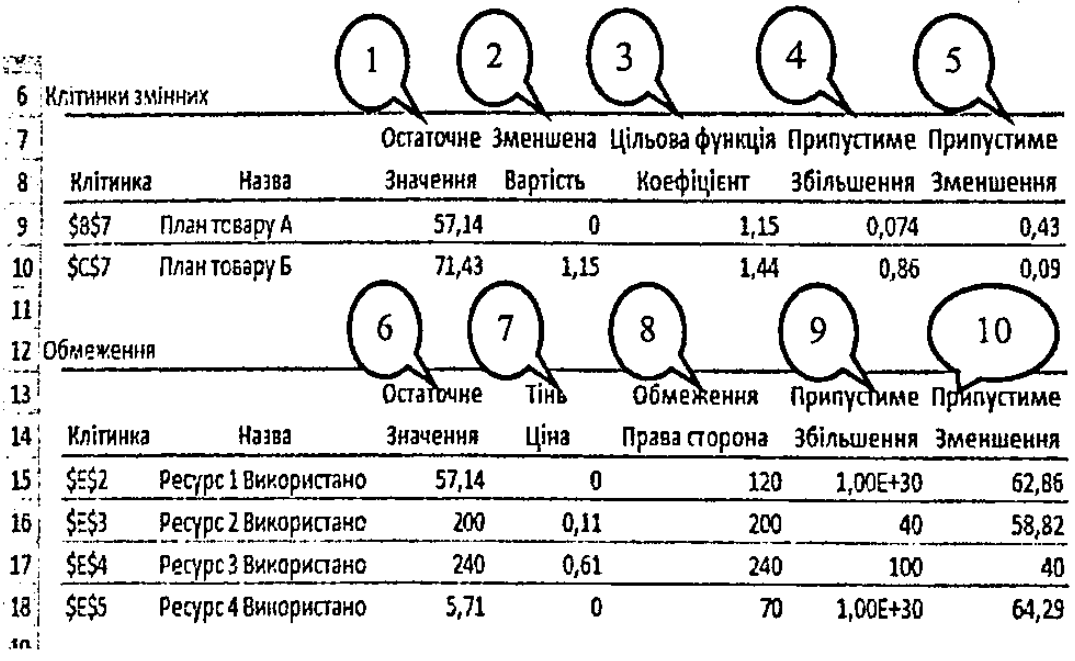
Відповідь. Використання трьох ліфтів дозволяє отримати мінімальну величину витрат $C_{витр}$ = 37,404 у.о.

Контрольні питання

1. Які засоби використовувались при виконанні цієї лабораторної роботи?
2. Які переваги і недоліки кожного із перелічених засобів?
3. Яка умова стаціонарності системи?
4. Як впливає кількість використаних каналів на витрати?
5. Які види витрат характерні для СМО?

ТЕМА 8
АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1. Звіт зі стійкості



Клітинки змінних

Клітинка	Назва	Остаточне Значення (1)	Зменшена Вартість (2)	Цільова функція Коефіцієнт (3)	Припустиме Збільшення (4)	Припустиме Зменшення (5)
$8$7	План товару А	57,14	0	1,15	0,074	0,43
$C$7	План товару Б	71,43	1,15	1,44	0,86	0,09

Обмеження

Клітинка	Назва	Остаточне Значення (6)	Тінь Ціна (7)	Обмеження Права сторона (8)	Припустиме Збільшення (9)	Припустиме Зменшення (10)
$E$2	Ресурс 1 Використано	57,14	0	120	1,00E+30	62,86
$E$3	Ресурс 2 Використано	200	0,11	200	40	58,82
$E$4	Ресурс 3 Використано	240	0,61	240	100	40
$E$5	Ресурс 4 Використано	5,71	0	70	1,00E+30	64,29

Рис. 20.1. Зображення звіту зі стійкості

Звіт зі стійкості (більш точним за змістом був би переклад з оригіналу sensitivity – чутливість) є найбільш цікавим і корисним – він визначає чутливість структури отриманого плану до змін початкових даних і, відповідно, подальші дії менеджера з метою поліпшення результатів. Такий звіт не створюється для моделей, значення в яких обмежені множиною цілих чисел. У разі нелінійних моделей звіт містить дані для градієнтів і множників Лагранжа.

1 – **Остаточне значення (оптимальний план задачі)**. У нашому випадку, щоб отримати максимальний прибуток у розмірі 168,37 гр. од., потрібно виробляти 57,14 одиниць товару А і 71,43 одиниць товару Б;

2 – **зменшена (нормована) вартість** стосується невідомих плану. Це невдалий переклад з оригіналу reduced cost, який можна було перекласти як «зменшена вартість». Цей показник, як зміниться оптимальне значення ЦФ при випуску продукції, якої

немає в оптимальному плані. Наприклад, якщо нормована вартість товару А була б –3 (хоча в нашому випадку це 0), то примусовий випуск 2 одиниць товару А, яких немає в оптимальному плані, призвів до зменшення доходу на 2×3 = 6 і складав би 168,57 6 = 162, 57 д. од.

3 – **коефіцієнти цільової функції;**

4, 5 – **межі змін значень коефіцієнтів ЦФ** за умови, що кількість оптимальної продукції (план) не зміниться. Наприклад, якщо цільовий коефіцієнт товару А (КА) дорівнює 1,15 (ціна за 1 одиницю товару), то, змінюючи його в рамках 1,15-0,43 < КА < 1,15 +0,074 → 0,72 < КА < 1,224, план не зміниться, але значення доходу може зменшитися або збільшитися. Це можна перевірити, якщо запустити програму «Пошук рішень» після внесень у таблицю змін даного коефіцієнта.

6 – **кількість використаних ресурсів;**

7 – **тіньова ціна** (у нелінійній моделі це **множник Лагранжа**) стосується обмежень, тобто певне значення вказує на «цінність» обмеженого ресурсу порівняно з іншими ресурсами. Цей показник вказує як зміниться оптимальне значення ЦФ (дохід) при зміні запасів ресурсів на 1 одиницю. Наприклад, якщо збільшити запас ресурсу 3 на 10 одиниць, то дохід збільшиться на 10 • 0,61 = 6,1 і становитиме 168,57 +6,1 = 174,67 д. од.;

8 – **запаси ресурсів;**

9, 10 – задають діапазон для 8, в якому діє тіньова ціна 7 (аналогічно 4, 5). Наприклад, діапазон ресурсу 3: 200 < ресурс 3 < 340. Якщо ресурс 3 збільшити на 10 одиниць, то дохід збільшиться на 6,1 і становитиме 174,67. Якщо цей ресурс збільшити на 110 одиниць, то про дохід нічого сказати не можна, оскільки ми вийшли за вказані межі.

2. Перевірка адекватності та корегування моделі

У складних системах, до яких належать і системи організаційного типу, **модель лише частково відображує реальний об'єкт (або процес).** Тому необхідно проводити перевірку ступеня відповідності (або адекватності) моделі та реального процесу.

Перевірку можна проводити шляхом порівняння вихідних характеристик моделі $y_т$ або передбачуваної поведінки моделі з фактичними характеристиками об'єкта y_0 при змінюванні значень зовнішніх факторів ω_s, а також (за можливості) параметрів системи А в широкому діапазоні коливань.

За міру адекватності моделі вибирають одну з таких величин:

а) абсолютне відхилення $\varepsilon_a = |y_m - y_0| \le \varepsilon_{доп}$;

б) відносне відхилення $\varepsilon_b = \left|\frac{y_m - y_0}{y_0}\right| \cdot 100\% \le \varepsilon^b_{доп}$;

в) імовірнісна оцінка $P\left\{\varepsilon_b \le \varepsilon_{b.доп}\right\} \ge P_{зад}$,

де $\varepsilon_{доп}$ та $\varepsilon^b_{дол}$ – допустиме відхилення, яке визначає степінь адекватності моделі, $P_{зад}$ – задана величина ймовірності нерівності $\varepsilon_b \le \varepsilon_{b.доп}$. Якщо величина ε_a перевищує $\varepsilon_{доп}$, або ε_b, перевищує $\varepsilon_{b.доп}$, то це свідчить про те, що упущені деякі важливі фактори і модель потребує корегування.

Можливі корегування концептуальної моделі, математичної моделі і, відповідно, методу розв'язання.

Можна виділити такі варіанти корегувань математичної моделі:

- розширення набору зовнішніх факторів, керуючих змінних та вихідних характеристик моделі;
- перехід від лінійних залежностей $f(X,Y,A,\omega)$ та $g_i(X,Y,A,\omega)$ до нелінійних або підвищення степеня нелінійності;
- розширення набору обмежень або їхніх комбінацій.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання виконується на практичному матеріалі конкретного підприємства чи установи. Загальний обсяг звіту з індивідуального завдання повинен складати 10–12 сторінок друкованого тексту формату паперу А4. Для друкованої роботи шрифт повинен відповідати 14 розміру текстового редактора Word. До звіту повинні входити:

- титульний лист;
- зміст;
- пояснювальна записка (анотація автора) з обґрунтуванням обраної теми;
- текст, згідно зі змістом;
- список літератури, яка була використана під час роботи над обраною темою, за стандартною формою;
- висновки автора.

У пояснювальній записці потрібно розкрити актуальність обраної теми, навести інформацію про роль та місце інформаційних систем в управлінні господарством. Головна частина звіту з індивідуальної роботи – це інформація про дослідження предметної області та обґрунтування проектних рішень, до якої можуть входити питання:

1. Характеристика, зміст та постановка задачі.
2. Алгоритм розв'язування задачі відповідно до теми індивідуального завдання.
3. Інформаційне забезпечення системи.
4. Технологія розв'язку задачі та результати обробки даних.
5. Висновки.
6. Додатки.

Варіанти завдань

Задача 1

Із листів металу розміру **mxn** необхідно виготовити **N** заготовок розміром $\mathbf{m_1xn_1}$ та **M** заготовок розміром $\mathbf{m_2xn_2}$. Скласти модель оптимізації розкрою металу за мінімумом загальних відходів.

Таблиця 1

Таблиця вихідних даних розмірів заготовок

№ завд.	m	n	N	m_1	n_1	M	m_2	n_2
1.1.	7	14	900	5	6	500	3	4
1.2.	6	14	800	3	5	400	2	4
1.3.	5	15	700	2	4	300	3	3
1.4.	6	15	600	3	4	400	3	5
1.5.	7	16	500	3	5	300	2	4
1.6.	8	17	400	4	6	400	3	5
1.7.	9	18	300	5	7	400	2	4
1.8.	8	19	350	6	8	370	5	7
1.9.	9	20	500	5	7	400	4	6
1.10.	10	20	500	5	6	450	3	5

Задача 2

Розподілити роботи таким чином, щоб мінімізувати тимчасові витрати на виконання всіх робіт за умови, що кожен з претендентів отримає одну і тільки одну з робіт. Матриця тимчасових витрат кожного претендента на виконання кожної з робіт наведена нижче. **(Матриця тимчасових витрат заповнюється випадковими числами від n до n+20).**

Робітники	Номера робіт									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Іванов	17	9	1	15	1	9	3	4	6	3
Петрів	4	14	11	11	4	12	2	3	5	3
Сидорів	0	17	18	16	9	16	4	6	7	1
Копилів	4	17	10	12	16	14	3	7	3	1
Минін	2	5	18	8	18	5	1	6	1	3
Різько	7	17	0	8	8	17	7	3	2	7
Власко	3	1	1	3	2	3	4	5	3	0

Демченко	6	0	2	1	1	5	4	0	1	1
Сергінко	0	1	3	7	4	3	5	2	2	4
Панинко	3	3	5	0	3	0	3	1	1	0

Задача 3

Розв'язати задачу типу оптимальний портфель інвестиції Джеймса Тобіна.

Який вигляд портфеля інвестицій депозит: євро, гривня, долар. Врахувати статистичні дані середніх депозитних ставок за 2004–2017 рік. Із урахуванням втрат на інфляцію (для гривневих).

Знайти оптимальний портфель для максимального доходу, мінімального ризику.

Задача 4

За даними про коди і тривалість робіт у днях побудуйте графік прив'язки мережевої моделі, визначте критичні шляхи і їх тривалість. Визначте вільні й повні резерви кожної роботи, позначте на графіку прив'язки вільні резерви робіт.

(i, j)	1.2	1.3	1.4	1.5	2.3	3.6	3.7	4.5	4.6	5.7	6.7
t(i,j)	3	3	2	10	2	5	9	10	6	1	4

Задача 5

Розв'язування задачі СМО в середовищі Microsoft Excel.

Торговельний центр розміщується в багатоповерховій будівлі. У підвальному поверсі будівлі розміщені склади, а на його верхніх поверхах – торговельні зали.

Товари в торговельні зали доставляються за допомогою ліфтів, завантаження яких забезпечується трьома автонавантажувачами. Складання товару біля ліфтів (в очікуванні їх приходу) категорично заборонене.

Інтенсивність вхідного потоку вимог на завантаження ліфтів становить 6 вимоги/год, а інтенсивність їх обслуговування дорівнює 4 вимоги/год.

Завдання

1. Яка мінімальна кількість ліфтів може забезпечити стаціонарність роботи СМО магазину.

2. Яка мінімальна кількість ліфтів дозволяє отримати мінімальну величину витрат (значення окремих видів витрат наведені в таблиці).

Витрати ($C_{затр}$)	
Пов'язані з роботою одного ліфта в годину, у.о. ($C_{експл}$)	5
Пов'язані з простоєм ліфта в годину, у.о. ($C_{прост}$)	7
Пов'язані з відмовою доставки товару в торговельний відділ, у.о.($C_{відм}$)	98
Пов'язані з перебуванням заявки торговельного відділу в СМО, у.е ($T_{ср.СМО}$)	12

ТЕСТИ

1. Яка з особливостей характерна для транспортної задачі?

a) роботи та ресурси рівні;

b) роботи та ресурси вимірюються в будь-яких одиницях;

c) роботи та ресурси вимірюються в різних одиницях;

d) роботи та ресурси вимірюються в одних і тих самих одиницях.

2. Як у зарубіжній літературі називають транспортну задачу?

a) проблемою Канторовича;

b) проблемою Марковіца;

c) проблемою Беллмана;

d) проблемою Хічкока.

3. Яка із задач не належить до ТЗ лінійного програмування?

a) задача розподілу виробів між підприємствами;

b) задача розподілу посівної площі;

c) задача регулювання парку вагонів;

d) задача про заміну обладнання;

4) за якими критеріями поділяються транспортні задачі?

a) за критерієм прибутку;

b) за критерієм прибутку та критерієм часу;

c) за критерієм розподілу та за критерієм вартості;

d) за критерієм часу та критерієм вартості.

5. Яка із задач належить до цілочисельного математичного програмування?

a) оптимальна дивідендна політика;

b) управління запасами;

c) транспортна;

d) комівояжера.

6. Яка із задач не належить до цілочисельного математичного програмування?

a) комівояжера;

b) про рюкзак;

c) призначення на посаду;

d) календарного планування.

7. Які із методів не використовуються при розв'язуванні задач цілочисельного програмування?

a) метод відсікаючих площин;

b) метод гілок та границь;

c) наближені методи;

d) множників Лагранжа.

8. До якого типу методів відносять метод гілок та границь?

a) нелінійних;

b) відсікання;

c) наближених;

d) комбінаторних.

9. Які задачі лінійного програмування належать до цілочисельних?

a) у яких і цільова функція і всі змінні є цілочисельними;

b) у яких обмеження є цілочисельними;

c) у яких цільова функція є цілочисельною;

d) у яких всі змінні або частина з них є цілочисельними.

10. Кому належить перший точний метод розв'язування транспортної задачі?

a) Беллману;

b) Лагранжу;

c) Хічкоку;

d) Канторовичу і Гавуріну.

11. Який із методів не належить до методів нелінійного програмування?

a) метод прямого пошуку;

b) метод Куна-Таккера;

c) за допомогою множників Лагранжа;

d) метод гілок та границь.

12. Який із методів для задач нелінійного програмування є універсальним?

a) метод Куна-Таккера;

b) метод прямого пошуку;

c) за допомогою множників Лагранжа;

d) не існує універсального методу розв'язання ЗНП.

13. Яке із тверджень є правильним?

a) найточнішим методом розв'язування ЗНП є лінеаризація нелінійних процесів;

b) метод множників Лагранжа є універсальним засобом розв'язування ЗНП;

c) нелінійні залежності рідко зустрічаються в природі;

d) у задачах нелінійного програмування існують кілька локальних оптимумів, що потребує пошуку серед них глобального.

14. Яка основна ідея методу множників Лагранжа?

a) у графічному способі розв'язування;

b) у лінеаризації задачі;

c) у переборі всіх можливих значень вихідних змінних;

d) у заміні цільової функції іншою, з більшою кількістю змінних.

15. Яка інтерпретація множників Лагранжа?

a) як нормовані вартості ресурсів;

b) як обмеження ресурсів;

c) як обмеження на вихідні змінні;

d) як наявні тіньові ціни ресурсів.

16. За яких умов множина допустимих розв'язків ЗНП є неопуклою?

a) коли похідна другого порядку є додатною;

b) коли система є нелінійною;

c) коли система обмежень задачі є лінійною;

d) коли система обмежень задачі є нелінійною.

17. Яке із тверджень є правильним для ЗНП?

a) Для розв'язку ЗНП існує три методи;

b) Для розв'язку конкретної ЗНВ можна використовувати один і тільки один метод;

c) Для усіх ЗНП немає потреби доводити існування розв'язку задачі та його єдність;

d) для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв'язку задачі та його єдність.

18. Яка із перелічених задач не належить до задач нелінійного математичного програмування?

a) управління ресурсами;

b) планування обслуговування та ремонту;

c) планування промислового виробництва;

d) оптимальний план перевезень.

19. Яка із перелічених задач належить до задач нелінійного математичного програмування?

a) задача про критичний шлях;

b) задача про розкрій;

c) задача комівояжера;

d) управління запасами.

20. Яка із перелічених задач належить до задач нелінійного математичного програмування?

a) у якій цільова функція є нелінійною;

b) у якій обмеження є нелінійними;

c) у якій і цільова функція і обмеження є нелінійними;

d) усі перелічені варіанти правильні.

21. Що визначає «динамічне програмування»?

a) тип обмежень;

b) тип задач;

c) метод розв'язування;

d) обчислювальний метод та тип задач.

22. Що лежить в основі методу розв'язування задач «динамічного програмування»?

a) використання методу гілок та границь;

b) використання методу Куна-Такера;

c) використання методу множників Лагранжа;

d) використання апарату рекурентних співвідношень.

23. Хто розробив метод розв'язування задач динамічного програмування?

a) Лагранж;

b) Канторович;

c) Марковіц;

d) Беллман.

24. Яка ідея методу рекурентних співвідношень?

a) звести задачу до типової задачі НЛП;

b) звести процес оптимізації функції змінних до лінійного рівняння;

c) звести процес оптимізації функції змінних до задачі лінійного програмування;

d) звести процес оптимізації функції змінних до крокового процесу оптимізації функцій однієї змінної.

25. Яка із вимог використання методу динамічного програмування є хибною?

a) можливості обчислення загального ефекту як суми ефектів в окремих підзадачах;

b) однотипності підзадач;

c) можливості фактичного або умовного розподілу початкової задачі на окремі підзадачі;

d) система обмежень повинна бути лінійною.

26. Яке із визначень принципу оптимальності Беллмана є правильним?

a) оптимальне управління системою на кожному кроці не залежить від передісторії процесу та поточного стану;

b) оптимальне управління системою на кожному кроці визначається тільки попереднім станом;

c) оптимальне управління системою на кожному кроці залежить від передісторії процесу;

d) оптимальне управління системою на кожному кроці не залежить від передісторії процесу, тобто як система досягла поточного стану, а визначається тільки цим станом.

27. Як називаються системи, які відповідають принципу оптимальності Беллмана?

a) адитивними;

b) стохастичними;

c) динамічними;

d) Марківськими.

28. Яка із задач належить до задач динамічного програмування?

a) задача про рюкзак;

b) задача Марковіца;

c) задача управління запасами;

d) задача про вибір траєкторії.

29. Яка із задач не належить до задач динамічного програмування?

a) задача про вибір траєкторії;

b) задача про заміну обладнання;

c) задача про дивідендну політику;

d) задача про оптимальний портфель інвестицій.

30. Для яких задач динамічного програмування використовується симплекс-метод?

a) із адитивною цільовою функцією;

b) із мультиплікативною цільовою функцією;

c) для задач із лінійними обмеженнями;

d) симлекс-метод не використовується.

31.До якого типу задач належать задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку – випадкові величини?

a) не детермінованого програмування;

b) детермінованого програмування;

c) випадкового програмування;

d) стохастичного програмування.

32. Якою літерою позначається простір подій у задачах стохастичного програмування?

a) Омега;

b) X;

c) F;

d) Q.

33. Яке із висловлювань про можливі варіанти задач стохастичного програмування є хибним?

a) детерміновані вільні члени та коефіцієнти системи обмежень;

b) задачі можуть містити детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

c) задачі можуть містити стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени та коефіцієнти системи обмежень;

d) задачі можуть містити стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження.

34. Що ми розуміємо під максимізацією (мінімізацією) цільової функції в задачах стохастичного програмування?

a) можливі різні варіанти відповідно до критеріїв прийняття рішень;

b) мінімізацію середнього квадратичного відхилення;

c) абсолютну максимізацію;

d) максимізацію математичного сподівання.

35) Які методи використовують при розв'язуванні задач стохастичного програмування?

a) прямі та непрямі;

b) лінійні та нелінійні;

c) детерміновані та евристичні;

d) прямі та похідні.

36. Як називаються методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування?

a) непрямі;

b) прямі;

c) комбінаторні;

d) евристичні.

37. Як називаються методи, що використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій на базі інформації щодо параметра омега?

a) непрямі;

b) прямі;

c) комбінаторні;

d) евристичні.

38. Як називаються задачі стохастичного програмування, цільовою функцією яких є максимізація математичного сподівання?

a) M-моделі;

b) V-моделі;

c) P-моделі;

d) S-моделі.

39. Як називаються задачі стохастичного програмування, цільовою функцією яких є мінімізація дисперсії?

a) M-моделі;

b) V-моделі;

c) P-моделі;

d) S-моделі.

40. Як називається модель, коли ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N разів?

a) N етапною задачею (моделлю) менеджментного СП;

b) N етапною задачею (моделлю) поступового СП;

c) N етапною задачею (моделлю) стратегічного СП;

d) N етапною задачею (моделлю) тактичного СП.

41. Яка із характеристик не притаманна ребрам (теорія графів)?

a) потенціал каналу;

b) пропускна здатність каналу;

c) ймовірність проходження сигналу по ланцюгу;

d) вартість перевезень.

42. Граф може бути представлений у вигляді матриць. Яка із матриць є зайвою?

a) матриця Крамера;

b) матриця суміжності;

c) матриця Кірхгофа;

d) матриця інциденцій.

43. Продовжіть речення. Якщо на головній діагоналі матриці суміжності всі елементи рівні 0, то граф...

a) не має петель;

b) є ізоморфним;

c) є орієнтованим;

d) не має дуг.

44. Чому рівні значення елементів матриці Кірхгофа, якщо i\=j?

a) n – кількість ребер;

b) –1;

c) +1;

d) 0.

45. Як називають ребро і вузол, якщо вони належать одне одному?

a) інцидентними;

b) орієнтованими;

c) нормальними;

d) суміжними.

46. Яка із рекомендацій побудови мережевих моделей є неправильною?

a) стрілка повинна бути прямолінійним відрізком;

b) довжина стрілки не залежить від часу виконання роботи;

c) не повинно бути стрілок, спрямованих справа наліво;

d) не повинно бути висячих подій.

47. Якої із видів робіт для задач календарного планування не існує?

a) віха;

b) реальна (дія);

c) очікування;

d) логічна залежність.

48. Як називають шлях максимальної довжини в задачах календарного планування?

a) критичним;

b) оптимальним;

c) неоптимальним;

d) максимальним;

49. Як називається значення, на яке може бути відсунутий в часі момент, коли подія трапиться, порівняно з раннім терміном її завершення?

a) резерв часу;

b) критичний час;

c) віха;

d) пізній термін завершення.

50. Як називається кінцевий вузол дерева?

a) лист;

b) атрибут;

c) корінь;

d) вершина.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – Вид. 7, перероб. та допов. – Київ : Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.

2. Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій : навч.-метод. посіб. / І. Ю. Дзюбан, О. Л. Жиров, М. Г. Охріменко. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2005. – 108 с.

3. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель – Москва : Сов. радио, 1972. – 352 с.

4. Барвінський А.Ф. Математичне програмування. Дослідження операцій : навч. посібник / А. Ф. Барвінський [та ін.]; [відп. ред. А. Ф. Барвінський]. – Львів : Інтелект-Захід, 2008. – 468 с.

5. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2003. – 452 с.

6. Карагодова О. О. Дослідження операцій: навч. посіб. / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – Київ : Центр учбової літератури, 2007 – 256 с.

7. Додонов О. Г. Оптимізаційні моделі еволюційного програмування в Excel : розв'язання задачі комівояжера з обмеженнями alldifferent / О. Г. Додонов // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2011. – Т. 13. – № 3. – С. 3–16.

8. Зайченко О. Ю. Дослідження операцій. збірник задач / О. Ю. Зайченко; Ю. П. Зайченко. – Київ : Видавничий Дім «Слово». 2007. – 472 с.

9. Дудко В. С. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник для студ. вищ. навчал. Закл.: в 2 частинах / В. С. Дудко, Т. Д. Краснова, В. В. Лаговський. – Ірпінь : НУДПСУ 2010. – Ч.1.: Економетричні моделі. – 2010. – 448 с.

10. Лєснікова І. Ю. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel: навч. посіб. / І. Ю. Лєснікова, Н. В.Халіпова, М. В.Терещенко, Є. М.Харченко. – Київ : ЦУЛ, 2007 – 186 с.

11. Бережна Л. В. Економіко-математичні методи та моделі в фінансах / Л. В. Бережна, О. І. Снитюк. – Київ : Кондор, 2009 – 302 с.

12. Самойленко М. І. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування) : навч. посібник / Самойленко М. І., Скоков Б. Г. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 176 с.

13. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении : учеб. пособие. / Е. В. Шикин, А. Г.Чхартишвили. – 3-е изд. – Москва : Дело, 2004. – 440 с.

14. Оспіщев В. І. Дослідження операцій: навчальний посібник / В. І. Оспіщев, Д. О. Пруненко, Д. Л. Бурко, О. М. Єрмак, Я. В. Санько ; за ред. В. І. Оспіщева. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 136 с.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

M-моделі – задачі максимізації математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо).

P-моделі – задачі на ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога).

V-моделі – задачі мінімізації дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника.

Абсолютна пропускна здатність системи – кількість фактично виконаних вимог за одиницю часу.

Атрибут – властивість, ознака, незалежна змінна.

Бета-нейтральний портфель – інвестиційний портфель з величиною бета-коефіцієнта поблизу нульових значень.

Булеві змінні – змінні, що можуть приймати значення 0 або 1 (true/false).

Невизначена СЛАР – система, яка має більше ніж один розв'язок.

Визначена СЛАР – система, яка має точно один розв'язок.

Гарантований резерв часу роботи – величина максимально можливої затримки роботи, яка не впливає на остаточний термін завершення проекту загалом за умови, що попередні роботи виконуються із запізненням.

Дерево – скінчений зв'язний граф, який складається принаймні з двох вершин і не має циклів.

Дерево цілей – це графічне відображення процесу, що визначає альтернативи рішення, стан рішення та їх відповідні ймовірності віддачі для кожної комбінації альтернатив і станів рішень.

Динамічне програмування – розділ математичного програмування, при якому функції $f(X,Y)$ та $g_i(X,Y)$ мають спеціальну структуру і є адитивними або мультиплікативними від змінних X.

Дослідження операцій – наукова дисципліна, яка займається розробкою і практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різноманітними організаційними системами.

Евристичне програмування – розділ математичного програмування, при якому точний оптимум знайти неможливо через комбінаторний характер задачі і пов'язану з ним величезну кількість варіантів. У такому випадку відмовляються від пошуку оптимальних розв'язків і обмежуються пошуком задовільного розв'язку з точки зору ОПР.

Задача (модель) стратегічного СП – задача, в якій ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N разів.

Задача (модель) тактичного СП – задача, в якій ряд розв'язків починається зі слова «спостереження» і воно зустрічається N разів.

Запас – це будь-який ресурс, який використовується для задоволення поточної або майбутньої потреби.

Запаси на виробництві – це предмети, які стають частиною продукції або вносять вкладення у виробництво: сировина, готова продукція, комплектуючі, допоміжні матеріали тощо.

Збалансована транспортна задача (закрита) – задача, при якій сума по центрах розподілу рівна сумі по центрах споживання.

Ідентифікація проблеми – формування проблеми, мети її розв'язання, виявлення умов та обмежень.

Інтенсивність обслуговування в каналі μ (одним продавцем) – середнє число заявок (клієнтів), що обслуговуються за одиницю часу.

Інтенсивність руху черги ν – середнє число заявок, що надходять на обслуговування за одиницю часу.

Інтенсивністю навантаження ρ – середнє число вимог, що припадає на середній час обслуговування однієї вимоги.

Канонічна форма запису – запис за умови, що всі обмеження задачі ЛП мають вигляд строгих рівностей.

Критична робота – робота, для якої резерв часу події рівний нулеві, тобто вона обов'язково повинна завершитись у вказаний ранній час.

Критичний шлях – шлях максимальної довжини.

Ланцюг – певна послідовність попарно суміжних ребер графу.

Лінійне програмування розділ математичного програмування, при якому функції $f(X,Y,A,\Omega)$ лінійні щодо змінних X.

Марківський процес – це випадковий процес, конкретні значення якого для будь-якого заданого часового параметру t+1 залежать від значення у момент часу t, але не залежать від його значень у моменти часу t-1, t-2 і т. д.

Математична модель – система математичних виразів, які описують характеристики об'єкта моделювання та взаємозв'язки між ними.

Матриця суміжності – квадратна матриця зв'язку типу «кожен-з-кожним» розміром $n \times n$, де n – число вузлів.

Мережевий граф – орієнтований граф без петель.

Модель – це умовний образ об'єкта чи процесу, який вивчається та відображає його основні характеристики і використовується в ході дослідження.

Моделювання – один із загальнонаукових методів дослідження, що застосовується для аналізу та синтезу систем.

Незалежний резерв часу роботи – величина затримки у виконанні роботи за найнесприятливіших умов.

Незбалансована транспортна задача (відкрита) – задача, при якій сума по центрах розподілу не рівна сумі по центрах споживання.

Нелінійне програмування – розділ математичного програмування, при якому функції $f(X,Y,A,\Omega)$ та (або) $g_i(X,A,\Omega)$ – нелінійні щодо змінних X.

Непрямі методи розв'язування ЗСП – методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного

програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

Несумісна СЛАР – система, яка не має розв'язків.

Нечітке математичне програмування – розділ математичного програмування, коли доводиться приймати рішення в умовах невизначеності, наприклад, параметри системи $A = [a_{ij}]$ та зовнішні змінні $\{\omega_s\}$ точно невідомі, і ОПР може лише вказати інтервал їх значень та вказати свої суб'єктивні оцінки щодо шансів появи певних значень a_{ij} (так звані степені належності) $\mu_{ij}(a_{ij})$, $\mu_s(\omega_s)$.

Одноетапна задача СП – задача, в якій рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями.

Операція – будь-який захід, яким можна управляти і який спрямований на досягнення певної мети.

Оптимальне управління запасами – це мінімізація загальних витрат на створення і отримання запасів відповідно до їх використання (попит) завдяки прогнозуванню, моментів і обсягів постачання для поповнення запасів.

Оптимальний розв'язок – такий, який з тих чи інших міркувань кращий за інші.

Перевірка адекватності – перевірка моделі, якщо рішення, яке отримали на її основі, здатне достатньо надійно передбачити поведінку системи.

Петля – вершина, що з'єднана ребром сама з собою.

Пізній термін завершення події – це найпізніший можливий термін, коли може трапитися подія за умови незбільшення загального часу виконання проекту.

Побудова оптимізаційної моделі – встановлення математичних співвідношень між метою вирішення проблеми та існуючими обмежуючими факторами.

Подія – результат експерименту, момент часу, в який завершуються одні роботи і починаються інші.

Принцип збереження потоку – сума потоків на виході вузла рівна сумі потоків на його вході плюс потенціал вузла.

Принцип оптимальності – принцип динамічного програмування: «В якому б стані не знаходилася система і які б рішення не приймалися у попередні моменти, наступні рішення повинні бути оптимальними відносно стану, в якому опинилася система».

Прямі методи розв'язування ЗСП – задачі, в яких існують способи побудови функцій на базі інформації щодо параметра ω.

Ранній термін завершення події – якнайраніший термін, в який відбудеться подія.

Реальна робота (дія) – яка вимагає часу і ресурсів (мурування стіни, заливання фундаменту бетоном, складання заявки на матеріали, вивчення кон'юнктури ринку).

Ребро – відповідність між будь-якою парою вершин.

Резерв часу події – визначає значення, на яке може бути відсунутий у часі момент, коли подія трапиться порівняно з раннім терміном її завершення.

Рівень завантаження системи – відношення інтенсивності навантаження до кількості каналів (часто позначається через X).

Робота – будь-який процес, що призводить до досягнення певних результатів, вимагає витрат певних видів ресурсів і триває у часі.

Робота – логічна залежність – процес, фіктивна робота, що не потребує ні часу, ні ресурсу (передавання документів, старіння виливків, витримування вина).

Робота очікування – робота, яка вимагає лише витрат часу (очікування постачання ресурсів, деталі в черзі до верстата, твердіння бетону);

Система лінійних алгебраїчних рівнянь – система рівнянь, кожне рівняння в якій є лінійним алгебраїчним рівнянням першого ступеня.

Стохастичне програмування – розділ математичного програмування, при якому вектор зовнішніх змінних $\Omega = [\omega_s]$ або параметрів системи $A = [a_j]$ нерегульований та випадковий.

Суміжні вершини графа – вершини графа, які мають спільне ребро.

Сумісна СЛАР – система, яка має принаймні один розв'язок.

Теорія графів – спеціальний розділ математичного програмування, який вивчає кількісні і якісні характеристики графів.

Формалізація задачі – побудова математичної моделі.

Цілочисельне лінійне програмування – це розділ дослідження операцій, що орієнтований на вирішення задач, у яких усі змінні або частина з них є цілочисельними (повністю або частково цілочисельні задачі).

Шлях – послідовність подій і робіт від початкової події до кінцевої.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

EOQ, 102
LINEST, 130
LOGEST, 132
SUMIF, 155
t-статистика, 133
Беллман, 119
Белман, 110
Бета-нейтральний портфель, 77
Визначена СЛАР, 8
Витрати, 93, 97, 171
Гамільтонів контур, 51
Дерево цілей, 141
Динамічне програмування, 105, 116
Дискретне програмування, 38
Дисперсія, 84
Діаграма Паретто, 163
Дохід, 84
Задача Ейлера, 147
Задача комівояжера, 39, 49, 60
Задача про вибір траєкторії, 110
Задача про заміну обладнання, 116
Задача про призначення на посаду, 40
Задача про розкрій матеріалу, 43
Задача про рюкзак, 39, 42
Задача управління запасами, 90
Запас, 90
Звіт по стійкості, 192
Коваріація, 77, 84
Коефіцієнт Ст'юдента, 134
Комбінаторні методи, 39
Критерій Фішера, 133
Критичний шлях, 154
Матриця інциденцій, 142
Матриця суміжності, 142, 143
Метод Гауса, 9, 12
Метод гілок і границь, 60
Метод Крамера, 8
Метод найменших квадратів, 9, 15
Метод оберненої матриці, 8, 13
Методи відсікання, 39
Множник Лагранжа, 193
Модель Джеймса Тобіна, 76
Модель Марковіца, 69
Модель Шарпа, 79
Н-вартість, 193
Невизначена СЛАР, 8
Несумісна СЛАР, 8
Орієнтований граф, 142
Попит, 95
Портфель інвестицій, 69, 79
Потік мінімальної вартості, 149
Принцип оптимальності, 110
Пуассонівський потік, 166
Рекурентні співвідношення, 108
Ризик, 84
Ризик цінних паперів, 74
Розвиваний розв'язувач, 50, 65
Симплекс-метод, 55
Система лінійних алгебраїчних рівнянь, 7
Система масового обслуговування (СМО)
СЛАР, 16
СМО з відмовами, 159
СМО з необмеженим очікуванням, 160
СМО з очікуванням, 160
Стохастичне програмування, 124
Сумісна СЛАР, 8
Теорема Кронекера-Капеллі., 8
Теорія графів, 139
Тіньова ціна, 193
Транспортна задача, 17, 29, 32
Формула Уілсона, 101

ДОДАТКИ

Таблиця

Лабораторна робота 9

	Ціни ($)					
	AAPL	C	GE	XOM	AA	S&P
09.01.2015	90,58	6,75	16	77,57	10,81	881,67
16.01.2015	82,33	3,5	13,96	78,1	9,43	843,73
23.01.2015	88,36	3,47	12,03	78,04	8,33	833,97
30.01.2015	90,13	3,55	12,13	76,48	7,79	816,47
06.02.2015	99,72	3,91	11,1	80,34	8,4	868,59
13.02.2015	99,16	3,49	11,44	74,59	7,48	815,32
20.02.2015	91,2	1,95	9,38	71,23	6,29	776,62
27.02.2015						
05.03.2015	89,31	1,5	8,51	67,9	6,23	725,58
12.03.2015	85,3	1,03	7,06	64,03	5,22	679,44
19.03.2015	95,93	1,78	9,62	67,2	5,73	762,92
26.03.2015	101,59	2,62	9,54	66,09	6,54	783,41
02.04.2015	106,85	2,62	10,78	69,98	7,8	805,61
09.04.2015	115,99	2,85	10,94	70,44	8,17	837,58
16.04.2015	119,57	3,04	11,33	69,84	8,85	853,99
23.04.2015	123,42	3,65	12,39	66,75	9,26	868,27
30.04.2015	123,9	3,19	12,11	66,57	9,14	857,9
07.05.2015						
14.05.2015	127,24	2,97	12,69	68,01	9,69	880,41
21.05.2015	129,19	4,02	14,53	70,8	10,01	922,99
28.05.2015	122,42	3,48	12,86	69,11	9,03	893,18
04.06.2015	122,5	3,67	13,1	68,83	8,86	881,57
11.06.2015	135,81	3,72	13,48	69,35	9,22	927,8
18.06.2015	144,67	3,46	13,54	72,97	10,94	935,01
25.06.2015	136,97	3,47	13,51	73,78	11,99	935,22
02.07.2015	139,48	3,17	12,1	71,05	11	912,55
09.07.2015	142,44	3,03	11,75	69,05	10,76	920,9
16.07.2015	140,02	2,88	11,46	68,49	9,86	890,38
23.07.2015	138,52	2,59	10,78	65,12	9,34	881,91
30.07.2015	151,75	3,02	11,65	68,52	10,22	945,35
06.08.2015	159,986	2,73	12,03	72,29	11,02	977,63
13.08.2015	163,39	3,17	13,4	70,39	11,76	996,47
20.08.2015	165,51	3,85	14,7	69,47	13	1004,96

27.08.2015	166,78	4,04	13,92	68,21	13,27	986,75
03.09.2015	169,22	4,7	14,21	69,92	12,56	1028,63
10.09.2015	170,05	5,23	14,08	70,12	12,5	1020,29
17.09.2015	170,31	4,85	13,87	69,18	12,18	1025,71
24.09.2015	172,16	4,61	14,67	69,98	12,99	1036,42
01.10.2015	185,02	4,26	16,5	69,99	14,06	1067,14
08.10.2015	182,37	4,38	16,37	68,7	13,08	1045,38
15.10.2015	184,9	4,52	15,36	66,58	12,82	1027,94
22.10.2015	190,47	4,63	16,18	69,27	14,24	1075,06
29.10.2015	188,05	4,59	16,08	73,12	14,04	1088,59
05.11.2015	203,94	4,46	15,2	73,57	13,73	1082,94
12.11.2015	188,5	4,09	14,26	71,67	12,42	1042,01
19.11.2015	194,34	4,06	15,33	72,58	12,89	1077,02
26.11.2015	204,45	4,05	15,66	72,47	13,18	1100,78
03.12.2015	199,92	4,2	15,59	74,38	13,13	1094,86
10.12.2015	200,59	4,06	15,94	74,87	12,66	1091,1
17.12.2015	193,32	4,06	16,2	74,25	12,99	1105,03
24.12.2015	194,67	3,95	15,92	72,83	14,61	1111,11
31.12.2015	195,43	3,4	15,59	68,21	14,58	1108,23
07.01.2016	209,04	3,35	15,44	68,66	16,34	1127,61

Перелік найбільш уживаних функцій MS Excel

Фінансові функції – Financial

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
DURATION	ДЛИТ	Знаходить щорічну тривалість дії цінних паперів з періодичними виплатами по відсотках
EFFECT	ЭФФЕКТ	Повертає ефективну річну відсоткову ставку
FV	БС	Обчислює майбутнє значення вкладу.
FVSCHEDULE	БЗРАСПИС	Обчислює майбутнє значення початкового вкладу при змінних складних відсоткових ставках
INTRATE	ИНОРМА	Визначає ставку прибутковості повністю забезпеченого цінного паперу
IMPT	ПРПЛТ	Обчислює величину виплати відсотків на вкладення за даний період
IRR	ВСД	Обчислює внутрішню ставку прибутковості (віддачі) для серії грошових потоків
ISPMT	ПРОЦПЛАТ	Обчислює виплати за вказаний період інвестиції
MIRR	МВСД	Визначає внутрішню ставку прибутковості, при якій додатні та від'ємні грошові потоки мають різну ставку
NOMINAL	НОМИНАЛ	Визначає номінальну річну відсоткову ставку
NPER	КПЕР	Визначає загальну кількість періодів виплати для даної позики.
NPV	ЧПС	Обчислює чисту зведену вартість інвестиції, основаної на серії періодичних грошових потоків та ставці дисконтування
PMT	ПЛТ	Обчислює величину виплати за позикою за один період.
PPMT	ОСПЛТ	Обчислює величину виплат по тілу вкладу в заданий період
PV	ПС	Обчислює зведену (до даного моменту) вартість інвестиції

RATE	СТАВКА	Обчислює відсоткову ставку за ануїтетом за один період
XIRR	ЧИСТВНДОХ	Обчислює внутрішню ставку прибутковості запланованих неперіодичних грошових потоків
XNPV	ЧИСТНЗ	Повертає чисту поточну вартість інвестиції, обчислювану на основі ряду надходжень готівки, які не обов'язково є періодичними

Перевірка властивостей і значень та інформаційні функції – Information

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
ISEVEN	ЕЧЁТН	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент – парне число
ISLOGICAL	ЕЛОГИЧ	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент посилається на логічне значення
ISNA	ЕНД	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент посилається на значення помилки #Н/Д (значення недоступне)
ISNONTEXT	ЕНЕТЕКСТ	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент посилається на значення, яке не є текстом
ISNUMBER	ЕЧИСЛО	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент посилається на число
ISODD	ЕНЕЧЁТ	Видає логічне значення ІСТИНА, якщо аргумент – непарне число
TYPE	ТИП	Видає тип значення

Логічні функції – Logical

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
AND	И	Видає значення ІСТИНА, якщо всі аргументи мають значення ІСТИНА
FALSE	FALSE	Вставляє логічне значення ХИБНІСТЬ
IF	ЕСЛИ	Виконує перевірку умови.
NOT	НЕ	Змінює на протилежне логічне значення свого аргументу
OR	ИЛИ	Видає значення ІСТИНА, якщо хоча б один аргумент має значення ІСТИНА
TRUE	TRUE	Вставляє логічне значення ІСТИНА

Посилання та масиви – Lookup & Reference

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
ADRESS	АДРЕС	Видає посилання на окрему комірку робочого аркушу у вигляді тексту
COLUMN	СТОЛБЕЦ	Визначає номер стовпчика, на який вказує посилання
COLUMNS	ЧИСЛСТОЛБ	Визначає кількість стовпчиків у масиві або посиланні
HLOOKUP	ГПР	Шукає значення у першому рядку масиву й видає значення з комірки у знайденому стовпчику і вказаному рядку
INDEX	ИНДЕКС	За індексом отримує значення з посилання або масиву
OFFSET	СМЕЩ	Визначає зміщення посилання відносно заданого посилання
ROW	СТРОКА	Визначає номер рядка, що визначається посиланням
ROWS	ЧСТРОК	Визначає кількість рядків у посиланні
RTD	ДРВ	Добуває дані реального часу з програм, що підтримують автоматизацію COM
TRANSPOSE	ТРАНСП	Видає транспонований масив
VLOOKUP	ВПР	Шукає значення у першому стовпчику масиву й видає значення з комірки у знайденому рядку і вказаному стовпчику

Математичні та тригонометричні функції – Math & Trig

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
ABS	ABS	Знаходить модуль (абсолютну величину) числа
ACOS	ACOS	Обчислює арккосинус числа
ASIN	ASIN	Обчислює арксинус числа
ASINH	ASINH	Обчислює гіперболічний арксинус числа
ATAN	ATAN	Обчислює арктангенс числа
ATANH	ATANH	Обчислює гіперболічний арктангенс числа
CEILING	ОКРВВЕРХ	Округлює число до найближчого цілого або до найближчого кратного вказаному значенню

COS	COS	Обчислює косинус числа
COSH	COSH	Обчислює гіперболічний косинус числа
DEGREES	ГРАДУСЫ	Перетворює радіани на градуси.
EVEN	ЧЁТН	Округлює число до найближчого парного цілого
EXP	EXP	Обчислює число e, піднесене до вказаного степеня
FACT	ФАКТР	Обчислює факторіал числа
FLOOR	ОКРВНИЗ	Округлює число до найближчого меншого за модулем цілого
GCD	НОД	Знаходить найбільший спільний дільник
INT	ЦЕЛОЕ	Округлює число до найближчого меншого цілого
LCM	НОК	Знаходить найменше спільне кратне
LN	LN	Обчислює натуральний логарифм числа.
LOG	LOG	Обчислює логарифм числа за заданою основою
LOG10	LOG10	Обчислює десятковий логарифм числа
MDETERM	МОПРЕД	Обчислює визначник матриці, що зберігається в масиві
MINVERSE	МОБР	Визначає обернену матрицю (матриця зберігається в масиві)
MMULT	МУМНОЖ	Обчислює добуток матриць, що зберігаються в масивах.
MOD	ОСТАТ	Обчислює остачу від ділення.
MROUND	ОКРУГЛТ	Знаходить число, округлене з потрібною точністю
ODD	НЕЧЁТ	Округлює число до найближчого непарного цілого
POWER	СТЕПЕНЬ	Обчислює результат піднесення числа до степеня
PRODUCT	ПРОИЗВЕД	Обчислює добуток аргументів
QUOTIENT	ЧАСТНОЕ	Обчислює цілу частину частки при діленні
RADIANS	РАДИАНЫ	Перетворює градуси на радіани
RAND	СЛЧИС	Видає випадкове число з інтервалу від 0 до 1
RANDBETVEEN	СЛУЧМЕЖДУ	Видає випадкове число з заданого інтервалу
ROUND	ОКРУГЛ	Округлює число до вказаної кількості десяткових розрядів

ROUNDDOWN	ОКРУГЛВНИЗ	Округлює число до найближчого меншого за модулем цілого
ROUNDUP	ОКРУГЛВВЕРХ	Округлює число до найближчого за модулем більшого цілого
SERIESSUM	РЯД.СУММ	Обчислює суму степеневого ряду за заданою формулою
SIGN	ЗНАК	Визначає знак числа
SIN	SIN	Обчислює синус заданого кута
SQRT	КОРЕНЬ	Обчислює додатне значення квадратного кореня
SUBTOTAL	ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ	Обчислює проміжні підсумки
SUM	СУММ	Додає аргументи
SUMIF	СУММЕСЛИ	Додає значення комірок, які задовольняють заданій умові
SUMPRODUCT	СУММПРОИЗВ	Обчислює суму добутків відповідних елементів масивів
SUMSQ	СУММКВ	Обчислює суму квадратів аргументів
SUMX2MY2	СУММРАЗНКВ	Обчислює суму різниць квадратів відповідних значень у двох масивах
SUMX2PY2	СУММСУММКВ	Обчислює суму сум квадратів відповідних елементів двох масивів
SUMXMY2	СУММКВРАЗН	Обчислює суму квадратів різниць відповідних значень у двох масивах
TAN	TAN	Обчислює тангенс числа
TRUNC	ОТБР	Відкидає дробову частину числа
ISO.CEILING		Округлює число в більшу сторону до найближчого цілого або до найближчого кратного значенню точності
FLOOR.PRECISE		Округлює число до найближчого цілого або до найближчого кратного значенню точності. Незалежно від знака числа воно округлюється до більшого

Статистичні функції – Statistical

Назва функції	Аналог функції (рос.)	Призначення
AVEDEV	СРОТКЛ	Обчислює середнє абсолютних значень відхилень точок даних від середнього
AVERAGE	СРЗНАЧ	Обчислює середнє арифметичне аргументів

AVERAGEA	СРЗНАЧА	Обчислює середнє арифметичне аргументів, включно з числами, текстом та логічними значеннями
BETADIST	БЕТАРАСП	Визначає інтегральну функцію густини бета-ймовірності
BETAINV	БЕТАОБР	Визначає обернену функцію до інтегральної функції густини бета-ймовірності
CONFIDENCE	ДОВЕРИТ	Визначає довірчий інтервал для середнього значення за генеральною сукупністю
CORREL	КОРРЕЛ	Знаходить коефіцієнт кореляції між двома множинами даних
COUNT	СЧЁТ	Підраховує кількість чисел у списку аргументів
COUNTA	СЧЁТЗ	Підраховує кількість значень у списку аргументів
COUNTIF	СЧЁТЕСЛИ	Підраховує кількість непорожніх комірок, що задовольняють заданій умові всередині діапазону
COVAR	КОВАР	Визначає коваріацію, тобто середнє добутків відхилень для кожної пари точок
DEVSQ	КВАДРОТКЛ	Обчислює суму квадратів відхилень.
EXPONDIST	ЭКСПРАСП	Знаходить експоненціальний розподіл
FDIST	FРАСП	Знаходить F-розподіл ймовірності.
FINV	FРАСПОБР	Визначає обернене значення для F-розподілу ймовірності
FISHER	ФИШЕР	Знаходить перетворення Фішера
FISHERINV	ФИШЕРОБР	Знаходить обернене перетворення Фішера
FORECAST	ПРЕДСКАЗ	Обчислює значення лінійного тренду
FREQUENCY	ЧАСТОТА	Знаходить розподіл частот у вигляді вертикального масиву
FTEST	ФТЕСТ	Визначає результат F-тесту
GROWTH	РОСТ	Обчислює значення відповідно до експоненціального тренду
HARMEAN	СРГАРМ	Обчислює середнє гармонічне.
HYRGEOMDIST	ГИПЕРГЕОМЕТ	Визначає гіпергеометричний розподіл
INTERCEPT	ОТРЕЗОК	Знаходить відрізок, що відсікається на осі лінією лінійної регресії
KURT	ЭКСЦЕСС	Визначає ексцес множини даних

LARGE	НАИБОЛЬШИЙ	Знаходить k-е найбільше значення з множини даних
LINEST	ЛИНЕЙН	Знаходить параметри лінійного тренду
LOGEST	ЛГРФПРИБЛ	Знаходить параметри експонентцільного тренду
LOGINV	ЛОГНОРМОБР	Знаходить обернений логарифмічний нормальний розподіл
LOGNORMDIST	ЛОГНОРМРАСП	Знаходить інтегральний логарифмічний нормальний розподіл
MAX	МАКС	Визначає максимальне значення зі списку аргументів
MAXA	МАКСА	Визначає максимальне значення зі списку аргументів, включно з числами, текстом і логічними значеннями
MEDIAN	МЕДИАНА	Знаходить медіану заданих чисел
MIN	МИН	Визначає мінімальне значення зі списку аргументів
MINA	МИНА	Визначає мінімальне значення зі списку аргументів, включно з числами, текстом і логічними значеннями
MODE	МОДА	Знаходить значення моди множини даних
NEGBINOMDIST	ОТРБИНОМРАСП	Знаходить від'ємний біноміальний розподіл
NORMDIST	НОРМРАСП	Видає нормальну функцію розподілу.
NORMINV	НОРМОБР	Видає обернений нормальний розподіл
NORMSDIST	НОРМСТРАСП	Видає стандартний нормальний інтегральний розподіл
NORMSINV	НОРМСТОБР	Видає обернене значення стандартного нормального розподілу
PEARSON	ПИРСОН	Визначає коефіцієнт кореляції Пірсона
PERCENTRANK	ПРОЦЕНТРАНГ	Визначає відсоткову норму значення у множині даних
PERMUT	ПЕРЕСТ	Знаходить кількість перестановок для заданого числа об'єктів
POISSON	ПУАССОН	Видає розподіл Пуассона
PROB	ВЕРОЯТНОСТЬ	Визначає ймовірність того, що значення з діапазону знаходиться в заданих межах
QUARTILE	КВАРТИЛЬ	Визначає квартиль множини даних

RANK	РАНГ	Визначає ранг числа у списку чисел
RSQ	КВПИРСОН	Знаходить квадрат коефіцієнта кореляції Пірсона
SKEW	СКОС	Визначає асиметрію розподілу
SLOPE	НАКЛОН	Знаходить нахил лінії лінійної регресії
SMALL	НАИМЕНЬШИЙ	Знаходить k-е найменше значення у множині даних
STANDARDIZE	НОРМАЛИЗАЦИЯ	Обчислює нормалізоване значення
STDEV	СТАНДОТКЛОН	Оцінює стандартне відхилення за вибіркою
STDEVA	СТАНДОТКЛОНА	Оцінює стандартне відхилення за вибіркою, включно з числами, текстом та логічними значеннями
STDEVP	СТАНДОТКЛОНП	Визначає стандартне відхилення за генеральною сукупністю
STDEVPA	СТАНДОТКЛОНПА	Визначає стандартне відхилення за генеральною сукупністю, включно з числами, текстом та логічними значеннями
STEYX	СТОШУХ	Визначає стандартну помилку передбачених значень у для кожного значення x у регресії
TDIST	СТЬЮДРАСП	Видає t-розподіл Стьюдента
TINV	СТЬЮДРАСПОБР	Видає обернений t-розподіл Стьюдента
TREND	ТЕНДЕНЦИЯ	Знаходить значення відповідно до лінійного тренду
TTEST	ТТЕСТ	Знаходить ймовірність, що відповідає критерію Стьюдента
VAR	ДИСП	Оцінює дисперсію за вибіркою.
VARA	ДИСПА	Оцінює дисперсію за вибіркою, включно з числами, текстом та логічними значеннями
VARP	ДИСПР	Обчислює дисперсію для генеральної сукупності
VARPA	ДИСПРА	Обчислює дисперсію для генеральної сукупності, включно з числами, текстом та логічними значеннями
CONFIDENCE.T		Повертає довірчий інтервал для середнього значення генеральної сукупності з використанням розподілу Стьюдента

COVARIANCE.S		Повертає вибіркову коваріацію – середнє добутків відхилень для кожної пари точок даних у двох наборах даних
F.DIST		Повертає F-розподіл імовірності
F.INV		Повертає обернене значення F-розподілу ймовірності
MODE.MULT		Повертає вертикальний масив значень, які найчастіше зустрічаються або повторюються в масиві або діапазоні даних
PERCENTILE.EXC		Повертає k-ий процентиль для значень діапазону, де k перебуває в діапазоні 0...1, за винятком 0 і 1
PERCENTRANK.EXC		Повертає ранг (відсоткову норму) значення (0...1, за винятком 0 і 1) у наборі даних
RANK.AVG		Повертає ранг числа у списку чисел.
T.DIST		Повертає відсоткові пункти (імовірність) для t-розподілу Стьюдента
T.INV		Повертає t-значення t-розподілу Стьюдента у вигляді функції ймовірності та ступенів вільності

Навчальне видання

СЕРІЯ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ»

Пацай Богдан Дмитрович

Дослідження операцій: практикум

Навчальний посібник

Редактор *Н. І. Грицюк, Л. Б. Дьомена*

Форматування та комп'ютерна верстка *Н. М. Шамардак*

Здано до друку13.10.2017. Формат 60×84/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Timcs New Roman».
Друк. арк. 11.13
Тираж 300 примірників. Замовлення № 639.

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром Університету ДФС України
08200, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 5104 від 20.05.2016