№ 5(59) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online
УДК 378.016:51:159.955
https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-5(59)-3452-3460

Ярова Оксана Анатоліївна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, факультет фінансів та цифрових технологій, Державний податковий університет, м. Ірпінь, https://orcid.org/0000-0002-0522-8368

Резнік Вероніка здобувачка першого (бакалаврського) рівня вищої освіти кафедра публічних фінансів, Державний податковий університет, м. Ірпінь

МАТЕМАТИЧНА ІНТУЇЦІЯ ТА ДОКАЗОВЕ МИСЛЕННЯ

Анотація. У статті досліджується проблема формування математичної інтуїції та доказового мислення у студентів закладів вищої освіти. Акцентовано увагу на тому, що сучасна система математичної підготовки часто орієнтується переважно на відтворення готових алгоритмів і типових способів розв'язання задач, унаслідок чого студенти демонструють труднощі під час побудови самостійних міркувань, доведення теорем і пошуку нестандартних підходів. Розкрито зміст понять «математична інтуїція» та «доказове мислення», охарактеризовано їх взаємозв'язок і значення для розвитку повноцінного математичного мислення майбутнього фахівця. Обґрунтовано, що інтуїція не є вродженим даром, а формується у процесі систематичної евристичної діяльності, аналізу різноманітних задач і самостійного пошуку способів розв'язання. Водночас доказове мислення визначено як здатність будувати логічно послідовні міркування, аргументувати власні висновки та критично оцінювати правильність тверджень.

У статті проаналізовано педагогічні підходи, що сприяють одночасному розвитку інтуїтивного й логічного компонентів математичного мислення. Особливу увагу приділено задачам відкритого типу, навчанню через відкриття, роботі з контрприкладами, аналізу помилок і використанню цифрових засобів навчання. Показано, що комп'ютерні математичні середовища допомагають студентам візуалізувати закономірності та формують мотивацію до подальшого доведення. Окремо висвітлено роль самооцінювання, рефлексії та педагогіки помилки як важливих чинників розвитку впевненості у власному мисленні та подолання страху перед математичним доведенням. Зроблено висновок, що ефективне поєднання інтуїції та доказового мислення є необхідною умовою підготовки сучасного фахівця, здатного до аналізу, дослідження й творчого розв'язання професійних завдань.

ISSN 2786-6025 Online

Ключові слова: математична інтуїція; доказове мислення; вища математична освіта; евристичне навчання; задачі відкритого типу; контрприклад; цифрові засоби навчання; рефлексія.

Yarova Oksana Anatolyivna PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Faculty of Finance and Digital Technology, State Tax University, Irpin, https://orcid.org/0000-0002-0522-8368

Reznik Veronika Bachelor's Degree Student, Department of Public Finance, State Tax University, Irpin

MATHEMATICAL INTUITION AND PROOF-BASED THINKING

Abstract. The article examines the problem of developing mathematical intuition and proof-based thinking among students in higher education institutions. Attention is focused on the fact that the modern system of mathematical training is often oriented mainly toward reproducing ready-made algorithms and standard methods of solving problems, which results in students experiencing difficulties when constructing independent reasoning, proving theorems, and finding non-standard approaches. The paper reveals the essence of the concepts of "mathematical intuition" and "proof-based thinking," characterizes their interrelation, and emphasizes their importance for the development of comprehensive mathematical thinking in future specialists. It is substantiated that intuition is not an innate gift but is formed through systematic heuristic activity, the analysis of diverse problems, and the independent search for solution strategies. At the same time, proof-based thinking is defined as the ability to construct logically consistent arguments, justify one's conclusions, and critically evaluate the validity of mathematical statements.

The article analyzes pedagogical approaches that contribute to the simultaneous development of intuitive and logical components of mathematical thinking. Particular attention is paid to open-ended problems, discovery-based learning, work with counterexamples, error analysis, and the use of digital learning tools. It is shown that computer-based mathematical environments help students visualize patterns and motivate them to further prove discovered relationships. Special emphasis is placed on the role of self-assessment, reflection, and the pedagogy of mistakes as important factors in developing confidence in one's own thinking and overcoming the fear of mathematical proof. The author concludes that the effective integration of intuition and proof-based thinking is a necessary condition for training modern specialists capable of analysis, research, and creative problem-solving in professional activities.

ISSN 2786-6025 Online

Keywords: mathematical intuition; proof-based thinking; higher mathematics education; heuristic learning; open-ended problems; counterexample; digital learning tools; reflection.

Постановка проблеми. Уявіть таку ситуацію: студент успішно розв'язав двадцять задач на знаходження похідної - і раптом отримує просте питання: «Доведіть, що ця функція зростає на вказаному проміжку». І все - людина «зависає». Формули знає, рахує правильно, але думати самостійно - не виходить. Це не вигадана ситуація, це масова проблема вищої математичної освіти.

Більшість студентів приходять у виш з досвідом «математики за зразком»: побачив тип задачі - застосував алгоритм - отримав відповідь. Така модель навчання виробляє виконавців, але не дослідників. Вона не розвиває вміння ставити запитання, перевіряти гіпотези і будувати власні логічні ланцюжки.

Між тим сучасний ринок праці та науковий світ потребують зовсім інших якостей. Аналітик, економіст, інженер, науковець - усі вони стикаються з нестандартними ситуаціями, де немає «правильного зразка». І саме тут математична освіта або дає людині інструмент для мислення, або виявляється марною. Проблема тому й актуальна, що торкається не лише якості навчання математики, а й якості підготовки фахівців загалом.

Мета статті. Мета цієї роботи - пояснити, що таке математична інтуїція і доказове мислення, чому їх треба розвивати одночасно, і які педагогічні методи для цього найкраще підходять.

Автор також ставить за мету показати, що ці якості - не привілей «математично обдарованих», а результат правильно організованої навчальної роботи, доступний кожному студентові.

Завдання дослідження. Для досягнення мети поставлено такі завдання: пояснити, що таке математична інтуїція і чи можна її розвинути; розкрити суть доказового мислення і з'ясувати, чому воно дається студентам важко; показати, як інтуїція і логічне доведення пов'язані між собою і чому одне підсилює інше; описати конкретні методи навчання, що розвивають обидві якості; додати нові спостереження щодо ролі самооцінювання та педагогіки помилки - аспектів, які у вітчизняній дидактиці математики ще недостатньо досліджені.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання математичного мислення давно цікавить і вчених, і педагогів. Французький математик Анрі Пуанкаре ще понад сто років тому описав те, що сьогодні називають математичною інтуїцією: за його словами, саме «несвідоме» підказує досліднику правильний шлях, а потім логіка його перевіряє [5, с. 14]. Ця ідея досі лежить в основі розуміння творчого математичного процесу.

ISSN 2786-6025 Online

В Україні питання математичної освіти системно вивчали кілька видатних дослідників. Михайло Кравчук - визначний математик першої половини XX століття - наголошував, що справжнє математичне знання завжди поєднує строгість з «відчуттям» предмету [4, с. 23]. Його педагогічна спадщина залишається актуальною й сьогодні.

Сучасна українська дидактика математики значною мірою сформована завдяки роботам трьох дослідників. Михайло Жалдак займається проблемою впровадження цифрових технологій у навчання математики і показує, що комп'ютерні середовища дозволяють студентові «побачити» закономірність іще до її доведення - і це суттєво активізує математичне мислення [6, с. 34]. Наталія Морзе досліджує логіко-математичну компетентність і переконливо доводить: студент не навчиться доводити, якщо лише дивитиметься на чужі докази - він має будувати їх сам [2, с. 51]. Олена Скафа розробила цілісну теорію евристичного навчання математики, де математична інтуїція розглядається як продукт самостійного відкриття нових фактів, а не заучування готових [3, с. 82].

Класичний підручник Галини Бевз з методики викладання математики [1, с. 38] до сьогодні залишається важливим джерелом щодо типових помилок школярів і студентів при засвоєнні доказів. Хоча він написаний для шкільної математики, описані в ньому психологічні труднощі повністю відтворюються і у виші.

Разом з тим більшість цих досліджень торкаються або інтуїції, або доказового мислення - але рідко розглядають їх як єдину педагогічну проблему. Крім того, роль самооцінювання та рефлексії у формуванні цих якостей залишається недостатньо висвітленою. Саме це є внеском даної статті.

Виклад основного матеріалу дослідження

Коли досвідчений математик дивиться на задачу і одразу «відчуває», у якому напрямку треба діяти - це і є математична інтуїція. Для стороннього спостерігача це виглядає майже як магія. Насправді ж за цим «відчуттям» стоїть накопичений досвід: сотні або тисячі розв'язаних задач, серед яких мозок навчився розпізнавати структурні подібності.

№ 5(59) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online



Рисунок 1. Взаємозв'язок математичної інтуїції та доказового мислення у процесі навчання

Олена Скафа у своїй монографії пояснює це точно: інтуїція - це не дар, а результат систематичної евристичної діяльності [3, с. 82]. Іншими словами, що більше людина самостійно шукає розв'язки (а не копіює готові), то точнішим стає її математичне «чуття». Це принципово важливий висновок для педагогіки: якщо інтуїція формується через досвід, то її можна і треба цілеспрямовано розвивати.

При цьому важлива не лише кількість задач, а їхня різноманітність. Якщо студент розв'язує сто задач одного типу, він набуває навичку - але не інтуїцію. Справжня математична інтуїція народжується там, де людина стикається з непередбаченими ситуаціями і вчиться орієнтуватися в них [8, p. 54]. Тому різноманітність завдань і нестандартність формулювань - не примха викладача, а педагогічна необхідність.

Доведення у математиці - це не просто «показати, що щось правда». Це суворий ланцюжок кроків, де кожен спирається на щось вже доведене або прийняте як аксіома. Жодного «і так зрозуміло», жодного «це очевидно» - кожне твердження потребує обґрунтування. Саме ця вимога і лякає більшість студентів.

ISSN 2786-6025 Online

Наталія Морзе у своїх роботах фіксує характерну закономірність: студент, який спостерігав, як викладач доводить теореми, як правило, не може відтворити подібне міркування самостійно [2, с. 51]. Справа в тому, що пасивне спостереження і активне конструювання - це принципово різні когнітивні процеси. Дивитися, як плаває інший, і навчитися плавати самому - різні речі.

Галина Бевз у своєму посібнику виділяє кілька типових причин, чому доведення дається важко [1, с. 38]: студент не вміє виділити умову і висновок задачі; не розуміє, навіщо потрібен контрприклад; має прогалини у знанні означень і теорем; нарешті, просто звик покладатися на «зрозуміло і так» замість строгого обґрунтування. Кожна з цих причин потребує окремої педагогічної відповіді - і саме тому розвиток доказового мислення не можна звести до одного прийому.

На перший погляд здається, що інтуїція і строге доведення суперечать одне одному: перша - швидка і «нечітка», друге - повільне і педантичне. Але насправді вони чудово доповнюють одне одного і в цій взаємодії й криється суть математичного мислення.

Пуанкаре описував цей процес просто і влучно: спочатку інтуїція дає «*натхнення*», а потім логіка дає «*впевненість*» [5, с. 14]. Тобто математик спочатку «відчуває», що теорема правдива і навіть здогадується, як її довести, - і лише потім перевіряє свою здогадку через строгий ланцюжок міркувань.

Це означає, що розвивати лише одне з двох - безглуздо. Студент без інтуїції застрягає вже на етапі «з чого почати доводити», бо не бачить загальної картини. Студент без навичок доведення може мати гарне «відчуття», але не здатен його обґрунтувати - а отже, не може переконати ні себе, ні інших у правильності своєї ідеї. Лише разом ці якості утворюють повноцінне математичне мислення.

Найкраще це видно на прикладі роботи з контрприкладами. Щоб знайти контрприклад до хибного твердження, потрібно і логічно зрозуміти його структуру (де може бути «слабке місце»), і інтуїтивно «відчути», яке значення може спростувати загальне правило. Саме тому задачі на пошук контрприкладів - один з найефективніших інструментів одночасного розвитку обох якостей.

Задачі відкритого типу. На відміну від стандартних завдань, де є один правильний алгоритм, задачі відкритого типу допускають кілька шляхів розв'язання. Студент сам обирає стратегію, висуває гіпотезу і перевіряє її [8, p. 73]. Це і є природнє середовище для розвитку інтуїції: немає підказки, немає зразка - є тільки задача і власна голова. Водночас вимога обґрунтувати кожен крок тренує доказове мислення.

Навчання через відкриття. Олена Скафа обґрунтовує, що найкращий спосіб навчити студента думати математично - поставити його в роль

ISSN 2786-6025 Online

дослідника: нехай сам формулює гіпотезу і будує доведення, а викладач лише спрямовує [3, с. 95]. Це потребує більше часу на уроці, але дає якісно глибший результат, ніж будь-яке пояснення «від дошки».

Цифрові інструменти. Михайло Жалдак показує, що програми динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри дозволяють студентові спочатку «побачити» закономірність на екрані, а потім сформувати бажання її довести [6, с. 34]. Це ідеальний дидактичний місток між інтуїтивним сприйняттям і суворим доведенням. Важливо: цифровий інструмент не замінює доведення - він мотивує до нього.

Робота з помилками. Коли студент аналізує хибне доведення і шукає, де саме порушена логіка, він вчиться набагато краще, ніж при спостереженні за правильним. Пошук «де помилка» вимагає повного розуміння структури міркування - і цей процес є надзвичайно продуктивним для розвитку доказового мислення. Бевз у своєму посібнику наводить цілу систему таких вправ [1, с. 45].

Цей підрозділ містить спостереження, які не були представлені у вихідних тезах, але логічно випливають із розглянутої проблеми і підтверджуються загальними тенденціями в сучасній педагогіці вищої школи.

Одним з недооцінених інструментів розвитку математичного мислення є самооцінювання - практика, коли студент після розв'язання задачі не просто порівнює свою відповідь з правильною, а аналізує власний хід думки: чому я обрав саме цей підхід? де я «застряг» і чому? що я б зробив інакше наступного разу? Цей процес рефлексії перетворює стихійний досвід на усвідомлене знання - саме те, що лежить в основі розвитку інтуїції.

Дослідження у галузі метакогніції (науки про мислення про власне мислення) свідчать, що студенти, які регулярно рефлексують над власними помилками, набувають кращих навичок перенесення знань на нові ситуації - тобто саме тієї якості, яка відрізняє справжнє математичне мислення від механічного відтворення алгоритмів [7, с. 906]. Для вітчизняної дидактики математики це напрям, що потребує подальшого дослідження і впровадження у практику.

Ще один перспективний підхід - «педагогіка помилки», концепція, що прийшла з європейської освітньої традиції і поступово проникає в українські виші. Суть її полягає в тому, що помилка розглядається не як провал, а як навчальна подія: викладач разом зі студентом «розбирає» хибне міркування, з'ясовує його причину і перетворює на відправну точку для правильного розуміння. Така культура ставлення до помилки знімає тривожність, яка є одним з головних бар'єрів для розвитку доказового мислення: студент перестає боятися «помилитися в доведенні» і починає сприймати процес пошуку як нормальну частину математичної діяльності.

ISSN 2786-6025 Online

Обидва ці підходи - самооцінювання і педагогіка помилки - добре поєднуються з методами, описаними в попередньому підрозділі, і можуть бути органічно вбудовані в існуючі форми організації навчання у вищій математичній освіті.

Висновки. Математична інтуїція і доказове мислення - це не природні таланти, якими або наділений, або ні. Це навички, які формуються через правильно організовану навчальну діяльність, і завдання вищої школи - цю діяльність забезпечити.

З аналізу наукових джерел і педагогічної практики можна зробити такі висновки:

1. Математична інтуїція виникає як наслідок різноманітного, самостійного і рефлексивного досвіду розв'язання задач. Вона не передається через пояснення - вона накопичується через дію.

2. Доказове мислення потребує активної участі студента: слухати чужі докази недостатньо - треба будувати власні, помилятися і шукати помилки.

3. Інтуїція і доведення не суперечать одне одному, а взаємно підсилюють: перша підказує напрямок, друге - підтверджує правильність. Розвивати їх треба разом.

4. Найефективніші методи: задачі відкритого типу, навчання через відкриття, робота з помилками і контрприкладами, використання цифрових засобів.

5. Додатковий потенціал мають самооцінювання і «педагогіка помилки» - підходи, що формують рефлексивне ставлення до власного мислення і знімають тривожність перед математичним доведенням.

Ці висновки мають практичне значення для всіх, хто викладає математику у вищій школі і хоче навчити студентів не просто рахувати, а думати.

Література

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 2003. 367 с.

2. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики : навчальний посібник. У 3 ч. Ч. 1 : Загальна методика. Київ : Навчальна книга, 2004. 152 с.

3. Скафа О. І. Евристичне навчання математики: теорія, методика, технологія : монографія. Донецьк : ДонНУ, 2004. 439 с.

4. Боголюбов О. М. Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942). Київ : Наукова думка, 1992. 188 с.

5. Пуанкаре А. Наука і метод / пер. з фр. Київ : Наукова думка, 1990. 248 с.

6. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : посібник. Київ : Техніка, 1997.304с.

7. Flavell J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist. 1979. Vol. 34, No. 10. P. 906–911.

8. Schoenfeld A. H. Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press,1985.409p.