

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ІНТЕГРАЛЬНІ
ПЕРЕТВОРЕННЯ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Збірник наукових праць
Випуск 15

Київ • 1997

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

збірник наукових праць

Інститут математики НАН України

Чернівецький державний університет
ім. Ю. Федьковича

кафедра диференціальних рівнянь

Зареєстровано Державним комітетом
України у справах видавництва,
поліграфії та книгорозповсюдження

Свідцтво
серія KB N 56
видається в 1992 року

Випуск 15
1997

Засновник і головний редактор
М.П. Ленюк (Чернівці),
доктор фіз.-мат. наук

Редакційна колегія:

А.А. Березовський (Київ)
доктор фіз.-мат. наук

В.М. Вігак (Львів),
доктор фіз.-мат. наук

Ю.В. Гайдель (Харків),
доктор фіз.-мат. наук

В.В. Городецький (Чернівці),
доктор фіз.-мат. наук

М.І. Матійчук (Чернівці),
доктор фіз.-мат. наук

В.Б. Рудницький (Хмельницький),
доктор технічних наук

В.Ю. Слюсарчук (Рівне),
доктор фіз.-мат. наук

А.Н. Хомченко (Херсон)
доктор фіз.-мат. наук

О.М. Шаблій (Тернопіль),
доктор фіз.-мат. наук

А.В. Нікітін (Чернівці)
технічний секретар

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ: 36. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 15. – 310 с.

Запроваджено: новий метод побудови аналітичного розв'язку плоскої задачі термопружності в напруженнях для прямокутної області; скінченні гібридні інтегральні перетворення Лежандра 1-го роду - Лежандра 2-го роду - Канторогтча - Лебедева; скінченні гібридні інтегральні перетворення Ганкеля 1-го роду - Канторовича - Лебедева; скінченні гібридні інтегральні перетворення Ганкеля 2-го роду - Фур'є - Бесселя - ... - Бесселя - Фур'є на сегменті $[R_0, R]$ в $(2n + 1)$ -ю точкою спряження.

Одержано: ознаки єдності та існування гладкого розв'язку початкової задачі для системи сингулярних диференціальних рівнянь із заштовпленнями; загальний вигляд наближених бімодальних розв'язків нелінійного тривимірного інтегро-диференціального рівняння Больцмана для твердих куль; загальний вигляд гладких всередині інтервала $(0, T)$ розв'язків деяких еволюційних рівнянь параболічного типу з особливостями в коефіцієнтах; необхідні й достатні умови обійденості послідовностей інтегрованих за Ріманом функцій до інтегрованої за Ріманом функції; умови стабілізації всіх розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із вагаюваннями; алгебраїчні коефіцієнтні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному положення рівноваги стохастичного диференціального рівняння з нелінійним оберненим зв'язком.

Побудовано: наближені розв'язки деяких інтегро-диференціальних рівнянь Вінера-Хопфа; точний аналітичний розв'язок задачі про структуру стаціонарного температурного поля в суцільному однорідному ортотропному парашутному тілі; фундаментальні функції та функції Гріна класичних крайових задач для модифікованого рівняння Гельмгольца в ортотропних півсферичних просторах з півсферичною порожниною; асимптотичне розв'язання розв'язку сингулярно збуреної двоточнової крайової задачі в банаховім просторі.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук
професор

М.Я. Барник

Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики НАН України

©Ін-т математики НАН України, 1997

М.М. Семко

НЕНІЛЬПОТЕНТНІ ГРУПИ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ ЩІЛЬНІСТЮ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

(м. Київ)

У роботі вивчаються ненільпотентні групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп (УЩН[]-групи). УЩН[]-групою називається така група G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа в B , існує нормальна підгрупа N в G і $A \leq N \leq B$. Теорема роботи дає конструктивний опис локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[]-груп.

В работе изучаются ненильпотентные группы с обобщенной плотностью нормальности для подгрупп (ОПН[]-группы). ОПН[]-группой называется такая группа G , у которой для любой пары подгрупп A и B таких, что A – собственная немаксимальная подгруппа в B , существует нормальная подгруппа N в G и $A \leq N \leq B$. Теорема работы дает конструктивное описание локально ступенчатых тех ненильпотентных ОПН[]-групп.

Бібліогр.: 19 назв.

У багатьох роботах (див., наприклад, [1,2]) вивчались групи, в яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G . Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G , якщо для будь-якої підгрупи A в підгрупі B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп (УЩН[]-групи), які є означним узагальненням раніше вивчених груп з умовами щільності нормальності для підгруп (див., наприклад, [1,2]).

УЩН[]-групою називається така група G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа в B , існує нормальна підгрупа N в G і $A \leq N \leq B$. Теорема роботи дає конструктивний опис локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[]-груп.

О з н а ч е н н я 1. Нехай G – група, A та B – її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком $[A, B]$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X в G , для яких $A \leq X \leq B$.

О з н а ч е н н я 2. Модулем відрізку $||[A, B]||$ називається число його елементів.

Л е м а 1. Скінченні ненільпотентні УЩН[]-групи G , що містять ненадроз'язні групи Шмідта, вичерпуються групами типів:

1) $G = P\lambda Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p і q – рівні прості числа, $q > 2$, 2 – показник p на модулем q , $p \neq 3$, $\Phi(P)\lambda Q$ – ненільпотентна група Міллера-Морено;

©М.М. Семко, 1997

2) $G = (P \times R)\lambda Q$, $|P| = p^2$, $|R| = r$, $|Q| = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $q > 2$, $p \neq 3$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, 2 – показник p за модулем q , $P\lambda Q$ і $R\lambda Q$ – неїльпотентні групи Міллера-Морено;

3) $G = P\lambda Q$, P – елементарна абелева група порядку $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $Q = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$, p і q – різні прості числа, α – показник p за модулем q , $q > 2$, $C_Q(P) = \langle x^{q^\gamma} \rangle$, $\gamma \in \{1, 2\}$, $\gamma \leq \beta$, $P\lambda \langle x^{q^{\gamma-1}} \rangle$ – неїльпотентна група Міллера-Морено, $\alpha + \beta - \gamma < 4$;

4) $G = P\lambda \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α , $p > 5$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, $q > 2$, $r > 2$, α – показник p за модулем q , α – показник p за модулем r , $P\lambda \langle x^q \rangle$ та $P\lambda \langle x^r \rangle$ – неїльпотентні групи Міллера-Морено;

5) $G = (P\lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^2 , $|x| = q$, $|z| = r$, p, q і r – прості числа, $p \neq q$, $p \neq 3$, 2 – показник p за модулем q , $q > 2$, $P\lambda \langle x \rangle$ – неїльпотентна група Міллера-Морено;

6) $G = P\lambda Q$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = |P'| = p > 3$, $|Q| = q$, p і q – різні прості числа, $q > 2$, 2 – показник p за модулем q ;

7) $G = P\lambda Q$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $Q = \langle x \rangle$, $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = P\lambda \langle x \rangle$, $|P| = p^2$, $|x| = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, $p > 3$, $q > 2$, $P\lambda \langle x^r \rangle$ – неїльпотентна група Міллера-Морено, $P\lambda \langle x^q \rangle$ – неїльпотентна надрозв'язна мінімальна неметациклічна група.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. За умовою леми G містить ненадрозв'язну групу Шмідта $M = P\lambda Q$, яка може бути лише групою одного з типів 1 – 3 теореми 3.1 в [1]. Тоді $|P| = p^\alpha$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\Delta$, $\Delta \in \{1, 2\}$, p і q – різні прості числа. Зрозуміло, що M – неметациклічна група. Якщо $M = G$, то G – група одного з типів 7, 6, 3 розглядуваної леми відповідно.

Нехай $M < G$. Тоді при $M \triangleleft G$ та G задовольняють умову теореми 3.4 в [1] і G – група одного з типів 1, 2 розглядуваної леми.

Нехай $M > G$. Тоді за лемою Фраттіні [3] $G = MU = PU$, $P \triangleleft G$, $U = N_G(Q)$, $U \cap P = \Phi(P)$, $\Phi(P) \in Z(M)$. Зрозуміло, що $U \triangleleft G$. Тому U – група одного з типів 1 – 6 теореми 2.2 в [1]. Очевидно, що $\Phi(P) \times Q < U$. Можливі випадки: 1) U – неїльпотентна група; 2) U – ільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку U – підгрупа типу 2 чи 6 теореми 2.2 в [1]. Нехай спочатку U – група типу 2 вгаданої теореми. Тоді U – добуток двох різних простих чисел. Звідси $\Phi(P) = 1$, $P \cap U = 1$. Тому $U = Q\lambda \langle y \rangle$

– неїльпотентна група Міллера-Морено порядку qr , $|Q| = q$, $|y| = r$, $q \equiv 1 \pmod{r}$, $U' = Q$. Ясно, що M – неїльпотентна група Міллера-Морено, α – показник p за модулем q , $q > 2$. При $\alpha = 2$ $p = 3$. Нехай $V = P\lambda < y >$. Зрозуміло, що $C_Q(P) = 1$. Якщо $C_u(P)$ містить $< y >$, то $< y > \Delta U$, що неможливо. Отже, $C_{<y>}(P) = C_u(P) = 1$. При $\alpha = 3$ за теоремою 3.4 в [1] $G/P = U$ – дедекіндова група, що не так. Отже, $\alpha = 2$. Ясно, що U підгрупа в $\text{Aut } P$. За теоремою 2.3 в [1] G – дисперсивна група і тому при $r = p$ одержимо, що $P\lambda < y >$ – силовська нормальна p -підгрупа в G . Але тоді $< y > \Delta U$, що не так. Отже, $r \neq p$, V – неїльпотентна група і $V \Delta G$. За теоремою 2.2 в [1] V – група лише типу 6 цієї теореми і V – мінімальна неметациклічна група типу 6 теореми 3.3 в [1]. Звідси V та G задовольняють умову теореми 3.4 в [1] і G – група одного з типів 1,2 вгаданої теореми. Але тоді $M \in G'$ – ільпотентна група, що неможливо. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 2.2 в [1].

Нехай U – група типу 6 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = R\lambda < y >$ – неїльпотентна група Міллера-Морено, $|R| = r^\gamma$, $|y| = t^\Delta$, $\Delta > 0$, r і t – рівні прості числа, $R\lambda < y^t > \Delta G$. Звідси $R\Delta G$, $< y^t > \Delta G$. Ясно, що $< y > \Delta U$. Покладемо $V = P < y >$. Якщо $V \Delta G$, то $V \cap U = \Phi(P) < y > \Delta U$, $V \cap U = U$ і $G = V$. Звідси $\Phi(P) = R$, $|R| = p \neq t$, $G = P\lambda < y >$, $p \equiv 1 \pmod{t}$, $p > 2$, $y^t \in Z(G)$. Оскільки $Q \in U$, $P\lambda Q$ – група Шмідта і $y^t \in Z(G)$, то $Q = < y >$ і $M = G$, що не так. Звідси $V \Delta G$. При $t = p$ $r = q$, R – ненормальна в G силовська q -підгрупа і оскільки G – дисперсивна група, то V нормальна силовська p -підгрупа в G , що неможливо. Отже, $p \neq t$ і V – група типу 6 теореми 2.2 в [1]. Зрозуміло, що $V < G$. Тоді $R \notin P$. Звідси $r \neq p$, G' містить неїльпотентну підгрупу $P\lambda R$. Тепер знову V та G задовольняють умову теореми 3.4 в [1], за твердженням якої G' – ільпотентна група, що не так. Таким чином, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Оскільки M – ненадрозв'язна група Шмідта, то показник p за модулем q більше 1. Тому $Q \cap U$ – не 2-група. Нехай U – непрямарна група. Звідси U може бути лише підгрупою типу 2 чи 4 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = < y > \times < z >$, $< y >$ – q -група, $|z| = r$, q і r – рівні прості числа, $y^q \in Z(G)$. Зрозуміло, що $M = P\lambda < y >$, $Q = < y >$. Якщо $z \in \Phi(P)$, то $G = M$, що не так. Отже, $< z > \cap P = \Phi(P) = 1$ і P – елементарна абелева група.

Припустимо, що $r = p$. Тоді $P\lambda < z >$ – ненормальна в G силовська p -підгрупа, комутант якої власна підгрупа в P і нормальна в G . Оскільки P – мінімальна нормальна підгрупа в M , то $[P, < z >] = 1$. Тому в G

існує підгрупа $P \times \langle y^q \rangle \times z$. За теоремою 2.3 в [1] недедекіндова група G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох не-одиничних прямих множників. Звідси $\alpha = 2$, $|y| = q$ і G – група типу 5 розглядуваної леми. При $p \neq r$ $G = P\lambda U$, $\Phi(P) = 1$. Якщо $y^q \neq 1$, то U – група типу 5 теорема 2.2 в [1], $\langle y^q \rangle \times \langle z \rangle \triangleleft G$ і G містить підгрупу $P \times \langle y^q \rangle \times \langle z \rangle$, для якої, як і раніше, $|y| = q$, що не так. Отже, $|y| = q$ і тому $|U| = qr$. Якщо $[P, \langle z \rangle] = 1$, то в G існує підгрупа $P \times \langle z \rangle$, у якої P – група типу (p, p) і тому G – група типу 5 розглядуваної леми. Нехай $[P, \langle z \rangle] \neq 1$. Покладемо $V = P\lambda \langle z \rangle$. Тоді V – невідільна підгрупа в G . Якщо V – підгрупа Міллера-Морено, то покладемо $U = \langle x \rangle$ і одержимо, що $|x| = qr$ і G – група типу 4 розглядуваної леми. Нехай V – не є підгрупою Міллера-Морено. Тоді V містить власну підгрупу Міллера-Морено $S = P_1\lambda \langle y \rangle$, $|P_1| \in \{1, 2\}$, $P_1 < P$.

Нехай спочатку $\alpha = 2$. Тоді $|P_1| = p$, $p \neq 1 \pmod{r}$. За теоремою Машке [3] $P = P_1 \times P_2$, $|P_2| = p$, $P_2 \triangleleft V$. Якщо $[P_2, \langle z \rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V)\Delta G$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, $P_2\lambda y$ – група Міллера-Морено, V – мінімальна неметациклічна група типу 8 теореми 3.3 в [1] і тому G – група типу 8 розглядуваної леми.

Нехай $\alpha = 3$. При $|P_1| = p^2$ знову за теоремою Машке [3] $P = P_1 \times P_2$, $P_2 \triangleleft V$, $|P_2| = p$, 2 – показник p за модулем r і тому $P_2\lambda \langle z \rangle$ – відільна група. Звідси $P_2 = Z(V)$ і знову $P_2 \triangleleft G$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, $|P_1| = p$, $p \equiv 1 \pmod{r}$ і в G існує підгрупа $P_2\lambda \langle y \rangle$, де $P_2 \times P_1 = P$, $P_2 \triangleleft G$. Знову якщо $[P_2, \langle z \rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V)$, що неможливо. Тоді $[P_2, \langle y \rangle] \neq 1$. Як і раніше, $P_2\lambda \langle z \rangle$ містить підгрупу Міллера-Морено $P_3\lambda \langle y \rangle$, $P_3 \in P_2$, $|P_3| = p$ і $||\langle z \rangle, (P_3 \times P_1)\lambda \langle y \rangle|| > 2$. За означенням УШН[]-груп $\langle z \rangle$, $(P_3 \times P_1)\lambda \langle y \rangle \in N\Delta G$. За лемою Фраттіні [3] $V = ND = (P_3 \times P_1)\lambda D$, де $D = N_V(\langle z \rangle)$. Оскільки $P_3 \times P_1 < P$, то $D = \langle z \rangle \times \langle u \rangle$, $|u| = p$, $\langle u \rangle = Z(V)$, $\langle u \rangle \triangleleft G$, що неможливо. Отже, при $\alpha = 3$ має місце суперечність. Випадок, коли U – непримарна група, розглянуто повністю.

Нехай тепер U – примарна група. Оскільки G – невідільна група, то U – силовська q -підгрупа в $G = P\lambda U$, $\Phi(P) = 1$, $|U| > |Q|$, $C_u(P)\Delta G$. Оскільки α – показник p за модулем q , то $q > 2$ і U – група одного з типів 1, 2, 5 теорема 2.2 в [1].

Нехай U – група типу 1 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$ і $Q = \langle x \rangle$. Звідси $\beta > 1$. Зрозуміло, що $C_u(P) = \Phi(\Phi(U)) = \langle x^{q^2} \rangle$. Звідси $Q = \langle x^q \rangle$, $\beta < 4$, $C_V(P) = \langle x^{q^\gamma} \rangle$, $\gamma \leq \beta$. При $\gamma = \beta$ $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G – група типу 3 розглядуваної леми.

– неїльпотентна група Міллера-Морено порядку qr , $|Q| = q$, $|y| = r$, $q \equiv 1(\text{mod } r)$, $U' = Q$. Ясно, що M – неїльпотентна група Міллера-Морено, α – показник p за модулем q , $q > 2$. При $\alpha = 2$ $p = 3$. Нехай $V = P\lambda < y >$. Зрозуміло, що $C_Q(P) = 1$. Якщо $C_u(P)$ містить $< y >$, то $< y > \Delta U$, що неможливо. Отже, $C_{< y >}(P) = C_u(P) = 1$. При $\alpha = 3$ за теоремою 3.4 в [1] $G/P = U$ – дедекіндова група, що не так. Отже, $\alpha = 2$. Ясно, що U підгрупа в $\text{Aut } P$. За теоремою 2.3 в [1] G – дисперсивна група і тому при $r = p$ одержимо, що $P\lambda < y >$ – силовська нормальна p -підгрупа в G . Але тоді $< y > \Delta U$, що не так. Отже, $r \neq p$, V – неїльпотентна група і $V \ntrianglelefteq G$. За теоремою 2.2 в [1] V – група лише типу 6 цієї теореми і V – мінімальна неметациклічна група типу 6 теореми 3.3 в [1]. Звідси V та G задовольняють умову теореми 3.4 в [1] і G – група одного з типів 1,2 огаданої теореми. Але тоді $M \in G'$ – ільпотентна група, що неможливо. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 2.2 в [1].

Нехай U – група типу 6 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = R\lambda < y >$ – неїльпотентна група Міллера-Морено, $|R| = r^r$, $|y| = t^\Delta$, $\Delta > 0$, r і t – рівні прості числа, $R \times < y^t > \Delta G$. Звідси $R\Delta G$, $< y^t > \Delta G$. Ясно, що $< y > \Delta U$. Покладемо $V = P < y >$. Якщо $V\Delta G$, то $V \cap U = \Phi(P) < y > \Delta U$, $V \cap U = U$ і $G = V$. Звідси $\Phi(P) = R$, $|R| = p \neq t$, $G = P\lambda < y >$, $p \equiv 1(\text{mod } t)$, $p > 2$, $y^t \in Z(G)$. Оскільки $Q \in U$, $P\lambda Q$ – група Шмідта і $y^t \in Z(G)$, то $Q = < y > i M = G$, що не так. Звідси $V \ntrianglelefteq G$. При $t = p$ $r = q$, R – ненормальна в G силовська q -підгрупа і оскільки G – дисперсивна група, то V нормальна силовська p -підгрупа в G , що неможливо. Отже, $p \neq t$ і V – група типу 6 теореми 2.2 в [1]. Зрозуміло, що $V < G$. Тоді $R \notin P$. Звідси $r \neq p$, G' містить неїльпотентну підгрупу $P\lambda R$. Тепер знову V та G задовольняють умову теореми 3.4 в [1], за твердженням якої G' – ільпотентна група, що не так. Таким чином, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Оскільки M – ненадрозв'язана група Шмідта, то показник p за модулем q більше 1. Тому $Q \cap U$ – не 2-група. Нехай U – неспримальна група. Звідси U може бути лише підгрупою типу 2 чи 4 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = < y > \times < z >$, $< y >$ – q -група, $|z| = r$, q і r – рівні прості числа, $y^q \in Z(G)$. Зрозуміло, що $M = P\lambda < y >$, $Q = < y >$. Якщо $z \in \Phi(P)$, то $G = M$, що не так. Отже, $< z > \cap P = \Phi(P) = 1$ і P – елементарна абелева група.

Припустимо, що $r = p$. Тоді $P\lambda < z >$ – ненормальна в G силовська p -підгрупа, комутант якої власна підгрупа в P і нормальна в G . Оскільки P – мінімальна нормальна підгрупа в M , то $[P, < z >] = 1$. Тому в G

Нехай $\beta > \gamma$. Тоді в недедекіндовій групі G існує підгрупа $P \times \langle x^{\gamma} \rangle$. За теоремою 2.3 в [1] $\alpha = 2$, $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G – група типу 3 розглядуваної леми.

Нехай U – група типу 2 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = |z| = q$. Ясно, що $Q \in U$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle x \rangle$. Покладемо $V = P\lambda \langle z \rangle$. Ясно, що P і U – нециклічні елементарні абелеві підгрупи в G . В силу [4] G не є групою Фробеніуса. Тому можна вважати, що $V = P\lambda \langle z \rangle$ не є групою Фробеніуса і $V\Delta G$. Ясно, що $C_u(P) = 1$ і тому V – нільпотентна група. Оскільки V не є групою Фробеніуса, то існує $u \in P$, $|u| = p$, $[u, z] = 1$. Тоді $u \in Z(V)\Delta G$ і $Z(V) < P$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 2.2 в [1].

Нехай U – група типу 5 теореми 2.2 в [1]. Тоді G містить підгрупу $P \times D$, де D – група типу (q, q) . Оскільки P містить підгрупу типу (p, p) , то за теоремою 2.3 в [1] одержимо нільпотентність групи G , що не так і, значить, U не може бути групою типу 5 теореми 2.2 в [1]. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай G – група одного з типів 1 – 8 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G – скінченна нільпотентна група. Покажемо, що G – УЩН[]-група. Для груп G кожного з типів 1, 2 це встановлено в теоремі 3.4 в [1]. Група G кожного з типів 3 – 8 має вигляд $G = P\lambda C$, $G' = P$, $|P| \in \{p^2, p^3\}$, $C' = 1$ і G – група одного з типів 1 – 3 теореми 2.2.1 в [2] і тому G – метагамільтонова група. Далі достатність перевіряється безпосередньо, але потребує об'ємних викладок. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2. Скінченні нільпотентні метациклічні УЩН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r – необов'язково різні непарні прості числа, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q – просте число, $p \equiv 1(\text{mod } q)$, $r \equiv 1(\text{mod } q)$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r – прості числа, $p \equiv 1(\text{mod } q)$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^{\beta}} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1(\text{mod } q)$, $p \equiv 1(\text{mod } r)$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, x \rangle$

– група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle x \rangle \ltimes \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle, \langle x \rangle = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай G – досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 3.2 в [1] і може бути ненільпотентною групою одного з типів 1 – 16 вгаданої теореми. Легко бачити, що G – група лише одного з типів 12 – 16 теореми 3.2 в [1] і тому G – група одного з типів 1 – 5 леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 3.2 в [1]. Лема доведена.

Л е м а 3. Скінченні ненільпотентні мінімальні неметациклічні групи G , у яких всі підгрупи Шмідта надрозв'язні, вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle, \langle b \rangle = \langle a \rangle$, $\langle b \rangle, \langle x \rangle = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle, \langle x \rangle = \langle a \rangle$, $\langle b \rangle, \langle x \rangle = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – квазіцентральна підгрупа в G ;

3) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle x \rangle \ltimes \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^2$, $|z| = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle, \langle x \rangle = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай G – досліджувана група. Тоді вона задовольняє умову теореми 3.3 в [1] і може бути лише ненільпотентною групою одного з типів 8 – 10 цієї теореми. Звідси G – група одного з типів 1 – 3 розглядуваної леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 3.3 в [1]. Лема доведена.

Л е м а 4. Скінченні ненільпотентні УЩН[]-групи G , що містять власні ненільпотентні мінімальні неметациклічні підгрупи і в G надрозв'язні всі підгрупи Шмідта, вичерпуються групами типу $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \ltimes \langle x \rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \ltimes \langle x^q \rangle$ та $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \ltimes \langle x^r \rangle$ – повільні мінімальні неметациклічні групи.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай G – досліджувана група. Тоді G містить власну ненільпотентну мінімальну неметациклічну підгрупу C , у якій, як і в G , всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Зрозуміло, що C – задовольняє умову леми 3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3

огоданої леми. Звідси $C = P Q$, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $a = p$, $|b| \in \{1, p\}$, p – непарне просте число, Q – силовська q -підгрупа в C , q – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle, Q = \langle a \rangle$, $\langle b \rangle, Q = \langle b \rangle$, $N_C(Q) = Q$. За теоремою 3.4 в [1] $C \Delta G$. За лемою Фраттіні [3] $G = CU = P\lambda U$, де $U = N_G(Q)$, $Q < U$, $Q \not\Delta U$, $U \not\Delta G$ і U – підгрупа одного з типів 1 – 6 теорему 2.2 в [1], яка не містить власних неабелевих підгруп. Тому $Q' = 1$. Але тоді C – група лише одного з типів 1, 2 леми 3 і $Q = \langle y \rangle$, $|y| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|b| = p$.

Припустимо, що G – надрозв'язна група. Тоді, без порушення загальності можна вважати, що G містить ненільпотентну підгрупу $V = \langle a \rangle \lambda U$. Зрозуміло, що $G' = P$. Якщо $V \Delta G$, то G/V – абелева група і тому $V \geq G'$, що не так. Отже, $V \not\Delta G$. Звідси V – група одного з типів 2, 6 теорему 2.2 в [1]. Оскільки $\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle < V$, то V – лише група типу 6 огаданої теореми. Тому $V = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $|x| = q^\alpha$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle \geq \langle y \rangle$. Нехай $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Тоді $C = G$, що неможливо. Звідси $y \in \langle x^q \rangle$. Ясно, що $Q \not\Delta G$. Із надрозв'язності групи G випливає, що $\langle a \rangle \Delta G$, $\langle b \rangle \Delta G$ і в G існують ненільпотентні ненормальні підгрупи $\langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $\langle b \rangle \lambda \langle x \rangle$, які, очевидно, лише групи типу 6 теорему 2.2 в [1]. Але тоді, $[a, x^q] = [a, y] = [b, x^q] = [b, y] = 1$, що неможливо. Отже, G – ненадрозв'язна група.

Оскільки всі підгрупи Шмідта в G надрозв'язні, то за теоремою 2.2 в [1] U – метациклічна підгрупа. Нехай $S = C_u(P)$. Покажемо, що $|S| \in \{1, t\}$, t – просте число. Дійсно, в протилежному випадку за лемою 2.5 в [1] G містить підгрупу $P \times S$ і P – квазіцентральна підгрупа в G . Звідси G – надрозв'язна група, що не так. Отже, $|S| \in \{1, t\}$. Оскільки в підгрупі U типу 5 теорему 2.2 в [1] U містить нормальну в G неединичну підгрупу непростого порядку і ця підгрупа належить S , то U – група одного з типів 1 – 4, 6 теорему 2.2 в [1].

Нехай U – підгрупа типу 6 теорему 2.2 в [1]. Тоді $U = R\lambda \langle x \rangle$, $R\lambda \langle x^q \rangle \Delta G$. Звідси за попереднім $|R\lambda \langle x^q \rangle| = t$ і, означає, $|R| = t = r$, $|x| = q$. Отже, $G = (P \times R)\lambda \langle x \rangle$. За умовою $P\lambda \langle x \rangle$ містить тільки надрозв'язні групи Шмідта. Тому, без порушення загальності можна вважати, що $\langle a \rangle, \langle x \rangle \in \langle a \rangle$, $\langle b \rangle, \langle x \rangle \in \langle b \rangle$ і G – надрозв'язна група, що суперечить вибору G . Отже, U – група одного з типів 1 – 4 теорему 2.2 в [1].

Нехай U – підгрупа типу 4 теорему 2.2 в [1]. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| = r$ і $\langle x^q \rangle \times \langle z \rangle \Delta G$. За попереднім, $|x'| = 1$ і $G = (P\lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$ – надрозв'язна група, що суперечить вибору G .

Отже, U не може бути групою типу 4 теореми 2.2 в [1].

Легко бачити, що G – надрозв'язна група, якщо U – група типу 3 теореми 2.2 в [1].

Нехай U – підгрупа типу 2 теореми 2.2 в [1]. Якщо U – примарна група і U не є групою типу 1 теореми 1.2.2, то $|y| = |z| = q$. В силу [4] без порушення загальності можна вважати, що $[P, \langle z \rangle] \neq P$. Звідси $P\lambda \langle z \rangle$ має неодиначний центр, що належить P . Можна вважати, що $[a, z] = 1$. Але тоді $\langle a \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle a \rangle$ – надрозв'язна група. Звідси і G – надрозв'язна група, що не так. Нехай тепер U – неабелева група типу 2 теореми 2.2 в [1]. Тоді $U = \langle y \rangle \lambda \langle z \rangle$, $|y| = q$, $|z| = r$, $\langle y \rangle, \langle z \rangle = \langle y \rangle$. Покладемо $V = P\lambda \langle z \rangle$. Зрозуміло, що $V \triangleleft G$, $\langle z \rangle \not\triangleleft \Delta U$, $C_u(P) = 1$. Оскільки G – дисперсивна група (теорема 2.3 в [1]), то V – непримарна група і тому $p \neq r$. Звідси V – ненільпотентна група. Оскільки $|P| = p^2$ і $V \triangleleft G$, то V – підгрупа типу 6 теореми 2.2 в [1]. Але тоді V – ненадрозв'язна група Шмідта, що неможливо за умовою леми. Таким чином, $U' = 1$, тобто $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $|y| = q$, $|z| = r$, q і r – різні прості числа.

Нехай $V = P\lambda \langle z \rangle$ – примарна група, тобто $p = r$. Якщо $V' = 1$, то $V' = \langle c \rangle \in P$, $|c| = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle c \rangle$ – надрозв'язна група. Звідси і G – надрозв'язна група, що неможливо. Отже, $V' = 1$. Але тоді $G = (P\lambda \langle y \rangle) \times \langle z \rangle$ – надрозв'язна група, що не так. Звідси, $p \neq r$ і $V' \neq 1$. Оскільки підгрупи Шмідта в G надрозв'язні, то $P\lambda \langle z \rangle$ – надрозв'язна група.

Нехай V не є групою Фробеніуса. Тоді [4] $c \in P$, $|c| = p$, $[c, z] = 1$ і $\langle c \rangle = Z(V)$. Звідси $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle c \rangle$ – надрозв'язна група. Тому і G – надрозв'язна група, що не так. Отже, V – група Фробеніуса. Зрозуміло, що $U = \langle x \rangle$, $|x| = qr$ і тому $C = P\lambda \langle x' \rangle$, $P\lambda \langle x' \rangle = P\lambda \langle z \rangle = V$ – ненільпотентна група Фробеніуса, у якій всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тому V – група типу 1 леми 3.3 в [1] і G – група в розглядуваній лемі.

Нехай U – примарна циклічна підгрупа типу 2 теореми 2.2 в [1] або підгрупа типу 1 цієї теореми. Тоді $U = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $x^{q^2} \in Z(G)$, $y \in \langle x \rangle$. Якщо $\langle y \rangle = \langle x \rangle$, то $C = G$, що не так. Отже, $y \in \langle x^q \rangle$ і тому $\beta > 1$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $||\langle a \rangle, (\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle)|| > 2$. За означенням УШН[]-груп $[\langle a \rangle, (\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle)] \in \Delta G$ і $N \cap P = \langle a \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ – надрозв'язна група і тому G – надрозв'язна група, що не так. Отже, $\beta = 2$ і G – група в лемі. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена. $\square$

Достатність. Нехай $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ – група в розглядуваній лемі. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$ – ненадрозв’язна група, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – силовська p -підгрупа в G . Звідси P – мінімальна нормальна підгрупа в G . Оскільки $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$ і силовські підгрупи в G абелеві, то всяка підгрупа Шмідта в G надрозв’язна. Покажемо, що G – УЩН[]-група, тобто для $\| [A, B] \| > 2$ $[A, B] \in N \Delta G$. Якщо $A \Delta G$ чи $B \Delta G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\Delta G$, $B \not\Delta G$, $A \neq 1$, $G' \not\subseteq B$. Оскільки $|G|$ є добуток чотирьох простих чисел, то B є добуток трьох простих чисел. Звідси $|B| = pqr$. Отже, $G = PB$, $P \cap B = P_1 \Delta G$, $|P_1| = p$, що суперечить мінімальності P в G . Таким чином, G – УЩН[]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 5. Нехай G – скінченна невідліпотентна УЩН[]-група, у якій всі підгрупи Шмідта надрозв’язні. Тоді всі силовські підгрупи в G метациклічні.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Припустимо, що G містить мінімальну неметациклічну p -підгрупу C . Тоді C – підгрупа одного з типів 1 – 5 теореми 3.3 в [1]. За теоремою 3.4 в [1] $C \Delta G$ і G/C – дедекіндова група. Звідси $G = P \lambda D$, P – силовська p -підгрупа в G , D – її холловське дедекіндове p' -доповнення. Оскільки G – невідліпотентна група, то $D \not\Delta G$. Звідси D містить q -елемент x такий, що $[P, \langle x \rangle] \neq 1$, $p \neq q$ – просте число і $[P, \langle x^q \rangle] = 1$. Покладемо $V = P \lambda \langle x \rangle$. Ясно, що V – невідліпотентна група і V містить підгрупу Шмідта $S = R \lambda \langle d \rangle$, де $R = P \cap S$, $\langle d \rangle$ – ненормальна силовська q -підгрупа в S . Оскільки S – надрозв’язна група Шмідта, то $|R| = p$ і $p \equiv 1 \pmod{q}$. Ясно, що $\langle d \rangle$ належить деякій силовській q -підгрупі в V , яка спряжена в $\langle x \rangle$ і $x^q \in Z(V)$. Звідси $\langle d \rangle$ – силовська q -підгрупа в V . Тому в подальшому без порушення загальності можна вважати, що $x = d$. Зрозуміло, що C – група одного з типів 1, 2 теореми 3.3 в [1]. Оскільки G/C – дедекіндова група, то $R \subset C$.

Нехай спочатку C – група типу 1 теореми 3.3 в [1] і $C' = 1$. Ясно, що $p > 2$. За теоремою Машке [3] $C = R \times Y$, де $[Y, \langle x \rangle] \in Y$, Y – група типу (p, p) . Покажемо, що $Y = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, де $\langle y \rangle, \langle x \rangle \in \langle y \rangle$, $\langle z \rangle, \langle x \rangle \in \langle z \rangle$. Якщо $[Y, \langle x \rangle] = 1$, то доводжуване твердження очевидне. Нехай $[Y, \langle x \rangle] \neq 1$. Тоді, як і раніше, в $Y \lambda \langle x \rangle$ існує підгрупа Шмідта $S_1 = R_1 \lambda \langle x \rangle$, $|R_1| = p$, $Y = R_1 \times R_2$, $[R_2, \langle x \rangle] \in R_2$, $|R_2| = p$. Покладемо $R_1 = \langle y \rangle$, $R_2 = \langle z \rangle$ і будемо мати доводжуване твердження. Тепер ясно, що в G існують підгрупи $(R \times \langle y \rangle) \lambda \langle x \rangle$,

$(R \times \langle z \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $Y \lambda \langle x \rangle$, які не можуть бути підгрупами жодного з типів 1 – 6 теореми 2.2 в [1] і тому вони нормальні в G . Зрозуміло, що перетин вгаданих підгруп співпадає з $\langle x \rangle$ і тому $\langle x \rangle \triangleleft G$, що не так. Отже, $C' \neq 1$. Тоді $C = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = |a| = |b| = p$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$. Зрозуміло, що $C' = \langle c \rangle \triangleleft G$. Покажемо, що C містить підгрупу $Y = \langle c \rangle \times \langle y \rangle$, де $|y| = p$, $[\langle y \rangle, \langle x \rangle] \in \langle y \rangle$. Дійсно, оскільки $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $C \triangleleft G$, то в $G / \langle c \rangle$ існує підгрупа $C / \langle c \rangle \lambda \langle x \langle c \rangle \rangle$. Якщо вгадана підгрупа нільпотентна, то існує підгрупа $Y / \langle c \rangle$ така, що $[Y / \langle c \rangle, \langle x \langle c \rangle \rangle] \in Y / \langle c \rangle$ і $|Y / \langle c \rangle| = p$. Звідси $|Y| = p^2$, $[Y, \langle x \rangle] \in Y$. За теоремою Машке [3] $Y = \langle c \rangle \times \langle y \rangle$, де $[\langle y \rangle, \langle x \rangle] \in \langle y \rangle$. Нехай $C / \langle c \rangle \lambda \langle x \langle c \rangle \rangle$ – не нільпотентна група. Тоді, як і раніше, вона містить підгрупу Шмідта $Y / \langle c \rangle \lambda \langle x \langle c \rangle \rangle$ і $|Y / \langle c \rangle| = p$. Звідси $|Y| = p^2$, $[Y, \langle x \rangle] \in Y$. За теоремою Машке [3] $Y = \langle c \rangle \times \langle y \rangle$, $[\langle y \rangle, \langle x \rangle] \in \langle y \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $y = a$. В G існує підгрупа $V_1 = Y \lambda \langle x \rangle$. Ясно, що V_1 не може бути підгрупою жодного з типів 1 – 6 теореми 2.2 в [1] і тому $V_1 \triangleleft G$. За теоремою Машке [3] $C / \langle c \rangle = Y / \langle c \rangle \times Z / \langle c \rangle$, $[Z / \langle c \rangle, \langle x \langle c \rangle \rangle] \in Z / \langle c \rangle$. Як і раніше, $[Z, \langle x \rangle] \in Z$, $Z = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \in \langle b \rangle$. В G існує підгрупа $V_2 = Z \lambda \langle x \rangle$. Як і для V_1 , можна показати, що $V_2 \triangleleft G$. Ясно, що $V_1 \cap V_2 = V_3 = \langle c \rangle \lambda \langle x \rangle \triangleleft G$. Покладемо $N = C \lambda \langle x \rangle$. Оскільки $S \in N$, то N – не нільпотентна група. За лемою Фраттіні [3] $N = V_3 U$, де $U = \langle x \rangle \times C_1 = N_N(\langle x \rangle)$, $C_1 = C \cap U$, $C_1 \triangleleft C$. Звідси $\langle c \rangle \cap C_1 = 1$, $C = \langle c \rangle \times C_1$, що неможливо. Отже, C не може бути групою типу 1 теореми 3.3 в [1].

Нехай C – група типу 2 теореми 3.3 в [1]. Тоді $C = A \langle u \rangle$, де $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |u| = 9$, $|b| = 3$, $[a, u] = b$, $[b, u] = a^3 = u^6$, $w(C) = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle = C' \triangleleft G$, $\langle a^3 \rangle = Z(C) \triangleleft G$. За теоремою Машке [3] можна вважати, що $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \in \langle b \rangle$. Ясно, що A – єдина абелева максимальна підгрупа в G . Звідси $A \triangleleft G$. За теоремою Машке [3] без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] \in \langle a \rangle$.

Припустимо, що $[a, x] \neq 1$. Тоді G містить не нільпотентну підгрупу $N_1 = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$. За теоремою 2.2 в [1] $N_1 \triangleleft G$. Звідси $C \cap N_1 = \langle a \rangle \triangleleft C$, що неможливо. Отже, $[a, x] = 1$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $R = \langle b \rangle$. Покладемо $a^3 = c$ і $N = C \lambda \langle x \rangle$. Тоді $\langle c \rangle \triangleleft N$, N – не нільпотентна група, $\Phi(C) = w(C) \in A$, $A / \Phi(C) \triangleleft N / \Phi(C)$. За теоремою Машке [3] $C / \Phi(C) = A / \Phi(C) \times Y / \Phi(C)$, де $|Y / \Phi(C)| = 3$, $[Y / \Phi(C), \langle x \Phi(C) \rangle] \in Y / \Phi(C)$. Звідси $[Y, \langle x \rangle] \in Y$. В N існує підгрупа

$N_1 = Y\lambda < x >$. Ясно, що $[C : Y] = 3$ і всі підгрупи о G метациклічні, $|Y| = 27$, $\Phi(C) = \langle b \rangle \times \langle c \rangle \in Y$, $c \in Z(N_1)$, $Y / \langle c \rangle$ – абелева група. Звідси $Y' \in \langle c \rangle$. В підгрупі C всі максимальні підгрупи окрім A , неабелеві. Тому $Y = \langle y \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|y| = 9$, $y^3 = c$. За теоремою Машке [3] $Y / \langle c \rangle = \langle b \langle c \rangle \rangle \times Z / \langle c \rangle$, де $[Z / \langle c \rangle, \langle x \langle c \rangle \rangle] \in Z / \langle c \rangle$. Звідси $Y = Z\lambda \langle b \rangle$, $[Z, \langle x \rangle] \in Z$. Оскільки Y – метациклічна група, то $Z = \langle z \rangle$, $|z| = 9$, $z^3 = c$. Оскільки $[c, x] = 1$, то за відомим результатом [5] $[z, x] = 1$. Очевидно, що $C = A \langle z \rangle$. Знову в силу відомого результату [5] $[a, x] = [z, x] = 1$. Звідси випливає, що $[C, \langle x \rangle] = 1$, що не так. Отже, G не може містити примарних мінімальних неметациклічних підгруп і тому всі силовські підгрупи о G метациклічні. Лема доведена.

Т е о р е м а. Ненільпотентні локально ступінчасті УШН[]-групи G є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами типів:

i) Метагамільтонові групи:

i) Метациклічні:

1) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $a = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r – прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p < 3$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $b = qr$, q і r – рівні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) Мінімальні неметациклічні ненадрозв'язні групи Шмідта:

3) $G = P\lambda \langle x \rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

4) $G = P\lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 – показник p за модулем q , p і q – різні прості числа;

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

5) $G = P\lambda \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q, r – попарно різні прості числа, α – показник p за модулем q , α – показник p за модулем r , $P\lambda \langle x^q \rangle$ та $P\lambda \langle x^r \rangle$ – групи Міллера-Морено;

6) $G = P\lambda \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, α – показник p за модулем q , p і q – різні прості числа, $P\lambda \langle x^q \rangle$ – група Міллера-Морено, $\alpha + \beta < 6$;

7) $G = P\lambda \langle x \rangle$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$, p і q –

ріоні прості числа;

8) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = p$, $|x| = q$, $|z| = r$, p, q, r – прості числа, $p \neq q$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ – група Міллера-Морено, 2 – показник p за модулем q , $p \neq 3$, $q > 2$;

II) Неметагамільтонові групи:

i) Метациклічні:

9) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r – необов'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

11) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

ii) Надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи:

12) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – квазіцентральна підгрупа в G ;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle x \rangle) \lambda \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^2$, $|z| = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, p – просте число, $p \neq 3$, $|x| = q$ – просте число, 2 – показник p за модулем q , $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \lambda \langle x \rangle$ – неінволютивна група Міллера-Морено;

16) $G = (R \times P) \lambda \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|x| = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, 2 – показник p за модулем q , $q > 2$, $R \lambda \langle x \rangle$ і $P \lambda \langle x \rangle$ – неінволютивні групи Міллера-Морено;

17) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x^q \rangle$ та $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x^r \rangle$ – мінімальні неметациклічні групи.

Д о в е д е н н я . Н е о б х і д н і с т ь . Нехай G задовольняє умову теореми. Якщо G – метациклічна група, то вона задовольняє умову леми

2 і є групою одного з типів 1 – 5 згаданої леми, а тому G – група одного з типів 9,1,2,10,11 розглядуваної теореми. Тому в подальшому будемо вважати, що G – неметациклічна група. Оскільки G – ненільпотентна група, то вона містить підгрупи Шмідта. Можливі випадки: 1) G містить ненадрозв'язну підгрупу Шмідта; 2) всі підгрупи Шмідта в G надрозв'язні.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 8 згаданої леми. Тоді G – група одного з типів 15,16,3 – 8 розглядуваної теореми відповідно. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Якщо всі власні підгрупи в G метациклічні, то G задовольняє умову леми 3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 згаданої леми. Тому G – група одного з типів 12 – 14 розглядуваної теореми.

Нехай G містить власні неметациклічні підгрупи. За лемою 5 мінімальні неметациклічні підгрупи в G не можуть бути нільпотентними групами. Тому G задовольняє умову леми 3, за твердженням якої всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Звідси G задовольняє умову леми 4 і тому G – група типу 17 розглядуваної леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай G – група одного з типів 1 – 17 теореми. Зрозуміло, що G – ненільпотентна локально ступінчаста і навіть скінченна дисперсивна група. Покажемо, що G – УЩН[]-група. Дійсно, для метациклічних груп це встановлено в лемі 2, для груп G , що мають ненадрозв'язні групи Шмідта в лемі 1, для груп G типів 12 – 14 це встановлено в лемі 3, а для груп G типу 17 – в лемі 4. Достатність доведена.

1. Семко М.М., Кузеній М.Ф. Групи в деяких умовах цілості нормальності для підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 61 с.
2. Кузеній М.Ф., Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
3. Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп: 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
4. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1967. – 111 с.
5. Холл М. Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.

ЗМІСТ

1. Блажівський А.М. Зображення сум сім'ї поліпараметричних функціональних рядів методом гібридного інтегрального перетворення Лежандра 1-го роду-Канторовича-Лебедева	3
2. Верпатова Н.Ю. Деякі властивості узагальнено - факторизованих груп	9
3. Бігак В.М., Юовяк М.Й., Ясінський А.В. Розв'язок плоскої задачі термомпружності для прямокутної області	11
4. Vlasenko L.A. Existence and uniqueness theorems for a degenerate linear differential delay equation	27
5. Гордецький В.Д. Загальний вигляд наближених бімодальних розв'язків рівняння Больцмана типу розбиття одиниці	30
6. Городецький В.В., Ленюк О.М. Про граничні властивості гладких розв'язків еволюційних рівнянь параболічного типу з особливостями в коефіцієнтах	39
7. Дмитриєва М.В. К приближенному решению интегро-дифференциальных уравнений Винера-Хопфа	53
8. Кабалинц П.С. О единственности и существовании гладких решений сингулярного дифференциального уравнения с запаздываниями	57
9. Конет І.М. Стационарні температурні поля в суцільних ортотропних парашютних тілах	62
10. Константинович А.В. Структура, свойства и устойчивость малых систем. Часть I: Структура и свойства ионных сферических мицелл поверхностно-активных веществ	70
11. Кракович Л.О. Гібридні інтегральні перетворення типу Лежандра 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Канторовича-Лебедева на трискладовому сегменті	93
12. Кузьмич В.И. Плотная сходимость воле точки и теоремы типа Арцела-Асколи	98
13. Кушнір В.П. Про стабілізацію розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загалюваннями	111
14. Ленюк М.П. Головні розв'язки для модифікованого рівняння Гельмгольца в ортотропних півсферичних просторах з півсферичною порожниною	120
15. Ленюк М.П., Лусте І.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення типу Ганкеля 1-го роду-Канторовича-Лебедева на полярній осі	125
16. Мельник И.И., Шилова О.К. Теорема о разложении по собственным функциям одного дифференциального оператора четного порядка	133

17. Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення Ганкеля 2-го роду-Фур'є-Бесселя- ... -Бесселя-Фур'є	139
18. Нагнибіда М.І. Про один спеціальний квазіістеновевий базис простору аналітичних у кругі функцій	145
19. Нечипорук В.В., Баб'юх Д.П., Скін Б.В. Просторові дисипативні структури в електрохімічних системах тверді електроди – рідкий електрод	149
20. Плуткин Я.Д. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи в банаховом пространстве	160
21. Rutkas A.G. On solvability of a nonlinear integral equation	165
22. Самойленко В.Г. Некоторые спектральные свойства оператора энергии для бесконечной системы в магнитном поле	169
23. Семко М.М. Неніліпотентні групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп	175
24. Слюсарчук В.Е. $\mathcal{P}$ -непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики	188
25. Філевич П.В. Оцінка типу Вілла-Валірона для випадкових аналітичних у кругі функцій	227
26. Філіпчук М.П. Чисельно-аналітичний метод дослідження двоточкових крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь із змінним запізненням	238
27. Филонюк И.А. Нелокальные преобразования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений	252
28. Цокурєнко А.А. К вопросу оценки погрешности одной системы	259
29. Цокурєнко А.А. Надежность одной математической модели редукции	263
30. Чижи́ков І.Е. До оберненої задачі теорії розподілу значень для функцій, аналітичних у півплощині	270
31. Ясинський Є.В. Абсолютна стійкість в середньому квадратичному стохастичного диференціального рівняння з нелінійним оберненим зв'язком	282

Хроніка подій

32. Чибіряков В.К., Ленюк М.П., Сотніченко М.А. Школа-семінар "Математичні методи в науково-технічних дослідженнях"	289
33. Садов'як А.М., Семенюк А.Д., Сопронюк Ф.О. Історія кафедри математичних проблем управління і кібернетики	290

Наукове видання

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Збірник наукових праць

Випуск 15

Редактор Н.І.Коваленко

Підл. до друку 18.06.97. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 18,0. Ум. фарбо-відб. 18,0. Обл.-вид.арк. 12,9.
Тираж 100 пр. Зам. 121.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3