СТУДЕНТСЬКІ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
ЗАПИСКИ

№ 1

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ

УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ
ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ОБЛІКУ АНАЛІЗУ ТА АУДИТУ

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

№ 1

Ірпінь
2021

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54
С 88

Рекомендовано до друку
Вченою радою ННІ обліку аналізу та аудиту

С 88 **Студентські фізико-математичні записки :** збірник наукових праць. – Ірпінь : Університет ДФС України, 2021. – № 1. – 82 с.

Збірник складається з наукових робіт магістрів кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України, присвячених сучасним проблемам математики та методичним принципам її викладання.

Для студентів математичних спеціальностей.

Матеріали розміщено у авторській редакції.
Відповідальність за зміст матеріалів, їх відповідність вимогам чинного правопису і достовірність фактів та статистичних даних несуть автори та їх наукові керівники.

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54

ЗМІСТ

С. В. Богдан,
магістрант спеціальності «Математика»
Науковий керівник:
М. М. Семко,
доктор фізико-математичних наук, професор
(Університет ДФС України, м. Ірпінь)

ПРО ГРУПИ З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННИХ ПІДГРУП

Анотація. *Будемо говорити, що неабелева група G має щільну систему нормальних нескінченних підгруп, якщо для будь-якої такої пари нескінченних підгруп A < B, що A не максимальна в B, існує нормальна в G підгрупа N, розташована між A і B, тобто A ≤ N ≤ B (УЩН[НП]-група). В даній роботі отримано опис розв’язних недедекіндових УЩН[НП]-груп.*

Ключові слова: *нескінченна підгрупа, нормальна підгрупа, квазіциклічна група, дедекіндова група, періодична група.*

Annotation. *We will say that a non-Abelian group G has a dense system of normal infinite subgroups if for any such pair of infinite subgroups A <B that A is not maximal in B, there exists a normal subgroup N in G located between A and B, ie A ≤ N ≤ B (CDN[NP]-group). In this paper, we describe solvable non-dedendend CDN[NP]-groups.*

Keywords: *infinite subgroup, normal subgroup, quasicyclic group, dedekind group, periodic group.*

Вивчення груп із заданими властивостями підгруп поповнює конкретну базу теорії груп і збагачує її новими результатами Цей напрямок вивчення груп бере свій початок з груп Гамільтона, груп Міллера-Морено, груп Шмідта.

Починаючи з класичних робіт Р. Дедекінда [1] та Р. Бера [2], у яких описані дедекіндові групи (групи, всі підгрупи яких нормальні), почалося вивчення довільних груп *G*, у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності. Цей напрямок є одним з важливих в теорії груп. Його головною метою є опис узагальнень дедекіндових груп. Одне із таких узагальнень здійснюється шляхом звуження системи підгруп Σ, що є нормальними в усій групі.

У 1968 році А. Манн [3] почав вивчати групи, у яких нормальні не всі підгрупи системи Σ, а ті групи G, що мають нормальну підгрупу N, розміщену між будь-якими двома підгрупами A і B із Σ, де A – власна немаксимальна підгрупа з B. У нього Σ – система всіх підгруп групи G.

Групи, введені А. Манном, С. М. Черніков [4] у 1975 році назвав групами з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Він же ввів поняття умов щільності і строгої щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т.д.) системи підгруп Σ. Властивість V підгруп групи G називається щільною (строго щільною) по відношенню до системи підгруп Σ, якщо для будь-яких підгруп A і B із Σ, де A – власна немаксимальна підгрупа з B, існує така підгрупа H із властивістю V, що $A \leq H \leq B$ ($A < H < B$). Ці поняття широко використовувалися в роботах С. М. Чернікова і його учнів.

Різноманітні умови щільності нормальності для системи підгруп Σ групи G у роботах М.М. Семка [5 – 14] базуються на поняттях: відрізка ($[A; B]$) –, інтервалу ($(A; B)$) –, напівінтервалу ($(A; B]$) –, напівінтервалу ($[A; B)$) підгруп групи G, кожний із яких є множиною всіх підгруп X групи G таких, що A і B із Σ, A – підгрупа з B і відповідно: $A \leq X \leq B$, $A < X < B$, $A < X \leq B$, $A \leq X < B$. Потужність відрізка, інтервалу, півінтервалу підгруп групи G називається його модулем, порядком або довжиною і позначається відповідно: $|[A; B]|$, $|(A; B)|$, $|(A; B]|$, $|[A; B)|$. За означенням $|[A; B]| \geq 1$, тобто A – підгрупа з B, при $|[A; B]| > 1$ A – власна підгрупа з B, при $|[A; B]| > 2$ A – власна немаксимальна підгрупа з B.

У цій термінології А. Манн розглядав групи, у яких Σ – система всіх підгруп групи G і для кожного відрізка $[A; B]$ такого, що $|[A; B]| > 2$ справедливе співвідношення $[A; B) \ni N \lhd G$.

М. М. Семко [5 – 14] описав локально ступінчасті групи G, у яких $\left|[A; B]\right| > 1$, Σ – система всіх підгруп групи G, $[A; B] \ni N \lhd G$ та їх підкласи.

Якщо Σ – система всіх нескінченних підгруп групи G, $\left|[A; B]\right| > 2$ і $[A; B] \ni N \lhd G$, то одержимо клас груп з умовою щільності нормальності для нескінченних підгруп (коротко *УЩН[НП]*-груп). У даній роботі доведено, що розв’язна недедекіндова УЩН[НП]-група є або скінченним розширенням квазіциклічної групи, або є центральним розширенням прямого добутку двох квазіциклічних підгруп за допомогою скінченної дедекіндової групи.

Лема 1. *Недедекіндова УЩН[НП]-група є періодичною групою.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група і нехай g – елемент нескінченного порядку із G. Покладемо $\langle g \rangle = B$, $A_1 = \langle g^4 \rangle$, $A_2 = \langle g^9 \rangle$. За означенням *УЩН[НП]*-груп $[A_1; B] \ni N_1 \lhd G$, $[A_2; B] \ni N_2 \lhd G$. Ясно, що $\langle g \rangle = N_1 N_2$ і, значить, $\langle g \rangle \lhd G$. Отже, всі нескінченні циклічні підгрупи нормальні в G. Нехай x – довільний примарний елемент із G. Тоді група G містить підгрупу $Y = \langle g \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$. Покладемо $A = \langle g^8 \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$, $B = \langle g^{32} \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$. Тоді $/[A;B]/ >2$ і за означенням *УЩН[НП]*-груп $[A; B] \ni N \lhd G$. Ясно, що $x \in N$, $N = \langle g^{2^l} \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$, $3 \leq l \leq 5$ і $Y' \leq \langle g^{2^l} \rangle$ і тому $Y' \leq \langle g^8 \rangle$. Відомо, що $x^{-1} g x = g^{-1}$, або $x^{-1} g x = g$. Звідси із умови $Y' \neq \langle g^2 \rangle$ випливає, що $x^{-1} g x = g$, $Y = \langle g \rangle \times \langle x \rangle$, $N = \langle g^{2^l} \rangle \times \langle x \rangle$ і $\langle x \rangle$ – періодична частина N. Звідси

$< x > \lhd G$ і тому в силу [1, 2] G – дедекіндова група, що не так. Отже, G – періодична група. Лема доведена.

Лема 2. *Недедекіндова розв'язна УЩН[НП]-група є черніковською групою.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. За лемою 1 G – періодична група.Припустимо, що G – нечерніковська група. Тоді в силу [4] для будь-якого g із G існує нечерніковська цілком факторизована g-допустима підгрупа F. Без порушення загальності можна вважати, що $F \cap <g> = 1$. Оскільки F – нечерніковська цілком факторизована абелева група, то легко встановити, що F містить підгрупу $F_1 = X^{\infty}_{i=1} B_i$, де B_i – допустима підгрупа відносно $<g>$, $B_i \neq 1$. Покладемо $D_1 = X^{\infty}_{к=0} B_{4к+1}$, $D_2 = X^{\infty}_{к=0} B_{4к+2}$, $D_3 = X^{\infty}_{к=0} B_{4к+3}$, $D_4 = X^{\infty}_{к=1} B_{4к}$. Зрозуміло, що D_l – допустима підгрупа відносно $<g>$, $l \in \{1,2,3,4\}$ і що $F_1 = D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4$.

Нехай $A_1 = D_1 \leftthreetimes <g>$. Покажемо, що $A_1 \lhd G$. Ясно, що в G існують підгрупи $Y_4 = (D_1 \times D_2 \times D_3) \leftthreetimes <g>$, $Y_3 = (D_1 \times D_2 \times D_4) \leftthreetimes <g>$, $Y_2 = (D_1 \times D_4 \times D_3) \leftthreetimes <g>$. Звідси випливає, що $\left|[A_1; Y_t]\right| > 2$, $t \in \{2, 3, 4\}$. За означенням *УЩН[НП]*-груп $[A_1; Y_t] \ni N_t \lhd G$. Нехай N – перетин всіх N_t. Тоді $A_1 \leq N \lhd G$. Звідси випливає, що, $N \cap (D_2 \times D_3 \times D_4) = 1$ і $N = A_1 \lhd G$. Аналогічно показуємо, що $A_2 = D_2 \leftthreetimes <G> \lhd G$. Тоді з рівності $A_1 \cap A_2 = <g>$ випливає нормальність $<g>$ в G і тому G – дедекіндова група. Суперечність. Отже, G – черніковська група. Лема доведена.

Лема 3. *Недедекіндова розв'язна УЩН[НП]-група є черніковською групою G з повною частиною, що розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 3 G – черніковська група з повною частиною R. Припустимо, що R не квазіциклічна група. Тоді R містить квазіциклічну p-підгрупу A, $R > A$, в R існує q-елемент c такий, що $/c/ = q^2$, $<c> \cap A = 1$.

Звідси в R існує підгрупа $B = A \times \langle c \rangle$. Зрозуміло, що підгрупи A та B – нескінченні, $|[A; B]| > 2$ і за означенням *УЩН[НП]*-груп $[A ; B] \ni N_1 \lhd G$. Звідси $A \lhd G$ і тому всі квазіциклічні підгрупи із R нормальні в G.

Припустимо, що $R \geq F = R_1 \times R_2 \times R_3$, де R_i – квазіциклічна підгрупа, $i \in \{1, 2, 3\}$. За теоремою 1.2.3 із [14] фактор-групи G/R_i абелеві. Оскільки $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = 1$, то група G абелева, що не так. Отже, R розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай недедекіндова розв'язна УЩН[НП]-група є черніковською групою G з повною частиною R, що розкладається в прямий добуток двох квазіциклічних підгруп.Тоді* $R \leq Z(G)$ *і G/R – скінченна дедекіндова група.*

Доведення. Нехай $R = R_1 \times R_2$, де R_i – квазіциклічна підгрупа, $i \in \{1, 2\}$. За лемою 3 підгрупи R_1 і R_2 нормальні в G.

Нехай F – довільна скінченна підгрупа із G.Очевидно, що в підгрупах R_1 і R_2 існують відповідно такі елементи r_1 і r_2, що підгрупи R_1F і R_2F немаксимальні відповідно у підгрупах $R_1 F\langle r_2 \rangle$ і $R_2 F\langle r_1 \rangle$. Тоді за означенням *УЩН[НП]*-груп:

$$[R_1F ; R_1 F\langle r_2 \rangle] \ni X \lhd G, [R_2F ; R_2 F\langle r_1 \rangle] \ni Y \lhd G.$$

Очевидно, що перетин $X \cap Y$ нормальний в G і містить підгрупу F. Оскільки група G за лемою 1 періодична, то із цього слідує, що вона локально нормальна і, значить, $R \leq Z(G)$.

Із попереднього випливає, що підгрупа $FR = (X \cap Y) R$ нормальна в G. Так як F довільна підгрупа із періодичної групи G, то фактор група G/R дедекіндова. Но тоді за лемою 3 вона скінченна. Лема доведена.

Тепер із лем 1–4 випливає наступна теорема.

Теорема. *Розв'язна недедекіндова розв'язна УЩН[НП]-група є або скінченним розширенням квазіциклічної групи, або є* *центральним розширенням прямого добутку двох квазіциклічних підгруп за допомогою скінченної дедекіндової групи.*

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Dedekind R**. *Uber Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind* // Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548–561.

2. **Baer R**. *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //* S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2.** – S. 12–17.

3. **Mann A**. *Groups with dense normal subgroups* // Israel J. Math. – 1968. – 6, № 1. – P. 13–25.

4. **Черников С. Н**. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

5. **Семко М. М**. *Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп* // Класи груп з обме-женнями для підгруп. – К.: Ін–т математики НАН України. – 1997. – С. 27–41.

6. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 789–798.

7. **Семко М. М**. *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8. – С. 1 148–1 151.

8. **Семко М. М**. *Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1 396–1 403.

9. **Семко М. М**. *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 49–53.

10. **Семко М. М**. *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 43–46.

11. **Семко М. М**. *Про будову УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1 250–1 261.

12. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих УЩН( ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 11. – С. 1 532–1 536.

13. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 383–388.

14. **Семко М. М**. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.

Наукове видання

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

№ 1

Матеріали друкуються в авторській редакції.

Здано до друку 23.12.2021. Формат 60×84/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman».
Друк. арк. 4,7.
Тираж 300 примірників. Замовлення № 986.

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром
Університету ДФС України
08200, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і

розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 5104 від 20.05.2016