Інститут педагогіки АПН України

На правах рукопису

Семко Микола Миколайович

УДК 519.41/47

ГРУПИ З УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕНЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ПІДГРУП

01.01.06 — алгебра і теорія чисел

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук



Київ — 1998

ЗМІСТ

ВСТУП.....4

РОЗДІЛ І

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ ЩН[ ]-ГРУП 14

1.1. Допоміжні результати 15

1.2. Основні означення і загальні результати 34

1.3. Деякі частинні випадки 46

1.4. Будова ЩН[ ]-груп і їх підкласів 84

Висновки до розділу І 90

РОЗДІЛ ІІ

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[ ]-ГРУП 92

2.1. Деякі корисні результати 92

2.2. Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп 125

2.3. Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп 171

Висновки до розділу ІІ 188

РОЗДІЛ ІІІ

БУДОВА УЩН( )-ГРУП ТА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН( )- І УЩН[ )-ГРУП 190

3.1. Будова УЩН( )-груп 190

3.2. Будова локально ступінчастих УЩН( ]-груп 212

3.3. Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп 231

3.4. Деякі наслідки 242

Висновки до розділу ІІІ 252

РОЗДІЛ IV

ГРУПИ З УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ

МАЙЖЕ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП 253

4.1. Попередні результати 253

4.2. Будова локально майже розв`язних груп з умовами щільності майже нормальності для різних систем підгруп 273

Висновки до розділу IV 283

ВИСНОВКИ 284

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 286

ВСТУП

Актуальність теми

Вже більше 100 років здійснюється інтенсивне вивчення груп, у яких деякі системи підгруп задовольняють певні умови (обмеження). Зазначимо, що темп і глибина таких досліджень невпинно зростають. Цей напрямок вивчення груп бере свій початок з груп Гамільтона [1], груп Міллера–Морено [2], груп Шмідта [3]. Особливу роль в подальшому розвитку цього напрямку зіграли роботи О.Ю. Шмідта [4 – 6], Р. Бера [7 – 11], О.Г. Куроша, С.М. Чернікова [12], С.М. Чернікова [13 – 31], Ф. Холла [32], Б. Неймана [33 – 34]. У цій ділянці досліджень одержано багато важливих результатів, з них найбільш яскраві можна знайти в статтях [12, 21 – 23, 25, 28, 35 – 42], збірниках наукових праць Інституту математики НАН України [43 – 61], монографіях [62 – 79].

З дедекіндових (H-) груп, тобто груп, у яких нормальні всі підгрупи, розпочалось вивчення довільних (як скінченних, так і нескінченних) груп, у яких деяка система підгруп Σ задовольняє умову нормальності (H). Опис скінченних H-груп наведено у роботі Р. Дедекінда [1], а нескінченних – у роботі Р. Бера [7]. Ці роботи започаткували важливий напрямок досліджень в теорії груп. Головною метою цього напрямку є опис узагальнень дедекіндових груп (див., наприклад, [4, 6, 21 – 23, 26, 27, 29, 73, 77, 79 – 168]). Ці узагальнення дедекіндових груп здійснюються або шляхом звуження системи підгруп Σ, що є нормальними в усій

групі, або послабленням властивості нормальності для підгруп із Σ. Серед таких узагальнень відзначимо наступні дослідження.

Перше суттєве узагальнення дедекіндових груп одержав О.Ю. Шмідт [4, 6]. Він описав скінченні групи з одним і двома класами спряжених ненормальних підгруп, а також установив нільпотентність скінченної групи, у якої нормальні всі максимальні підгрупи [4]. Скінченні групи з нормальними і-тими максимальними підгрупами вивчали Б. Хупперт (i = 3) і З. Янко (i = 4, 5) [80 – 82]. Д. Баклі [83] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі мінімальні підгрупи. Багато авторів (див., наприклад, [84, 85]) вивчали групи з скінченними класами спряжених ненормальних підгруп.

Н. Ітo [86], Н. Ітo, Й. Сеп [87] вивчали групи з скінченними класами неізоморфних ненормальних підгруп.

Зауважимо, що звуження Σ до системи всіх абелевих (A), циклічних (C) і навіть нерозкладних циклічних підгруп групи G не приводить до розширення класу дедекіндових груп. Суттєво розширюється клас дедекіндових груп при звуженні Σ до системи: нециклічних ($\overline{C}$) підгруп ($\overline{H}$-групи); нециклічних абелевих підгруп ($\overline{HA}$-групи); неабелевих ($\overline{A}$) підгруп ($H(\overline{A})$-групи).

Опис певних $\overline{H}$- і $\overline{HA}$-груп одержав Ф.М. Лиман [88 – 93].

Метагамільтонові або $H(\overline{A})$-групи ввів в розгляд Г.М. Ромаліс [94]. Різні властивості метагамільтонових груп отримали Г.М. Ромаліс та М.Ф. Сесекін [95 – 97], С.М. Черніков [26, 27, 73]. В.Т. Нагребецький [98] описав скінченні ненільпотентні метагамільтонові групи, О.О. Махньов [99] – скінченні метагамільтонові групи з нецентральним комутантом. Повний опис локально

ступінчастих метагамільтонових груп одержали М.Ф. Кузенний та автор [77, 100 – 109].

При вивченні нескінченних груп природно виділяються такі класи груп, у яких Σ звужується до системи: нескінченних підгруп (INH-групи); нескінченних абелевих підгруп (IH-групи); нескінченних неабелевих підгруп ($\overline{\text{IH}}$-групи).

Конструктивний опис INH- та IH-груп одержав С.М. Черніков [22, 23, 29, 73].

Клас $\overline{\text{IH}}$-груп вивчав С.М. Черніков [21, 26, 27, 73]. Вивчення $\overline{\text{IH}}$-груп продовжили М.Ф. Кузенний, С.С. Левіщенко, І.Я. Субботін та автор в [110 – 112]. Конструктивний опис локально ступінчастих $\overline{\text{IH}}$-груп можна знайти в [77].

У роботах Ф.М. Лимана [113 – 120] і роботі Ф.М. Лимана, Т.Г. Лелеченко [121] Σ звужується до системи: розкладних у прямий добуток двох неодиничних підгруп; максимальних абелевих підгруп рангу 1 непростих порядків; максимальних абелевих підгруп рангу 2; pd-підгруп для деякого простого числа $p \in \pi(G)$; нециклічних pd-підгруп; розкладних у прямий добуток pd-підгруп; абелевих нециклічних pd-підгруп; нескінченних pd-підгруп; нескінченних абелевих pd-підгруп.

Л.О. Шеметков вивчав скінченні групи, у яких нормальні повторні π-істино максимальні підгрупи [122, 123].

В.Т. Нагребецький [124] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі ненільпотентні підгрупи. Конструктивний опис значного узагальнення таких груп одержано в [77].

І.Я. Субботін [125 – 127] вивчав групи, у яких нормальна кожна підгрупа комутанта.

Г. Жордано [128] і А. Фаттахі [129] вивчали неабелеві локально скінченні групи, у яких кожна підгрупа або збігається з своїм нормалізатором, або нормальна. Конструктивний опис узагальнень таких груп одержано в [130 – 133].

М.С. Черніков [134, 135] описав неабелеві групи, у яких нормальні всі абелеві підгрупи, що не збігаються з своїм нормалізатором.

Л.А. Курдаченко, В.В. Пилаєв [136] описали локально майже розв'язні групи, у яких нормальна кожна підгрупа, що не має скінченної системи твірних елементів.

Ще один метод звуження системи Σ бере свій початок з робіт С.М. Чернікова [30] і Д. Кеппіта [137]. Ідея цього методу полягає в тому, що в групі G виділяється така власна підгрупа S (сепаруюча підгрупа), що кожна підгрупа Σ, яка не міститься в S, має певну властивість V. Такі групи будемо називати $V(\Sigma,S)$-групами. У випадку, коли Σ – це всі підгрупи, просто – $V(S)$-групами. Д. Кеппіт [137] та А.Ф. Бараннік [138] незалежно встановили, що $H(S)$-групи мають скінченний циклічний комутант. Повний опис $H(S)$-груп без будь-яких обмежень наведено у роботах М.Ф. Кузенного та автора [77, 139]. Т.Г. Лелеченко [140] досліджувала скінченні $H(\overline{C},S)$-групи.

Значні розширення класу дедекіндових груп виникають при переході від умови нормальності до деяких її узагальнень, як, наприклад, до квазінормальності [141], субнормальності [142, 143] (див. також [166 – 168]), нормалізаторної умови [23, 24], пронормальності [130 – 132, 144], майже нормальності [34, 145, 146] та ін.

Зупинимося на умові майже нормальності. Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається майже нормальною підгрупою

групи G, коли індекс $[G:N_G(H)]$ скінченний. Одні із перших значних узагальнень дедекіндових груп, які пов'язані з поняттям майже нормальної підгрупи, одержані Б. Нейманом [34]. Він показав, що група, у якої всі підгрупи майже нормальні, є скінченною над центром групою. Такий же результат одержав І.І. Єрьомін [145] для груп, у яких майже нормальні всі тільки абелеві підгрупи.

І.І. Єрьомін [146] розпочав вивчення періодичних груп, у яких майже нормальні всі нескінченні підгрупи. Він встановив, що локально скінченні групи такого роду або скінченні над центром, або є групами Чернікова. Зазначимо, що не у всякій черніковській групі нескінченні підгрупи майже нормальні. Неперіодичні групи з нескінченними майже нормальними підгрупами раніше не вивчались.

В усіх раніше згаданих роботах обмеження в досліджуваних групах накладались на всі підгрупи деякої системи Σ. Зрозуміло, що узагальнення таких груп можна одержати, накладаючи обмеження на деякі підсистеми із Σ. Однією з ефективних властивостей, що дозволяє виділяти підсистеми із Σ, є включення однієї підгрупи із Σ в іншу. При цьому підході виникли поняття транзитивності [77, 147 – 158] і щільності [159 – 168].

А. Манн [159] ввів і досліджував скінченні групи з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Група G називається групою з умовою щільності нормальності для всіх підгруп, якщо для будь-якої пари підгруп A та B із G таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B, в існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$. Вивчення таких скінченних груп продовжили

М.Ф. Кузенний, В.В. Пилаєв [160 – 163]. Ці автори описали тільки скінченні ненільпотентні групи такого роду.

В.Е. Горецький [164] описав нескінченні локально ступінчасті групи з умовою щільності нормальності для нескінченних абелевих підгруп.

Л.А. Курдаченко, В.Е. Горецький [165] отримали опис локально майже розв'язних груп з умовою щільності майже нормальності для всіх підгруп. Вони називають групу G групою з щільною (строго щільною) системою майже нормальних підгруп, якщо для будь-яких двох її підгруп $A < B$, де A – немаксимальна в B, існує така майже нормальна підгрупа H, що $A \leqslant H \leqslant B$ ($A < H < B$). У роботах [31, 166 – 168] термін "щільність" називається узагальненою щільністю. Ці роботи присвячені опису груп з щільною системою доповнюваних і субнормальних підгруп.

В даній дисертаційній роботі також досліджуються групи з обмеженнями нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. В ній вивчаються групи з умовами щільності нормальності та майже нормальності для систем підгруп досить широких класів груп. Це і підтверджує її актуальність.

Зв`язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана згідно з тематичними планами науково-дослідних робіт Інституту математики НАН України та Інституту педагогіки АПН України.

Мета і задачі дослідження

Для більш точного формулювання мети дослідження зупинимося на деяких означеннях.

О з н а ч е н н я 1. *Нехай G – група, A та B – її підгрупи, $A < B$. Відрізком (інтервалом) $[A;B]$ ($(A;B)$) називається*

множина всіх тих і тільки тих підгруп X *із* G, *для яких* $A \leqslant X \leqslant B$ ($A < X < B$). *Півінтервалом* $(A;B]$ *чи* $[A;B)$ *називається множина всіх тих і тільки тих підгруп* X *із* G, *для яких* $A < X \leqslant B$ *чи* $A \leqslant X < B$. *Проміжком* $\{A;B\}$ *називається відрізок, інтервал чи півінтервал. Модулем проміжку* $/\{A;B\}/$ *називається число його елементів.*

Означення 2. *Нехай у групі* G *для будь-якого відрізка* $[A;B]$ *існує нормальна підгрупа* N *із* G *така, що:*

1) при $/[A;B]/ \geqslant 1$: *1.1)* $N \in [A;B]$;

2) при $/[A;B]/ > 1$: *2.1)* $N \in (A;B]$; *2.2)* $N \in [A;B)$; *2.3)* $N \in [A;B]$;

3) при $/[A;B]/ > 2$: *3.1)* $N \in (A;B)$; *3.2)* $N \in (A;B]$; *3.3)* $N \in [A;B)$; *3.4)* $N \in [A;B]$.

Тоді G *називається відповідно:* H- , ЩН( )- , ЩН[ )- , ЩН[ ]-, УЩН( )-, УЩН( ]- , УШН[ )- , УЩН[ ]-*групою.*

Означення 3. *Підгрупа* H *групи* G *називається майже нормальною підгрупою групи* G (МН-*підгрупою*), *коли індекс* $[G:N_G(H)]$ *скінченний.*

Означення 4. *Група* G *називається* МН$[\tau]$-*групою, якщо будь-який відрізок* $[A;B]$ *групи* G, *де підгрупи* A *та* B *мають властивість* τ, *містить* МН-*підгрупу.*

Якщо τ — *властивість бути будь-якою підгрупою групи* G, *то* G *називається* МН[ ]-*групою.*

Якщо $\tau = BI$, *тобто* $/B/ = \infty$, *то* G *називається* МН[BI]-*групою.*

Якщо $\tau = I$, *тобто* $/A/ = \infty$, *то* G *називається* МН[I]-*групою.*

Якщо $\tau = \overline{T}$, *тобто* A — *неперіодична підгрупа, то* G *називається* МН$[\overline{T}]$-*групою.*

Якщо $\tau = B\overline{\text{T}}$, *тобто B — неперіодична підгрупа, то G називається* $MH[B\overline{\text{T}}]$*-групою.*

О з н а ч е н н я 5. *Група G називається УЩМН(*τ*)-, УЩМН(*τ*]-, УЩМН[*τ*)-, УЩМН[*τ*]-групою, якщо для будь-якого відрізка підгруп [A;B] такого, що /[A;B]/ > 2 і підгрупи A та B мають властивість* τ *в G існує така МН-підгрупа C, що справедливе відповідно одне із співвідношень: (A;B) э C, (A;B] э C, [A;B) э C, [A;B] э C.*

Якщо τ *— це властивість бути довільною підгрупою з G, то G називається відповідно УЩМН( )-, УЩМН( ]-, УЩМН[ )-, УЩМН[ ]-групою.*

Якщо τ *— це властивість I, тобто /A/ =* ∞*, то G називається відповідно УЩМН(I)-, УЩМН(I]-, УЩМН[I)-, УЩМН[I]-групою.*

Якщо $\tau = \overline{\text{T}}$, *тобто A — неперіодична підгрупа, то G називається відповідно* $УЩМН(\overline{\text{T}})$*-,* $УЩМН(\overline{\text{T}}]$*-,* $УЩМН[\overline{\text{T}})$*-,* $УЩМН[\overline{\text{T}}]$*-групою.*

Метою даної роботи є дослідження класів груп, які введені в означеннях 2, 4, 5.

Задачі дослідження:

— опис локально ступінчастих ЩН[ ]-груп та їх підкласів;

— опис локально ступінчастих УЩН[ ]-груп та їх підкласів;

— опис локально майже розв`язних МН[I]-груп;

— опис неперіодичних $MH[B\overline{\text{T}}]$-груп та їх підкласів;

— опис локально майже розв`язних УЩМН[I]-груп;

— опис неперіодичних $УЩМН[\overline{\text{T}}]$-груп та їх підкласів.

Наукова новизна одержаних результатів

Всі основні результати дисертації є новими.

Практичне значення одержаних результатів

Описані в дисертації класи груп значно розширюють конкретну базу теорії груп. Результати цього опису є значним вкладом в цю теорію. Важливе як теоретичне, так і практичне значення має розроблена в дисертації методика досліджень груп з умовами щільності нормальності та майже нормальності для систем підгруп досить широких класів груп. Результати дисертації можуть використовуватися в різноманітних теоретико-групових дослідженнях.

Сформульовані і нерозв`язані в роботі задачі можуть стати основою нових наукових досліджень, зокрема, і дисертаційних.

Конкретні класи груп, описані в дисертації, можуть використовувати при читанні спецкурсів і спецсемінарів та при написанні дипломних робіт і наукових рефератів.

Особистий внесок здобувача

Всі роботи [77, 169 – 204], крім [77, 172, 174 – 176], у яких опубліковані результати дисертації, без співавторів. Особистий внесок здобувача у роботи, які написані у співавторстві, такий: [77, розділ 5]; [172, теореми 1 і 2]; [174, теорема 3]; [175, теорема]; [176, теореми 1 – 3].

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційних досліджень доповідались на Міжнародних наукових конференціях ім. акад. М. Кравчука (Київ – 1995; 1996; 1997; 1998рр.), на Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій пам`яті професора Л.М. Глускіна (Слав`янськ – 1997р.), на Всесоюзних алгебраїчних конференціях (Кишинів – 1985р.; Львів – 1987р.), на Всесоюзних симпозіумах з теорії груп (Мінськ – 1986р.; Свердловськ – 1988р.), на наукових семінарах Інституту математики НАН України, Гомельського, Київського,

Кошицького (Словакія) університетів, Українського національного педагогічного університету, на наукових конференціях в Інституті педагогіки АПН України (1985 – 1998рр.).

Публікації

Результати дисертаційного дослідження опубліковані у 37 роботах, з них 1 монографія, 23 статей у фахових виданнях, 7 депонованих та анотованих статей, 6 тез конференцій.

РОЗДІЛ І

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ ЩН[ ]-ГРУП

Узагальнення дедекіндових груп здійснюються або шляхом звуження системи підгруп Σ, що є нормальними в усій групі, або послабленням властивості нормальності для підгруп із Σ. Зрозуміло, що узагальнення таких груп можна одержати накладаючи обмеження на деякі підсистеми із Σ. Однією з ефективних властивостей, що дозволяє виділяти підсистеми із Σ, є включення однієї підгрупи із Σ в іншу. З використанням цієї властивості багато авторів вивчали групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leqslant N \leqslant B$. Зрозуміло, що так виділені групи можуть мати досить складну будову. А тому їх опис можливий лише при додаткових обмеженнях, серед яких можна виділити такі досить широкі обмеження як локальна ступінчастість та локальна майже розв`язність.

У цьому розділі викладаються результати про групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. Завдяки поняттю проміжку підгруп групи вводиться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості груп по кожному з них. Наведено опис окремих класів груп із найбільш загальним означенням щільності (УЩН[ ]-груп). Конструктивно описані локально ступінчасті недедекіндові ЩН[ ]-групи.

1.1. Допоміжні результати

О з н а ч е н н я 1.1.1 *(див., наприклад, [74, § 2]). Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G, якщо в G не існує такої підгрупи B, що* $A < B < G$.

Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G.

При $n > 0$ *підгрупа A групи G називається n-максимальною в G, коли вона є максимальною підгрупою деякої* $(n-1)$*-максимальної підгрупи A групи G.*

Скінченні неодиничні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиничні та деякі нескінченні групи, наприклад, квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Л е м а 1.1.1. *Нехай G—довільна група. Тоді справедливі наступні твердження:*

1) група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $|G| \in \{1,p\}$, *p—просте число;*

2) $G = \langle g \rangle$ *тоді і тільки тоді не породжується своїми максимальними підгрупами, тобто всі її максимальні підгрупи породжують власну підгрупу M групи G, коли* $|g| = p^{\alpha}$, *p — просте число,* $\alpha \geqslant 0$; *при* $\alpha = 0$ *підгрупа M не існує; при* $\alpha > 0$ $M = \Phi(\langle g \rangle)$ *— єдина максимальна підгрупа з G;*

3) $G = \langle g \rangle$ *тоді і тільки тоді не породжується своїми власними не максимальними підгрупами, тобто всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну підгруппу M із G, коли*

$|g| = p^{\alpha}q^{\beta}$, p,q — різні прості числа, $\alpha > 0$, $\beta \in \{0,1\}$; при $\alpha + \beta < 2$ підгрупа M не існує; при $\alpha + \beta = 2$ $M = 1$ — 2 - максимальна підгрупа з G; при $\alpha + \beta > 2$ і $\beta = 0$ $M = \Phi(\Phi(G)) = G^{p^2}$ — 2-максимальна підгрупа з G; при $\alpha + \beta > 2$ і $\beta = 1$ M — максимальна підгрупа з G порядку $p^{\alpha-1}q$.

Доведення. *Необхідність.* Твердження 1 леми очевидне. Покажемо,що при умовах 2 і 3 леми $|G| < \infty$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G = \langle g \rangle$, $|g| = \infty$ і $G = \langle g^2 \rangle\langle g^3 \rangle = \langle g^4 \rangle\langle g^9 \rangle$, що неможливо. Отже, $|g| < \infty$. При $|g| \in \{1,p\}$ справедливе твердження 1 леми. Тому будемо вважати, що $|g| \notin \{1, p\}$. Звідси $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, де $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle$ — силовська p-підгрупа з G, p — просте число, $\langle y \rangle$ — її холлівське доповнення. Якщо $|y| = 1$, то твердження 2 та 3 леми справедливі. Нехай $|y| \neq 1$. Тоді в G існують принаймні 2 максимальні підгрупи $M_1 = \Phi(\langle x \rangle \times \langle y \rangle$ і $M_2 = \langle x \rangle \times \langle y_1 \rangle$, де $\langle y_1 \rangle$ — власна максимальна підгрупа з $\langle y \rangle$. Зрозуміло, що $G = M_1M_2$, і тому умова 2 леми не виконується. Якщо тепер $|y| \in \{1,q\}$ (q — просте число), то необхідність твердження 3 доведена.

Нехай $|y| \notin \{1,q\}$. Тоді $\langle y \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$, $|g_1| = q^{\beta}$, q — просте число, $q \neq p$, $\beta > 0$ і $|\Phi(\langle g_1 \rangle)\langle g_2 \rangle| > 1$. Звідси $\langle x \rangle, \langle g_1 \rangle, \langle g_2 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G, що породжують всю групу G. А це неможливо за умовою леми. Отже, $|g_2| = 1$, $|g_1| = q$ в умовах твердження 3 леми.

При $|g| = p^{\alpha}$ маємо, що $\alpha > 1$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують $\Phi(\Phi(G))$. При $|g_1| = q$ $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle g_1 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G і тому вони породжують максимальну підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle g_1 \rangle$ із G. Звідси $|M| = p^{\alpha-1}q$. Необхідність доведена.

Достатність. Достатність для твердження 1 леми очевидна. Нехай G — група типу 2 леми. Тоді Ф(G) — єдина власна максимальна підгрупа з G. Звідси M = Ф(G) і достатність доведена. Нехай G — група типу 3 леми. В цьому випадку G = <x> × <y>, /x/ = p^{α}, $\alpha > 0$, /y/ = q^{β}, $\beta \in \{0,1\}$. При $\alpha = 1$ /G/ = pq і всі власні немаксимальні підгрупи з G співпадають з одиничною підгрупою 1. Тому M = 1. Нехай тепер $\alpha > 1$. Тоді Ф(<x>) та <y> — власні немаксимальні підгрупи з G, які породжують підгрупу M = Ф(<x>) × <y>, [G:M] = p. Звідси M — максимальна підгрупа з G. Достатність для груп типу 3 леми доведена. Лема доведена.

Наслідок 1.1.1. *Група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли /G/ ∈ {1,p}, p — просте число.*

Доведення випливає з леми 1.1.1.

Лема 1.1.2. *Нехай G — довільна група, що має власні немаксимальні підгрупи, які всі породжують власну підгрупу M групи G. Тоді M ◁ G, для будь-якого примарного елемента x із G\M <x> — максимальна підгрупа з G, G = <g, x>, де g — будь-який елемент із G\<x>, /G/ ∉ {1,r}, r — просте число, і виконується тільки одне з тверджень:*

1) M — 2-максимальна підгрупа з G і G або циклічна група порядку p^{α}, $\alpha > 1$, або /G/ = pq, p, q — необов'язково різні прості числа;

2) M = Ф(<x>), G — періодична група;

3) M — максимальна підгрупа циклічної групи G, /G/ = $p^{\alpha}q$, p і q — різні прості числа, $\alpha > 1$, /M/ = $p^{\alpha-1}q$;

4) M — максимальна підгрупа нециклічної групи G, $G = M\langle x\rangle$, $M \cap \langle x\rangle = \Phi(\langle x\rangle)$, для будь-якого примарного елемента g із $G\backslash M$ $\langle g\rangle$ — максимальна підгрупа з G, $\pi(\langle x\rangle) = \pi(\langle g\rangle)$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми. Покажемо спочатку,що $M \triangleleft G$. При $/M/ = 1$ це очевидно. Тому будемо вважати, що $/M/ > 1$. Якщо $M = \langle a\rangle$, $/a/ = r^{\gamma}$, r — просте число, $\gamma > 0$, то за твердженням 2 леми 1.1.1 всі власні підгрупи з M породжують Ф(M). Але M містить елемент c такий, що $c \notin \Phi(M)$ і $\langle c\rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G. Звідси $M = \langle c\rangle$ і тому для будь-якого z із G підгрупа $z^{-1}\langle c\rangle z$ — власна немаксимальна з G. Таким чином, $z^{-1}cz \in M$ і, значить, $M \triangleleft G$.

Нехай тепер M — нециклічна група. Тоді $M = \langle x_i\rangle$, i — елемент множини індексів I, $\langle x_i\rangle < M$. Звідси $\langle x_i\rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G і тому для будь-якого z із G $z^{-1}x_iz \in M$ і, значить,$M \triangleleft G$.

Нехай G — циклічна група. Якщо G — примарна група, то для G справедливе твердження 3 леми 1.1.1 і твердження 3 розглядуваної леми.

Нехай тепер G — нециклічна група і $x \in G\backslash M$. Тоді $G > \langle x\rangle$. Зрозуміло, що $x \notin M$ і тому $\langle x\rangle$ не породжується своїми власними підгрупами. За лемою 1.1.1 $\langle x\rangle$ — примарна максимальна підгрупа з G. Для будь-якого елемента g із $G/\langle x\rangle$ $\langle g,x\rangle$ не може бути власною підгрупою з G і, таким чином, $G = \langle g,x\rangle$. Якщо M — немаксимальна підгрупа з G, то $\Phi(\langle x\rangle) = M \cap \langle x\rangle$, $/M\langle x\rangle/ = /M/r$, r — просте число. З умови $G > M\langle x\rangle$ і максимальності $\langle x\rangle$ в G випливає, що $M > \langle x\rangle$, і тому $M = \Phi(\langle x\rangle)$. Оскільки x — довільний елемент із $G\backslash M$, то G — періодична група і для G вико-

нується твердження 2 леми. Якщо ж M — максимальна підгрупа з G, то для G виконується твердження 4 леми. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 1.1.2 [26,73]. *Група G називається локально ступінчастою, коли будь-яка її неодинична скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.*

Н а с л і д о к 1.1.2. *Локально ступінчасті групи G з леми 1.1.2 є скінченними розв'язними групами.*

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми 1.1.2. Якщо G — циклічна група, то твердження наслідку очевидне. Нехай G — нециклічна група. Тоді можна вважати, що для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.1.2. Покажемо, що $/G/ < \infty$. Дійсно, нехай $/G/ = \infty$. Тоді за лемою 1.1.2 G містить такий елемент x, що $/x/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, p — просте число, $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з $G = \langle g, x \rangle$. Із означення 1.1.2 легко випливає, що G має нескінченний ланцюг нормальних підгруп G_i, $G_i > G_{i+1}$. Зрозуміло, що знайдеться таке i, для якого $[G:G_i] > p^{\alpha}$. Звідси $G_i\langle x \rangle < G$, що суперечить максимальності підгрупи $\langle x \rangle$ у групі G. Таким чином, $/G/ < \infty$ і G має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За основною теоремою з [205] G — розв'язна група. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.1.1. *Локально ступінчасті групи G, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p — просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, у яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M, і G ізоморфна групі одного з типів:*

1) G — циклічна група порядку p^{α}, p — просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ — 2-максимальна підгрупа з G;

2) $/G/ = pq$, p і q — необов'язково різні прості числа, $M = 1$ — 2-максимальна підгрупа з G;

3) G — група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ — 2-максимальна підгрупаз G;

4) G — циклічна група порядку $p^\alpha q$, p і q — різні прості числа, $\alpha > 1$, M — максимальна підгрупа з G, $/M/ = p^{\alpha-1}q$;

5) $G = \langle x\rangle \lambda \langle z\rangle$, $/x/ = p^\alpha$, $/z/ = p$, $\alpha > 1$, $[x,z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}}\rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x^p\rangle \times \langle z\rangle$ — максимальна підгрупа з G;

6) $G = R \lambda \langle x\rangle$, $/R/ = r^\alpha > 2$, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, r і q — різні прості числа, $\langle x\rangle$ — максимальна підгрупа з G, $M = R \lambda \langle x^q\rangle$ — максимальна підгрупа з G.

Доведення. *Необхідність.* Якщо $/G/ \in \{1,p\}$ (p — просте число), то твердження теореми очевидне. Нехай $/G/ \notin \{1,p\}$. За наслідком 1.1.1 G має власні немаксимальні підгрупи і задовольняє умову леми 1.1.2, за твердженням якої всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну нормальну підгрупу M і вірне одне з 4 тверджень згаданої леми. За наслідком 1.1.2 G — скінченна розв'язна 2-породжена група. Якщо $/G/ = pq$, де p і q — необов'язково різні прості числа, то $M = 1$ — 2-максимальна підгрупа з G і, значить, G — група типу 1 чи 2 теореми.

Нехай G — циклічна група. Тоді за твердженням 3 леми 1.1.1 $/G/ = p^\alpha q$, (p і q — різні прості числа, $\alpha > 1$), M — максимальна підгрупа з G, $/M/ = p^{\alpha-1}q$ і G — група типу 4.

Нехай G — нециклічна група. Тоді для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.1.2, за яким G містить елемент x такий, що $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, q — просте число, $\langle x\rangle$ — максимальна підгрупа з G. Розглянемо два можливі випадки: 1) G — нільпотентна група; 2) G — ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку $G = Q \times D$, де Q — силовська q-підгрупа з G, D — її холлівське доповнення в G. Зрозуміло, що $Q \geqslant \langle x \rangle$. Оскільки підгрупа $\langle x \rangle$ максимальна в G, то $[G:\langle x \rangle]$ — просте число і тому $/D/ \in \{1,r\}$ (r — просте число). При $/D/ = r$ і $Q = \langle x \rangle$ G — циклічна група, що суперечить вибору G. Звідси $/D/ = 1$, $G' = Q$, $[G:\langle x \rangle] = q = r$ і, значить, G — примарна група, що має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За теоремою 12.5.1 з [64] G — або група типу 5 розглядуваної теореми, у якої $[G:G'] > 4$, або $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ \in \{2,4\}$, $\alpha > 1$, $G' \neq 1$. При $\alpha = 2$ G — неабелева група порядку 8, що не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, ізоморфна групі кватерніонів і тому G є групою типу 3 теореми, $M = \Phi(G)$ — 2-максимальна підгрупа з G.

Нехай $\alpha > 2$ і G не є групою типу 5 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою 12.5.1 з [64] G має власні циклічні підгрупи порядку 2 та 4, які немаксимальні в G і породжують групу G, що неможливо. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Розглянемо знову два можливих випадки: 2.1) $\langle x \rangle \lhd G$; 2.2) $\langle x \rangle \not\lhd G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $[G:\langle x \rangle] = r$, r — просте число, $r \neq q$. При $/x/ = q$ $M = 1$ і G — група типу 2. Нехай $/x/ > q$. Тоді $G = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, $/y/ = r$, $\langle y \rangle$ — ненормальна силовська r-підгрупа з G, $\langle y \rangle$ — немаксимальна підгрупа з G. Позначимо через N підгрупу з G, породжену всіма силовськими r-підгрупами з G. Тоді $N \lhd G$. Покажемо, що $G = N$. Дійсно, нехай $G \neq N$. Тоді за лемою Фраттіні (див., наприклад, [74, лема 17.1.8]) $G = ND$, де $D = N_G(\langle y \rangle)$. Звідси $D = T \times \langle y \rangle$, де $T = D \cap \langle x \rangle$. Відомо, що $\langle x \rangle = TT_1$, де T_1 — силовська q-підгрупа з N. Але тоді $T = \langle x \rangle$ і G — нільпотентна

група, що не так. Таким чином, G = N, а це суперечить умові теореми. Випадок 2.1 розглянутий повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку $N_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$ — максимальна підгрупа з G. Звідси $\langle x\rangle$ — силовська q-підгрупа з G, що належить центру свого нормалізатора. За теоремою 14.3.1 з [64] $G = R \lambda \langle x\rangle$, де R — холлівське доповнення $\langle x\rangle$ в G. Оскільки $\langle x\rangle$ — максимальна підгрупа з G, то R — мінімальна нормальна підгрупа з G. Відомо, що $/R/ = r^{\alpha} > 2$, r — просте число. При $\alpha + \beta = 2$ група G є групою типу 2 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha + \beta > 2$. Ясно, що R — елементарна абелева група, всі власні циклічні підгрупи якої є власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло також, що підгрупа $\langle x^q\rangle$ немаксимальна в G і тому $x^q \in M$. Покажемо, що $M \geqslant R$. Дійсно, при $\beta > 1$ R — власна немаксимальна підгрупа з G і тому R належить M. При $\beta = 1$ $\alpha > 1$ і R породжується своїми власними циклічними підгрупами, які за попереднім зауваженням належать M. Звідси $M \geqslant R$. За умовою теореми $G > M$, $M = R \lambda \langle x^q\rangle$ — максимальна підгрупа з G і, таким чином, G — група типу 6 теореми. Випадок 2.2 повністю розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що в групах G порядку 1 чи r (r — просте число) взагалі немає власних немаксимальних підгруп і тому G не породжується такими підгрупами. Будемо вважати, що $/G/ \notin \{1,r\}$ і, таким чином, G — група типу 1—6 розглядуваної теореми. За твердженням леми 1.1.1 група G типу 1 чи 4 не породжується своїми власними підгрупами і тому для груп цих типів достатність доведена.

В групі G типу 2 всі власні немаксимальні підгрупи співпадають з одиничною підгрупою 1, а в групі G типу 3 — з $\Phi(G)$. Звідси достатність для цих типів груп доведена.

Нехай G — група типу 5 і M_1 — підгрупа з G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло, що $x^p \in M_1$, $z \in M_1$. Звідси $M_1 \geqslant \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle = M$ — максимальна підгрупа з G. Покажемо, що $M_1 = M$. Нехай $M_1 \neq M$. Тоді існує власна немаксимальна підгрупа X із G така, що $MX = G$. Значить, X містить елемент y, а M — елемент a такий, що $x = ay$. Ясно, що $a = x^{ip}z^j$. Звідси $x = x^{ip}z^jy$ і тому $x^{-ip}x = z^jy$. Зрозуміло, що $/x^{-ip}\, x/ = /x/ = p^\alpha$, $\alpha > 1$. Оскільки $/z^j/ \in \{1,p\}$, то з умови $[G:G'] > 4$ маємо $/y/ = /x/$. Але тоді $\langle y \rangle$ — максимальна підгрупа з G, що суперечить вибору X. Це означає, що $M_1 = M$ і достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G — група типу 6. Оскільки $\alpha + \beta > 2$, то всі власні підгрупи з R є власними немаксимальними підгрупами з G і $\langle x^q \rangle$ — теж власна немаксимальна підгрупа з G. Тому $N \geqslant M$ — максимальна підгрупа з G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Покажемо, що $N = M$. Справді, якщо це не так, то $N = G = M\langle y \rangle$, де y — q-елемент. Легко бачити, що $\langle x^q \rangle\langle y \rangle$ — силовська q-підгрупа з G. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle y \rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G. Будь-яка силовська q-підгрупа з G циклічна і тому $[x^q,y] = 1$, $/x^qy/ = /x/$. Звідси $/y/ > /x^q/$ і, значить, $/y/ = /x/$. Отже, $\langle y \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, яка максимальна в G, що не так і тому $N = M$. Достатність для груп типу 6 доведена. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Означення 1.1.3 *(див., наприклад, [64, § 12.5]). Група G, у якої всі підгрупи нормальні, називається дедекіндовою групою.*

Твердження 1.1.1 *[64, теорема 12.5.4]. Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q — група кватерніонів порядку 8, D — елементарна абелева 2-група, A — періодична абелева група без інволюцій.*

Для дедекіндових груп G справедливі твердження:

1) *якщо G містить елемент нескінченного порядку чи порядку 8, то $G' = 1$;*

2) циклічні 2-підгрупи G порядку більше двох містять G'.

Теорема 1.1.2. *Нехай G — група, що містить нормальні підгрупи N_1 і N_2, для яких $N_1 \cap N_2 = 1$ і G/N_1 та G/N_2 — дедекіндові групи. Тоді G — дедекіндова група, коли в ній виконується хоча б одна з умов:*

1) N_1 — періодична група без інволюцій, N_2 — група без інволюцій, або група, що містить елемент порядку 8;

2) N_1 — неперіодична група без інволюцій або з елементами порядку 8, N_2 — група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8.

Доведення. Нехай G, N_1 і N_2 задовольняють умови теореми. Якщо $G' = 1$, то твердження теореми очевидне. Нехай $G' \neq 1$. Оскільки $N_1 \cap N_2 = 1$, то можливі два випадки: 1) $N_1 \not> G'$; 2) $N_1 > G'$.

Випадок 1. У цьому випадку G/N_1 — неабелева група, а тому періодична гамільтонова група, яка за твердженням 1.1.1 не містить елементів порядку 8. Звідси за умовою теореми N_2 — періодична група, що не містить інволюцій. Зрозуміло, що $N_2 \cap G'$

= 1. Звідси $N_2 \leqslant Z(G)$. Тепер G/N_2 — неабелева група, а значить, періодична нільпотентна гамільтонова група. Таким чином, маємо, що і G — періодична нільпотентна група. Нехай D — силовська 2-підгрупа з G. Тоді $D \cap N_2 = 1$, D — гамільтонова 2-група і $G = D \times A$, де A — періодична нільпотентна група без інволюцій. Оскільки G/N_1 і G/N_2 — гамільтонові групи, $N_1 \cap N_2 = 1$, то G' — 2-група. Звідси $A' = 1$. За твердженням 1.1.1 G — гамільтонова група. Теорема у випадку 1 доведена.

Випадок 2. У цьому випадку G/N_2 — неабелева група, а тому вона гамільтонова нільпотентна періодична група, у якої $N_1 \times N_2/N_2$ — періодична абелева група без інволюцій. Звідси $N_1 \times N_2/N_2$ не може містити комутант групи G/N_2. Таким чином, $G' \not\leqslant N_2$. Суперечність. Теорема доведена.

Наслідок 1.1.3. *Якщо група G містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 такі, що $N_1 \cap N_2 = 1$ і G/N_i — дедекіндова група ($i \in \{1,2\}$), N_i — локально циклічна група з силовською 2-підгрупою D, для якої $/D/ \notin \{2,4\}$, то G — дедекіндова група.*

Наслідок випливає з теореми 1.1.2.

Теорема 1.1.3. *Нехай G — група, N — її нормальна підгрупа і G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів, тобто для будь-якого елемента g з G і всіх елементів x із N в N існує елемент a такий, що $g^{-1}xg = a^{-1}xa$. Тоді $G = NC_G(N)$. Зокрема, при $Z(N) = 1$ $G = N \times C_G(N)$.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді для елемента g з G та будь-якого x з N маємо $g^{-1}xg = a^{-1}xa$, де $a \in N$. Звідси $ag^{-1}xga = x = u^{-1}xu$, де $u = ga^{-1}$, $u \in C_G(N)$, і тому $g = ua$ і g належить добутку $NC_G(N)$ і $G = NC_G(N)$. Зрозуміло, що $N \cap C_G(N) \leqslant Z(N)$. Якщо $Z(N) = 1$, то $G = N \times C_G(N)$. Теорема доведена.

Наслідок 1.1.4. *Нехай G — група, N — така її 2-породжена нормальна підгрупа, що $G' \cap N = N' \leqslant Z(N)$. Тоді $G = NC_G(N)$.*

Доведення. Нехай G, N = <a,b> задовольняють умови наслідку. Тоді $G' \cap N = \langle c \rangle < Z(N)$, $c = [a,b]$. Нехай g — елемент з G. Тоді $g^{-1}ag = ac^i$, $g^{-1}bg = bc^j$. Звідси $g^{-1}cg = (g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1}(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) = a^{-1}c^{-i}b^{-1}c^{-j}ac^ibc^j = c$, а значить, $[c,g] = 1$.

Нехай $d = a^{-j}b^i$. Оскільки $\langle c \rangle < Z(N\langle g \rangle)$, то за відомими комутаторними співвідношеннями (див., наприклад, [74, §3]) $[d^{-1}g,a] = 1$. Значить, $d^{-1}g \in C_G(N)$, тому група G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів. За теоремою 1.1.3 $G = NC_G(N)$. Наслідок доведений.

Наслідок 1.1.5. *Нехай G — група з центральним циклічним комутантом G'. Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' = N'$ маємо $G = NC_G(N)$.*

Наслідок 1.1.6. *Якщо G — група з комутантом порядку p і N — будь-яка її 2-породжена неабелева p-підгрупа, то $G = NC_G(N)$.*

Означення 1.1.4 [65]. *Підгрупа $w(G)$ групи G, породжена всіма елементами з G, що мають порядком просте число, називається нижнім шаром групи G.*

Твердження 1.1.2 [65]. *Нижній шар групи G є характеристичною і тому нормальною підгрупою групи G.*

Твердження 1.1.3 *([206, теорема Б]). В скінченній 2-групі G, клас нільпотентності якої не більше 2, кількість інволюцій тоді і тільки тоді дорівнює 3, коли G — група одного з наступних класів:*

1) G — нециклічна метациклічна група, яка відмінна від групи кватерніонів і групи діедра порядку 8;

2) $G = A \lambda B$, де кожна з підгруп A і B або циклічна, або ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, причому інволюція з B лежить у $Z(G)$;

3) $G = \langle a,b,c \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $c^2 = a^2$, $[a,c] = b^2$, $[b,c] = c^2$, $[a,b] = 1$;

4) $G = \langle a,b,c,d \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $c^2 = b^2$, $d^2 = a^2b^2$, $[a,b] = [c,d] = 1$, $[a,c] = a^2$, $[a,b] = [a,d] = [b,c] = a^2b^2$, $[b,d] = b^2$.

Л е м а 1.1.3. *Метациклічна 2-група G тоді і тільки тоді має три інволюції, коли вона нециклічна і не має підгрупи кватерніонів та групи діедра порядку 8.*

***Доведення**. Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Зрозуміло, що G — нециклічна група. В групі діедра порядку 8 п'ять інволюцій і тому G не містить групи діедра порядку 8. Припустимо, що G містить підгрупу кватерніонів Q. Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^r$, r — ціле непарне число. Оскільки Q — неабелева група, то $G' \neq 1$ і $\alpha > 1$. Нехай $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. За теоремою про ізоморфізм груп $Q/\langle x \rangle$ — циклічна група. Звідси $/x/ = 4$, $Q = \langle x, y \rangle$. Отже, існує підгрупа $A = \langle a \rangle Q = \langle a \rangle\langle y \rangle$, $/y/ = 4$, $y^2 = x^2 = a^{2^{\alpha-1}}$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle\langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$, $[A : \langle a \rangle] = 2$, $\langle a \rangle$ — максимальна підгрупа з A. За теоремою 12.5.1 із [64] G не може бути групою кватерніонів порядку 8 чи узагальненою групою кватерніонів. Звідси $/G/ > 8$. Знову за теоремою 12.5.1 із [64] A — група кватерніонів порядку 8 або узагальнена група кватерніонів. Звідси $/w(A)/ = 2$ і тому G містить v, $/v/ = 2$, $\langle v \rangle \cap A = 1$. Значить, існує підгрупа $B = A \lambda \langle v \rangle$. Оскільки $B \lambda \langle a \rangle$ — елементарна абелева

група порядку 4 і G/<a> — циклічна група, то маємо суперечність. Звідси G не містить групи кватерніонів порядку 8. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G = <a><b> — нециклічна метациклічна 2-група,що не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8. Тоді /a/ = 2^{α}, /b/ = 2^{β}, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, <a> $\lhd$ G. Нехай <a> — максимальна циклічна підгрупа з G. Тоді G містить A > <a> і [A:<a>] = 2. Значить, A — нециклічна група з максимальною циклічною підгрупою <a>. За теоремою 12.5.1 з [64] A = <a> λ <y>, /y/ = 2, [A:A′] > 4, w(A) = w(<a>) $\times$ <y>, /w(A)/ = 4. Покажемо, що w(A) = w(G). Дійсно, нехай це не так. Тоді G\A містить v, /v/ = 2, і G містить підгрупу A λ <v>. Звідси маємо, що B/<a> — елементарна абелева група порядку 4, яка міститься в циклічній групі G/<a>. Суперечність. Тому w(A) = w(G) і, значить, в G три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Наслідок 1.1.7. *Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:*

1) G — нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку 8, $G' \leqslant Z(G)$;

2) $G = U \lambda X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою чи групою кватерніонів, $/U/ > 1$, $/X/ > 1$, $w(X) \leqslant Z(G)$, $[U,X] \leqslant w(U)$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, x] = a^2 b^2$, $[b, x] = b^2$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді вона задовольняє умови твердження 1.1.3, за яким G — група типу

1—4 згаданого твердження. Нехай G — група типу 1 твердження 1.1.3. За лемою 1.1.3 G не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8 і тому G — група типу 1 наслідку. Нехай G — група типу 2 твердження 1.1.3. Тоді $G = U \lambda X$, де U, X — неодиничні циклічні 2-групи чи групи кватерніонів. Оскільки $G' \leqslant Z(G)$, то $w(X) \leqslant Z(G)$. Підгрупа $X = \langle x,y \rangle$ циклічна чи група кватерніонів. Якщо $/X/ = 2$, то $G = U \times X$ — група типу 2. Нехай $/X/ > 2$. Якщо U та X одночасно циклічні, то G — група типу 1 наслідку. Нехай X — циклічна група. Звідси U — нециклічна група і, значить, група кватерніонів. Із умови $G' \leqslant Z(G)$ випливає, що $[U,X] \leqslant U \cap Z(G) = w(U)$ і знову G — група типу 2 наслідку.

Нехай тепер X — нециклічна група. При нециклічності U, як і раніше, $[U,X] \leqslant w(U)$ і знову G — група типу 2 наслідку. Нехай $U = \langle u \rangle$ — циклічна група, $/u/ = 2^{\Delta}$. При $\Delta = 1$ $G = U \times X$ і G — група типу 2. Нехай $\Delta > 1$. Тоді G містить підгрупи $\langle u \rangle \lambda \langle x \rangle$, $\langle u \rangle \lambda \langle y \rangle$ з центральним комутантом. Оскільки $w(X) = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \leqslant Z(G)$, то $\langle x \rangle$ та $\langle y \rangle$ індукують на $\langle u \rangle$ автоморфізм порядку 2. За відомими комутаторними співвідношеннями (див., наприклад, [74, §3]) $[u, x]^2 = [u, x^2] = 1$, $[u, y]^2 = [u, y^2] = 1$. Звідси $[\langle u \rangle, X] \leqslant w(\langle u \rangle)$ і знову G — група типу 2 наслідку.

І нарешті, нехай G — група типу 3 чи 4 твердження 1.1.3. Можна вважати, що G — неметациклічна група. Легко показати, що в групах типу 3 згаданого твердження $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і тому G — група типу 3 наслідку.

Аналогічно в групах G типу 4 твердження 1.1.3 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і $G = \langle a, b, c, d \rangle$. Покладемо $x = ad$, $y = bc$ і одержимо, що G — група типу 4 наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що G — скінченна нециклічна 2-група і $G' \leqslant Z(G)$. Покажемо, що G містить три інволюції. За лемою 1.1.3 в групах G типу 1 точно три інволюції. Групи G типів 2—4 наслідку є групами відповідно кожного з типів твердження 1.1.3. За цим твердженням в G точно три інволюції. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.1.4. *Метациклічні 2-групи з трьома інволюціями мають вигляд* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{r}$ *(r — ціле непарне число) і вичерпуються групами типів:*

1) $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $r = 1$;

2) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $r = -1$;

3) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geqslant \alpha - k$;

4) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geqslant \alpha - k$;

5) $G = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^{l}}\rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < l < \alpha < \beta$, $|d| = 2^{l}$;

6) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $r = -1$;

7) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha - 1$, $\beta > \alpha - k + 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — метациклічна 2-група з трьома інволюціями. Тоді за лемою 1.1.3 $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ — нециклічна метациклічна група, що не містить підгруп кватерніонів та груп діедра порядку 8, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{r}$, r — ціле непарне число. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle a\rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з G. Оскільки G — нециклічна група, то $G \geqslant A > \langle a\rangle$, де A — нециклічна підгрупа з G, $[A:\langle a\rangle] = 2$. Тепер A — нециклічна 2-група з циклічною максимальною підгрупою $\langle a\rangle$, яка не містить підгрупи кватерніонів та

групи діедра порядку 8. За теоремою 12.5.1 з [64] $A' = 1$ або $[A:A'] > 4$ і завжди $A = \langle a \rangle \lambda \langle y \rangle$, $/y/ = 2$, $w(A) = w(\langle a \rangle) \times \langle y \rangle \lhd G$. Якщо $G' = 1$, то без порушення загальності $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — група типу 1 теореми.

Нехай $G' \neq 1$. Тоді $\alpha > 1$. Якщо $G = A$, то $A' \neq 1$, A не містить груп діедра порядку 8. Отже, $\alpha > 2$, $y^{-1}ay = a^{1+2^{\alpha-1}}$. Покладемо $b = y$ і тоді G — група типу 4 розглядуваної теореми. Нехай $G \neq A$ і, значить, $[G:\langle a \rangle] > 2$. В роботах [101, 103, 107] виписані всі нециклічні метациклічні 2-групи $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $\langle a \rangle \lhd G$, $[G:\langle a \rangle] > 2$, які при умові $G' \neq 1$ можуть бути групами одного з типів 2—7 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$ — група одного з типів 1—7 теореми. Легко бачити, що G — нециклічна метациклічна 2-група. Покажемо, що G містить точно три інволюції або, іншими словами, $w(G) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle$ — елементарна абелева група порядку 4, де $\langle c \rangle = w(\langle a \rangle)$, $w(\langle a \rangle) \leqslant Z(G)$, $/c/ = 2$, $/v/ = 2$. В силу леми 1.1.3 досить показати, що G не містить ні підгрупи кватерніонів, ні групи діедра порядку 8. Для груп типу 1 теореми це зрозуміло. Нехай G — група одного з типів 2—7 і G містить неабелеву підгрупу Q порядку 8. Покладемо $A = \langle a \rangle Q$ і $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. Оскільки $A/\langle a \rangle$ — підгрупа циклічної групи $G/\langle a \rangle$, то $A/\langle a \rangle$ — циклічна група. Звідси $/x/ = 4$ і тому $[A:\langle a \rangle] = 2 = [Q:\langle x \rangle]$. Ясно, що $A = \langle a \rangle\langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$, $z^2 \in \langle a \rangle$ і $A' \neq 1$. В групах G кожного з типів 2—4 $A = \langle a \rangle \lambda \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = w(\langle b \rangle)$. В групі G типу 2 $w(\langle b \rangle) \leqslant Z(G)$ і тому $A' = 1$. В групі G типу 3 та 4 при $\beta > \alpha - k$ $w(\langle b \rangle) \leqslant Z(G)$ і $A' = 1$. Тому G — група типу 3 чи 4 і $\beta = \alpha - k$.

Нехай G — група типу 4. Тоді з умови $1 < к < \alpha$ і за теоремою 12.5.1 з [64] $A' \leqslant \langle a^4 \rangle$ і тому $A' = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$ і A не містить неабелевих підгруп порядку 8, що суперечить вибору A.

В групах типу 3 при $\alpha - к = 1$ $\beta > 1$, що неможливо. Тому $\alpha - к > 1$. Але тоді $\langle z \rangle = w(\langle b \rangle) \leqslant \langle b^2 \rangle$. Зрозуміло, що $b^{-2}ab^2 = a^{r^2}$, де $r^2 = (1+2^k)^2 = 1+ 2^{k+1} + 2^{2k} = 1 + 2^{k+1}(1+2^{k-1}) = 1+s2^{k+1}$, $(s,2) = 1$. Звідси $b^{-2}ab^2 = a^{1+s2^{k+1}}$. Тепер підгрупа $G_1 = \langle a \rangle \lambda \langle b^2 \rangle$ може бути групою лише типу 4, в якій A не містить неабелевих підгруп порядку 8, що неможливо.

Нехай тепер G — група одного з типів 5—7 теореми. В групі G кожного з цих типів $[G:\langle a \rangle] > 2$, $\alpha > 2$, $/A/ > 8$. У групі типу 5 $A' \leqslant \langle a^2 \rangle$ і знову за теоремою 12.5.1 з [64] A — абелева група чи група Міллера—Морено, яка не містить неабелевої підгрупи порядку 8. В групах типів 6 чи 7 $\langle z \rangle = \langle b^{2^{\beta-2}} \rangle \leqslant Z(G)$ і тому $A' = 1$, що неможливо. Отже, наше припущення в усіх випадках приводить до суперечності і тому в G точно три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Наслідок 1.1.8. *Метациклічні групи $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$ кожного з типів 1—7 теореми 1.1.4 не містять неабелевих підгруп порядку 8, але містять підгрупу $A = \langle a \rangle \lambda \langle v \rangle$, яка може бути неабелевою групою лише в групах G типу 3 чи 4 згаданої теореми при $\beta = \alpha - k$ і A — група Міллера—Морено.*

Наслідок випливає з леми 1.1.3 та доведення достатності теореми 1.1.4.

Наслідок 1.1.9. *Неодиничні метациклічні 2-групи G з числом інволюцій відмінним від числа 3 вичерпуються групами типів:*

1) G — неодинична циклічна 2-група, в G одна інволюція;

2) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ *— група кватерніонів,* $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 4$, $\alpha > 1$, $a^{2^{\alpha-1}} = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, *в* G *одна інволюція;*

3) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$ *— група діедра,* $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2$, $\alpha > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, *в* G *не менше 5 інволюцій;*

4) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$ *— квазідіедральна група,* $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha > 2$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1+2^{\alpha-1}}$, *в* G *не менше 5 інволюцій.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — неодинична метациклічна 2-група. Тоді вона має центральну інволюцію c. Якщо c — єдина інволюція з G, то за теоремою 12.5.1 з [64] G — група типу 1 чи 2 розглядуваного наслідку. Тому будемо вважати в подальшому, що в G інволюцій більше 3. За лемою 1.1.3 та попереднім $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ містить неабелеву підгрупу порядку 8, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\langle a\rangle \lhd G$, $\langle a\rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з G, $G > Q$, $Q' \neq 1$, $|Q| = 8$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Ясно, що $G \geqslant A = \langle a\rangle Q$, $A \cap Q = \langle x\rangle$, $|x| = 4$, $Q = \langle x,y\rangle$. Зрозуміло, що $A = \langle a\rangle\langle y\rangle = \langle a\rangle\langle z\rangle$, $[A:\langle a\rangle] = 2$ і тому $y^2 \in \langle a\rangle$, $z^2 \in \langle a\rangle$, де $\langle z\rangle = A \cap \langle b\rangle$. Зазначимо, що $y^{-1}xy = z^{-1}xz = x^{-1}$. Покажемо, що A = G. Дійсно, нехай це не так. Покажемо спочатку, що $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = \langle a^2\rangle$. При $\alpha = 2$ $A = Q$ і $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = Q' = \langle a^2\rangle$. При $\alpha > 2$ і з припущення $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] \leqslant \langle a^4\rangle$ за теоремою 12.5.1 з [64] одержимо, що A — абелева група чи група Міллера—Морено, яка не містить неабелевих підгруп порядку 8. Суперечність. Тому завжди $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = \langle a^2\rangle$ і за теоремою 12.5.1 з [64] $z^{-1}az = a^r$, $r \in \{-1, -1 + 2^{2^{\alpha-1}}\}$. Оскільки $A \neq G$, то $\langle z\rangle \leqslant \langle b^2\rangle$. В силу [101, 103, 107] $b^{-1}ab = a^t$, $t \in \{-1, (1+2^k), -(1+2^k)\}$, $1 < k < \alpha$. Зрозуміло, що $b^{-2}ab^2 = a^{t^2}$, де, очевидно, t^2 конгруентно $1 + s2^{k+1}$ по модулю 2^{α}, s — непарне число. Зрозуміло також, що $A \leqslant \langle a\rangle\langle b^2\rangle$. Але тоді r конгруентно $t^{2^{n+1}}$ по модулю 2^{α}, $z = b^{2^{n+1}}$, n — ціле невід'ємне число. Звідси $r \notin \{-1,-1 + 2^{\alpha-1}\}$. Суперечність. Зна-

чить, A = G. Оскільки G не може бути групою кватерніонів, то за теоремою 12.5.1 з [64] G — група типу 3 чи 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена. Достатність очевидна.

Наслідок 1.1.10. *Нехай G — нециклічна метациклічна 2-група і <a> — її циклічна підгрупа найбільшого порядку, що містить G′. Якщо [G:<a>] > 2, то в G точно три інволюції.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G = <a><b>, <a> < G, <b> < G. Припустимо, що в G не три інволюції. Тоді G — група одного з типів 2—4 наслідку 1.1.9 і [G:G′] = 4. Зрозуміло, що G′ < $<a^2>$. Але [G:G′] = [<a>:G′][G:<a>] > 4. Суперечність. Отже, в G точно три інволюції. Наслідок доведений.

1.2. Основні означення і загальні результати

Означення 1.2.1. *Нехай G — група, A та B — її підгрупи, A ⩽ B. Відрізком (інтервалом) [A;B] ((A;B)) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких A ⩽ X ⩽ B (A < X < B).*

Півінтервалом (A;B] чи [A;B) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких A < X ⩽ B чи A ⩽ X < B.

Проміжком {A;B} називається відрізок, інтервал чи півінтервал.

Означення 1.2.2. *Модулем проміжку /{A;B}/ називається число його елементів.*

Лема 1.2.1. *Для понять, введених в означенні 1.2.1, справедливі твердження:*

1) тоді і тільки тоді /[A;B]/ = 1, чи /(A;B]/ = 0, чи /[A;B)/ = 0, коли A = B;

2) тоді і тільки тоді /[A;B]/ = 2, чи /(A;B]/ = 1, чи /[A;B)/ = 1, коли A — максимальна підгрупа з B;

3) тоді і тільки тоді /[A;B]/ > 2, чи /(A;B]/ > 1, чи /[A;B)/ > 1, коли A — власна немаксимальна підгрупа з B;

4) тоді і тільки тоді /(A;B)/ = 0, коли A = B або A — максимальна підгрупа з B.

Твердження леми випливає з означень 1.2.1 та 1.2.2.

О з н а ч е н н я 1.2.3. *Нехай у групі G для будь-якого відрізка [A;B], де A та B — τ-підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:*

1) при /[A;B]/ ⩾ 1: 1.1) N ∈ [A;B];

2) при /[A;B]/ > 1: 2.1) N ∈ (A;B]; 2.2) N ∈ [A;B); 2.3) N ∈ [A;B];

3) при /[A;B]/ > 2: 3.1) N ∈ (A;B); 3.2) N ∈ (A;B]; 3.3) N ∈ [A;B); 3.4) N ∈ [A;B].

Тоді G називається відповідно: H- , ЩН(τ]- , ЩН[τ)- , ЩН[τ]- , УЩН(τ)-, УЩН(τ]- , УШН[τ)- , УЩН[τ]-групою.

Якщо τ — властивість бути будь-якою підгрупою групи G, то в позначеннях відповідних класів груп буква τ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як H- , ЩН( ]- , ЩН[ )- , ЩН[ ]- , УЩН( )- , УЩН( ]- , УШН[ )- , УЩН[ ]-групи.

Вісім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через K(H), K(ЩН( ]), K(ЩН[ )), K(ЩН[ ]), K(УЩН( )), K(УЩН( ]), K(УШН[ )), K(УЩН[ ]).

Л е м а 1.2.2. *Нехай G — група. Тоді справедливі твердження:*

1) група G тоді і тільки тоді H-група, коли вона дедекіндова група;

2) група G тоді і тільки тоді є ЩН( )- , ЩН[ )- , ЩН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ існує нормальна підгрупа N групи G, що, відповідно, $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

3) група G тоді і тільки тоді є УЩН( )- , УЩН( ]- , УЩН[ )- , УЩН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ таких, що A немаксимальна в B, існує нормальна підгрупа N групи G і, відповідно, $N \in (A;B)$, $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

4) $K(H) \leqslant K(ЩН( )) \leqslant K(ЩН[ )) \leqslant K(УЩН[ ])$,

$K(H) \leqslant K(ЩН[ )) \leqslant K(ЩН[ ])$,

$K(ЩН( )) < K(УЩН( )) < K(УЩН[ ])$,

$K(ЩН[ )) \leqslant K(УЩН[ )) \leqslant K(УЩН[ ])$,

$K(H) \leqslant K(УЩН( )) \leqslant K(УЩН( )) \cap K(УЩН[ ))$.

Доведення. Припустимо спочатку, що G — H-група. Тоді для будь-якої підгрупи X з G за означенням 1.1.3 маємо [X;X] э $N \lhd G$. Звідси $N = X \lhd G$ і G — дедекіндова група. Зрозуміло, що будь-яка дедекіндова група є H-групою і твердження 1 леми доведене.

Нехай в G $/[A;B]/ > 1$. Тоді за означенням 1.2.1 та лемою 1.2.1 $A < B$ і A — власна підгрупа з B. В силу означення 1.2.3 G має таку нормальну підгрупу N, що відповідно $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$. Оскільки для власної підгрупи A підгрупи B з G $/[A;B]/ > 1$ і відповідно (A;B] э $N \lhd G$, [A;B) э $N \lhd G$, [A;B] э $N \lhd G$, то твердження 2 доведене.

Нехай тепер в G $/[A;B]/ > 2$. За означенням 1.2.2 та лемою 1.2.1 A — власна немаксимальна підгрупа з B. За означенням 1.2.3 G має таку нормальну підгрупу N, що, відповідно, $N \in (A;B)$, $N \in$

(A;B], N ∈ [A;B), N ∈ [A;B]. Оскільки для власної немаксимальної підгрупи A підгрупи B з G /[A;B]/ > 2 і, відповідно, (A;B) э N ◁ G, (A;B] э N ◁ G, [A;B) э N ◁ G, [A;B] э N ◁ G, то твердження 3 доведене.

За твердженням 1 розглядуваної леми К(Н) належить всім іншим семи класам груп означення 1.2.3. Якщо /[A;B]/ > 1 і (A;B] э N ◁ G, [A;B) э N ◁ G, [A;B] э N ◁ G, то N ∈ [A;B] і тим більше це справедливо при /[A;B]/ > 2. Звідси К(ЩН( ]) ⩽ К(ЩН[ ]) ⩽ К(УЩН[ ]), К(ЩН[ )) ⩽ К(ЩН[ ]) ⩽ К(УЩН[ ]), К(ЩН[ )) ⩽ К(ЩН[ ]), К(ЩН( ]) ⩽ К(УЩН( ]), К(ЩН[ )) ⩽ К(УЩН[ )). Нехай далі /[A;B]/ > 2. Тоді із співвідношення (A;B) э N ◁ G маємо N ∈ (A;B], N ∈ [A;B). Звідси К(УЩН( )) ⩽ К(УЩН( ]) ∩ К(УЩН[ )). Нарешті, із співвідношень (A;B] э N ◁ G, [A;B) э N ◁ G випливає, що N ∈ [A;B], і тому К(УЩН( ]) ⩽ К(УЩН[ ]), К(УЩН[ )) ⩽ К(УЩН[ ]). Твердження 4 доведене. Лема доведена.

Л е м а 1.2.3. *Нехай G — неперіодична УШН[1]-група, тобто для будь-якого /[A;B]/ > 2 і /A/ = ∞ маємо [A;B] э N ◁ G. Тоді G — абелева група.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді G містить елемент g, /g/ = ∞ . Покладемо $\langle g\rangle = B$, $A_1 = \langle g^4\rangle$, $A_2 = \langle g^9\rangle$. За умовою леми $[A_1;B]$ э N_1 ◁ G, $[A_2;B]$ э N_2 ◁ G. Ясно, що $\langle g\rangle = N_1N_2$ і, значить, $\langle g\rangle$ ◁ G. Отже, всі нескінченні циклічні підгрупи нормальні в G. Нехай x — довільний примарний елемент з G. Тоді група G містить підгрупу $Y = \langle g\rangle \lambda \langle x\rangle$. Покладемо $A = \langle g^8\rangle \lambda \langle x\rangle$, $B = \langle g^{32}\rangle \lambda \langle x\rangle$. Тоді /[A;B]/ > 2, /A/ = ∞ і за умовою леми [A;B] э N ◁ G. Ясно, що x ∈ N, $N = \langle g^{2^\alpha}\rangle \lambda \langle x\rangle$, 3 ⩽ α ⩽ 5 і $Y' \leqslant \langle g^{2^\alpha}\rangle$ і тому $Y' \leqslant \langle g^8\rangle$. Відомо, що $x^{-1}gx = g^{-1}$, або $x^{-1}gx = g$. Звідси з умови $Y' \neq \langle g^2\rangle$ випливає, що $x^{-1}gx = g$, $Y = \langle g\rangle \times \langle x\rangle$, N

$= \langle g^{2^{\alpha}} \rangle \times \langle x \rangle$ і $\langle x \rangle$ — періодична частина N. Звідси $\langle x \rangle \lhd G$ і тому в силу твердження 1.1.1 G — абелева група. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 1.2.4 [207]. *Підгрупа A групи G називається квазіцентральною підгрупою з G, якщо всі її підгрупи нормальні в G.*

Л е м а 1.2.4. *Нехай УЩН[ ]-група G має підгрупу* $D = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $/a_i/ = p_i$, p_i — *просте число,* $i \in \{1,2,3,4\}$. *Тоді G — дедекіндова група.*

Доведення. Нехай G та D задовольняють умови леми. Якщо G — неперіодична група, то твердження леми справедливе в силу леми 1.2.3. Нехай G — періодична група. Покажемо, що $\langle a_i \rangle \lhd G$. Покладемо $B_{1,2} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $B_{1,3} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $B_{1,4} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, $A = \langle a_1 \rangle$. Тоді $/[A;B_{1,j}]/ > 2$, $j \in \{2,3,4\}$. За означенням УЩН[ ]-груп $[A;B_{1,j}]$ э $N_j \lhd G$. Ясно, що $\cap\, {}^{4}_{j=2}\, N_j = \langle a_1 \rangle \lhd G$. Аналогічно доводимо, що для будь-якого i, $i \in \{2,3,4\}$, $\langle a_i \rangle \lhd G$. Нехай x — будь-який p-елемент з G. Тоді G містить підгрупу $X = D\langle x \rangle$ і $/D \cap \langle x \rangle/ \in \{1,p\}$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle$ має одиничний перетин хоча б з однією із підгруп $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, $\langle a_1 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $\langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x \rangle \cap U = 1$, де $U = \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$ і в G існує підгрупа $V = U \lambda \langle x \rangle$. Покладемо $A = \langle x \rangle$, $B_2 = (\langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $B_3 = (\langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $B_4 = (\langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle) \lambda \langle x \rangle$. Тоді за означенням УЩН[ ]-груп маємо $[A;B_j]$ э $N \lhd G$, $j \in \{2,3,4\}$. Тепер $\cap\, {}^{4}_{j=2}\ N_j = \langle x \rangle \lhd G$. Отже, будь-яка циклічна примарна підгрупа з G нормальна в G і тому, як легко бачити, G — дедекіндова група. Лема доведена.

Л е м а 1.2.5. *Нехай G — УЩН[ ]-група і* $X = U \times V$ — *її підгрупа. Тоді справедливі твердження:*

1) якщо /V/ = r (r — просте число), то U — ЩН[ ]-група і при нільпотентності U вона є УЩН( )-групою;

2) якщо V містить власні немаксимальні підгрупи, то U — дедекіндова група і при U ◁ G U — квазіцентральна підгрупа з G.

Доведення. Нехай G та X задовольняють умови леми і A — будь-яка підгрупа з U. При умові твердження 2 леми V містить V_1, де V_1— власна немаксимальна підгрупа з V. Отже, /[A;B]/ > 2, де B = A × V. За означенням УЩН[ ]-груп маємо [A;B] э N ◁ G, N = (U ∩ N) × V_2, де V_2 — підгрупа з V, A ⩽ N ∩ U ⩽ U ∩ B = A. Звідси A ◁ U. Якщо при цьому U ◁ G, то A ◁ G. Отже, U — дедекіндова група і при U ◁ G будь-яка її підгрупа нормальна в G. За означенням 1.2.3 U — квазіцентральна підгрупа з G. Твердження 2 леми доведене.

Нехай виконується умова твердження 1 леми і нехай /[A;B]/ > 1, де B ⩽ U. Покладемо B_1 = B × V. Тоді /[A;B_1]/ > 2 і за означенням УЩН[ ]-груп [A;B_1] э N ◁ G. Нехай N_1 = N ∩ U. Тоді N_1 ⩽ U і N_1 ∈ [A;B]. Звідси U — ЩН[ ]-група.

Нехай U — нільпотентна група і /[A;B]/ > 2. Покажемо, що A < N_1 < B, де N_1 ◁ G. Справді, оскільки /[A;B]/ > 2, то A < C < B. Покладемо C_1 = C × V. Тоді /[A;C_1]/ > 2 і /[C;B_1]/ > 2. За означенням УЩН[ ]-груп маємо [A;C_1] э M_2 ◁ G, [C;B_1] э M_3 ◁ G. Покладемо N_2 = U ∩ M_2, N_3 = U ∩ M_3. Тоді N_2 ◁ U, N_3 ◁ U. Зрозуміло, що A ⩽ N_2, A < N_3, N_2 < B, N_3 ⩽ B. Якщо A < N_2, то (A;B) э N_2 ◁ U і U — УЩН( )-група. Якщо N_3 < B, то A < N_3 < B і, значить, U — УЩН( )-група. В противному разі N_2 = A, N_3 = B. Відомо (див., наприклад, [73, твердження 1.6]), що в нільпотентній групі U при умові A ◁ U, B ◁ U, A — власна немаксимальна підгрупа з B, маємо (A;B) э N ◁ U і знову U — УЩН( )-група. Лема доведена.

Т е о р е м а 1.2.1. *Класи К(Н), К(ЩН( )), К(ЩН[ )), К(ЩН[ ]), К(УЩН( )), К(УЩН( ]), К(УШН[ )), К(УЩН[ ]) замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.*

Доведення. Нехай G — група одного із восьми класів груп теореми, X — довільна підгрупа з G і $A \leqslant X \leqslant B$. За умовою теореми маємо нормальну підгрупу N з G, яка задовольняє відповідні співвідношення означення 1.2.3. Зрозуміло, що $N \lhd X$ і тому всі розглядувані класи груп замкнені за підгрупами.

Нехай $\overline{G}$ — довільна фактор-група одного з розглядуваних класів груп, $\overline{A} \leqslant \overline{B} \leqslant \overline{G}$. Тоді $A \leqslant B \leqslant G$, де A і B — повні прообрази $\overline{A}$ і $\overline{B}$ в групі G відповідно і G — група одного з класів означення 1.2.3. За цим же означенням G має нормальну підгрупу N, яка задовольняє відповідні співвідношення означення. Зрозуміло, що образ $\overline{N}$ в $\overline{G}$ підгрупи N з G теж задовольняє співвідношення означення 1.2.3. Значить, всі розглядувані класи груп замкнені за фактор—групами.

Зрозуміло, що група кватерніонів восьмого порядку Q буде групою кожного з розглядуваного класу груп. Нехай $G = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4$, де Q_i — група кватерніонів порядку 8, $i \in \{1,2,3,4\}$. Зрозуміло, що G — недедекіндова група, яка містить елементарну абелеву підгрупу порядку 64. За лемою 1.2.4 G — дедекіндова група. Суперечність. Звідси, жоден із розглядуваних класів груп не є замкненим за прямими добутками. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1.2.1. *Недедекіндова локально ступінчаста УЩН[ ]-група є розв'язною черніковською групою.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 1.2.3 G — періодична група. Нехай H — будь-яка нескінченна неабелева

підгрупа з G і h — її довільний елемент. Тоді /[<h>;H]/ > 2 і за означенням УЩН[ ]-груп [<h>;H] э N ◁ G. Звідси легко бачити, що H ◁ G. В силу твердження 6.5 з [73] нескінченна група G розв'язна. За лемою 1.2.4 G не має абелевих підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних множників. Отже, G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп і тому за відомим результатом з [208] G — черніковська група з повною частиною R. За теоремою 1.2.1 G/R — скінченна УЩН[ ]-група.

Нехай R = 1. Тоді /G/ < ∞. Покажемо, що G — розв'язна група. Зрозуміло, що G має головний ряд $1 = G_0 \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$, фактори якого є елементарними абелевими групами чи простими групами. Якщо всі фактори вибраного ряду абелеві, то G — розв'язна група. Припустимо, що для деякого $i > 0$ G_i/G_{i-1} — неабелева і тому проста група. Тоді G_i/G_{i-1} містить $B/G_{i-1} > A/G_{i-1} > \bar{1}$ і $/[A/G_{i-1};B/G_{i-1}]/ > 2$. За означенням 1.2.3 [A;B] э N ◁ G і N/G_{i-1} — неодинична власна нормальна підгрупа з G_i/G_{i-1}, що суперечить простоті G_i/G_{i-1}. Отже, при R = 1 G — розв'язна група.

При R ≠ 1 G — розв'язна група за попереднім. Всі випадки розглянуті. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.2.2. *Недедекіндова локально ступінчаста УЩН[ ]-група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа U якої може бути лише власною підгрупою одного з типів:*

1) U — циклічна підгрупа порядку p^{α}, $\alpha > 0$, p — довільне просте число, $\Phi(\Phi(U)) = M \lhd G$;

2) U — група порядку pq, p і q — необов'язково різні прості числа, $M = 1 \lhd G$;

3) U — група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M \lhd G$;

4) U — циклічна підгрупа порядку $p^{\alpha}q$, $\alpha > 1$, p і q — різні прості числа, $M \leqslant U$, $M \lhd G$, $/M/ = p^{\alpha-1}q$;

5) $U = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, $/x/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/y/ = p$, p — довільне просте число, $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] \leqslant \langle x^{p^{\Delta}} \rangle$ $[U:U'] > 4$, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U', $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle = M \lhd G$;

6) $U = R \lambda \langle x \rangle$, R — елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $r^{\gamma} > 2$, $/x/ = p^{\beta}$, p і r — різні прості числа, $\gamma \in \{1,2,3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з U, $U' = R$, $R \times \langle x^p \rangle = M \lhd G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови теореми. Тоді $1 < U < G$ і за наслідком 1.2.1 G — розв'язна черніковська група. Якщо /U/ — просте число, то U — група типу 1. Нехай /U/ — не просте число. Тоді за умовою 1 леми 1.1.1 U має власні немаксимальні підгрупи X. Звідси $/[X;U]/ > 2$ і за означенням 1.2.3 $[X;U] \ni N(X) \lhd G$. Якщо U породжується своїми власними немаксимальними підгрупами X, то U породжується і підгрупами N(X). Тому $U \lhd G$, що неможливо. Отже, U не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами і тому U задовольняє умову теореми 1.1.1. За цією теоремою U і M можуть бути типу 1—6. Якщо U та M — групи типу 1—5 згаданої теореми, то тоді U та M — підгрупи одного з типів 1—5 розглядуваної теореми.

Нехай U — група типу 6 теореми 1.1.1. Тоді $U = R \lambda \langle x \rangle$, R та $\langle x \rangle$ задовольняють ті ж співвідношення, що в теоремі 1.1.1, тобто $/R/ = r^{\gamma} > 2$, $/x/ = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, r і p — різні прості числа. Оскільки G — недедекіндова група, то за лемою 1.2.4 вона не містить елементарних абелевих підгруп порядку r^4. Звідси $\gamma \in \{1,2,3\}$. Покажемо, що $/G/ < \infty$. Дійсно, нехай $/G/ = \infty$. Тоді G містить квазіциклічну підгрупу K, яка за попереднім не може бути

ненормальна в G. Звідси K $\lhd$ G. Зрозуміло, що K $\cap$ R = 1 і, значить, в G існує підгрупа V = K<x>, яка за попереднім теж нормальна в G. Але тоді V $\cap$ U = <x> $\lhd$ U, що неможливо. Отже, /G/ < ∞. За теоремою 1.1.1 M = R λ $<x^p>$ $\lhd$ G. Покажемо, що M′ = 1. Дійсно, нехай це не так. Тоді за лемою Фраттіні (див., наприклад, [74, лема 17.1.8]) G = MD = RD, де D = $N_G(<x^p>)$. Зрозуміло, що <x> $\leqslant$ D. Оскільки M′ $\neq$ 1, то R $\cap$ D = R′ — власна підгрупа з R, R′ $\lhd$ D, R′ $\lhd$ R, а тому R′ $\lhd$ G. Оскільки R — мінімальна нормальна підгрупа з U, то R′ = 1 і G = R λ D, D $\not\lhd$ G. Зрозуміло, що D — скінченна група одного з типів 1—6 теореми 1.1.1. Оскільки U $\not\lhd$ G, то <x> $\not\lhd$ D. Звідси D — недедекіндова група і тому D — неабелева група типу 2, 5, 6 теореми 1.1.1. Зрозуміло, що /x/ > p. Тому /D/ ділиться на добуток більше ніж двох простих чисел. Звідси D не може бути групою типу 5 теореми 1.1.1. За твердженням цієї теореми <x> містить D′ ,<x> $\lhd$ D, що суперечить попередньому. Отже, D може бути групою типу 6 теореми 1.1.1 і містить M_1 $\lhd$ G, D/M_1 — група простого порядку. Зрозуміло, що $[R,M_1] = 1$, $x^p \in M_1$, $[R,x^p] = 1$. Звідси M′ = 1, що не так, і тому M = R $\times$ $<x^p>$.

Нехай $\gamma > 1$. Припустимо, що $\gamma + \beta > 4$. Тоді R містить підгрупу A, /A/ > 1, A < R, U — підгрупу B = A $\times$ $<x^p>$ і /[A;B]/ > 2. За означенням УЩН[ ]-груп [A;B] э N $\lhd$ G. Оскільки R $\lhd$ G, N $\lhd$ G, то R $\cap$ N = N_1 $\lhd$ G, A $\leqslant$ N_1 < R, що суперечить мінімальності R в U. Отже, $\gamma + \beta < 5$ і U — група типу 6 розглядуваної теореми. Теорема доведена.

О з н а ч е н н я 1.2.3 *(див., наприклад, [209]). Група G називається дисперсивною, якщо вона має силовський ряд, тобто ряд нормальних в G підгруп* $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ *таких, що при* $n < 2$ *G — p-група (p — просте число), а при* $n > 1$, $i > 0$

G_i/G_{i-1} — p_i-група (p_i— просте число), а при $i \neq j$, $j > 0$, p_i, p_j — різні прості числа.

Група G називається дисперсивною за Оре, якщо при $1 < i < n$ $p_i > p_j$.

Т е о р е м а 1.2.3. *Недедекіндові локально ступінчасті УЩН[ ]-групи G мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з типів:*

1) G — скінченна ненільпотентна група;

2) G — скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група;

3) G має центральну квазіциклічну p-підгрупу R, для якої G/R — скінченна дедекіндова група.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за наслідком 1.2.1 G — розв'язна черніковська група, яка за лемою 1.2.4 не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток не більше ніж трьох неодиничних множників. Можливі випадки: 1) /G/ = ∞; 2) /G/ < ∞.

Випадок 1. У цьому випадку G містить квазіциклічну p-підгрупу R, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G. Нехай x — довільний примарний елемент з G. Тоді в G існує підгрупа X = R<x> і /[<x>;X]/ > 2. За означенням УЩН[ ]-груп [<x>;X] э N ◁ G. Ясно, що X = RN ◁ G. Звідси X/R = <Rx> ◁ G/R і, таким чином, всі примарні циклічні підгрупи нормальні в G/R і тому G/R — дедекіндова група.

Припустимо, що повна частина G має більше ніж одну квазіциклічну підгрупу. Тоді в G існують квазіциклічні підгрупи

R_1 і R_2 такі, що $R_1 \cap R_2 = 1$. За попереднім $R_i \lhd G$, G/R_i — дедекіндова група, $i \in \{1,2\}$. За теоремою 1.1.2 G — дедекіндова група, що не так. Звідси повна частина G співпадає з квазіциклічною p-підгрупою R.

За попереднім для будь-якого примарного елемента x з G X = R<x> = RN. Не порушуючи загальності можна вважати, що /N/ < ∞. Звідси [R,<x>] ⩽ N ∩ R, /N ∩ R/ < ∞ і тому /X′/ < ∞. Отже, квазіциклічна підгрупа R лежить у центрі X. Оскільки G — черніковська нільпотентна група, то G′ ⋟ R і, значить, /G′/ < ∞. Звідси G — група типу 3 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку /G′/ < ∞. Нехай G — нільпотентна група. Тоді G = U × V, де V — недедекіндова силовська p-підгрупа з G, V — її холлівське доповнення в G. За лемою 1.2.5 /V/ ∈ {1,r}, r — просте число, r ≠ p і, значить, у цьому випадку G — група типу 2 теореми.

Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Покажемо, що G — дисперсивна група. Припустимо, що це не так. Тоді G містить мінімальну недисперсивну підгрупу X, яка, очевидно, розв'язна.

Нехай X′ не містить жодної примарної силовської підгрупи з X. Тоді в силу ([209, § 2.3]) X = SD, де S — група Шмідта, D — ненільпотентна підгрупа з X, [S,D] = 1, S ∩ D = Z ⩽ Z(X), Z ⩽ Φ(S), Z ⩽ Φ(D). За теоремою 1.2.1 X/Z = S/Z × D/Z — УЩН[ ]-група. Відомо [209, § 2.3], що S/Z і D/Z — ненільпотентні групи. За лемою 1.2.5 S/Z чи D/Z має бути дедекіндовою групою, що неможливо. Отже, X′ містить хоча б одну примарну силовську підгрупу з X. В силу [209, § 3.2] X = PQ, P — силовська ненормальна в X p-підгрупа, Q — ненормальна в X силовська q-підгрупа, p ≠ q, P′ ≠ 1, P неізоморфна групі кватерніонів порядку 8. За теоремою 1.2.2 P =

$\langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$, $/x/ = p^{\Delta}$, $/y/ = p$, $\Delta > 1$, $[x,y] = x^{p^{\Delta-1}}$, $\langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$, $[P:P'] > 4$. Знову в силу ([209, §3.2]) $X = AD$, $D = Q \lambda \langle b\rangle$, $D \lhd G$ і D — нільпотентна підгрупа, яка задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути підгрупою типу 2, 6 згаданої теореми. Якщо припустити, що D — підгрупа типу 6 теореми 1.2.2, то $Q \times \langle b^p\rangle = M \lhd G$ і, значить, $Q \lhd G$, що неможливо.

Нехай тепер D — група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/D/ = qp$, $q > p$. Оскільки A належить метациклічній підгрупі P, то A — нециклічна метациклічна група. При $/A/ = 4$ P — група діедра порядку 8, яка не може бути групою типу 5 теореми 1.2.2. Суперечність. Значить, $/A/ > 4$. Зрозуміло, що $A \lambda Q$ — нільпотентна група, яка містить підгрупу Шмідта S з нормальною метациклічною силовською p-підгрупою і ненормальною силовською q-підгрупою, $q > p$. За відомими результатами (див., наприклад, [209, твердження 1.1.1]) $p = 2$, $q = 3$. Звідси $/A/ \geqslant 8$ і знову в силу ([209, § 3.2]) $/P'/ > 2$ і, таким чином, P не може бути підгрупою типу 5 теореми 1.2.2. Отже, G — дисперсивна група типу 1 теореми. Теорема доведена.

1.3. Деякі частинні випадки

О з н а ч е н н я 1.3.1 *(див., наприклад, [64, § 9.4]). Група* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ *називається метациклічною групою, якщо* $\langle a\rangle \lhd G$.

Т в е р д ж е н н я 1.3.1 [66]. *Клас метациклічних груп замкнений за підгрупами та фактор-групами, незамкнений за прямими добутками і замкнений за скінченними прямими добутками скінченних прямих множників попарно взаємно простих порядків.*

Означення 1.3.2. *Нільпотентна група з нільпотентними власними підгрупами називається групою Шмідта.*

Означення 1.3.3. *Неабелева група з абелевими власними підгрупами називається групою Міллера—Морено.*

Наслідок 1.3.1. *Нехай G — локально ступінчаста УЩН[ ]-група, U — її ненормальна підгрупа. Тоді справедливі твердження:*

1) U — скінченна, не більше ніж біпримарна підгрупа з абелевими власними підгрупами;

2) U — нільпотентна група Міллера—Морено, що може бути підгрупою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2;

3) U — неметациклічна група, коли вона підгрупа з G типу 6 теореми 1.2.2, $\gamma > 1$, $\gamma + \beta < 5$;

4) U' — r-група, r — просте число, будь-яка циклічна r-підгрупа з U порядку більше r містить U'.

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови наслідку. Тоді U — підгрупа одного з типів 1—6 теореми 1.2.2. Очевидно, що U — скінченна, не більше ніж біпримарна група. Очевидно також, що всі власні підгрупи з U є абелевими групами і тому справедливе твердження 1 наслідку. Нільпотентна підгрупа U групи G може бути лише групою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2. Але тоді за твердженням 1 наслідку всі власні підгрупи з U абелеві і тому за означенням 1.3.3 U — нільпотентна група Міллера—Морено. Таким чином, твердження 2 наслідку доведене.

Ясно, що U′ — r-група, r — просте число. Нехай g — елемент з G і $/g/ = r^2$. Покажемо, що $\langle g \rangle \geqslant U'$. При $U' = 1$ це очевидно. Нехай $U' \neq 1$. Тоді U — підгрупа одного з типів 2, 3, 5, 6 теореми 1.2.2. В підгрупі U кожного з типів 2, 6 згаданої теореми немає

циклічних підгруп порядку r^2 і тому $\langle g\rangle \geqslant U'$. Підгрупа U типу 3 теореми 1.2.2 є групою кватерніонів порядку 8, у якій всі підгрупи порядку 4 містять U′. У підгрупі U типу 5 теореми 1.2.2 за умовою цієї теореми будь-яка підгрупа порядку r^2 містить U′. Отже, завжди $\langle g\rangle \geqslant U'$, що доводить твердження 4 наслідку. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.3.1. *Локально ступінчасті УЩН[ ]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \lambda Q$, де P — нормальна в G силовська p-підгрупа порядку $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{1,2,3\}$, $G' = P$, Q — ненормальна циклічна силовська q-підгрупа з G порядку q^{β}, $\beta > 0$, p і q — різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leqslant Z(P)$, $/\Phi(P)/ = p^{\Delta}$, $\Delta \in \{0,1\}$, $\alpha \cdot \Delta$ — показник p по модулю q, $\Phi(P) \times Q$ — максимальна підгрупа з G, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, та вичерпуються групами типів:*

1) P — група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;

2) $exp(P) = /\Phi(P)/ = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;

3) P — елементарна абелева група, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

***Доведення**. Необхідність*. Нехай G задовольняє умови теореми. За теоремою 1.2.3 G — скінченна нільпотентна група, яка в силу (див., наприклад, [210]) має вигляд $G = P \lambda Q$, де для P і Q виконуються всі умови з початкового формулювання розглядуваної теореми, окрім умови $\alpha \in \{1,2,3\}$. Покажемо, що G — група одного з типів 1 - 3 теореми і тим самим одержимо справедливість згаданої умови. Якщо $\alpha = 1$, то G — група типу 3 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha > 1$. При $\alpha = 2$ і $\alpha + \beta < 5$ в силу [210] G — група типу 3. Нехай $\alpha \geqslant 3$ і M — будь-яка максимальна підгрупа з P. Як відомо [210], $\Phi(P) < M$ і $M \trianglelefteq G$ і в силу наслідку 1.3.1 M — метациклічна група.

Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді, очевидно, G має ненормальну підгрупу $U = M \times \Phi(Q)$, яка може бути лише підгрупою типу 5 теореми 1.2.2 і тому є циклічною групою порядку $p^{\Delta}q$. Але $/U/ = /M//\Phi(Q)/ \geqslant p^2q^2$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\beta < 3$.

Нехай $P' = 1$. Тоді знову в силу [210] P — елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha > 2$. Ясно, що $G > P \times \Phi(Q)$. За теоремою 1.2.3 недедекіндова група G не має підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників. Звідси P — елементарна абелева група порядку p^3, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta < 5$ і G — група типу 3 теореми.

Покажемо, що при $\alpha = 2$ $\alpha + \beta < 5$. Якщо $\beta < 3$, то це очевидно. Нехай $\beta > 2$. Тоді G містить підгрупу $U = M \times \Phi(Q)$, де M — максимальна підгрупа з P, $/M/ = p$, $/\Phi(Q)/ = q^{\beta-1}$. Якщо припустити, що $U \not\lhd G$, то знову U — підгрупа типу 5 теореми 1.2.2, яка містить нормальну в G підгрупу M_1 порядку $pq^{\beta-2}$. Звідси $P \cap M_1 = M \lhd G$, що суперечить відомим результатам про групи Шмідта при $\alpha = 2$ (див., наприклад, [210]). Таким чином, при $P' = 1$ і $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Нехай далі $P' \neq 1$. Тоді за властивістю груп Шмідта [210] $P' = \Phi(P) = Z(P)$ і $U = \Phi(P) \lambda Q \not\lhd G$. Значить, U задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути тільки циклічною групою. Звідси $\Phi(P)$ — циклічна група. За властивістю груп Шмідта [210] $\exp(\Phi(P)) = p$ і при $p > 2$ $\exp(P) = p$.

Припустимо, що P — метациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [210] P — група кватерніонів порядку 8 і в цьому випадку G — група типу 1 теореми.

Припустимо тепер, що P — неметациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [210] і теоремою 1.2.1 G/Φ(P) — УЩН[ ]-група Шмідта з нормальною силовською p-підгрупою P/Φ(P) порядку $p^{\alpha-1}$, яка є ненільпотентною групою Міллера—Морено типу 3 розглядуваної теореми, $\alpha > 2$ і $\alpha - 1$ є показником p за модулем q. Для групи G типу 3 розглядуваної теореми $\alpha - 1 \in \{2,3\}$. Знову за властивістю груп Шмідта при $\alpha - 1 = 3$ $\Phi(P) = 1$, що неможливо. Таким чином, $\alpha - 1 = 2$ і, значить, $\alpha = 3$ і P — неметациклічна неабелева група порядку p^3, яка, як відомо, має експоненту p, $p > 2$, 2 є показником p за модулем q. Звідси $q > 2$. Знову за властивістю груп Шмідта [210] P/Φ(P) не може бути елементарною абелевою групою порядку 9. Звідси $p > 3$.

Покажемо, що $\beta = 1$. Нехай це не так. Тоді $P > M = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$, $/c/ = /x/ = p$, $\langle c \rangle = \Phi(P)$, $M \not\lhd G$. Покладемо $N = M \times \Phi(Q)$. За припущенням N — абелева непримарна нециклічна підгрупа з G порядку $p^2q^{\beta-1}$. Зрозуміло, що N не може бути групою одного з типів 1—6 теореми 1.2.2. Тому за цією теоремою $N \lhd G$, $P \cap N = M \lhd G$, що суперечить ненормальності M в G. Отже, $\beta = 1$ і G — група типу 2 теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = P \lambda Q$ — група одного з типів розглядуваної теореми. За властивістю загального вигляду групи G маємо, що G — скінченна група Шмідта (див.,наприклад, [210]).

Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Дійсно, нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $N = A$ чи $N = B$ і все доведено. Звідси $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $/A/ > 1$, $B \not\ni G'$. Оскільки $G' = P$ і B — власна підгрупа з G, то B — власна нільпотентна підгрупа вигляду $P_1 \times Q_1$, де $P > P_1 = P \cap B$ — силовська p-підгрупа з B, Q_1 — її холлівське доповнення в B.

Оскільки $/A/ \neq 1$, то $/B/$ є добутком не менше ніж трьох простих чисел. Далі, оскільки $/P_1/ \leqslant p^2$, то в групі G типу 2 $/Q_1/ \geqslant q$ і тому $/P'/ = p^2$, $/Q_1/ = q$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = Q_1$. Звідси в P існує максимальна підгрупа P_1 і $P_1 \lhd G$, що не так в групах Шмідта (див., наприклад, [210]). Значить, для груп типу 2 достатність доведена.

Аналогічно доводимо достатність для груп G типу 3 при $\alpha = 3$ і для груп G типу 1 при $\beta = 1$.

Нехай G — група типу 1 і $\beta = 2$. При цій умові нижній шар $w(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому всі елементи з G простого порядку належать Z(G). Звідси та за попереднім $/A/$ є добутком не менше ніж двох простих чисел, $/B/$ — добуток не менше ніж чотирьох простих чисел, $/G/$ — добуток п'яти простих чисел, [G:B] ділиться на 2. Звідси $/B/ = 36$, $/P_1/ = 4$, $/Q_1/ = 9$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $Q_1 = Q$, і тому $P_1 \lhd G$, що в групах Шмідта неможливо [210]. Таким чином, для груп G типу 1 достатність доведена.

Нехай, нарешті, G — група типу 3. За попереднім $\alpha \in \{1,2\}$. Нехай $\alpha = 1$. Вище доведено, що $P_1 < P$ і тому $/P_1/ = 1$, B — q-група, яка без порушення загальності належить циклічній підгрупі Q. Ясно, що A — власна немаксимальна підгрупа як з B, так і з Q. Звідси $A \leqslant \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так. Тому $\alpha = 2$ і $\alpha + \beta < 5$. Зрозуміло, що [G:B] ділиться на p, $/G/$ — добуток більше ніж чотирьох простих чисел, $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси $/B/ = pq^2$, $/Q/ = q^2$. Знову без порушення загальності можна вважати, що $Q = Q_1$, $P_1 \lhd G$, що в групах Шмідта неможливо [210]. Отже, всі випадки розглянуті і тим самим достатність доведена. Теорема доведена.

При доведенні достатності теореми 1.3.1 встановлено такий результат.

Наслідок 1.3.2. *В локально ступінчастій УЩН[ ]-групі Шмідта G з умови /[A;B]/ > 2 випливає, що або A ◁ G, або B ◁ G.*

Наслідок 1.3.3. *Локально ступінчасті УЩН[ ]-групи G Міллера—Морено вичерпуються групами типів:*

1) G — група кватерніонів порядку 8;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-1}}$, *p — довільне просте число;*

3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/c/ = p$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha \in \{1,2\}$, $\beta \in \{1,2\}$, $p(\alpha+\beta) > 4$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$;

4) $G = P \lambda Q$ *— група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За відомими результатами (див., наприклад, [77, твердження 1.1.1]) і за теоремою 1.2.3 G — скінченна примарна p-група, чи скінченна група Шмідта.

Нехай G — p-група, що не є групою одного з типів 1, 2 розглядуваного наслідку. Тоді в силу твердження 1.1.1 з [77] $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/c/ = p$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$. При $p(\alpha + \beta) = 4$ G — група діедра порядку 8, яка, очевидно, є групою типу 2 розглядуваного наслідку. Тому будемо вважати, що $p(\alpha + \beta) > 4$. Відомо також, що $Z(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle = \Phi(G)$, $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle \triangleleft G$, $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle \triangleleft G$. В силу теореми 1.2.2 підгрупи $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle$, $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$ можуть бути лише p-підгрупами одного з типів 1, 2, 5 цієї теореми. Для підгруп згаданих типів $\alpha < 3$, $\beta < 3$ і G — група типу 2. Випадок, коли G — примарна група, розглянуто повністю.

Нехай G — непримарна група. Тоді $G = P \lambda Q$ — група Шмідта, у якої $P' = 1$ і G задовольняє умову теореми 1.3.1 і тому є групою типу 3 згаданої теореми. Звідси G — група типу 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—4 розглядуваного наслідку. Тоді в силу твердження 1.1.1 з [77] G — скінченна група і, значить, локально ступінчаста група Міллера—Морено. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Для груп G типу 4 це встановлено в теоремі 1.3.1, а для груп G типу 1 це очевидно. Тому в подальшому будемо вважати, що G — група одного з типів 2, 3 наслідку.

Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що [A;B] э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то це очевидно. Тому $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \not< Z(G)$, $B \cap G' = 1$. У групах кожного з типів 2, 3 наслідку для будь-якого $g \in G$ маємо $g^p \in Z(G)$. Зрозуміло, що $/B/ > p^3$. Для груп G типу 2 $B = \langle g \rangle$, $A \leqslant \Phi(B) = \langle g^p \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A, і тому для груп G типу 2 достатність доведена. В групах G типу 3 $[G:\langle c \rangle] \leqslant p^4$. Звідси $/B/ \leqslant p^4$. Оскільки $\langle c \rangle$ не доповнюється в G, то $/B/ < p^4$ і, значить, $/B/ = p^3$, $\alpha = \beta = 2$, $/A/ = p$. Але за цих умов $A \leqslant w(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leqslant Z(G)$, шо суперечить вибору A, і тим самим достатність для груп G типу 3 доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.3.2. *Метациклічні УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:*

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 2^\alpha$, $/b/ = 2^\beta$, $\alpha \in \{2,3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leqslant k < \alpha$, $\alpha - k \leqslant \beta$;

5) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$;

6) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

8) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

9) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^{\beta}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $\beta \in \{3,4\}$, $b^{-1}ab = a^{7}$;

10) $G = P \times D$, P — група кватерніонів порядку 8, D — скінченна абелева метациклічна група;

11) $G = P \times D$, P – силовська p-підгрупа G, $|D| = q$, p і q — різні прості числа, P — група одного з наступних типів розглядуваної теореми: 2, $|P'| = 2$; 4, $|P'| = p$; 6, $\beta < 4$;

12) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $|a| = pr$, p і r — необов'язково різні прості числа, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $b^{q} \in Z(G)$;

13) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $|z| \in \{1,r\}$, r — просте число, $\Phi(\Phi(\langle b\rangle)) \leqslant Z(G)$; при $|z| = r$ $b^{q} \in Z(G)$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

14) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, q і r — різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $C_{\langle b\rangle}(\langle a\rangle) = 1$;

15) $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle b\rangle$, $|a| = p$ — непарне просте число, $\langle z,b\rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

16) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ — *непарне просте число,* $/b/ = q^{\beta}$, $/z/ = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[a,b^q] = [a,z] = 1$, $[b,z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умови теореми. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $\langle a \rangle \lhd G$. Якщо $G' = 1$, то G — група типу 1. Нехай далі $G' \neq 1$. Якщо G — гамільтонова група, то в силу твердження 1.1.1 G — група типу 10. Тому в подальшому будемо вважати, що G — недедекіндова метациклічна група. За теоремою 1.2.3 G — скінченна недедекіндова метациклічна група і в силу твердження 1.3.1 всі підгрупи G та її фактор-групи метациклічні. Розглянемо два можливі випадки: 1) G — скінченна нільпотентна група; 2) G — скінченна ненільпотентна група.

Випадок 1. Можливі випадки: 1.1) G — p-група; 1.2) G — не p-група.

Випадок 1.1. У цьому випадку в силу [101] $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^k} \rangle$, $p^k > 2$, $0 < k < \alpha$, $G' > \langle c \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, $\langle c \rangle \leqslant Z(G)$, $/c/ = p^{\Delta}$, $\langle b \rangle \not\lhd G$. Якщо $\alpha - k = 1$, то $/G'/ = p$ і G — метациклічна недедекіндова група Міллера—Морено, яка може бути лише групою типу 2 наслідку 1.3.3. Звідси G — група типу 2 або 4 розглядуваної теореми. Нехай далі $\alpha - k > 1$ і тому $\alpha > 2$, $\alpha - k \leqslant \Delta$, $1 < \Delta \leqslant \alpha$. Значить, в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle\langle a^{p^{\alpha-\Delta-2}} \rangle$. Покажемо, що $\langle b \rangle \leqslant N \leqslant B$ і $N \lhd G$. Якщо $B \lhd G$, то $B = N$ і все доведено. Нехай $B \not\lhd G$. Зрозуміло, що B — нециклічна p-група, $\exp(B) > p$. Тому B задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути лише групою типу 5 згаданої теореми, для якої $\langle b \rangle$ — немаксимальна в B і $\langle b \rangle \leqslant M \lhd G$, M — одна з максимальних підгруп B. Отже, завжди $N \leqslant B$, $\langle b \rangle \leqslant N \lhd G$. З цього випливає, що $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = G' \leqslant N \leqslant B$. Але тоді $k \geqslant \alpha - \Delta - 2$. При $\Delta = 0$ $k = \alpha - 2$. Тепер при $k = 1$

$\alpha = 3$ і в силу [101] G — група одного з типів 2, 3, 4 розглядуваної теореми. Якщо $k > 1$, то в силу [101] G — група типу 4 теореми.

Нехай тепер $\Delta > 0$. При $p^k > 2$ в силу [101] $G = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $/d/ = p^{\Delta}$. В G існує підгрупа $B = \langle a^{p^{\alpha-2}}\rangle \lambda \langle d\rangle$, для якої, як це показано вище, або $B = N \lhd G$, або $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle d\rangle = N$, $N \lhd G$. Знову $G' \leqslant N$, $k = \alpha - 2$ і G — група типу 5 теореми.

Нехай $p^k = 2$. Тоді в силу [101] $p = 2$, $k = 1$, $\alpha > 2$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$. При $\alpha = 3$ в силу [101] $b^{-1}ab = a^{-1}$, $\beta > 1$ і G — група типу 6 теореми. Нехай тепер $\alpha > 3$. Зрозуміло, що $\Delta = 1$, $1 = к \geqslant \alpha - \Delta - 2 = \alpha - 3$. Звідси $\alpha = 4$.

Нехай $b^{-1}ab = a^{-1}$. Якщо припустити, що $\beta > \alpha$, то $d = ab^{2^{\beta-4}} \neq 1$ і тому $\langle a\rangle \cap \langle d\rangle = 1$. Тепер знову $B = \langle a^4\rangle \lambda \langle d\rangle \leqslant G$. За теоремою 1.2.2 $B \lhd G$, $G' \leqslant B$ і тому $G' \leqslant \langle a^4\rangle$, що неможливо. Отже, $\beta \leqslant \alpha$ і G — група типу 7 теореми.

Нехай тепер $b^{-1}ab \neq a^{-1}$. Тоді в силу [101] $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $k \in \{2,3\}$. Як і при умові $b^{-1}ab = a^{-1}$, легко встановити, що $2 < \beta \leqslant 4$ і при $k = 2$, $\beta = \alpha$ G — група типу 8 теореми, а при $k = 3$ G — група типу 9 розглядуваної теореми. Випадок 1.1 розглянуто повністю.

Випадок 1.2. У цьому випадку $G = P \times D$, де P — неабелева силовська p-підгрупа з G, D — неодинична нільпотентна скінченна холлівська підгрупа з G. Зрозуміло, що P містить власні немаксимальні підгрупи і за лемою 1.2.5 D — дедекіндова група. Оскільки G — недедекіндова група, то і P — недедекіндова група. Звідси в силу леми 1.2.5 $/D/ = q$, $p \neq q$. Зрозуміло, що P — група одного з типів 2—9 розглядуваної теореми і $/P'/ > 1$.

Нехай $/P'/ = p$. Тоді P — може бути групою одного з типів 2, 4 теореми і G — група типу 10 розглядуваної теореми.

Нехай $/P'/ > p$. Коли P — група типу 6 розглядуваної теореми, то G — група типу 10. Нехай P — група одного з типів 2—5, 7—9 розглядуваної теореми. В групі P кожного з типів 2—5 існує підгрупа $X = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$, $\langle c \rangle = w(G')$, $x \notin \Phi(P)$ і G містить підгрупу $B = X \times D$. Очевидно, що B не може бути підгрупою жодного з типів 1—6 теореми 1.2.2. Звідси $B \lhd G$, $P' \leqslant B \cap P' = \langle c \rangle$ і тому $/P'/ < p$, що суперечить вибору P.

Нехай P — група одного з типів 7—9 теореми. Тоді P містить підгрупу $X = \langle a^4 \rangle\langle b \rangle$, $G \geqslant B = X \times D$. Як і раніше, $B \lhd G$, $P' \leqslant B \cap P' \leqslant \langle a^4 \rangle$, що неможливо. Отже, у випадку 1.2 всі можливості вичерпані і тому випадок 1 повністю розглянуто.

Випадок 2. У цьому випадку за теоремою 1.2.3 G — скінченна нільпотентна метациклічна група. В силу [101] $G = \langle a \rangle \lambda D$, $[\langle a \rangle, D] = \langle a \rangle$, $\langle a \rangle$ не містить інволюцій, D — нільпотентна метациклічна ненормальна підгрупа з G. Ясно, що D — група одного з типів 1—5 теореми 1.2.2. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) /a/ — непросте число; 2.2) /a/ — просте число.

Випадок 2.1. У цьому випадку $\langle a \rangle \leqslant \langle c \rangle$, $/c/ = r$, $\langle c \rangle \lhd G$. Оскільки $[\langle a \rangle, D] = \langle a \rangle$, G — нільпотентна група, то за відомим результатом (див., наприклад, [15]) $[\langle c \rangle, D] = \langle c \rangle$. Покладемо $N = \langle c \rangle \lambda D$. Припустимо, що $N \lhd G$. Тоді G/N — абелева група і $G' \leqslant N$, що неможливо, оскільки $G' \leqslant \langle a \rangle$, $\langle a \rangle > \langle c \rangle$. Отже, $N \not\lhd G$. Зрозуміло, що N — нільпотентна надрозв'язна підгрупа. Нехай $\langle c \rangle$ — немаксимальна підгрупа з $\langle a \rangle$, M_1 — максимальна підгрупа з $\langle a \rangle$, що містить $\langle c \rangle$. Тоді $M_1 \lhd G$ і G містить нільпотентну підгрупу $N_1 = M_1 \lambda D$. Як і раніше для N, $N_1 \lhd G$. Але тоді N_1 — нільпотентна надрозв'язна ненормальна підгрупа з G, яка може бути лише підгрупою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2.

Зрозуміло, що $D \neq 1$, $/M_1/$ — непросте число. Тому $/N_1/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і N_1 не може бути підгрупою типу 2 теореми 1.2.2.

Нехай N_1 — підгрупа типу 6 згаданої теореми. Тоді за наслідком 1.3.1 N_1 — метациклічна група Міллера—Морено з нормальною силовською підгрупою простого порядку r і в N_1 доповнюється єдина неодинична власна нормальна підгрупа порядку r. За нашим вибором в N_1 доповнюється підгрупа M_1, $M_1 \neq 1$, $M_1 < N_1$, $/M_1/$ — непросте число. З цієї суперечності випливає, що $\langle c \rangle$ — максимальна підгрупа з $\langle a \rangle$. Значить, $/a/ = pr$, p і r — необов'язково різні прості числа. Ясно, що N — підгрупа одного з типів 2, 6 теореми, $N = \langle c \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q — просте число, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$. За теоремою 1.2.2 $\langle c \rangle \times \langle b^q \rangle = M \lhd G$. Звідси $\langle b^q \rangle \lhd G$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$ і G — група типу 12 розглядуваної теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. $/a/ = p$ — непарне число і D — підгрупа одного з типів 1—5 теореми 1.2.2. Якщо D — підгрупа типу 1 згаданої теореми, то $D = \langle b \rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$ і G — група типу 13.

Нехай D — підгрупа типу 2 згаданої теореми. Тоді $/D/ = qr$. Якщо $q = r$, то $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, де без порушення загальності можна вважати, що $[a,z] = 1$, $/z/ = q$. Оскільки G — ненільпотентна група, то $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $/b/ = q$, $p \equiv 1 \pmod q$ і G — група типу 13 теореми.

Нехай $q \neq r$. Тоді $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/b/ = q$, $/z/ = r$. Якщо $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \neq 1$, $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] \neq 1$, то $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $Z(G) = 1$. Можна вважати, що $D = \langle b \rangle$, $/b/ = qr$ і G — група типу 14 теореми.

Нехай $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = 1$. Тоді $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $/b/ = q$, $/z/ = r$, $p \equiv 1 \pmod q$ і G — група типу 13 теореми. Випадок, коли D — група типу 2 теореми 1.2.2, розглянуто повністю.

Нехай $D = \langle z,b\rangle$ — група кватерніонів, тобто D — група типу 3 теореми 1.2.2. Оскільки $C_G(\langle a\rangle) \lhd G$, $G/C_G(\langle a\rangle)$ — підгрупа з $Aut\langle a\rangle$ і $Aut\langle a\rangle$ — циклічна група, то без порушення загальності можна вважати, що $[a,z] = 1$. Оскільки G — нільпотентна група і $b^2 \in Z(G)$, то b індукує на $\langle a\rangle$ автоморфізм порядку 2. Звідси $b^{-1}ab = a^{-1}$ і G — група типу 15 теореми.

Нехай D — підгрупа типу 4 теореми 1.2.2. Тоді D — циклічна група порядку $q^\beta r$, яка містить нормальну в G підгрупу M порядку $q^{\beta-1}r$, $\beta > 1$. Звідси $M = C_G(\langle a\rangle)$, $D = \langle b\rangle \times \langle z\rangle$, $/z/ = r$, $/b/ = q^\beta$, $[a, z] = 1$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $p \equiv 1 \pmod q$. Якщо $r = p$, то $\beta < 3$. Справді, нехай це не так. Тоді $G > B = \langle b^q\rangle \times \langle az\rangle$, $/B/ = q^{\beta-1}p$. Покажемо, що $B \geqslant N \geqslant \langle az\rangle$. Якщо $B \lhd G$, то $N = B$. Припустимо, що $B \not\lhd G$. Тоді B може бути підгрупою типу 4 теореми 1.2.2, $B > M \lhd G$, $/M/ = q^{\beta-2}p$. Звідси $za \in M$ і тому $[\langle b\rangle,\langle az\rangle] = [\langle a\rangle,\langle b\rangle] \leqslant N \cap \langle a\rangle = 1$, що неможливо. Отже, $\beta < 3$ і G — група типу 13.

Нехай, нарешті, D — група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b\rangle \lambda \langle z\rangle$, $/b/ = q^\beta$, $/z/ = q$ — просте число, $\beta > 1$, $[b,z] \in \langle b^{q^{\beta-1}}\rangle$, $C_D(\langle a\rangle) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$, $[D:D'] > 4$. Оскільки G — нільпотентна група, то $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$ і $p \equiv 1 \pmod q$. При $D' = 1$ $D = \langle b\rangle \times \langle z\rangle$, $[a,z] = 1$ і G — група типу 13. Нехай $D' \neq 1$. Оскільки G — метациклічна група, то $\langle c\rangle \lhd D$, $[a,c] = 1$ і $D/\langle c\rangle$ — циклічна група. Припустимо, що $c \in \langle b\rangle$. Тоді $\langle c\rangle \leqslant \langle b^q\rangle$, $D/\langle c\rangle$ — нециклічна група. Значить, $c \notin \langle b\rangle$ і тому $D = \langle b\rangle\langle c\rangle$. Зрозуміло, що $D' \leqslant \langle c\rangle$, $c = b^i z^j$, $(j,q) = 1$. Оскільки $[a,c] = 1$, $C_D(\langle a\rangle) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$, то $i \equiv 0 \pmod q$. Звідси $c^q = b^{iq}$ і $\langle c^q\rangle \geqslant D' = \langle b^{q^{\beta-1}}\rangle$. Тому $b^{iq} \neq 1$.

Але $iq \equiv 0 \pmod{q^2}$. Отже, $\beta > 2$ і G — група типу 16 розглядуваної теореми. Випадок 2.2 розглянуто повністю, а з ним і випадок 2. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—16 теореми. Тоді, очевидно, G — метациклічна група. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група, тобто для будь-якого $/[A;B]/ > 2$ [A;B] э $N \lhd G$. Якщо G — дедекіндова група, то це очевидно і тому для груп G одного з типів 1, 9 достатність доведена.

Нехай G — недедекіндова група. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо A = N чи B = N і все доведено. Тому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. Звідси $A \neq 1$, $A \not< Z(G)$, $B \not< Z(G)$, $B \not> G'$. Зрозуміло, що G — скінченна група і /B/ — добуток не менше ніж трьох простих чисел, $B < G$, а /G/ — добуток не менше ніж чотирьох простих чисел. Значить, для груп G типу 14 достатність доведена. Розглянемо два можливих випадки: 1) /G′/ = p; 2) /G′/ — непросте число.

Випадок 1. У цьому випадку G — група одного з типів 2, 4, 11, 13. Група G кожного з типів 2, 4 є метациклічною p-групою Міллера—Морено типу 2 наслідку 1.3.3, за твердженням якого G — УЩН[ ]-група. В групах G кожного з типів 11, 13 $G' \cap B = 1$. В групі G типу 11 для будь-якого g з G маємо $g^p \in Z(G)$. Ясно, що B = <g>, $A \leqslant \langle g^p \rangle = N \lhd G$, що й потрібно було довести, тобто група G типу 11 є УЩН[ ]-групою.

Нехай G — група типу 13. Тоді G′ = <a>, /a/ = p. Нехай $r \neq p$. Тоді $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ — циклічна холлівська підгрупа з G. Без порушення загальності можна вважати, що $B \leqslant \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $z \in Z(G)$. При $/z/ \neq 1$ $\langle b^q \rangle \times \langle z \rangle \leqslant Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $A \leqslant \langle b \rangle \times \langle z \rangle = N \lhd G$. При /z/ = 1 $A \leqslant \Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так. Та-

ким чином, r = p, тобто /z/ = p. Тоді $\beta < 3$. Оскільки /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, то $\beta = 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $b \in B = \langle g \rangle$. Підгрупа $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ ненормальна в G, $\langle b \rangle < B$ і тому $/B/ = q^2p$, $B = \langle b \rangle \times \langle z_1 \rangle$, $/z_1/ = p$, $[a,z_1] = 1$ і, значить, $z_1 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Звідси $z = z_1$ і тому $A \leqslant w(B) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle = Z(G)$. Отже, $A \lhd G$, що не так, і, таким чином, група G типу 13 є УЩН[ ]-групою. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку /G′/ — непросте число і G може бути групою одного з типів 2—9, 11, 12, 15, 16. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $\langle a \rangle \cap B = 1$; 2.2) $\langle a \rangle \cap B \neq 1$.

Випадок 2.1. У цьому випадку для груп G кожного з типів 2—9, 11 для будь-якого g з G такого, що $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, маємо $\langle g^{q^2} \rangle \lhd G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ — циклічна група. Звідси $B = \langle g \rangle$, $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, $A \leqslant \langle g^{p^2} \rangle$ і тому $A \lhd G$, що суперечить вибору A. Для груп G типу 12 B — q-група, $\langle b \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, $\langle b^q \rangle \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $A \leqslant \langle b^q \rangle$ і тому $A \lhd G$, що знову суперечить вибору A. В групах G кожного з типу 15, 16 B — теж q-група, $\langle b,z \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, що містить нормальну в G максимальну підгрупу M. У групах G типу 15 $M = \langle z \rangle$, а в групах G типу 16 $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Зрозуміло, що M належить будь-якій силовській q-підгрупі з G і A — власна немаксимальна підгрупа деякої силовської q-підгрупи з G. За теоремою 1.1.1 $A \leqslant M$. Якщо $M = \langle z \rangle$, то $A \lhd G$, що не так. Нехай $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Тоді G — група типу 16, $\beta > 1$. Зрозуміло, що $A < M$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $B \leqslant \langle b \rangle \lambda \langle z \rangle$. Якщо $A \lhd (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, то $A \lhd G$. Отже, $A \not\lhd (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, а це можливо, коли /A/ = q. Але $/B/ > q^2$ і при $B \leqslant M$, $B \lhd G$, що знову не так. Таким чином, $B \not< M$.

Звідси $\langle b\rangle \lambda \langle z\rangle = M\langle b\rangle$, $M \cap \langle b\rangle = N$, $A < N$, $/N/ > p$, а тому $N \lhd G$ і, значить, N — шукана підгрупа. Випадок 2.1 розглянуто повністю.

Випадок 2.2. Нехай G — група типу 11. Тоді $G = P \times D$, P — 2-група типу 6 розглядуваної теореми, $/D/ = q$, $q \neq 2$. Зрозуміло, що $B \cap \langle a\rangle = \langle a^4\rangle = \langle c\rangle \leqslant Z(G)$. Оскільки /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і $G/\langle a\rangle$ — циклічна група непростого порядку, $[G:P] = q$, то $B/\langle c\rangle$ — циклічна група парного порядку. Якщо $B \leqslant P$, то $/B/ = 8 = /c/[B:\langle c\rangle]$. Звідси $\beta = 3$ і при $B = \langle g\rangle$ маємо $A \leqslant \langle g^2\rangle$, $A \leqslant Z(G)$, а тому $A \lhd G$, що неможливо. При нециклічності підгрупи B маємо $B = \langle g\rangle\langle a^2\rangle$, $B > G'$ і тому $B \lhd G$, що теж неможливо. Таким чином, $B \not< P$. Тоді $D \leqslant B$, $B = X \times D$, де $X = P \cap B$, $/X/ > 2$. Якщо X — нециклічна група, то $X \geqslant w(P) \lhd G$ і $G/w(P)$ — дедекіндова група, а тому $B \lhd G$, що неможливо. Отже, $X = \langle g\rangle$, $/g/ \in \{4,8\}$, $c \in \langle g\rangle$. При $/g/ = 4$ $A \leqslant w(B) = \langle g^2\rangle \times D \leqslant Z(G)$ і тому знову $A < G$, що неможливо. При $/g/ = 8$ за теоремою 1.1.1 $A \leqslant \langle g^2\rangle \times D \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що теж неможливо. Достатність для груп типу 11 доведена.

Нехай G — група одного з типів 2—9. Покладемо $\langle y\rangle = \langle a\rangle \cap B$. Тоді $\langle y\rangle \lhd G$, $B = \langle y\rangle\langle x\rangle$, $/y/ \in \{p,p^2\}$. Зрозуміло, що $A \not< \langle a\rangle$, $\langle y\rangle \leqslant \Phi(G)$ і $G/\langle y\rangle = \overline{G} = \langle\bar{a}\rangle \lambda \langle\bar{b}\rangle$, де $\langle\bar{a}\rangle = \langle a\rangle/\langle y\rangle$, $\langle\bar{b}\rangle = \langle y\rangle\langle b\rangle/\langle y\rangle = \langle b\langle y\rangle\rangle$. Оскільки $A \not< \langle y\rangle$, то $/\bar{A}/ > \bar{1}$, де $\bar{A} = \langle y\rangle A/\langle y\rangle$ і $\langle\bar{a}\rangle \cap \bar{A} = \bar{1}$. Очевидно, що $\bar{b}^p \in Z(\overline{G})$ і $B/\langle y\rangle = \bar{A}$. Зрозуміло, що $/B/ > p$.

Нехай $/y/ = p$. Оскільки $/B/ > p^2$, то $/\bar{A}/ > p$. Тоді $\bar{A} \leqslant \Phi(\bar{A}) \leqslant Z(\overline{G})$. Звідси $\langle y\rangle A = N \lhd G$ і $N < B$.

Нехай тепер $/y/ = p^2$. Тоді G може бути 2-групою одного з типів 7—9. Група G кожного з цих типів не має циклічних максималь-

них підгруп, що містять $\langle y\rangle$ і відмінних від $\langle a\rangle$. Звідси B — нециклічна група. Якщо B — група кватерніонів, то $A = \Phi(B) = w(\langle a\rangle) \lhd G$, що неможливо. Нехай B не є групою кватерніонів. Тоді $B' \leqslant \langle y^2\rangle \leqslant Z(G)$, $/y^2/ = 2$ і B — абелева метациклічна група чи група Міллера—Морено. З будови цих груп (див., наприклад, [77, твердження 1.1.1]) B містить інволюцію d таку, що $\langle d\rangle \cap \langle y\rangle = 1$. З цього випливає, що G не може бути узагальненою групою кватерніонів і G містить нормальну підгрупу $\langle a\rangle \times \langle d\rangle$, $w(G) = \langle a^8\rangle \times \langle d\rangle$, $\langle y^2\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$. Легко бачити тепер, що $\langle y\rangle \times \langle d\rangle = \langle y\rangle$ $w(G) \lhd G$ і $G/(\langle y\rangle \times \langle d\rangle)$ — група кватерніонів порядку 8. Звідси $B \lhd G$, що теж неможливо, і тому достатність для груп G кожного з типів 2—9 доведена.

Нехай G — група типу 12. Зрозуміло, що тоді $A \nleq \langle a\rangle$, $\langle a\rangle \cap B = \langle y\rangle$, $/y/ = p$, $B = \langle y\rangle \lambda Q_1$, (без порушення загальності можна вважати, що $Q_1 = B \cap \langle b\rangle$), $\langle y\rangle \lhd G$, $b^q \in Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $A \leqslant \langle y\rangle \times \langle b^q\rangle$ і тому $A \lhd G$, що не так і, значить, для груп G типу 12 достатність доведена.

Нехай, накінець, G — група одного з типів 15, 16. Припустимо, що $a \in B$. Тоді в групі G типу 15 $G/\langle a\rangle$ — дедекіндова група і тому $B \lhd G$, що неможливо. В групі G типу 16 $B = \langle a\rangle \lambda Q_1$, де $Q_1 = B \cap (\langle b\rangle \lambda \langle z\rangle)$ і $/Q_1/ > q$. Звідси $Q_1 > [b,z]$ і тому $G < B \lhd G$, що теж неможливо. Припустимо тепер, що $a \notin B$. Тоді $\langle a\rangle \cap B = 1$ і B — q-підгрупа з G, яка без порушення загальності належить силовській q-підгрупі $Q = \langle z,b\rangle$ з G. Зрозуміло, що A — власна немаксимальна підгрупа з Q. Звідси $A \leqslant M \lhd G$, де $M = \langle z\rangle$ в групі G типу 15, і $M = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$ в групі G типу 16. Як і вище, або $A = \langle z^2\rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо, або $A < Q_1 = M \cap B \lhd G$. Покладемо $Q_1 = N$ і буде-

мо мати, що розглядувані типи груп G є УЩН[ ]-групами. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.4. *Локально ступінчасті ЩН[ ]-групи Шмідта G вичерпуються групами типу 3 теореми 1.3.1, у яких* $\alpha \in \{1,2\}$ *і при* $\alpha = 2$ $\beta = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 G — УЩН[ ]-група, що задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути групою одного з типів 1—3 згаданої теореми. В групі G кожного з типів 1, 2 покладемо A = Q, B = Φ(P) × Q. За означенням ЩН[ ]-груп маємо [A;B] э N ◁ G. Звідси N — нормальна нільпотентна підгрупа з G, силовська q-підгрупа якої є підгрупою Q. Тому Q ◁ G, що в групах Шмідта неможливо і, значить, G не є групою одного з типів 1, 2 теореми 1.3.1.

Нехай G — група типу 3 теореми 1.3.1. Тоді G = P ⋋ Q, /P/ = p^{α}, $\alpha \in \{1,2,3\}$. Якщо $\alpha = 1$, то G — група з наслідку. Нехай $\alpha = 3$. Тоді P — елементарна абелева група порядку p^3. Нехай B ⩽ P, /B/ = p^2, A ⩽ B, /A/ = p. За означенням ЩН[ ]-груп [A;B] э N ◁ G, що в групах Шмідта неможливо. Звідси $\alpha = 2$. Нехай $\beta > 1$. Покладемо B = A ⋋ Φ(Q), /A/ = p. Тоді /[A;B]/ > 1 і за означенням ЩН[ ]-груп [A;B] э N ◁ G, P ∩ N = A ◁ G, що суперечить будові груп Шмідта. Таким чином, $\beta = 1$. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група з наслідку. Тоді G = P ⋋ Q — група типу 3 теореми 1.3.1, /P/ = p^{α}, $\alpha \in \{1,2\}$, Q — циклічна група порядку q^{β}, Φ(Q) ⩽ Z(G) і при $\alpha = 2$ $\beta = 1$. Зрозуміло, що G — локально ступінчаста група Шмідта. Покажемо, що для будь-якого відрізку /[A;B]/ > 1 існує підгрупа N така, що [A;B] э N ◁ G. Якщо

$A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $N = A$ чи $N = B$ і все доведено.

Нехай $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. Тоді $B \not> G'$, $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси при $\alpha = 2$ $G = B \lhd G$, що не так. Тому $\alpha = 1$. Ясно, що $/G'/ = p$. Тоді $B \cap G' = 1$. Без порушення загальності можна вважати, що B належить силовській q-підгрупі $Q = \langle b \rangle$ з G. Але тоді $A \leqslant \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що знову не так. Всі можливі випадки розглянуті. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Означення 1.3.4 [65]. *Група G називається гіперциклічною, якщо вона має цілком впорядкований ряд нормальних в G підгруп, фактори якого циклічні.*

Гіперциклічна група G з скінченним згаданим рядом називається надрозв'язною [65].

Наслідок 1.3.5. *Всі: H- , ЩН( )- , ЩН[ )-, УЩН( )-групи є розв'язними гіперциклічними групами. Всі УЩН( )-групи Шмідта вичерпуються нільпотентними метациклічними групами Міллера—Морено і співпадають з групами типу 3 теореми 1.3.1 при $\alpha = 1$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо, що G — гіперциклічна група. Якщо G — дедекіндова група, то це очевидно. Нехай G — недедекіндова група. За лемою 1.2.3 та теоремою 1.2.1 G — періодична група. В силу твердження 1 леми 1.2.2 H-групи дедекіндові і тому можна вважати, що група G не є H-групою. Покажемо, що G містить неодиничну нормальну в G підгрупу $\langle x \rangle$. Припустимо, що для будь-якого неодиничного примарного елемента x з G $\langle x \rangle \not\lhd G$. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп із G, що містять $\langle x \rangle$. Зрозуміло, що тоді $/[\Phi(\langle x \rangle);\langle x \rangle]/ >$

1. За означенням ЩН( )-груп маємо (Ф(<x>);<x>] э N ◁ G. Звідси N = <x> ◁ G.

Нехай G — ЩН( )-група. Тоді, очевидно, /[<x>;Z]/ > 1. Якщо <x> максимальна підгрупа з Z, то за означенням ЩН( )-груп [<x>;Z) э N, N ◁ G і, значить, N = <x>, що неможливо. Нехай <x> < B < Z. Ясно, що /[<x>;B]/ > 1. Тоді за означенням ЩН( )-груп [<x>;B) э N ◁ G. Оскільки N ≠ <x> і N < B, то N < Z, що суперечить вибору Z.

Нехай, нарешті, G — УЩН( )-група і /x/ = p^{α}. При α > 1 /[<1>; <x>]/ > 2 і з означення УЩН( )-груп (<1>;<x>) э N ◁ G. Звідси N — неодинична нормальна в G циклічна підгрупа. При α = 1 будь-яка циклічна підгрупа з Z має порядком просте число. Нехай для будь-якого вибраного x циклічна <x> — максимальна підгрупа з Z. Тоді /[<1>;Z]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп (<1>;Z) э N ◁ G. Ясно, що в силу вибору Z × ∉ N і Z = N λ <x>. Якщо N — циклічна група, то доводжуване твердження справедливе. Нехай N — нециклічна група. Тоді /[<1>;N]/ > 2 і знову за означенням УЩН( )-груп (<1>; N) э N_1 ◁ G. Звідси Z має власну підгрупу N_1 λ <x>, що суперечить максимальності <x> в Z. Значить, підгрупа <x> немаксимальна в Z. Тоді /[<x>;Z]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп (<x>;Z) э N ◁ G і знову отримали суперечність з вибором Z. Таким чином, група G має неодиничну циклічну нормальну підгрупу <x>. За теоремою 1.2.1 G/<x> — група того ж класу, що і G. Тепер, як і раніше, G/<x> містить неодиничну нормальну циклічну підгрупу X_2/<x>. Покладемо X_1 = <x>, X_0 = 1. Зрозуміло, що X_0 < X_1 < X_2. Розглядаючи факторгрупу G/X_2, знаходимо в ній нормальну неодиничну циклічну підгрупу X_3/X_2. Побудову в G такого цілком впорядкованого по

зростанню нормального ряду підгруп X_α методом трансфінітної індукції можна продовжити до тих пір, поки для деякого γ одержимо $X_\gamma = G$. За означенням 1.3.4 G — гіперциклічна група.

Ясно, що скінченна гіперциклічна група G надрозв'язна, а нескінченна гіперцентральна група G задовольняє умову теореми 1.2.3 і тому за її твердженням G — розв'язна група.

Перша частина наслідку доведена. Доведемо другу частину наслідку.

Необхідність. Нехай G — УЩН( )-група Шмідта. Тоді за попереднім і теоремою 1.2.1 G задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути надрозв'язною групою одного з типів 1—3 згаданої теореми. За відомими властивостями надрозв'язних груп Шмідта (див., наприклад, [210]) G — група типу 3 теореми 1.3.1, у якої $\alpha = 1$, тобто G —ненільпотентна метациклічна група Міллера—Морено. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група типу 3 теореми 1.3.1 і $\alpha = 1$. Тоді $G = P \lambda Q$ — скінченна ненільпотентна метациклічна група Міллера—Морено, $/P/ = p > 2$, $/Q/ = q^\beta$, $\beta > 0$. Покажемо, що G — УЩН( )-група, тобто для $/[A;B]/ > 2$ $(A;B)$ э $N \lhd G$. Зрозуміло, що $G' = P$, $P \times \Phi(Q) = U$ — нормальна в G максимальна циклічна підгрупа. Якщо $P \leqslant A$, то за N можна вибрати будь-яку власну підгрупу з B, що строго містить A. Нехай $P \not< A$. Тоді $P \cap A = 1$. Якщо $B \leqslant U$, то знову N — власна підгрупа з B, що містить A. Звідси $B \not< U$. Оскільки Q — максимальна підгрупа з G, то $A \leqslant \Phi(Q)$. Якщо $B = G$, то $N = U$. Нехай $B < G$. Тоді $G = UB$. Тепер без порушення загальності можна вважати, що $Q \leqslant B$. Тому $P \cap B = 1$, $B = Q$. Зрозуміло, що $A \leqslant \Phi(\Phi(Q))$. Покладемо $N = \Phi(Q)$ і отри-

маємо (A;B) э N ◁ G, що і потрібно було довести. Достатність доведено. Наслідок повністю доведений.

О з н а ч е н н я 1.3.6. *Неметациклічна група з метациклічними власними підгрупами називається мінімальною неметациклічною групою.*

Т е о р е м а 1.3.3. *Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УЩН[ ]-групи G мають вигляд G = AX, де A = <a,b> — нормальна в G p-підгрупа, a ≠ 1, X — q-група, p і q — прості числа та вичерпуються групами типів:*

1) /G/ = p^3, exp(G) = p;

2) A = <a> × <b>, X = <x>, /a/ = /x/ = 9, /b/ = 3, [a,x] = b, [b,x] = $a^3 = x^6$;

3) G = A × X, A — група кватерніонів порядку 8, /X/ = 2;

4) A — група кватерніонів порядку 8, X = <x>, /x/ = 4, <x^2> = Ф(A), X = Z(G);

5) A = <a> × <b>, X = <x>, /a/ = /b/ = /x/ = 4, [a,x] = a^2, [b,x] = $x^2 = a^2b^2$;

6) G = A ⋋ X — група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, /A/ = p^2, /x/ ∈ {q,q^2};

7) G = A ⋋ X — група Шмідта типу 1 теореми 1.3.1, A — група кватерніонів порядку 8, /x/ ∈ {3,9};

8) G = A ⋋ X, A = <a> × <b>, /a/ = /b/ = p — непарне число, X = <x>, /x/ ∈ {q,q^2}, p ≡ 1 (mod q), [<a>,<x>] = <a>, [<b>,<x>] = <b>, <b^q> = Z(G);

9) G = A ⋋ X, A = <a> × <b>, /a/ = /b/ = p — непарне число, X = <x>, /x/ = q^β, β > 2, p ≡ 1 (mod q), [<a>,<x>] = <a>, [<b>,<x>] = <b>, <b^q> = Z(G), A — квазіцентральна підгрупа з G;

10) $G = A \lambda X$, $/A/ = p$ — непарне число, $X = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ — непарне число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[A,\langle x \rangle] = A$, $[x,z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

11) G — квазіциклічна p-група.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Припустимо спочатку, що G — дедекіндова група. Якщо G — гамільтонова група, то в силу твердження 1.1.1 легко бачити, що G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай G — абелева група. Якщо $/G/ < \infty$, то G містить неметациклічну силовську p-підгрупу P. Оскільки $P' = 1$, то $/w(P)/ > p$. Звідси P містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3, яка, очевидно, є мінімальною неметациклічною групою. Тому G — група типу 1 теореми. Нехай $/G/ = \infty$. Якщо G містить квазіциклічну p-підгрупу U, то U — неметациклічна група. Звідси $G = U$ і G — група типу 11.

Нехай G — періодична абелева група, яка не містить квазіциклічних підгруп. Тоді G в силу відомих результатів (див., наприклад, [65]) містить скінченну неметациклічну підгрупу M. Тоді $M = G$, що неможливо.

Нехай G — неперіодична абелева група. Тоді G має періодичну частину T, яка, за попереднім, є скінченною метациклічною групою, і тому $G = T \times Z$, де Z — група без скруту. За відомим результатом (див., наприклад, [65]) G містить базисну підгрупу B, що є вільною абелевою групою. Підгрупа B^p є також вільною абелевою групою однакового рангу з B і $B^p < B$. Звідси B^p і B — метациклічні групи.

Припустимо, що $F = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, де $/a/ \in \{p,\infty\}$, $/b/ \in \{p, \infty\}$, $/c/ = \infty$. Тоді, очевидно, G містить власну підгрупу $F_1 = \langle a \rangle \times$

$\langle b \rangle \times \langle c^p \rangle$. Зрозуміло, що F і F_1 — неметациклічні підгрупи, що для F_1 неможливо за означенням групи G. Зрозуміло також, що T і Z не можуть бути одночасно циклічними групами. Звідси і за попереднім при нециклічності T B — циклічна група і при нециклічності B T = 1. Якщо тепер G — скінченно породжена група, то Z — метациклічна група і при нециклічності Z T = 1. Звідси G = Z — метациклічна група, що неможливо в силу означення G. Нехай Z — циклічна група. За попереднім T не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^2 і тому T — циклічна група, що згідно з попереднім зауваженням теж неможливо. Значить, G може бути нескінченно породженою групою. Оскільки $/T/ < \infty$, то Z — нескінченно породжена група, Z/B — нескінченна періодична група, яка за попереднім може бути лише квазіциклічною p-групою. Нехай $q \neq p$, q — просте число. Ясно, що Z/B — періодична група, яка містить неодиничну елементарну абелеву q-підгрупу B/B^q і $Z/B^q/B/B^q \cong Z/B$ — квазіциклічна p-група. Звідси Z/B^q — непримарна група. У нашому випадку можна вважати, що B^q — базисна підгрупа з Z і за попереднім Z/B^q — квазіциклічна група і, значить, примарна. Отримали суперечність, яка завершує доведення необхідності у випадку, коли G — дедекіндова група.

Нехай G — недедекіндова група. Тоді G задовольняє умови теореми 1.2.3, за твердженням якої G — черніковська група. Якщо G містить квазіциклічну підгрупу R, то, очевидно, G = R і G — група типу 11. Тому будемо вважати, що G не містить квазіциклічних підгруп і, значить, $/G/ < \infty$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) G — нільпотентна група; 2) G — ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку за результатами з [211] G може бути лише p-групою одного з типів 1 - 5 теореми.

Випадок 2. Якщо G — ненадрозв'язна група, то за результатом з [212] G — група Шмідта одного з типів 1, 3 теореми 1.3.1. Якщо G — група типу 3 згаданої теореми, то $\alpha = 2$ і G — група типу 6 теореми. Якщо G — група типу 1 теореми 1.3.1, то G — група типу 7 теореми.

Нехай далі G — надрозв'язна група. За результатами з [212—214] $G = A \lambda X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p$, $\langle a \rangle \lhd G$, $\langle b \rangle \lhd G$, X — примарна чи біпримарна нільпотентна холлівська підгрупа з G, $/b/ \in \{1,r\}$, r — просте число, $[\langle a \rangle,\langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle,\langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b \rangle \lambda X \lhd G$.

Припустимо, що $/b/ = r$, $r \neq p$. Тоді за результатами з [212] $\langle b \rangle \lambda X \lhd G$, X — нециклічна силовська q-підгрупа і $q \neq r$. Зрозуміло, що $\langle b \rangle \lambda X$ не може бути групою жодного з типів теореми 1.2.2 і тому $\langle x \rangle \lambda X \lhd G$, що не так. Отже, співвідношення $/b/ = r$ і $r \neq p$ неможливі.

Нехай $/b/ = 1$. Тоді в силу [212] $A = \langle a \rangle$, X — недедекіндова ненормальна метациклічна q-підгрупа з G, яка, очевидно, може бути лише групою типу 5 теореми 1.2.2, для якої $X = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, $/x/ = q^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/z/ = q$, $[x,z] = x^{q^{\Delta-1}}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[A,\langle x \rangle] = A$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$, $[X:X'] > 4$. Припустимо, що $\Delta > 2$. Тоді $y \in \langle x^q \rangle$, $/y/ = q^2$. Покладемо $c = yz$. Тоді $X = \langle x \rangle\langle c \rangle$. Оскільки $[x^q,z] = 1$, то $\langle c^q \rangle = \langle y^q \rangle = X'$. Звідси $\langle c \rangle \lhd G$ і $G = (A \times \langle c \rangle)\langle x \rangle$ — метациклічна група, що не так. Тому $\Delta = 2$, $q > 2$ і G — група типу 10.

Нехай $/b/ \neq 1$. Тоді в силу [212] $/b/ = p$. Оскільки підгрупа $\langle b \rangle \lambda X$ ненормальна в G, то за наслідком 1.3.1 X — примарна група. В силу [212] $X = \langle x \rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $\langle b \rangle \times \langle x^q \rangle = M \lhd G$. Звідси $\langle x^q \rangle \lhd G$ і тому $Z(G) = \langle x^q \rangle$. При $\beta < 3$ G — група типу 8 теореми. Нехай $\beta > 2$. Покладемо $B = T \times \langle x^q \rangle$, $T \leqslant A$, $/T/ =$

р. Зрозуміло, що /[T;B]/ > 2. За означенням УЩН[ ]-груп [T;B] э N ◁ G, A ∩ N = T ◁ G і тому A — квазіцентральна підгрупа з G а, G — група типу 9 теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G = AX — група одного з типів 1—11 розглядуваної теореми. Тоді A ◁ G. Очевидно, що G — локально ступінчаста група. Зрозуміло, що група G типу 11 мінімальна неметациклічна. В роботі [211] установлено, що групи кожного з типів 1—5 теж мінімальні неметациклічні. У роботі [212] установлено, що групи кожного з типів 6—9 теж мінімальні неметациклічні, а для груп типу 10 це встановлено в роботах [213, 214]. Отже, залишається показати, що G — УЩН[ ]-група.

В групі G кожного з типів 3, 11 всі підгрупи нормальні і тому G — УЩН[ ]-група.

Нехай /[T;B]/ > 2. Покажемо, що [T;B] э N ◁ G. Якщо T ◁ G, чи B ◁ G, то покладемо відповідно N = T чи N = B і отримаємо, що G — УЩН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що T ⋪ G, B ⋪ G, T ⊀ Z(G), T ≠ 1, B ⊁ G′.

Нехай G — група одного з типів 1—5 теореми. Покажемо, що у цьому випадку G — ЩН[ ]-група, тобто що при /[T;B]/ > 1 [T;B] э N, N ◁ G. Зрозуміло, що G — скінченна p-група. Знову якщо T ◁ G, B ◁ G, то, як і вище, G — ЩН[ ]-група. Тому далі теж T ⋪ G, B ⋪ G. З умови B ⋪ G випливає, що B — власна немаксимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що /T/ ⩾ p, /B/ ⩾ p^2, /G/ ⩾ p^4. Оскільки в групах G типу 1 /G/ = p^3, то, очевидно, G — ЩН[ ]-група. В групах G типу 2 /G/ = 81 і /B/ = 9 , /T/ = 3, G містить єдину нормальну елементарну абелеву підгрупу G порядку 9 і нижній шар будь-якої циклічної підгрупи порядку 9 співпадає з Z(G). Звідси з урахуван-

ням того, що $B \trianglelefteq G$, випливає, що B не є елементарною абелевою групою порядку 9. Якщо B — циклічна група, то $T = w(B) = Z(G)$, що неможливо. Отже, група G типу 2 є ЩН[ ]-групою.

Очевидно, що група G типу 3 гамільтонова і тому G — ЩН[ ]-група.

Група G типу 4 має порядок 16, $/B/ = 4$ і кожна її підгрупа порядку 4 містить G', що неможливо, оскільки $B \trianglelefteq G$. Тому група G типу 4 є ЩН[ ]-групою.

Група G типу 5 має порядок 32, $w(G) = G' = Z(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$, $\exp(G) = 4$ і G не містить підгруп, ізоморфних підгрупі кватерніонів. Звідси $/T/ = 4$ і $/B/ = 8$. Оскільки G не містить підгрупи кватерніонів, то w(B) — нециклічна група і тому $B \lhd G$, що не так. Таким чином, група G типу 5 є ЩН[ ]-групою.

Отже, групи G кожного з типів 1 - 5 є УЩН[ ]-групами і навіть ЩН[ ]-групами.

Той факт, що група G кожного з типів 6, 7 є УЩН[ ]-групою, доведено в теоремі 1.3.1.

Нехай G — група типу 8. Очевидно, що /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, $G > B$ і тому $\beta = 2$. Тепер /G/ — добуток чотирьох простих чисел, /B/ — добуток трьох простих чисел, /T/ — просте число. Звідси B — максимальна підгрупа з G і має в G простий індекс. Оскільки $B > G$, то $A \not\leq B$, $[G:B] = p$ і $A \cap B = A_1$ — нормальна неодинична силовська p-підгрупа з $B = A_1 \lambda \langle x_1 \rangle$, $/A_1/ = p$, $/x_1/ = q^2$. Оскільки $Z(G) = \langle x^q \rangle$, то $\langle x^q{}_1 \rangle = \langle x^q \rangle = Z(G)$ і $w(B) = A_1 \times \langle x^q \rangle$ — квазіцентральна підгрупа з G, що суперечить співвідношенню $T \leqslant w(B)$ і $T \trianglelefteq G$. Значить, у цьому випадку G — УЩН[ ]-група.

Нехай G — група типу 9. Знову $B \cap A = A_1$ — силовська p-підгрупа з B, $/A_1/ \in \{1,p\}$, $A_1 \lhd G$. Оскільки $A \times \langle x^q \rangle$ — квазіцентральна підгрупа з G, то $T \leqslant A \times \langle x^q \rangle$. Останнє співвідношення можливе, коли T містить такий q-елемент g, що $(A \times \langle x^q \rangle)\langle g \rangle = G$. Звідси g не належить підгрупі Фраттіні жодної силовської q-підгрупи з G. Оскільки $\langle x \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, $\langle x^q \rangle = \Phi(\langle x \rangle) = Z(G)$ належить будь-якій силовській q-підгрупі з G, то $\langle x^q \rangle = \Phi(\langle g \rangle)$ і $\langle g \rangle$ — силовська q-підгрупа з G. Звідси $B = A_1 \lambda \langle g \rangle$, $\langle g \rangle$ — максимальна підгрупа з B і T — максимальна підгрупа з B, що не так. Отже, група G типу 9 є УЩН[ ]-групою.

Нехай G — група типу 10. Тоді $T \not\lhd A$. Нехай $A \leqslant B$. Тоді $X' \not\lhd B$. Звідси $B \cap \langle x \rangle = 1$ і $/B/ = pq$, що неможливо. Таким чином, $A \not\lhd B$ і, значить, $A \cap B = 1$ і B — q-група. Без порушення загальності можна вважати, що $B \leqslant X$ і T — власна немаксимальна підгрупа з X. Зрозуміло, що X — група типу 5 теореми **1.1.1**, у якої підгрупа $M = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$ — єдина максимальна підгрупа з X, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з X. Якщо $B = X$, то $N = M$. Нехай $B < X$. Тоді $/B/ = q^2$, що неможливо. Отже, група G типу 10 є УЩН[ ]-групою. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.6. *Нескінченні локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УЩН[ ]-групи вичерпуються квазіциклічними групами.*

З доведення достатності теореми **1.3.3** випливає такий наслідок.

Наслідок 1.3.7. *Група G кожного з типів 1—5 теореми 1.3.3 є ЩН[ ]-групою.*

Твердження 1.3.1. *Група* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$ *типу 2 теореми 1.3.3 має властивості:*

1) $G' = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle = \langle b \rangle \times \langle x^3 \rangle$;

2) всі елементи порядку 3 з G належать G′;

3) для будь-якого $f \in G \setminus G'$ *маємо* $|f| = 9$ *і* $Z(G) = \langle a^3 \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle f^3 \rangle$;

4) $G/G' = \langle G'a \rangle \times \langle G'x \rangle$ *— група типу (3,3);*

5) $exp(G) = 9$;

6) $w(G) = G'$.

Доведення твердження випливає з [66] та [211].

Наслідок 1.3.8. *Неабелеві метациклічні УЩН[ ]-групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 2,* $|a| = 8$; *3; 4,* $k = \alpha - 2$; *5—9; 11, P — група типу 6 теореми 1.3.2,* $\beta < 4$; *12; 15; 16.*

Доведення безпосередньо випливає з теореми 1.3.2.

Означення 1.3.6 [94]. *Група, у якої нормальні всі неабелеві підгрупи, називається метагамільтоновою.*

Наслідок 1.3.9. *Неабелеві метациклічні метагамільтонові УЩН[ ]-групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 2,* $|a| = 8$; *3; 4,* $k = \alpha - 2$; *5; 6; 11, P — група типу 6 теореми 1.3.2,* $\beta < 4$.

Доведення. *Необхідність.* Зрозуміло, що G задовольняє умову наслідку 1.3.8 і може бути лише групою одного з типів згаданого наслідку. Те, що групи G кожного з типів 7, 8, 12, 15, 16 з теореми 1.3.2 є метагамільтоновими, випливає з робіт [101, 103, 107]. Необхідність доведена.

Достатність. Всі групи розглядуваного наслідку є в силу наслідку 1.3.8 скінченними нільпотентними метациклічними УЩН[ ]-р-групами з циклічним комутантом порядку p^2. Звідси $\Phi(G') \leqslant Z(G)$ і тому в силу результатів з роботи [99] G — метагамільтонова група. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Наслідок 1.3.10. *Метациклічні неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 7—9; 12; 15; 16.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 1.3.2 і може бути групою одного з типів 1—16 згаданої теореми. Оскільки G — неметагамільтонова група, то /G'/ — непросте число. Тоді G — метациклічна неабелева група з комутантом непростого порядку одного з типів 1 — 16, що не є групою жодного з типів наслідку 1.3.9, але є групою одного з типів наслідку 1.3.8. Звідси G — група одного з типів розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 1.3.8. Наслідок доведений.

Теорема 1.3.4. *Нехай G — локально ступінчаста УЩН[ ]-група з мінімальною неметациклічною підгрупою C. Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять C.*

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою C вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \lambda Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/Q/ = q$, *p і q — різні прості числа,* $\Phi(P) \lambda Q$ *— нільпотентна група Міллера—Морено,* $p \neq 3$;

2) $G = (R \times P) \lambda Q$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/Q/ = q$, *r, p і q — попарно різні прості числа,* $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod q$, $R \lambda Q$ *і* $P \lambda Q$ *— нільпотентні групи Міллера—Морено.*

Доведення. Нехай G і C взяті з умови теореми, $X > C$ і $X \triangleleft G$. Зрозуміло, що X — неметациклічна підгрупа, яка може бути лише підгрупою типу 6 теореми 1.2.2. Звідси $X = A \lambda \langle x \rangle$ — нільпотентна скінченна група Міллера—Морено, $/A/ = p^{\alpha}$, $/x/ = q^{\beta}$, p і q — різні прості числа, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Зрозуміло, що G — нільпо-

тентна УЩН[ ]-група типу 1 теореми 1.2.3, а X — її підгрупа Шмідта типу 3 теореми 1.3.1. Тоді G — скінченна нільпотентна дисперсивна група і $\alpha \in \{2,3\}$, $\alpha + \beta < 5$.

Припустимо, що $\alpha = 3$. Тоді A — група типу 1 теореми 1.3.3 і $\beta = 1$, $M = A \times \langle x^q \rangle \lhd G$. Звідси $A \lhd G$. Нехай P — силовська p-підгрупа з G, Q — силовська q-підгрупа з G. Оскільки G — скінченна розв'язна дисперсивна група, то G = PD, D — холлівське доповнення P в G. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x \rangle \leqslant Q \leqslant D$ і PQ = QP. Ясно, що $X \cap D = \langle x \rangle$. Оскільки $\langle x \rangle \lhd X$, то $D \not\lhd G$. Тому D — підгрупа одного з типів 1—6 теореми 1.2.2 і $D > M_1 \lhd G$. Оскільки G — недедекіндова група, то за теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників і G містить підгрупу $A \times M_1$. Звідси $M_1 = 1$ і тому D може бути лише підгрупою одного з типів 1, 2 теореми 1.2.2, а значить, /D/ = qr, q, r — необов'язково різні прості числа. Покладемо $Y = A \lambda D$. Якщо /D/ > q, то за попереднім і теоремою 1.2.2 $Y \lhd G$ і G/Y — скінченна p-група, ізоморфна P/A. Можливі випадки: 1) D — циклічна група; 2) D — нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $/\langle x \rangle/ = q$, $\langle x \rangle$ — характеристична в D і, значить, X характеристична в Y, а тому $X \lhd G$, що неможливо.

Випадок 2. У цьому випадку D — група типу 2 теореми 1.2.2 і $D = \langle y \rangle\langle x \rangle$, /y/ = r, $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) r = q; 2.2) $r \neq q$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $D = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$. В силу відомих результатів (див.,наприклад, [215]) без порушення загальності можна вважати, що $A \lambda \langle y \rangle = U$ не є групою Фробеніуса. Оскільки

$M_1 = 1$, то U — ненільпотентна група, у якої існує елемент a з A такий, що /a/ = p, [a,y] = 1. Зрозуміло, що <a> ◁ U. За теоремою Машке (див., наприклад, [74, теорема 20.2.2]) A = A_1 × <a>, A_1 — елементарна абелева група порядку p^2, A_1 ◁ U. Для підгрупи X типу 3 теореми 1.3.1 3—показник p за модулем q і тому A_1 ≀ <y> не містить підгруп Шмідта. Звідси [A_1,<y>] = 1 і тому [A,<y>] = 1, а значить, y ∈ M_1, що неможливо, оскільки $M_1 = 1$. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку при <x> ◁ D одержимо, що X — характеристична в Y і тому X ◁ G, що не так. Отже, /D/ = qr, <x> ⋪ D, /x/ = q. Тоді в силу відомих результатів (див., наприклад, [64]) D = <y> ≀ <x>, <y> = D′, /y/ = r. Знову U = A ≀ <y> — характеристична підгрупа з Y і тому U ◁ G. Оскільки $M_1 = 1$, то U — ненільпотентна група.

Припустимо, що U не є групою Фробеніуса. Тоді в силу [215] a ∈ A, [a,y] = 1, /a/ = p, a ∈ Z(U) < A. Ясно, що Z(U) — характеристична підгрупа з U, тому Z(U) ◁ Y і A містить власну неодиничну підгрупу з A, допустиму відносно <x>, що суперечить мінімальності A в X = A ≀ <x>.

Нехай U — група Фробеніуса. Тоді для будь-яких елементів простих порядків a з A і d з D [a,d] ≠ 1. В силу [215] Y — група Фробеніуса з ненормальним множником D, який не може бути неабелевою групою порядку qr. Таким чином, випадки 1 і 2 неможливі. Тому при α = 3 залишається розглянути випадок, коли /D/ = q. Звідси D = <x>, і за дисперсивністю G P ◁ G, G = P ≀ <x>. Оскільки X ⋪ G, то A < P. Покажемо, що A ⩽ Z(P). Дійсно, Z(P) ◁ G, A ∩ Z(P) ≠ 1, Z(P) ∩ X — неодинична нормальна в X p-підгрупа. Оскільки A — мінімальна нормальна підгрупа в X, то Z(P) ∩ A

$= A$. Зрозуміло, що всі елементи порядку p з P належать A. Звідси $N_P(\langle x\rangle) = C_P(x) = C_A(x) = 1$. Оскільки A — мінімальна неметациклічна підгрупа типу 1 теореми 1.3.1, то, за попереднім ненормальна в G підгрупа X, що містить A, може бути лише нільпотентною підгрупою типу 6 теореми 1.2.2. Звідси $B \lhd G$. Покладемо $V = B \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що $V = BX$, $B \cap X = A$, $V/A = B/A \lambda X/A$ і $/V/A/ = pq$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 3, то V/A — нільпотентна група. Звідси $X \lhd G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [74, лема 17.1.8]) $V = XZ$, де $Z = N_V(\langle x\rangle) = \langle x\rangle \lambda B_1 = \langle x\rangle \times B_1$, $B_1 = Z \cap B \lhd Z$. Оскільки $N_A(\langle x\rangle) = 1$, то $B_1 \cap A = 1$, $B = A \times B_1$, $A < B$, $B_1 \neq 1$. Звідси знайдеться такий елемент порядку p з $B_1 \leqslant B < P$, який не належить A, що суперечить попередньому. Отже, випадок $\alpha = 3$ приводить до суперечності.

Таким чином, $\alpha = 2$ і тому X — група типу 6 теореми 1.3.3, за твердженням якої X — мінімальна неметациклічна група, що містить C, і тому $X = C$. Звідси при $X > C$ $X \lhd G$. Перша частина теореми доведена. Доведемо її другу частину.

Необхідність. Нехай $C \lhd G$. Тоді за попереднім $C = A \lambda \langle x\rangle$, $/A/ = p^2$, $/x/ = q^\beta$, p і q — різні прості числа, $\beta < 3$, $A \times \langle x^q\rangle \lhd G$. Звідси $A \lhd G$, $\langle x^q\rangle \lhd G$, A — мінімальна нормальна підгрупа з C, $\langle x\rangle$ — максимальна силовська q-підгрупа. Ясно, що C — група типу 6 теореми 1.2.2 і тому $p \neq 3$, 2 — показник p за модулем q, $q > 2$. Як і раніше, за теоремою 1.2.3 $G = PD$, P — силовська p-підгрупа з G, D — її холлівське доповнення, G — скінченна нільпотентна дисперсивна група. Звідси $\langle x\rangle \leqslant Q \leqslant D$, Q — силовська q-підгрупа з G. Оскільки G — розв'язна група, то не порушуючи загальності можна вважати, що G містить дисперсивну підгрупу PQ. Тоді або $PQ = P \lambda Q$, або $PQ = Q \lambda P$. Якщо $PQ = Q \lambda$

P, то PQ містить C і $C \cap Q = \langle x \rangle \lhd C$, що неможливо, оскільки $\langle x \rangle \not\lhd C$. Звідси $PQ = P \lambda Q$ і в G існує підгрупа $H = P \lambda \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $Z(P) \lhd H$. Відомо, що $Z(P) \cap A \neq 1$. Оскільки A — мінімальна нормальна підгрупа як в C, так і в G, і $Z(P) \cap C$ C, то $A \leqslant Z(P)$.

Покажемо, що P — метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді P містить мінімальну неметациклічну підгрупу T, яка за теоремою 1.2.1 є УЩН[ ]-групою, що задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1—5 теореми 1.3.3. Припустимо, що T — група типу 1 теореми 1.3.3. Тоді P містить елемент y, $/y/ = p$ і $\langle y \rangle \cap A = 1$. Без порушення загальності можна вважати, що $T = A \times \langle y \rangle$. За попереднім $T \lhd G$ і G/T — дедекіндова група. Покладемо $U = T \lambda \langle x \rangle$. Тоді $U/T \lhd G/T$ і, значить, $U \lhd G$. За теоремою Машке (див., наприклад, [74, теорема 20.2.2]), не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle y \rangle \lhd U$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 2, то $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$ — нільпотентна група. Звідси $\langle y \rangle \leqslant Z(U)$, $U = \langle y \rangle \times C$, де C — характеристична підгрупа з U. Отже, $C \lhd G$, що не так. Таким чином, T не може бути групою типу 1 теореми 1.3.3 і всі елементи порядку p належать $A \leqslant Z(P)$. Звідси $N_P(\langle x \rangle) = C_P(\langle x \rangle) = 1$ і тому $[H : N_H(\langle x \rangle)] = /P/$. Оскільки в групах типу 2 теореми 1.3.3 є нецентральні елементи порядку 3, то T не може бути групою типу 2 згаданої теореми. Нехай T — група одного з типів 3, 4 теореми 1.3.3. Тоді $/T'/ = 2$, $T' \lhd G$, $T' < A$, що суперечить мінімальності A в C. Отже, T не може бути групою типу 3 чи 4 теореми 1.3.3.

Нехай T — група типу 5 згаданої теореми. Тоді $/A/ = 4$, $q = 3$ і за теоремою Силова (див., наприклад, [74, теорема 11.1.1]) $[H : N_H(\langle x \rangle)] = 32 = 1 + 3k$. Звідси $31 \equiv 0 \pmod 3$. Але, очевидно, $31 \not\equiv$

0 (mod 3) і тому T не може бути групою типу 5 теореми 1.3.3. Отже, P — метациклічна група.

Покажемо тепер, що $P' = 1$. Нехай це не так. Тоді $w(P') \lhd H$, $w(P') \leqslant A$, $w(P') \neq 1$, що суперечить мінімальності A в H. Звідси P — метациклічна абелева група з нециклічною метациклічною підгрупою $w(P) = A$ і $/A/ = p^2$. Зрозуміло, що $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\gamma$, $w(P) = A = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b^{p^{\gamma-1}}\rangle$ і тому без порушення загальності можна вважати, що $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha \geqslant \gamma$. Покажемо, що $\alpha = \gamma$. Нехай $\alpha > \gamma$. Тоді, як відомо, $P^{p^\gamma} = \langle a^{p^{\alpha-\gamma}}\rangle$ — неодинична характеристична підгрупа з P. Тому $\langle a^{p^{\alpha-\gamma}}\rangle \lhd H$. Звідси $w(\langle a\rangle) = w(\langle a^{p^{\alpha-\gamma}}\rangle)$ — характеристична підгрупа з P^{p^γ} порядку p. Значить, $w(\langle a\rangle) < A$, $w(\langle a\rangle) \lhd H$ і тому $w(\langle a\rangle) \lhd C$, що суперечить мінімальності A в C. Таким чином, $\alpha = \gamma$.

Нехай $\gamma > 2$. Тоді $P > P_1 = \langle a\rangle \times \langle b^p\rangle$, $/b^p/ \geqslant p^2$. Зрозуміло, що P_1 не може бути підгрупою жодного з типів 1—6 теореми 1.2.2. Тому $P_1 \lhd G$, $/a/ > /b^p/$. Тепер для P_1, як і раніше для P, $w(\langle a\rangle) \lhd C$, що неможливо. Таким чином, $\alpha < 3$. Ясно, що G містить підгрупу $V = A \lambda D$. Оскільки $C \cap D = C \cap Q = \langle x\rangle \not\lhd C$, то $D \not\lhd V$ і D — підгрупа одного з типів 1—6 теореми 1.2.2, D містить підгрупу M, $M \lhd G$, $C_D(P) = C_D(A) = M$. Оскільки G — недедекіндова група, то за теоремою 1.2.3 з урахуванням того, що G містить підгрупу $A \times M$, маємо, що M не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток двох неодиничних прямих множників. Можливі два випадки: 1) $V \not\lhd G$; 2) $V \lhd G$.

Випадок 1. У цьому випадку $V < G$, тому $A < P$ і, значить, $\alpha = \gamma = 2$, V — ненільпотентна група і тому V — підгрупа типу 5 теореми 1.2.2. За попереднім $V = C$ і тому $D = \langle x\rangle = Q$, $/x/ = p^\beta$. Припустимо, що $\beta > 1$. Тоді $\langle x^q\rangle \leqslant Z(G)$ і в G існує підгрупа $K = \langle a\rangle \times$

$\langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, яка не може бути підгрупою жодного з типів 1—6 теореми 1.2.2. Звідси $K \lhd G$, $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle = P_1$ — силовська p-підгрупа з K і тому $P_1 \lhd G$. Як і раніше для P_1, $w(\langle a \rangle) \lhd C$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$ і G — група типу 1 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $[V,P] \leqslant V \cap P = A$. Зрозуміло, що $[P,\langle x \rangle] = P$. Тому $P \leqslant A$ і, значить, $A = P$ і $G = P \lambda D = V$. Оскільки підгрупа D кожного з типів 4, 6 теореми 1.2.2 містить підгрупу M, що розкладається в прямий добуток двох неодиничних множників, то D не може бути підгрупою ні типу 4, ні типу 6 згаданої теореми. Якщо припустити, що $\langle x \rangle \lhd D$, то $C \lhd G$, що неможливо. Отже, $\langle x \rangle \not\lhd D$ — недедекіндова група і тому D не може бути ні підгрупою типу 1, ні підгрупою типу 3 теореми 1.2.2. Якщо D — підгрупа типу 5 теореми 1.2.2, то $/M/ = q$, $D = Q$, $Q' = 1$, що неможливо. Значить, залишається випадок, коли D — група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/D/ = qr$, $D' \neq 1$, q і r — різні прості числа. Відомо [64], що $D = R \lambda \langle x \rangle$, де $/R/ = r$, $\langle x \rangle = Q$, $/x/ = q$, $R = \langle y \rangle$, $/y/ = r$, $D' = R$, $r \equiv 1 \pmod q$ і D — ненільпотентна група Міллера—Морено. Покладемо $S = P \lambda R$. Тоді $S \lhd G$ і $G = S \lambda Q$. Припустимо, що S — ненільпотентна група. Якщо S — група Фробеніуса, то групою Фробеніуса, очевидно, є і підгрупа C. Звідси групою Фробеніуса буде і G з ненормальним множником D порядку qr. Відомо [215], що в групі Фробеніуса D — циклічна група. Суперечність. Отже, S не є групою Фробеніуса. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[a, y] = 1$ і, значить, $a \in Z(S)$. Оскільки S — ненільпотентна група, то $Z(S) = \langle a \rangle$ і тому $\langle a \rangle \lhd G$, що суперечить мінімальності A в C. Звідси S — нільпотентна група, $S = P \times R$, і тому G — група типу 2 теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Тоді $G = T \lambda Q$, $T = P \times R$, $/P/ = p^2$, $/R/ \in \{1,r\}$, $/Q/ = q$, p, q, r — попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod q$, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $T = G' = [T,Q]$, $U \lambda Q = V$ — підгрупа Міллера—Морено порядку p^2q, що є мінімальною неметациклічною групою типу 6 теореми 1.3.3 (в групі G типу 1 $U = \Phi(P)$, а в групі G типу 2 $U = P$). Очевидно, що G — скінченна група, а тому вона локально ступінчаста. Покажемо, що $V \trianglelefteq G$. Нехай $V \lhd G$. Ясно, що $G = TV$, $T \cap V = U$, $[T, V] = [U,V] = U = V'$. Звідси $U \lhd G$, $G/U = T/U \times V/U$ — абелева група. Оскільки $G' = T$, $U < T$, то T/U — неодиничний комутант G/U, що не так. Отже, $V \trianglelefteq G$.

Покажемо, що G — УЩН[ ]-група, тобто що при $/[A;B]/ > 2$ $[A;B]$ э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$. Звідси $/A/ > 1$, /B/ ділиться на добуток трьох простих чисел, $B < G$, $B \not\leq G'$ і тому $T \cap B = D \lhd B$, $D < T$, $[B:D] \in \{1,q\}$.

Нехай $[B:D] = 1$. Тоді $B = D < T$ і /D/ ділитиься на добуток трьох простих чисел. В групі G типу 2 $/T/ = rp^2$ і тому в даному випадку G може бути групою типу 1, у якої $T = P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/B/ = /D/ = p^3$. Звідси B — нециклічна група і тому $w(P) = w(B) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$, $A \leqslant w(B) = N = w(P) \lhd G$, що й треба було довести, тобто у цьому випадку G є УЩН[ ]-групою.

Нехай, накінець, $[B:D] = q$. Тоді, не порушуючи загальності можна вважати, що $Q \leqslant B = D \lambda Q$ і $G = TB$. В групі G кожного з розглядуваних типів Q — 2-максимальна підгрупа з G, $G > B > Q$ і тому Q — максимальна підгрупа з B. Звідси A не містить q-елементів і, таким чином, $A \leqslant D$. Оскільки $T' = 1$, то $D \lhd G$, і по-

клавши D = N, будемо мати, що G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.11. *Нехай G — локально ступінчаста УЩН[ ]-група і C — її ненормальна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді C — ненільпотентна група Міллера—Морено порядку p^2q з нормальною силовською p-підгрупою, p і q — різні прості числа.*

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 1.3.4.

Наслідок 1.3.12. *Нехай G — локально ступінчаста УЩН[ ]-група і C — її нільпотентна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді $C \lhd G$ і G/C — дедекіндова група.*

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 1.3.4.

1.4. Будова ЩН[ ]-груп і їх підкласів

Лема 1.4.1. *В довільній ЩН[ ]-групі G нормальні всі нециклічні підгрупи та підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп. Ненормальними в G можуть бути лише примарні циклічні підгрупи.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група, U — її підгрупа і x — довільний елемент з U. Припустимо спочатку, що U — нециклічна група. Тоді /[<x>;U]/ > 1 і, значить, [<x>;U] э N(x) $\lhd$ G. Зрозуміло, що підгрупа N, яка породжена всіма підгрупами N(x), для всіх x з U нормальна в G. Звідси U = N і N $\lhd$ G.

Нехай U = <x> — циклічна група. Ясно, що при /U/ $\in$ {1,p}, p — просте число, Ф(U) $\lhd$ G. Нехай /U/ ділиться на добуток двох простих чисел. Якщо U $\lhd$ G, то Ф(U) $\lhd$ G. Нехай U $\not\lhd$ G. Тоді

/[Ф(U);U]/ > 1 і, значить, [Ф(U);U] э N ◁ G. Ясно, що Ф(U) — характеристична підгрупа з N і тому Ф(U) ◁ G. Таким чином, завжди Ф(U) ◁ G.

Покажемо, що U — примарна циклічна група. Нехай це не так, тобто U — непримарна група. Тоді U = <y> × <z>, /y/ ≠ 1, /z/ ≠ 1, /[<y>;U]/ > 1, /[<z>;U]/ > 1. За означенням ЩН[ ]-груп [<y>;U] э N(y) ◁ G, [<z>;U] э N(z) ◁ G. Звідси N(y)N(z) = U ◁ G, що неможливо, оскільки U ◁ G. Отже, U — примарна циклічна група. Лема доведена.

Л е м а 1.4.2. *Нехай G — ЩН[ ]-група, що містить підгрупу U = A × B, A ◁ G, B ≠ 1. Тоді A — квазіцентральна підгрупа з G.*

Доведення. Нехай G та U взято з умови леми і X — довільна підгрупа з A. Покажемо, що X ◁ G. При X = 1 чи X = A це очевидно. Значить, 1 < X < A. Тоді за лемою 1.4.1 X × B ◁ G і тому (X × B) ∩ A = X ◁ G і, значить, A — квазіцентральна підгрупа з G. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.4.1. *Нільпотентна недедекіндова ЩН[ ]-група G є p-групою, у якої нормальні всі нециклічні підгрупи.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G задовольняє умову теореми 1.2.3, за твердженням якої G = P × D, P — недедекіндова силовська чернiковська p-підгрупа з G, D — її чернiковське холлівське доповнення в G. За лемою 1.4.1 всі нециклічні підгрупи з P нормальні в G. Припустимо, що D ≠ 1. Тоді за лемою 1.4.2 P — дедекіндова група, що неможливо. Отже, G — p-група. Наслідок доведений.

Л е м а 1.4.3. *Локально ступінчасті ненільпотентні ЩН[ ]-групи G вичерпуються групами Шмідта типу G = P ⋋ Q, P — силовська p-підгрупа з G, Q — силовська q-підгрупа з G, p і q — різні*

прості числа, $/P/ \in \{p,p^2\}$, $/Q/ = q^\beta$, $\beta > 0$; при $/P/ = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; при $/P/ = p^2$ $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ — показник p за модулем q.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G взято з леми. Тоді G задовольняє умову теореми 1.2.3 і може бути лише скінченною дисперсивною нільпотентною групою типу 1 згаданої теореми. Звідси G містить підгрупу Шмідта $S = P \lambda Q$, яка в свою чергу за теоремою 1.2.1 задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 - 3 теореми 1.3.1. За наслідком 1.3.4 S є групою розглядуваної леми.

Покажемо, що S = G. Дійсно, за лемою 1.4.1 $S \lhd G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [74, лема 17.1.8]) $G = SD$, де $D = N_G(Q)$, $D \cap P = N_P(Q) = 1$. Очевидно, що $P \lhd G$, $G = P \lambda D$, $S \cap D = Q \lhd D$. Зрозуміло, що $D \not\lhd G$ і тому за лемою 1.4.1 D — примарна циклічна q-група, у якої $\Phi(D) \lhd G$. Звідси $D = \langle y \rangle$, $\langle y \rangle \geqslant Q$, $Q \not\lhd G$, $y^q \in Z(G)$. Тоді $Q \leqslant \langle y^q \rangle$. Звідси $Q = \langle y \rangle$ і тому D = Q, G = S. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 1.3.4. Лема доведена.

Т е о р е м а 1.4.1. *Локально ступінчасті недедекіндові ЩН[ ]-групи G є черніковськими групами, у яких $/G'/ \in \{p,p^2\}$, $[G:Z(G)] \in \{p^2q,pq\}$, p і q — необов'язково різні прості числа та вичерпуються групами таких типів:*

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ \in \{4,8\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = C \times Q$, C — неодинична локально циклічна 2-група, Q — група кватерніонів порядку 8;

4) $G = (C \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, C — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, $[a,b] = c \in C$, $/c/ = p$, $/a/ = /b/ = p$, $[C,\langle b \rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $[a,x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$;

8) $G = P \lambda Q$, P — силовська p-підгрупа з G, Q — силовська q-підгрупа з G, p і q — різні прості числа, $/P/ \in \{p,p^2\}$, $/Q/ = q^\beta$, $\beta > 0$; при $/P/ = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; при $/P/ = p^2$ $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ — показник p за модулем q.

***Доведення**. Необхідність.* Нехай G взято з теореми. Тоді G задовольняє умову теореми 1.2.3, за твердженням якої G — черніковська розв'язна недедекіндова дисперсивна група, для якої можливі випадки: 1) G — скінченна ненільпотентна група; 2) G — нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 1.4.3, за твердженням якої G — група типу 8 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову наслідку 1.4.1, за твердженням якого G — p-група з нормальними нециклічними підгрупами. З опису цих груп [88, 89] одержимо, що G — група одного з типів 1—7 теореми.

Зрозуміло, що в групі G кожного з типів 1—8 G' і $Z(G)$ мають ті ж властивості, які вказані в початковому формулюванні теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—8 теореми. Зрозуміло, що G — недедекіндова локально ступінчаста група. Покажемо, що G — ЩН[ ]-група. Для груп G типу 8 це доведено в наслідку 1.3.4. Тому в подальшому будемо вважати, що G — нільпотентна p-група одного з типів 1—7 теореми.

Зрозуміло, що в силу [88, 89] кожна нециклічна підгрупа з G нормальна. Нехай $/[A;B]/ > 1$. Покажемо, що [A;B] э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $B < G$, $B \not> G'$ і B — циклічна група. Ясно, що $/B/ > p^2$. Оскільки $/G'/ \leqslant p^2$ і $B = \langle u \rangle$, то, як відомо, $u^{p^2} \in Z(G)$. В силу вибору A та B $A = \langle u^p \rangle$. Звідси при $/G'/ = p$ маємо, що $A \leqslant Z(G)$, що не так. Тоді $/G'/ = p^2$. Зауважимо, що в групах G кожного з типів 5—7 $u^2 \in Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так, а в групах G кожного з типів 1, 3, 4 $/G'/ = p$. Отже, в подальшому G може бути лише групою типу 2 теореми. Оскільки $\langle u \rangle = B \not\lhd G$, то $\langle u \rangle$ співпадає з однією з підгруп $\langle b \rangle$, $\langle (ab)^2 \rangle$. Дійсно, $u = a^i b^j$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Звідси при парному j $u^2 = a^{2i}b^{2j} \in \langle a^2 \rangle$, при непарному j $u^2 = b^{2j}$. Оскільки $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $b^2 \in Z(G)$, то $A = \langle u^2 \rangle \lhd G$, що знову неможливо. Отже, G — ЩН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.4.2. *Нехай G — локально ступінчаста недедекіндова група. Тоді справедливі такі твердження:*

1) будь-яка ЩН[ ]-група є групою з нормальними нециклічними підгрупами;

2) існують неперіодичні метациклічні групи G та скінченна група G з нормальною силовською 2-підгрупою, яка ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, у яких нормальні всі нециклічні підгрупи і G — не ЩН[ ]-група;

3) для довільної p-групи G наступні умови еквівалентні:

а) G — ЩН[ ]-група; б) G — група з нормальними нециклічними підгрупами.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді твердження 1 випливає з леми 1.4.1. В силу [88, 89] серед груп з нормальними нециклічними підгрупами є групи таких типів: $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 4$, $/b/ = \infty$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, і група Шмідта $G = P \lambda \langle x \rangle$, у якої P — група кватерніонів порядку 8, які недедекіндові. За теоремою 1.4.1 вказані типи груп не можуть бути ЩН[ ]-групами. Цим твердження 2 наслідку доведено. В силу [88, 89] група кожного з типів 1—7 теореми 1.4.1 є групою, у якої всі нециклічні підгрупи нормальні. Це й доводить твердження 3 наслідку. Наслідок доведено.

Т е о р е м а 1.4.2. *Класи H-, ЩН[ )- , ЩН( ]-груп співпадають з класом дедекіндових груп.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо G — H-група, то за лемою 1.2.2 G — дедекіндова група. Нехай G — ЩН[ )-група чи G — ЩН( ]-група і X — будь-яка її підгрупа. Покажемо, що $X \lhd G$. Якщо $X = G$, чи $X = 1$, то це очевидно. Тому далі $1 < X < G$. Припустимо, що $X \not\lhd G$. Тоді за лемою 1.2.1 G — ЩН[ ]-група, для якої справедливе твердження леми 1.4.1. Звідси $X = \langle x \rangle$, $/x/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x^p \rangle \lhd G$. Для ЩН( ]-груп G $(\langle x^p \rangle; \langle x \rangle] \ni N \lhd G$ і тому $\langle x \rangle = N$, що не так. Нехай G — ЩН[ )-група. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп з G, які містять $\langle x \rangle$. За вибором $Z > \langle x \rangle$. Ясно, що $/[\langle x \rangle; Z]/ > 1$ і тому за означенням ЩН[ )-груп $[\langle x \rangle; Z) \ni N \lhd G$. Звідси $N < Z$, що неможливо за вибором Z. Отже, завжди $X \lhd G$ і тому G — дедекіндова група. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

Висновки до розділу I

У підрозділі 1.1 розглядаються групи, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами. Конструктивний опис локально ступінчастих груп такого роду дано в теоремі 1.1.1. У теоремі 1.1.2 встановлюється один критерій дедекіндовості групи. Опис розкладу групи за допомогою її нормальної певної підгрупи подано в теоремі 1.1.3. У цьому ж підрозділі описані метациклічні групи з трьома інволюціями (теорема 1.1.4). Теореми 1.1.1 — 1.1.4 нові і мають самостійне значення.

У підрозділі 1.2 вводяться означення восьми класів груп з умовами щільності нормальності для підгруп (означення 1.2.3). Теорема 1.2.1 встановлює замкненість введених класів груп за підгрупами та фактор-групами і включення кожного з цих класів в інший. Всі розглядувані класи груп належать класу УЩН[ ]-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$. Теорема 1.2.2 описує всі типи ненормальних підгруп локально ступінчастої УЩН[ ]-групи і є одним із вузлових результатів для подальших досліджень. Теорема 1.2.3 присвячена характеризації локально ступінчастих УЩН[ ]-груп.

Підрозділ 1.3 присвячений конструктивному опису деяких підкласів УЩН[ ]-груп, що мають самостійне значення і використовуються в подальших дослідженнях. У теоремі 1.3.1 конструктивно описані всі локально ступінчасті УЩН[ ]-групи Шмідта. Теорема 1.3.2 описує всі метациклічні УЩН[ ]-групи, а теорема 1.3.3 — ло-

кально ступінчасті мінімальні неметациклічні групи такого роду. У теоремі 1.3.4 описані локально ступінчасті УЩН[ ]-групи, які мають ненормальні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Підрозділ 1.4 присвячений опису локально ступінчастих ЩН[ ]-груп та їх підкласів. ЩН[ ]-групою називається така група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A < B$, існує нормальна в G підгрупа N і $A \leq N \leq B$. Зауважимо, що ЩН[ ]-групи є цілком новим класом груп. Теорема 1.4.1 дає конструктивний опис всіх локально ступінчастих ЩН[ ]-груп з виділенням восьми типів груп такого роду. Теорема 1.4.2 показує, що всі виділені в означенні 1.2.3 підкласи ЩН[ ]-груп вичерпуються дедекіндовими групами.

РОЗДІЛ II

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[ ]-ГРУП

Цей розділ повністю присвячений опису локально ступінчастих груп з умовами узагальненої щільності нормальності для підгруп (УЩН[ ]-груп). Спочатку описуються метагамільтонові групи такого роду. Далі, з використанням цього опису, вивчаються неметагамільтонові УЩН[ ]-групи.

2.1. Деякі корисні результати

Л е м а 2.1.1. *Нехай $G = A \times B$ — УЩН[ ]-група і A — її недедекіндова підгрупа. Тоді $/B/ \in \{1,q\}$, q — просте число. Якщо G — локально ступінчаста група і $/B/ = q$, то A — група одного з типів 1—8 теореми 1.4.1.*

Доведення. Нехай G з теореми. Тоді G задовольняє умову леми 1.2.5, за твердженням якої B не має власних немаксимальних підгруп. Звідси за лемою 1.1.1 /B/ ∈ {1,q}, q — просте число.

Нехай /B/ = q. Якщо G — локально ступінчаста група, то, очевидно, A — локально ступінчаста група. Звідси за теоремою 1.2.1 та лемою 1.2.5 A — локально ступінчаста ЩН[ ]-група, що задовольняє умову теореми 1.4.1 і може бути групою одного з типів 1—8 згаданої теореми. Лема доведена.

Л е м а 2.1.2. *Нільпотентні УЩН[ ]-групи G з комутантом порядку p, p — просте число, мають вигляд $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \times$*

$\langle z\rangle$), $/a/ = p > 2$, $/z/ \in \{1, s\}$, s — просте число, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, та вичерпуються групами типів:

1) $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $q \neq p$ — просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $\langle b^q\rangle \lhd G$; при $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $/b/ = qr$, q і r — різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $C_{\langle b\rangle}(\langle a\rangle) = z = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай група G з леми. В силу теореми 1.2.3 та результатів з [216] G — скінченна група вигляду $G = \langle a\rangle \lambda D$, де $\langle a\rangle$ — найменша нормальна підгрупа з G, для якої $G/\langle a\rangle$ — нільпотентна група. Звідси D — скінченна нільпотентна група. Оскільки G — ненільпотентна група і $/G'/= p$, то $\langle a\rangle = G'$, $/a/ = p$ — просте число. Таким чином, $D' = 1$ і $p \neq 2$. Зрозуміло, що $[\langle a\rangle,D] = \langle a\rangle$, $D \not\lhd G$. Тоді D група одного з типів 1—6 теореми 1.2.2, за твердженням якої D може бути лише абелевою групою одного з типів 1, 2, 4, 5 згаданої теореми і D містить підгрупу M, $M \lhd G$, $M = C_D(\langle a\rangle)$.

Нехай D — група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b\rangle \times \langle z\rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ = q$, q — просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $M = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$. Зрозуміло, що $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$ і тому G — група типу 1 розглядуваної леми.

Нехай D — група типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b\rangle \times \langle z\rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ = s$, q і s — прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $M = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$. Нехай $s = p$. Покладемо $c = az$. Легко бачити, що $/c/ = p$ і $\langle c\rangle \not\lhd G$. Оскільки $b^q \in Z(G)$, то в G існує підгрупа $\langle c\rangle \times \langle b^q\rangle = U$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $/[\langle c\rangle; U]/ > 2$ і за означенням УЩН[ ]-груп $[\langle c\rangle;U]$ э $N \lhd G$. Оскільки $\langle c\rangle$ — нормальна силовська p-підгрупа нормальної в G підгрупи N, то $\langle c\rangle \lhd G$, що неможливо. Отже $\beta < 3$ і G — група типу 1 леми.

Нехай D — група типу 1 теореми 1.2.2. Тоді D = <b>, z = 1, /b/ = q^{β}, $\beta > 0$, q — просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $\langle b^{q^2} \rangle \lhd G$ і знову G — група типу 1 леми.

Нехай D — група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді /D/ = qr, q і r — необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$. Нехай q = r. Відомо [64], що Aut<a> — циклічна група і D/M — підгрупа із Aut<a>. При наших припущеннях підгрупа D типу 2 теореми 1.2.2 є елементарною абелевою групою порядку q^2 і M = 1. Звідси і попереднього $C_D(\langle a \rangle) = M \neq 1$, що не так. Тому q ≠ r. Тоді D = <b>, /b/ = qr, M = 1, <a> λ $\langle b^q \rangle$ і <a> λ $\langle b^r \rangle$ — нільпотентні підгрупи. Звідси, як відомо, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$ і G — група типу 2 леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G = <a> λ D — група одного з типів 1, 2 леми. Тоді, очевидно, D = <b> × <z>, /z/ ∈ {1, s}, s — просте число, z ∈ Z(G). Ясно, що G′ = <a>, /a/ = p — просте число і G — нільпотентна метациклічна група одного з типів 12, 13 теореми 1.3.2, за твердженням якої G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2.1.3. *Нехай G — примарна недедекіндова УЩН[ ]-група G з комутантом порядку p, p — просте число, яка не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп і містить неабелеву підгрупу порядку p^3. Тоді G має вигляд G = CF, де C — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, [C,F] = 1, $C \cap F = C \cap F'$, $F' = G' = \langle c \rangle$, /c/ = p, $F = (Q \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, /a/ ∈ {p, p^2}, /b/ = p, [a,b] = c ∈ Q, [Q,<b>] = 1, Q = <u,v> — група порядку p чи p-група Міллера—Морено, /G/ > p^3 і є групою одного з типів:*

1) $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = Q = C$*; при* $/a/ > p$ C *— група кватерніонів порядку 8;*

2) $C = \langle c\rangle$, $Q = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $\Delta > 1$, $[u,v] = [a,b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q,\langle b\rangle] = 1$;

3) $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $/c/ = /u/ = /v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u, v] = [a,b] = c \in C$, $[Q,\langle b\rangle] = 1$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $G > M = \langle x,y\rangle$, $/x/ \in \{p, p^2\}$, $/y/ \in \{p, p^2\}$, $[\langle x\rangle,\langle y\rangle] = \langle c\rangle = G' = M'$, $/c/ = p$, $c \in Z(G)$. За наслідком 1.1.6 $G = MD$, де $D = C_G(M)$, $M \cap D = \langle c\rangle$. За умовою леми та теоремою 1.2.3 G — черніковська група, що не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^4.

Нехай спочатку $D' = 1$. Тоді в силу відомого результату [65] $D = C \times D_1$, де C — сервантна локально циклічна підгрупа з D, що містить $\langle c\rangle$, D_1 — її доповнення в D. Звідси $G = D_1 \times (CM)$ і тому з умови леми $D_1 = 1$ і, значить, $G = CM$. Оскільки $M < G$, то $z \in C$, $/z/ = p^2$ і $z^p = c$. Якщо $/x/ = /y/ = p$, то покладемо $x = a$, $y = b$, $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $[a,b] = c$, $Q = \langle c\rangle$ і одержимо, що G — група типу 1 леми.

Нехай $/x/ = p^2$. Тоді існує і, для якого $z^i x = a$, $/a/ = p$, і при $/y/ = p$ покладемо $y = b$. Як і раніше, одержимо, що $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ і G — група типу 1 леми.

При $/x/ = p^2$ і $/y/ = p^2$ знайдуться такі і та j, що $z^i x = a$, $z^j y = b$, $/a/ = /b/ = p$. Знову, як і раніше, $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ і G — група типу 1 леми.

Нехай тепер $D' \neq 1$. Покажемо, що D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Дійсно, нехай це не так. Тоді $D = D_1 \times D_2$, де $D' = D'_2 = G' = \langle c\rangle = D \cap M = D_2 \cap M$. Звідси $G = D_1 \times (D_2M)$. За умовою леми $D_1 = 1$, що суперечить нашому припущен-

ню. Отже, D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Можливі випадки: 1) $M = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$; 2) M — метациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку D містить $Q = \langle u,v\rangle$ — p-групу Міллера—Морено і G містить підгрупу $U = D \times \langle b\rangle$, яка за теоремою 1.2.1 задовольняє умову леми 2.1.1. В силу цієї леми D — група одного з типів 1—7 теореми 1.4.1 або гамільтонова група. Оскільки $/D'/ = p$ і D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп, то D може бути лише групою одного з типів 1, 4 теореми 1.4.1 або гамільтоновою групою.

Нехай D — група типу 1 теореми 1.4.1. Тоді $D = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $[u,v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$. Покажемо, що $/v/ = p$. Нехай це не так. Тоді G містить підгрупу $V = \langle v\rangle \times \langle a\rangle$. Ясно, що $V \trianglelefteq G$ і V — група типу 5 теореми 1.2.2, за твердженням якої $\langle v^p\rangle \times \langle a\rangle \trianglelefteq G$. Звідси $a \in Z(G)$, що неможливо. Отже, $/v/ = p$. Покладемо $C = \langle c\rangle$, $F = DM$, $D = Q$ і одержимо, що G — група типу 2 леми.

Нехай D — група типу 4 теореми 1.4.1. Тоді $D = CQ$, C — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = /v/ = p$, $[u,v] = c \in C$, $[C,Q] = 1$. Покладемо $F = QM$. Тоді $G = CF$, $[C,F] = 1$ і G — група типу 3 леми.

Нехай, нарешті, D — гамільтонова група. Тоді за попереднім $D = C$ — група кватерніонів порядку 8. Покладемо $Q = \langle c\rangle$, $F = M$ і отримаємо, що $G = CF$ — група типу 1 леми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку M — метациклічна група і можна вважати, що G не містить неабелевої підгрупи $M = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ порядку p^3. Звідси $M = \langle x\rangle\langle y\rangle$, $/x/ = p^2$. Нехай M не є групою кватерніонів порядку 8. Тоді $M = \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$, $/y/ = p$ і знову G

містить підгрупу $U = D \times \langle y \rangle$ і як у випадку 1, D — група кватерніонів порядку 8 чи група одного з типів 1, 4 теореми 1.4.1. Нехай $d \in D$, $/d/ = p^2$, $d^p = c$. Тоді існує ціле число і таке, що $d^i x = a$, $/a/ = p$, $[a,y] = c$ і G містить $M_1 = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle y \rangle$, $/y/ = p$, що суперечить розглядуваному випадку. Отже, D — не може бути ні групою кватерніонів порядку 8, ні групою типу 1 теореми 1.4.1. Звідси $D = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $[u,v] = c$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$. У цьому випадку $/D/ > p^3$. Звідси, без порушення загальності можна вважати, що $/u/ = p^2$. Тому G містить елементарну абелеву підгрупу $w(\langle u \rangle) \times w(\langle v \rangle) \times \langle c \rangle \times \langle a \rangle$ порядку p^4, що неможливо. Значить, M — група кватерніонів порядку 8.

Як і раніше, можна вважати, що $\langle c \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з D. Ясно, що D містить підгрупу Міллера—Морено Q, яка задовольняє умову наслідку 1.3.3 і може бути лише групою типу 3 згаданого наслідку. Звідси $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $/Q/ > 8$, $[u,v] = c$, $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2, 4\}$. Покажемо, що $/v/ = 2$. Нехай $/v/ = 4$. Зрозуміло, що $/x/ = /y/ = 4$, $x^2 = y^2$. Покладемо $x_1 = ux$, $y_1 = vy$. Тоді $/x_1/ = /y_1/ = 4$, $\langle x_1 \rangle \cap \langle y_1 \rangle = 1$, $[x_1,y_1] = [ux,vy] = c^2 = 1$ і G містить $V_1 = \langle x_1 \rangle \times \langle y_1 \rangle$. Ясно, що V_1 не може бути групою жодного з типів 1—6 теореми 1.2.2 і тому $V_1 \lhd G$, $V_1 \cap G' = 1$ і, значить, $V_1 \leqslant Z(G)$ і тому $QM = V_1 \times M$.

Нехай $Q = D$. Тоді при $/v/ = 4$ $G = V_1 \times M$, що неможливо. Отже, $/v/ = 2$ і G — група типу 1 леми.

Нехай, накінець, $D > Q$ і нехай d — довільний елемент з D. Тоді одна з підгруп $\langle d, u \rangle$, $\langle d, v \rangle$, $\langle du, v \rangle$, $\langle u, dv \rangle$ є групою типу 3 наслідку 1.3.3. Звідси $/d/ \leqslant 4$ і тому $D/\langle c \rangle$ — скінченна абелева група. Отже, $D/\langle c \rangle = \langle u_1\langle c \rangle \rangle \times \langle v_1\langle c \rangle \rangle \times \langle d\langle c \rangle \rangle \times B/\langle c \rangle$ і без порушення загальності можна вважати, що $[u_1,v_1] \neq 1$. Очевидно,

що $\langle u_1,v_1\rangle$ — група типу 3 наслідку 1.3.3 і тому можна вважати, що $Q = \langle u_1,v_1\rangle$ і, значить, $u_1 = u$, $v_1 = v$. Тоді з умови $D > Q$ випливає, що $/d\langle c\rangle/ > 1$ і тому D містить підгрупу $U_1 = Q \lambda \langle d\rangle$ і $/d/ > 1$. За попереднім $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2, 4\}$, $/d/ \in \{2, 4\}$. Ясно, що $\langle u^2,v^2,d^2\rangle \leqslant Z(G)$. Тоді в G існує підгрупа $K = (\langle c\rangle \times \langle u^2\rangle \times w(\langle v\rangle)) \lambda w(\langle d\rangle)$ порядку 16. За вибором $(\langle c\rangle \times w(\langle v\rangle) \lambda w(\langle d\rangle)$ — абелева група і, значить, K — елементарна абелева група порядку 16, що неможливо. Отже, $Q = D$. Всі випадки розглянуті. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.1.1. *Нededекіндові УЩН[ ]-групи G з комутантом порядку p, p — просте число, мають вигляд $G = CF$, C — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $F = (Q \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $[a,b] \in \langle c\rangle = G' = F' \leqslant Q = \langle u,v\rangle$, $/c/ = p$ та вичерпуються групами типів:*

1) $G = F = (Q \lambda \langle b\rangle) \times \langle a\rangle$, $Q = \langle c\rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/a/ \in \{1, r\}$, p і q — різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $/a/ \neq 1$ $b^q \in Z(G)$; при $/a/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = F = Q \lambda \langle b\rangle$, $/Q/ = p$, $/b/ = qr$, p, q і r — попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $C_{\langle b\rangle}(Q) = 1$;

3) $G = F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $[u,v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $/a/ \in \{1, r\}$, r — просте число;

4) $G = C \times F$, C — локально циклічна 2-група, $/C/ > 2$, $F = Q \times \langle a\rangle$, Q — група кватерніонів порядку 8, $/a/ \in \{1, r\}$, r — просте число;

5) $F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $[u,v] = c \in C$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$, $/a/ \in \{1, r\}$, r — просте число, $/C'/\cdot/u/\cdot/v/ \neq 32$; при $/a/ \neq 1$ $/u/ = /v/ = p$;

6) $G = F$, $Q = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = [a,b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q,\langle b \rangle] = 1$;

7) $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = /v/ = /c/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[Q,\langle b \rangle] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Припустимо спочатку, що G — ненільпотентна група. Тоді G задовольняє умову леми 2.1.2, за твердженням якої G є групою одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми.

Нехай тепер G — нільпотентна група. Нехай спочатку $G = X \times A$, де $X \neq 1$, $A \neq 1$. Оскільки $/G'/ = p$, то або $/X'/ = p$, або $/A'/ = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' = G'$ і тому $A' = 1$. За теоремою 1.2.3 G — недедекіндова черніковська група. Припустимо, що $/A/ = r$ — просте число. В силу леми 2.1.1 X може бути групою одного з типів 1, 3, 4 теореми 1.4.1.

Якщо X — група типу 1 теореми 1.4.1, то покладемо $X = Q$, $A = \langle a \rangle$, $C = X'$, $F = X \times A$. Звідси $F = G$ і, значить, G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай X — група типу 3 теореми 1.4.1. Тоді $X = C \times Q$, C — локально циклічна 2-група, $/C/ > 2$, Q — група кватерніонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$ і одержимо, що $G = C \times F$ і, значить, G — група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай X — група типу 4 теореми 1.4.1. Тоді $X = CQ$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = /v/ = p$, $[u,v] = c \in C$, $/c/ = p$, $[C,Q] = 1$, C — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$. Звідси $G = CF$ і тому G — група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай $/A/$ — непросте число. Тоді за лемою 2.1.1 X — гамільтонова група. В силу твердження 1.1.1 $X = Q \times D \times A_1$, Q — група

кватерніонів порядку 8, D — елементарна абелева 2-група, A_1 — періодична абелева група без інволюцій. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X = Q \times D$, $A = A_1 \times A$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників. Звідси $/D/ < 4$.

Нехай $/D/ = 2$. Тоді A — локально циклічна 2-група і оскільки G — недедекіндова група, то $/A/ > 2$. Покладемо $A = C$, $F = Q \times D$ і одержимо, шо G — група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай $/D/ = 1$. Тоді $X = Q$ — силовська дедекіндова 2-підгрупа з G, A — її періодичне абелеве доповнення. Звідси в силу твердження 1.1.1 G — дедекіндова група, що не так.

Нехай тепер G не розкладається в прямий добуток своїх неодиничних підгруп. Якщо G містить неабелеву підгрупу порядку p^3, то G задовольняє умову леми 2.1.3. Звідси G — група одного з типів 5—7 теореми. Нехай G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Тоді всі підгрупи порядку p^3 з G абелеві. Зрозуміло, що G містить підгрупу Міллера—Морено M, яка не може бути ні групою кватерніонів, ні групою діедра порядку 8 і $/M/ > p^3$.

Нехай $M = G$. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.3 і може бути групою одного з типів 2, 3 цього наслідку. Звідси G — група одного з типів 3, 5 розглядуваної теореми.

Нехай $M < G$. Тоді $/G/ > p^4$. За наслідком 1.3.3 $M = (\langle c\rangle\langle x\rangle) \lambda \langle y\rangle$, $/x/ = p^{\alpha}$, $/y/ = p^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $[x,y] = c$. Не порущуючи загальності можна вважати, що M — група Міллера—Морено з G найменшого порядку. Покажемо, що підгрупу M можна вибрати так, що M — група типу 3 наслідку 1.3.3. Дійсно, нехай Y — максимальна локально циклічна підгрупа з G, що містить $\langle c\rangle$. Тоді $Y \lhd G$ і G/Y — прямий добуток скінченного числа неодиничних ло-

кально циклічних підгруп Y_r/Y, $0 < r \leqslant n$. Зрозуміло, що G породжується всіма підгрупами Y_r , $Y_r \lhd G$. При $l \neq r$ $Y_r \cap Y_l = Y$. Оскільки G — p-група і $/G'/ = p$, то $G' \leqslant Z(G)$ і для будь-якого g із G $g^p \in Z(G)$.

Покажемо, що $Y_r = Y \lambda B_r$, де B_r — неодинична локально циклічна p-група. Якщо Y_r/Y — квазіциклічна p-група, то $[Y_r:Y] = \infty$. Нехай $/Y/ < \infty$. Тоді Y_r містить квазіциклічну підгрупу B_r, $B_r \leqslant Z(Y_r)$ і, очевидно, $Y_r = Y \times B_r$. Якщо ж $/Y/ = \infty$, то Y — квазіциклічна група, $Y \leqslant Z(Y_r)$ і Y_r — розширення центральної квазіциклічної підгрупи Y за допомогою квазіциклічної підгрупи Y_r/Y. Відомо [65], що $Y'_r = 1$ і тоді $Y_r = Y \times B_r$.

Нехай тепер Y_r/Y — циклічна група. Тоді $Y_r = Y\langle x_r\rangle$. Якщо $Y \cap \langle x_r\rangle = 1$, то $B_r = \langle x_r\rangle$, $Y_r = Y \lambda \langle x_r\rangle$, що й треба було довести. Нехай $Y \cap \langle x_r\rangle \neq 1$. Тоді $c \in \langle x_r\rangle$. Коли Y — квазіциклічна група, то з умови $/G'/ = p$ випливає, що $Y'_r = 1$ і $Y_r = Y \lambda B_r$.

Нехай $/Y/ < \infty$. За вибором $/Y/ > /x_r/$ і тому за будовою метациклічних p-груп (див., наприклад, теорему 1.2.1 з [77]) маємо $Y_r = Y \lambda B_r$.

Отже, завжди $Y_r = Y \lambda B_r$, B_r — неодинична локально циклічна група. Зрозуміло, що $[B_r,B_l] \leqslant \langle c\rangle$. Якщо $[B_r,B_l] \neq 1$, то $[B_r, B_l] = \langle c\rangle$, $/B_r/ < \infty$, $/B_l/ < \infty$ і $(\langle c\rangle \times B_r) \lambda B$ — підгрупа Міллера—Морено шуканого типу.

Нехай $[B_r,B_l] = 1$. Тоді $G = Y \lambda B$, де $B = B_1 \times \ldots \times B_r \times \ldots \times B_n$. Ясно, що $B \lhd G$. Тоді, очевидно, B — абелева група одного з типів 1, 2, 5 теореми 1.2.2 і $/G/ < \infty$. Зрозуміло, що G не є групою Міллера—Морено і тому G не породжується двома елементами. Звідси B — нециклічна група, B не є групою типу 1 теореми 1.2.2 і w(B) — елементарна абелева група порядку p^2. Якщо B — група типу 5

теореми 1.2.2, то $B = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $/y/ = p$, B містить підгрупу $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$. Звідси $[Y,\langle y \rangle] = 1$ і $G = (Y \lambda \langle x \rangle) \times \langle y \rangle$, що суперечить розглядуваному випадку. Якщо тепер B — група типу 2 теореми 1.2.2, то $B = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $/x/ = /y/ = p$. Нехай $S = C_B(Y)$. Покажемо, що $S \neq 1$. Якщо $x \in S$, чи $y \in S$, то $S \neq 1$. Нехай це не так, тобто $x \notin S$ і $y \notin S$. Тоді $Y = \langle d \rangle$, $/d/ = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $[d,x] = c^i$, $[d,y] = c^j$, $\langle c^i \rangle = \langle c^j \rangle = \langle c \rangle = \langle d^{p^{\Delta-1}} \rangle$. Зрозуміло, що і та j не кратні p, і, значить, існує таке n, що $ni + j \equiv 0 \pmod p$. Покладемо $z = x^n y$. Тоді $/z/ = p$, $\langle z \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, $[d,z] = 1$ і $G = (Y \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, що неможливо. Отже, $S \neq 1$. Тоді $z \in S$, $/z/ = p$, $B = F \times \langle z \rangle$ і $G = (Y \lambda F) \times \langle z \rangle$, що знову неможливо. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = CF$ — група одного з типів 1—7 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G — недедекіндова група з комутантом порядку p. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група, тобто для будь-якого $/[A;B]/ > 2$ $[A;B] \ni N \lhd G$. Дійсно, для груп G типу 1 чи 2 це встановлено в лемі 2.1.2. Тому в подальшому будемо вважати, що G — група одного з типів 3—7 теореми. Зауважимо, що якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то, очевидно, G — УЩН[ ]-група. Звідси $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$ і $G' \cap B = 1$. Ясно, що для будь-якого g з G $g^p \in Z(G)$. Отже, при циклічності B $A \leqslant \Phi(B) \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \not\lhd G$. Таким чином, B — нециклічна абелева група і $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел.

Нехай G — група типу 3 теореми. В силу нециклічності B нециклічною буде фактор-група $G/\langle u \rangle$ і підгрупа $\langle v \rangle \times \langle a \rangle$. Звідси $/a/ = p$, G — p-група, $/v/ > p$, і, значить, $w(G) = w(\langle u \rangle) \times w(\langle v \rangle) \times \langle a \rangle \leqslant Z(G)$. Оскільки $G/\langle u \rangle$ — абелева p-група типу (p^γ,p), $\gamma > 1$, то B — теж абелева p-група типу (p^α,p), $\alpha > 1$, тобто $B = \langle z \rangle \times \langle f \rangle$,

$/z/ = p^{\alpha}$, $/f/ = p$ і B — група типу 5 теореми 1.1.1, для якої $A \leqslant M = \langle z^p \rangle \times \langle f \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \trianglelefteq G$, і тому достатність для груп типу 3 теореми доведена.

Нехай G — група типу 4 теореми. Якщо B — локально циклічна група, то за попереднім $/B/ = \infty$ і C — квазіциклічна 2-група. Звідси $C \leqslant B$ і $C \leqslant Z(G)$. Легко бачити, що $w(G) = w(F) \times w(C) \leqslant Z(G)$ і $[B:C] \in \{1, r\}$. Оскільки $B \trianglelefteq G$, то $B \not\leqslant Z(G)$. Тоді $B > C$ і $B = C \times \langle f \rangle$, де $/f/ = r$, $f \in w(G) \leqslant Z(G)$. Звідси $B \leqslant Z(G)$, що неможливо. Нехай тепер B — не локально циклічна група. Тоді B ізоморфна деякій підгрупі абелевої групи типу $(2^{\gamma}, 2)$. Звідси $B = \langle z \rangle \times \langle f \rangle$, $/z/ = 2^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $/f/ = 2$. Тоді, як і для груп типу 3 теореми, маємо $A \leqslant \langle z^2 \rangle \times \langle f \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \trianglelefteq G$. Достатність для груп типу 4 доведена.

Нехай G — група одного з типів 5—7 теореми. Покладемо $U = C$ в групах одного з типів 5, 7 і $U = \langle u \rangle$ — в групі G типу 6 теореми. Тоді $U \triangleleft G$, U — локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8 і тому $G' = \langle c \rangle \leqslant U$ і $U \cap B = 1$. Звідси [G:U] ділиться на $/B/$ і [G:U] є добутком не більше ніж чотирьох простих чисел.

Нехай спочатку $G = U \lambda B$. Припустимо, що при цій умові G містить підгрупу $S = (U \times \langle x \rangle) \lambda \langle y \rangle$, $/x/ = /y/ = p$, $[U, \langle y \rangle] = 1$, $[x,y] = c$. Зрозуміло, що S — група типу 4 теореми 1.4.1, у якої за лемою 1.4.1 нормальні всі нециклічні підгрупи і S/U — елементарна абелева група порядку p^2. Відомо [88, 89], що $/w(Z(S))/ = p$. Ясно, що тепер $S = U \lambda D$, де $D = S \cap B$, D — елементарна абелева група порядку p^2. Звідси $D \triangleleft G$, $S = U \times D$ і $D \leqslant Z(S)$, що суперечить умові $/w(Z(S))/ = p$. Отже, G не містить підгрупи S зазначеного типу і тому G — група типу 5, у якої $/u/ = p^2$, $/v/ \in \{p, p^2\}$ і $/a/ = 1$. Оскільки $G' \neq 1$ і $B' = 1$, то $U \not\leqslant Z(G)$. Але тоді U — група кватер-

ніонів порядку 8 і /v/ = 2. Ясно, що G > V = U × <v>, w(V) = w(U) × <v> ⩽ Z(V) і V = U × <z>, де <z> = V ∩ B, /z/ = 2, z ∈ w(V) ⩽ Z(V), G = VB і, значить, z ∈ Z(G). Звідси v ∈ w(V) = w(U) × <v> = w(U) × <z> ⩽ Z(G) і тоді v ∈ Z(G), що неможливо. Отже, для розглядуваних типів груп U λ B < G. Звідси [G:U] — добуток чотирьох простих чисел, /B/ — добуток трьох простих чисел, /A/ — просте число і, значить, G не є групою типу 6 теореми. Отже, для груп типу 6 теореми достатність доведена.

Нехай G — група типу 5 теореми. Тоді /u/ = p^2, /a/ = 1, /v/ = p^2, /B/ = p^3, /A/ = p. При цих умовах w(G) = w(U) × $<u^p>$ × $<v^p>$ ⩽ Z(G). Але тоді A ⩽ Z(G), що суперечить умові A ⋪ G. Таким чином, достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G — група типу 7 теореми. Покладемо x = u, y = v. Тоді G містить підгрупу S = (U × <x>) λ <y>, яка має ті ж властивості, що і раніше. Як і вище, покладемо D = S ∩ B. Оскільки [S:U] = p^2, [G:U] = p^4, U ∩ B = 1, /B/ = p^3, то /D/ = p і D = <d>. Із будови підгрупи S [88, 89] та умов D ∩ <c> = 1 і w(Z(S)) = <c> маємо, що d ∉ Z(S).

Нехай Z = C_G(<d>). Оскільки /G′/ = p, d ∉ Z(G), то Z ◁ G, [G:Z] = p і Z містить підгрупу <B,b,a>. Припустимо, що U ⩽ Z. Тоді [Z:U] = p^3 і тому Z = U λ B, Z містить підгрупу S_1 = (U × <a>) λ <b>, яка має всі ті ж властивості, що і раніше підгрупа S. Отже, S_1 = U × D_1, D_1 = S_1 ∩ B, D_1 — елементарна абелева підгрупа порядку p^2 з $Z(S_1)$, що неможливо [88, 89]. Таким чином, U ⋪ Z. Але тоді [U,<d>] = 1 і U ⋪ Z(G). Остання умова можлива, коли U — група кватерніонів порядку 8. Тому /G/ = 2^7. Покладемо H = S ∩ Z. Оскільки [G:Z] = 2 і Z не містить U, то [S:H] = 2 = [U:(U ∩ H)]. Ясно, що U ∩ H = <z>, /z/ = 4, U = <f,z>, /f/ = 4, [d,z] = 1, [f, d] =

$f^2 = z^2$. Оскільки $d \in H \leqslant S$, то $d = gu^iv^j$, де $g \in U$. З умови $[f,u] = [f,v] = 1$ випливає, що $[f,d] \neq 1$. Легко бачити, що $/g/ > 2$. Оскільки $[d,f] = [gu^iv^j,f] = [g,f] \neq 1$ і $[g,d] = 1$, то без порушення загальності можна вважати, що $g = z$. З умови $d^2 = (zu^iv^j)^2 = z^2(u^iv^j)^2 = 1$ випливає, що $(u^iv^j)^2 \neq 1$. Звідси і та j не кратні 2. Тому можна вважати, що $i = j = 1$. Покладемо $h = fu$. Тоді $[d,h] = [zu^iv^j,fu] = [z,f][v,u] = c^2 = 1$. Звідси $h \in H$. Очевидно, що $/h/ = 4$, $h^2 = z^2$, $[z,h] = z^2$ і H містить $K = \langle h,z \rangle$ — групу кватерніонів порядку 8. Знову $[Z:K] = 8$, $G' = K'$ і тому $Z = K \lambda B$. Отже, Z містить $S_1 = (K \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, яка має ті ж властивості, що і раніше введена підгрупа S_1, для якої ми одержали суперечність. Достатність для груп типу 7 доведена. Всі можливі випадки розглянули. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 2.1.4. *Метагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку p^n з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p) є групами одного з типів:*

1) $/G/ = p^4$, p — непарне просте число, G' — нецентальна підгрупа з G типу (p,p);

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ — непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $/G/ = p^n$, $n > 3$. В силу твердження 2.1.4 з [77] p — непарне просте число. При $n = 4$ G — група типу 1 леми.

Нехай $n > 4$. Припустимо, що G не містить метациклічних підгруп Міллера—Морено порядку більше p^3. Тоді в силу співвідношення $n > 4$ і твердження 2.1.8 з [77] $G = ((\langle a \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle)\langle b \rangle$, $/a/ = p^m$, $m > 1$, $/\tau/ = /\sigma/ = p$, $[a,\sigma] = \tau \in Z(G)$, $[a,b] = \sigma$, $b^p = \tau^\varepsilon$, $[b,\sigma] = \tau^\Delta$, $\varepsilon \in \{0,1\}$; при $\varepsilon = 1$ $\Delta = 0$. Покладемо $M = (\langle a \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda$

$\langle\sigma\rangle$. Тоді $M \lhd G$, $M^p = \langle a^p\rangle \lhd G$. Звідси $a^p \in Z(G)$. Нехай $\varepsilon = 0$. Тоді $G = ((\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle\sigma\rangle) \lambda \langle a\rangle$. В силу теореми 1.2.2 $\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a^p\rangle \lhd G$. Звідси $[a,b] \in \langle\sigma\rangle \cap (\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a^p\rangle) = 1$, що неможливо. Отже, $\varepsilon = 1$. Тоді $G = (\langle b\rangle \times \langle\sigma\rangle) \lambda \langle a\rangle$, де $/b/ = p^2$. Припустимо, що $/a/ > p^2$. Тоді за теоремою 1.2.2 $\langle b\rangle \times \langle a^p\rangle \lhd G$ і знову $[a,b] \in \langle\sigma\rangle \cap (\langle b\rangle \times \langle a^p\rangle) = 1$, що неможливо. Отже, $/a/ \in \{p, p^2\}$. Оскільки $n > 4$, то $/a/ = p^2$. Покладемо $x = a$, $a = b$, $b = \Sigma$ і одержимо, що $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$ і, значить, G — група типу 2 доводжуваної леми.

Нехай тепер G містить метациклічну підгрупу Міллера—Морено A порядку більше p^3. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [77] $G = A \lambda\langle x\rangle = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/x/ = /b/ = p$ — непарне просте число, $/a/ = p^\alpha$, $\alpha > 2$, $[a,x] = b$. Очевидно, що $A \lhd G$ і $\langle a^p\rangle \lhd G$. Якщо $\langle a^p\rangle \lambda \langle x\rangle \lhd G$, то $w(\langle a^p\rangle \lambda \langle x\rangle) = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Якщо $\langle a^p\rangle \lambda \langle x\rangle \not\lhd G$, то за теоремою 1.2.2 $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Отже, завжди маємо, що $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Звідси $[a,x] \notin \langle b\rangle$, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок неможливий. Лема доведена.

Л е м а 2.1.5. *Метагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку p^n з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p,p) є групами типу* $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ *— непарне просте число,* $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $[a,x] = c^\varepsilon b^p$, $a^p = c^{1+t\varepsilon} b^{tp}$, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = Z(G)$, $0 < \varepsilon < p$, $0 \leqslant t < p$, *всі метациклічні підгрупи з G абелеві і всі елементи порядку p з G належать G′.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [77] $G = G' \langle x\rangle\langle y\rangle$, $/x/ = /y/ = p^2$, $G' = \langle\pi\rangle \times \langle\tau\rangle \times \langle\sigma\rangle$, $/\pi/ = /\tau/ = /\sigma/ = p$ — непарне просте число, $\pi \in Z(G)$, $[x,y] = \sigma$, $[y,\sigma] = \pi$, $[x,\sigma] = \tau$, $x^p = \pi\tau^\alpha$, $y^p = \pi^\beta\tau$, $\tau \in Z(G)$. Зрозуміло,

що $\langle\pi\rangle \cap \langle y\rangle = 1 = (\langle\pi\rangle \times \langle y^p\rangle) \cap \langle\sigma\rangle$. Покладемо $b = y$, $x = \sigma$, $c = \pi$, $a = x$. Тоді G містить нормальну підгрупу $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$. Звідси $G = \langle a\rangle M$, $[a,b] = x$, $[b, x] = c$, $[a,x] = \tau = c^{\varepsilon} b^p$, $\varepsilon = -\beta$, $a^p = c^{1+\varepsilon t} b^{tp}$, $t = \alpha$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $0 \leqslant t < p$. Відомо (див., наприклад, [77, теорема 2.2.2]), що всяка неабелева підгрупа з G містить G'. Оскільки G' — неметациклічна підгрупа, то G' не може бути підгрупою метациклічної групи. Звідси в G не існує неабелевих метациклічних підгруп. Зрозуміло, що $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = \langle\pi\rangle \times \langle\tau\rangle \leqslant Z(G)$. Покажемо, що всі елементи порядку p з G належать G'. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G\backslash G'$ містить d, $/d/ = p$ і в G існує підгрупа $G' \lambda \langle d\rangle$ порядку p^4. Зрозуміло, що $[x,d] \in Z(G) = \langle c\rangle \times \langle b^p\rangle$. Припустимо, що $[x,d] \neq 1$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $(\langle [x,d]\rangle \times \langle x\rangle) \lambda \langle d\rangle$ порядку p^3, яка, очевидно, не містить G'. Суперечність з теоремою 2.2.2 з [77]. Отже, $[x, d] = 1$ і $N = G' \lambda \langle d\rangle$ — абелева максимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що $G = M \lambda \langle d\rangle$. За теоремою 1.2.2 $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$. Звідси $[\langle d\rangle, M] \leqslant Z(G) = \langle c\rangle \times \langle b^p\rangle$ і $G/Z(G)$ — абелева група, тому $Z(G) \geqslant G'$, що неможливо. Отже, всі елементи порядку p з G належать G'. Лема доведена.

Л е м а 2.1.6. *Не існують метагамільтонових УЩН[ ]-груп G порядку p^n з абелевим нецентральним комутантом типу (p^4,p), $\Delta > 1$.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Припустимо, що група G існує. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [77] $G = M \lambda \langle\pi\rangle$, $M = \langle a,b\rangle$ — метациклічна група, $/[a,b]/ > p$, $[a,\pi] = \sigma$, $[b,\sigma] = [b,\pi] = [\sigma,\pi] = 1$, $[a,\sigma] = \tau \in Z(G)$, $/\pi/ = /\tau/ = /\sigma/ = p > 2$, $\langle a\rangle \cap \langle\Sigma\rangle = 1 = \langle\tau\rangle \cap \langle\sigma\rangle$. Тоді $w(M) = N \lhd G$ і тому в G існує підгрупа $A = \langle a\rangle N$, $A' \neq 1$. Звідси $A > N$ і $/A/ > p^2$. Зрозуміло, що $[A:\langle a\rangle] = p$ і в силу

твердження 2.1.8 з [77] $A = \langle a \rangle \lambda \langle \sigma \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $[a,\sigma] = a^{p^{\alpha-1}} \in Z(G)$, A — підгрупа Міллера—Морено. В силу теореми 2.2.2 з [77] $A > G'$. Звідси $A \lhd G$, $\Phi(A) = \langle a^p \rangle \lhd G$. В G існує підгрупа $V = \langle a^p \rangle \times \langle \pi \rangle$. Ясно, що $[a,\pi] \notin \langle \tau \rangle \times \langle \pi \rangle$ і, значить, $\langle \tau \rangle \times \langle \pi \rangle \not\lhd G$. Тоді $V \not\lhd G$ і за теоремою 1.2.2 V — група типу 2 чи 5 цієї теореми. В підгрупі V типу 5 теореми 1.2.2 $w(V) = \langle \pi \rangle \times \langle \tau \rangle \lhd G$. Суперечність. Отже, V — може бути лише підгрупою типу 2 теореми 1.2.2. Але тоді $/V/ = p^2$, $V = \langle a^p \rangle \times \langle \pi \rangle$ і тому $/A/ = p^3$, $A' \neq 1$, що не так. Всі випадки розглянуто. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.1.2. *Локально ступінчасті недедекіндові метагамільтонові УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:*

1) G — недедекіндова УЩН[ ]-група з комутантом порядку p, p — просте число (теорема 2.1.1);

2) G — недедекіндова метациклічна метагамільтонова УЩН[ ]-група з комутантом непростого порядку (наслідок 1.3.6);

3) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P — елементарна абелева група порядку p^2, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta \in \{1,2\}$, p і q — різні прості числа, $P \lambda \langle x \rangle$ — ненільпотентна група Міллера—Морено, $/z/ \in \{1,r\}$, r — просте число; при $/z/ = r$ $\beta = 1$;

4) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1,r\}$, $3 \neq r$ — просте число;

5) G — група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p), p — непарне просте число;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ — непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

7) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

8) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$ — непарне просте число, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = 1$;

9) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

10) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r — просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

11) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $/a/ = /x/ = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r — просте число;

12) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ — непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^{\varepsilon}b^p$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

13) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

14) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = p^2$, p — непарне просте число, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^p$, $[a,x] = b^{fp}x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

15) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — група Шмідта, P — група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3,9\}$;

16) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — група Шмідта, $/P/ = p^3$, $exp(P) = p$, $/x/ = q$;

17) $G = P \lambda \langle x \rangle$, $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{2,3\}$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, $\alpha + \beta < 6$, $P \lambda \langle x^q \rangle$ *— нільпотентна група Міллера—Морено,* α *— показник* p *за модулем* q*;*

18) $G = P \lambda \langle x \rangle$ *— група Фробеніуса,* P *— елементарна абелева група порядку* p^{α}, $\alpha \in \{2,3\}$, $|x| = qr$, p, q *і* r *— попарно різні прості числа,* α *— показник* p *за модулем* q *і дорівнює показнику* p *за модулем* r*.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. В силу наслідку 1.2.1 та теореми 6.4 з [73] G′ — група порядку p^m, $m > 0$. Якщо $m = 1$, то G задовольняє умову теореми 2.1.1 і тому G — група типу 1 теореми. Нехай $m > 1$. За теоремою 1.2.3 G — черніковська дисперсивна недедекіндова метагамільтонова група.

Нехай спочатку $G = X \times Z$, $X \neq 1$, $Z \neq 1$. Тоді $X' \neq 1$ або $Z' \neq 1$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' \neq 1$. В силу теореми 2.2.2 з [77] $Z' = 1$ і $G' = X'$, $|X'| > p$ і тому X — недедекіндова група. За лемою 2.1.1 $|Z| = r$ і X — група одного з типів 1—8 теореми 1.4.1 при умові $|X'| > p$. При цій умові X може бути лише групою одного з типів 2, 5—8 теореми 1.4.1.

Нехай $X = \langle a \rangle\langle b \rangle$ — група типу 2 теореми 1.4.1. Тоді $|a| = 8$, $|b| \in \{4,8\}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. Припустимо, що $r \neq 2$. Тоді G — метациклічна група і тому G — група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай $r = 2$. Тоді $Z = \langle z \rangle$, $|z| = 2$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle b \rangle\langle za^2 \rangle$, яка не містить $G' = \langle a^2 \rangle$, що суперечить теоремі 2.2.2 з [77]. Випадок, коли X — група типу 2 теореми 1.4.1 розглянуто.

Нехай X — група типу 8 теореми 1.4.1. Тоді $X = P \lambda \langle x \rangle$ — нільпотентна група Міллера—Морено, $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 1$, p і q — різні прості числа, $X' = P$. При $\alpha = 1$ G — група

типу 2. Тому в подальшому $\alpha = 2$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох неодиничних прямих множників. Звідси $/P \times \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle /$ ділиться на добуток не більше ніж трьох простих чисел і тому $\beta = 1$, тобто G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай X — група типу 5 теореми 1.4.1. При $r \neq 3$ G — група типу 5 теореми. Нехай $r = 3$. Тоді, очевидно, $G' = X' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle bz \rangle$, яка не містить G', що суперечить теоремі 2.2.2 з [77].

Якщо X — група типу 6 чи 7 теореми 1.4.1, то G відповідно група типу 10 чи 11 розглядуваної теореми.

Отже, в подальшому будемо вважати, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Розглянемо два можливі випадки: 1) G — нільпотентна група; 2) G — ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку за вибором G та теоремою 1.2.3 G — черніковська p-група. Звідси в силу леми 2.3.1 з [77] при $m > 1$ $/G/ < \infty$. Тому $/G/ = p^n$, $1 < m < n > 3$.

Нехай G' — циклічна група. При $G' \not\leq Z(G)$ в силу твердження 2.1.8 з [77] G — метациклічна група і тому G — група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай $G' \leqslant Z(G)$. За лемою 2.3.3 з [77] $G = A \lambda B$, $A = \langle a \rangle\langle b \rangle$ — метациклічна група, $G' = A' \leqslant \langle a \rangle$ і G містить підгрупу $X = w(G') \times \langle d \rangle \times B$, де d — породжуючий елемент з A. При $B \neq 1$ за теоремою 1.2.2 $X \lhd G$. Тому $[X,A] \leqslant G' \cap X \leqslant w(G')$. Зрозуміло, що $[A,\langle d \rangle] = A' = G' \leqslant w(G')$. Звідси $G' = w(G')$, $/G'/ = p$, що неможливо. Отже, $B = 1$ і тому G — метациклічна група, тобто G — група типу 2 розглядуваної теореми.

Нехай далі G' — нециклічна група. В силу твердження 2.1.7 з [77] G' — абелева група типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 0$ або група типу (p,p,p).

При $n = 4$ G' — група типу (p,p) і G породжується двома елементами. Звідси $G' \not\leq Z(G)$. В силу твердження 2.1.4 з [77] $p > 2$ і G — група типу 5 розглядуваної теореми. Тому в подальшому $n > 4$. Припустимо, що G' — група типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 1$. Тоді за лемою 2.1.6 $G' \leqslant Z(G)$. В силу теореми 2.4.1 з [77] G містить підгрупи $A \lambda \langle x \rangle$ і $X = w(A') \times \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, де $A = \langle a \rangle\langle b \rangle$ — метациклічна група, $A' \leqslant \langle a \rangle$, $/A'/ = p$, d — породжуючий елемент з A, $[A,\langle d \rangle] = w(A')$. Тому $/A'/ = p$, що суперечить умові $\Delta > 1$. Отже, G' не може бути групою типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 1$ і, значить, можливі два випадки: 1.1) G' — група типу (p,p); 1.2) G' — група типу (p,p,p).

Випадок 1.1. У цьому випадку при $G' \not\leq Z(G)$ G задовольняє умову леми 2.1.4 і тому G — група типу 2 згаданої леми. Звідси G — група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай $G' \leqslant Z(G)$. Якщо G не містить підгрупи типу (p,p,p), то в силу леми 2.5.2 з [77] G — група одного з типів 10 чи 11 розглядуваної теореми. Нехай далі G містить підгрупи типу (p,p,p). Тоді за теоремою 2.5.2 з [77] $G = F \times C$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $/x/ = p^{\gamma}$, $\alpha \geqslant \beta > 1$, $\gamma > 0$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $Z(F) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \leqslant Z(G)$, $\alpha \neq \beta$. Зрозуміло, що G містить підгрупи $X_1 = \langle b^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$ і $X_2 = \langle a^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$. Покажемо, що $X_2 \not\lhd G$. Нехай це не так. Тоді $[x,a] \in X_2 \cap \langle b \rangle = 1$, що неможливо. Отже, $X_2 \not\lhd G$. За теоремою 1.2.2 $C = 1$, $X_2 = \langle x \rangle \times \langle a^p \rangle$ і X_2 може бути лише групою типу 5 теореми 1.2.2.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі X_2 типу 5 теореми 1.2.2 $/x/ = p$, $w(X_2) = \langle x \rangle \times w(\langle a \rangle) \lhd G$. Але тоді $X_2 \lhd G$, що не так. Отже, $\alpha = \beta = 2$.

Припустимо тепер, що $\gamma > \alpha$. Тоді за теоремою 1.2.2 G містить нормальну підгрупу $\langle x^p \rangle \times \langle a \rangle$ і тому в G існує нормальна підгрупа $\langle x \rangle(\langle x^p \rangle \times \langle a \rangle) = \langle x \rangle\langle a \rangle$. Звідси $[a,x] \in w(\langle x \rangle\langle a \rangle) = w(\langle x \rangle) \times w(\langle a \rangle)$ не містить $w(\langle b \rangle)$, що суперечить умові $[\langle x \rangle,\langle a \rangle] = w(\langle b \rangle)$. Отже, $\gamma < \alpha$ і тому $/x/ = p$. За теоремою 2.5.2 з [77] G — група одного з типів 7 - 9 розглядуваної теореми. Випадок 1.1 розглянуто повністю.

Випадок 1.2. При нецентральності G′ в G група G задовольняє умову леми 2.1.5, за твердженням якої G — група типу 13 розглядуваної теореми.

Нехай $G' \leqslant Z(G)$. Тоді за теоремою 2.6.2 з [77] $G = F \times C$, де $F = \langle a \rangle M$, $/a/ = p^\alpha$, $\alpha > 1$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = p^\beta$, $/x/ = p^\gamma$, $[b,x] = c$, $/c/ = p$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma > 1$, $G' = \langle c \rangle \times w(\langle b \rangle) \times w(\langle x \rangle) = w(\langle a \rangle) \times w(\langle b \rangle) \times w(\langle x \rangle) \leqslant Z(G)$, $[\langle a \rangle,F] = [\langle b \rangle,F] = [\langle x \rangle,F] = G' = F'$, $\Phi(F) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle \leqslant Z(G)$. В групі G існує підгрупа $X_1 = \langle b^p \rangle \times \langle x \rangle \times C$, яка, очевидно, не містить G'. Якщо $X_1 \lhd G$, то X_1 містить $[\langle x \rangle,F] = G'$, що неможливо. Тому $X_1 \not\lhd G$ і за теоремою 1.2.2 $C = 1$.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі $G = F$ існує підгрупа $X_2 = \langle a^p \rangle \times \langle x \rangle$, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G і не містить G′. Але, очевидно, $[X_2,F]$ містить $[\langle x \rangle,F] = G'$. Суперечність. Значить, $\alpha = \beta = \gamma = 2$. За теоремою 2.6.2 з [77] G — група одного з типів 13, 14 розглядуваної теореми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку за теоремою 2.2.1 з [77] $G = P \lambda C$, де $G' = P$, $/P/ = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $C = Z\langle x \rangle \not\lhd G$, $C_C(P) = Z \leqslant Z(G)$, $Z \cap \langle x \rangle = \langle x^s \rangle$, $s > 1$, $\Phi(P) \leqslant Z(G)$, $/\Phi(P)/ \leqslant p$, при $0 < k < s$ $\Phi(P)\langle x^k \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм, при $/\Phi(P)/ = p$ P — си-

ловська p-підгрупа з G. Оскільки $G' = P$, то $\alpha = m > 1$. Покладемо $U = \Phi(P) \times C$. Зрозуміло, що $U \lhd G$, $U' = 1$ і U — група одного з типів 1, 2, 4, 5 теореми 1.2.2. Оскільки $G = PU$ — скінченна нільпотентна група, то U не може бути p-групою. Зрозуміло, що $\Phi(P) \times Z = M \leqslant Z(G)$, $[U:M] = s$ — добуток не більше ніж двох простих чисел.

Припустимо, що U — група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$ — q-група, $q \neq p$, $\Phi(P) = 1$, $M = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$ і x індукує на P незвідний автоморфізм, $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/z/ = q$, що суперечить вибору G (G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп). Отже, U не може бути групою типу 5 теореми 1.2.2.

Нехай U — група типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $[U:M] = q$. Без порушення загальності можна вважати, що $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \neq q$ — просте число, $U = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, $z \in Z(G)$, $\langle z \rangle$ — r-група, $r \neq q$. Оскільки за вибором G підгрупа $\langle z \rangle$ не може бути неодиничним прямим множником з G, то $\langle z \rangle \leqslant \Phi(P)$. Але тоді $C = \langle x \rangle$, $G = P \lambda \langle x \rangle$. В силу теореми 2.2.1 з [77] G — група Шмідта, яка, очевидно, задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1, 2 цієї теореми. Звідси G — група одного з типів 15, 16 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай U — група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/U/ = qr$, $q \neq p$, s ділиться на q, r — просте число. Припустимо, що $r = q$. Тоді U — група типу (q,q), $U = C = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, де $\langle z \rangle = Z$, $/z/ = /x/ = q$ і $\langle z \rangle$ виділяється в G прямим множником, що суперечить вибору G. Отже, $q \neq r$. При $r = p$ $U = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, $z \in Z(G)$, $/z/ = r$, $/x/ = q$. Оскільки підгрупа $\langle z \rangle$ не може бути неодиничним прямим множником групи G, то $\langle z \rangle = \Phi(P)$ і G — група Шмідта (див., теорему 2.2.1 з [77]), яка, як і раніше, може бути групою одного з типів 15,

16 розглядуваної теореми. Нехай тепер $r \neq p$. Тоді $\Phi(P) = 1$, $U = C$, C — циклічна група порядку qr. За припущенням G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп і тому $Z = 1$, $C = \langle x \rangle$, $/x/ = qr$. Звідси G — група типу 18 розглядуваної теореми.

Нехай, нарешті, U — група типу 1 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, p і q — різні прості числа. Звідси $C = \langle x \rangle$, Z містить x^{q^2}, $\Phi(P) = 1$. Якщо $Z = \langle x^q \rangle$, то G — група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, яка при $\alpha = 3$ буде групою типу 16 розглядуваної теореми, а при $\alpha = 2$ $\beta < 3$ і G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай $x^q \notin Z$. Тоді $Z = \langle x^{q^2} \rangle$ і $P \lambda \langle x^q \rangle$ — група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, у якої при $\alpha = 3$ $\beta = 2$ і G — група типу 17 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—18 теореми. Зрозуміло, що G скінченна, а тому локально ступінчаста недедекіндова група. Залишається показати, що G — метагамільтонова УЩН[ ]-група. Для груп G типу 1 це доведено в теоремі 2.1.1, а для груп G типу 2 це доведено в наслідку 1.3.6.

Нехай G — група одного з типів 3—18 теореми і $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B]$ э $N \lhd G$ і G — метагамільтонова група. Зрозуміло, що при $A \lhd G$ чи $B \lhd G$ покладемо $N = A$ чи $N = B$ і G — УЩН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$ і, значить, $A \neq 1$, $B \not> G'$. Звідси /B/ ділиться на добуток трьох простих чисел. Очевидно, що група G типу 5 є метагамільтоновою і вона не має ненормальних підгруп, порядок яких ділиться на добуток трьох простих чисел. Звідси достатність для груп G типу 5 доведена. За теоремою 2.2.1 з [77] ненільпотентні групи кожного з

розглядуваних типів груп є метагамільтоновими. Тому залишається показати, що ненільпотентні групи теореми є УЩН[ ]-групами.

Очевидно, що G' — p-група. Покладемо $P_1 = G \cap B$. Тоді $P_1 \lhd B$ і $P_1 < G'$.

Нехай G — група типу 4 теореми. Тоді $G = P \times \langle z \rangle$, $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$ — силовська 3-підгрупа з G, $/G/ = /P//z/ = 3^4/z/$, G — нільпотентна група, $G' = P' = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle$, P — мінімальна неметациклічна група типу 2 теореми 1.3.3. Покажемо, що G — метагамільтонова група. Дійсно, будь-яка неабелева підгрупа X з G містить неабелеву підгрупу P^* з P. Але тоді $/P^*/ \geqslant 3^3$. Звідси $G' = P' \leqslant P^* \leqslant X$, тому $X \lhd G$ і G — метагамільтонова група. З вибору B маємо, що $B' = 1$. Ясно, що $B = P_2 \times \langle y \rangle$, де $P_2 = B \cap P$ — силовська 3-підгрупа з B, $\langle y \rangle$ — силовська r-підгрупа з B. Зрозуміло, що $/P_2/ < 3^3$, $/y/ \leqslant r$. За вибором B $/B/ = 3^2r$ і $/A/$ — просте число. Легко бачити, що $/y/ = /z/ = r$, $y \in Z(G)$. Звідси $/A/ = 3$ і тому $A \leqslant P_2$. Ясно, що $/P_1/ \leqslant 3$ і $P_1 \leqslant P_2$. За твердженням 1.3.1 всі елементи порядку 3 з P_2 належать $P' \cap P_2 = P_1$. Звідси P_2 має єдину циклічну підгрупу $w(P_2) = P_1$. За теоремою 12.5.1 з [64] P — циклічна група порядку 9. Знову за твердженням 1.3.1 $A \leqslant w(P_2) \leqslant Z(P) \cap Z(G)$ і, значить, $A \lhd G$, що неможливо. Отже, група G типу 4 є метагамільтоновою УЩН[ ]-групою.

Нехай G — група типу 3 теореми. Тоді G — ненільпотентна і за попереднім метагамільтонова група. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Оскільки /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, то /G/ — добуток чотирьох простих чисел, а /B/ — добуток трьох простих чисел. Оскільки $P_1 < P$, $P \lhd G$, P — силовська p-підгрупа з G, то P_1 — нормальна силовська p-підгрупа з B. За відомим результатом [64] $B = P_1 \lambda B_1$, де B_1 — холлівське

доповнення P_1 в B. Покладемо U = PB. Ясно, що [G:P] — добуток двох простих чисел. Звідси $[B:P_1] = [G:P]$, а тому $/P_1/ = p$ і /U/ — ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Отже, U = G. Але тоді $P_1 \lhd G$, що суперечить мінімальності P в підгрупі Міллера—Морено $P \lambda \langle x \rangle$. Таким чином, група G типу 3 теореми є метагамільтоновою УЩН[ ]-групою.

Нехай G — група одного з типів 15, 16 теореми. Тоді G — група Шмідта одного з типів 1, 2 теореми 1.3.1 відповідно. За попереднім і за твердженням указаної теореми достатність для груп G цих типів доведена.

Нехай G — група одного з типів 17, 18 теореми. За попереднім $G = P \lambda \langle x \rangle$ — нільпотентна, а тому метагамільтонова група, $/P/ = p^{\alpha}$, $\pi(\langle x \rangle) \in \{q,r\}$, $\alpha \in \{2,3\}$, α — показник p за модулем q, α — показник p за модулем r. Звідси в силу відомих результатів (див., наприклад, [210]) $P \lambda \langle x^q \rangle$ та $P \lambda \langle x^q \rangle$ — нільпотентні групи Міллера—Морено. Ясно, що [G:P] ділиться на добуток не більше ніж трьох простих чисел.

Нехай $P_1 = 1$. Тоді G — група типу 17, $/B/ = q^{\beta}$, $\beta = 3$, $/A/ = q$. Зрозуміло, що B — силовська q-підгрупа з G і $A = w(B)$. Оскільки $w(\langle x \rangle) \leqslant Z(G)$, то $A = w(B) = w(\langle x \rangle) \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A.

Нехай далі $P_1 \neq 1$. Тоді $B = P_1 \lambda X_1$, де P_1 — нормальна силовська p-підгрупа з B, X_1 — її холлівське доповнення, $1 < P_1 < P$. В нільпотентній групі Міллера—Морено з нормальною підгрупою P будь-який її елемент індукує на P тотожний або незвідний автоморфізм. Оскільки X_1 індукує на P звідний автоморфізм, то $X_1 \leqslant C_G(P)$. В розглядуваних типах груп $/X_1/ \in \{1,q\}$ і тому $/P/ = p^2$, $/X_1/ = q$ і G — група типу 17. Очевидно, що $\alpha = 3$. Але в групах G

типу 17 при $\alpha = 3$ $\beta = 2$ і тому $X_1 = 1$. Суперечність. Отже, достатність для груп G кожного з типів 17, 18 доведена.

Для завершення доведення достатності потрібно розглянути випадок, коли G — група одного з типів 6—14 теореми. Група G кожного із згаданих типів нільпотентна і w(G) — абелева підгрупа, порядок якої є добуток двох чи трьох простих чисел.

Нехай G — група одного з типів 10, 11 теореми. Позначимо через X довільну неабелеву підгрупу з G. Покажемо, що X містить G′. Зрозуміло, що $G = F \times \langle z \rangle$, $/z/ \in \{1,r\}$, F — група типу 6, 7 теореми 1.4.1 відповідно, у якої за лемою 1.4.1 всі нециклічні підгрупи нормальні. Звідси F — метагамільтонова група і за теоремою 2.2.2 з [77] будь-яка неабелева підгрупа з F містить $F' = G'$. Отже, $F \cap X$ містить G′ і тому G — метагамільтонова група. За вибором $B' = 1$.

Нехай B — циклічна група. Тоді $A \leqslant B^p \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, B — нециклічна група. Нехай $F \cap B = F_1$. Якщо F_1 — нециклічна підгрупа, то за теоремою 1.4.1 $G' = F' = w(F) = Z(F) \leqslant F_1$, що суперечить вибору B. Таким чином, F_1 — циклічна група. Очевидно, що exp(F) = 4 і $[B:F_1] \in \{1,r\}$. За вибором B маємо, що $/B/ = 4r$. Звідси $/F_1/ = 4$ і $[B:F_1] = r$. Оскільки B — нециклічна група, то без порушення загальності можна вважати, що $B = F_1 \times \langle z \rangle$ і $/z/ = 2$. Зрозуміло, що $w(B) = w(F_1) \times \langle z \rangle \leqslant w(G) \leqslant Z(G)$ і B — група типу 5 теореми 1.1.1, за твердженням якої $A \leqslant w(B) \leqslant Z(G)$, що неможливо. Таким чином, група G кожного з типів 10, 11 є УЩН[ ]-групою.

Отже, G — група одного з типів 6—9, 12—14 теореми. Ясно, що в цьому випадку $G = \langle a,b,x \rangle$ — p-група і w(G) — елементарна абелева група порядку p^3.

В групах G кожного з типів 6—9 маємо $/G/ = p^5$ і G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Звідси всяка неабелева підгрупа X з G має порядок більше ніж p^3. Але тоді $X \lhd G$ і G — метагамільтонова група. За вибором $/B/ = p^3$, $B' = 1$. Ясно, що $\exp(G) = p^2$. Оскільки $B \not\lhd G$, то $B \neq w(G)$. Припустимо, що $B \leqslant U = \langle a,b \rangle$. Тоді $B < U$ і B — група типу 5 теореми 1.1.1 і тому $A \leqslant w(B) = G$, що суперечить вибору B. Отже, $B \not< U$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $x \in B$, і тому $G = UB$. Нехай $F_1 = U \cap B$. Тоді $/F_1/ = p^2$. Всі підгрупи порядку p^2 з U, відмінні від G', є циклічними групами. Звідси та з умови $B' = 1$ маємо, що $F_1 = \langle u \rangle$, $B = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$. Але в групах G кожного з розглядуваних типів $C_U(x) = G'$ — елементарна абелева група порядку p^2. З іншого боку, $C_U(x)$ містить u, $/u/ = p^2$. Суперечність. Достатність для груп G кожного з типів 6—9 теореми доведена.

Нехай G — група типу 12. Тоді $/G/ = p^5$, $G' = w(G)$ — елементарна абелева підгрупа порядку p^3 і G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Звідси G — метагамільтонова група. За вибором $B' = 1$. Як і раніше, можна вважати, що $B = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, $/u/ = p^2$, $/x/ = p$ — непарне просте число, що неможливо, оскільки $C_G(x) = G'$ і $C_G(x)$ містить $\langle u \rangle$. Отже, достатність для груп G типу 12 доведена.

Нехай G — група одного з типів 13, 14 теореми. Тоді $/G/ = p^6$, $G' = Z(G) = w(G)$ — елементарна абелева група порядку p^3, G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Зрозуміло, що $/A/ > p$, $\exp(G) = p^2$. Нехай X — будь-яка неабелева підгрупа з G. Тоді $X = \langle u,v \rangle$, $/u/ = /v/ = p^2$ і за умовою, X — неметациклічна група. Тому $/X/ = p^5$ і, значить, $X \lhd G$ і G — метагамільтонова група. Отже, $B' = 1$. Оскільки $B \not\lhd G$, то $/B/ = p^4$, $B \not> G'$, і тому B містить u, $/u/$

$= p^2$, $u \in \Phi(G) = G'$, $B = \langle u \rangle \times \langle v \rangle$, $/v/ = p^2$. Ясно, що $A \not\leq G'$. Тоді, без порушення загальності можна вважати, що A містить елемент непростого порядку z, тобто $/z/ = p^2$. Очевидно, що $z \notin \Phi(G)$. В групах G розглядуваних типів маємо $C_G(z) = G'\langle z \rangle$ і $/C_G(z)/ = p^4$. З іншого боку, $C_G(z)$ містить B і $C_G(z) = B \times \langle c \rangle$, де $/c/ = p$, $/C_G(z)/ = p^5$, що не так. Отже, достатність для розглядуваних типів груп доведена. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2.1.1. *Метагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку 2^n з трьома інволюціями є групами одного з типів:*

1) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 2^\alpha$, $/b/ = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\langle a \rangle \lhd G$, G — метациклічна група одного з типів 1—7 теореми 1.1.4, G не містить підгруп кватерніонів та діедра порядку 8, $\Phi(G') \leqslant Z(G)$;

2) $G = Q \times \langle x \rangle$, $Q = \langle a,b \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $/x/ = 2^\gamma$, $\gamma > 0$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Якщо $G' = 1$, то G — метациклічна 2-група типу 1 наслідку. Нехай $/G'/ = 2^m$, $m > 0$. Якщо G — метациклічна група, то G задовольняє умову теореми 1.1.4. За твердженням 2.1.4 з [77] метациклічна група G тоді і тільки тоді метагамільтонова, коли $\Phi(G') \leqslant Z(G)$. Звідси G — група типу 1 розглядуваного наслідку.

Нехай далі G — неметациклічна група. При $m = 1$ G — метагамільтонова група, що задовольняє умову теореми 2.1.1, і може бути лише неметациклічною 2-групою одного з типів 3—7 згаданої теореми.

В неметациклічній групі G типу 3 теореми 2.1.1 більше ніж три інволюції і тому G не є групою типу 3. В групі G типу 4 теореми 2.1.1 $/C/ < \infty$, $/a/ = 1$. Покладемо $C = \langle x \rangle$ і G — група типу 2

розглядуваного наслідку. В групі G кожного з типів 5—7 теореми 2.1.1 більше ніж три інволюції і тому G не може бути групою цих типів.

Нехай m > 1. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.2 і G може бути групою одного з типів розглядуваної теореми. Легко бачити, що G може бути лише групою типу 2 теореми 2.1.2, що не так в силу вибору G. Наслідок доведений.

Наслідок 2.1.2. *Недедекіндова метагамільтонова УЩН[ ]-група G порядку 2^n, що містить елементарну абелеву підгрупу порядку 8 і не містить підгруп кватерніонів порядку 8, є групою одного з типів:*

1) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \times \langle x\rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $|x| = 2$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{2^{\alpha-1}}$;

2) $G = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $|c| = 2^\gamma$, $\gamma > 0$, $|a| = 4$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1,2\}$, $[c,b] = 1$, $[a,b] = c^{2^{\gamma-1}}$;

3) $G = (U \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $U = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $|u| = 2^\Delta$, $\Delta > 2$, $|v| = |a| = |b| = 2$, $[u,v] = [a,b] = u^{2^{\Delta-1}}$, $[U,\langle b\rangle] = 1$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = 2$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$;

5) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = 2$, $[a,b] = a^2$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^{2t}$, $0 \leqslant t < 2$;

6) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| = 2$, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

7) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|z| = 2$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$;

8) $G = \langle a\rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,b] = x^2$, $[a,x] = b^2x^2$;

9) $G = ((\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle) \times \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = /c/ = /x/ = 2$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути, очевидно, лише групою одного з типів 1, 7, 9—11, 13 згаданої теореми.

Нехай G — група типу 1 теореми 2.1.2. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.1 і може бути лише групою одного з типів 3—7 згаданої теореми, $/G/ < \infty$, $r = 2$.

Нехай G — група типу 3 теореми 2.1.1. Тоді $/a/ = 2$. Покладемо $a = z$, $b = v$, $a = u$ і одержимо, що G — група типу 1 наслідку.

Ясно, що G не може бути групою типу 4 теореми 2.1.1. Нехай G — група типу 5 теореми 2.1.1. Зрозуміло, що C не може бути групою кватерніонів. Тоді $C = \langle c\rangle$, $/c/ = 2^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $/u/ \in \{2,4\}$, $/v/ \in \{2,4\}$. Нехай $/a/ \neq 1$. Тоді $/u/ = /v/ = 2$. Покладемо $uv = d$. Тоді $/d/ = 4$, $\langle d^2\rangle = G'$. Якщо $\gamma > 1$, то покладемо $f = zu$, $z \in C$, $/z/ = 4$. Тоді $/f/ = 4$, $[f,d] = f^2 = d^2$ і $\langle f,d\rangle$ — група кватерніонів порядку 8, що неможливо. Отже, $\gamma = 1$. Покладемо $x = a$, $b = v$, $a = u$ і одержимо, що G — група типу 9 розглядуваного наслідку. Нехай тепер $a = 1$. Тоді з умови наслідку та леми 1.4.1 випливає, що $/u/ > 2$ чи $/v/ > 2$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $/u/ > 2$. Тоді $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2,4\}$. Покладемо $a = u$, $b = v$ і G — група типу 2 наслідку.

Нехай G — група типу 6 теореми 2.1.1. Покажемо, що $\Delta > 2$. Нехай це не так. Тоді $/u/ = 4$. Покладемо $d = ab$, $z = vd$. Звідси $d^2 = u^2 = z^2$, $[u,z] = u^2$ і $\langle u,z\rangle$ — група кватерніонів порядку 8, що неможливо. Отже, $\Delta > 2$. Покладемо $U = Q$ і одержимо, що G — група типу 3 розглядуваного наслідку.

Нехай G — група типу 7 теореми 2.1.1. Покладемо z = uv, f = vab. Тоді /z/ = /f/ = 4, $\langle z^2\rangle = \langle f^2\rangle = G' = \langle [z,f]\rangle$ і G містить підгрупу кватерніонів $\langle z,f\rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, G не може бути групою типу 7 теореми 2.1.1.

Нехай G — група одного з типів 7, 9—11, 13 теореми 2.1.2. Тоді G група одного з типів 4—8 розглядуваного наслідку. Наслідок доведений.

Наслідок 2.1.3. *Локально ступінчасті неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G, що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп, є групою одного з типів:*

1) $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 *і* Q_2 *— групи кватерніонів порядку 8;*

2) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ \in \{4,8\}$, $/z/ = 2$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = /z/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G = A × B, де A ≠ 1, B ≠ 1. Нехай A′ ≠ 1 і B′ ≠ 1. За лемою 1.2.5 A і B — гамільтонові групи. Тоді в силу твердження 1.1.1 $G = Q_1 \times Q_2 \times D$, де Q_1 і Q_2 — групи кватерніонів порядку 8, D — періодична абелева група. Покладемо $U = Q_1 \times Q_2$. Тоді G = U × D, де U — недедекіндова група. За лемою 1.2.5 /D/ ∈ {1,r} і U — ЩН[ ]-група одного з типів 1—8 теореми 1.4.1, що неможливо. Отже, D = 1 і G — група типу 1 наслідку.

Нехай далі A′ ≠ 1, B′ = 1. За теоремою 1.2.3 G — періодична група і тому A і B — періодичні групи. Якщо B має власні немаксимальні підгрупи, то за лемою 1.2.5 A — дедекіндова група і /G′/ ∈ {1,r}. Звідси випливає метагамільтоновість групи G, що неможливо. Отже, B не має власних немаксимальних підгруп і тому за

лемою 1.1.1 /B/ = r — просте число, B = <z>. Ясно, що /A′/ ділиться на добуток двох простих чисел. За лемою 2.1.1 A — група одного з типів 1—8 теореми 1.4.1. Якщо A — група одного з типів 1, 3, 4, 6—8 згаданої теореми, то за теоремами 2.3.2 та 2.5.2 з [77] G — метагамільтонова група, що не так. Отже, A — група одного з типів 2, 5 теореми 1.4.1. Знову в силу теорем 2.3.2 та 2.5.2 з [77] при $r \notin \pi(A)$ G — метагамільтонова група, що знову не так. Таким чином, $r \in \pi(A)$ і G — група одного з типів 2, 3 розглядуваного наслідку. Наслідок доведений.

Наслідок 2.1.4. *Комутант локально ступінчастої метагамільтонової УЩН[ ]-групи G має порядок p^m, p — просте число, $m < 4$.*

Наслідок випливає з теореми 2.1.2.

Наслідок 2.1.5. *Нехай $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^l$. Тоді справедливі твердження:*

1) G має тільки три різні циклічні підгрупи порядку 8: $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle ab\rangle$; $(ab)^2 = b^2$, $Z(G) = \langle b^2\rangle$;

2) G має тільки три різні циклічні підгрупи порядку 4: $\langle a^2\rangle$, $\langle b^2\rangle$, $\langle a^4\rangle \times \langle a^2b^2\rangle$; $/a^2b^2/ = 2$, $a^4 \in Z(G)$, $w(G) = \langle a^4\rangle \times \langle a^2b^2\rangle \not\leq Z(G)$;

3) G має тільки одну нециклічну підгрупу порядку 8: $\Phi(G) = \langle a^2\rangle \times \langle a^2b^2\rangle$, $\langle a^2\rangle = G'$;

4) G має тільки три різні максимальні підгрупи: абелеву підгрупу $\langle a\rangle \times \langle a^2b^2\rangle$, та підгрупи Міллера—Морено $\langle b\rangle \lambda \langle a^2b^2\rangle$ і $\langle ab\rangle \lambda \langle a^2b^2\rangle$.

Наслідок безпосередньо випливає із співвідношень для групи G.

2.2. Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп

Л е м а 2.2.1. *Всі УЩН[ ]-групи G, що містять підгрупу діедра порядку 8, є метагамільтоновими групами.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група і M — підгрупа діедра порядку 8. За лемою 1.1.2 $M \lhd G$ і всяка підгрупа X із G, що містить M, нормальна в G. Звідси G/M — дедекіндова група і G — розв'язна група з комутантом порядку 2^m, $m > 0$. Якщо $m = 1$, то G — метагамільтонова група, що й треба було довести. Нехай $m > 1$. Тоді G — недедекіндова група. За теоремою 1.2.3 G — черніковська група. Із наслідку 1.3.10 випливає, що метациклічна неметагамільтонова група G не містить підгруп діедра порядку 8. Тому можна вважати, що G — неметациклічна група. Ясно, що M містить єдину максимальну циклічну підгрупу $\langle u \rangle$ порядку 4. Звідси $\langle u \rangle \lhd G$. Нехай $U = C_G(\langle u \rangle)$. Тоді $U \lhd G$, G/U — підгрупа із $\mathrm{Aut}\langle u \rangle$, $C_M(\langle u \rangle) \neq M$, $[M:\langle u \rangle] = 2$. Оскільки $/\mathrm{Aut}\langle u \rangle/ = 2$ і $u \notin Z(G)$, то $[G:U] = 2$, $G = UM$ і $U \cap M = \langle u \rangle$. Завдяки наслідку 2.1.3 G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Легко бачити, що $U/\langle u \rangle \cong G/M$ — дедекіндова група і $\langle u \rangle \leqslant Z(U)$. Звідси підгрупа U є розширенням центральної підгрупи $\langle u \rangle$ за допомогою дедекіндової групи. Ясно, що $U = U_1 \times U_2$ — нільпотентна група, де U_2 — силовська 2-підгрупа з U, U_1 — її холлівське доповнення. Зрозуміло, що $U_1 \lhd G$, $U_2 \lhd G$, U_2M — нормальна силовська 2-підгрупа з G і $G = U_1 \times (U_2M)$. За попереднім, $U_1 = 1$ і тому G — 2-група. Зрозуміло також, що $M = \langle u \rangle \lambda \langle x \rangle$, $/x/ = 2$, $M' = \langle c \rangle = \langle u^2 \rangle$. Припустимо, що U має єдину підгрупу $\langle c \rangle$ порядку 2. Тоді в

силу [23, 64] U — локально циклічна чи група кватерніонів. Завдяки теоремі 1.2.3 $/G'/ < \infty$. Припустимо, що $/U/ = \infty$. Тоді U містить квазіциклічну 2-підгрупу R і $R \leqslant Z(G)$. Якщо $U = R$, то $/G'/ = /M'/ = 2$, що не так. Легко бачити, що U не може бути нескінченною групою кватерніонів. Тому $/U/ < \infty$. Оскільки $/Z(U)/ > 2$, то $U = \langle z \rangle$, і оскільки $G = UM$, $M = \langle u \rangle \lambda \langle x \rangle$, то $G = \langle z \rangle \lambda \langle x \rangle$, що суперечить вибору G.

Припустимо тепер, що U містить d, $/d/ = 2$ і $\langle d \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Оскільки $\langle u \rangle \lhd G$, $U/\langle u \rangle$ — дедекіндова група і $G/\langle u \rangle = U/\langle u \rangle \times M/\langle u \rangle$, то $G/\langle u \rangle$ — дедекіндова група. Звідси $\langle d \rangle \times \langle c \rangle \lhd G$ і тому в G існує підгрупа $(\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle$, яка може бути лише групою діедра порядку 8 чи елементарною абелевою групою порядку 8. Якщо $(\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle$ — група діедра, то вона нормальна в G за попереднім. Якщо $(\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle$ — елементарна абелева група порядку 8, то вона нормальна в G в силу теореми 1.3.4. Звідси $M \cap ((\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle) = \langle c \rangle \times \langle x \rangle \lhd G$. Нехай $D = C_G(M)$. Тоді $D = C_G(\langle u \rangle) \cap C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$, $D \cap M = \langle c \rangle = Z(M)$, $[M:\langle c \rangle] = 4$ і тому $[G:D] \geqslant 4$. За попереднім, $[G:C_G(\langle u \rangle)] \leqslant 2$, $C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle) \lhd G$ і $G/C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$ — підгрупа із $Aut(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$. Відомо [65], що силовська 2-підгрупа із $Aut(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$ має порядок 2. Звідси $[G:D] = 4$, $G = DM$, $D/\langle c \rangle \cong G/M$ — дедекіндова група, $G' = D' M' [D,M] = D' M'$. Оскільки $m > 1$ і $G/\langle c \rangle = D/\langle c \rangle \times M/\langle c \rangle$, то $D/\langle c \rangle$ — неабелева група. Звідси $D/\langle c \rangle$ містить підгрупу кватерніонів $H/\langle c \rangle$. В силу твердження 1.1.11 з [77] H містить $\langle a \rangle$, $/a/ = 4$, $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = 1$ і G містить підгрупу $M \times \langle a \rangle$, у якої в силу леми 2.1.1 M — дедекіндова група, що не так. Одержана суперечність і завершує доведення леми. Лема доведена.

Л е м а 2.2.2. *Нільпотентна неметагамільтонова УЩН[ ]-група G, що містить ненормальну підгрупу кватерніонів Q = <x,y> порядку 8, є або групою кватерніонів порядку 2^5 або скінченною неметациклічною 2-групою з комутантом G′ порядку 2^m, m > 1, яка має нормальну підгрупу C = Q × <d>, /d/ = 2, Φ(Q) × <d> ◁ G, Φ(Q) × <d> містить всі інволюції з G і G/C — дедекіндова група.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G задовольняє умову наслідку 2.1.3 і може бути лише групою типу 1 чи 2 цього наслідку.

Нехай G — група типу 1 наслідку 2.1.3. Тоді $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 і Q_2 — групи кватерніонів порядку 8, $w(G) = w(Q_1) \times w(Q_2) = G' = w(Q) \times \langle d \rangle = C$. Звідси $C \lhd G$, G/C — абелева група і лема доведена.

Нехай G — група типу 2 наслідку 2.1.3. Тоді $G = (\langle a \rangle\langle b \rangle) \times \langle z \rangle$. Покажемо, що при /b/ > 4 G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8. Дійсно, нехай це не так. Тоді $x = a_1^i b_1^j z_1^k$, $y = a_2^i b_2^j z_2^k$. Звідси $/a_1^i b_1^j/ = /a_2^i b_2^j/ = 4$ і тому $Q \leqslant \Phi(\langle a \rangle\langle b \rangle) = \langle a^2 \rangle\langle b^2 \rangle$. Але $b^2 \in Z(G)$ і, значить, $(\langle a^2 \rangle\langle b^2 \rangle)' = 1$, що неможливо. Отже, при /b/ > 4 G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8. Тоді /b/ = 4 і $\langle a \rangle\langle b \rangle$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16. Покладемо z = d і одержимо доведення леми у цьому випадку.

Припустимо тепер, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G — 2-група, у якої за теоремою 1.2.3 $/G'/ = 2^m$, $m > 1$. Нехай G — метациклічна група. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.10 і може бути лише групою одного з типів 7—9 теореми 1.3.2. Група G кожного з згаданих типів може містити ненормальну групу кватерніонів порядку 8

лише тоді, коли G — група кватерніонів порядку 2^5. Отже, і у цьому випадку лема доведена.

Припустимо тепер, що G — неметациклічна група. Тоді G містить елементарну абелеву підгрупу порядку 4 [23, 64]. Позначимо через M — мінімальну неметациклічну підгрупу з G. Тоді за наслідком 1.3.12 $M \lhd G$ і G/M — дедекіндова група. В силу леми 2.2.1 G не містить підгруп діедра порядку 8.

Нехай M — елементарна абелева група порядку 8. Ясно, що G містить підгрупу D = QM. Завдяки теоремі 1.2.3 G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 16 і за теоремою 1.2.2 $\Phi(Q) \leqslant Z(G)$. Звідси $Q \cap M = \Phi(Q) = \langle c \rangle$, $/c/ = 2$, $[D:Q] = 4$. Зрозуміло, що $Q < U < D$ і $[U:Q] = [D:U] = 2$. Оскільки M — елементарна абелева група, то $U = QD_1$, де $D_1 = U \cap M$. Але тоді існує $d \in D_1$, $/d/ = 2$ і $Q \cap \langle d \rangle = 1$. Звідси $U = Q \lambda \langle d \rangle$.

Нехай N — максимальна підгрупа з U, що містить елемент d. Тоді $[U:N] = 2$, $/Q \cap N/ = 4$. Звідси $N = \langle u \rangle \lambda \langle d \rangle$, $/u/ = 4$, $\langle u \rangle = Q \cap N$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8 (лема 2.2.1), то $[u,d] = 1$. Зрозуміло, що $w(N) = \langle u^2 \rangle \times \langle d \rangle$, при $N \lhd G$ $w(N) \lhd G$, при $N \not\lhd G$ N — група типу 5 теореми 1.2.2, для якої $w(N) \lhd G$. Отже, завжди $w(N) \lhd G$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle u \rangle\langle y \rangle$. Звідси G містить підгрупу $\langle y \rangle w(N)$, $\langle y \rangle \cap w(N) = \langle y^2 \rangle = \langle c \rangle$, $\langle y \rangle w(N) = \langle y \rangle \lambda \langle d \rangle$. Як і раніше, $[y,d] = 1$. З цього випливає, що $[Q,\langle d \rangle] = 1$ і U — мінімальна неметациклічна група типу 3 теореми 1.3.3. Зрозуміло, що $M = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \times \langle f \rangle$. Припустимо, що $[Q,\langle f \rangle] \leqslant Q$. Тоді, як і для d, одержимо, що $Q \times \langle f \rangle \lhd G$. Але $(Q \times \langle d \rangle) \cap (Q \times \langle f \rangle) = Q \lhd G$, що суперечить вибору Q. Отже, $[Q, \langle f \rangle] \not\leqslant Q$. Звідси Q і Q^f різні підгрупи з U, що складають повний клас спряжених з D підгруп.

Зрозуміло, що $U = QQ^f$, $[U:Q] = 2$ і тому $/Q \cap Q^f/ = 4$. Звідси $Q \cap Q^f = \langle x \rangle$, $/x/ = 4$, $\langle x \rangle \lhd D$ і G містить підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle f \rangle$. Як і раніше, $[x,f] = 1$ і $w(\langle x \rangle \times \langle f \rangle) = \langle x^2 \rangle \times \langle f \rangle = \langle c \rangle \times \langle f \rangle \lhd G$, $\langle y \rangle(\langle c \rangle \times \langle f \rangle) = \langle y \rangle \lambda \langle f \rangle$. Звідси знову $[y,f] = 1$ і тому $[Q,\langle f \rangle] = 1$, $[Q,\langle f \rangle] \leqslant Q$, що неможливо. Отже, M — не може бути елементарною абелевою групою порядку 8 і тому G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 8. Оскільки мінімальна неметациклічна група типу 4 теореми 1.3.3 містить підгрупу діедра порядку 8, то M може бути лише групою типу 3 чи 5 згаданої теореми. Для груп M кожного із згаданих типів $w(M)$ — елементарна абелева група порядку 4 і $w(M) \lhd G$. Припустимо, що $G \backslash w(G)$ містить f і $/f/ = 2$. Тоді G містить підгрупу $w(M) \lambda \langle f \rangle$, яка за попереднім не може бути ні елементарною абелевою групою порядку 8, ні групою діедра порядку 8. Але тоді всі інволюції з G належать $w(M)$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $C = Qw(M)$, $Q \cap w(M) = \langle c \rangle \leqslant Z(G)$, $[C:Q] = 2$ і, як раніше, $C = Q \times \langle d \rangle$ — група типу 3 теореми 1.3.3. За наслідком 1.3.12 $C \lhd G$ і G/C — дедекіндова група. Зрозуміло тепер, що для завершення доведення леми необхідно показати, що $/G/ < \infty$. Припустимо, що $/G/ = \infty$. Тоді за теоремою 1.2.3 G містить центральну квазіциклічну 2-підгрупу R і G/R — дедекіндова група.

Припустимо, що $Q \cap R \neq 1$. Тоді $RQ = R\langle x \rangle\langle y \rangle = R\langle x \rangle R\langle y \rangle = (R \times \langle a \rangle)(R \times \langle b \rangle) = (R \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 2$, $[a,b] = c \in R$, $\langle c \rangle = (RQ)'$. Але тоді G містить підгрупу діедра $(\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, $R \cap Q = 1$ і $G/R = B/R \times (R \times Q)/R$ — гамільтонова група, B/R — елементарна абелева 2-група. Якщо $B = R$, то $G = R \times Q$ і $/G'/ = 2$, що неможливо. Отже, $B > R$ і B містить елемент b такий, що $b \notin R$, $b^2 \in R$ і $R < R\langle b \rangle \leqslant B$. Не

порушуючи загальності можна вважати, що $R\langle b\rangle = R \times \langle b\rangle$, $/b/ = 2$. Ясно, що $G = B \lambda Q$. За попереднім $\Phi(Q) = \langle c\rangle \leqslant Z(G)$. Але тоді $w(G)$ містить $w(R) \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle$ — елементарну абелеву групу порядку 8, що неможливо. Отже, $/G/ < \infty$. Лема доведена.

Наслідок 2.2.1. *Нільпотентна неметагамільтонова УЩН[ ]-група G є або групою кватерніонів порядку 32 або скінченною неметациклічною p-групою з комутантом порядку p^m, $m > 1$, що не містить підгруп діедра 8.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за теоремою 1.2.3 $/G'/ < \infty$ і $/G'/$ ділиться на добуток двох простих чисел.

Припустимо, що G — метациклічна група. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.10 і може бути лише групою кватерніонів порядку 32. Отже, у цьому випадку наслідок доведений.

Припустимо тепер, що G — неметациклічна група. За лемою 2.2.1 G не містить підгруп діедра порядку 8. Залишається показати, що G — скінченна група. Якщо G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп, то доводжуване твердження випливає з наслідку 2.1.3. Тому в подальшому будемо вважати, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Якщо G містить ненормальну підгрупу кватерніонів порядку 8, то шукане твердження справедливе завдяки лемі 2.2.2. За вибором G — p-група. Припустимо, що $/G/ = \infty$. Тоді за теоремою 1.2.3 G містить центральну квазіциклічну підгрупу R і G/R — дедекіндова група. Нехай G/R — неабелева група. Тоді $G/R = B/R \times U/R$ — гамільтонова група, де B/R — елементарна абелева 2-група, U/R — група кватерніонів (див. твердження 1.1.1.). Зрозуміло, що $G = BR$, $B \cap U = R$. В силу наслідку 1.1.4 з [77] $U = R \times Q$, де Q — група кватерніонів порядку 8 і тому $G = B \lambda Q$. Якщо $Q \lhd G$, то

наслідок справедливий в силу леми 2.2.2. Отже, $Q \lhd G$ і тому $G = B \times Q$, що суперечить вибору G. Таким чином, G/R — абелева група, $G' \leqslant R$, $G' \leqslant Z(G)$. Тоді $G' = \langle c \rangle < R$, $/c/ = p^m$, $m > 1$. Зрозуміло, що існують такі a та b з G, що $[a,b] = c$ і G містить підгрупу $D = (R\langle a \rangle)(R\langle b \rangle) = (R \times \langle x \rangle)(R \times \langle y \rangle) = (R \times \langle x \rangle) \lambda \langle y \rangle$, $D' = \langle c \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[x,y] = c$, $/x/ = p^\alpha$, $/y/ = p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В силу відомих комутаторних співвідношень [74, §3] $[x^{p^{m-1}},y] = [x,y^{p^{m-1}}] = c^{p^{m-1}} \neq 1$. Звідси $\alpha \geqslant m > 1$, $\beta \geqslant m > 1$. Ясно, що $[x^{p^{m-1}}, y^{p^{m-1}}] = c^{p^{2m-2}} = 1$ і тому в G існує підгрупа $V = \langle c \rangle \times \langle x^{p^{m-1}} \rangle \times \langle y^{p^{m-1}} \rangle$ і $w(V)$ — елементарна абелева група порядку p^3. Завдяки наслідку 1.3.12 $w(V) \lhd G$ і $G/w(V)$ — дедекіндова група. Оскільки $G/w(V)$ містить квазіциклічну підгрупу, то в силу твердження 1.1.1 $G/w(V)$ — абелева група. Звідси $G' \leqslant w(V) \cap \langle c \rangle$ і тому $/G'/ = p$, що не так. Отже, $/G/ < \infty$, що й завершує доведення наслідку. Наслідок доведений.

Наслідок 2.2.2. *Скінченна УЩН[ ]-група G порядку p^n, p — непарне просте число, яка не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3, є метагамільтоновою групою.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді $/G'/ = p^m$, $m > 0$. При $m < 2$ G — метагамільтонова група. Нехай $m > 1$. Якщо G — метациклічна група, то за наслідком 1.3.10 G — метагамільтонова група. Нехай далі G — неметациклічна група. Ясно, що $n > m + 1 > 2$. При $n = 4$ G — метагамільтонова група, що й треба було довести. Нехай $n > 4$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) G — мінімальна неметациклічна група; 2) G має власні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою типу 1 чи 2 згаданої теореми. Звідси $n < 5$, що суперечить вибору G. Отже, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. У цьому випадку в силу [211] $G = (\langle z\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $/z/ = p^{\gamma}$, $\gamma > 1$, $/a/ = /b/ = p$, $[z,b] \in \langle a\rangle$, $[a,b] = z^{sp^{\gamma-1}}$, $0 < s < p$. При $[\langle z\rangle,\langle b\rangle] = 1$ $G' = \langle z^{p^{\gamma-1}}\rangle$, $/G'/ = p$ і G — метагамільтонова група. Тому в подальшому $[\langle z\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$. При $\gamma = 2$ $/G/ = p^4$ і G — метагамільтонова група. Нехай $\gamma > 2$. Легко бачити, що $z^p \in Z(G)$ і G містить підгрупу $X = \langle z^p a\rangle \lambda \langle b\rangle$, у якої $w(X) = \langle z^{p^{\gamma-1}}\rangle \times \langle b\rangle$. Якщо $X \lhd G$, то $w(X) \lhd G$. Якщо $X \not\lhd G$, то X — група типу 5 теореми 1.2.2, за твердженням якої $w(X) \lhd G$. Отже, завжди $w(X) \lhd G$ і тому в G існує підгрупа $\langle z\rangle w(X) = \langle z\rangle \lambda \langle b\rangle$, що є максимальною в G і не містить $\langle a\rangle$, що неможливо. Таким чином, G — метагамільтонова група. Наслідок доведений.

Л е м а 2.2.3. *Нехай G — неметагамільтонова УЩН[ ]-група G порядку p^n, що містить елементарну абелеву підгрупу M порядку p^3. Тоді $/G'/ = p^m$, $m > 1$, $n > 4$, всі елементи порядку p з G належать $M \lhd G$, G/M — дедекіндова група і справедливі наступні твердження:*

1) G містить ненормальну підгрупу $X = \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$, $/x/ = p^{\Delta}$, $/y/ = p$, $\Delta > 1$, $[x,y] = c = x^{p^{\Delta-1}} \in Z(G)$, $[X:\langle c\rangle] > 4$, $\langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$, $\langle c\rangle \times \langle y\rangle = w(X) \lhd G$, G не містить неабелевих підгруп порядку p^3, що є 2-групами, чи мають експоненту p;

2) для будь-яких елементів u і v з G, $/u/ > p$, $/v/ = p$, $\langle u,v\rangle = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$ маємо, що $w(\langle u,v\rangle) = w(\langle u\rangle) \times \langle v\rangle \lhd G$, в G нормальні підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп і комутанти всіх неабелевих підгруп;

3) в 2-групі G $G' \leqslant Z(\Phi(G))$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умову леми. Тоді G — неметациклічна група, $n > 4$, $/G'/ = p^m$, $m > 1$. Завдяки лемам 2.2.1 та 2.2.2 G не має підгруп діедра порядку 8 і всі підгрупи кватерніонів порядку 8 нормальні в G. За наслідком 1.3.12 $M \lhd G$ і G/M — дедекіндова група. В неметагамільтоновій групі G в силу теореми 1.2.2 існує ненормальна підгрупа $X = \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$ типу 5 згаданої теореми, а тому $/x/ = p^{\Delta}$, $/y/ = p$, $\Delta > 1$, $[x,y] = c = x^{p^{\Delta-1}} \in Z(G)$, $[X:\langle c\rangle] > 4$, $\langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$, $\langle c\rangle \times \langle y\rangle = w(X) \lhd G$.

Нехай $C = C_G(w(X))$. Тоді $C \lhd G$ і $C < G$. Відомо [65], що G/C — підгрупа з $Autw(X) \cong GL(2,p)$ і силовська p-підгрупа з GL(2,p) має порядок p. Звідси $[G:C] = p$. Зрозуміло, що $x \notin C$ і тому $G = C\langle x\rangle = CX$, $C \cap X = \langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$. Покладемо $U = MX$. Зрозуміло, що $U \lhd G$ і існує ряд $X < U_1 \leqslant U$, де $[U_1:X] = p$, $[U:U_1] \leqslant p$. Оскільки X — метациклічна підгрупа, M — неметациклічна підгрупа, то $M\backslash X$ містить z, $/z/ = p$ і без порушення загальності можна вважати, що $U_1 = X \lambda \langle z\rangle$. Завдяки теоремі 1.2.2 $U_1 \lhd G$. Покажемо, що будь-який елемент d з G порядку p належить M. Нехай це не так. Припустимо спочатку, що всі елементи порядку p з G належать C. Тоді C містить M, C містить w(X)M, $w(X) \leqslant Z(G)$. За теоремою 1.2.3 G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^4 і тому $w(X) \leqslant M$. За вибором C містить підгрупу $w(X) \times \langle d\rangle$, $/d/ = p$, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G. В G існує підгрупа $X \lambda \langle d\rangle = \langle x\rangle(w(X) \times \langle d\rangle) = U_2$ і за теоремою 1.2.2 $U_2 \lhd G$. Ясно, що $U_1 \cap U_2 = X \lhd G$, що неможливо. Отже, існує d, $/d/ = p$ і $d \in G\backslash C$. Як і раніше, $w(X) \lambda \langle d\rangle$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8, то за теоремою 1.2.2 $w(X) \lambda \langle d\rangle \lhd G$. Як і раніше, G містить нормальну підгрупу $U_2 = X \lambda \langle d\rangle = \langle x\rangle(w(X) \lambda \langle d\rangle)$. Оскільки $z \in C$, а $d \notin C$, то $U_1 \cap U_2 = X \lhd G$, що неможливо. Отже, всі елементи

порядку p з G належать M. Звідси G не містить неабелевих підгруп порядку p^3 і експоненти p, $M = w(X) \times \langle z \rangle$, $U_1 = U$. Зрозуміло, що $X \lhd U$, $\Phi(X) = \langle x^p \rangle$ і тому $\langle x^p \rangle \lhd U$. При $\Delta = 2$ $\langle x^p \rangle = \langle c \rangle \lhd G$. Нехай $\Delta > 2$. Покладемо $U_3 = \langle x^p \rangle \lambda \langle z \rangle$. Оскільки G, а тому і U_3, не містить підгруп діедра порядку 8, то в силу [64] $w(U_3) = \langle z \rangle \times \langle c \rangle$. При $U_3 \lhd G$ $w(U_3) \lhd G$. При $U_3 \not\lhd G$ за теоремою 1.2.2 $w(U_3) \lhd G$. В G існує підгрупа $\langle x \rangle w(U_3) = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, яка максимальна і тому нормальна в $U = (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle) \lambda \langle y \rangle$. Звідси $\Phi(U) = \langle x^p \rangle$ і, значить, $\langle x^p \rangle \lhd G$. Якщо g елемент з G і $\langle g \rangle \lhd G$, то $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$. Нехай $\langle g \rangle \not\lhd G$. Покладемо $U_4 = \langle g \rangle M$. Якщо $/g/ = p$, то $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$. Нехай $/g/ > p$. Тоді U_4 містить $Y = \langle g \rangle \lambda \langle f \rangle$, де $f \in M$, $/f/ = p$, $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle$. При $Y \lhd G$ $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle \lhd G$. При $Y \not\lhd G$ можна вважати, що $Y = X$ і, за попереднім, $\langle g^p \rangle \lhd G$. Отже, завжди $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$.

Нехай H — неабелева підгрупа з G. Якщо $H \lhd G$, то $H' \lhd G$. Якщо $H \not\lhd G$, то можна вважати, що $H = X$ і тоді $H' \lhd G$.

Нехай $H = \langle u,v \rangle = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $/u/ > p$, $/v/ = p$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8, то в силу [64] $w(H) = w(\langle u \rangle) \times \langle v \rangle$. При $H \lhd G$ $w(H) \lhd G$, при $H \not\lhd G$ w(H) нормальна в G завдяки теоремі 1.2.2. Отже, твердження 2 розглядуваної леми доведене повністю.

Відомо [66], що в скінченній 2-групі G $\Phi(G) = \langle g^2 \rangle$ для всіх g з G і $G' \leqslant \Phi(G)$. За попереднім, $\langle g^2 \rangle \lhd G$. Ясно, що $C_G(\langle g^2 \rangle) \lhd G$ і $G/C_G(\langle g^2 \rangle)$ — підгрупа з абелевої групи $\mathrm{Aut}\langle g^2 \rangle$. Звідси $C_G(\langle g^2 \rangle)$ містить G', а тому $G' \leqslant Z(\Phi(G))$. Твердження 3 леми доведене повністю.

Для завершення доведення леми залишається показати, що має місце твердження 1. Для цього з урахуванням попереднього

потрібно показати, що G не містить підгруп кватерніонів порядку 8.

Нехай G містить підгрупу кватерніонів $Q = \langle x,y \rangle$ порядку 8. Тоді за попереднім $Q \lhd G$. Покладемо $U = QM = Q \lambda D$, де $M = \langle c \rangle \times D$, $\langle c \rangle = M \cap Q = \Phi(Q) \leqslant Z(G)$, D — елементарна абелева група порядку 4. Позначимо через U_1 — максимальну підгрупу з U, що містить D. Тоді $U_1 = \langle x \rangle \lambda D$ і за теоремою 1.2.2 $U_1 \lhd G$. Звідси $U_1 \cap Q = \langle x \rangle \lhd G$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8, то $U'_1 = 1$. Зрозуміло, що $D = \langle d_1 \rangle \times \langle d_2 \rangle$, $/d_i/ = 2$, $i \in \{1,2\}$. В G існують підгрупи $X_i = \langle x \rangle \times \langle d_i \rangle$, $w(X_i) = \langle x^2 \rangle \times \langle d_i \rangle$. За твердженням 2 розглядуваної леми $w(X_i) \lhd G$ і тому в G існують підгрупи $Y_i = \langle y \rangle w(X_i) = \langle y \rangle \lambda \langle d_i \rangle$. В силу того, що G не містить підгруп діедра порядку 8 $Y'_i = 1$. Отже, $U = Q \times D$. Завдяки теоремі 1.2.2 $\langle y \rangle \lambda D \lhd G$. Ясно, що $Q \cap (\langle y \rangle \lambda D) = \langle y \rangle \lhd G$. Покладемо $A = C_G(Q)$. Легко бачити, що $A = C_G(\langle x \rangle) \cap C_G(\langle y \rangle)$ і оскільки $\langle x \rangle \lhd G$, $\langle y \rangle \lhd G$, то $C_G(\langle x \rangle) \lhd G$, $C_G(\langle y \rangle) \lhd G$. Відомо [65], що $G/C_G(\langle x \rangle)$ — підгрупа з $Aut\langle x \rangle$, $G/C_G(\langle y \rangle)$ — підгрупа з $Aut\langle y \rangle$ і $/Aut\langle x \rangle/ = /Aut\langle y \rangle/ = 2$. Оскільки $x, y \notin Z(G)$, то $[G:C_G(\langle x \rangle)] = [G:C_G(\langle y \rangle)] = 2$. Звідси $[G:A] \leqslant 4$. Зрозуміло, що $Q \cap A = \Phi(Q) = Z(Q)$, $[Q:Z(Q)] = 4$ і G містить підгрупу $V = QA$. Очевидно, що $[V:A] = [Q:\Phi(Q)] = 4$ і тому $V = G$. Ясно, що $G' = Q' A' [Q,A] = Q' A' > Q'$ і тому $/A'/ > 2$. Зрозуміло, що $G/\langle c \rangle = Q/\langle c \rangle \times A/\langle c \rangle$ і $Q/\langle c \rangle$ містить власні немаксимальні підгрупи. За лемою 1.2.5 $A/\langle c \rangle = H/\langle c \rangle \times B/\langle c \rangle$ — гамільтонова група, у якої $H/\langle c \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $B/\langle c \rangle$ — елементарна абелева 2-група. Ясно, що $A = HB$, $H \cap B = \langle c \rangle$, $H \lhd G$, $B \lhd G$ і A містить підгрупу $M = \langle c \rangle \times D$.

Покажемо, що G містить $Q_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ — групу кватерніонів порядку 8 і $Q_1 \cap Q = 1$. Якщо $H = \langle c \rangle \times Q_1$, то це очевидно. Нехай підгрупа $\langle c \rangle$ недоповнюється в H. Тоді в силу твердження 1.1.11 з [77] $H = \langle x_1 \rangle \lambda \langle y_1 \rangle$, $/x_1/ = /y_1/ = 4$, $[x_1, y_1] = x_1^2$, $c = x_1^2 y_1^2$. Покладемо $z_1 = xy_1$ і $Q_1 = \langle x_1, z_1 \rangle$. Зрозуміло, що $/x_1/ = /z_1/ = 4$, $x_1^2 = z_1^2 = [x_1, z_1]$, Q_1 — група кватерніонів порядку 8, $Q \cap Q_1 = 1$. Отже, G містить підгрупу $Q_1 \times Q$, яка містить ненормальну підгрупу кватерніонів $Q_2 = \langle xx_1, yz_1 \rangle$ порядку 8, що неможливо. Таким чином, G не містить підгруп кватерніонів порядку 8, що і завершує доведення леми. Лема доведена.

Наслідок 2.2.3. *Нехай G — неметагамільтонова УЩН[ ]-група, що містить нормальну елементарну абелеву підгрупу M порядку 8 і G/M — група кватерніонів порядку 8. Тоді* $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = /x/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,x] = 1$, $[a,x] \in \langle a^4 \rangle$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умову наслідку. Тоді G — скінченна 2-група з комутантом G′ порядку 2^m, $m > 1$.

Нехай G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G задовольняє умову наслідку 2.1.3 і може бути лише групою типу 2 згаданого наслідку і, значить, у цьому випадку наслідок доведений.

Нехай тепер G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. За лемою 2.2.3 всі інволюції з G належать M. За умовою $G/M = \langle Mx_1, Mx_2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Звідси $/x_i/ = 8$, $(i \in \{1,2\})$, $M \cap \langle x_i \rangle = \langle x_i^4 \rangle$, $(Mx_1)^2 = (Mx_2)^2 = Md$, де $d = [x_1, x_2]$, $/d/ = 4$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle x_i^2 \rangle \lhd G$, $x_i^4 \in Z(G)$. Нехай $y \in M_i$ і $/y/ = 2$. Покажемо, що $\langle y, x_i^4 \rangle \lhd G$. Дісно, при $y \in \langle x_i \rangle$ маємо

$\langle y\rangle = \langle x_i^4\rangle = \langle y, x_i^4\rangle \lhd G$. Нехай $y \notin \langle x_i\rangle$. Тоді $N_i = \langle y, x_i^4\rangle = \langle y\rangle \times \langle x_i^4\rangle$. За лемою 2.2.3 в G існує підгрупа $X_i = N_i \langle x_i^2\rangle$ і G не містить підгруп діедра порядку 8. Звідси $X_i = \langle x_i^2\rangle \lambda \langle y\rangle$ і $X'_i = 1$, $w(X_i) = N_i$. Якщо $X_i \lhd G$, то $N_i \lhd G$. Якщо $X_i \not\lhd G$, то X_i — група типу 5 теореми 1.2.2 і знову за цією теоремою $N_i \lhd G$. В силу [64] $\langle x_i\rangle N_i$ — абелева група чи група Міллера—Морено, тобто $[x_i, y] \in \langle x_i^4\rangle$. Покладемо $D = M\langle d\rangle$. За попереднім, $[M, \langle x_i^2\rangle] = 1$. Звідси $D' = 1$. Припустимо, що $\langle x_1\rangle \cap \langle x_2\rangle = 1$. Тоді $M = \langle y\rangle \times \langle x_1^4\rangle \times \langle x_2^4\rangle$. Але тоді група кватерніонів G/M порядку 8 містить дві різні інволюції Mx_1^2 і Mx_2^2, що неможливо. Звідси $\langle x_1\rangle \cap \langle x_2\rangle = \langle x_1^4\rangle = \langle x_2^4\rangle$ і тому $D = \langle y\rangle \times \langle z\rangle \times \langle d\rangle$, $/y/ = /z/ = 2$, $w(\langle d\rangle) = \langle x_i^4\rangle$. Покладемо $Z_i = M\langle x_i\rangle$. Тоді $Z_i = D\langle x_i\rangle = \langle x_i\rangle \lambda Y$, де $Y = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, $[\langle x_i^2\rangle, Y] = 1$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle x_i^2\rangle \lhd G$, а за попереднім, для будь-якого елемента u з Y $\langle x_i^4\rangle \times \langle u\rangle \lhd G$. Звідси $\langle x_i^2\rangle \times \langle u\rangle \lhd G$. Зрозуміло, що Y містить елемент y такий, що $d \in \langle x_i^2\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$, $/y/ = 2$. Оскільки за попереднім $\langle x_i^2\rangle \lhd G$, в нормальній абелевій підгрупі $\langle x_i\rangle \times \langle y\rangle$ тільки дві циклічні підгрупи порядку 4 (це підгрупи $\langle x_i^2\rangle$ та $\langle d\rangle$), то $\langle d\rangle \lhd G$. Ясно, що $\langle d\rangle = \langle [x_1, x_2]\rangle = G'$. Без порушення загальності можна вважати, що $d \in \langle y\rangle \times \langle x_1^2\rangle \leqslant \langle x_1\rangle \lambda \langle y\rangle$. Зрозуміло, що $\langle d\rangle\langle x_1^2\rangle = \langle x_1^2\rangle \times \langle y\rangle \leqslant \Phi(G)$. В скінченній 2-групі $\Phi(G)$ породжується квадратами елементів з G [66] і тому можливі випадки: 1) $\langle x_1^2\rangle \times \langle y\rangle = \langle x_1^2, u^2\rangle$, де $u \in G$, $/u^2/ = 4$; 2) $\langle x_1^2\rangle \times \langle y\rangle = \langle x_1^2, u^2\rangle$, де $u \in G$, $/u^2/ = 2$.

Випадок 1. У цьому випадку $\langle u^2\rangle = \langle d\rangle$. Замінюючи x_1 на u, без порушення загальності можна вважати, що $G' = \langle d\rangle = \langle x_1^2\rangle$. В

G існує підгрупа $A = \langle x_1\rangle\langle x_2\rangle$. Покладемо $x_1 = a$, $x_2 = b$. Тоді $A = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^r$, $r \in \{3,-1\}$. Зрозуміло, що $/A/ = 2^5$, $/G/ = 2^6$. Ясно, що A — метациклічна група. Оскільки M — неметациклічна група, то $M\backslash A$ містить x, $/x/ = 2$ і $G = A \lambda \langle x\rangle$. При $r = 3$ $A = \langle f\rangle\langle b\rangle$, де $f = ab^2$ і $b^{-1}fb = f^{-1}$. Тому завжди можна вважати, що $b^{-1}ab = a^{-1}$. За попереднім, $[b,x] \in \langle b^4\rangle$. Покладемо $z = a^2b^2$. Тоді $/z/ = 2$, $[b,z] = b^4$. Якщо $[x,b] \neq 1$, то покладемо $x_1 = zx$ і одержимо, що $[b,x_1] = 1$ і $G = A \lambda \langle x_1\rangle$. Отже, завжди $[b,x] = 1$. Знову за попереднім, $[a,x] \in \langle a^4\rangle$ і G — група з наслідку. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку $\langle x_1\rangle \cap \langle u\rangle = 1$ і G містить підгрупу $B = \langle x_1^2\rangle \times \langle u\rangle$, $u \in \Phi(G)$. Ясно, що $B \cap M = \langle x_1^4\rangle \times \langle y\rangle$, де $\langle y\rangle = \langle u^2\rangle$. Тому G/M містить дві різні інволюції Mx_1^2 і Mu, що неможливо. Випадок 2 неможливий. Наслідок доведений.

Наслідок 2.2.4. *Неметациклічна неметагамільтонова УЩН[ ]-група G порядку p^n має нормальну елементарну абелеву підгрупу N порядку p^2, p — просте число.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Якщо G містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3, то твердження наслідку випливає з твердження 1 леми 2.2.3. Нехай G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3. Оскільки G — неметагамільтонова група, то вона містить ненормальну неабелеву підгрупу X, яка може бути лише групою типу 3 чи 5 теореми 1.2.2. Якщо X — група типу 5 згаданої теореми, то шуканою нормальною підгрупою буде w(X). Нехай X — група типу 3 теореми 1.2.2. Тоді X — ненормальна в G підгрупа кватерніонів порядку 8 і G — неметациклічна група, що задовольняє умову леми 2.2.2, за

твердженням якої G містить нормальну елементарну абелеву підгрупу порядку 4. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 2.2.1. *Всі УЩН[ ]-групи G порядку p^n з комутантом G′ типу (p,p), який містить всі елементи порядку p з G, p — довільне просте число, мають вигляд G = UX, U = <a,b> ◁ G, /a/ = p^α, /b/ = p^β, $\alpha \in \{2,3\}$, $\beta \in \{1,2\}$, /X/ > p та вичерпуються групами типів:*

1) G = U ⋋ X, X — група кватерніонів порядку 8, U — циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, [U,X] ⩽ w(U); при U′ = 1 [U,X] = w(U);

2) U = <a> × <b>, X = <x>, /a/ = /b/ = /x/ = 4, [a,x] = a^2, [b,x] = $x^2 = a^2b^2$;

3) G = (<a> × <b>)(<x> × <y>), U = <a> × <b>, X = <x> × <y>, /a/ = /b/ = 4, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$;

4) U = <a> × <b>, X = <x>, /a/ = /x/ = 9, /b/ = 3, [a,x] = b, [b,x] = $a^3 = x^6$;

5) U = <a> ⋋ <b>, X = <x>, /a/ = 8, /x/ = 4, /b/ = 2, [a,b] = $x^2 = a^4$, [a,x] = b, [b,x] = 1.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Зрозуміло, що G — скінченна p-група, у якої всі абелеві підгрупи метациклічні. Звідси при p > 2 в силу [211] та умови G′ містить всі елементи порядку p з G випливає, що G = UX має загальний вигляд групи з теореми і є групою типу 4 цієї теореми. Отже, в подальшому будемо вважати, що p = 2.

Припустимо спочатку, що G′ ⩽ Z(G). Тоді за наслідком 1.1.7 G — група одного з типів 1—3 розглядуваної теореми.

Нехай тепер G′ ⩽̸ Z(G). Тоді G′ = <c> × <d>, де /c/ = /d/ = 2, c ∈ Z(G), d ∉ Z(G) і G′ = w(G). Нехай C = $C_G(G')$. Тоді [G:C] = 2, G′ ⩽

$Z(C) \leqslant C \lhd G$. Звідси $G = C\langle u\rangle$, $C \cap \langle u\rangle = \langle u^2\rangle$, $/u/ = 2^{\Delta}$, $\Delta > 1$. Зрозуміло, що G не містить підгрупи діедра порядку 8. Нехай $v \in G\backslash w(G)$. Тоді $/v/ > 2$, $w(\langle v\rangle) \leqslant w(G)$. Ясно, що $w(G)\langle v\rangle = V \lhd G$, $\Phi(V) \lhd G$.

Припустимо, що $\langle c\rangle \cap \langle v\rangle = 1$. Тоді $w(V) = w(G) = \langle c\rangle \times w(V)$ і $V = \langle c\rangle \times \langle v\rangle$. Але тоді $\Phi(V) = \langle v^2\rangle$ і $w(\langle v\rangle) \leqslant Z(G)$. Звідси $w(G) = G' \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, $w(\langle v\rangle) = \langle c\rangle$, $V = \langle v\rangle \lambda \langle d\rangle$, $w(\langle u\rangle) = w(\langle v\rangle) = \langle c\rangle$ і будь-яка циклічна підгрупа з G порядку 4 містить c. Нехай $D = w(G)\langle u\rangle$. Тоді $D = \langle u\rangle \lambda \langle d\rangle$. Оскільки $d \notin Z(G)$, то $[u,d] = c$. За попереднім, $\Delta > 2$. Зрозуміло, що G — неметациклічна група і тому $D < G$. Ясно, що $/G/ > 2^{\Delta+1}$, $\Delta + 1 > 3$, $\exp(G) \geqslant 2^{\Delta}$, $\exp(C) \geqslant 2^{\Delta-1} \geqslant 4$. Можливі випадки: 1) $C/\langle d\rangle$ — циклічна група; 2) $C/\langle d\rangle$ — нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $C/\langle d\rangle = \langle v\langle d\rangle\rangle$ і тому, за попереднім, $C = \langle d\rangle\langle v\rangle = \langle d\rangle \times \langle v\rangle$. Ясно, що $/v/ = 2^{\gamma}$, $\gamma > 1$. При $\gamma = 2$ $C = \langle u^2\rangle \times \langle d\rangle$ і G — метациклічна група, що не так. Звідси $\gamma > 2$. Зрозуміло, що $u^2 \in Z(G)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[u,v] = d$. Оскільки $[v,d] = 1$, то за відомим результатом [74] $[v^2,u] = [u,v]^2 = d^{-2} = 1$. Звідси $v^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $G = D\langle v\rangle$, $D' = \langle c\rangle$, $Z(D) = \langle u^2\rangle \leqslant Z(G)$, $D \cap \langle v\rangle = \langle f\rangle = \langle v\rangle \cap \langle u\rangle \leqslant Z(D) \cap \langle v^2\rangle$. З співвідношення $f \in Z(G)$ випливає, що $\langle f\rangle = \langle v^2\rangle \cap \langle u^2\rangle$. Ясно, що $X'_i = 1$, де $X_1 = \langle v^2\rangle\langle u\rangle$, $X_2 = \langle v\rangle\langle u^2\rangle$, $i \in \{1,2\}$. Якщо X_i — нециклічна група, то вона містить x_i, $/x_i/ = 2$, $\langle x_i\rangle \cap w(G) = 1$, що неможливо. Отже, X_i — циклічна група. Тоді $\langle u^2\rangle = \langle v^2\rangle$. Ясно, що існує непарне i, для якого $u^{2i}v^2 = 1$. Покладемо $z = u^iv$. Тоді $z^2 = (u^iv)(u^iv) = u^iv^2 (v^{-1}uv)^i = v^2u^i (ud)^i = v^2u^iu^id^ic^{-\frac{1}{2}(i-1)} = v^2u^{2i}h$, де $h = d^ic^{-\frac{1}{2}(i-1)} \neq 1$.

Ясно, що $h \in G'$ і $\langle h \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Звідси $/z/ = 4$, що суперечить попередньому. Випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Припустимо, що $C/\langle d \rangle$ — містить елементарну абелеву підгрупу $H/\langle d \rangle$ порядку 4. Тоді $H/\langle d \rangle = \langle\langle d \rangle x_1 \rangle \times \langle\langle d \rangle x_2 \rangle$. При $/x_i/ = 2$ одержимо, що в G є інволюції, що не належать w(G) ($i \in \{1,2\}$). Суперечність. Нехай, наприклад, $/x_1/ = 4$. Тоді $\langle x_1^2 \rangle = \langle d \rangle$, що суперечить попередньому. Отже, в $C/\langle d \rangle$ тільки одна інволюція. В силу теореми 12.5.1 з [64] $C/\langle d \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Нехай $\langle d \rangle$ недоповнюється в C. Тоді в силу твердження 1.1.11 з [77] $C = \langle x_1 \rangle \lambda \langle x_2 \rangle$, $/x_1/ = /x_2/ = 4$, $[x_1,x_2] = x_1^2$. За попереднім, $x_1^2 = c = x_2^2$, що неможливо. Отже, $C = \langle d \rangle \times Q$, де Q — група кватерніонів порядку 8. Ясно, що $\exp(C) = 4$, $\Delta = 3$ і $/u^2/ = 4$. Покладемо $u = a$, $d = b$, $D = U$. Тоді $/a/ = 8$, $/b/ = 2$, $[a,b] = c = a^4$. Нехай $v = x$. Тоді $[x,b] = 1$. Зрозуміло, що $/U/ = 16$, $x^2 = c$ і $x \notin U$. Звідси $G = U\langle x \rangle$. Оскільки $G' \not< \langle c \rangle$, то $[a,x] \not< \langle c \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a,x] = b$. Покладемо $X = \langle x \rangle$ і одержимо, що G — група типу 5 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—5 теореми. Тоді $/G/ = p^n$, $n > 3$, p — просте число, G' — група типу (p,p). Залишається показати, що G — УЩН[ ]-група і всі елементи порядку p з G належать G'. За наслідком 1.1.7 в групі G кожного з типів 1—3 теореми G' містить всі інволюції і $G' \leqslant Z(G)$. В силу [211] всі елементи порядку 3 групи G типу 4 належать G'.

Покажемо, що і в групі G типу 5 теореми всі інволюції належать G'. Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить d, $/d/ = 2$ і $\langle d \rangle \cap G' = 1$. Легко бачити, що $G' = w(U) = \langle a^4 \rangle \times \langle b \rangle$, $a^4 = x^2 \in$

$Z(G)$. Зрозуміло, що $d = a^i b^j x^k$. Оскільки $d \notin G'$, то $d \notin w(U)$. Звідси k — непарне число. Припустимо, що i — парне число. Тоді $d \in Q \times \langle b \rangle$, де $Q = \langle x, a^2 \rangle$ — група кватерніонів порядку 8 і $w(U) = w(Q) \times \langle b \rangle$, що неможливо. Отже, i — непарне число. Звідси $d^2 = (a^i b^j x^k)(a^i b^j x^k) = a^i b^j a^i x^k\, [x^k, a^i] b^j x^k = a^i b^j a^i\, [x^k, a^i] b^j x^{2k} = a^i b^j a^i d b^j x^{2k} = a^i b^j a^i b^j x^{2k} d_1$, де $d_1 = [x^k, a^i]$ і d_1 не належить циклічній підгрупі $\langle a \rangle$. Покладемо $x^{2k} d_1 = d_2$. Зрозуміло, що $\langle d_2 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$ і $d^2 = (a^i b^j)^2 d_2 = a^{2i} b^{2j}\, [a,b]^{-ji} d_2 = a^{2i} d_3$, де $d_3 = [a,b]^{-ji} d_2 = a^{-4ij} d_2$ і $\langle d_3 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Звідси $/d_3/ \leqslant 2$. Але тоді при непарному i $/a^{2i}/ = 4$. Таким чином, $a^{2i}\, d_3 \neq 1$ і тому $d^2 \neq 1$, що неможливо. Отже, і в групі G типу 5 всі інволюції належать G'.

Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. В теоремі 1.4.1 встановлено, що група G кожного з типів 2—4 є навіть ЩН[ ]-групою і тому УЩН[ ]-групою. Отже, залишається показати, що група G типу 1 чи 5 є УЩН[ ]-групою.

Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B]$ э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і одержимо, що G — УЩН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \neq 1$, $B \not> G'$ і B — власна немаксимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle f \rangle$, $/f/ \in \{1,2\}$. Нехай $w(U) = \langle c \rangle$ в групі G типу 1, а групі G типу 5 $\langle c \rangle = \langle a^4 \rangle$. Тоді $/c/ = 2$ і $c \in Z(G)$. Припустимо, що $\langle c \rangle \cap B = 1$. В групі G типу 1 $[G:B] \geqslant /U/$ і для груп G розглядуваних типів $[G:U] \leqslant 8$. Звідси $/B/ = 8$, G — група типу 1 теореми і B — група кватерніонів порядку 8. Тоді $/A/ = 2$ і, значить, $A \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, $c \in B$. В групі G типу 5 $/G/ = 32$, $/B/ = 8$, $/A/ = 2$, $\langle c \rangle \cap A = 1$ і тому $\langle c \rangle \times A = G' \leqslant B$, що неможливо. Достатність для груп G типу 5 теореми доведена.

Нехай G — група типу 1 теореми. Зрозуміло, що $G' = w(G) = w(U) \times w(X) \leqslant Z(G)$. Звідси для будь-якого елемента g з G $g^2 \in Z(G)$ і, значить, B — нециклічна група. Оскільки $B \not> G'$, то в B тільки одна інволюція, і тому в силу теореми 12.5.1 з [64] B — група кватерніонів. Тоді $/A/ = 2$ і, значить, $A \leqslant Z(G)$, що неможливо. Достатність для груп G типу 1 доведена. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 2.2.4. *Неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку p^n, що мають підгрупу M типу (p,p,p), $G' \leqslant M$, p — довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle \lhd G$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 0$, $/X/ > 1$ та вичерпуються групами типів:*

1) $G = U \lambda X$, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = p$, $\beta > 2$, $[a,b] = a^p$, $[b,x] = 1$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$;

2) $X = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $/b/ = /z/ = 3$, $/a/ = /x/ = 9$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $[b,z] = [a,b] = 1$, $[a,z] \in \langle a^3 \rangle$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.2.3 G містить ненормальну неабелеву підгрупу $X = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, $/x/ = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $/y/ = p$, $[x,y] = x^{p^{\Delta-1}} = c \in Z(G)$, $[X:\langle c \rangle] > 4$, $w(X) = N \lhd G$, підгрупи Фраттіні всіх циклічних та неабелевих підгруп з G нормальні в G, всі елементи порядку p з G належать M і G не містить неабелевих підгруп порядку 8 та неабелевих підгруп порядку p^3 і експоненти p. Нехай $C = C_G(N)$. Тоді $C \lhd G = CX = C\langle x \rangle$, $C \cap X = \langle x^p \rangle \times \langle y \rangle$, $C \cap \langle x \rangle = \langle x^p \rangle$, $[G:C] = p$. Зрозуміло, що $N \leqslant Z(C)$, $w(C) = N \times \langle z \rangle = M$, $/z/ = p$. Оскільки $X \not\lhd G$, то $[G:X] > p$ і $M < C$. Нехай $u \in C \setminus M$. Тоді $/u/ = p^\gamma$ і за попереднім, $\gamma > 1$, $w(\langle u \rangle) \leqslant Z(G)$. Нехай $N \cap \langle u \rangle = 1$. Тоді за лемою 2.2.3 $w(\langle y \rangle \times \langle u \rangle) = \langle y \rangle \times w(\langle u \rangle) \lhd G$, $X \cap (\langle y \rangle \times w(\langle u \rangle)) = \langle y \rangle \lhd X$, що

неможливо. Отже, $N \cap \langle u\rangle = N \cap \Phi(\langle u\rangle) = w(\langle u\rangle) \leqslant Z(G)$. Оскільки $N \not\leqslant Z(G)$, то $w(\langle u\rangle) = \langle c\rangle$. Зрозуміло, що підгрупа C містить $V = \langle u\rangle M = (\langle u\rangle \times \langle y\rangle) \lambda \langle z\rangle$. Звідси $[u,z] \in N = \langle c\rangle \times \langle y\rangle \leqslant Z(C)$.

Покажемо, що $[u,z] \in \langle c\rangle$. Нехай $[u,z] \notin \langle c\rangle$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[u,z] = y$. Легко бачити, що $V' = \langle y\rangle$. За теоремою 1.2.2 $V \lhd G$ і тому $\langle y\rangle \lhd G$, $y \in Z(G)$, що не так. Отже, $[u,z] \in \langle c\rangle$. Тепер для будь-якого елемента f з $M\backslash\langle c\rangle$ G містить підгрупу $\langle u\rangle \lambda \langle f\rangle$, $/f/ = p$, у якої за попереднім $w(\langle u\rangle \lambda \langle f\rangle) = \langle c\rangle \times \langle f\rangle \lhd G$. Зрозуміло, що $M/\langle c\rangle$ — центральна підгрупа з $G/\langle c\rangle$, яка містить комутант $G/\langle c\rangle$. Оскільки G — неметагамільтонова група, то $/G'/ \in \{p^2, p^3\}$.

Покажемо, що $/G'/ = p^2$. Якщо G — 2-породжена група, то 2-породженою буде і $G/\langle c\rangle$. Але тоді з умови $G'/\langle c\rangle \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$ випливає, що $/(G/\langle c\rangle)'/ \leqslant p$ і тому $/G'/ = p^2$. Нехай далі G не породжується двома елементами. Покажемо, що $C/\langle y\rangle$ не містить підгрупи кватерніонів $H/\langle y\rangle$ порядку 8. Дійсно, нехай це не так, тобто $H/\langle y\rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Оскільки G не містить групи кватерніонів порядку 8, то $\langle y\rangle$ недоповнюється в H. В силу твердження 1.1.11 з [77] $H = \langle x_1\rangle \lambda \langle y_1\rangle$, $/x_1/ = /y_1/ = 4$, $x_1 \in C\backslash M$, $y_1 \in C\backslash M$. За попереднім, $x_1^2 = y_1^2$, що неможливо. Отже, $C/\langle y\rangle$ не містить підгрупи кватерніонів порядку 8.

Нехай $C/\langle y\rangle$ містить підгрупу $H/\langle y\rangle = \langle\langle y\rangle x_1\rangle \lambda \langle\langle y\rangle y_1\rangle$, де $/x_1/ > p$, $/\langle y\rangle y_1/ \neq \bar{1}$. Тоді за попереднім, $\langle y\rangle \cap \langle x_1\rangle = 1$ і $\langle y\rangle \cap \langle y_1\rangle = 1$. Звідси $H = (\langle y\rangle \times \langle x_1\rangle) \lambda \langle y_1\rangle$ і $w(H) = M = \langle y\rangle \times w(\langle x_1\rangle) \times w(\langle y_1\rangle)$. Оскільки $/x_1/ > p$, то за попереднім $w(\langle x_1\rangle) = \langle c\rangle$. Ясно, що $w(\langle y_1\rangle) \cap \langle c\rangle = 1$ і за попереднім $/y_1/ = p$.

Припустимо, що $/G'/ = p^3$. Тоді $G' = M$. Нехай $C/\langle y\rangle$ — метациклічна група. Очевидно, $C/\langle y\rangle$ містить підгрупу $M/\langle y\rangle$ типу (p,p) і елемент $\langle y\rangle u$, $/\langle y\rangle u/ > p$. Тоді $/C/\langle y\rangle/ > p^2$ і, значить, $C/\langle y\rangle = H/\langle y\rangle$. Оскільки $M = w(H) = w(C) \leqslant \Phi(G)$, то G — 2-породжена група, що неможливо. Отже, $C/\langle y\rangle$ — неметациклічна група. Звідси $C/\langle y\rangle$ містить мінімальну неметациклічну підгрупу $F/\langle y\rangle$, яка може бути групою одного з типів 1—5 теореми 1.3.3. Зрозуміло, що F — неметациклічна група, яка містить мінімальну неметациклічну підгрупу D тих же типів теореми 1.3.3. За теоремою 1.3.4 $D \lhd G$ і $F \lhd G$. При $D' = \langle y\rangle$ чи $F' = \langle y\rangle$ маємо $y \in Z(G)$, що неможливо.

Припустимо, що $\exp(F/\langle y\rangle) = p$, тобто $F/\langle y\rangle$ — група типу 1 теореми 1.3.3. Тоді за попереднім для будь-якого h з $F\setminus\langle y\rangle$ $\langle h\rangle \cap \langle y\rangle = 1$ і $/h/ = p$. Звідси $\exp(F) = p$, $/F/ = p^4$, що неможливо. Отже, $\exp(F/\langle y\rangle) > p$. За попереднім, $F/\langle y\rangle$ не може бути групою типу 3 чи 4 теореми 1.3.3 ($F/\langle y\rangle$ не містить груп кватерніонів порядку 8).

Припустимо, що $F/\langle y\rangle$ — група типу 5 теореми 1.3.3. Тоді $F/\langle y\rangle$ містить $H/\langle y\rangle$, де $H/\langle y\rangle = \langle\langle y\rangle x_1\rangle \times \langle\langle y\rangle y_1\rangle$ — група типу (4,4), що за попереднім неможливо.

Нехай, нарешті, $F/\langle y\rangle$ — група типу 2 теореми 1.3.3. Тоді $p = 3$ і D — група типу 2 теореми 1.3.3, $/D/ = 3^4$, $/F/ = 3^5$. За теоремою 1.3.4 G/D — абелева 3-група. Звідси $M \leqslant w(D) = D'$ і $/D'/ = 9$, що неможливо. Отже, завжди $/G'/ = p^2$. Звідси $M\setminus G'$ містить d, $/d/ = p$. В силу теореми 0.2.1 з [78] $G = K \lambda \langle v\rangle$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v\rangle) = M$, $w(K) = G'$, $G' = K'$ $[K,\langle v\rangle] < K$ і $\exp(K) > p$. Можливі випадки: 1) К — метациклічна група; 2) К — неметациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $K = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $/K'/ \in \{1,p\}$. За попереднім, K неізоморфна групі кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що K — абелева група чи група Міллера—Морено. Звідси без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$. Покажемо, що $\alpha = 2$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді за попереднім $\langle a^p\rangle \lhd G$ і в G існує підгрупа $\langle a^p\rangle \lambda \langle v\rangle$. При $/v/ > p$ за теоремою 1.2.2 $\langle a^p\rangle \lambda \langle v\rangle \lhd G$. При $/v/ = p$ за теоремою 1.2.2 $w(\langle a\rangle) \times \langle v\rangle \lhd G$. Тому завжди $\langle a^p\rangle \lambda \langle v\rangle \lhd G$ і $[v,b] \in (\langle a^p\rangle \lambda \langle v\rangle) \cap G' = \langle c\rangle$. Ясно, що $[a,v] \in (\langle a^p\rangle \lambda \langle v\rangle) \cap G' = \langle c\rangle$ і, значить, $G' = \langle c\rangle$, що неможливо. Отже, $\alpha < 3$. При $K' \neq 1$ $\alpha > 1$ і тому $\alpha = 2$. При $K' = 1$ без порушення загальності можна вважати, що $\alpha \geqslant \beta > 0$. Оскільки $\exp(K) > p$, то $\alpha = 2$. Звідси $\beta \in \{1,2\}$. Можливі випадки: 1.1) $K' = 1$; 1.2) $K' \neq 1$.

Випадок 1.1. Нехай $\beta = 2$. Тоді $G' = w(K) \leqslant Z(G)$, $v^p \in Z(G)$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v\rangle) = M \not\leqslant Z(G)$. Звідси $/v/ = p$ і тому $G = KX$, $[G:K] = p$, $[X:(K \cap X)] = p$, $K \cap \langle y\rangle = 1$. Ясно, що $(K \cap X) \lhd G$. За попереднім, $w(X) \lhd G$. Звідси $X = (K \cap X)w(X) \lhd G$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$.

При $/v/ = p$ $/G/ = p^4$ і G — метагамільтонова група, що не так. Тому $/v/ > p$. Якщо $[b,v] = 1$, то $b \in Z(G)$. Якщо $/v/ > p^2$, то в G існує підгрупа $X_1 = \langle b\rangle \times \langle v^p\rangle$. Завдяки лемі 2.2.3 $w(X_1) = \langle b\rangle \times w(\langle v\rangle) \lhd G$. Ясно, що $K \cap w(X_1) = \langle b\rangle \lhd G$ і тому $b \in Z(G)$. Отже, завжди $b \in Z(G)$ і $M = \langle a^p\rangle \times \langle b\rangle \times w(\langle v\rangle) \leqslant Z(G)$, що неможливо. Звідси $/v/ = p^2$, $[b,v] \neq 1$ і G містить неабелеву підгрупу $(\langle a^p\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle v\rangle$, комутант якої $\langle [b,v]\rangle \leqslant Z(G)$. Тому $[b,v] = a^{sp}$, $0 < s < p$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a,v] = b$. Звідси $G = \langle a,v\rangle$, $/G/ = p^5$, $/X/ = p^3$, $/x/ = p^2$. Якщо $KX = G$, то як і

раніше при $\beta = 2$ $X \lhd G$, що не так. Отже, $KX < G$. Тоді $KX = K \times \langle v^p \rangle$ — абелева група, що знову не так. Випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $[a,b] = a^p$. Нехай $\beta = 1$. Як і у випадку 1.1 $/v/ = p^2$. При $KX = G$ одержимо $G = K \lambda \langle x \rangle$, $/K \cap X/ = p$, $(K \cap X) \lhd X = \langle x \rangle \times (K \cap X)$ — абелева група, що не так. Отже, $KX < G$, $KX = X_2 = K \times \langle v^p \rangle$. Зрозуміло, що $p > 2$, $w(K) = w(X) = G'$ і тому $X \lhd G$, що неможливо. Таким чином, $\beta > 1$ і тому $w(K) = G' = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leqslant Z(G)$. Оскільки $M = w(K) \times w(\langle v \rangle) \not\leqslant Z(G)$, то $w(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$ і $/v/ = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $v = y$, $G = KX$ і $K \cap X = \langle x \rangle$. Ясно, що $\langle x \rangle \not\lhd K$. Звідси $\langle a \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, $\Phi(K) \leqslant Z(K)$. Тому $x \notin \Phi(K)$. Але тоді $K = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $x = b$ і $[b,y] = b^{p^{\beta-1}}$. Оскільки $w(X) = w(\langle b \rangle) \times \langle y \rangle \lhd G$, то $[a,y] \in w(\langle b \rangle)$. Ясно, що $[X : w(\langle b \rangle)] > 4$.

Припустимо, що $[a,y] = 1$. Тоді G містить підгрупу $\langle a \rangle \times \langle y \rangle$. За лемою 2.2.3 $\langle a^p \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$. Ясно, що $(\langle a^p \rangle \times \langle y \rangle) \cap \langle b \rangle = 1$. Звідси $[b,y] = 1$, що неможливо. Отже, $[a,y] \neq 1$. З цього випливає, що $[a,y] = [b,y]^i$, де i — некратне p. Покладемо $b_1 = a^{-i}b$. Тоді $[b_1,y] = 1$, $/b_1/ = /b/ = p^\beta$, $\langle b_1 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Тому без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a \rangle \lambda \langle b_1 \rangle$. При $\beta = 2$ в силу теореми 2.5.2 з [77] G — метагамільтонова група, що не так. Звідси $\beta > 2$, $w(\langle b_1 \rangle) = w(\langle b \rangle) = \langle [a,y] \rangle$. Покладемо $b = b_1$, $x = y$ і одержимо $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ — група типу 1 розглядуваної теореми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку K містить мінімальну неметациклічну підгрупу D, яка може бути групою одного з типів 1—5 теореми 1.3.3. За попереднім, D не може бути групою жодного з типів 1, 3, 4 згаданої теореми.

Нехай D — група типу 5 теореми 1.3.3. Тоді $w(K) = G' = D' = w(D) \leqslant Z(D)$, $p = 2$, G' — група типу (2,2), для всякого g з G $g^2 \in Z(G)$, D містить елементи d_1 і d_2 такі, що $/d_1/ = /d_2/ = 4$, $D' = \langle d_1^2 \rangle \times \langle d_2^2 \rangle \leqslant Z(G)$. Як і раніше, $/v/ = 2$. Зрозуміло, що K задовольняє умову теореми 2.2.1 і може бути лише групою типу 2 чи 3 згаданої теореми. Тоді $\exp(K) = 4$. Очевидно, що $G = KX$, $y \notin K$ і тому $X = (K \cap X) \lambda \langle y \rangle$. Легко бачити, що $X' \leqslant K \cap X$ і $(K \cap X)/X'$ — циклічна група. Звідси і $K \cap X$ — циклічна група. Оскільки $\exp(K) = 4$, то $/K \cap X/ = 4$ і тому $/X/ = 8$, що неможливо, оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8. Отже, D — може бути лише групою типу 2 теореми 1.3.3. Звідси $D' = G' = K' = w(K) = w(D) \not\leqslant Z(D)$. Ясно, що K задовольняє умову теореми 2.2.1 і може бути лише групою типу 4 згаданої теореми, тобто $D = K = U\langle u \rangle$, де $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /u/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,u] = b$, $[b,u] = a^3 = u^6$, $w(K) = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$, $w(G) = M = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle)$, $b \notin Z(K)$. При $/v/ > 9$ в G існує підгрупа $\langle v^3 \rangle \lambda \langle b \rangle$. Завдяки лемі 1.2.3 $w(\langle v^3 \rangle \lambda \langle b \rangle) = w(\langle v \rangle) \times \langle b \rangle \lhd G$. Звідси $\langle b \rangle \lhd G$, що неможливо. Отже, $/v/ \in \{3,9\}$. Зрозуміло, що $\exp(G) = 9$.

Нехай $A = C_G(G')$. Тоді $A \lhd G$, $[G:A] = 3$, $A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle v^3 \rangle)\langle f \rangle$, $f \neq 1$. Припустимо, що $/v/ = 9$. Тоді $/f/ = 9$. Як і раніше для C одержимо, що $w(\langle a \rangle) = w(\langle f \rangle)$, $[a,f] \in Z(A)$. Ясно, що знайдеться таке i, некратне 3, що $/a^i f/ = 3$ і $a^i f \notin M$, що неможливо. Отже, $/v/ = 3$. Без порушення загальності можна вважати, що $v = y$. Легко бачити, що $[b,y] = 1$ і $A = U \lambda \langle y \rangle$. За попереднім $\langle a^3 \rangle \times \langle y \rangle = \langle u^3 \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$. Звідси в G існують підгрупи $\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle$ і $\langle u \rangle \lambda \langle y \rangle$ і тому $[a,y] \in \langle a^3 \rangle$, $[u,y] \in \langle u^3 \rangle$. Якщо $[u,y] = 1$, то покладемо $y = z$. Припустимо, що $[u,y] \neq 1$. Тоді

$[u,b] = u^6$, $[u,y] = u^{6i}$, i — некратне 3. Покладемо $z = b^{-i}y$. Тоді $/z/ = 9$, $G = K \lambda \langle z \rangle$, $[u,z] = 1$. Перепозначимо u на x, $\langle x \rangle \times \langle z \rangle$ на X і одержимо, що $G = UX$ — група типу 2 теореми. Випадок 2 розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = UX$ — група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^n$, $U = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle \lhd G$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 0$, $G' = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leqslant M = G' \times \langle y \rangle \lhd G$, де в групах G типу 1 $y = x$, а в групах G типу 2 $y = z$ і M — група типу (p,p,p). Група G типу 1 містить ненормальну неабелеву підгрупу $\langle ab \rangle \lambda \langle y \rangle$, а група G типу 2 містить ненормальну неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle by \rangle$. Звідси і за означенням метагамільтонових груп G — неметагамільтонова група.

Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B]$ э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \neq 1$, B — власна немаксимальна підгрупа з G, $G' \cap B = \langle c \rangle$, $/c/ \in \{1,p\}$, $/B/ > p^2$.

Припустимо, що $/c/ = 1$. Тоді з умови $G' = w(U)$ $U \cap B = 1$. Оскільки $[G:U] \leqslant p^3$ і $/B/ > p^2$, то одержали суперечність. Отже, $/c/ = p$. Легко бачити, що для будь-якого g з G $g^p \in Z(G)$. З цього випливає, що B — нециклічна група. Легко показати, що $M = w(G)$. Звідси G не містить підгруп діедра порядку 8, неабелевих підгруп порядку p^3 та експоненти p.

Нехай B — група кватерніонів порядку 8. Тоді $A = \Phi(B)$ і G — група типу 1, $A = B' \leqslant G' = w(U) \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так. Звідси w(B) — група типу (p,p), $/B'/ \leqslant p$. При $p = 2$ G — група типу 1 теореми, всі інволюції з B належать w(B). За наслідком 1.1.7 B — метациклічна група. При $p > 2$ за результатом з [66, 211] неметациклічна група B містить або підгрупу порядку p^3 і

експоненти p, що в нашому випадку неможливо, або підгрупу типу 2 теореми 1.3.3 і $G' \not\leq Z(G)$. Зрозуміло, що G — група типу 2 леми, $/G/ = 3^5$, $/B/ = 3^4$ і тому $B \lhd G$, що не так. Отже, завжди B — метациклічна група. Легко бачити, що $B = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $w(\langle u \rangle) = \langle c \rangle$ і B — група типу 5 теореми 1.1.1. Звідси $U \cap \langle v \rangle = 1$. Для груп G кожного з типів леми $/v/ = p$, $A \leqslant N = \langle u^p \rangle \times \langle v \rangle$. Отже, $\Delta > 1$.

Нехай G — група типу 2 леми. Тоді $\langle c \rangle = \langle a^3 \rangle$, $/u/ = 9$, для будь-якого f з M $\langle c \rangle\langle f \rangle \lhd G$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle = N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G — група типу 1 леми. Тоді $G = U \lambda \langle v \rangle = UB$ і без порушення загальності можна вважати, що $U \cap B = \langle u \rangle$. При $/u/ > p^2$ $w(\langle u \rangle) = w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$. Але $[U,\langle v \rangle] = \langle c \rangle$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle \lhd G$ і тому $N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай, нарешті, $/u/ = p^2$. Тоді $u = a^i b^j$. Оскільки $\beta > 2$ і $G' \leqslant Z(G)$, то $/b^j/ \leqslant p^2$. Зрозуміло, що $/a^i/ \leqslant p^2$. Якщо $(i,p) = 1$, то $u^p = a^{ip}b^{jp} \notin \langle b \rangle$. Звідси $\langle u \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Оскільки $[u,v] = [a^i b^j,v] = [a,v]^i = b^{ip^{\beta-1}}$, то $B = (\langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times \langle v \rangle) \lambda \langle u \rangle$ — неметациклічна група, що не так. При $(i,p) \neq 1$ $/b^j/ = p^2$. Але тоді $u^p = (a^i b^j)^p = a^{ip}b^{jp} = b^{jp} \neq 1$ і $\langle u \rangle$ містить $w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$, $w(B) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle \lhd G$.

Покажемо, що $u \in Z(G)$. Дійсно, $\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leqslant Z(G)$, тому $a^i \in Z(G)$. Оскільки $/b^j/ = p^2$, $\beta > 2$, то $(j,p) \neq 1$. Тоді $b^j \in Z(G)$ і тому $u \in Z(G)$. Звідси $B = \langle u \rangle w(B) \lhd G$, що суперечить вибору B. Отже, завжди $[A;B]$ э $N \lhd G$, тобто G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.2.2. *Неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку p^n, що мають підгрупи типу (p,p,p), p — довільне просте*

число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$, $/a/ \in \{p^2, p^3\}$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 0$, $X \neq 1$ *та вичерпуються групами типів:*

1) $G = U \lambda X$, $U = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle$, $/x/ = p$, $/a/ = p^2$, $\beta > 2$, $[a,b] = a^p$, $[b,x] = 1$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$;

2) $U = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle \times \langle z\rangle$, $/b/ = /z/ = 3$, $/a/ = /x/ = 9$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $[b,z] = 1$, $[a,z] \in \langle a^3\rangle$;

3) $G = U \lambda X$, $X = \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = /x/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,x] = 1$, $[a,x] \in \langle a^4\rangle$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.2.3 всі елементи порядку p належать $M \lhd G$, де M — підгрупа типу (p,p,p) з G і G/M — дедекіндова група. Можливі випадки: 1) $G' \leqslant M$; 2) $G' \not\leqslant M$.

Випадок 1. У цьому випадку завдяки лемі 2.2.4 G — група типу 1 чи 2 розглядуваної теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $G/M = H/M \times D/M$ — гамільтонова група, де H/M — група кватерніонів порядку 8, D/M — елементарна абелева 2-група. Звідси $G = HD$, $H \cap D = M$, $H \lhd G$, $D \lhd G$. Зрозуміло, що H — скінченна неабелева 2-група, яка містить нормальну підгрупу типу (2,2,2) і яка за теоремою 1.2.1 є УЩН[ ]-групою.

Покажемо, що H — неметагамільтонова група. Дійсно, $/H'/ = 2^m$, $m > 0$. Оскільки всі інволюції з G, а тому і з H, належать M і G/M — неабелева група, то H' — неелементарна абелева група і тому $m > 1$. Припустимо, що H — метагамільтонова група. Тоді за теоремою 2.1.2 H може бути метациклічною групою типу 2 згаданої теореми, що неможливо. Отже, H — неметагамільтонова група. За наслідком 2.2.3 $H = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle$

$\cap \langle b\rangle / = /x/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,x] = 1$, $[a,x] \in \langle a^4\rangle$, $M = N \times \langle x\rangle$, $N = \langle c\rangle \times \langle d\rangle$, $\langle c\rangle = \langle a^4\rangle \in Z(H)$, $a^2b^2 = d \notin Z(H)$, $/d/ = 2$, $N = w(\langle b\rangle \lambda \langle d\rangle)$, $[b,d] = c$. Завдяки лемі 2.2.3 $N \lhd G$.

Покажемо, що $H = G$, тобто $D = M$. Нехай це не так. Тоді $D\backslash M$ містить неодиничний елемент u. Оскільки всі інволюції з G належать M і D/M — елементарна абелева група, то $u^2 \in M$, $/u/ = 4$. За лемою 2.2.3 $\langle u^2\rangle \lhd G$ і тому $u^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $H' = \langle a^2\rangle$, $\langle a^2\rangle \lhd G$, $\langle c\rangle = w(\langle a^2\rangle) \leqslant Z(G)$.

Нехай $\langle c\rangle = \langle u^2\rangle$. Тоді G містить підгрупу $Q = \langle a^2,u\rangle$, $/Q/ = 8$. Оскільки $G/M = H/M \times D/M$, $/a^2M/ = 2$ і $/uM/ = 2$, то $Q \cap M = \langle c\rangle$ і c — єдина інволюція з Q. Звідси в силу теореми 12.5.1 з [64] Q — група кватерніонів, що суперечить лемі 2.2.3. Отже, $\langle a\rangle \cap \langle u\rangle = 1$. Оскільки $u^2 \in Z(G)$, $N \not\leqslant Z(G)$, то $N \cap \langle u\rangle = 1$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle b^2\rangle \lhd G$, $/b^2/ = 4$, і тому за тією ж лемою в G існують нормальні підгрупи $\langle b^2\rangle \lambda \langle u\rangle$ і $\langle b\rangle\langle u\rangle$. Звідси $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap (\langle b\rangle\langle u\rangle) = \langle b\rangle \lhd H$, що неможливо. Отже, $H = G$ — група типу 3 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = UX$ — група одного з типів 1—3 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^n$. Для груп G кожного з типів 1, 2 достатність доведена в лемі 2.2.4. Нехай G — група типу 3 теореми. Тоді $p = 2$, $n = 6$, $G' = \langle a^2\rangle$, G містить підгрупу $M = \langle a^4\rangle \times \langle d\rangle \times \langle x\rangle$, де $d = a^2b^2$, $\langle b\rangle \not\lhd G$. Оскільки $[b,x] = 1$ і $[d,b] = [a^2,b] = a^4 = b^4$, то в G існує неабелева ненормальна підгрупа $\langle b\rangle \lambda \langle dx\rangle$. Звідси G — неметагамільтонова група. Покажемо тепер, що G — УЩН[ ]-група, тобто для $/[A;B]/ > 2$ $[A;B]$ э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \neq 1$, $/B/ > 4$, B — власна немаксимальна підгрупа з G, $\langle a\rangle \cap B \leqslant \langle c\rangle = \langle a^4\rangle$.

Зауважимо, що exp(G) = 8. Нехай Z = <c> × <d>. Очевидно, що Z ◁ G і G/Z — гамільтонова група. Звідси Z ⋠ B. Зрозуміло, що <a> недоповнюється в G, [G:<a>] = 8, /B/ ⩾ 8. Отже, <a> ∩ B = 1 і тому <a> ∩ B = <c>.

Припустимо, що B — циклічна група. Тоді /B/ = 8, /A/ = 2 і легко бачити, що <c> = A, що неможливо. Отже, B — нециклічна група. За попереднім, d ∉ B. Покажемо, що c ∈ w(B) — група типу (2,2). Нехай це не так. При /w(B)/ = 2 B — група кватерніонів. Якщо /B/ = 8, то <c> = A ⩽ Z(G), що неможливо. Оскільки B/<c> — підгрупа з G/<a> і G/<a> — абелева група, то /B/ ≠ 16, B містить більше ніж одну інволюцію.

Нехай f ∈ G\M і /f/ = 2. Тоді G містить підгрупу M_1 = M ⋋ <f>, M_1/Z — група типу (2,2), що не містить a^2Z, /a^2Z/ = 2. Зрозуміло, що G = UM, U ∩ M = Z, U = <a><b>, M = Z × <x>, G/Z = U/Z × M/Z, де U/Z — група кватерніонів порядку 8, що містить елемент a^2Z, M/Z = <xZ>, w(G/Z) = <Za^2> × <Zx> — група типу (2,2), що не містить елемент Zf. Суперечність. Отже, всі інволюції з G належать M і тому w(B) = B ∩ M — група типу (2,2). Зрозуміло, що exp(B) > 2. Легко бачити, що для будь-якого елемента g з G <g^2> ◁ G і M/<c> ⩽ Z(G/<c>). Звідси w(B) = <c> × <v>, /v/ = 2 і w(B) ◁ G. Якщо A — елементарна абелева група, то A ⩽ w(B) = N ◁ G, що й треба було довести. Тому в подальшому будемо вважати, що /A/ > 2. Тоді /B/ = 16, B′ ⩽ <c>, в B три інволюції. За наслідком 1.1.7 B — метациклічна абелева група чи група Міллера—Морено, що не містить підгруп кватерніонів порядку 8. Тоді B = <a_1> × <b_1>, де <a_1> ∩ <a> містить <c>. Зрозуміло, що G = <a>B і тому U = <a>(U ∩ B), <b_1> ∩ U = 1. Звідси /b_1/ = 2 і /a_1/ = 8. За

попереднім, $\langle a_1^2 \rangle \lhd G$, $\langle a_1^2 \rangle \times \langle b_1 \rangle = \langle a_1^2 \rangle w(B) = N \lhd G$. Зрозуміло, що B — група типу 5 теореми 1.1.1, для якої $A \leqslant N$. Отже, і в цьому випадку G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 2.2.5. *Нехай G — 2-група порядку 2^4 з трьома інволюціями, яка містить таку центральну інволюцію c, що $G/\langle c \rangle$ — група типу (2,2,2). Тоді $G = Q \times D$, де Q — група кватерніонів порядку 8, $/D/ = 2$.*

Доведення леми випливає з наслідку 1.1.7.

Н а с л і д о к 2.2.5. *Нехай G — УЩН[ ]-група порядку 2^n з трьома інволюціями, яка містить підгрупу кватерніонів $Q = \langle u,v \rangle$ порядку 8. Тоді G містить підгрупу $C = Q \times \langle d \rangle > G'$, $/d/ = 2$, $\Phi(Q) = \langle c \rangle \leqslant Z(G)$, $/c/ = 2$; при циклічності G' $G/\langle c \rangle$ не містить підгрупи кватерніонів.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді $w(G) = N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \lhd G$, $/c/ = /d/ = 2$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $C = QN$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q \cap N = \Phi(Q) = \langle c \rangle$ і тоді $C = Q \lambda \langle d \rangle$. За теоремою 1.2.2 $C \lhd G$. Зрозуміло, що $C' = Q' = \langle c \rangle$. Звідси $c \in Z(G)$. Завдяки лемі 2.2.5 $C = Q \times \langle d \rangle$.

Нехай $G' \leqslant N$. Тоді при циклічності G' одержимо, що $G' = \langle c \rangle$ і $G/\langle c \rangle$ — абелева група. Отже, в цьому випадку наслідок доведений.

Нехай $G' \not\leqslant N$. Зрозуміло, що $G/\langle c \rangle$ — неабелева група, що містить підгрупу $C/\langle c \rangle$ типу (2,2,2). Припустимо, що $G/\langle c \rangle$ — гамільтонова група. Тоді в силу твердження 1.1.1 $G/\langle c \rangle$ містить підгрупу кватерніонів $H/\langle c \rangle$ порядку 8 і $G'/\langle c \rangle = (H/\langle c \rangle)'$. Якщо $\langle c \rangle$ доповнюється в H, то $H = \langle c \rangle \times Q_1$, де Q_1 — група кватерніонів порядку 8, $w(H) = w(Q_1) \times \langle c \rangle = N$ і тому $G' \leqslant N$, що не так. Нехай

$\langle c\rangle$ недоповнюється в H. Тоді завдяки твердженню 1.1.11 з [77] $H = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $c = a^2b^2$. Звідси $\langle c\rangle H' = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle = \langle a^2\rangle \times \langle c\rangle = N \geqslant G'$, що знову не так. Таким чином, $G/\langle c\rangle$ — недедекіндова група. За теоремою 1.2.3 $G/\langle c\rangle$ не містить підгруп типу (2,2,2,2). Припустимо, що $/(G/\langle c\rangle)'/ = 2$. Зрозуміло, що $C/\langle c\rangle$ підгрупа типу (2,2,2) з $G/\langle c\rangle$. Якщо $G'/\langle c\rangle \not< C/\langle c\rangle$, то $G/\langle c\rangle$ містить підгрупу $G'/\langle c\rangle \times C/\langle c\rangle$ типу (2,2,2,2), що неможливо в силу теореми 1.2.3. Звідси $G' < C$.

Нехай $/G'/\langle c\rangle/ > 2$. Припустимо, що $G/\langle c\rangle$ — метагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задоволняє умову теореми 2.1.2 і може бути скінченною 2-групою одного з типів 7—13 згаданої теореми. В групі $G/\langle c\rangle$ кожного із згаданих типів $G'/\langle c\rangle$ — центральна в $G/\langle c\rangle$ елементарна абелева група, яка міститься в будь-якій підгрупі $G/\langle c\rangle$ типу (2,2,2). Звідси $G'/\langle c\rangle \leqslant C/\langle c\rangle$ і тому $G' \leqslant C$.

Нехай $G/\langle c\rangle$ — неметагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2.2.2 і може бути групою типу 1 чи 3 згаданої теореми. В групі $G/\langle c\rangle$ типу 1 згаданої теореми $G'/\langle c\rangle$ — центральна елементарна абелева підгрупа з $G/\langle c\rangle$. Тому, як і раніше, $G' \leqslant C$. Нехай $G/\langle c\rangle$ — група типу 3 теореми 2.2.2. Тоді $G/\langle c\rangle$ має циклічний комутант порядку 4, $G/\langle c\rangle = (\langle\langle c\rangle a\rangle\langle\langle c\rangle b\rangle) \lambda \langle\langle c\rangle x\rangle$, $/\langle c\rangle a/ = /\langle c\rangle b/ = 8$, $/\langle c\rangle x/ = 2$, $(\langle c\rangle b)^{-1}(\langle c\rangle a)(\langle c\rangle b) = (\langle c\rangle a)^{-1}$ і $C/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle a^4\rangle \times \langle\langle c\rangle a^2b^2\rangle \times \langle\langle c\rangle x\rangle$. Звідси $C = \langle c, a^4, a^2b^2, x\rangle$.

Припустимо, що $\langle c\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Тоді $N = \langle c\rangle \times \langle a^4\rangle$. Оскільки N містить всі інволюції з G, то $x^2 = c = (a^2b^2)^2$. Зрозуміло, що $G' = \langle c\rangle \times \langle a^2\rangle$ і $\langle c\rangle \times \langle a\rangle \lhd G$. Звідси $\langle a^2\rangle \lhd G$ і тому $a^4 \in Z(G)$. В G існує підгрупа $\langle a^2\rangle \lambda \langle x\rangle$ і $[a^2, x] \in \langle c\rangle$. Звідси $[a^2, x] = 1$.

Оскільки $\langle\langle c\rangle a^4\rangle = \langle\langle c\rangle b^4\rangle$, то $\langle c\rangle \cap \langle b\rangle = 1$. Із умови $[\langle c\rangle x, \langle c\rangle b] = 1$ випливає, що $[x,b] \in \langle c\rangle$. В G існує підгрупа $\langle x\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/b/ = 8$. Завдяки теоремі 1.2.2 $\langle x\rangle \lambda \langle b\rangle \lhd G$. Зрозуміло, що $[a,b] \in (\langle c\rangle \times \langle a^2\rangle) \cap (\langle x\rangle \lambda \langle b\rangle) = N$. Звідси $G' \leqslant N$, що суперечить вибору G′. Отже, $\langle c\rangle \cap \langle a\rangle \neq 1$. Звідси $a^8 = b^8 = c$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle = \langle b^4\rangle$. В G існує підгрупа $X = \langle a\rangle\langle x\rangle$, $\langle a\rangle \cap \langle x\rangle \leqslant \langle c\rangle$, $[a,x] \in \langle a^4\rangle$. Зрозуміло, що $[X:\langle a\rangle] = 2$ і за теоремою 12.5.1 з [64] без порушення загальності можна вважати, що $X = \langle a\rangle \lambda \langle x\rangle$, $/x/ = 2$, $[a,x] \in \langle c\rangle = \langle a^8\rangle$. Звідси $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що $d^2 \in Z(X)$ і тому $a^4 \in Z(G)$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $Y = \langle a^2\rangle\langle b^2\rangle$. Знову $\langle a^2\rangle$ максимальна підгрупа з Y. В силу теореми 12.5.1 з [64] $Y = \langle a^2\rangle \lambda \langle z\rangle$, де $/z/ = 2$. Звідси G містить більше трьох інволюцій. Суперечність. Отже, $G/\langle c\rangle$ не може бути групою типу 3 теореми 2.2.2. Таким чином, завжди $G' \leqslant C$.

Нехай G′ — циклічна група. Тоді $C > G'$. Покажемо, що $G/\langle c\rangle$ не містить груп кватерніонів порядку 8. Нехай це не так. Тоді $G/\langle c\rangle$ містить групу кватерніонів $H/\langle c\rangle$ порядку 8. Як і раніше, при доповнюваності $\langle c\rangle$ в H і недоповнюваності $\langle c\rangle$ в H одержимо, що $H'\langle c\rangle$ — група типу (2,2), що належить циклічній групі G′. Суперечність. Отже, при циклічності G′ наслідок доведений повністю.

Нехай G′ — нециклічна група. За попереднім, $G' \leqslant C$. Покажемо, що $G' < C$. Нехай це не так. Тоді $C/\langle c\rangle = (G/\langle c\rangle)'$. Завдяки теоремі 2.2.2 $G/\langle c\rangle$ не може бути неметагамільтоновою групою і тому $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2.1.2, за твердженням якої $C/\langle c\rangle$ належить $Z(G/\langle c\rangle)$. Звідси $\langle u\rangle \lhd G$, $\langle v\rangle \lhd G$ і, значить, $Q \lhd G$ і $Q \leqslant \Phi(G)$. Ясно, що $C_G(Q) = C_G(\langle u\rangle) \cap$

$C_G(\langle v\rangle)$, $[G:C_G(Q)] = 4$, $/Q \cap C_G(Q)/ = 2$. Звідси $G = QC_G(Q)$ і тому $Q \trianglelefteq \Phi(Q)$, що не так. Отже, $G' < C$. Наслідок доведений.

Л е м а 2.2.6. *Нехай G — УЩН[ ]-група з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку 8 і G' — циклічна група порядку більше 2. Тоді G має вигляд $G = U \lambda \langle x\rangle$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $\alpha \in \{2,3\}$, $/b/ = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^2 = b^2$, $/x/ \in \{2,4\}$, $[a,x] \in \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle$ та є групою одного з типів:*

1) $G = U \times \langle x\rangle$, $/x/ = 2$, $\alpha = 3$;

2) $\alpha = 2$, $/x/ = 4$, $[b,x] = a$, $[a,x] = a^2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 2.2.5 G містить підгрупу $C = Q \times \langle d\rangle \triangleleft G$, де Q — група кватерніонів порядку 8, $/d/ = 2$, $\Phi(Q) = \langle c\rangle \leqslant Z(G)$, $C > G'$ і $G/\langle c\rangle$ не містить підгруп кватерніонів. Якщо $G/\langle c\rangle$ — неабелева група, то в силу твердження 1.1.1 $G/\langle c\rangle$ — негамільтонова група з комутантом порядку 2, який міститься в підгрупі $C/\langle c\rangle$ типу (2,2). Тому $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову наслідку 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 1—3 цього наслідку.

Нехай $G/\langle c\rangle$ — група типу 1 наслідку 2.1.2. Тоді $G/\langle c\rangle = U/\langle c\rangle \times \langle\langle c\rangle x\rangle$, $/\langle c\rangle x/ = 2$, $U/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle a\rangle \lambda \langle\langle c\rangle b\rangle$, $/\langle c\rangle a/ = 2^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/\langle c\rangle b/ = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $\langle\langle c\rangle a^{2^{\Delta-1}}\rangle = \langle\langle c\rangle [a,b]\rangle$. Оскільки G' — циклічна група, то $c \in \langle a\rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $\alpha = \Delta + 1 > 2$, $\langle a\rangle \triangleleft G$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \leqslant \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle$, $G = U\langle x\rangle$, $U \cap \langle x\rangle = U \cap \langle x^2\rangle = \langle a\rangle \cap \langle x^2\rangle \leqslant \langle c\rangle$. Зрозуміло, що в G існує підгрупа $A = \langle a\rangle\langle x\rangle$, $[a,x] \in w(\langle a\rangle) = \langle c\rangle$. В силу теореми 12.5.1 з [64] без порушення загальності можна вважати, що $A = \langle a\rangle \lambda \langle x\rangle$, $/x/ = 2$. Ясно, що $w(G) = w(A) = \langle c\rangle \times \langle x\rangle$. Звідси U містить тільки одну інволюцію. В силу теореми 12.5.1 з [64] $b^2 = c$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Оскільки $/G'/\langle c\rangle/$

$= 2$ і $U' = \langle a^2 \rangle$, то $/a/ = 8$, $Q = \langle a^2, b \rangle$. В силу наслідку 2.2.5 $Qw(G) = C = Q \times \langle x \rangle$. Звідси $[Q, \langle x \rangle] = 1$. Зрозуміло, що $[a,x] \in \langle c \rangle$. Нехай $[a,x] = c$. Тоді G містить підгрупу діедра $\langle ab \rangle \lambda \langle x \rangle$ порядку 8, що неможливо (в групі діедра 5 інволюцій). Отже, $[a,x] = 1$ і G — група типу 1 розглядуваної леми.

Нехай $G/\langle c \rangle$ — група типу 2 наслідку 2.1.2. Тоді $G/\langle c \rangle = (\langle\langle c \rangle a \rangle \times \langle\langle c \rangle b \rangle) \lambda \langle\langle c \rangle x \rangle$, $/\langle\langle c \rangle a \rangle/ = 2^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $/\langle\langle c \rangle b \rangle/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{1,2\}$, $/\langle\langle c \rangle x \rangle/ = 4$, $\langle c \rangle a \in Z(G/\langle c \rangle)$, $\langle c \rangle [b,x] = \langle c \rangle a^{2^{\gamma-1}}$. Оскільки G' — циклічна група, то $c \in \langle a \rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $\alpha = \gamma + 1$, $\alpha > 1$, $\langle a \rangle \lhd G$. Ясно, що в G існують підгрупи $A = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $X = \langle a \rangle\langle x \rangle$, $A \cap X = \langle a \rangle$, $w(\langle a \rangle) = \langle c \rangle$, $[G:A] = 4$, $x^4 \in \langle c \rangle$. Підгрупа $X_1 = \langle x^2 \rangle G'$ містить $N = \langle c \rangle \times \langle x_1 \rangle$, де $/x_1/ = 2$, $x_1 \notin A$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^{2^{\alpha-2}} \rangle$. Оскільки $[a,b] \in \langle c \rangle$, в G тільки три інволюції і $x_1 \notin A$, то в A тільки одна інволюція c. В силу теореми 12.5.1 з [64] A — група кватерніонів порядку 8. Звідси $b^2 = c = a^2$. Ясно, що $G' = \langle a \rangle$, $[a,x] \in \langle a^2 \rangle$, $[b,x] = a$, $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle \leqslant \langle c \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle a^2 \rangle$. Якщо $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, то покладемо $U = A$ і одержимо, що $G = U \lambda \langle x \rangle$.

Покажемо, що $[a,x] = a^2$. Дійсно, нехай це не так. Ясно, що $[a,x^2] = 1$, $[x^2,b] = [x,b][[x,b],x][x,b] = a^{-1}a^{-1} = a^{-2} = a^2 = b^2$. Звідси G містить підгрупу діедра $\langle b \rangle \lambda \langle x^2 \rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, $[x^2,b] = 1$, $[a,x] = a^2$ і тому G — група типу 2 розглядуваної леми. Нехай $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle \neq 1$. Тоді $x^4 = c$. Зрозуміло, що $[b,x^2] = [x^2,b]^{-1} = ([x,b][[x,b],x][x,b])^{-1} = (a^{-1}[a^{-1},x]a^{-1}) = a^{-2}c^j = c^{1+j} \in Z(G)$. Покладемо $y = bx$. Тоді $y^2 = bxbx = bx^2 (x^{-1}bx) = bx^2ba = b^2x^2 (x^{-2}b^{-1}x^2b)a = b^2x^2c^{1+j}a = c^jx^2a$. Оскільки $[a,x] \in \langle c \rangle$, то $[x^2,a] = 1$. Зрозуміло, що $y^2 \neq 1$. Але $y^4 = 1$. Звідси $/y/ = 4$ і $\langle y \rangle \cap A = 1$.

Покладемо U = A, <x> = <y> і одержимо, що G — група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай, нарешті, G/<c> — група типу 3 наслідку 2.1.2. Покажемо, що це неможливо. Дійсно, нехай це не так. Тоді G/<c> = (U/<c> × <<c>a>) λ <<c>b>, де U/<c> = <<c>u> λ <<c>v>, /<<c>u>/ = 2^{Δ}, Δ > 2, /<<c>v>/ = /<<c>a>/ = /<<c>b>/ = 2, <c>$u^{2^{\Delta-1}}$ = [<c>u,<c>v] = [<c>a,<c>b] = <c>[u,v] = <c>[a,b], [U/<c>,<c>b] = 1. Зрозуміло, що G′ ⩽ <u>, /u/ = 2^{α}, α = Δ + 1 > 3 і G′ ⩽ <u^4>. Ясно, що U = <u><v>, [U:<u>] = 2. В силу теореми 12.5.1 з [64] без порушення загальності можна вважати, що U = <u> λ <v>, /v/ = 2. Ясно також, що N = <c> × <v> ⩽ U. В G існує підгрупа A = <u><a>, для якої, як і для підгрупи U, маємо A = <u> λ <a>, /a/ = 2 і a ∉ U. Звідси a ∉ N, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок неможливий. Лема доведена.

Л е м а 2.2.7. *Нехай G — УЩН[ ]-група порядку 2^n з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку 8. Тоді* $/G'/ \in \{2,4\}$ *або* $G = U\langle x\rangle$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$, $/a/ = /b/ = 8$, $/x/ = 4$, $U \cap \langle x\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді G містить підгрупу кватерніонів Q = <u,v> порядку 8. Якщо /G′/ = 2, то лема доведена. Нехай /G′/ = 2^m, m > 1. Якщо G′ — циклічна група, то G задовольняє умову леми 2.2.6, за твердженням якої /G′/ = 4. Тому далі G′ — нециклічна група. За наслідком 2.2.5 G > C > G′ , де C = Q × <d>, /d/ = 2, w(Q) = Φ(Q) = Q′ = <c> ⩽ Z(G), /c/ = 2, w(G) = w(C) = <c> × <d>. Якщо G′ — елементарна абелева група, то /G′/ = 4 і лема доведена. Нехай G′ — неелементарна абелева група і m > 2. Оскільки /C/ = 16 і C > G′ , то /G′/ = 8. Відомо [99], що група кватерніонів не може бути комутантом 2-

групи, тому $G'' = 1$ і $G' = \langle u\rangle \times \langle d\rangle$, $/u/ = 4$. Припустимо, що $\langle u\rangle \lhd G$. Якщо $\langle v\rangle \lhd G$, то, як і в лемі 2.2.6, $G = QC_G(Q)$, $u \in \Phi(G)$, що неможливо. Звідси або $\langle u\rangle \not\lhd G$, або $\langle v\rangle \not\lhd G$. Тому $C/\langle c\rangle$ — нецентральна підгрупа типу (2,2,2) з $G/\langle c\rangle$ і $G'/\langle c\rangle$ — група типу (2,2). Припустимо, що $G/\langle c\rangle$ — метагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 7, 9—11 згаданої теореми. Тому $G'/\langle c\rangle \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$. Звідси $\langle u\rangle \lhd G$.

Нехай $G/\langle c\rangle$ — неметагамільтонова група. Тоді $G/\langle c\rangle$ задовольняє умову теореми 2.2.2 і може бути лише групою типу 1 цієї теореми, у якої $G'/\langle c\rangle \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$. Тому $\langle u\rangle \lhd G$. Отже, завжди $\langle u\rangle \lhd G$ і $\langle u\rangle/\langle c\rangle \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$. Зрозуміло, що $G'/\langle c\rangle = \langle u\rangle/\langle c\rangle \times \langle\langle c\rangle d\rangle$ і $\langle c\rangle d \in Z(G/\langle c\rangle)$. Звідси $G'/\langle c\rangle$ — центральна в $G/\langle c\rangle$ підгрупа типу (2,2). Як згадувалось раніше, група $G/\langle c\rangle$ — група одного з типів 7, 9 — 11 теореми 2.1.2 або група типу 1 теореми 2.2.2. Група $G/\langle c\rangle$ кожного з згаданих типів містить метациклічну підгрупу $U/\langle c\rangle$, для якої $w(U/\langle c\rangle) = G'/\langle c\rangle$. За попереднім, $\langle v\rangle/\langle c\rangle \not\leqslant Z(G/\langle c\rangle)$ і тому $v \notin U$.

Нехай $X = UQ$. Зрозуміло, що $U \cap Q = \langle u\rangle$, $[X:U] = 2$. Очевидно, що в групі $G/\langle c\rangle$ кожного з типів 10, 11 теореми 2.1.2 всі інволюції центральні і тому $G/\langle c\rangle$ може бути лише групою типу 7, 9 теореми 2.1.2 і групою типу 1 теореми 2.2.2. Для груп $G/\langle c\rangle$ згаданих типів $[G/\langle c\rangle:U/\langle c\rangle] = 2$. Звідси $[G:U] = 2$ і, значить, $X = G$. Для груп $G/\langle c\rangle$ згаданих типів $U/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle a\rangle \lambda \langle\langle c\rangle b\rangle$, $/\langle c\rangle a/ = 4$, $[\langle c\rangle a,\langle c\rangle b] = \langle c\rangle a^2 = \langle c\rangle[a,b]$, $/\langle c\rangle b/ = 2^\gamma$, $\gamma > 1$. Зрозуміло, що $w(U/\langle c\rangle) = \langle\langle c\rangle a^2\rangle \times \langle\langle c\rangle b^{2^{\gamma-1}}\rangle \leqslant \Phi(U/\langle c\rangle) \leqslant \Phi(G/\langle c\rangle)$. Ясно, що $U = \langle c\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ \in \{4,8\}$, $/b/ \in \{2^\gamma, 2^{\gamma+1}\}$, G'

$= \langle u \rangle \times \langle d \rangle \leqslant \Phi(U)$. Можливі випадки: 1) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$; 2) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $/a/ = 8$, $U = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \leqslant \langle a^4 \rangle = \langle c \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle u \rangle \leqslant \langle c \rangle$. Оскільки $G'/\langle c \rangle = w(U/\langle c \rangle) \leqslant Z(G/\langle c \rangle)$, то $\langle a^2 \rangle/\langle c \rangle \leqslant G'/\langle c \rangle$. Тому без порушення загальності можна вважати, $u = a^2$. Ясно, що U містить підгрупу $A = \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$ і A містить G'. Звідси G містить підгрупу $V = A\langle v \rangle$, $v \notin A$, $v^2 = c = a^2$. За попереднім $[u,v] = c$, $[v,d] = 1$, $[a^2,v] = c$. Покладемо $/b/ = 2^\beta$. Тоді $\beta \in \{\gamma, \gamma + 1\}$, $\beta > 1$. Для груп $G/\langle c \rangle$ кожного з розглядуваних типів $[\langle c \rangle a, \langle c \rangle b] = \langle c \rangle b^{2^{\gamma-1}}$. Можливі випадки: 1.1) підгрупа $\langle a \rangle$ доповнюється в U; 1.2) підгрупа $\langle a \rangle$ не доповнюється в U.

Випадок 1.1. У цьому випадку $[a,v] \in \langle c \rangle \times \langle b^{2^{\gamma-1}} \rangle = N$ і $/[a, v]/ \leqslant 2$, $\beta = \gamma$. За лемою 2.2.3 $w(\langle b \rangle) \leqslant Z(G)$ і тому $N \leqslant Z(G)$. Звідси $[a,d] = 1$ і $[a,v] \in Z(V)$. Але тоді $[a^2,v] = [a,v]^2 = 1$, що не так. Випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $\beta = \gamma + 1 > 2$, $c = b^{2^{\beta-1}}$, $d = a^2b^{2^{\beta-2}}$. Легко бачити, що $U/\langle c \rangle$ — група одного з типів 7, 9 теореми 2.1.2, для якої $\langle c \rangle[a,b] = \langle c \rangle b^2$. Оскільки підгрупа $\langle a \rangle$ не доповнюється в U, то $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle c \rangle = \langle v^2 \rangle$, і оскільки $G'/\langle c \rangle = \langle\langle c \rangle a^2 \rangle \times \langle\langle c \rangle b^2 \rangle \leqslant Z(G/\langle c \rangle)$, то $\langle b^2 \rangle \lhd G$ і $/\langle c \rangle b^2/ = 2$. Звідси $\beta = 3$. В силу теореми 1.2.2 з [77] в нерозщіплюваній метациклічній підгрупі U $/U'/ > 2$. Звідси $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. Але тоді $b^{-1}ab = a^{-1}$. Зрозуміло, що $\langle b^2 \rangle$ не доповнюється в $\langle b^2 \rangle\langle v \rangle$. Отже, $\langle b^2 \rangle\langle v \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Оскільки $c \in \langle b^2 \rangle \lhd G$ і $\langle c \rangle[a,v] = \langle c \rangle b^2$, то $\langle [a,v] \rangle = \langle b^2 \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a,v] = b^2$. Зрозуміло, що $U/\langle c \rangle$ — неабелева група і

тому $G/\langle c\rangle$ — група типу 9 теореми 2.1.2, у якої $\langle c\rangle[b,v] = \langle c\rangle a^2b^{2t}$, де $t \in \{0,1\}$.

Покажемо, що $t = 1$. Дійсно, нехай це не так, тобто $t = 0$. Тоді з умови $\langle a^2\rangle \lhd G$ випливає, що $\langle [b,v]\rangle = \langle a^2\rangle$, тобто $[b,v] = a^{2i}$, i — непарне число. Покладемо $b_1 = ab$. Тоді $U = \langle a\rangle\langle b_1\rangle$, $/b_1/ = 8$, $[b_1,v] = b^2a^{2i}$, $/[b_1,v]/ = 2$. Замінивши b на b_1, одержимо, що $[b, v] = a^2b^2$. Тому можна вважати, що $t = 1$. Покладемо v =i одержимо, що $G = U\langle x\rangle$ — група з леми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $\langle a\rangle \cap Q = \langle a\rangle \cap \langle c\rangle = 1$, $/a/ = 4$, $\langle b\rangle \cap \langle a\rangle = 1 = \langle a\rangle \cap \langle u\rangle$. Як і раніше, для груп $G/\langle c\rangle$ кожного з розглядуваних типів $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 1$, $\langle c\rangle[a,v] = \langle c\rangle b^{2^{\beta-1}} \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$, $\Phi(U) = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle$, $u \in \Phi(U)$, $\exp(\Phi(U)) > 2$. Звідси $\beta > 2$, а значить, $w(\langle b\rangle) = \langle c\rangle$. Тому $\langle b^{2^{\beta-2}}\rangle \lhd G$, $[a,v] = b^{2^{\beta-2}}$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^2\rangle \times \langle b^{2^{\beta-2}}\rangle = \langle a^2\rangle \times \langle u\rangle$. Таким чином, в G існує підгрупа $\langle b\rangle \lambda \langle a^2\rangle \lhd G$ і $\Phi(\langle b\rangle \lambda \langle a^2\rangle) = \langle b^2\rangle$ і тому $\langle b^2\rangle \lhd G$. В G існує підгрупа $\langle b^2\rangle\langle v\rangle$, у якій $\langle b^2\rangle$ не доповнюється. Але тоді $\langle b^{2^{\beta-2}}\rangle\langle v\rangle$ — група кватерніонів порядку 8.

Припустимо, що $\beta > 3$. Тоді $\langle b^2\rangle\langle v\rangle$ — група кватерніонів порядку більше 8, яка завдяки теоремі 1.2.2 нормальна в G. Але тоді в G існує підгрупа $\langle b\rangle\langle v\rangle$, в якій підгрупа $\langle b\rangle$ не доповнюється. В силу [64] $\langle b\rangle\langle v\rangle$ — група кватерніонів порядку більше 16 з комутантом $\langle b^2\rangle$, $/b^2/ > 4$, що неможливо. Отже, $\beta = 3$ і тому $G/\langle c\rangle$ не може бути групою типу 1 теореми 2.2.2.

Можна вважати, що $a^2 = d$. Ясно, що G містить підгрупу $B = \langle b^2\rangle \lambda \langle a\rangle$. Покажемо, що $G' = \langle d\rangle \times \langle b^2\rangle \leqslant Z(U)$. За теоремою 1.2.2 $B \lhd G$. Ясно, що $w(B) = w(G) = w(U) = N$. Покажемо, що $N \leqslant Z(G)$. Для цього досить показати, що $d \in Z(U)$. Якщо $[a,b^2] \neq 1$, то $[a,b^2] = c \in Z(G)$ і $\langle dc\rangle$ характеристична підгрупа з B. Звідси $dc \in$

$Z(G)$ і тому $d \in Z(G)$, $N \leqslant Z(G)$. Нехай $[a,b^2] = 1$. Тоді $b^2 \in Z(U)$ і $[a,b] \in N$. Оскільки $[N,\langle a\rangle] = 1$, то $[a,b]^2 = [a^2,b] = 1$ і, значить, $a^2 = d \in Z(U)$. Отже, $N \leqslant Z(G)$. Оскільки $[a,b] \in N \leqslant Z(U)$, то знову $[a,b^2] = [a,b]^2 = 1$. Звідси $b^2 \in Z(U)$ і, значить, $G' \leqslant Z(U)$. Ясно, що тепер $[a,u] = 1$. За попереднім, $[a,v] = b^2$. За комутаторними співвідношеннями [74] $[a^2,v] = 1 = [a,v]^2 = b^4 \neq 1$, що неможливо. Отже, випадок 2 неможливий. Всі випадки розглянуті. Лема доведена.

Наслідок 2.2.6. *Група G вказаного в лемі 2.2.7 типу має точно три інволюції.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді $G = U\langle x\rangle$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$, $[G:U] = 2$, $/a/ = /b/ = 8$, $/x/ = 4$, $U \cap \langle x\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle = \langle c\rangle \leqslant Z(G)$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$. Зрозуміло, що $w(U) = N = \langle c\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$, $d = a^2b^2$, $/d/ = 2$, $[d,x] = 1$, $[a^2,x] = [b^2,x] = c$. Якщо всі інволюції з G належать U, то $w(G) = N$ і наслідок доведений. Нехай $G\backslash U$ містить y і $/y/ = 2$. Тоді $G = U \lambda \langle x\rangle$. Легко бачити, що всі підгрупи порядку 4 з U нормальні, але нецентральні підгрупи G одного з типів: $\langle a^2\rangle$, $\langle b^2\rangle$, N і належать підгрупі $G' = \langle a^2\rangle \times \langle d\rangle$. Всі циклічні підгрупи порядку 8 з U вичерпуються такими підгрупами: $\langle a\rangle$, $\langle ab\rangle$, $\langle b\rangle$. Оскільки $b^2 \notin Z(G)$ і $b^2 \in Z(U)$, то $[b^2,y] = c$. Ясно, що $y = ux^i$, $u \in U$. Оскільки $x^2 \in U$, $b^2 \in Z(U)$ і $[b^2,y] \neq 1$, то i — непарне число і навіть $i = 1$. Зрозуміло, що $y^2 = uxux = uxxuv = ux^2uv = cu^2v = 1$, де $v = [u,x]$. При $/u/ \leqslant 2$ $v = u^2 = 1$ і тому $c = 1$, що неможливо. Нехай $/u/ = 4$. Тоді $u^2 = c$, $y^2 = v$. За попереднім, $\langle u\rangle \in \{\langle a^2\rangle,\langle b^2\rangle\}$, $[a^2,x] = [b^2,x] = c$ і знову $y^2 = c \neq 1$, що не так. Отже, $/u/ = 8$. Але тоді $/u^2/ = 4$. Оскільки $/c/ = 2$ і $/y/ = 2$, то $c = u^2v = u^4$. Звідси $v = u^2 \in \langle u\rangle$. За попереднім, $\langle u\rangle \in \{\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle ab\rangle\}$. Оскільки $[a,x] = b^2 \notin$

$\langle a\rangle$ і $[b,x] = d \notin \langle b\rangle$, то $\langle u\rangle = \langle ab\rangle$. Але $[ab,x] = [a,x][b,x] = b^2d = a^2b^4 = a^6 \notin \langle ab\rangle$, що суперечить умові $v \in \langle u\rangle$. Одержані суперечності для всіх можливих порядків u показують, що всі інволюції з G належать $N = w(G)$, що й треба було довести. Наслідок доведений.

Л е м а 2.2.8. *Неметагамільтонова УЩН[ ]-група G порядку 2^n з трьома інволюціями, що не містить підгрупи кватерніонів порядку 8, є метациклічною групою.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за умовою вона містить неабелеву підгрупу $X = \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$ типу 5 теореми 1.2.2 $/x/ = 2^{\Delta}$, $\Delta > 2$, $/y/ = 2$, $[x,y] = x^{2^{\Delta-1}}$, $w(X) = w(G) = w(\langle x\rangle) \times \langle y\rangle$ — нецентральна в G підгрупа типу (2,2), $\langle x^2\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$. Покажемо, що G — метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить мінімальну неметациклічну підгрупу C, що задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути групою одного з типів 1—5 згаданої теореми. Легко бачити, що C — може бути лише групою типу 5 теореми 1.3.3. Група C згаданого типу має підгрупу $H = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $[a,b] = a^2$, $\langle a^2b^2\rangle$ — характеристична підгрупа з H. За теоремою 1.2.2 $H \lhd G$, $\langle a^2\rangle \lhd G$, $\langle a^2b^2\rangle \lhd G$, $w(G) = w(H) = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle = \langle a^2\rangle \times \langle a^2b^2\rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, G — метациклічна група. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.2.3. *Нільпотентні недедекіндові УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:*

1) $G = (\langle u\rangle \lambda \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $/z/ \in \{1,r\}$, p і r – прості числа, $[u,v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z\rangle$, C – локально циклічна 2-група, $/C/ > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, $[u,v] = c \in C$, $/c/ = p$, $/u/ \in \{p,p^2\}$, $/v/ \in \{p,p^2\}$, $[C,\langle v \rangle] = 1$, $/z/ \in \{1,r\}$, p і r – прості числа, $/C'//u//v/ \neq 32$; при $/z/ = r$ $/u/ = /v/ = p$;

4) $G = ((\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = [a,b] = u^{p^{\Delta-1}}$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

5) $G = CF$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $C \cap F = \langle c \rangle$, $F = (((\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/u/ = /v/ = /c/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

6) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

8) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

9) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle = \langle b \rangle\langle d \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $/d/ = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = p$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

10) $G = (\langle a \rangle\langle b \rangle) \lambda \langle z \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $/z/ \in \{1,r\}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] \in \langle a^4 \rangle$; при $/z/ = r$ $\beta \in \{2,3\}$; при $\beta = 2$ $[a,z] = 1$;

11) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число, $[a,z] \in \langle a^3 \rangle$;

12) G – група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p), p – непарне просте число;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ – непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

14) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

15) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 1$, $/x/ = p$ – непарне просте число, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b,x] = 1$;

16) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

17) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

18) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число;

19) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ – непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^\varepsilon b^p$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G′, всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

20) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

21) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = p$, p – непарне просте число, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^p$, $[a,x] = b^{fp}x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G′, всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

22) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

23) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta \in \{3,4\}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

24) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

25) $G = (\langle a,b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a,b\rangle$ – *група кватерніонів*, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = a$;

26) $G = U \lambda X$, U – *циклічна 2-група чи група кватерніонів порядку 8*, X – *група кватерніонів порядку 8*, $[U,X] \leqslant w(U)$; *при* $U' = 1$ $[U,X] = w(U)$;

27) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a,b] = x^2 = a^4$, $[a,x] = b$, $[b,x] = 1$.

28) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap \langle x\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Розглянемо два можливі випадки: 1) G – метагамільтонова група; 2) G – неметагамільтонова група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 1, 2, 4 – 14 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 1 теореми 2.1.2. Тоді, очевидно, G – група одного з типів 3 – 7 теореми 2.1.1, а тому G – група одного з типів 1 – 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 2 теореми 2.1.2. Тоді G – нільпотентна метациклічна група з комутантом $|G'| > p$, що задовольняє умову наслідку 1.3.9, за твердженням якого G – група одного з типів 6 – 10 розглядуваної теореми.

В групах G кожного з типів 4 – 14 теореми 2.1.2 G' – група типу (p,p), чи типу (p,p,p) і G – група одного з типів 11 – 21 розглядуваної теореми. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. Очевидно, що G – неабелева група з комутантом непростого порядку.

Нехай G – метациклічна група. Тоді вона задовольняє умову наслідку 1.3.10 і є нільпотентною групою одного з типів цього наслідку. Легко бачити, що G – група одного з типів 22 – 24 розглядуваної теореми.

Нехай G – неметациклічна група. Оскільки G – нільпотентна неметагамільтонова неметациклічна УЩН[ ]-група, то за наслідком 2.1.3 $/G/ = p^n$, $n > 4$, $/G'/ = p^m$, $m > 1$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп типу (p,p,p,p). Завдяки наслідку 2.2.2 при $p > 2$ G містить підгрупу типу (p,p,p).

Нехай G містить підгрупи типу (p,p,p). Тоді G задовольняє умову теореми 2.2.2 і G – група одного з типів 1 – 3 згаданої теореми, і тому G – група одного з типів 15, 11, 10 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G не містить підгрупи типу (p,p,p). За попереднім $p = 2$. В силу леми 2.2.1 G не містить підгрупи діедра порядку 8. Оскільки G – неметациклічна група, то в G точно три інволюції. Завдяки лемі 2.2.8 G містить підгрупу кватерніонів порядку 8. В силу леми 2.2.7 G – група типу 28 розглядуваної теореми або $/G'/ < 8$. Зрозуміло, що тоді $/G'/ = 4$.

Нехай G′ – циклічна група. Тоді G задовольняє умову леми 2.2.6 і може бути групою одного з типів 1, 2 згаданої леми, і тому G – група типу 10 чи 25 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай, нарешті, G′ – група типу (2,2). Ясно, що всі інволюції з G належать G′ і G задовольняє умову теореми 2.2.1 і G – група одного з типів 1 – 5 згаданої теореми. Група G кожного з типів 2 – 4 теореми 2.2.1 є групою одного з типів 10, 11, 4 теореми 2.1.2

відповідно, які є метагамільтоновими групами, що розглянуті раніше. Група G кожного з типів 1, 5 теореми 2.2.1 є групами типів 26, 27 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 28 розглядуваної теореми. Очевидно, що G – нільпотентна недедекіндова група. Покажемо, що G – УЩН[ ]-група. Для груп G кожного з типів 1 – 9 це доведено в теоремі 2.1.2. В групах G типу 10 при r = 2 і в групах G типу 11 при r = 3 це доведено в теоремі 2.1.2. В групах G кожного з типів 12 – 14, 15 при $\beta = 2$ та 16 – 21 достатність доведена в тій же теоремі 2.1.2. Для груп G кожного з типів 22 – 24 достатність доведена в наслідку 1.3.10. Для груп G типу 26 чи 27 достатність доведена в теоремі 2.2.1. Для груп G типу 10 при /z/ = 2, груп G типу 11 при /z/ = 3, груп G типу 15 при $\beta > 2$ достатність доведена в теоремі 2.2.2. Тому залишається довести достатність для груп G типів 25, 28.

Нехай G – група одного з типів 25, 28 теореми. Покажемо, що для /[A;B]/ > 2 [A;B] э N $\lhd$ G. Якщо A $\lhd$ G чи B $\lhd$ G, то покладемо A = N чи B = N і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що A $\not\lhd$ G, B $\not\lhd$ G, A $\neq$ 1, B – власна немаксимальна підгрупа з G, B $\not\geq$ G′, /G/ $\in \{2^5,2^6\}$. Звідси /B/ $\in \{2^3,2^4\}$.

Нехай G – група типу 25 теореми. Тоді /G/ = 2^5, /B/ = 8, /A/ = 2. Покладемо N = <c> × <d>, де c $\in$ Z(G), <c> = $\langle a^2\rangle \leqslant \langle a\rangle$ = G′, d = x^2. Покажемо, що d $\in$ Z(G). Оскільки <a> $\lhd$ G, то x індукує на <a> автоморфізм порядку 1 чи 2. Звідси $[a,x^2] = [a,d] = 1$. Ясно, що $[x^2,b] = [x,b][[x,b],x][x,b] = a^{-1}\,[a^{-1},x]a^{-1} = a^{-1}ca^{-1} = a^{-2}c = 1$. Отже, d $\in$ Z(G).

Покажемо, що всі інволюції з G належать N. Нехай це не так. Тоді G\N містить y, /y/ = 2 і G = (<a,b>) × <d>) λ <y>. Ясно, що

$G/\langle a,b\rangle = \langle\langle a,b\rangle d\rangle \times \langle\langle a,b\rangle y\rangle$ – нециклічна група, що неможливо. Отже, N містить всі інволюції з G. Оскільки $A \not\leq Z(G)$, то $/A/ > 2$, що неможливо. Отримана суперечність й доводить достатність для груп G типу 25 теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми. Нехай $B \leqslant U$. Тоді $/B/ = 8$. При циклічності B $A = \langle a^4\rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо. При нециклічності B маємо $B = \langle a^2\rangle \times \langle a^2b^2\rangle = G'$, що не так. Отже, $B \not\leq U$. Тоді $G = UB$. Покладемо $U \cap B = X$. Ясно, що $[B:X] = 2$ і $X \lhd B$, $/X/ > 2$. За попереднім, $c = a^4 \in X$. Зрозуміло, що $\langle c\rangle \neq A$. Нехай $/A/ = 2$. Тоді в силу наслідку 2.2.6 $\langle c\rangle \times A = N = w(G) \lhd G$ і N – шукана підгрупа. Отже, в подальшому будемо вважати, що $/A/ > 2$. Тоді $/B/ = 16$, $/A/ = 4$ і A – циклічна група. Ясно, що $/X/ = 8$.

Нехай $X = \langle u\rangle$. Зауважимо, що жодна з підгруп $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle ab\rangle$ ненормальна в G. Звідси $\langle u\rangle \not\lhd U$ і тому $\langle u\rangle \in \{\langle b\rangle,\langle ab\rangle\}$. Оскільки всі інволюції з G належать U (наслідок 2.2.6), то $\langle u\rangle$ не доповнюється в B. В силу [64] $B = \langle u,v\rangle$ – група кватерніонів порядку 16, $/v/ = 4$, $v^{-1}uv = u^{-1}$. Очевидно, що $v = hx^i$, де $h \in U$. Оскільки $\langle b^2\rangle = \langle(ab)^2\rangle \leqslant Z(U)$, $b^2 \notin Z(G)$, то, очевидно, $i = 1$. З співвідношення для групи G випливає, що $[\langle b\rangle,\langle v\rangle] \cap [\langle ab\rangle,\langle v\rangle]$ містить d_1, $/d_1/ = 2$, $\langle c\rangle \cap \langle d_1\rangle = 1$, що неможливо. Звідси X – нециклічна група. Зауважимо, що U не містить підгрупи кватерніонів порядку 8 і $\exp(G) = 8$. Звідси X не є групою кватерніонів порядку 8 і B – нециклічна група, яка в силу [64] не може бути групою кватерніонів порядку 16. Отже, B містить $N = \langle c\rangle \times \langle d\rangle$. Звідси X – нециклічна підгрупа порядку 8 з U і тому $X = \langle a^2\rangle \times \langle d\rangle = G'$, $B \lhd G$, що неможливо. Достатність для груп G типу 28 доведена. Теорема повністю доведена.

Наслідок 2.2.7. *Комутант G' нільпотентної УЩН[ ]-групи G є елементарною абелевою групою порядку не більше ніж p^3, або 2-групою типу (4), чи (4,2), чи (8), при цьому G' – група типу (4,2), коли G – група типу 28 теореми 2.2.3.*

Наслідок випливає з теореми 2.2.3.

2.3. Будова локально ступінчастих нільпотентних УЩН[ ]-груп

Лема 2.3.1. *Скінченні нільпотентні УШН[ ]-групи G, що містять ненадрозв'язні групи Шмідта, вичерпуються групами типів:*

1) $G = P \lambda Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/Q/ = q$, p і q – різні прості числа, $q > 2$, 2 – показник p за модулем q, $p \neq 3$, $\Phi(P) \lambda Q$ – нільпотентна група Міллера–Морено;

2) $G = (P \times R) \lambda Q$, $/P/ = p^2$, $/R/ = r$, $/Q/ = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $q > 2$, $p \neq 3$, $r \equiv 1 \pmod q$, 2 – показник p за модулем q, $P \lambda Q$ і $R \lambda Q$ – нільпотентні групи Міллера–Морено;

3) $G = P \lambda Q$, P – елементарна абелева група порядку $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{2,3\}$, $Q = \langle x \rangle$, $/x/ = q^\beta$, $\beta \in \{1,2,3\}$, p і q – різні прості числа, α – показник p за модулем q, $q > 2$, $C_Q(P) = \langle x^{q^\gamma} \rangle$, $\gamma \in \{1,2\}$, $\gamma \leqslant \beta$, $P \lambda \langle x^{q^{\gamma-1}} \rangle$ – нільпотентна група Міллера–Морено, $\alpha + \beta \cdot \gamma < 4$;

4) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α, $p > 5$, $\alpha \in \{2,3\}$, $/x/ = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, $q > 2$, $r > 2$, α – показник p за модулем q, α – показник p за модулем r, $P \lambda \langle x^q \rangle$ та $P \lambda \langle x^r \rangle$ – нільпотентні групи Міллера–Морено;

5) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^2, $/x/ = q$, $/z/ = r$, p, q і r – прості числа, $p \neq q$, $p \neq 3$, 2 –

показник p за модулем q, q > 2, P ⋋ <x> – нільпотентна група Міллера–Морено;

6) G = P ⋋ Q – група Шмідта, /P/ = p^3, exp(P) = /P′/ = p > 3, /Q/ = q, p і q – різні прості числа, q > 2, 2 – показник p за модулем q;

7) G = P ⋋ Q – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, Q = <x>, /x/ ∈ {3,9};

8) G = P ⋋ <x>, /P/ = p^2, /x/ = qr, p, q і r – попарно різні прості числа, p > 3, q > 2, P ⋋ $<x^r>$ – нільпотентна група Міллера–Морено, P ⋋ $<x^q>$ – нільпотентна надрозв'язна мінімальна неметациклічна група.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. За умовою леми G містить ненадрозв'язну групу Шмідта M = P ⋋ Q, яка може бути лише групою одного з типів 1 – 3 теореми 1.3.1. Тоді /P/ = p^{α}, α ∈ {2,3}, Q = <b>, /b/ = q^{Δ}, Δ ∈ {1,2}, p і q – різні прості числа. Зрозуміло, що M – неметациклічна група. Якщо M = G, то G – група одного з типів 7, 6, 3 розглядуваної леми відповідно.

Нехай M < G. Тоді при M ⊲ G M та G задовольняють умову теореми 1.3.4 і G – група одного з типів 1, 2 розглядуваної леми.

Нехай M ◁ G. Тоді за лемою Фраттіні ([74, лема 17.1.8]) G = MU = PU, P ◁ G, U = $N_G(Q)$, U ∩ P = Φ(P), Φ(P) ⩽ Z(M). Зрозуміло, що U ⊲ G. Тому U – група одного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2. Очевидно, що Φ(P) × Q < U. Можливі випадки: 1) U – нільпотентна група; 2) U – нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку U – підгрупа типу 2 чи 6 теореми 1.2.2. Нехай спочатку U – група типу 2 згаданої теореми. Тоді /U/ – добуток двох різних простих чисел. Звідси Φ(P) = 1, P ∩ U = 1.

Тому $U = Q \lambda \langle y \rangle$ – нenільпотентна група Міллера–Морено порядку qr, $/Q/ = q$, $/y/ = r$, $q \equiv 1 \pmod r$, $U' = Q$. Ясно, що M – нenільпотентна група Міллера–Морено, α – показник p за модулем q, $q > 2$. При $\alpha = 2$ $p \neq 3$. Нехай $V = P \lambda \langle y \rangle$. Зрозуміло, що $C_Q(P) = 1$. Якщо $C_U(P)$ містить $\langle y \rangle$, то $\langle y \rangle \lhd U$, що неможливо. Отже, $C_{\langle y \rangle}(P) = C_U(P) = 1$. При $\alpha = 3$ за теоремою 1.3.4 $G/P \cong U$ – дедекіндова група, що не так. Таким чином, $\alpha = 2$. Ясно, що U – підгрупа з Aut P. За теоремою 1.2.3 G – дисперсивна група і тому при $r = p$ одержимо, що $P \lambda \langle y \rangle$ – силовська нормальна p-підгрупа з G. Але тоді $\langle y \rangle \lhd U$, що не так. Отже, $r \neq p$, V – нenільпотентна група і $V \not\lhd G$. За теоремою 1.2.2 V – група лише типу 6 цієї теореми і V – мінімальна неметациклічна група типу 6 теореми 1.3.3. Звідси V та G задовольняють умову теореми 1.3.4 і G – група одного з типів 1, 2 згаданої теореми. Але тоді $M \leqslant G'$ – нільпотентна група, що неможливо. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 1.2.2.

Нехай U – група типу 6 теореми 1.2.2. Тоді $U = R \lambda \langle y \rangle$ – нenільпотентна група Міллера–Морено, $/R/ = r^{\gamma}$, $/y/ = t^{\Delta}$, $\Delta > 0$, r і t – різні прості числа, $R \times \langle y^t \rangle \lhd G$. Звідси $R \lhd G$, $\langle y^t \rangle \lhd G$. Ясно, що $\langle y \rangle \not\lhd U$. Покладемо $V = P\langle y \rangle$. Якщо $V \lhd G$, то $V \cap U = \Phi(P)\langle y \rangle \lhd U$, $V \cap U = U$ і $G = V$. Звідси $\Phi(P) = R$, $/R/ = p \neq t$, $G = P \lambda \langle y \rangle$, $p \equiv 1 \pmod t$, $p > 2$, $y^t \in Z(G)$. Оскільки $Q \leqslant U$, $P \lambda Q$ – група Шмідта і $y^t \in Z(G)$, то $Q = \langle y \rangle$ і $M = G$, що не так. Звідси $V \not\lhd G$. При $t = p$ $r = q$, R – ненормальна в G силовська q-підгрупа і оскільки G – дисперсивна група, то V – нормальна силовська p-підгрупа з G, що неможливо. Отже, $p \neq t$ і V – група типу 6 теореми 1.2.2. Зрозуміло, що $V < G$. Тоді $R \not\lhd P$. Звідси $r \neq p$, G' містить нenільпотентну підгрупу $P \lambda R$. Тепер знову V та G

задовольняють умову теореми 1.3.4, за твердженням якої G' – нільпотентна група, що не так. Таким чином, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Оскільки M – ненадрозв'язна група Шмідта, то показник p за модулем q більше 1. Тому $Q \leqslant U$ – не 2-група. Нехай U – непримарна група. Звідси U може бути лише підгрупою типу 2 чи 4 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $\langle y \rangle$ – q-група, $/z/ = r$, q і r – різні прості числа, $y^q \in Z(G)$. Зрозуміло, що $M = P \lambda \langle y \rangle$, $Q = \langle y \rangle$. Якщо $z \in \Phi(P)$, то $G = M$, що не так. Отже, $\langle z \rangle \cap P = \Phi(P) = 1$ і P – елементарна абелева група.

Припустимо, що $r = p$. Тоді $P \lambda \langle z \rangle$ – ненормальна в G силовська p-підгрупа, комутант якої власна підгрупа з P і нормальна в G. Оскільки P – мінімальна нормальна підгрупа з M, то $[P,\langle z \rangle] = 1$. Тому в G існує підгрупа $P \times \langle y^q \rangle \times \langle z \rangle$. За теоремою 1.2.3 недедекіндова група G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох неодиничних прямих множників. Звідси $\alpha = 2$, $/y/ = q$ і G – група типу 5 розглядуваної леми. При $p \neq r$ $G = P \lambda U$, $\Phi(P) = 1$. Якщо $y^q \neq 1$, то U – група типу 5 теореми 1.2.2, $\langle y^q \rangle \times \langle z \rangle \lhd G$ і G містить підгрупу $P \times \langle y^q \rangle \times \langle z \rangle$, для якої, як і раніше, $/y/ = q$, що не так. Отже, $/y/ = q$ і тому $/U/ = qr$. Якщо $[P,\langle z \rangle] = 1$, то в G існує підгрупа $P \times \langle z \rangle$, у якої P – група типу (p,p) і тому G – група типу 5 розглядуваної леми. Нехай $[P,\langle z \rangle] \neq 1$. Покладемо $V = P \lambda \langle z \rangle$. Тоді V – ненільпотентна підгрупа з G. Якщо V – підгрупа Міллера–Морено, то покладемо $U = \langle x \rangle$ і одержимо, що $/x/ = qr$ і G – група типу 4 розглядуваної леми. Нехай V – не є підгрупою Міллера–Морено. Тоді V містить власну підгрупу Міллера–Морено $S = P_1 \lambda \langle y \rangle$, $/P_1/ \in \{p,p^2\}$, $P_1 < P$.

Нехай спочатку $\alpha = 2$. Тоді $/P_1/ = p$, $p \equiv 1 \pmod r$. За теоремою Машке [41] $P = P_1 \times P_2$, $/P_2/ = p$, $P_2 \lhd V$. Якщо $[P_2,\langle z\rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V) \lhd G$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, $P_2 \lambda \langle y\rangle$ – група Міллера–Морено, V – мінімальна неметациклічна група типу 8 теореми 1.3.3 і тому G – група типу 8 розглядуваної леми.

Нехай $\alpha = 3$. При $/P_1/ = p^2$ знову за теоремою Машке ([74, теорема 20.2.2]) $P = P_1 \times P_2$, $P_2 \lhd V$, $/P_2/ = p$, 2 – показник p за модулем r і тому $P_2 \lambda \langle z\rangle$ – нільпотентна група. Звідси $P_2 = Z(V)$ і знову $P_2 \lhd G$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, $/P_1/ = p$, $p \equiv 1 \pmod r$ і в G існує підгрупа $P_2 \lambda \langle y\rangle$, де $P_2 \times P_1 = P$, $P_2 \lhd G$. Знову якщо $[P_2,\langle z\rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V)$, що неможливо. Тоді $[P_2,\langle y\rangle] \neq 1$. Як і раніше, $P_2 \lambda \langle z\rangle$ містить підгрупу Міллера–Морено $P_3 \lambda \langle y\rangle$, $P_3 \leqslant P_2$, $/P_3/ = p$ і $/[\langle z\rangle;(P_3 \times P_1) \lambda \langle y\rangle]/ > 2$. За означенням УЩН[ ]-груп $[\langle z\rangle;(P_3 \times P_1) \lambda \langle y\rangle] \ni N \lhd G$. Завдяки лемі Фраттіні [74] $V = ND = (P_3 \times P_1) \lambda D$, де $D = N_V(\langle z\rangle)$. Оскільки $P_3 \times P_1 < P$, то $D = \langle z\rangle \times \langle u\rangle$, $/u/ = p$, $\langle u\rangle = Z(V)$, $\langle u\rangle \lhd G$, що неможливо. Отже, при $\alpha = 3$ маємо суперечність. Випадок, коли U – непримарна група, розглянуто повністю.

Нехай тепер U – примарна група. Оскільки G – ненільпотентна група, то U – силовська q-підгрупа з $G = P \lambda U$, $\Phi(P) = 1$, $/U/ > /Q/$, $C_U(P) \lhd G$. Оскільки α – показник p за модулем q, то $q > 2$ і U – група одного з типів 1, 2, 5 теореми 1.2.2.

Нехай U – група типу 1 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x\rangle$, $/x/ = q^\beta$ і $Q < \langle x\rangle$. Звідси $\beta > 1$. Зрозуміло, що $C_U(P) = \Phi(\Phi(U)) = \langle x^{q^2}\rangle$. Звідси $Q = \langle x^q\rangle$, $\beta < 4$, $C_V(P) = \langle x^{q^\gamma}\rangle$, $\gamma \leqslant \beta$. При $\gamma = \beta$ $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G – група типу 3 розглядуваної леми.

Нехай $\beta > \gamma$. Тоді в недедекіндовій групі G існує підгрупа $P \times \langle x^{q^\gamma} \rangle$. Завдяки теоремі 1.2.3 $\alpha = 2$, $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G – група типу 3 розглядуваної леми.

Нехай U – група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $/x/ = /z/ = q$. Ясно, що $Q \leqslant U$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle x \rangle$. Покладемо $V = P \lambda \langle z \rangle$. Ясно, що P і U – нециклічні елементарні абелеві підгрупи з G. В силу [215] G не є групою Фробеніуса. Тому можна вважати, що $V = P \lambda \langle z \rangle$ не є групою Фробеніуса і $V \lhd G$. Ясно, що $C_U(P) = 1$ і тому V – ненільпотентна група. Оскільки V не є групою Фробеніуса, то існує $u \in P$, $/u/ = p$, $[u,z] = 1$. Тоді $u \in Z(V) \lhd G$ і $Z(V) < P$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 1.2.2.

Нехай U – група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді G містить підгрупу $P \times D$, де D – група типу (q,q). Оскільки P містить підгрупу типу (p,p), то за теоремою 1.2.3 одержимо нільпотентність групи G, що не так і, значить, U не може бути групою типу 5 теореми 1.2.2. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 8 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G – скінченна ненільпотентна група. Покажемо, що G – УЩН[ ]-група. Для груп G кожного з типів 1, 2 це встановлено в теоремі 1.3.4. Група G кожного з типів 3 – 8 має вигляд $G = P \lambda C$, $G' = P$, $/P/ \in \{p^2, p^3\}$, $C' = 1$ і G – група одного з типів 1 – 3 теореми 2.2.1 з [77] і тому G – метагамільтонова група. Звідси завдяки теоремі 2.1.2 G – УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 2.3.2. *Скінченні ненільпотентні метациклічні УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:*

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r – необов'язково різні непарні прості числа, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r – прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $|z| = q$ – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 1.3.2 і може бути нільпотентною групою одного з типів 1 – 16 згаданої теореми. Легко бачити, що G – група лише одного з типів 12 – 16 теореми 1.3.2 і тому G – група одного з типів 1 – 5 леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 1.3.2. Лема доведена.

Л е м а 2.3.3. *Скінченні нільпотентні мінімальні неметациклічні групи G, у яких всі підгрупи Шмідта надрозв'язні, вичерпуються групами типів:*

1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – квазіцентральна підгрупа з G;

3) $G = \langle a\rangle \lambda (\langle x\rangle \lambda \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^q$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$.

***Доведення**. Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді вона задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише нільпотентною групою одного з типів 8 – 10 цієї теореми. Звідси G – група одного з типів 1 – 3 розглядуваної леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 1.3.3. Лема доведена.

Л е м а 2.3.4. *Скінченні нільпотентні УЩН[ ]-групи G, що містять власні нільпотентні мінімальні неметациклічні підгрупи і в G надрозв'язні всі підгрупи Шмідта, вичерпуються ненадрозв'язними групами Фробеніуса типу $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, де $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^q\rangle$ та $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^r\rangle$ – нільпотентні мінімальні неметациклічні групи.*

***Доведення**. Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді G містить власну нільпотентну мінімальну неметациклічну підгрупу C, у якої, як і в G, всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Зрозуміло, що C – задовольняє умову леми 2.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 згаданої леми. Звідси $C = P \lambda Q$, де $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $/a/ = p$, $/b/ \in \{1,p\}$, p – непарне просте число, Q – силовська q-підгрупа з C, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,Q] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,Q] = \langle b\rangle$, $N_C(Q) = Q$. За теоремою 1.3.4 $C \lhd G$. Завдяки

лемі Фраттіні [74] $G = CU = P \lambda U$, де $U = N_G(Q)$, $Q < U$, $Q \not\lhd U$, $U \not\lhd G$ і U – підгрупа одного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2, яка не містить власних неабелевих підгруп. Тому $Q' = 1$. Але тоді C – група лише одного з типів 1, 2 леми 2.3.3 і $Q = \langle y \rangle$, $/y/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $/b/ = p$.

Припустимо, що G – надрозв'язна група. Тоді, без порушення загальності можна вважати, що G містить ненільпотентну підгрупу $V = \langle a \rangle \lambda U$. Зрозуміло, що $G' = P$. Якщо $V \lhd G$, то G/V – абелева група і тому $V \geqslant G'$, що не так. Отже, $V \not\lhd G$. Звідси V – група одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2. Оскільки $(\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle) < V$, то V – лише група типу 6 згаданої теореми. Тому $V = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $/x/ = q^\alpha$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle \geqslant \langle y \rangle$. Нехай $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Тоді $C = G$, що неможливо. Звідси $y \in \langle x^q \rangle$. Ясно, що $Q \not\lhd G$. Із надрозв'язності групи G випливає, що $\langle a \rangle \lhd G$, $\langle b \rangle \lhd G$ і в G існують ненільпотентні ненормальні підгрупи $\langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $\langle b \rangle \lambda \langle x \rangle$, які, очевидно, лише групи типу 6 теореми 1.2.2. Але тоді $[a,x^q] = [a,y] = [b,x^q] = [b,y] = 1$, що неможливо. Отже, G – ненадрозв'язна група.

Оскільки всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то за теоремою 1.2.2 U – метациклічна група. Нехай $S = C_U(P)$. Покажемо, що $/S/ \in \{1,t\}$, t – просте число. Дійсно, в противному випадку за лемою 1.2.5 G містить підгрупу $P \times S$ і P – квазіцентральна підгрупа з G. Звідси G – надрозв'язна група, що не так. Отже, $/S/ \in \{1,t\}$. Оскільки в підгрупі U типу 5 теореми 1.2.2 U містить нормальну в G неодиничну підгрупу непростого порядку і ця підгрупа належить S, то U – група одного з типів 1 – 4, 6 теореми 1.2.2.

Нехай U – підгрупа типу 6 теореми 1.2.2. Тоді $U = R \lambda \langle x \rangle$, $R \times \langle x^q \rangle \lhd G$. Звідси, за попереднім $/R \times \langle x^q \rangle/ = t$ і, значить, $/R/ = t = r$, $/x/ = q$. Отже, $G = (P \times R) \lambda \langle x \rangle$. За умовою $P \lambda \langle x \rangle$ містить

тільки надрозв'язні групи Шмідта. Тому, без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle b\rangle$ і G – надрозв'язна група, що суперечить вибору G. Отже, U – група одного з типів 1 – 4 теореми 1.2.2.

Нехай U – підгрупа типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x\rangle \times \langle z\rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ = r$ і $\langle x^q\rangle \times \langle z\rangle \lhd G$. За попереднім, $/x^q/ = 1$ і $G = (P \lambda \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$ – надрозв'язна група, що суперечить вибору G. Отже, U не може бути групою типу 4 теореми 1.2.2.

Легко бачити, що G – надрозв'язна група, якщо U – група типу 3 теореми 1.2.2.

Нехай U – підгрупа типу 2 теореми 1.2.2. Якщо U – примарна група і U не є групою типу 1 теореми 1.2.2, то $/y/ = /z/ = q$. В силу [215] без порушення загальності можна вважати, що $[P,\langle z\rangle] \neq P$. Звідси $P \lambda \langle z\rangle$ має неодиничний центр, що належить P. Можна вважати, що $[a,z] = 1$. Але тоді $\langle a\rangle \lhd G$ і $G/\langle a\rangle$ – надрозв'язна група. Звідси і G – надрозв'язна група, що не так. Нехай тепер U – неабелева група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle y\rangle \lambda \langle z\rangle$, $/y/ = q$, $/z/ = r$, $[\langle y\rangle,\langle z\rangle] = \langle y\rangle$. Покладемо $V = P \lambda \langle z\rangle$. Зрозуміло, що $V \not\lhd G$, $\langle z\rangle \not\lhd U$, $C_U(P) = 1$. Оскільки G – дисперсивна група (теорема 1.2.3), то V – непримарна група і тому $p \neq r$. Звідси V – ненільпотентна група. Оскільки $/P/ = p^2$ і $V \not\lhd G$, то V – підгрупа типу 6 теореми 1.2.2. Але тоді V – ненадрозв'язна група Шмідта, що неможливо за умовою леми. Таким чином, $U' = 1$, тобто $U = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, $/y/ = q$, $/z/ = r$, q і r – різні прості числа.

Нехай $V = P \lambda \langle z\rangle$ – примарна група, тобто $p = r$. Якщо $V' \neq 1$, то $V' = \langle c\rangle \leqslant P$, $/c/ = p$, $\langle c\rangle \lhd G$ і $G/\langle c\rangle$ – надрозв'язна група. Звідси і G – надрозв'язна група, що неможливо. Отже, $V' = 1$. Але тоді $G = (P \lambda \langle y\rangle) \times \langle z\rangle$ – надрозв'язна група, що не так. Звідси p

$\neq r$ і $V' \neq 1$. Оскільки підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то $P \lambda \langle z \rangle$ – надрозв'язна група.

Нехай V не є групою Фробеніуса. Тоді [215] $c \in P$, $/c/ = p$, $[c,z] = 1$ і $\langle c \rangle = Z(V)$. Звідси $\langle c \rangle \lhd G$ і $G/\langle c \rangle$ – надрозв'язна група. Тому і G – надрозв'язна група, що не так. Отже, V – група Фробеніуса. Зрозуміло, що $U = \langle x \rangle$, $/x/ = qr$ і тому $C = P \lambda \langle x^r \rangle$, $P \lambda \langle x^q \rangle = P \lambda \langle z \rangle = V$ – ненільпотентна група Фробеніуса, у якої всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тому V – група типу 1 леми 1.3.3 і G – група з розглядуваної леми.

Нехай U – примарна циклічна підгрупа типу 2 теореми 1.2.2 або підгрупа типу 1 цієї теореми. Тоді $U = \langle x \rangle$, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $x^{q^2} \in Z(G)$, $y \in \langle x \rangle$. Якщо $\langle y \rangle = \langle x \rangle$, то C = G, що не так. Отже, $y \in \langle x^q \rangle$ і тому $\beta > 1$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $/[\langle a \rangle;(\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle)]/ > 2$. За означенням УЩН[ ]-груп $[\langle a \rangle;(\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle)]$ э $N \lhd G$ і $N \cap P = \langle a \rangle \lhd G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ – надрозв'язна група і тому G – надрозв'язна група, що не так. Отже, $\beta = 2$ і G – група з леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ – група з розглядуваної леми. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$ – ненадрозв'язна група, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – силовська p-підгрупа з G. Звідси P – мінімальна нормальна підгрупа з G. Оскільки $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$ і силовські підгрупи з G абелеві, то всяка підгрупа Шмідта з G надрозв'язна. Покажемо, що G – УЩН[ ]-група, тобто для $/[A;B]/ > 2$ $[A;B]$ э $N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо A = N чи B = N і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \neq 1$, $G' \not< B$. Оскільки /G/ є добутком чотирьох простих чисел, то /B/ є добутком трьох простих чисел. Звідси $/B/ = pqr$. Отже, $G = PB$, $P \cap B = P_1 \lhd G$, $/P_1/ = p$, що суперечить

мінімальності P в G. Отже, G – УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2.3.5. *Нехай G — скінченна нільпотентна УЩН[ ]-група, у якої всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тоді всі силовські підгрупи з G метациклічні.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що G містить мінімальну неметациклічну p-підгрупу C. Тоді C — підгрупа одного з типів 1—5 теореми 1.3.3. Завдяки теоремі 1.3.4 $C \lhd G$ і G/C — дедекіндова група. Звідси $G = P \lambda D$, P — силовська p-підгрупа з G, D — її холлівське дедекіндове p′-доповнення. Оскільки G — нільпотентна група, то $D \lhd G$. Звідси D містить q-елемент x такий, що $[P,\langle x\rangle] \neq 1$, $p \neq q$ — просте число і $[P,\langle x^q\rangle] = 1$. Покладемо $V = P \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що V — нільпотентна група і V містить підгрупу Шмідта $S = R \lambda \langle d\rangle$, де $R = P \cap S$, $\langle d\rangle$ — ненормальна силовська q-підгрупа з S. Оскільки S — надрозв'язна група Шмідта, то $/R/ = p$ і $p \equiv 1 \pmod q$. Ясно, що $\langle d\rangle$ належить деякій силовській q-підгрупі з V, яка спряжена з $\langle x\rangle$ і $x^q \in Z(V)$. Звідси $\langle d\rangle$ — силовська q-підгрупа з V. Тому в подальшому без порушення загальності можна вважати, що $x = d$. Зрозуміло, що C — група одного з типів 1, 2 теореми 1.3.3. Оскільки G/C — дедекіндова група, то $R \leqslant C$.

Нехай спочатку C — група типу 1 теореми 1.3.3 і $C' = 1$. Ясно, що $p > 2$. За теоремою Машке ([74, теорема 20.2.2]), $C = R \times Y$, де $[Y,\langle x\rangle] \leqslant Y$, Y — група типу (p,p). Покажемо, що $Y = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, де $[\langle y\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle y\rangle$, $[\langle z\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle z\rangle$. Якщо $[Y,\langle x\rangle] = 1$, то доводжуване твердження очевидне. Нехай $[Y,\langle x\rangle] \neq 1$. Тоді, як і раніше, в $Y \lambda \langle x\rangle$ існує підгрупа Шмідта $S_1 = R_1 \lambda \langle x\rangle$, $/R_1/ = p$, $Y = R_1 \times R_2$, $[R_2,\langle x\rangle] \leqslant R_2$, $/R_2/ = p$. Покладемо $R_1 = \langle y\rangle$, $R_2 =$

$\langle z\rangle$ і будемо мати доводжуване твердження. Тепер ясно, що в G існують підгрупи $(R \times \langle y\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $(R \times \langle z\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $Y \lambda \langle x\rangle$, які не можуть бути підгрупами жодного з типів 1—6 теореми 1.2.2 і тому вони нормальні в G. Зрозуміло, що перетин згаданих підгруп співпадає з $\langle x\rangle$ і тому $\langle x\rangle \lhd G$, що не так. Отже, $C' \neq 1$.Тоді $C = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $/c/ = /a/ = /b/ = p$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$. Зрозуміло, що $C' = \langle c\rangle \lhd G$. Покажемо, що C містить підгрупу $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, де $/y/ = p$, $[\langle y\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle y\rangle$. Дійсно, оскільки $\langle c\rangle \lhd G$ і $C \lhd G$, то в $G/\langle c\rangle$ існує підгрупа $C/\langle c\rangle \lambda \langle x\langle c\rangle\rangle$. Якщо згадана підгрупа нільпотентна, то існує підгрупа $Y/\langle c\rangle$ така, що $[Y/\langle c\rangle,\langle x\langle c\rangle\rangle] \leqslant Y/\langle c\rangle$ і $/Y/\langle c\rangle/ = p$. Звідси $/Y/ = p^2$, $[Y,\langle x\rangle] \leqslant Y$. За теоремою Машке [74] $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, де $[\langle y\rangle, \langle x\rangle] \leqslant \langle y\rangle$. Нехай $C/\langle c\rangle \lambda \langle x\langle c\rangle\rangle$ — ненільпотентна група. Тоді, як і раніше, вона містить підгрупу Шмідта $Y/\langle c\rangle \lambda \langle x\langle c\rangle\rangle$ і $/Y/\langle c\rangle/ = p$. Звідси $/Y/ = p^2$, $[Y,\langle x\rangle] \leqslant Y$. Знову за теоремою Машке [74] $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, $[\langle y\rangle,\langle x\rangle] \leqslant \langle y\rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $y = a$. В G існує підгрупа $V_1 = Y \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що V не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2 і тому $V_1 \lhd G$. За теоремою Машке [74] $C/\langle c\rangle = Y/\langle c\rangle \times Z/\langle c\rangle$, $[Z/\langle c\rangle, \langle x\langle c\rangle\rangle] \leqslant Z/\langle c\rangle$. Як і раніше, $[Z,\langle x\rangle] \leqslant Z$, $Z = \langle c\rangle \times \langle b\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] \leqslant \langle b\rangle$. В G існує підгрупа $V_2 = Z \lambda \langle x\rangle$. Як і для V_1, можна показати, що $V_2 \lhd G$. Ясно, що $V_1 \cap V_2 = V_3 = \langle c\rangle \lambda \langle x\rangle \lhd G$. Покладемо $N = C \lambda \langle x\rangle$. Оскільки $S \leqslant N$, то N — ненільпотентна група. За лемою Фраттіні ([74, лема 17.1.8]), $N = V_3U$, де $U = \langle x\rangle \times C_1 = N_N(\langle x\rangle)$, $C_1 = C \cap U$, $C_1 < C$. Звідси $\langle c\rangle \cap C_1 = 1$, $C = \langle c\rangle \times C_1$, що неможливо. Отже, C — не може бути групою типу 1 теореми 1.3.3.

Нехай C — група типу 2 теореми 1.3.3. Тоді C = A<u>, де A = <a> × <b>, /a/ = /u/ = 9, /b/ = 3, [a,u] = b, [b,u] = $a^3 = u^6$, w(C) = <b> × $<a^3>$ = C′ ◁ G, $<a^3>$ = Z(C) ◁ G. Завдяки теоремі Машке [74] можна вважати, що [<b>,<x>] ⩽ <b>. Ясно, що A — єдина абелева максимальна підгрупа з C. Звідси A ◁ G. За теоремою Машке [74] без порушення загальності можна вважати, що [<a>,<x>] ⩽ <a>.

Припустимо, що [a,x] ≠ 1.Тоді G містить ненільпотентну підгрупу N_1 = <a> λ <x>. За теоремою 1.2.2 N_1 ◁ G. Звідси C ∩ N_1 = <a> ◁ C, що неможливо. Отже, [a,x] = 1. Не порушуючи загальності можна вважати, що R = <b>. Покладемо a^3 = c і N = C λ <x>. Тоді <c> ◁ N, N — ненільпотентна група, Φ(C) = w(C) ⩽ A, A/Φ(C) ◁ N/Φ(C). За теоремою Машке [74] C/Φ(C) = A/Φ(C) × Y/Φ(C), де /Y/Φ(C)/ = 3, [Y/Φ(C),<xΦ(C)>] ⩽ Y/Φ(C). Звідси [Y,<x>] ⩽ Y. В N існує підгрупа N_1 = Y λ <x>. Ясно, що [C:Y] = 3 і всі підгрупи з C метациклічні, /Y/ = 27, Φ(C) = <b> × <c> ⩽ Y, c ∈ $Z(N_1)$, Y/<c> — абелева група. Звідси Y′ ⩽ <c>. В підгрупі C всі максимальні підгрупи, окрім A, неабелеві. Тому Y = <y> λ <b>, /y/ = 9, y^3 = c. За теоремою Машке [74] Y/<c> = <b<c>> × Z/<c>, де [Z/<c>,<x<c>>] ⩽ Z/<c>. Звідси Y = Z λ <b>, [Z,<x>] ⩽ Z. Оскільки Y — метациклічна група, то Z = <z>, /z/ = 9, z^3 = c. Оскільки [c,x] = 1, то за відомим результатом [74] [z,x] = 1. Очевидно, що C = A<z>. Знову в силу відомого результату [74] [a,x] = [z,x] = 1. Звідси випливає, що [C,<x>] = 1, що не так. Отже, G не може містити примарних мінімальних неметациклічних підгруп і тому всі силовські підгрупи з G метациклічні. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.3.1. *Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[ ]-групи G є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами типів:*

I. Метагамільтонові групи:

i) метациклічні:

1) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число,* $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1,r\}$, q *і* r — *прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $b^{q^{\alpha}} \in Z(G)$; *при* $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$; *при* $|z| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число,* $|b| = qr$, q *і* r — *різні прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, $p \not\equiv 1 \pmod r$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) мінімальні неметациклічні ненадрозв'язні групи Шмідта:

3) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — *група Шмідта,* P — *група кватерніонів порядку 8,* $|x| \in \{3,9\}$;

4) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — *нільпотентна група Міллера—Морено,* P — *група типу* (p,p), $|x| \in \{q,q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$, 2 — *показник* p *за модулем* q, p *і* q — *різні прості числа;*

iii) групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

5) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P — *елементарна абелева група порядку* p^{α}, $\alpha \in \{2,3\}$, $|x| = qr$, p, q, r — *попарно різні прості числа,* α — *показник* p *за модулем* q, — *показник* p *за модулем* r, $P \lambda \langle x^q\rangle$ *та* $P \lambda \langle x^r\rangle$ — *групи Міллера—Морено;*

6) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P — *елементарна абелева група порядку* p^{α}, $\in \{2,3\}$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, α — *показник* p *за модулем* q, p *і* q — *різні прості числа,* $P \lambda \langle x^q\rangle$ — *група Міллера—Морено,* $\alpha + \beta < 6$;

7) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — *група Шмідта,* $|P| = p^3$, $exp(P) = p$, $|x| = q$, p *і* q — *різні прості числа;*

8) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = p$, $|x| = q$, $|z| = r$, p, q, r — *прості числа,* $p \neq q$, $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ — *група Міллера—Морено,* 2 — *показник* p *за модулем* q, $p \neq 3$, $q > 2$;

II. Неметагамільтонові групи:

i) метациклічні:

9) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = pr$, *p і r — необов'язково різні прості числа,* $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, *q — просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\langle x \rangle$, $/a/ = p$ *— непарне просте число,* $\langle z,x \rangle$ *— група кватерніонів порядку 8,* $x^{-1}ax = a^{-1}$;

11) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ *— непарне просте число,* $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $/z/ = q$ *— просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x,z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$;

ii) надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи:

12) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ *— непарне просте число,* $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ *— непарне просте число,* $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ *— квазіцентральна підгрупа з G;*

14) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ *— непарне просте число,* $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ *— непарне просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x,z] = x^q$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$.

iii) групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, *p — просте число,* $p \neq 3$, $/x/ = q$ *— просте число, 2 — показник p за модулем q,* $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \lambda \langle x \rangle$ *— нільпотентна група Міллера—Морено;*

16) $G = (R \times P) \lambda \langle x \rangle$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, *p, q і r — попарно різні прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, *2 — показник p за модулем q,* $q > 2$, $R \lambda \langle x \rangle$ *і* $P \lambda \langle x \rangle$ *— нільпотентні групи Міллера—Морено;*

17) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ — ненадрозв'язна група Фробеніуса, $|a| = |b| = p$ — непарне просте число, $|x| = qr$, q і r — не обов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^q\rangle$ та $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^r\rangle$ — мінімальні неметациклічні групи.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Якщо G — метациклічна група, то вона задовольняє умову леми 2.3.2 і є групою одного з типів 1—5 згаданої леми, а тому G — група одного з типів 9, 1, 2, 10, 11 розглядуваної теореми. Тому в подальшому будемо вважати, що G — неметациклічна група. Оскільки G — нільпотентна група, то вона містить підгрупи Шмідта. Можливі випадки: 1) G містить ненадрозв'язну підгрупу Шмідта; 2) всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1—8 згаданої леми. Тоді G — група одного з типів 15, 16, 3—8 розглядуваної теореми відповідно.

Випадок 2. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G задовольняє умову леми 2.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1—3 згаданої леми. Тому G — група одного з типів 12—14 розглядуваної теореми.

Нехай G містить власні неметациклічні підгрупи. За лемою 2.3.5 мінімальні неметациклічні підгрупи з G не можуть бути нільпотентними групами. Звідси G задовольняє умову леми 2.3.4. і тому G — група типу 17 розглядуваної леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1—17 теореми. Зрозуміло, що G — нільпотентна локально ступінчаста і навіть

скінченна дисперсивна група. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Дійсно, для метациклічних груп це встановлено в лемі 2.3.2, для груп G, що мають ненадрозв'язні групи Шмідта, — в лемі 2.3.1, для груп G типів 12—14 — в лемі 2.3.3, а для груп G типу 17 — в лемі 2.3.4. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2.3.1. *Комутант G' нільпотентної локально ступінчастої УЩН[ ]-групи G не більше ніж біпримарна група, а його порядок є добутком не більше ніж чотирьох простих чисел.*

Комутант G' групи G може бути неабелевою групою, коли він співпадає з підгрупою кватерніонів порядку 8 чи неабелевою підгрупою порядку p^3 і експоненти p; при цьому G — метагамільтонова група.

Доведення безпосередньо випливає з розглядуваних типів груп теореми 2.3.1.

Висновки до розділу II

Підрозділ 2.1 присвячений опису локально ступінчастих недедекіндових метагамільтонових УЩН[ ]-груп. Зауважимо, що цей опис суттєво використовується в подальшому, зокрема, в підрозділах 2.2 і 2.3. У теоремі 2.1.1 описані недедекіндові УЩН[ ]-групи з комутантом простого порядку з виділенням 7 типів груп такого роду. Теорема 2.1.2 описує всі недедекіндові метагамільтонові УЩН[ ]-групи. Одержано 18 типів таких груп. Наслідок 2.1.3 описує локально ступінчасті неметагамільтонові УЩН[ ]-групи, що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп. Доведено, що існує 3 типи груп такого роду.

Підрозділ 2.2 присвячений опису нільпотентних УЩН[ ]-груп. Доведено, що існує 28 типів таких недедекіндових груп.

У підрозділі 2.3 описані ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[ ]-групи (теорема 2.3.1). Одержано 17 типів груп такого роду.

Всі результати цього розділу нові і є значним узагальненням класу дедекіндових груп і класів груп із робіт [159 – 163].

РОЗДІЛ III

БУДОВА УЩН( )-ГРУП ТА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН( )- І УЩН[ )-ГРУП

У даному розділі вивчаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які становлять значні і самостійні підкласи груп класу УЩН[ ]-груп. Серед них класи: УЩН( )-, УЩН( ]-, УЩН[ )-груп.

3.1. Будова УЩН( )-груп

Л е м а 3.1.1. *Нехай G – довільна УЩН( ]-група. Тоді справедливі наступні твердження:*

1) для будь-якого неодиничного елемента g групи G справедливо $\langle g\rangle \geqslant N \lhd G$, $[\langle g\rangle : N]$ *– просте число;*

2) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2, *p – довільне просте число.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група і g – її довільний неодиничний елемент. Якщо /g/ – просте число, то $\Phi(\langle g\rangle) = N = 1 \lhd G$. Нехай /g/ – добуток не менше ніж двох простих чисел. Якщо $\langle g\rangle \lhd G$, то будь-яка максимальна підгрупа N з $\langle g\rangle$ характеристична в $\langle g\rangle$ і тому $N \lhd G$, $[\langle g\rangle : N]$ – просте число. Нехай $\langle g\rangle \not\lhd G$. Зрозуміло, що $\langle g\rangle$ містить підгрупу A таку,

що [<g>:A] = pq, де p і q – не обов'язково різні прості числа. За означенням УЩН( )-груп (A;<g>] э N ◁ G. Оскільки <g> ⋪ G і A < N, то [<g>:N] – просте число. Твердження 1 леми доведене повністю.

Нехай P – мінімальна нормальна підгрупа з G порядку p^{α}, $\alpha > 2$. Тоді в силу твердження 1 леми P – елементарна абелева група, P > B, /B/ = p^2. Зрозуміло, що /[1;B]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп (1;B] э N ◁ G і, значить, /N/ ∈ {p, p^2}, що суперечить мінімальності P в G. Твердження 2 доведене. Лема доведена.

Л е м а 3.1.2. *Нехай G – довільна УЩН( )-група. Тоді справедливі наступні твердження:*

1) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2 , p – довільне просте число;

2) якщо G = P ⋋ <x> – скінченна група Шмідта, P – силовська p-підгрупа з G, <x> ⋪ G, <x> – силовська q-підгрупа з G, p і q – різні прості числа, то <x> – максимальна підгрупа з G, P – елементарна абелева група порядку p чи p^2 ;

3) G не містить p-підгрупи виду Z<x>, де Z – група типу (p,p), Z ⩽ G′, [<x>,G] = G′, Z ∩ <x> = 1.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Припустимо, що G містить елементарну абелеву мінімальну нормальну підгрупу P і /P/ > p^2. Тоді P містить A і [P:A] = p^2. Зрозуміло, що /[A;P]/ > 2 і /A/ > 1. За означенням УЩН[ )-груп [A;P) э N ◁ G. Звідси P > N і N ≠ 1, що суперечить мінімальності P в G. Твердження 1 доведено.

Нехай G = P ⋋ <x> – скінченна група Шмідта. За властивістю груп Шмідта (див., наприклад, [78, теорема 2.1.1]) G містить підгрупу M = Φ(P) × <x>, яка максимальна в G і [P,<x>] = P.

Нехай $\langle x\rangle$ – немаксимальна підгрупа з G. Тоді $/[\langle x\rangle;G]/ > 2$. За означенням УЩН( )-груп $[\langle x\rangle;G) \ni N \lhd G$, $N < G$ і $G = PN$, $P \not\leq N$, $[P,\langle x\rangle] \leqslant [P,N] < P \cap N < P$, що неможливо. Отже, $\langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з G і тому $\Phi(P) = 1$. За твердженням 1 леми $/P/ \in \{p, p^2\}$. Твердження 2 леми доведене.

Нехай G містить підгрупу $B = Z\langle x\rangle$ з умовами твердження 3 леми. Тоді $/[\langle x\rangle;B]/ > 2$. За означенням УЩН( )-груп $[\langle x\rangle;B) \ni N \lhd G$ і $N < B$. Звідси $Z \not\leq N$. За умовою твердження 3 леми $[\langle x\rangle,G] = G' \leqslant [N, G] = G' \leqslant N$, що суперечить співвідношенням $Z \leqslant G'$ і $Z \not\leq N$. Твердження 3 леми доведено. Лема доведена.

Наслідок 3.1.1. *Всі УЩН( )-групи G є нільпотентними або скінченними надрозв'язними групами, для яких справедливі твердження:*

1) для будь-якого p-елемента g з G справедливо $\langle g^p\rangle \lhd G$, *p – довільне просте число;*

2) мінімальна нормальна підгрупа групи G має порядком просте число.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 1.3.5 G – локально надрозв'язна, а тому локально ступінчаста група, яка за лемою 1.2.2 є УЩН[ ]-групою.

Якщо G – нільпотентна група, то її мінімальні нормальні підгрупи мають простий порядок [65].

Нехай G – ненільпотентна група. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми, і тому G – скінченна надрозв'язна група. Відомо [65], що мінімальні нормальні підгрупи з G мають простий порядок. Твердження 2 наслідку доведене.

Завдяки лемі 1.2.2 УЩН( )-група є УЩН( ]-групою і тому твердження 1 наслідку випливає з твердження 1 леми 3.1.1. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 3.1.1. *Нільпотентні недедекіндові УЩН( )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) $G = (\langle u\rangle \lambda \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $/z/ \in \{1,r\}$, p і r – прості числа, $[u,v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z\rangle$, C – локально циклічна 2-група, $/C/ > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число;

3) $G = ((C \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[u,v] = c \in C$, $/c/ = p$, $/u/ \in \{p,p^2\}$, $/v/ \in \{p,p^2\}$, $[C,\langle v\rangle] = 1$, $/z/ \in \{1,r\}$, p і r – прості числа, $/C'/\cdot/u/\cdot/v/ \neq 32$; при $/z/ = r$ $/u/\cdot/v/ = p^2$;

4) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ \in \{4,8\}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число;

5) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число;

6) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^{\beta}$, $\beta > 1$, $/x/ = p$ – просте число, $p\beta > 4$, $[a,b] = a^{\rho}$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b,x] = 1$;

7) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

8) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число;

9) $G = U \lambda X$, U – циклічна 2-група чи група кватерніонів порядку 8, $/U/ > 2$, X – група кватерніонів порядку 8, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$;

10) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = 8$, $/x/ = 4$, $/b/ = 2$, $[a,b] = x^2 = a^4$, $[a,x] = b$, $[b,x] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. За лемою 1.2.2 УЩН( )-група G є УЩН[ ]-групою, яка задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Якщо G – група одного з типів: 1 – 3; 10, /b/ $\in \{2,4\}$, z $\in$ Z(G); 11, z $\in \in$ Z(G); 15; 17; 18; 26, [U,X] = Φ(U), $/C_X(U)/ = 4$; 27 згаданої теореми, то G – група одного з типів 1 – 10 розглядуваної теореми відповідно.

В групі G кожного з типів 4 та 5 теореми 2.2.3 G′ = w(Z(G)), /G′/ = p, G містить підгрупу B = $\langle v\rangle \times \langle a\rangle$, /v/ = /a/ = p, B ∩ G′ = 1. Зрозуміло, що /[1;B]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп (1;B) э N ◁ G. Звідси /N/ = p, N ⩽ Z(G) і N ⩽ w(Z(G)), що неможливо. Отже, група G не може бути групою типу 4 чи 5 теореми 2.2.3.

Припустимо, що G – група одного з типів 6 – 8 згаданої теореми. Тоді G′ = =$\langle u\rangle$, $/u/ = p^2$, G\Φ(G) містить елемент d, [$\langle d\rangle$, G] = G′ і G містить підгрупу B = $\langle u\rangle \lambda \langle d\rangle$. Ясно, що /[$\langle d\rangle$;B]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп ($\langle d\rangle$;B) э N ◁ G, а тому N = w($\langle u\rangle$) $\lambda \langle d\rangle$ і, значить, N не містить $\langle u\rangle$ = G′. Але [$\langle d\rangle$,G] = [N,G] = G′ ⩽ N, що неможливо. Отже, група G не може бути групою жодного з типів 6 – 8 згаданої теореми.

Нехай G – група типу 10 тієї теореми. Покажемо, що G – група типу 4 розглядуваної теореми. Дійсно, G = ($\langle a\rangle\langle b\rangle$) $\lambda \langle z\rangle$, /a/ = 8, $/b/ = 2^\beta$, β > 1, $b^{-1}ab = a^{-1}$, /$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$/ = 2. Покажемо, що β < 4. Нехай це не так, тобто β ⩾ 4. Тоді $\langle a\rangle\langle b\rangle$ = U = $\langle b\rangle\langle d\rangle$, $d = ab^{2^{\beta-3}}$, /d/ = 4, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle$ = 1. В силу наслідку 3.1.1 $\langle d^2\rangle \lhd$ G, а

тому $d^2 \in Z(G)$. З іншого боку, $d^2 = a^2b^{2^{\beta-2}}$, $a^2 \notin ZG)$, $b^{2^{\beta-2}} \in ZG)$. Суперечність. Отже, $\beta < 4$. Покажемо далі, що $z \in Z(G)$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $/z/ = r$. Оскільки G – нільпотентна група і U – 2-група, то $r = 2$. При $\beta = 2$ для груп G розглядуваного типу $z \in Z(G)$ і тому будемо вважати, що $\beta = 3$. Покладемо $d = a^2b^2$. Тоді $/d/ = 2$, $d \notin Z(G)$. Для груп G розглядуваних типів $[a^2,z] = [b,z] = 1$. Звідси $[d,z] = 1$ і тому G містить $B = \langle d \rangle \times \langle z \rangle$. Ясно, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(1;B) \ni N \lhd G$, $/N/ = 2$ і $N \leqslant Z(G)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $N = \langle z \rangle$, що й треба було довести.

Нехай G – група типу 11 теореми 2.2.3. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Нехай це не так. Тоді $/z/ = 3$, G містить підгрупу $B = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $b \notin Z(G)$. Ясно, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(1;B) \ni N \lhd G$, $/N/ = 3$, $N \leqslant Z(G)$. Отже, можна вважати, що $N = \langle z \rangle$ і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді G – неметациклічна p-група порядку p^4, p – непарне просте число, G' – нецентральна підгрупа з G типу (p,p). Легко бачити, що G не містить підгрупу порядку p^3 і експоненти p. З цього випливає, що G – мінімальна неметациклічна група, яка при $p > 2$ може бути лише групою типу 2 теореми 1.3.3. Звідси G – група типу 5 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 13, 14, 16, 19 – 21 є підгрупа $Z\langle x \rangle$, $Z = G'$, $x \in G \setminus \Phi(G)$, яка задовольняє умову твердження 3 леми 3.1.2 і за яким G не може бути УЩН( )-групою.

Нехай G – група одного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$ містить підгрупу $B = \langle a^2 \rangle\langle b \rangle$, $G' = \langle a^2 \rangle$, $/[\langle b \rangle;B]/ > 2$, $[\langle b \rangle,G] = G'$. За означенням УЩН( )-груп $(\langle b \rangle;B) \ni N \lhd G$ і

$N = \langle a^4\rangle\langle b\rangle$. Але $[\langle b\rangle,G] \leqslant [N,G] \leqslant \langle a^4\rangle$, що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3.

Нехай G – група типу 25 теореми 2.2.3. Тоді G містить підгрупу $B = \langle a\rangle \lambda \langle x\rangle$, $/[\langle x\rangle;B]/ > 2$, $[\langle x\rangle,G] = \langle a\rangle$. За означенням УЩН( )-груп $(\langle x\rangle;B) \ni N \lhd G$ і $N \leqslant \langle a^2\rangle \lambda \langle x\rangle$. Але $[N,G] = [\langle x\rangle,G] = \langle a\rangle \leqslant N$, що неможливо. Отже, G не може бути групою типу 25.

Нехай G – група типу 9 теореми 2.2.3. Тоді $/[\Phi(X);X]/ > 2$. За означенням УЩН( )-груп $(\Phi(X);X) \ni N \lhd G$. Ясно, що $/N/ = 4$, $[U,N] = 1$, $N \leqslant C_X(U)$, G містить підгрупу $B = \langle u\rangle \lambda X$, де $/u/ = 4$, $\Phi(\langle u\rangle) = \Phi(U)$. Оскільки $/[X;B]/ > 2$, то за означенням УЩН( )-груп $(X;B) \ni N_1 \lhd G$. Зрозуміло, що $N_1 = \langle u^2\rangle \lambda X$. Тоді $[X,U] \leqslant N_1 \cap U = \langle u^2\rangle = w(U)$. Ясно, що $G = V \times \langle z\rangle$, де $V = U \lambda X$ і V – недедекіндова група. Нехай $/z/ = r$ і $B = X \times \langle z\rangle$. Для будь-якого елемента d з $X\backslash\Phi(X)$ маємо $/[\langle d\rangle;B]/ > 2$. За означенням УЩН( )-груп $(\langle d\rangle;B) \ni N_2 \lhd G$, тому $[U,\langle d\rangle] \leqslant U \cap N_2 = 1$ і, значить, $[U,X] = 1$. Звідси $G = U \times X \times \langle z\rangle$ і при циклічності U G – група типу 2 розглядуваної теореми. Припустимо, що U – нециклічна група. Тоді U – група кватерніонів порядку 8. Нехай $U = \langle a,b\rangle$, $X = \langle x,y\rangle$, $Q = \langle ax,by\rangle$. Ясно, що Q – група кватерніонів порядку 8, Q міститься в V і $U \cap Q = 1$. Розглянемо підгрупу $B_1 = Q \times \langle z\rangle$. Як і для підгрупи B, покажемо, що $[U,Q] = 1$. Але $[ax,b] \neq 1$, що неможливо. Отже, U – не є групою кватерніонів і в подальшому $z = 1$.

Якщо $[U,X] = 1$, то при циклічності U G – група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай U – нециклічна група, тобто U – група кватерніонів порядку 8. Тоді $G = U \times X$, і як раніше, G містить підгрупу $Q = \langle ax,by\rangle$, $/[\Phi(Q);Q]/ > 2$. За означенням

УЩН( )-груп (Φ(Q);Q) э $N_3 \lhd G$. Зрозуміло, що $/N_3/ = 4$, $G = U \lambda Q$, $[U,Q] = \Phi(U)$, $/C_Q(U)/ = 4$. Позначивши Q на X, одержимо, що G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Якщо $[U,X] \neq 1$, то $[U,X] = \Phi(U)$ і G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 26 теореми 2.2.3. Якщо U – циклічна група і $[U,X] = 1$, то G – група типу 2 розглядуваної теореми. Якщо $[U, X] \neq 1$, то $[U,X] = \Phi(U)$ і G – група типу 9 розглядуваної теореми. Якщо тепер U – група кватерніонів, то, як і раніше, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$ і знову G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо $A = \langle x \rangle$, $B = \langle x \rangle\langle a^2 \rangle\langle b^2 \rangle = \langle x \rangle G'$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп (A;B) э $N \lhd G$. Але $[\langle x \rangle, G] = G'$, що суперечить умові $N \not> G'$. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Для доведення достатності теореми установимо спочатку справедливість наступної леми.

Л е м а 3.1.3. *Нехай G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1. Тоді $G = P \times R$ – періодична недедекіндова нільпотентна не більше ніж біпримарна скінченна над центром група з комутантом порядку p чи p^2 (p – просте число), P – силовська p-підгрупа з G, $/R/ \in \{1,r\}$, r – просте число, $R \leqslant Z(G)$ і справедливі наступні твердження:*

1) група G тоді і тільки тоді є нескінченною групою, коли G – група типу 2 чи 3, у якої C – центральна в G квазіциклічна 2-група;

2) $G' = P'$ тоді і тільки тоді не належить $Z(G)$, коли $p \in \{2,3\}$: G – група типу 4, G' – група типу (4); G – група типу 5, G' – група типу (3,3); G – група типу 10, G' – група типу (2,2). Тільки в групі G типу 4 комутант G' є неелементарною абелевою групою;

3) будь-яка циклічна підгрупа $\langle g\rangle$ з G має вигляд $\langle g\rangle = \langle f\rangle \times \langle h\rangle$, $\langle g\rangle \cap P = \langle f\rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $\Delta \geq 0$, $\langle g\rangle \cap R = \langle h\rangle$, $/h/ \in \{1,r\}$, $\langle g^{\rho}\rangle = \langle f^{\rho}\rangle \times \langle h\rangle \lhd G$. Співвідношення $g^{\rho} \notin Z(G)$ може виконуватися лише коли $/g/$ ділиться на 8, $exp(P) = 8$ і G – група одного з типів 4 та 10;

4) будь-яка максимальна цілком факторизована підгрупа M з G містить $w(Z(G))$ і її порядок є добутком двох чи трьох простих чисел, $M' = 1$ і $[M:w(Z(G))] \in \{1,p\}$;

5) будь-яка підгрупа B з G, для якої $G' \cap B = 1$, має вигляд $B = F \times H$, де F – локально циклічна p-група, $/H/ \in \{1,r\}$ і для всякої власної немаксимальної підгрупи A з B знайдеться власна нормальна в G підгрупа N така, що $A < N < B$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $G = P \times R$ і очевидні загальне твердження і твердження 1 леми, $G' = P'$. В групі G кожного з типів 1 – 3 та 6 – 9 G' – центральна в G елементарна абелева p-група. В групі G типу 4 G' – нецентральна підгрупа типу (4). В групі G типу 5 G' – нецентральна підгрупа типу (3,3). В групі G типу 10 G' – нецентральна підгрупа типу (2,2). З цього випливає, що лише в групі G типу 4 G' – неелементарна абелева група. Твердження 2 леми доведене.

Нехай g – елемент з G. Тоді $\langle g\rangle = \langle f\rangle \times \langle h\rangle$, де $\langle f\rangle = P \cap \langle g\rangle$, $\langle h\rangle = R \cap \langle g\rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $\Delta \geq 0$, $/h/ \in \{1,r\}$, $h \in Z(G)$. Можна вважати, що $g = fh$ і тоді $\langle g^{\rho}\rangle = \langle f^{\rho}\rangle \times \langle h\rangle$. Якщо $f^{\rho} \in$

$Z(G)$, то $g^p \in Z(G)$ і тому $\langle g^p \rangle \lhd G$. Нехай $f^p \notin Z(G)$. Тоді $\Delta > 1$. За твердженням 2 леми та відомими комутаторними співвідношеннями [64] в групі G кожного з типів 1 – 3 і 6 – 9 $f^p \in Z(G)$. В групі G типу 5 $p = 3$, $\exp(P) = 9$ і будь-яка циклічна підгрупа порядку 9 містить центральний в G елемент порядку 3 і, значить, $\Delta = 2$, $w(\langle f \rangle) = \langle f^3 \rangle \leqslant Z(G)$. З цього випливає, що G може бути лише групою типу 4 та 10 і тому $\exp(P) = 8$, $p = 2$. В групі G кожного з цих типів циклічна підгрупа порядку 4 містить $w(\langle a \rangle)$, $w(\langle a \rangle) \leqslant Z(G)$. Тому при $\Delta = 2$ $f^2 \in Z(G)$, що суперечить вибору f^p. Отже, $\Delta > 2$. Але тоді $\Delta = 3$ і $/g/$ ділиться на 8, тобто $/f/ = 8$. Очевидно, що P містить $N = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$, $/d/ = 2$, $N \lhd G$, $\langle a^2 \rangle \lhd G$ і G/N – абелева цілком факторизована група. Звідси $f^2 \in N$, $/f^2/ = 4$. Тому $\langle f^2 \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle a^2 d \rangle\}$. Оскільки $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $N \lhd G$ і в N тільки дві різні циклічні підгрупи порядку 4, то $\langle a^2 d \rangle \lhd G$. Звідси $\langle f^2 \rangle \lhd G$. Таким чином, $\langle g^p \rangle \lhd G$ і твердження 3 леми доведене.

Зрозуміло, що $w(G) = w(P) \times w(R) = w(P) \times R \leqslant M$, де M – довільна максимальна цілком факторизована підгрупа з G. Оскільки G – нільпотентна група, то в силу [73] $M' = 1$. Очевидно, що $R \leqslant w(Z(G))$, $Z(G) \cap M = w(Z(G))$.

Покажемо, що $/M/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. Група G кожного з розглядуваних типів має вигляд $G = G_1 \times \langle z \rangle$ і завжди G_1 – доповнення $\langle z \rangle$ в G, подане в опису груп G кожного типу, де при відсутності z в опису групи G вважати $z = 1$, $z \in Z(G)$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число. Звідси $M = M_1 \times \langle z \rangle$, де $M_1 = M \cap G_1$. Зауважимо, що G_1 завжди p-група, яка містить елементарні абелеві підгрупи порядку p^2. Звідси M_1 – елементарна абелева p-група, $/M_1/ > p$, M_1 – максимальна цілком факторизована підгрупа з G_1, $M_1 < G_1$.

Якщо M_1 – метациклічна група, то M_1 – група типу (p,p) і тому в цьому випадку $/M/ = /M_1//z/$ – добуток двох чи трьох простих чисел.

Нехай M_1 – неметациклічна група. Тоді G_1 містить власні неметациклічні підгрупи. Оскільки в групі G кожного з типів 1, 4, 5, 7, 8 G_1 – група, у якої всі власні підгрупи метациклічні, то G не може бути групою цих типів. Очевидно, в групі G типу 2 G_1 містить точно три центральні в G інволюції. В групі G типу 9 за наслідком 1.1.7 G_1 теж містить три центральні в G інволюції. За теоремою 2.2.2 в групі G типу 10 точно три інволюції. З цього випливає, що в групах G кожного з типів 2, 9, 10 M_1 – група типу (2,2), а тому G не може бути групою цих типів. Отже, G – група одного з типів 3 чи 6. В групі G типу 6 $G_1 = G = A \lambda \langle x \rangle$ і тому $M_1 = M$. З опису G випливає, що $w(A) = w(\langle a \rangle) \times w(\langle b \rangle) = G' \leqslant Z(G) \cap M$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$. Оскільки G/A – циклічна група, то і M/G′ – циклічна група. Звідси $/M/ = p^3$.

Нехай G – група типу 3. Покладемо $A = C \times \langle u \rangle$. Тоді $G_1 = A \lambda \langle v \rangle$, $/u/ \in \{p,p^2\}$, $/v/ \in \{p,p^2\}$. Можна вважати, що $/u/ \geqslant /v/$. Нехай $/u/ = p^2$. Тоді $z = 1$, $G_1 = G$ і $M_1 = M$. Покладемо $A_1 = A \cap M$. Тоді M/A_1 – підгрупа циклічної групи G/A і тому M/A_1 – циклічна група. Зрозуміло, що $w(A) = w(C) \times w(\langle u \rangle) \leqslant Z(G)$. Ясно, що $A_1 \leqslant w(A)$ і тому $A_1 = w(A)$. Звідси A_1 – група типу (p,p) і $/M/ = p^3$. Нехай тепер $/u/ = p$ і тому за вибором $/v/ = p$. За результатом з [88, 89] G_1 – недедекіндова група, у якої нормальні всі нециклічні підгрупи. Припустимо, що G_1 містить підгрупи типу (p,p,p). Тоді G_1 містить підгрупу M_2 типу (p,p), для якої $C \cap M_2 = 1$, і, значить, $G_1 = C \times M_2$ – дедекіндова група, що неможливо. Отже, всі елементарні абелеві підгрупи з G_1 мають

порядок p чи p^2. Але тоді M_1 – метациклічна група, що не так. Таким чином, /M/ – добуток двох чи трьох простих чисел. Легко бачити, що $[M:w(Z(G))] \in \{1,p\}$. Твердження 4 леми повністю доведене.

Нехай B – довільна підгрупа з G і $B \cap G' = 1$. Тоді $B' = 1$. Покажемо спочатку, що $B = F \times \langle h \rangle$, де F – локально циклічна p-група, $/h/ \in \{1,r\}$. Покладемо $P_1 = P \cap B$. Оскільки $[G:P] \in \{1,r\}$, то $[P:P_1] \in \{1,r\}$. Якщо P_1 – локально циклічна група, то $B = P_1 \times \langle h \rangle$, $/h/ \in \{1,r\}$. Покладемо $P_1 = F$ і одержимо шуканий розклад B.

Нехай P_1 – не локально циклічна група. Тоді $w(P_1)$ – нециклічна група. Оскільки G – нільпотентна група, то $G' \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Ясно, що G містить цілком факторизовану підгрупу $M = \langle c \rangle \times w(P_1)$. За твердженням 4 леми M – максимальна цілком факторизована підгрупа групи G і $/M/ = p^3$. Звідси $z = 1 = R$, $G = P$ і $w(P_1)$ – група типу (p,p). Легко бачити, що $P_1 = B = F \times H$, де F і H – неодиничні локально циклічні p-групи. Можна вважати, що $/F/ \geqslant /H/$. В групі G типу 1 $/z/ = p$ і B – підгрупа абелевої групи $G/\langle u \rangle$ типу (p^γ,p). Звідси $/H/ = p$ і F – локально циклічна p-група. В групі G типу 2 $/z/ = 2$ і B – підгрупа з $G/Q \cong C \times \langle z \rangle$. Звідси F – локально циклічна група і $/H/ = p$. Отже, для груп G кожного з типів 1, 2 шуканий розклад для B знайдеться.

Нехай далі G – група одного з типів 3 – 10. Тоді $/B/ < \infty$ і $F = \langle f \rangle$, $H = \langle h \rangle$, $/f/ = p^\Delta$, $/h/ = p^\gamma$, $\Delta > 0$, $\gamma > 0$, $\Delta \geqslant \gamma$. В групі G кожного з типів 4 – 10 існує така нормальна підгрупа A, що $w(A) = G'$ і P/A – циклічна чи цілком факторизована група, або P/A – група типу (p^α,p). Ясно, що $A \cap B = 1$ і B – підгрупа з G/A. Але

тоді $\Delta = \gamma = 1$, або $\Delta > 1$, $\gamma = 1$. Отже, для груп G типів 4 – 10 шуканий розклад для B знайдено.

Нехай G – група типу 3. Тоді $C \cap B = 1$ і B підгрупа з G/C. Якщо G/C – цілком факторизована група, то $\Delta = \gamma = 1$, і знову шуканий розклад для B знайдено.

Нехай G/C – не цілком факторизована група. Тоді $/z/ = 1$, $/u/ = p^2$, $/v/ \in \{p,p^2\}$. Звідси B – група типу (p^2,p) чи типу (p^2,p^2). Без порушення загальності можна вважати, що $/F/ = p^2$ і $\gamma \in \{1,2\}$. Якщо $\gamma = 1$, то шуканий розклад для B знайдено. Нехай $\gamma = 2$. Тоді $/u/ = /v/ = p^2$, $C' = 1$, $C \leqslant Z(G)$, $[G:C] = p^4$, $/B/ = p^4$, а тому $G = C \times B$ і, значить, $G' = 1$, що неможливо. Отже, для всіх випадків шуканий розклад для B знайдено.

Покажемо, що для будь-якої власної немаксимальної підгрупи A з B існує нормальна в G підгрупа N така, що $A < N < B$. Нехай $B = \langle g \rangle$. Тоді $/g/ = p^{\Delta}r^{\alpha}$, $\Delta \geqslant 0$, $\gamma \in \{0,1\}$, p і r – різні прості числа. Завдяки наслідку 1.1.1 $\Delta + \gamma > 1$. За попереднім, $\langle g \rangle = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, де $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ = r^{\gamma}$. Можна вважати, що $g = fh$. За твердженням 3 леми $\langle g^p \rangle = \langle f^p \rangle \times \langle h \rangle = N \lhd G$. В силу теореми 1.1.1 N – максимальна підгрупа $\langle g \rangle$, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з $\langle g \rangle$. Оскільки A – власна немаксимальна з B, то $A < N < B$ і твердження 5 леми у цьому випадку доведене.

Нехай B – нециклічна підгрупа. Припустимо, що $/B/ = \infty$. Тоді G – група типу 2, $w(G) = w(C) \times w(Q) \times \langle z \rangle \leqslant Z(G)$. Звідси $w(B) \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $C \leqslant B \cap Z(G)$ і $B = Cw(B) \leqslant Z(G)$. Оскільки A – власна немаксимальна підгрупа з B, то існує N така, що $A < N < B$. Зрозуміло, що $N \lhd G$. Нехай тепер $/B/ < \infty$. За попереднім і в силу нециклічності B маємо $B = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ = p$, $\Delta > 0$, $w(B)$ – група типу (p,p). За твердженням 4 леми G'

не може бути центральною в G підгрупою типу (p,p). Звідси G – не є групою жодного з типів 6 – 9. За теоремою 2.2.2 в групі G типу 10 точно три інволюції, які належать G′. Отже, G – не є група типу 10. Зрозуміло, що $G' \cap Z(G)$ містить c, $/c/ = p$ і, значить, G містить цілком факторизовану підгрупу $\langle c\rangle \times w(B)$ порядку p^3. Звідси $G = P$.

Нехай B – цілком факторизована група. Тоді B належить деякій максимальній цілком факторизованій підгрупі M з G. За твердженням 4 леми $[M:w(Z(G))] \leqslant p$. Звідси $B \cap w(Z(G))$ містить c і $/c/ = p$. З розкладу B випливає, що $/B/ = p^2$ і, значить, $/A/ = 1$. Покладемо $N = \langle c\rangle$. Тоді $A < N < B$ і $N \lhd G$.

Нехай тепер B – не цілком факторизована підгрупа. Тоді $\Delta > 1$. При цих умовах в групі G кожного з типів 1, 2 $w(G) \leqslant Z(G)$. Тому $h \in Z(G)$. За твердженням 3 леми $\langle f^p\rangle \lhd G$. Ясно, що $\langle f^p\rangle \times \langle h\rangle = N \lhd G$. Оскільки A – власна немаксимальна підгрупа з B, то за теоремою 1.1.1 $A < N < B$. В групі G кожного з типів 4 та 5 будь-яка циклічна підгрупа порядку p^2 має неодиничний перетин з $P' = G'$. Звідси G може бути лише групою типу 3. З опису цих груп і оскільки $B \cap G' = 1$, $/f/ > p$ випливає, що G/C – не цілком факторизована група. Тоді $/z/ = 1$ і без порушення загальності можна вважати, що $/u/ = p^2$, $/v/ \in \{p,p^2\}$. Нехай $/v/ = p^2$. За твердженнями 3 та 4 леми $w(G) = w(C) \times w(\langle u\rangle) \times w(\langle v\rangle) = w(Z(G))$. Звідси $h \in Z(G)$. Як і раніше, $A < N = \langle f^p\rangle \times \langle h\rangle < B$.

Нехай $/v/ = p$. Тоді $G = C \lambda B$. Покладемо $U = C \times \langle v\rangle$. Зрозуміло, що $v \notin Z(G)$, $w(U) = w(C) \times \langle v\rangle \leqslant Z(U)$ і $w(U) \not\leqslant Z(G)$. Оскільки $[G:U] = p^2$, $[G:C] = p^3$ і $G = C \lambda B = UB$, то $U \cap B = \langle d\rangle$, $/d/ = p$. Очевидно, що $d \in Z(U)$, $d \in Z(B)$ і тому $d \in Z(G)$, $\langle d\rangle \cap C = 1$. Звідси $w(U) = w(C) \times \langle d\rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо.

Отже, для всіх випадків (A;B) э $N \lhd G$. Твердження 5 леми доведене. Лема доведена.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай G – група одного з типів 1 – 10 теореми. Тоді $G = P \times R$ – група, що задовольняє умову леми 3.1.3. Звідси для групи G справедливі всі твердження згаданої леми. Отже, для завершення доведення достатності залишається показати, що G – УЩН( )-група.

Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що (A;B) э $N \lhd G$. Дійсно, при $A \lhd G$ і $B \lhd G$ в силу твердження 1.6 з [73] легко бачити, що (A;B) э $N \lhd G$. Тому в подальшому будемо вважати, що або $A \not\lhd G$, або $B \not\lhd G$. З цього випливає, що $G' \not< A$. Нехай $G' \cap B = 1$. Тоді за твердженням 5 леми 3.1.3 (A;B) э $N \lhd G$. Тому в подальшому $G' \cap B \neq 1$. Припустимо, що $B = \langle g \rangle$. Зрозуміло, що $B = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, де $\langle f \rangle = B \cap P$, $\langle h \rangle = B \cap R$, $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ \in \{1,r\}$, $\Delta > 0$, p і r – різні прості числа. За твердженням 3 леми 3.1.3 $\langle g^{p} \rangle = \langle f^{p} \rangle \times \langle h \rangle = N \lhd G$. Завдяки теоремі 1.1.1 $N \in (A;B)$, що й треба було довести. Отже, B – нециклічна група. Для груп G кожного з типів 1 – 3 $/G'/ = p$, $G' \leqslant B$ і $G' \cap A = 1$. Покладемо $N = G' \lambda A$. Тоді (A;B) э $N \lhd G$ і достатність для цих типів груп доведена.

За твердженням 2 леми 3.1.3 $/G'/ = p^2$. Очевидно, що $/G/ < \infty$. Припустимо, що $/A/ = 1$. Якщо B містить власну неодиничну нормальну в G підгрупу N, то (A;B) э $N \lhd G$. Нехай B не містить власних неодиничних нормальних в G підгруп. Тоді B не містить нормальних в G підгруп простого порядку. Звідси G' – нециклічна і нецентральна в G підгрупа і тому G може бути групою одного з типів 5 чи 10. В групах G кожного з цих типів G' – група типу (p,p) і будь-яка циклічна підгрупа з G порядку p^2 містить

центральну в G підгрупу порядку p. Звідси exp(B) = p і /G′ ∩ B/ = p. Легко бачити, що в групах G кожного з розглядуваних типів існує єдина максимальна цілком факторизована підгрупа M = w(G) порядку p^2 чи p^3 і w(Z(G)) містить w(<a>). Звідси (A;B) э N ◁ G, де N = w(<a>).

Припустимо тепер, що /A/ ≠ 1. Нехай P_1 = B ∩ P. Тоді P_1 – нециклічна силовська p-підгрупа з B. Можливі випадки: 1) G′ ⩽ P_1; 2) G′ ⩤ P_1.

Випадок 1. У цьому випадку при G′A < B покладемо N = G′A. Тоді (A;B) э N ◁ G, що й треба було довести. Тому можна вважати, що G′A = B. Оскільки A – немаксимальна в B, то G′ ∩ A = 1 і A ⩤ G. Нехай D = P_1 ∩ A. Тоді D – силовська p-підгрупа з A, D ⩤ P, /D/ > 1, P_1 = P′ λ D і /[D;P_1]/ > 2. Якщо (D;P_1) э N_1 ◁ P, то N_1 ◁ G. Покладемо N = N_1A. Тоді (A;B) э N ◁ G, що й треба було довести. Отже, можна вважати, що B ⩽ P.

Нехай G – група типу 4. Легко бачити, що будь-яка циклічна підгрупа порядку p^2 з P містить w(G′). Звідси exp(D) = p. Для груп цього типу [w(P),P] ⩽ w(P′). Тоді [D,P] ⩽ w(P′) і тому w(P′) × D = N_1 ◁ G. Оскільки P′ – циклічна група порядку 4, то (D;P_1) э N_1. За попереднім, (A;B) э N ◁ G.

Нехай G – група одного з типів 5 – 10. Тоді будь-яка підгрупа порядку p^2 з P має з P′ неодиничний перетин, G′ – група типу (p,p), w(G) – група типу (p,p) чи типу (p,p,p). Звідси /D/ = p і P_1 – група типу (p,p,p). В групі G кожного з типів 5, 6 P_1 = w(P) і w(P) містить елемент c, /c/ = p, [w(P),P] ⩽ <c>. Таким чином, (D;P_1) э N_1 = <c> × D ◁ P. За попереднім, (A;B) э N ◁ G.

В групі G кожного з типів 7 та 8 $w(P) = P = w(Z(P))$. Звідси $(D;P_1) \ni N_1 \lhd P$. За попереднім, $(A;B) \ni N \lhd G$.

В групі G кожного з типів 9 та 10 підгрупа P не містить підгруп типу (p,p,p). Тому в цьому випадку G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Отже, у випадку 1 G – УЩН( )-група.

Випадок 2. У цьому випадку $G' \cap B = \langle c \rangle$, $/c/ = p$. Можливі випадки: 2.1) $\langle c \rangle \lhd G$; 2.2) $\langle c \rangle \not\lhd G$.

Випадок 2.1. Припустимо, що $c \in A$. Тоді $/[A/\langle c \rangle;B/\langle c \rangle]/ > 2$. Для груп G типу 4 $G/\langle c \rangle$ – група типу 1 розглядуваної теореми. Для груп G кожного з типів 5 та 10 $G/\langle c \rangle$ – група типу 3 розглядуваної теореми. В групі G кожного з типів 6 – 9 G' – центральна в G підгрупа типу (p,p) і $G/\langle c \rangle$ – група одного з типів 1, 3 розглядуваної теореми, або $G/\langle c \rangle$ – гамільтонова група. За попереднім чи гамільтоновістю групи $G/\langle c \rangle$ $(A/\langle c \rangle;B/\langle c \rangle) \ni N/\langle c \rangle \lhd G/\langle c \rangle$. Але тоді $(A;B) \ni N \lhd G$. Нехай $c \notin A$. Тоді $\langle c \rangle \cap A = 1$. Для групи G типу 4 $p = 2$, кожна підгрупа порядку 4 з P має неодиничний перетин з P'. Звідси A – цілком факторизована абелева група. Якщо $[A,G] \leqslant \langle c \rangle \lambda A$, то $(A;B) \ni N = \langle c \rangle \lambda A \lhd G$.

Нехай $[A,G] \not\leqslant \langle c \rangle \lambda A$. Тоді $A \not\lhd G$. Оскільки в групі G $\langle c \rangle = w(G')$ і для будь-якої цілком факторизованої підгрупи X з G $[X,G] \leqslant \langle c \rangle$, то для групи G типу 4 випадок 2.1 розглянули повністю.

Для груп G кожного з типів 5 – 9 $[A,G] \leqslant \langle c \rangle$. Тоді $(A;B) \ni N = \langle c \rangle \lambda A \lhd G$.

В групі G типу 10 немає неодиничних цілком факторизованих підгруп X, для яких $G' \cap X = 1$. Тому G не є групою типу 10. Випадок 2.1 розглянули повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку G не може бути групою жодного з типів 4, 6 – 9. В групі G типу 10 немає неодиничних цілком факторизованих підгруп, що мають з G' одиничний перетин. Звідси G не може бути групою типу 10. В групі G типу 5 всяка неодинична підгрупа з G непростого порядку має з G' неодиничний перетин. Звідси $/A/$ – просте число, $a^3 \in Z(G)$, $/a^3/ = 3$, $\langle c\rangle \cap \langle a^3\rangle = 1$. За твердженням 4 леми 3.1.3 будь-яка максимальна цілком факторизована підгрупа M з G містить $w(Z(G))$, $M = w(G)$, $/M/$ – добуток двох чи трьох простих чисел і $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел. В групі G типу 5 маємо $a^3 \in Z(G)$, $a^3 \in G'$. Звідси $\langle a^3\rangle \cap B = 1$ і тому $/B/$ – добуток двох простих чисел, що не так. Випадок 2.2 розглянутий повністю. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.1.2. *Ненільпотентні УЩН( )-групи G є скінченними надрозв'язними групами та вичерпуються групами типів:*

1) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = p$ – *непарне просте число,* $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ \in \{1,r\}$, *q і r – прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$; *при* $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = p$ – *непарне просте число,* $\langle z,x\rangle$ – *група кватерніонів порядку 8,* $x^{-1}ax = a^{-1}$;

3) $G = \langle a\rangle \lambda (\langle x\rangle \lambda \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ – *непарне просте число,* $/x/ = q^{\Delta}$, $\Delta > 2$, $/z/ = q$ – *просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^{q^{\Delta-1}}$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$;

4) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ – *непарне просте число,* $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ – *непарне просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x,z] = x^q$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді за наслідком 1.3.5 G – локально надрозв'язна, а тому локально ступінчаста група, яка, очевидно, задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. З цього випливає, що G – скінченна надрозв'язна група. Зрозуміло, що G задовольняє умову леми 3.1.1, за твердженням якої для будь-якого елемента g з G, $/g/ = r^\alpha$, $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$. Звідси в групі G типу 1 теореми 2.3.1 $Z(G) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$. Нехай в групі G згаданого типу $/z/ = p$. Покладемо $A = \langle az \rangle$, $B = \langle x^q \rangle \times A$. Зрозуміло, що $[A,G] = \langle a \rangle$. З цього випливає, що B не містить нормальних в G підгруп N, для яких $A \leqslant N$. За означенням УЩН( )-груп $/[A;B]/ \leqslant 2$, що можливо при $\beta < 3$. Отже, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

З леми 3.1.1 та надрозв'язності G випливає, що G не може бути групою жодного з типів 2 – 8 теореми 2.3.1. Група G кожного з типів 10 та 11 згаданої теореми є відповідно групою 2 та 3 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 9, 12, 13 теореми 2.3.1 не існує нормальної підгрупи N з інтервалу (Q ; G), де Q – силовська q-підгрупа групи G і тому G не може бути групою жодного з цих типів. Група G типу 14 є групою типу 4 розглядуваної теореми. Оскільки група G кожного з типів 15 – 17 теореми 2.3.1 є ненадрозв'язною групою, то G не може бути групою цих типів. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 4 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – нескінченна надрозв'язна група. Покажемо, що G – УЩН( )-група, тобто для $/[A;B]/ > 2$ $(A;B) \ni N \lhd G$. Якщо $G' \leqslant A$, то, очевидно, $(A;B) \ni N \lhd G$. Тому в подальшому будемо вважати, що $G' \not\leqslant A$. Легко бачити, що підгрупи Фраттіні всякої циклічної підгрупи з G нормальні в G. Зрозуміло, що $G = \langle a\rangle \lambda Q$, де $Q = \langle x\rangle\langle z\rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $[\langle a\rangle, Q] = \langle a\rangle$. Покладемо $A_1 = \langle a\rangle \cap A$. Можливі випадки: 1) $A_1 = \langle a\rangle$; 2) $A_1 \neq \langle a\rangle$.

Випадок 1. У цьому випадку $/[A/\langle a\rangle;B/\langle a\rangle]/ > 2$ і $G/\langle a\rangle \cong Q$. Якщо Q – дедекіндова група, то $(A/\langle a\rangle;B/\langle a\rangle) \ni N/\langle a\rangle \lhd G/\langle a\rangle$. Але тоді $(A;B) \ni N \lhd G$. Нехай Q – недедекіндова група. Тоді G – група типу 3 чи 4 розглядуваної теореми, у якої Q – силовська q-підгрупа з G. Очевидно, що всяка підгрупа порядку q^2 з Q містить Q'. Оскільки $A \not\leqslant G' = \langle a\rangle \times Q'$, то $A \cap Q' = 1$. Звідси $/A/\langle a\rangle/ \leqslant q$. Ясно, що $/B/\langle a\rangle/ \geqslant q^2$. З цього випливає, що підгрупа $B/\langle a\rangle$ строго містить $G'/\langle a\rangle$. Тому $G' < B$. При $/A/\langle a\rangle/ = \bar{1}$ $(A;B) \ni N = G' \lhd G$. Нехай $/A/\langle a\rangle/ \neq \bar{1}$. Тоді $/A/\langle a\rangle/ = q$ і $A = \langle a\rangle \lambda \langle a_2\rangle$, $/a_2/ = q$, $\langle a_2\rangle = A \cap Q$. За попереднім, $Q' \cap \langle a_2\rangle = 1$. Оскільки $/Q'/ = q$, то $(A;B) \ni N = AQ' \lhd G$. Отже, у випадку 1 достатність доведена.

Випадок 2. У цьому випадку без порушення загальності можна вважати, що $A \leqslant Q$. Ясно, що $C_Q(\langle a\rangle)$ – нормальна в G максимальна підгрупа з Q, що містить Q'. Нехай $A \lhd G$. Якщо $a \in B$, то $(A;B) \ni N = \langle a\rangle \lambda A \lhd G$. Можливі випадки: 2.1) $A \lhd G$, $a \notin B$; 2.2) $A \not\lhd G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $\langle a\rangle \cap B = 1$ і, значить, без порушення загальності, $B \leqslant Q$ і $/B/$ ділиться на добуток двох простих чисел. Очевидно, що B містить $\langle c\rangle$ і $\langle c\rangle$ містить Q′, де $/c/$ – просте число, $c \in Z(G)$. При $/A/ = 1$ $(A;B)$ э $N = \langle c\rangle \lhd G$. Нехай $/A/ \neq 1$. Тоді $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел. Звідси в групі G кожного з типів 2 та 4 $/A/ = q$, $B = Q$ і $/B/ = q^3$. Оскільки $A \leqslant C_Q(\langle a\rangle)$ – максимальна підгрупа з Q, то $(A;B)$ э $N = C_Q(\langle a\rangle) \lhd G$.

В групі G кожного з типів 1 та 3 Q′ належить B і $Q'A \lhd G$. Якщо $Q'A > A$, то $(A;B)$ э $N = Q'A \lhd G$. Нехай $Q'A = A$. В групі G типу 1 $A \leqslant C_Q(\langle a\rangle) = Z(G)$ – максимальна підгрупа з Q. Звідси $B \cap Z(G) = N$ – максимальна підгрупа з B. Тому $(A;B)$ э $N \lhd G$.

В групі G типу 3 завдяки теоремі 1.1.1 підгрупа $C_Q(\langle a\rangle) = \langle x^q\rangle \times \langle z\rangle$ строго містить A і $\langle x^q\rangle \times \langle z\rangle$ – максимальна підгрупа з Q. Звідси $B \cap (\langle x^q\rangle \times \langle z\rangle) = N$ – максимальна підгрупа з B. Тому $(A;B)$ э N. Зрозуміло, що $/N/ > q$. Але тоді $Q' \leqslant N$. Звідси $N \lhd Q$ і тому $N \lhd G$. Достатність у випадку 2.1 доведена.

Випадок 2.2. У цьому випадку $/A/ \neq 1$, $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел. Якщо $[\langle a\rangle,A] \neq 1$, то $[\langle a\rangle,A] = \langle a\rangle$ і A містить q-елемент u, $u \in Q$, $\langle u\rangle$ – максимальна підгрупа з Q і $Q' \leqslant \langle u\rangle$. Зрозуміло, що $\langle a\rangle \lambda \langle u\rangle$ – максимальна підгрупа з G. Оскільки $\langle u\rangle \leqslant A$ – власна немаксимальна підгрупа з B, то $a \notin B$. Тому $\langle a\rangle \cap B = 1$ і, значить, $\langle u\rangle$ – максимальна підгрупа з B, що неможливо. Випадок 2.2 неможливий. Всі випадки розглянуті. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Наслідок 3.1.1. *Всяка нільпотентна УЩН( )-група G є скінченною надрозв'язною не більше ніж трипримарною групою з циклічним комутантом порядку p чи pq, p і q – різні прості числа.*

Комутант G' тоді і тільки тоді має простий порядок, коли G – група типу 1 теореми 3.1.2, групи G тільки цього типу можуть бути трипримарні.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 3.1.2.

Наслідок 3.1.2. *Всі недедекіндові УЩН( )-групи G вичерпуються групами типів 1 – 10 теореми 3.1.1 та групами типів 1 – 4 теореми 3.1.2 або названими нижче 14 типами груп, що співпадають з відповідними типами груп теорем 2.2.3 та 2.3.1:*

I. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.2.3):

1) G – група типу 1;

2) G – група типу 2;

3) G – група типу 3;

4) G – група типу 10, $|b| \in \{4,8\}$, $z \in Z(G)$;

5) G – група типу 11, $z \in Z(G)$;

6) G – група типу 15;

7) G – група типу 17;

8) G – група типу 19;

9) G – група типу 26, $[U, X] = w(U)$, $|C_X(U)| = 4$;

10) G – група типу 27.

II. Ненільпотентні групи (відповідні групи з теореми 2.3.1):

11) G – група типу 1;

12) G – група типу 10;

13) G – група типу 11;

14) G – група типу 14.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 1.3.5 G – локально надрозв'язна, а тому локально

ступінчаста група, для якої за лемою 1.2.2 можливі випадки: 1) G – нільпотентна УЩН[ ]-група; 2) G – локально ступінчаста ненільпотентна УЩН[ ]-група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів згаданої теореми. За доведенням тієї теореми G – група одного з типів 1 – 10 розглядуваного наслідку.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів згаданої теореми. За доведенням тієї теореми G – група одного з типів 11 – 14 розглядуваного наслідку. Наслідок доведений.

3.2. Будова локально ступінчастих УЩН( )-груп

Т е о р е м а 3.2.1. *Нільпотентні недедедекіндові УЩН( )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) G – нільпотентна недедекіндова УЩН( )-група, тобто група G одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = p^2$, $|x| = |b| = p$ – *непарне просте число,* $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – *непарне просте число,* $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – *просте число,* $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; *при* $p > 2$

$t^2 + 4s$ – *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $t = s = 1$;

7) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$ – *просте число*, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; *при* $p > 2$ $t^2 + 4s$ – *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $s = 1$;

8) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ – *непарне просте число*, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^{\varepsilon}b^p$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві*;

9) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

10) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = p$, p – *непарне просте число*, $[b,x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^p$, $[a,x] = b^{fp}x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, *неквадратичними лишками за модулем* $p \in$ *числа:* $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві*;

11) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

13) $G = (\langle a,b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $\langle a,b\rangle$ – *група кватерніонів*, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = a$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 група G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Нехай G – група одного з типів: 1 – 3; 10, /b/ ∈ {4,8}, z ∈ Z(G); 11, z ∈ Z(G); 15; 17; 18; 26, [U,X] = Φ(U), /C_X(U)/ = 4; 27 теореми 2.2.3. Тоді G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 4 чи 5 теореми 2.2.3. Тоді w(Z(G)) = G′, /G′/ = p і G містить підгрупу B = <v> × <a>, /v/ = /a/ = p, B ∩ Z(G) = B ∩ G′ = 1. Покладемо A = 1. Ясно, що /[A;B]/ > 2. За означенням УЩН( )-груп (A;B] э N ◁ G. Зрозуміло, шо N ⩽ Z(G), що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай G – група типу 6 чи 7 теореми 2.2.3. Припустимо, що β > 3. Тоді b^2 ∈ Z(G). Покладемо d = ab^2. Ясно, що G′ ∩ <d> = <a> ∩ <d> = 1. За лемою 3.1.1 <d^2> ◁ G. Очевидно, що $d^2 = a^2b^4$. Зрозуміло, що d^2 ∈ Z(G), b^2 ∈ Z(G), а a^2 ∉ Z(G), що неможливо. Отже, β < 4. Тоді G – група типу 2 та 3 згаданої теореми відповідно.

Нехай G – група типу 8 чи 9 теореми 2.2.3. Покладемо в групі G типу 8 g = b, а в групі G типу 9 g = d. В силу леми 3.1.1 <g^p> ◁ G, що в групах G розглядуваних типів неможливо і тому G не може бути групою цих типів.

Припустимо, що G – група типу 10 теореми 2.2.3. Покажемо, що G – група типу 4 теореми 3.1.1. Для цього досить показати, що /b/ ∈ {4,8}, z ∈ Z(G). Покажемо спочатку, що z ∈ Z(G). Оскільки /z/ ∈ {1,r}, то при непарному r це очевидно. Нехай /z/ = 2. Тоді /b/ ∈ {4,8} і при /b/ = 4 z ∈ Z(G). Якщо /b/ = 8, то G містить підгрупу B = <d> × <z>, де d = a^2b^2, /d/ = 2, d ∉ Z(G). Покладемо A = 1. Тоді, очевидно, /[A;B]/ > 2 і за означенням УЩН( )-груп (A;B] э N ◁ G. Зрозуміло, що B ∩ G′ = B ∩ <a> = N ∩ G′ = 1 і тому

$N \leqslant Z(G)$, $/N/ > 1$. Ясно, що $N < B$ і B – група типу (2,2). Отже, без порушення загальності можна вважати, що $N = \langle z \rangle$ і тому завжди $z \in Z(G)$.

Припустимо, що $/b/ = 2^{\beta}$ і $\beta > 3$. Тоді $b^2 \in Z(G)$. Покладемо $d = ab^{2^{\beta-3}}$. Легко бачити, що $/d/ = 4$, $\langle d \rangle \cap G' = \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Завдяки лемі 3.1.1 $\langle d^2 \rangle \lhd G$, $d^2 = a^2 b^{2^{\beta-2}} \in Z(G)$, що неможливо, оскільки $a^2 \notin Z(G)$. Отже, $\beta < 4$ і G – група типу 4 теореми 3.1.1, а тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 11 теореми 2.2.3. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Оскільки $/z/ \in \{1,r\}$, то при $r \neq 3$ це очевидно. Нехай $r = 3$. Тоді в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. Покладемо $A = 1$. Тоді, очевидно, $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $B \not\leqslant Z(G)$, $\langle b \rangle \not\lhd G$, $G' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$, $B \cap G' = \langle b \rangle$. Звідси $B \not\lhd G$ і тому $/N/ = 3$. Ясно, що $N \cap G' = \langle b \rangle \cap N = 1$. Отже, $N \leqslant Z(G)$ і можна вважати, що $N = \langle z \rangle$. Звідси G – група типу 5 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $/c/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $c \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$ і G – неметациклічна група. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G група типу 2 теореми 1.3.3, а тому G – група типу 5 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми. Нехай M – власна неметациклічна підгрупа з G. Тоді M може бути лише групою типу 1 теореми 1.3.3. Звідси M містить елемент x, $/x/ = p$, $\langle x \rangle \cap G' = 1$. Ясно, що $[G:M] = p$, $G' \leqslant M$ і $M = G' \lambda \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $x \in G \setminus \Phi(G)$ і G – 2-породжена група і тому $x \notin Z(G)$. Припустимо, що $x \in Z(M)$. Покладемо $A = 1$, $B = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$. Оскільки $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$ і $G' \cap B = \langle b \rangle$, то $\langle b \rangle \not\lhd G$ і $B \not\lhd G$. Ясно, що $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$.

Зрозуміло, що $/N/ = p$, $N \leqslant Z(G)$. Без порушення загальності можна вважати, що $N = \langle x \rangle$, що не так. Отже, $x \notin Z(M)$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $G' \leqslant Z(C) \leqslant C \lhd G$, $C \cap \langle x \rangle = 1$, G/C – підгрупа з $\mathrm{Aut}\, G'$. Відомо [65], що $\mathrm{Aut}\, G' \cong GL(2,p)$ і силовська p-підгрупа з $GL(2,p)$ має порядок p. Звідси $[G:C] = p$ і, значить, $/C/ = p^3$, $G = C \lambda \langle x \rangle$, $C' = 1$. За попереднім, C не може бути групою типу (p,p,p). Але тоді $C = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p$, $a^p = c \in Z(G)$. Оскільки $x \notin Z(M)$, то $[b,x] = c^s$, $0 < s < p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[a,x] = b$. Звідси G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 13; 14; 16; 19; 20; 21; 22, $/b/ \in \{4, 8\}$; 23, $/b/ = 8$; 25 теореми 2.2.3 є відповідно групами кожного з типів 5 – 13 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $[\langle a \rangle,\langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. Покажемо, що $\beta < 4$. Нехай це не так. Тоді G містить елемент $d = a^2b^2$, $[a^2,b^2] = 1$. Звідси $/d/ = 4$ і $\langle d \rangle \cap G' = 1$. В силу леми 3.1.1 $d^2 \in Z(G)$ і $d^2 = a^4b^4$. В групах G розглядуваних типів $b^4 \in Z(G)$, $a^4 \notin Z(G)$. Суперечність. Отже, G не може бути групою типу 24 теореми 2.2.3, а група G типу 22 чи 23 теореми 2.2.3 може бути лише групою типу 11 чи 12 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 26 теореми 2.2.3. Тоді $G = U \lambda X$. При циклічності U $[U,X] = w(U) \leqslant Z(G)$. Нехай $C = C_X(U)$. Тоді $C \lhd G$ і X/C – підгрупа з $\mathrm{Aut}\, U$. При $/U/ = 4$ $/\mathrm{Aut}U/ = 2$. Звідси $[X:C] = 2$. Нехай $/U/ > 4$. Тоді $\mathrm{Aut}\, U$ – абелева група і, значить, $X' \leqslant C$. З цього випливає, що $G' \leqslant Z(G)$ і G' – група типу (2,2). Легко бачити, що $\Phi(U) \leqslant Z(G)$. За попереднім, $[X:C] \in \{2,4\}$.

Припустимо, що $[X:C] = 4$. Тоді $C = X'$ і X/C – група типу (2,2) з Aut U. Але тоді X/C містить інвертуючий автоморфізм Cz з Aut U. Звідси z індукує на U теж інвертуючий автоморфізм і, значить, $[U,\langle z\rangle] = \Phi(U)$, $/\Phi(U)/ > 2$, що суперечить співвідношенню $[U,X] = \Phi(U)$. Отже, $[X:C] = 2$. Тоді $/C/ = 4$ і G – група типу 9 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай U – нециклічна група. Тоді U – група кватерніонів порядку 8. Якщо $/C_X(U)/ = 4$, то G – група типу 9 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $C_X(U) = X$. Тоді $U = \langle a,b\rangle$, $X = \langle x,y\rangle$, $G = U \times X$. Покладемо $Q = \langle ax,by\rangle$. Тоді $G = U \lambda Q$, де Q – група кватерніонів порядку 8. Покладемо $A = \Phi(Q)$, $B = Q$. Зрозуміло, що $B \lhd G$. За означенням УЩН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Звідси $/N/ = 4$. Заміняючи X на Q, одержимо, що $/C_Q(U)/ = /N/ = 4$ і тому G – група типу 9 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай, далі, $[X:C_X(U)] < 4$. Тоді, поклавши $X = Q$, одержимо, що $G = U \lambda Q$, і як раніше, $/C_Q(U)/ = 4$. Звідси знову G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо $A = 1$, $B = \langle ax\rangle$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Легко бачити, що $/N/ = 2$ і тому $N \leqslant Z(G)$, що не так. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 13 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – недедекіндова нільпотентна група. Покажемо, що G – УЩН( )-група. Для груп G типу 1 в теоремі 3.1.1 установлено, що G – УЩН( )-група. За

лемою 1.2.2 G – УЩН( )-група, що й треба було довести. Отже, в подальшому G – група одного з типів 2 – 13 розглядуваної теореми. Нехай /[A;B]/ > 2. Покажемо, що (A;B] э N ◁ G. Якщо B ◁ G, то N = B і все доведено. Тому B ⋪ G. Звідси G′ ⋪ B, B – власна немаксимальна підгрупа з G і B ⋪ Z(G).

Для завершення доведення достатності теореми доведемо наступну лему.

Лема 3.2.1. *Нехай G – група одного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1. Тоді G – скінченна недедекіндова p-група з комутантом порядку p^2 чи p^3, p – просте число і справедливі наступні твердження:*

1) для будь-якого елемента g з G $\langle g^p \rangle \triangleleft G$. Співвідношення $g^p \notin Z(G)$ може мати місце лише при p = 2, G′ – циклічна група порядку 4 чи 8, тобто коли G – група одного з типів 2, 3, 11 – 13;

2) в групі G типів: 2, β > 1; 3; 11 – 13 точно три інволюції;

3) комутант G′ групи G є або нецентральною циклічною підгрупою порядку 4 чи 8, або групою типу (p,p) чи типу (p,p,p). Комутант G′ тоді і тільки тоді є центральною підгрупою G, коли G – група одного з типів 6 чи 7, G′ – група типу (p,p), або G – група одного з типів 9 чи 10, G′ – група типу (p,p,p);

4) для будь-якої нециклічної підгрупи B з G підгрупа $B \cap Z(G)$ містить c і /c/ = p. Лише в групі G типу 5 c може не належати G′.

Доведення. Ясно, що G – недедекіндова скінченна p-група з комутантом G′ порядку p^2 чи p^3. Очевидно також, що в групі G кожного з типів 2, 3, 11 – 13 p = 2, G′ – нецентральна в G циклічна підгрупа порядку 4 чи 8. В усіх інших випадках G′ – група типу (p,p) чи типу (p,p,p).

Нехай G – група з циклічним комутантом. Тоді за попереднім, G – група одного з типів 2, 3, 11 – 13.

Нехай G – група типу 2 чи 3. Очевидно, що $\Phi(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$. Нехай $g \in G \setminus \Phi(G)$. Тоді $g \in \{a^i b^{2j}, a^{2s} b^t, a^k b^l\}$, де itkl – непарне число.

Нехай $g = a^i b^{2j}$. Тоді $g^2 = a^{2i} b^{4j}$ і при $\beta < 3$ $\langle g^2 \rangle = \langle a^{2i} \rangle = \langle a^2 \rangle \lhd G$ і $g^2 \notin Z(G)$. При $\beta = 3$ $g^4 = a^{4i} b^{8j} = a^4$. Зрозуміло, що $[\langle a^{2i} \rangle, G] = \langle a^4 \rangle$. Звідси $[\langle g^2 \rangle, G] = \langle a^4 \rangle = \langle g^4 \rangle$ і тому $\langle g^2 \rangle \lhd G$.

Нехай $g = a^{2s} b^t$. Тоді $\langle g^2 \rangle = \langle b^{2t} \rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2 \rangle \lhd G$.

Нехай $g = a^k b^l$. Тоді $\langle g^2 \rangle = \langle b^{2l} \rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2 \rangle \lhd G$. Отже, при $g \in G \setminus \Phi(G)$ $\langle g^2 \rangle \lhd G$.

Нехай тепер $g \in \Phi(G)$. Тоді $g = a^{2i_1} b^{j_1}$. Ясно, що $\exp(\Phi(G)) = 4$ і, значить, $/g/ = 4$. Якщо $\beta < 3$, то $/a^{2i_1}/ = 4$ і $\langle g^2 \rangle = \langle a^4 \rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2 \rangle \lhd G$. При $\beta = 3$ завдяки теоремі 1.1.4 в G точно три інволюції і, значить, $g^2 \in Z(G)$, $\langle g^2 \rangle \lhd G$. Отже, твердження 1 леми для груп G типу 2 чи 3 доведене.

Нехай G – група типу 11 чи 12. Тоді $[G:\langle a \rangle] \leqslant 4$. В силу теореми 1.2.2 з [77] підгрупа $\langle a \rangle$ не доповнюється в G. Оскільки $/g/ > 2$, то $\langle a \rangle \cap \langle g \rangle \leqslant \langle c \rangle = w(\langle a \rangle) \leqslant Z(G)$. Якщо $/g/ = 4$, то $\langle g^2 \rangle = \langle c \rangle \lhd G$. Нехай $/g/ > 4$. Припустимо, що $/g/ = 8$. Тоді при $g^2 \in \langle a \rangle$ $\langle g^2 \rangle \leqslant \langle a^2 \rangle$ і тому $\langle g^2 \rangle \lhd G$. Нехай $g^2 \notin \langle a \rangle$. Тоді $\langle a \rangle \cap \langle g \rangle = \langle c \rangle$, $/c/ = 2$ і $G = \langle a \rangle \langle g \rangle$. Звідси $g^2 \in Z(G)$ і знову $\langle g^2 \rangle \lhd G$.

Нехай тепер $/g/ > 8$. Оскільки $\exp(G) = 16$, то $/g/ = 16$. Зрозуміло, що $g^4 \in \langle a \rangle$ і тому $\langle g^4 \rangle \geqslant \langle a^4 \rangle$. Оскільки $a^4 \notin Z(G)$, то $\langle a \rangle \langle g \rangle < G$. Але тоді $[\langle a \rangle \langle g \rangle : \langle a \rangle] < 4$ і, значить, $g^2 \in \langle a \rangle$,

$\langle g^2\rangle \lhd G$. Таким чином, твердження 1 для груп G типів 11 чи 12 доведене.

Нехай G – група типу 13. Тоді $/bx/ = 8 = \exp(G)$. Завдяки теоремі 2.2.3 в G три центральні інволюції. Якщо $/g/ = 4$, то $g^2 \in Z(G)$ і, значить, $\langle g^2\rangle \lhd G$. Нехай $/g/ = 8$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $g = dx$, де d належить групі кватерніонів $\langle a,b\rangle$ порядку 8. Оскільки $/g/ = 8$, то $/d/ = 4$. Ясно, що $g^2 = dxdx = dxx(d^{-1}x^{-1}dx) = dx^2d[d,x] = d^2x^2[d,x] = fa^i$, де $f \in Z(G)$, $f = d^2x^2$. Оскільки $/g/ = 8$, то $/a^i/ = 4$. Ясно, що $g^4 = g^2g^2 = a^{2i} = a^2$. Зрозуміло, що $[\langle a\rangle,G] = [\langle g^2\rangle,G] = \langle a^2\rangle$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$. Твердження 1 для груп G типу 13 доведене.

Легко бачити, що в групі G кожного з типів 4 – 10 $g^p \in Z(G)$ і тому $\langle g^p\rangle \lhd G$. Отже, твердження 1, а із ним твердження 2 леми доведені повністю. За попереднім і співвідношенням для розглядуваних типів груп випливає справедливість твердження 3 леми.

Доведемо, накінець, твердження 4 леми. Нехай B – нециклічна підгрупа з G. Тоді $/B/ > p$. Якщо $G' \leqslant B$, то $G' \cap B \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Нехай $G' \not\leqslant B$. Якщо G – група одного з типів 2, 3, 11 – 13, то вона містить таку нормальну підгрупу U, що $w(U) = w(G') \leqslant Z(G)$ і G/U – циклічна група. Оскільки B – нециклічна група, то $B \cap U$ містить $w(U) = \langle c\rangle \leqslant Z(G)$, $/c/ = p$. В групі G кожного з типів 4 – 10 w(G) – група порядку p^2 чи p^3 і має експоненту p, $G' \leqslant w(G)$. Крім того, B містить підгрупу типу (p,p). В групі G типу 4 кожна підгрупа типу (p,p) містить $a^p = c \in Z(G)$, $/c/ = p$. В групі G кожного з типів 6 – 10 $[w(G):(G' \cap Z(G) \cap w(G))] \leqslant p$. Звідси $w(B) \cap Z(G) = Z$ і $[w(B):Z] \leqslant p$. Оскільки $/w(B)/ > p$, то Z містить c і $/c/ = p$. Тоді $w(G) = Z \times \langle b\rangle$,

де $Z = \langle a^p \rangle \times \langle x^p \rangle \leqslant Z(G)$. Звідси $Z \cap w(B) \neq 1$. Але тоді $Z \cap w(B)$ містить c і $/c/ = p$. Твердження 4 леми доведене. Лема доведена.

Продовжимо доведення достатності теореми. Нехай $B = \langle g \rangle$. Тоді $(A;B] \ni N = \langle g^p \rangle$. За твердженням 1 леми 3.2.1 $N \lhd G$, що й треба було довести. Нехай B – нециклічна група. Припустимо, що $A = 1$. Тоді за твердженням 4 леми 3.2.1 $B \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Звідси $(A;B] \ni N = \langle c \rangle \lhd G$ і все доведено. Тому в подальшому $/A/ > 1$ і $/B/ > p^2$.

В групі G кожного з типів 2, 3, 6, 7, 13 за вибором B і твердженням 4 леми 3.2.1 $B \cap G' = \langle c \rangle$, $/c/ = p$, $c \in Z(G)$, G містить таку нормальну підгрупу U, що $U \cap B = \langle c \rangle$ і G/U – циклічна група. Звідси $B/\langle c \rangle$ – циклічна група. Оскільки B – нециклічна група, то $B = \langle c \rangle \times \langle u \rangle$, $/u/ > p$. За твердженням 1 леми 3.2.1 $u^p \in Z(G)$. Покладемо $N = \langle c \rangle \times \langle u^p \rangle$. Тоді $N \lhd G$. Зрозуміло, що N – максимальна підгрупа з B і за теоремою 1.1.1 N містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Звідси $(A;B] \ni N \lhd G$. Отже, достатність для розглядуваних типів груп доведена.

Оскільки $/B/ \geqslant p^3$ і B – власна немаксимальна підгрупа з G, то G не може бути групою типу 4.

Нехай G – група типу 5. Тоді $p > 2$, $w(G) = G' \times \langle x^p \rangle$, де $G' = \langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$, $\langle a^p \rangle \times \langle x^p \rangle \leqslant Z(G)$, $\exp(G) = p^2$. За припущенням $G' \not\leqslant B$. Припустимо, що $B \cap G' = 1$. Тоді $B \cap (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) = 1$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \lhd G$ і $G/(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ – циклічна група, що суперечить нециклічності B. Отже, $B \cap G' = \langle d \rangle = B \cap (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $/d/ = p$, $d \in Z(B)$. Оскільки $G/(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ – циклічна група, то і $B/\langle d \rangle$ – циклічна група. З нециклічності підгрупи B і циклічності $B/\langle d \rangle$ маємо, що $B = \langle u \rangle \times \langle d \rangle$, де $/u/ > p$. Зрозуміло, що

$G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle u\rangle$ і тому $d \in Z(G)$. Як і раніше, $(A;B]$ э $N = \langle d\rangle \times \langle u^p\rangle \leqslant Z(G)$ і $N \lhd G$. Таким чином, достатність для груп G типу 5 доведена.

Нехай G – група одного з типів 8 – 10. Завдяки теоремі 2.1.2 G – метагамільтонова група, у якої $G' = w(G)$ – група типу (p,p,p). В силу вибору B $B' = 1$. За твердженням 1 леми 3.2.1 для будь-якого елемента g з G $g^p \in Z(G)$. Зрозуміло, що $B = \langle u\rangle \times \langle v\rangle$, $/u/ \geqslant /v/ > 1$, $/u/ > p$. Зауважимо, що $\exp(G) = p^2$ і будь-який елемент з G порядку p^2 не належить Z(G).

Нехай $v \in Z(G)$. Тоді $/v/ = p$. Покладемо $N = \langle u^p\rangle \times \langle v\rangle$. Ясно, що $N \leqslant Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $(A;B]$ э $N \lhd G$.

Нехай $v \notin Z(G)$. Припустимо, що $/v/ = p$. Тоді G – група типу 8. Ясно, що $v \in G'$ і G містить підгрупу $V = \langle d\rangle \times \langle b\rangle$, де $/d/ = p$, $d \in Z(G) \cap G'$, $[G:V] = p$ і $G = V\langle h\rangle$. Оскільки $v \notin Z(G)$, то $[v,h] = f \neq 1$, $f \in Z(G)$, $/f/ = p$. В G точно p спряжених з v елементів і вони мають вигляд vf^i. Звідси G містить нормальну підгрупу $K = \langle f\rangle \times \langle v\rangle$. Легко бачити, що $[\langle v\rangle,G] = \langle a^p\rangle \times \langle b^p\rangle \leqslant Z(G)$, $/a^p/ = /b^p/ = p$, що неможливо, оскільки $[K,G] \leqslant (\langle a^p\rangle \times \langle b^p\rangle) \cap K < K$, $[K,G] = K$. Отже, $/v/ > p$. Тоді $/B/ > p^3$. Звідси G – група типу 9 чи 10, $\exp(G) = p^2$, $G' = \Phi(G) = w(G) = Z(G)$ і G – 3-породжена група, де u та v – деякі два з них. Звідси $G = \langle h, u, v\rangle$. Зрозуміло, що $G' = \langle [h,u], [h,v], [u,v]\rangle = \langle [h,u], [h,v]\rangle$. Оскільки $G' \leqslant Z(G)$ і $\exp(G') = p$, то $/G'/ \leqslant p^2$, що суперечить умові $/G'/ = p^3$. Ця суперечність і завершує доведення достатності для розглядуваних типів груп.

Нехай G – група типу 11 чи 12. Тоді $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ \in \{4,8\}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a^2\rangle$. При $/b/ = 4$ G –

група кватерніонів порядку 32 і, значить, G – група типу 11. Зрозуміло, що /B/ = 8 і тому B – група кватерніонів порядку 8. Звідси G = <a>B, де <a> ∩ B = <z>, [G:<a>] = 2, [B:<z>] = 2 і /z/ = 4. Ясно, що /A/ = 2 і <z> ◁ G. Отже, (A;B] э N = <z> ◁ G.

Нехай /b/ = 8. Тоді $b^2 \in Z(G)$ і G містить три максимальні підгрупи $M_i \in \{<a> \times <d>, <b> \lambda <d>, <ab> \lambda <d>\}$, де $d = a^4b^2$, $i \in \{1,2,3\}$. В силу теореми 1.1.4 в G точно три інволюції, які складають підгрупу w(G) = w(<a> × <d>) = w(<a>) × <d> і <a> × <d> ◁ G. Звідси w(<a>) × <d> = w(<b> λ <d>) = w(<ab> λ <d>). Зрозуміло, що B ⩽ M_i, G не містить підгруп кватерніонів порядку 8. Тому w(B) = w(G) і B – не діедральна метациклічна абелева група чи група Міллера–Морено з циклічною максимальною підгрупою <g>, тобто B – група типу 5 теореми 1.1.1. Покладемо N = Φ(B)w(B). Зрозуміло, що Φ(B) = $<g^p>$. Оскільки w(B) ◁ G і за твердженням 1 леми 3.2.1 $<g^p>$ ◁ G, то N ◁ G. За теоремою 1.1.1 N – максимальна підгрупа з B, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Тому (A;B] э N ◁ G. Отже, група G типу 11 чи 12 є УЩН( )-групою. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.2.2. *Нільпотентні локально ступінчасті УЩН( )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) G – нільпотентна УЩН( )-група, тобто група G одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2;

2) G = P λ <x> – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, /x/ ∈ {3,9};

3) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, $/P/ = p^2$, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 – показник p за модулем q, $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – група Шмідта, $/P/ = p^3$, $exp(P) = /P'/ = p$ – просте число, $p > 3$, $/x/ = q$ – непарне просте число, 2 – показник p за модулем q;

5) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, $p \neq 3$, $q > 2$, $/z/ = r$ – просте число, $r \neq p$, 2 – показник p за модулем q;

6) $G = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – необов'язково різні непарні прості числа, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

8) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – квазіцентральна підгрупа з G;

9) $G = (R \times P) \lambda \langle x \rangle$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod q$, 2 – показник p за модулем q, $p \neq 3$, $q > 2$, $R \lambda \langle x \rangle$ і $P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентні групи Міллера–Морено.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді завдяки лемі 1.2.2 G – ненільпотентна локально ступінчаста УЩН[ ]-група, яка задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. Ясно, що

ненільпотентна УЩН( )-група є ненільпотентною локально ступінчастою УЩН( )-групою.

Нехай G – ненільпотентна УЩН( )-група. Тоді G задовольняє умову теореми 3.1.2 і є групою одного з типів 1 – 4 згаданої теореми. Звідси G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів теореми 2.3.1: 1; 10; 11; 14. Тоді G – група одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2 відповідно і знову G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 3; 4; 7, $/P'/ = p$; 8, $/z/ = r \neq p$; 9; 12; 13; 16 теореми 2.3.1 є відповідно групою одного з типів 2 – 9 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 2, 5, 6, 17 теореми 2.3.1 існує ненормальна в G підгрупа $\langle x \rangle$ порядку qr чи q^{β}, $\beta > 1$, яка не має нормальних в G максимальних підгруп, тобто $\langle x^q \rangle \not\lhd G$, що суперечить лемі 3.1.1. Отже, G не може бути групою згаданих типів.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.3.1 і $/P'/ \neq p$. Тоді $P' = 1$ і P – мінімальна нормальна підгрупа з G типу (p,p,p), що суперечить лемі 3.1.1. Отже, група G типу 7 теореми 2.3.1 при $/P'/ = p$ не може бути УЩН( )-групою.

Нехай G – група типу 8 теореми 2.3.1. За попереднім, $/z/ = r = p$. Тоді $G' = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – мінімальна нормальна підгрупа з G, $/a/ = /b/ = p$ і G містить ненормальну в G підгрупу $B = \langle a \rangle \times \langle bz \rangle$, яка має з Z(G) одиничний перетин. Покладемо $A = 1$. Тоді $(A;B] \ni N \lhd G$. Очевидно, що $/N/ = p$. Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle a \rangle \not\lhd G$. Звідси $N \cap \langle a \rangle = 1 = G' \cap N$. Але тоді $N \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, група G не може бути УЩН( )-групою.

Нехай, нарешті, G – група типу 15 теореми 2.3.1. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – силовська p-підгрупа з G, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = q$, $w(P) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \lhd G$, $w(P) \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено. Завдяки лемі 3.1.1 $\langle a^p \rangle \lhd G$. Очевидно, що $\langle a^p \rangle \leqslant w(P)$ – мінімальна нормальна підгрупа типу (p,p) як в $w(P) \lambda \langle x \rangle$, так і в G, що неможливо. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Для доведення достатності установимо спочатку справедливість наступної леми.

Л е м а 3.2.2. *Нехай G – група одного з типів 2 – 9 теореми 3.2.2. Тоді G – ненільпотентна скінченна не більше ніж трипримарна група з нормальною силовською p-підгрупою порядку p^2 чи p^3 і не більше ніж біпримарним холлівським комутантом G' порядку p^2, pr чи p^2r, p і r – необов'язково різні прості числа і справедливі наступні твердження:*

1) для будь-якого простого s з $\pi(G)$ і s-елемента g з G $\langle g^s \rangle \lhd G$. Співвідношення $g^s \notin Z(G)$ можливе лише в групі G типу 6 при $s = p = r$;

2) група G тоді і тільки тоді трипримарна, коли вона група одного з типів: 5; 6, $r \neq p$; 13;

3) комутант G' групи G є циклічною групою, коли G – група типу 6; G' тоді і тільки тоді непримарна група, коли G – група типу 6, $p \neq r$; G' тоді і тільки тоді неабелева група, коли G – група типу: 2, тобто G' – група кватерніонів порядку 8; 4, тобто G' – неабелева група порядку p^3 і експоненти p, $p > 3$;

4) група G містить нормальну в G нільпотентну підгрупу M, [G:M] = q, $M = G' \times \langle z \rangle$, $z \in Z(G)$, $G = M\langle x \rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $x^q \in \langle z \rangle$, $q \notin \pi(G)$;

5) $G = G' \lambda \langle g \rangle$, де $/g/ = q^{\beta} r^{\gamma}$, $\beta > 0$, $\gamma \in \{0, 1\}$ і $g^q \in Z(G)$.

Доведення. Загальне твердження леми випливає із безпосереднього розгляду наведених в лемі типів груп.

Нехай s – просте число з $\pi(G)$ і g – s-елемент з G. При $/g/ \in \{1,s\}$ легко бачити, що $g^s \in Z(G)$ і тому $\langle g^s \rangle \lhd G$. Нехай $/g/ > s$. Тоді, очевидно, в групі G кожного з типів 2 – 5, 7 – 9 $g^s \in Z(G)$ і тому $\langle g^s \rangle \lhd G$. В групі G типу 6 при $p \neq r$ $s = q$ і $g^q \in Z(G)$ і, значить, $\langle g^q \rangle \lhd G$. При $p = r = s$ $g = a$ і $\langle g^p \rangle \lhd G$. Отже, твердження 1 леми доведене.

Твердження 2, 4 і 5 леми очевидні. Ясно, що лише в групі G типу 6 G' – циклічна група, а G' – неабелева група тільки в групах G типів 2 чи 4. Комутант G' є непримарною групою лише в групі G типу 9 і може бути таким в групі G типу 6 при $r \neq p$. Твердження 3 леми доведене. Лема доведена.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай G – група типу 1 розглядуваної теореми. Тоді за лемою 1.2.2 G – УЩН( )-група одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2. За твердженням згаданої теореми G локально ступінчаста. Отже, достатність для груп типу 1 доведена.

Нехай далі G – група типу 2 – 9 розглядуваної теореми. Завдяки лемі 3.2.2 G – скінченна ненільпотентна, а тому і локально ступінчаста група. Залишається показати, що G – УЩН( )-група. Дійсно, нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $(A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $B \lhd G$, то $N = B$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $B \not\lhd G$. Звідси $G' \not\leq B$. Завдяки

лемі 3.2.2 $/G'/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. Покладемо $T = G' \cap B$. Тоді $T \lhd B$ і $T < G'$. В силу леми 3.2.2 T – холлівська підгрупа з B. Оскільки $G' \not< B$, то $/T/$ – одиниця, просте число чи добуток двох простих чисел.

Нехай G – група типу 4 чи 2 при $\beta = 1$ розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^3q$ і $/B/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. З вибору B $/B/ \neq p^3$. Оскільки G – група Шмідта з $/P'/ = p$, то в силу теореми 2.1.1 з [78] G не містить підгруп порядку p^2q. З цього випливає, що $/B/ \in \{pq, p^2\}$ і тому $/A/ = 1$. Ясно, що підгрупа B порядку p^2 містить $\Phi(P)$. В групі Шмідта G підгрупа B порядку pq теж містить $\Phi(G)$. Звідси $(A;B]$ э $N = \Phi(P) \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група одного з типів: 6; 8; 2 при $\beta = 2$ і $/B/$ ділиться на 9. В групі G кожного з типів 6 та 8 підгрупа $M = G' \times \langle x^q \rangle$ – максимальна квазіцентральна підгрупа з G і, значить, $B \not< M$. Звідси B містить силовську q-підгрупу з G. Отже, в групі G кожного із розглядуваних типів груп без порушення загальності можна вважати, що $x \in B$ і тому $B = T \lambda \langle x \rangle$, де T – власна підгрупа силовської p-підгрупи $G' = P$ з G. В групі G кожного з типів 6 та 8 розглядуваної теореми $/P/ = p^2$ і, значить, $/T/ < p^2$. В групі Шмідта G типу 2 при $\beta = 2$ розглядуваної теореми завдяки теоремі 2.1.1 з [78] немає підгруп порядку $p^2/x/$ і тому теж $/T/ < p^2$. Покладемо $N = T \times \langle x^q \rangle$. Ясно, що N – максимальна підгрупа з B. В силу теореми 1.1.1 N містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Оскільки $/T/ < p^2$, то, очевидно, $T \lhd G$. Звідси $(A;B]$ э $N = T \times \langle x^q \rangle \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група типу 2 при $\beta = 2$ і $/B/$ – не ділиться на 9. Тоді $B < M = P \times \langle x^3 \rangle$, $\Phi(P) \times \langle x^3 \rangle \leqslant Z(G)$. Очевидно, що $B = \langle g \rangle$,

$g^2 \in Z(G)$ і B – підгрупа типу 4 теореми 1.1.1. Звідси $(A;B] \ni N = \langle g^2 \rangle \lhd G$, що й треба було довести.

Отже, достатність для груп кожного з типів 2, 4, 6, 8 доведена.

Нехай G – група одного з типів 3 чи 7 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ \in \{p^2q, p^2q^2\}$ і силовська p-підгрупа $P = G'$ має порядок p^2. Звідси $/T/ < p^2$. За вибором B $/B/ \in \{pq, pq^2, q^2\}$.

Нехай $/x/ = q$. Тоді $/B/ = pq$, $/A/ = 1$, $G = PB$ і, значить, $T \lhd G$. Звідси $(A;B] \ni N = T \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $/x/ = q^2$. Тоді $B \cap Z(G) = \langle x^q \rangle$. При $/B/ = pq$ чи $/B/ = q^2$ маємо $/A/ = 1$ і $(A;B] \ni N = \langle x^q \rangle \lhd G$. Нехай $/B/ = pq^2$. Тоді $G = PB$ і $T \lhd G$. Покладемо $N = T \times \langle x^q \rangle$. Тоді завдяки теоремі 1.1.1 $(A;B] \ni N = T \times \langle x^q \rangle \lhd G$. Отже, достатність для груп кожного з типів 3, 7 розглядуваної теореми доведена.

Нехай, нарешті, G – група одного з типів 5 чи 9 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^2qr$, p, q і r – різні прості числа, силовські p-підгрупа P та r-підгрупа R нормальні в G і G не містить підгруп порядку pq. За вибором B $/B/ \in \{qr, p^2q, pr\}$.

Нехай /B/ – ділиться на r. Тоді $/B/ \in \{pr, qr\}$, $/A/ = 1$, $(A;B] \ni N = R \lhd G$. Нехай, нарешті, $/B/ = p^2q$. Тоді B – ненільпотентна група Міллера–Морено з нормальною в G силовською p-підгрупою P порядку p^2 і максимальною в B силовською q-підгрупою порядку q. Звідси $A \leqslant P$. Оскільки P – максимальна підгрупа з B і $A < P$, то $(A;B] \ni N = P \lhd G$. Достатність для розглядуваних типів груп доведена. Теорема доведена.

Наслідок 3.2.1. *Локально ступінчасті недедекіндові УЩН( )-групи G вичерпуються групами типів 1 – 13 теореми 3.2.1 та групами типів 1 – 9 теореми 3.2.2. Локально ступінчасті*

УЩН( )-групи, що не є УЩН( )-групами, вичерпуються групами типів 2 – 13 теореми 3.2.1 та групами типів 2 – 9 теореми 3.2.2.

Всі групи такого роду можуть бути 20 нижченаведеними типами груп, вибраних з теорем 2.2.3 та 2.3.1 відповідно:

I. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.2.3):

1) G – група типу 6;

2) G – група типу 7;

3) G – група типу 12, G містить неабелеву підгрупу порядку p^3 і експоненти p;

4) G – група типу 13;

5) G – група типу 14;

6) G – група типу 16;

7) G – група типу 19;

8) G – група типу 20;

9) G – група типу 21;

10) G – група типу 22, $/G/ \in \{2^5, 2^6\}$;

11) G – група типу 23, $/G/ = 2^6$;

12) G – група типу 25.

II. Ненільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.3.1):

13) G – група типу 3;

14) G – група типу 4;

15) G – група типу 7, $/P'/ = p$;

16) G – група типу 8, $r \neq p$;

17) G – група типу 9;

18) G – група типу 12;

19) G – група типу 13;

20) G – група типу 16.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Можливі два випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.2.1 і може бути групою одного з типів 1 – 13 згаданої теореми. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.2.2 і може бути групою одного з типів 1 – 9 згаданої теореми. Перша частина наслідку доведена.

Нехай G – група, що задовольняє другу частину наслідку. Тоді, як і раніше, G – група одного з типів 2 – 13 та 2 – 9 теорем 3.2.1 та 3.2.2 відповідно. Зрозуміло, що група G кожного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1 є групою якогось з типів теореми 2.2.3 з певними обмеженнями чи без них, а група G кожного з типів 2 – 9 теореми 3.2.2 є групою якогось з типів теореми 2.3.1 з певними обмеженнями чи без них.

При розгляді груп G кожного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1 легко бачити, що вони будуть відповідно групами типів 1 – 12 розглядуваного наслідку.

При розгляді груп G кожного з типів 2 – 9 теореми 3.2.2 одержимо, що G – група одного з типів 13 – 20 розглядуваного наслідку відповідно. Наслідок доведений.

3.3. Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп

Т е о р е м а 3.3.1. *Нільпотентні недедекіндові УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) G – нільпотентна недедекіндова УЩН( )-група, тобто G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1;

2) $G = ((\langle u\rangle \lambda \langle v\rangle) \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u,v] = [a,b] = u^{p^{\Delta-1}}$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

3) $G = CF$, *C – локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8,* $[C,F] = 1$, $C \cap F = \langle c\rangle$, $F = (((\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle) \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

4) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \lambda \langle z\rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = |z| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] = \langle a^4\rangle$;

5) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle z\rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a,x] = b$, $[a,z] = [b,x] = a^3 = x^6$, $[b,z] = 1$;

6) $G = U \times X$, *U і X – групи кватерніонів порядку 8.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Якщо G – група одного з типів: 1 – 3; 10, $z \in Z(G)$, $|b| < 16$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, U – циклічна група; 27, то G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1 відповідно і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 4 чи 5 теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 2 чи 3 розглядуваної теореми відповідно.

Група G кожного з типів 6 – 9 теореми 2.2.3 має циклічний комутант G′ порядку p^2 і такий породжуючий елемент d, що G містить підгрупу $B = G' \lambda \langle d\rangle$. Зрозуміло, що $|[\langle d\rangle;B]| > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $[\langle d\rangle;B) \ni N \lhd G$. Звідси $[\langle d\rangle,G] \leqslant \Phi(G') \lambda \langle d\rangle$. В групі G кожного із розглядуваних типів

$[<d>,G] = G'$. Суперечність. Отже, розглядувані типи груп не можуть бути УЩН[ )-групами.

Якщо G – група типу 10, $z \in Z(G)$, $/b/ < 16$ чи G – група типу 11, $z \in Z(G)$, то за попереднім, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Припустимо, що G – група типу 10, $/b/ > 8$. Тоді $z = 1$ і G містить породжуючий елемент $d = ab^{2^{\beta-3}}$, G – циклічна група порядку 4, $G' \cap <d> = 1$. Тепер, як і для груп типу 6 – 9 теореми 2.2.3, одержимо суперечність. Таким чином, $/b/ < 16$.

Нехай G – група типу 10, $/b/ < 16$ чи 11, $z \notin Z(G)$ теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 4 та 5 даної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Зрозуміло, що G – неметациклічна група. Нехай всі власні підгрупи з G метациклічні. Тоді G задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою типу 2 згаданої теореми. Звідси G – група типу 5 розглядуваної теореми. Припустимо, що G містить власну мінімальну неметациклічну підгрупу M. Завдяки теоремі 1.3.3 $/M/ = p^3$, $\exp(M) = p$, $M = G' \lambda <y>$, $/y/ = p$, $y \in G \setminus \Phi(G)$. Ясно, що $/[<y>;M]/ > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[<y>;M) \ni N \lhd G$. Оскільки G – 2-породжена група, то $y \notin Z(G)$. Звідси $/N/ > p$ і, значить, $/N/ = p^2$. Зрозуміло, що G/N – абелева група і тому $G' \leqslant N$, що неможливо. Отже, група G типу 12 теореми 2.2.3 є групою типу 5 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 13, 14, 16, 19 – 21, 25 теореми 2.2.3 містить підгрупу $B = U<x>$, де $U = G'$, $[<x>,G] = G'$ і $/[<x>;B]/ > 2$. За означенням УЩН[ )-груп $[<x>;B) \ni N \lhd G$ і $G' \not< N$, що неможливо. Тому G не може бути групою жодного із розглядуваних типів.

В групі G кожного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3 покладемо x = b, B = $\langle a^2\rangle\langle x\rangle$ і, як і вище, прийдемо до суперечності.

Нехай G – група типу 26, U – циклічна група чи типу 27 теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 1.

Нехай G – група типу 26 і U – група кватерніонів порядку 8. Якщо [U,X] = 1, то G – група типу 6 розглядуваної теореми. Нехай $[U,X] \neq 1$. Тоді як і при доведенні необхідності теореми 3.1.1 для груп цього типу одержимо, що G – група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо A = $\langle x\rangle$, B = $\langle x\rangle\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle = \langle x\rangle G'$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп [A;B) э N ◁ G. Ясно, що N ⋫ G′. Але $[\langle x\rangle,G] = G'$, що суперечить умові N ⋫ G′. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 6 теореми. Очевидно, що G – нільпотентна недедекіндова група. Покажемо, що G – УЩН( )-група, тобто [A;B) э N ◁ G для $/[A;B]/ > 2$. Для груп G типу 1 це встановлено в теоремі 3.1.1. Тому в подальшому G – група типу 2 – 9 розглядуваної теореми. Якщо A ◁ G, то N = A і все доведено. Отже, A ⋪ G. Звідси $/A/ > 1$ і A ⋫ G′. При B = G в нільпотентній p-групі G завжди знайдеться така нормальна підгрупа N, що [A;B) э N (це легко одержати з [73, твердження 1.6]). Тому в подальшому B < G.

Нехай G – група одного з типів 2 чи 3 теореми. Тоді $/G'/ = p$, $G' \cap A = 1$. Якщо G′ ⩽ B, то [A;B) э N = G′ × A ◁ G, що й треба було довести. Отже, $B \cap G' = 1$ і тому B′ = 1, $/B/ \in \{p^3,p^4\}$. В G існує підгрупа V, яка містить G′, така, що w(V) = G′ і G/V –

елементарна абелева група. Ясно, що $V \cap B = 1$ і, значить, B – теж елементарна абелева група. Зауважимо, що $w(Z(G)) = G' = w(V)$, V – локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8.

Припустимо, що $V \lambda B = G$. Оскільки B – елементарна абелева група порядку p^3 чи p^4, V – локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8, то B не може бути підгрупою з Aut V [65]. З цього випливає, що $z \in B \cap Z(G)$ і $/z/ = p$. Тому $w(Z(G))$ містить $G' \times \langle z \rangle$, що неможливо. Отже, $V \lambda B < G$ і, значить, G – група типу 3, $/B/ = p^3$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $U = V \times \langle u \rangle \times \langle a \rangle$, $[G:U] = p^2$. Оскільки $/B/ = p^3$, то $G = UB$. Очевидно, що $w(U) \leqslant Z(G)$, тому $z \in U \cap B \cap Z(G)$, $/z/ = p$ і, значить, $w(Z(G))$ містить $G' \times \langle z \rangle$, що неможливо. Таким чином, група G кожного з типів 2 чи 3 є УЩН[ )-групою.

Нехай $G = U \lambda \langle z \rangle$ – група типу 4 теореми. Тоді $U = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = /z/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] = a^4$, $w(G) = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \times \langle z \rangle$, $c = a^4 \in Z(G)$, $d = a^2b^2$ і для будь-якого елемента u з $w(G)$ маємо $\langle c \rangle\langle u \rangle \lhd G$. Зауважимо, що $c \in V$, де V – будь-яка підгрупа V з U і $/V/ > 2$. Ясно, що $/G/ = 2^6$ і $\exp(G) = 8$. Звідси $/B/ \in \{2^3, 2^4, 2^5\}$. Нехай $X = U \cap B$. Тоді $/X/ > 2$ і за попереднім $c \in X$. Припустимо, що $/A/ = 2$. Оскільки $A \lhd G$, то $\langle c \rangle \cap A = 1$. Тоді $[A;B) \ni N = \langle c \rangle \times A \lhd G$, що й треба було довести. Отже, в подальшому $/A/ > 2$. Тоді $/B/ \in \{2^4, 2^5\}$ і оскільки $\exp(G) = 8$, то B – нециклічна група. Зауважимо, що G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8, $D = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \lhd G$ і G/D – гамільтонова група. Зрозуміло, що $/X/ > 4$.

Нехай $\exp(A) = 2$. Тоді $\langle c \rangle A = N \lhd G$ і $N \in [A;B)$, що й треба було довести. Отже, в подальшому $\exp(A) > 2$. За попереднім, $c \in A$. Якщо $a^2 \in B$, то $\langle a^2 \rangle = G'$. Покладемо $N = \langle a^2 \rangle A$. Тоді

$N \lhd G$ і $[A;B) \ni N$, що й треба було довести. Отже, можна вважати, що $B \cap \langle a\rangle = \langle c\rangle$. Оскільки $/G/\langle a\rangle/ = 8$, $/B \cap \langle a\rangle/ = 2$ і $/B/ > 8$, то $/B/ = 16$, $/X/ = 8$, $[B:X] = 2$ і $\langle a\rangle \cap X = \langle c\rangle$.

Припустимо, що $d \in A$. Тоді, за попереднім, $D = \langle c\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$, $D \leqslant A$, G/D – гамільтонова група і, значить, $A \lhd G$, що не так. Таким чином, $d \notin A$. Припустимо, що $d \in B$. Тоді $N = DA = A(\langle c\rangle \times \langle d\rangle) = A \lambda \langle d\rangle \lhd G$ і тому $[A;B) \ni N$, що й треба було довести. Нехай тепер $d \notin B$. Звідси X має тільки одну інволюцію. Завдяки теоремі 12.5.1 з [64] $X = \langle x\rangle$, $/x/ = 8$, $w(\langle x\rangle) = \langle c\rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $B = \langle x\rangle \lambda \langle z\rangle$. Зрозуміло, що $x^{-1}ax = a^{-1}$, $\langle x^2\rangle = Z(G)$. Нехай $\langle x^2\rangle \times \langle z\rangle = N = \langle x^2\rangle w(B) = \langle x^2\rangle(\langle c\rangle \times \langle z\rangle)$. Тоді, за попереднім, $\langle c\rangle \times \langle z\rangle \lhd G$ і тому $N \lhd G$. Завдяки теоремі 1.1.1 $[A;B) \ni N$. Отже, група G типу 4 є УЩН[ )-групою.

Нехай $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle z\rangle)$ – група типу 5 теореми. Тоді $/G/ = 3^5$, $a^3 = x^6$, $/x/ = 9$, $G' = \langle a^3\rangle \times \langle b\rangle$, $w(G) = G' \times \langle z\rangle$, $Z(G) = w(Z(G)) = \langle c\rangle = \langle a^3\rangle$, для будь-якого елемента v з w(G) $\langle c\rangle\langle v\rangle \lhd G$, $\exp(G) = 9$ і для будь-якого елемента u з G, $/u/ = 9$ маємо $w(\langle u\rangle) = \langle c\rangle$. Зрозуміло, що $/B/ \in \{3^3, 3^4\}$ і $c \in B$. Нехай $/A/ = 3$. За попереднім, $\langle c\rangle A = N \lhd G$ і тому $[A;B) \ni N$, що й треба було довести. Припустимо, що $/A/ > 3$. Тоді $/A/ = 9$, $/B/ = 3^4$, $G' \leqslant B$. Якщо $c \in A$, то покладемо $N = G'A$. Звідси $[A;B) \ni N \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $c \notin A$. Тоді $\exp(A) = 3$. Покладемо $\langle c\rangle \times A = N$. Звідси $[A;B) \ni N = w(G) \lhd G$ і таким чином, група G типу 5 теореми є УЩН[ )-групою.

Нехай $G = U \times X$ – група типу 6 теореми. Тоді легко бачити, що U та X – групи кватерніонів порядку 8, $/G/ = 2^6$,

$Z(G) = w(G) = \Phi(G) = w(U) \times w(X) = G'$, $\exp(G) = 4$. За вибором A $\exp(A) > 2$. Звідси $/A/ > 2$ і $/B/ > 8$. Оскільки $\exp(G) = 4$, то B містить G'. Знову в силу вибору A $G' \not< A$. Але A містить u і $/u/ = 4$. Очевидно, що $\langle u^2 \rangle = G' \cap A$ і тому $[A;B) \ni N = G'A \lhd G$. Отже, група G типу 6 є УЩН[ )-групою. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.3.2. *Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) G – ненільпотентна УЩН( )-група, тобто група G одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

3) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, P – група типу (p,p), $/x/ \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P – група типу (p,p), $/x/ = qr$, $P \lambda \langle x^q \rangle$ та $P \lambda \langle x^r \rangle$ – ненільпотентні групи Міллера–Морено;

5) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P – група типу (p,p), $/x/ \in \{q^2, q^3\}$, $P \lambda \langle x^q \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено;

6) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – група типу (p,p), $P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, $/x/ = q$, $/z/ = r$, $p \neq r$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми.

Якщо G – група одного з типів: 1; 10; 11; 14 теореми 2.3.1, то G – група одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 2 чи 4 теореми 2.3.1 є групою типу 2 чи 3 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 5 теореми 2.3.1 і $/P/ = p^3$. Тоді $/[A;P]/ > 2$, де $/A/ = p$ і за означенням УЩН( )-груп [A;P) э $N \lhd G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G. З цього випливає, що P – група типу (p,p) і G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 6 теореми 2.3.1. Як і вище, маємо, що P – група типу (p,p) і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.3.1. Тоді, як і в групі G типу 5, [A;P) э $N \lhd G$, $/A/ = p$, $A \not\lhd G$. Але тоді $/N/ = p^2$ і P – нормальна силовська p-підгрупа експоненти p групи Шмідта G. За будовою груп Шмідта (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [78]) P не містить нормальних в G підгруп порядку p^2. Отже, G не може бути групою типу 7 теореми 2.3.1.

Нехай G – група типу 8 теореми 2.3.1. Припустимо, що $/z/ = p$. Позначимо через $B = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle z\rangle$. При цьому B – група типу (p,p,p). Нехай $A = \langle az\rangle$. Ясно, що $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп [A;B) э $N \lhd G$. Зрозуміло, що $/N/ \in \{p, p^2\}$. З будови груп Міллера–Морено $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ (див., наприклад, твердження 1.1.1 з [77]) випливає, що 2 – показник p за модулем q, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – мінімільна нормальна підгрупа з G. Легко встановити, що $N \not\leq \langle a\rangle \times \langle b\rangle$. Тоді $/(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \cap N/ \leqslant p$. Оскільки $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – мінімальна нормальна підгрупа з G, то $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \cap N = 1$ і тому $/N/ = p$. Отже, $N = A = \langle az\rangle$. Далі легко встановити, що $[A,\langle x\rangle] \leqslant \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ і $[A,\langle x\rangle] \neq 1$. З іншого боку, $[A,\langle x\rangle] \leqslant G' \cap A = 1$, що неможливо. Це означає, що $/z/ = r \neq p$ і, значить, G – група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів 9, 12, 13, 15 – 17 теореми 2.3.1. Тоді $G = G' \lambda \langle x \rangle$, $\langle x \rangle$ містить ненормальну в G силовську q-підгрупу A, $[G',A] = G'$. Покладемо $B = G' \lambda A$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $[A;B) \ni N \lhd G$. З цього випливає, що $[N,G']$ містить $[A,G']$ і строго належить G', що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай, нарешті, G – група типу 3 теореми 2.3.1. Тоді $/[\langle x \rangle;G]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $[\langle x \rangle;G) \ni N \lhd G$, що в групі Шмідта G неможливо (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [78]). Отже, G не може групою типу 3 теореми 2.3.1. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 6 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – нескінченна нільпотентна, а тому локально ступінчаста група. Покажемо, що G – УЩН( )-група. Дійсно, для груп G типу 1 це встановлено в теоремі 3.1.2. Тому в подальшому будемо вважати, що G – група одного з типів 2 – 6 розглядуваної теореми. Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B) \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, то покладемо $N = A$ і все доведено. Тому $A \not\lhd G$. Звідси $A \neq 1$, $G' \not< A$ і $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел.

В групі G типу 2 розглядуваної теореми $B = G$, $/A/$ – просте число. Покладемо $N = G'A$. Тоді $[A;B) \ni N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група одного з типів 3 – 6 розглядуваної теореми. Тоді G' – мінімальна нормальна підгрупа з G типу (p,p), G' – силовська p-підгрупа з G і $G = G' \lambda X$, де $X = \langle x \rangle$ – холлівська підгрупа з G. Без порушення загальності можна вважати, що

$A = P_1 \lambda \langle x_1 \rangle$ і $B = P_2 \lambda \langle x_2 \rangle$, де $P_1 = A \cap G'$, $\langle x_1 \rangle = A \cap X$, $P_2 = B \cap G'$, $\langle x_2 \rangle = B \cap X$.

Нехай $P_2 = 1$. Тоді $B = \langle x_2 \rangle$ і $[G:G']$ ділиться на добуток трьох простих чисел. А це можливо лише в групі G типу 5, у якої $B = \langle x \rangle$, $/x/ = q^3$ і $A = \langle x^{q^2} \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A. Отже, $P_2 \neq 1$. Зрозуміло, що $/P_2/ \in \{p, p^2\}$. Ясно, що кожний елемент із X індукує на G′ незвідний або тотожний автоморфізм.

Припустимо, що $/P_2/ = p$. Тоді x_2 індукує на P тотожний автоморфізм і тому $x_2 \in Z(G)$. Але тоді $/x_2/ \in \{1, q, r\}$ і $/B/$ не ділиться на добуток трьох простих чисел, що не так. Отже, $/P_2/ = p^2$. Ясно, що $/P_1/ \in \{1, p\}$.

Нехай спочатку $/P_1/ = 1$. Якщо $G' \lambda A < B$, то $G' \lambda A = N$ і $[A;B)$ э $N \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $G' \lambda A = B$. Тоді $A = \langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle$. Оскільки $A \not\lhd G$, то x_1 індукує на G′ незвідний автоморфізм. Звідси A – максимальна підгрупа з B, що не так. Таким чином, $/P_1/ = p$. Як і раніше, $x_1 \in Z(G)$. Якщо $/x_1/ = 1$, то $[A;B)$ э $N = G' \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $/x_1/ \neq 1$. Тоді $/x_1/ \in \{r, q\}$ і $/B/$ ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Покладемо $N = G' \times \langle x_1 \rangle$. Тоді $[A;B)$ э $N \lhd G$. Отже, група G кожного із розглядуваних типів є УЩН[ )-групою. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 3.3.1. *Локально ступінчасті недедекіндові УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів 1 – 6 теореми 3.3.1 та групами типів 1 – 6 теореми 3.3.2. Локально ступінчасті УЩН[ )-групи, що не є УЩН( )-групами, вичерпуються групами типів 2 – 6 теореми 3.3.1 та групами типів 2 – 6 теореми 3.3.2.*

Всі групи такого роду можуть бути 10 нижченаведеними типами груп, вибраних з теорем 2.2.3 та 2.3.1 відповідно:

I. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.2.3):

1) G – група типу 4;

2) G – група типу 5;

3) G – група типу 10, $z \notin Z(G)$;

4) G – група типу 11, $z \notin Z(G)$;

5) G – група типу 26, U – група кватерніонів, $[U,X] = 1$.

II. Ненільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.3.1):

6) G – група типу 2;

7) G – група типу 4;

8) G – група типу 5, G' – група типу (p,p);

9) G – група типу 6, G' – група типу (p,p);

10) G – група типу 8, $p \neq r$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Можливі два випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 6 згаданої теореми. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.2 і може бути групою одного з типів 1 – 6 згаданої теореми. Перша частина наслідку доведена.

Нехай G – група, що задовольняє другу частину наслідку. Тоді, як і раніше, G – група одного з типів 2 – 6 та 2 – 6 теорем 3.3.1 та 3.3.2 відповідно. Зрозуміло, що група G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.1 є групою якогось з типів теореми 2.2.3 з певними обмеженнями чи без них, а група G кожного з типів 2 – 6 теореми

3.3.2 є групою якогось з типів теореми 2.3.1 з певними обмеженнями чи без них.

При розгляді типів груп G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.1 легко бачити, що вони будуть відповідно групами типів 1 – 5 розглядуваного наслідку.

При розгляді типів груп G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.2 одержимо, що G – група одного з типів 6 – 10 розглядуваного наслідку відповідно. Наслідок доведений.

3.4. Деякі наслідки

Т е о р е м а 3.4.1. *Всі не УЩН( )-групи, які належать перетину класів локально ступінчастих УЩН[ )- та УЩН( ]-груп, вичерпуються групами типів:*

1) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, P – група типу (p,p), $/x/ \in \{q, q^2\}$;

2) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \lambda \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера–Морено, P – група типу (p,p), $/x/ = q$, $/z/ = r$, $r \neq p$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Оскільки G не УЩН( )-група, то G – недедекіндова група. Можливі випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.1 і може бути групою одного з типів 2 – 6 згаданої теореми.

Група G кожного з типів 2 – 5 згаданої теореми містить підгрупу B типу (p,p), для якої $G' \cap B = B \cap Z(G) = 1$. Оскільки G – УЩН( ]-група, то покладемо $A = 1$ і за означенням УЩН( ]-

груп (A;B] э $N \lhd G$. Звідси $/N/ > 1$ і, за попереднім, $N \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $B \cap Z(G) = 1$. Тому G не може бути групою згаданих типів.

Нехай G – група типу 6 теореми 3.3.1. Тоді $G = U \times X$, де $U = \langle a,b \rangle$ та $X = \langle x,y \rangle$ – групи кватерніонів порядку 8. Покладемо $Q = \langle ax,by \rangle$. Легко бачити, що Q – група кватерніонів порядку 8 і Q не містить нормальних в G підгруп порядку більше 2. Оскільки за умовою теореми G – УЩН( )-група і $/[\Phi(Q);Q]/ > 2$, то $(\Phi(Q);Q] \ni N \lhd G$, що суперечить властивості підгрупи Q. Отже, G не може бути групою типу 6 теореми 3.3.1.

Таким чином, G не може бути нільпотентною групою. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.2 і може бути групою одного з типів 2 – 6 згаданої теореми. Якщо G – група одного з типів 3 чи 6 згаданої теореми, то G – група типу 1 чи 2 розглядуваної теореми відповідно.

В групі G кожного з типів 2, 4, 5 є циклічна холлівська ненормальна в G підгрупа $\langle x \rangle$, $\langle x \rangle$ містить власну немаксимальну підгрупу A, що породжується всіма нормальними в G підгрупами з $\langle x \rangle$. За умовою теореми $(A;\langle x \rangle] \ni N \lhd G$, що суперечить властивостям підгруп A та $\langle x \rangle$. Отже, G не може бути групою жодного із розглядуваних типів. Випадок 2 розглянутий. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – нескінченна нільпотентна, а тому локально ступінчаста ненадрозв'язна група. За теоремою 3.1.2 G не може бути УЩН( )-групою. Оскільки група G типу 1 чи 2 розглядуваної теореми є групою відповідно типу 3 та 6

теореми 3.3.2, то G – УЩН( )-група. Група G кожного з розглядуваних типів є групою одного з типів 3 та 5 теореми 3.2.2 відповідно і тому G – УЩН[ )-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.4.1. *Класи довільних і навіть локально ступінчастих УЩН( )- і УЩН[ )-груп не співпадають і не містяться один в одному. Їх перетин містить клас всіх УЩН( )-груп, але ним не вичерпується. Перетин нільпотентних класів УЩН( )- та УЩН[ )-груп співпадає з класом нільпотентних УЩН( )-груп.*

Доведення. За теоремою 3.4.1 К(УЩН( ]) ∩ К(УЩН[ )) ⩾ К(УЩН( )). Попереднє співвідношення справедливе навіть при умові локальної ступінчастості розглядуваних груп. За згаданою теоремою для нільпотентних груп К(УЩН( ]) ∩ К(УЩН[ )) = К(УЩН( )). Група G типу 2 теореми 3.2.2 належить К(УЩН( ]), але не належить К(УЩН[ )). Група G типу 2 теореми 3.3.2 належить К(УЩН[ )), але не належить К(УЩН( ]). Звідси К(УЩН( ]) не належить К(УЩН[ )) і навпаки. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 3.4.2. *Клас УЩН[ )-груп містить об'єднання класів УЩН[ )- та УЩН( )-груп, але ним не вичерпується.*

Локально ступінчасті УЩН[ )-групи, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих УЩН[ )- та УЩН( )-груп, вичерпуються групами типів:

I. Нільпотентні групи:

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-2}}$;

2) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = p$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-2}}$, $\langle a\rangle \lhd G$;

3) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 3$, $|d| = 4$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

4) $G = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|c| = |b| = |a| = |x| = p$, $p > 3$, $[a,b] = b$, $[b,x] = c$, $[c,x] = 1$;

5) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = |x| = p$, p – *непарне просте число*, $[a,b] = a^{sp}$, $0 < s < p$, $[a,b] = b$, $[b,x] = 1$;

6) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{7}$;

8) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

9) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap \langle x\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$.

II. Нільпотентні групи:

10) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P – *група типу* (p,p,p), $|x| = qr$, p, q, r – *попарно різні прості числа*, $P \lambda \langle x^q\rangle$ *та* $P \lambda \langle x^r\rangle$ – *групи Міллера–Морено;*

11) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P – *група типу* (p,p,p), $|x| = q^2$, p *і* q – *різні прості числа*, $P \lambda \langle x^q\rangle$ – *група Міллера–Морено;*

12) $G = P \lambda \langle x\rangle$ – *нільпотентна група Міллера–Морено*, P – *група типу* (p,p,p), $|x| = q$;

13) $G = (P \lambda \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $P \lambda \langle x\rangle$ – *нільпотентна група Міллера–Морено*, P – *група типу* (p,p), $|x| = q$, $|z| = r$;

14) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = q$, $(\langle a^p\rangle \times \langle b^p\rangle) \lambda \langle x\rangle$ – *нільпотентна група Міллера–Морено;*

15) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, P – група типу (p,p), $/x/ = qr$, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $P \lambda \langle x^q\rangle$ та $P \lambda \langle x^r\rangle$ – мінімальні неметациклічні групи.

Доведення. *Необхідність.* Нехай X = К(УЩН[ )) ∪ К(УЩН( ]). Зрозуміло, що К(УЩН( )) ∈ X. Легко бачити, що група G типу 5 теореми 2.3.1, у якої P – група типу (p,p,p), не належить X. Звідси К(УЩН[ ]) > X. Отже, перша частина теореми доведена.

Нехай S та Σ – всі локально ступінчасті групи із К(УЩН[ ]) та X відповідно. Для завершення доведення необхідності теореми залишається знайти всі типи груп, що належать класу $\overline{\Sigma}$, де $\overline{\Sigma} \cup \Sigma = S$ і $\overline{\Sigma} \cap \Sigma = \varnothing$. Ясно, що досліджувана група G не може бути УЩН( )-групою. Можливі випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми. Оскільки група G кожного з типів: 1 – 3; 10, $z \in Z(G)$, $/b/ \in \{4,8\}$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$; 27 є групами типів 1 – 10 теореми 3.3.1 відповідно, то G не може бути групою згаданих типів теореми 2.2.3.

Група G кожного з типів: 6; 7; 12, $P' \neq 1$; 13; 14; 16; 19 – 21; 22, $/G/ \in \{2^5, 2^6\}$; 23, $/G/ = 2^6$; 25 теореми 2.2.3 є групами типів 1 – 12 наслідку 3.2.1 відповідно, за твердженням якого всі типи груп є УЩН( ]-групами. Отже, G не може бути групою жодного із цих типів.

Група G кожного з типів: 4; 5; 10, $z \notin Z(G)$; 11, $z \notin Z(G)$; 26, U – група кватерніонів, $[U,X] = 1$ теореми 2.2.3 є групами типів 1 – 5 наслідку 3.3.1 відповідно, за твердженням якого всі типи груп є

УЩН( )-групами. Отже, G не може бути групою жодного із цих типів.

За попереднім, G не може бути групою жодного з типів: 1 – 7; 13 – 21; 25; 27 теореми 2.2.3.

Група G кожного з типів 8, 9 та 28 теореми 2.2.3 є відповідно групою типу 1, 2 та 9 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 10 теореми 2.2.3. Тоді, за попереднім, $z \in Z(G)$. При $\beta < 4$ за твердженням теореми 3.3.1 G – УЩН( )-група типу 4 теореми 3.1.1, що не так. Звідси $\beta > 3$, $/z/ = 1$ і G – група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 11 теореми 2.2.3. За попереднім, $z \in Z(G)$ і G – група типу 5 теореми 3.1.1, що неможливо.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $/c/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $c \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$, $/G/ = p^4$. Якщо G – мінімальна неметациклічна група, то G – група типу 2 теореми 1.3.3 і, значить, G – група типу 5 теореми 3.1.1, що не так. Звідси G містить власну мінімальну неметациклічну підгрупу M, яка може бути лише групою типу 1 теореми 1.3.3. Отже, $/M/ = p^3$, $\exp(M) = p$, M – максимальна підгрупа з G, $G' \leqslant M$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $C \lhd G$, G/C – підгрупа з Aut G′, $C < G$. Відомо [65], що силовські p-підгрупи з Aut G′ мають порядок p. З цього випливає, що $[G:C] = p$, $/C/ = p^3$, $C' = 1$. Таким чином, C – група типу (p^2,p) чи (p,p,p).

Припустимо, що $M' \neq 1$. Тоді $M = G' \lambda \langle x \rangle$, $/x/ = p$ і без порушення загальності можна вважати, що $[b,x] = c$. Зрозуміло, що $G = C \lambda \langle x \rangle$. Якщо C – група типу (p,p,p), то $C = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a \rangle$. Без порушення загальності вважаємо, що $[a,x] = b$ і тому при $p > 3$ G – група типу 4 розглядуваної теореми. Легко бачити, що при

$p = 3$ G – група типу 5 розглядуваної теореми. Нехай тепер C – група типу (p^2, p). Тоді $\Phi(C) \cap \langle b \rangle = 1$, $/\Phi(C)/ = p$ і, значить, $\Phi(C) \leqslant Z(G)$. Ясно, що $C = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p^2$. Очевидно, що $\langle a^p \rangle = \langle c \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a,x] = b$. Зрозуміло, що $c = a^{sp}$, $0 < s < p$, і G – група типу 4 теореми 3.2.1, що неможливо.

Нехай тепер $M' = 1$. Тоді $M = C$ – група типу (p,p,p). Якщо $G \backslash C$ містить x і $/x/ = p$, то $G = C \lambda \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $C = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a_1 \rangle$. Якщо $G' \lambda \langle x \rangle$ – неабелева група, то можна вважати, що $M = G' \lambda \langle x \rangle$ і прийдемо до розглядуваного випадку. Якщо ж $G' \lambda \langle x \rangle$ – абелева група, то $G' \leqslant Z(G)$, що не так. Отже, для a із $G \backslash C$ маємо $/a/ > p$, $G = C\langle a \rangle$ і $C \cap \langle a \rangle = \langle a^p \rangle$. Звідси $/a/ = p^2$ і $a^p \in Z(G)$.

Нехай $G' \cap \langle a \rangle = 1$. Тоді $G = G' \lambda \langle a \rangle$. Оскільки $G'/\langle c \rangle \leqslant Z(G/\langle c \rangle)$, то $[a,b] \in \langle c \rangle$ і тому $G' \leqslant \langle c \rangle$, що неможливо. Таким чином, $a^p \in G'$ і, значить, $\langle a^p \rangle = \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $C = G' \times \langle x \rangle$, G містить підгрупу $\langle a \rangle G' = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ і $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$. Оскільки $[b,x] = 1$ і $b \in G'$, то без порушення загальності вважаємо, що $[a,x] = b$. При $[a,b] = 1$ одержимо, що G – група типу 4 теореми 3.2.1, що не так. Таким чином, $[a,b] = a^{sp}$, $0 < s < p$ і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 22 чи 23 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$. При $\beta < 4$ G – УЩН( )-група одного з типів 11 та 12 теореми 3.2.1 відповідно. Отже, в групах G кожного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3 $\beta = 4$ і G – група одного з типів 6 – 8 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай $G = U \lambda X$ – група типу 26 теореми 2.2.3. Якщо U – циклічна група, то $[U,X] \neq 1$, $/C_X(U)/ = 4$ і G – УЩН( )-група типу 9 теореми 3.1.1, що неможливо. Отже, U – група кватерніонів порядку 8 і при $[U,X] = 1$ G – УЩН[ )-група типу 6 теореми 3.3.1, що знову неможливо. Звідси $[U,X] = \Phi(U)$. Зрозуміло, що $/C_X(U)/ = 4$ і G – УЩН( )-група типу 9 теореми 3.1.1, що знову неможливо. Всі випадки розглянули. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. Група G кожного з типів: 1; 10; 11; 14 теореми 2.3.1 за наслідком 3.1.2 є УЩН( )-групою. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Група G кожного з типів: 3; 4; 7, $/P'/ = p$; 8, $r \neq p$; 9; 12; 13; 16 теореми 2.3.1 за наслідком 3.2.1 є УЩН( ]-групою. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Група G кожного з типів: 2; 5, G′ – група типу (p,p); 6, G′ – група типу (p,p) теореми 2.3.1 за наслідком 3.3.1 є УЩН[ )-групою. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Таким чином, G не може бути групою жодного з типів: 1 – 4; 9 14; 16 теореми 2.3.1.

Нехай G – група типу 5 згаданої теореми. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$, $/P/ \in \{p^2, p^3\}$, $/x/ = qr$. При $/P/ = p^2$ G – УЩН[ )-група типу 3 теореми 3.3.2, що не так. Отже, $/P/ = p^3$ і G – група типу 10 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 6 теореми 2.3.1. Тоді, як і раніше, $/P/ = p^3$ і, значить, G – група типу 11 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.3.1. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = p$. При $P' \neq 1$ G – УЩН( )-група типу 4 теореми 3.2.2, що неможливо. Звідси $P' = 1$ і G – група типу 12 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 8 теореми 2.3.1. Тоді $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/z/ = r$, $/P/ = p^2$. При $p \neq r$ G – УЩН( )-група типу 2 теореми 3.1.2, що не так. Отже, $p = r$ і G – група типу 13 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 15 та 17 теореми 2.3.1 є групою кожного з типів 14 та 15 розглядуваної теореми відповідно. Всі можливі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 15 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – локально ступінчаста недедекіндова група. Покажемо, що G – УЩН[ ]-група, що не належить $К(УЩН[\ ]) \cup К(УЩН(\ ])$.

Група G кожного з типів 1 – 9 розглядуваної теореми є відповідно УЩН[ ]-групою кожного з типів: 8; 9; 10; 12; 22; 23; 24; 28 теореми 2.2.3.

Група G кожного з типів 10 – 15 розглядуваної теореми є відповідно УЩН[ ]-групою кожного з типів: 5; 6; 7; 8; 15; 17 теореми 2.3.1.

Покажемо, що $G \notin К(УЩН[\ ]) \cup К(УЩН(\ ])$. Група G кожного з типів 10, 11, 12, 14, 15 містить мінімальну нормальну підгрупу порядку p^3. Звідси завдяки лемам 3.1.1 та 3.1.2 $G \notin К(УЩН[\ ]) \cup К(УЩН(\ ])$. Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що в G не виконується жодне із співвідношень $[A;B) \ni N \lhd G$ чи $(A;B] \ni N \lhd G$.

Нехай G – група типу 13 розглядуваної теореми. Тоді G – ненільпотентна група, яка не може бути групою жодного із типів теорем 3.1.2, 3.2.2 та 3.3.2, і тому достатність для цього типу груп доведена.

Нехай G – група одного з типів 1 – 9 розглядуваної теореми. Тоді G – нільпотентна група. В групі G кожного з типів 1 – 3, 6 – 8 є елемент g такий, що $\langle g^p \rangle \lhd G$. Завдяки лемі 3.1.1 G не УЩН( )-група.

В групі G кожного з типів 4 та 5 розглядуваної теореми існує підгрупа B типу (p,p) така, що $B \cap Z(G) = 1$ і $B \lhd G$. Припустимо, що G – УЩН( )-група. Покладемо A = 1. Тоді (A;B] э $N \lhd G$, що неможливо за попереднім. Отже, G не може бути УЩН( )-групою.

Група G кожного з типів 4 та 5 розглядуваної теореми містить підгрупу із твердження 3 леми 3.1.2 і тому G не може бути УЩН[ )-групою.

В групі G кожного з типів 1 – 3 розглядуваної теореми є така ненормальна підгрупа $\langle g \rangle$, що $\langle g \rangle \cap G' = 1$, $[\langle g \rangle, G] = G' = \langle u \rangle$, $/u/ = p^2$. Покладемо $B = \langle u \rangle \lambda \langle g \rangle$, $A = \langle g \rangle$. Якщо УЩН[ )-група, то [A;B) э $N \lhd G$ і $N \leqslant w(\langle u \rangle) \times \langle g \rangle$, що суперечить умові $[\langle g \rangle, G] = \langle u \rangle$.

Нехай G – група одного з типів 6 – 8 розглядуваної теореми. Покладемо $A = \langle b \rangle$, $B = \langle a^2 \rangle\langle b \rangle$. Тоді $/[A;B]/ > 2$, $[\langle b \rangle, G] = \langle a^2 \rangle = G'$. Припустимо, що G – УЩН[ )-група. Тоді [A;B) э $N \lhd G$ і $N \leqslant \langle a^4 \rangle\langle b \rangle$, що суперечить умові $[\langle b \rangle, G] = \langle a^2 \rangle$.

Нехай G – група типу 9 розглядуваної теореми. Покладемо $A = \langle x \rangle$, $B = \langle x \rangle\langle a^2 \rangle\langle b^2 \rangle = \langle x \rangle G'$. Тоді $/[A;B]/ > 2$. Якщо G – УЩН[ )-група, то [A;B) э $N \lhd G$. Ясно, що $N \not> G'$, що суперечить умові $[\langle x \rangle, G] = G'$. Нехай далі G – УЩН( )-група. Покладемо

$A = 1$, $B = \langle ax \rangle$. Тоді $|[A;B]| > 2$ і $(A;B] \ni N \lhd G$. Звідси, очевидно, $|N| = 2$ і $N \leqslant Z(G)$, що не так.

Отже, група G не може бути ні УЩН( )-, ні УЩН[ )-групою і тому $G \notin К(УЩН[\ )) \cup К(УЩН(\ ])$. Достатність доведена. Теорема доведена.

Висновки до розділу III

Підрозділ 3.1. присвячений опису УЩН( )-груп (означення 1.2.3). Доведено, що існує 10 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.1.1) та 4 типи ненільпотентних (теорема 3.1.2) УЩН( )-груп.

У підрозділі 3.2 описані локально ступінчасті УЩН( ]-групи (означення 1.2.3). Одержано 13 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.2.1) та 9 типів ненільпотентних (теорема 3.2.2) груп такого роду.

Підрозділ 3.3 присвячений опису УЩН[ )-груп (означення 1.2.3). Доведено, що існує 6 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.3.1) та 6 типів ненільпотентних (теорема 3.3.2) УЩН[ )-груп.

У підрозділі 3.4 встановлено деякі структурні властивості введених класів груп. Зокрема, в теоремі 3.4.1 описаний клас груп, який належить перетину класів локально ступінчастих УЩН[ )- та УЩН( ]-груп. Теорема 3.4.2 описує локально ступінчасті УЩН[ ]-групи, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих УЩН[ )- та УЩН( ]-груп.

Результати опису всіх нільпотентних груп та ненільпотентних локально ступінчастих УЩН( ]- та УЩН[ )-груп є новими. Результати опису скінченних ненільпотентних УЩН( )-груп співпадають з результатами робіт [159, 163].

РОЗДІЛ IV

ГРУПИ З УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ МАЙЖЕ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Значні розширення класу дедекіндових груп виникають при переході від умови нормальності до деяких її узагальнень. Одним із таких узагальнень є поняття майже нормальності підгрупи групи. Цей розділ присвячений опису локально майже розв`язних груп з умовами щільностей майже нормальності для різних систем підгруп.

4.1. Попередні результати

Означення 4.1.1 [68, § 4.3]. *Множина елементів групи G, кожний із яких має скінченну множину спряжених, є характеристичною підгрупою G. Цю підгрупу називають FC-центром групи G і позначають через FC(G).*

Означення 4.1.2. *Підгрупа H групи G називається майже нормальною підгрупою групи G (MH-підгрупою), коли індекс $[G:N_G(H)]$ скінченний.*

Лема 4.1.1. *Нехай G — група, у якої для будь-якої пари нескінченних підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, знайдеться MH-підгрупа C з співвідношеннями $A \leqslant C \leqslant B$, і H — її нескінченна підгрупа. Якщо H породжується скінченним числом своїх нескінченних власних немакси-*

мальних підгруп, чи H містить таку свою нормальну підгрупу N, що H/N — нечерніковська абелева група, то H — MH-підгрупа з G.

Доведення. Нехай G та H задовольняють умову леми. Припустимо спочатку, що $H = \langle H_1, \ldots, H_n \rangle$, де $i \in \{1,\ldots,n\}$, H_i — нескінченна власна немаксимальна підгрупа з H. Тоді за умовою леми G містить MH-підгрупу C_i з співвідношенням $H_i \leqslant C_i \leqslant H$. Зрозуміло, що $H = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$, і тому, очевидно, H — MH-підгрупа з G.

Нехай тепер $N \lhd G$ і H/N — нечерніковська абелева група. Припустимо, що $N = 1$ і розглянемо два можливі випадки: 1) H — періодична група; 2) H — неперіодична група.

Випадок 1. У цьому випадку завдяки [65, § 25] $H = Z_1 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_4$, де Z_1, Z_2, Z_3 — неодиничні локально циклічні підгрупи, Z — нескінченна підгрупа. Покладемо $X_1 = Z_1 \times Z$, $X_2 = Z_2 \times Z$ і $X_3 = Z_3 \times Z$. Зрозуміло, що X_i — нескінченна власна немаксимальна підгрупа з H, $i \in \{1, 2, 3\}$. За попереднім, H — MH-підгрупа з G.

Випадок 2. У цьому випадку H містить вільну абелеву підгрупу B, для якої фактор-група H/B періодична. Нехай B_m — підгрупа з B, породжена m-ми степенями елементів з B. Тоді H/B_m — періодична група і $/B_m/ = \infty$. Можна вважати, що m ділиться на добуток трьох різних простих чисел і, значить, $H/B_m = X_1/B_m \times X_2/B_m \times X_3/B_m$, $/X_i/B_m/ = \overline{1}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Звідси X_i — нескінченна власна немаксимальна підгрупа з H і $H = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$. За попереднім, H — MH-підгрупа з G.

Отже, для розглядуваних випадків лема доведена.

Припустимо тепер, що $N \neq 1$. Тоді, за попереднім, H/N породжується скінченним числом нескінченних власних немаксимальних

в H/N підгруп X_i/N. Звідси X_i — нескінченна власна немаксимальна підгрупа з H. За раніше доведеним, H — MH-підгрупа з G. Лема доведена.

Через P(G) будемо позначати максимальну періодичну нормальну підгрупу групи G, а через T(G) — періодичну частину групи G.

Л е м а 4.1.2. *Нехай G — група із леми 4.1.1, $g \in G$. Якщо G містить підгрупу $A = \times_{\lambda \in \Delta} F_\lambda$, $F_\lambda \neq 1$, F_λ — $<g>$-допустима підгрупа, $\lambda \in \Delta$ і множина Δ нескінченна, то $g \in FC(G)$; при цьому $C_G(Z) \leqslant FC(G)$ для будь-якої абелевої нечерніковської підгрупи Z з G.*

Доведення. Оскільки Δ — нескінченна множина, то без порушення загальності можна вважати, що $<g> \cap A = 1$. Нехай M_1, M_2 — нескінченні підмножини Δ, які мають властивості $M_1 \cup M_2 = \Delta$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Далі, нехай M_3 (відповідно M_4) — нескінченні підмножини M_1 (відповідно M_2), для яких множина $M_1 \backslash M_3$ (відповідно $M_2 \backslash M_4$) нескінченна. Підгрупа $\times_{\lambda \in M_3} F_\lambda \lambda <g>$ (відповідно $\times_{\lambda \in M_4} F_\lambda \lambda <g>$) нескінченна і немаксимальна в $\times_{\lambda \in M_1} F_\lambda \lambda <g>$ (відповідно $\times_{\lambda \in M_2} F_\lambda \lambda <g>$). Тому існує майже нормальна в G підгрупа H_1 (відповідно H_2), яка лежить між ними. Маємо тоді $<g> \leqslant H_1 \cap H_2 \leqslant (\times_{\lambda \in M_1} F_\lambda \lambda <g> \cap \times_{\lambda \in M_2} F_\lambda \lambda <g>) = <g>$. Оскільки перетин двох майже нормальних підгруп є майже нормальною підгрупою, то $<g>$ майже нормальна. Це означає, що $[G:N_G(<g>)] < \infty$. Далі, завдяки тому, що $[N_G(<g>):C_G(g)] < \infty$ випливає скінченність індексу $[G:C_G(g)]$. Отже, $g \in FC(G)$.

Нехай Z — абелева нечерніковська підгрупа з Z. Якщо Z — неперіодична підгрупа, то будь-яка її нескінченна циклічна підгрупа $\langle z \rangle$ за лемою 4.1.1 є МН-підгрупою з G, і, значить, $z \in FC(G)$. Нехай g — довільний елемент скінченного порядку з $C_G(Z)$. За лемою 4.1.1 $H = \langle z \rangle \times \langle g \rangle$ — МН-підгрупою з G. Її характеристична підгрупа $T(H) = \langle g \rangle$ нормальна в $N_G(H)$ і, оскільки $[G:N_G(H)] < \infty$, то $\langle g \rangle$ — МН-підгрупа з G. Звідси $g \in FC(G)$. Отже, $C_G(Z) \leqslant FC(G)$.

Нехай тепер Z — періодична група. Тоді $C_G(Z) \leqslant FC(G)$ за попереднім. Лема доведена.

Л е м а 4.1.3. *Нехай G — група із леми 4.1.1, що містить періодичну абелеву нечерніковську підгрупу H. Тоді G — FC-група.*

Доведення. Нехай G і H задовольняють умову леми. Тоді за лемою 4.1.1 H — МН-підгрупа з G, яка за лемою 4.1.2 належить FC(G). Покладемо $G_1 = \bigcap_{g \in G} N_G(H^g)$. Ясно, що $G_1 \lhd G$, $[G:G_1] < \infty$ і $G_1 \leqslant N_G(H)$. Звідси $H \cap G_1 = G_2 \lhd N_G(H)$ і $[H:G_2] < \infty$.

Нехай y — примарний елемент з G і $G_3 = G_2^{\langle y \rangle}$ — нормальне замикання G_2 відносно $\langle y \rangle$. Зрозуміло, що $G_3 = \langle G_2^{y^i} / i \in \{0, \ldots, /y/\} \rangle$. Оскільки $G_1 \lhd G$ і $G_2 \lhd G_1$, то $G_2^{y^i}$ — нормальна абелева нечерніковська підгрупа з G_2, і, значить, G_3 — нільпотентна періодична нечерніковська $\langle y \rangle$-допустима підгрупа. Звідси G містить розв'язну підгрупу $U = G_3\langle y \rangle$. За теоремою 1 з [37] U містить підгрупу $V = A \lambda \langle y \rangle$, де $A \leqslant G_3$ і A — цілком факторизована нечерніковська абелева підгрупа.

Нехай $a_1 \in A$, $L_1 = \langle a_1 \rangle^{\langle y \rangle}$. Тоді $A = L_1 \times K_1$. Покладемо $Q_1 = \bigcap_{x \in \langle y \rangle} K_1^x$. Оскільки кожна з підгруп K_1^x має в A скінченний індекс,

а підгрупа $\langle y \rangle$ скінченна, то індекс $[A:Q_1]$ скінченний. Зокрема, підгрупа Q_1 нескінченна. Оскільки $Q_1 \leqslant K_1$, то $L_1 \cap Q_1 = 1$. Нехай $a_2 \in Q_1$, $L_2 = \langle a_2 \rangle^{\langle y \rangle}$. Тоді $L_1 \cap L_2 = 1$. Знову $A = L_1L_2 \times K_2$, індекс $[A:K_2]$ скінченний, а тому і підгрупа $Q_2 = \bigcap\limits_{x \in \langle y \rangle} K_2^x$ має в V скінченний індекс. Аналогічне міркування приводить до нескінченної множини таких неодиничних $\langle y \rangle$-допустимих підгруп $\{L_n \mid n \in N\}$, що $\langle L_n \mid n \in N \rangle = \times\limits_{n \in N} L_n$. Тоді за лемою 4.1.2 $y \in FC(G)$ і оскільки за лемою 4.1.1 всі елементи нескінченного порядку з G належать FC(G), то G — FC-група. Лема доведена.

Л е м а 4.1.4. *Нехай G — група із леми 4.1.1. Якщо G — FC-група, то G скінченна над центром.*

Доведення. Нехай H — довільна підгрупа з G. Легко бачити, що $H = MF$, де M — майже нормальна підгрупа з G, F — скінченно породжена підгрупа. Оскільки G — FC-група і оскільки добуток двох майже нормальних підгруп є майже нормальною підгрупою, то H майже нормальна підгрупа в G. Отже, будь-яка підгрупа з G майже нормальна в G. Тепер завдяки [34] $[G:Z(G)] < \infty$. Лема доведена.

Л е м а 4.1.5. *Нехай G — група із леми 4.1.1, що містить нескінченну не MH-підгрупу F. Тоді F — періодична підгрупа нескінченного індексу в G з черніковськими абелевими підгрупами і справедливі твердження:*

1) F не породжується своїми нескінченними власними немаксимальними підгрупами;

2) в неперіодичній чи локально ступінчастій групі G F — черніковська група;

3) якщо F — черніковська група з повною частиною R, то R — p-група, F/R — група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1. Всі черніковські підгрупи L з G, що містять F, не є MH-підгрупами, при цьому або F = L, або F — максимальна підгрупа з L.

Доведення. Нехай G та F задовольняють умову леми. Тоді [G:F] = ∞ і за лемою 4.1.1 виконується умова 1 леми. Нехай N — нормальна підгрупа з F скінченного індексу. Тоді за твердженням 1 леми F/N – скінченна група, що не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, і, значить, F/N — група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1.

Припустимо спочатку, що F — неперіодична група. Тоді за лемою 4.1.1 [G:FC(G)] < ∞. Покладемо N = FC(G) ∩ F. Тоді N ◁ F, [F:N] < ∞, N містить всі елементи нескінченного порядку з F, N містить періодичну частину T(N) і N/T(N) — абелева нечерніковська група без скруту. Завдяки лемі 4.1.1 N — майже нормальна підгрупа з G. Зрозуміло, що F = <N, x_1,..., x_i ,...,x_n>, N < F, n > 0. Без порушення загальності можна вважати, що <x_i> — примарна чи нескінченна циклічна група і оскільки всі елементи нескінченного порядку з F належать N, то <x_i> — скінченна p_i-група. Внаслідок [20] N/Z(N) — локально нормальна група і тому Z(N) містить z, /z/ = ∞. Нехай $V_i = \langle z \rangle^{\langle x_i \rangle}$ — нормальне замикання <z> відносно <x_i>. Зрозуміло, що V_i — скінченно породжена абелева неперіодична підгрупа з підгрупи $H_i = V_i \langle x_i \rangle$. Покладемо $V_{i,3} = V_3^{p_i^{3\beta_i}}$, де $/x_i/ = p_i^{\beta_i}$. Тоді $V_{i,3} \lhd H_i$ і $V_i/V_{i,3}$ — скінченна абелева група, що містить елементи порядку $p_i^{3\beta_i}$. З цього випливає, що $/V_{i,3}/ = \infty$, H_i містить $X_i = V_{i,3} \langle x_i \rangle$ і $X_i/V_{i,3}$ — p_i-підгрупа з $H_i/V_{i,3}$, порядок якої не перевищує $p_i^{\beta_i}$. За

попереднім, X_i — власна немаксимальна нескінченна підгрупа з H_i. За означенням розглядуваного типу груп $[X_i;H_i]$ э N_i — МН-підгрупа з G. Звідси $F = \langle N, N_1,\ldots,N_i ,\ldots,N_n\rangle$, що неможливо. Отже, F — періодична підгрупа. За лемами 4.1.3 і 4.1.4 всі абелеві підгрупи з F черніковські.

Припустимо, що F — нечерніковська група. Тоді в силу [36] F не локально скінченна група і, значить, F містить нескінченну періодичну скінченно породжену підгрупу H, яка не задовольняє умову мінімальності для підгруп [75, лема 1.1]. Звідси і з локальної ступінчатості F H містить нескінченний строго спадний ланцюжок $H = H_o > H_1 > \ldots > H_i > H_{i+1} > \ldots$ нормальних в H підгруп H_i скінченного індексу. Нехай T — перетин всіх підгруп H_i. Тоді $T \lhd H$ і H/T — нескінченна скінченно породжена група. Позначимо через H^* декартовий добуток всіх H/H_i. Завдяки теоремі Ремака [74, теорема 4.3.9] H/T підгрупа з H^*. Припустимо, що для всіх і $(H/H_i)'''=1$. Тоді $(H^*)''' = 1$ і тому H/T — розв'язна нескінченна скінченно породжена періодична група, що суперечить відомому результату (див., наприклад, [73, твердженння 1.1]). Звідси знайдеться таке і, що $(H/H_i^*)''' \neq 1$. Без порушення загальності можна вважати, що $i = 1$. За теоремою 1.1.1 скінченна група може не породжуватися своїми власними немаксимальними підгрупами лише тоді, коли її третій комутант рівний одиниці. Звідси H/H_1 породжується своїми власними немаксимальними підгрупами X_k/H_1. Зрозуміло, що H породжується скінченним числом своїх нескінченних власних немаксимальних підгруп X_k. За лемою 4.1.1 H — МН-підгрупа з G. З цього випливає, що будь-яка скінченно породжена нескінченна підгрупа з F, в тому числі і H_i, є МН-підгрупами з G і, значить, F — нескінченно породжена група.

Нехай $N = N_F(H_1)$. Оскільки H_1 — МН-підгрупа з G, то $N \geqslant H$, $[F:N] < \infty$. Припустимо, що N містить власну немаксимальну підгрупу X з F скінченного в N індексу. Тоді $/X/ = \infty$ і з вибору групи G маємо $X \leqslant C \leqslant F$, де C — МН-підгрупа і $[F:C] < \infty$. Ясно, що в F існує нескінченна скінченно породжена підгрупа D, для якої $\langle C, D\rangle = F$, і, оскільки за попереднім, D — МН-підгрупа з G, то F — МН-підгрупа. Суперечність. Звідси легко бачити, що або $N = F$, або N — максимальна підгрупа з F.

Нехай N — максимальна підгрупа з F. Тоді за теоремою Пуанкаре [65, § 8] $X = \bigcap\limits_{f \in F} N^f$ — нормальна в F підгрупа скінченного індексу з N. За попереднім, $X = N$. Отже, $N \lhd F$ і $[F:N] \in \{1,p\}$, p — просте число.

Нехай x — довільний елемент з N і $B = H_1 \langle x\rangle$. Тоді, за попереднім, B — МН-підгрупа з G а, значить, B/H_1 — скінченна МН-підгрупа з N/H_1. З цього випливає, що N/H_1 — FC-група. Нехай x — нецентральний елемент з H' і $X/H_1 = C_{N/H_1}(B/H_1)$. Оскільки N/H_1 — FC-група , то $[N/H_1: X/H_1] < \infty$ і за вибором x $[N/H_1: X/H_1] > 1$. Звідси $1 < [N:X] < \infty$. За попереднім, N не містить нескінченних власних немаксимальних підгруп з F скінченного індексу в N. Отже, $N = F$, $X \lhd N$ і X — максимальна підгрупа з N. Тоді N/X — група порядку r, r — просте число, $N' \leqslant X$. З іншого боку, в силу вибору X $H' \not< X$. Суперечність. Таким чином, F — черніковська група.

Нехай G — неперіодична група. Покажемо, що F — черніковська група. Дійсно, нехай це не так. Тоді F не локально ступінчаста група. Звідси $F \not< FC(G)$. Покладемо $N = F \cap FC(G)$. Тоді $[F:N] < \infty$ і N — локально нормальна підгрупа з F [20]. За

попереднім, N черніковська група. Звідси F — черніковська група. Таким чином, твердження 2 леми доведене.

Нехай R — повна частина F. За попереднім, F/R — скінченна група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1. Ясно, що F — локально скінченна група і F = RD, де /D/ < ∞. Припустимо, що R — непримарна група. Тоді $R = R_1 \times R_2$, де R_1 і R_1 — нескінченні холлівські підгрупи з R, $R_1 \lhd F$, $R_2 \lhd F$. Покладемо $X_1 = R_1$, $X_2 = R_2D$. Тоді X_i ($i \in \{1,2\}$) — власні нескінченні немаксимальні підгрупи з F і $F = \langle X_1, X_2 \rangle$, що суперечить твердженню 1 леми. Отже, R — примарна група.

Нехай F < L — черніковська підгрупа з G з повною частиною K. Тоді $R \leqslant K$. Припустимо, що R < K. Тоді K містить скінченну характеристичну підгрупу K_1, для якої F — власна немаксимальна підгрупа з $L_1 = K_1F$. За умовою леми $[F;L_1] \ni C$ — МН-підгрупа з G з повною частиною R. Нехай $N = N_G(C)$. Тоді [G:N] < ∞, $R \lhd N$, $L_1/R \lhd N/R$. Звідси нормалізатор D/R підгрупи F/R в N/R є підгрупою скінченного індексу в N/R. Отже, [N:D] < ∞, $F \lhd D$ і F — МН-підгрупа, що неможливо. Таким чином, R = K. Якщо тепер F — немаксимальна підгрупа з L, то, як і раніше, $[F;L] \ni C$ — МН-підгрупа з G і знову F — МН-підгрупа з G. Звідси F — максимальна підгрупа з L.

В припущенні, що L — МН-підгрупа з G, як і раніше для підгрупи C, можна показати, що F — МН-підгрупа. Суперечність. Лема повністю доведена.

Л е м а 4.1.6. *Нехай* $G = A \lambda \langle b \rangle$, *A — абелева група без скруту,* /b/ = *p, p — просте число і* $C_A(b) = 1$. *Якщо A містить такі нормальні неодиничні підгрупи* A_1, A_2, *що* $A_1 \cap A_2 = 1$, *то G не є групою із леми 4.1.1.*

Доведення. Підгрупи $\langle b\rangle A_i$ неперіодичні, а тому майже нормальні в G завдяки лемі 4.1.5 , i = 1, 2. Але тоді майже нормальна в G і підгрупа $\langle b\rangle = (A_1 \lambda \langle b\rangle) \cap (A_2 \lambda \langle b\rangle)$, тобто індекс $[G:C_G(b)]$ скінченний і, зокрема, $C_A(b) \neq 1$, а це суперечить умові леми. Одержана суперечність показує, що G не є групою із леми 4.1.1. Лема доведена.

Л е м а 4.1.7. *Нехай F — скінченна група автоморфізмів вільної абелевої групи A скінченного рангу, A_1 — неодинична F-допустима підгрупа A. Тоді в A існує така F-допустима підгрупа A_2, що $A_1 \cap A_2 = 1$ і індекс $[A:A_1A_2]$ скінченний.*

Доведення. Нехай $\hat{A}$ — поповнення групи A, $\hat{A}_1$ — поповнення підгрупи A_1. Кожний автоморфізм із F можна однозначно продовжити до автоморфізму групи $\hat{A}$. На $\hat{A}$ можна дивитися як на векторний простір над полем Q раціональних чисел. Завдяки теоремі Машке [74, теорема 20.2.2] для підпростору $\hat{A}_1$ існує F-допустиме доповнення $\hat{A}_2$. Припустимо, що $A_2 = \hat{A}_2 \cap A$. Очевидно, підгрупа A_2 F-допустима. Оскільки ранги підгруп $\hat{A}_1$ і A_1 (відповідно $\hat{A}_2$ і A_2) співпадають, то сума рангів підгруп A_1 і A_2 дорівнює рангу групи A. Звідси і випливає, що індекс $[A:A_1A_2]$ скінченний. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 4.1.3 (див., наприклад, [68, с. 80]). *Нехай A — абелева група, $G \leqslant Aut\ A$. Будемо говорити, що G — раціонально незвідна група автоморфізмів A, якщо будь-яка неодинична G-допустима підгрупа A визначає періодичну фактор-групу. Якщо $G = \langle\varphi\rangle$, то будемо говорити, що φ — раціонально незвідний автоморфізм.*

Л е м а 4.1.8. *Нехай $G = A \lambda \langle b\rangle$, A — абелева група без скруту, $|b| = p$, p — просте число, $C_G(b) = \langle b\rangle$. Якщо G — група*

із леми 4.1.1, то b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм і A — вільна абелева група рангу p–1.

Доведення. Нехай $1 \neq D \lhd G$ і $D \leqslant A$. Припустимо, що фактор-група A/D неперіодична. Тоді в A існує елемент $g \neq 1$, для якого $\langle g \rangle \cap D = 1$. Нехай $1 \neq d \in D$. Підгрупа $L = \langle d \rangle^G \langle g \rangle^G$ має, очевидно, скінченну множину породжуючих елементів, а із вибору елемента g випливає, що її ранг строго більше рангу підгрупи $\langle d \rangle^G$. Із леми 4.1.7 одержуємо тоді існування в L такої підгрупи $V \lhd G$, що $\langle d \rangle^G \cap V = 1$ і індекс $[L:V\langle d \rangle^G]$ скінченний (зокрема, $V \neq 1$). Завдяки лемі 4.1.6 G не є групою із леми 4.1.1. Одержана суперечність показує, що b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм.

Нехай $1 \neq a \in A$. Припустимо, що $a_1 = a$, $a_2 = a_1^b$, ..., $a_p = a_{p-1}^b$. Оскільки $C_G(b) = \langle b \rangle$, то $a_1 a_2 \ldots a_p = 1$, тобто $a_p = a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{p-1}^{-1}$. Це означає, що підгрупа $\langle a \rangle^G$ має ранг $k \leqslant p - 1$. Із доведеного вище випливає, що і A має ранг k.

Позначимо через $\hat{A}$ поповнення групи A. Оскільки всякий автоморфізм A однозначно продовжується до автоморфізму $\hat{A}$, то нехай φ — автоморфізм $\hat{A}$, продовжуючий автоморфізм A, індукований елементом b. На $\hat{A}$ можна дивитися як на векторний простір над Q, а на φ — як на його лінійне перетворення. Нехай B — матриця цього лінійного перетворення в деякому базисі. Оскільки $/\varphi/ = p$, то B буде коренем многочлена $\Phi_p(X) = (x^p-1)/(x-1)$. Оскільки цей многочлен незвідний над Q (див., наприклад, [217, теорема 21.13]), то він буде мінімальним многочленом матриці B. Тоді характеристичний многочлен f(x) матриці B має степінь $n \geqslant$

$p-1$. Але $n = \dim \hat{A} = k$. Звідси одержуємо,що $k = p-1$, тобто підгрупа A має ранг $p-1$.

Розглянемо підгрупу $X \lambda \langle b \rangle$, де $X = \langle x \rangle^G$, $1 \neq x \in A$. Оскільки вона неперіодична, то вона майже нормальна в G завдяки лемі 4.1.5 Але тоді в фактор-групі G/X підгрупа $B/X = \langle b \rangle X/X$ майже нормальна. Зокрема, індекс $[G/X:C_{G/X}(\langle b \rangle X \cap A/X)]$ скінченний. Нехай $cX \in C_{G/X}(\langle bX \rangle \cap A/X)$. Оскільки $C_A(b) = 1$, то $cc^b c^{b^2} \dots c^{b^{p-1}} = 1$. Перейдемо до фактор-групи G/X і, враховуючи вибір елемента c, одержуємо рівність $(cX)^p = X$. Ця рівність показує, що підгрупа $C_{G/X}(\langle bX \rangle \cap A/X)$ має період p. Оскільки її ранг скінченний, то вона скінченна. Але тоді скінченною буде і група A/X. Це і означає, що A — скінченно породжена абелева група. Лема доведена.

Наслідок 4.1.1. *Нехай G — група із леми 4.1.1, $G \neq FC(G)$, $P(G) = 1$. Тоді $G/FC(G)$ — скінченна p-група, p — просте число.*

Доведення. Скінченність G/FC(G) випливає з леми 4.1.2. Нехай $p, q \in \pi(G/FC(G))$, $p \neq q$, $K = FC(G)$, xK — елемент порядку p, yK — елемент порядку q. Із леми 4.1.1 одержуємо скінченність порядків /x/ і /y/, а із рівності $P(G) = 1$ і того, що всі елементи FC-групи, які мають скінченний порядок, складають в ній підгрупу (див., наприклад, [68, теорема 4.32]), випливають рівності /x/ = p, /y/ = q. Розглянемо підгрупи $K \lambda \langle x \rangle$ і $K \lambda \langle y \rangle$. Завдяки лемі 4.1.8, з одного боку, ранг підгрупи K дорівнює $p-1$, а з другого боку, її ранг дорівнює $q-1$. Одержана суперечність і показує, що фактор-група G/K примарна. Наслідок доведений.

Лема 4.1.9. *Нехай G — група із леми 4.1.1, $P(G) = 1$, $G \neq FC(G) = K$. Тоді $G = K \lambda \langle b \rangle$, $/b/ = p$ — просте число, $C_G(b) = \langle b \rangle$,*

K — вільна абелева група рангу p−1, елемент b індукує на K раціонально незвідний автоморфізм.

Доведення. Завдяки [20] K — абелева група без скруту. Оскільки G ≠ FC(G) і P(G) = 1, то завдяки наслідку 4.1.1 L = G/K скінченна p-група, а із леми 4.1.8 одержуємо, що K — вільна абелева група рангу p−1. Нехай K ≠ xK = $\bar{x}$ ∈ L. Порядок елемента x скінченний завдяки лемі 4.1.1. Далі, завдяки лемі 4.1.2 маємо рівність $C_K(\bar{x}) = \bar{1}$, тобто будь-який автоморфізм із групи L не має в K нерухомих точок.

Позначимо через $\hat{K}$ поповнення K. На L можна дивитися як на групу автоморфізмів $\hat{K}$ або як на групу лінійних перетворень $\hat{K}$ (над Q). Оскільки кожне лінійне перетворення із L не має в K нерухомих точок, то L — циклічна група (див., наприклад, [66, розділ V, лема 8.12]). Нехай bK — суміжний клас, який породжує L. Тоді G = K λ <b>.

Нехай /b/ = p^n. Покажемо, що n = 1. Елемент b індукує деяке лінійне перетворення простору $\hat{K}$. Позначимо матрицю цього перетворення через B. Матриця B буде коренем многочлена ділення кола $\Phi_{p^n}(X)$, а оскільки цей многочлен незвідний над Q (див., наприклад, [217, теорема 21.13]), то $\Phi_{p^n}(X)$ — мінімальний многочлен матриці B. Позначимо через f(x) характеристичний многочлен матриці B. Оскільки ранг K, а значить, розмірність $\hat{K}$ над Q, дорівнює p−1, то deg f(x) = p−1 ⩾ deg $\Phi_{p^n}(X)$. Звідси і випливає, що n = 1, тобто /b/ = p. Той факт, що b індукує на K раціонально незвідний автоморфізм, випливає із леми 4.1.8. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 4.1.4. *Група G називається MH[τ]-групою, якщо будь-який відрізок [A;B] групи G, де підгрупи A та B мають*

властивість τ, містить МН-підгрупу. Клас таких груп будемо позначати через $К(МН[\tau])$.

Якщо τ — властивість бути будь-якою підгрупою групи G, то G називається МН[ ]-групою.

Якщо $\tau = BI$, тобто $/B/ = \infty$, то G називається МН[BI]-групою.

Якщо $\tau = I$, тобто $/A/ = \infty$, то G називається МН[I]-групою.

Якщо $\tau = \overline{\text{T}}$, тобто A — неперіодична підгрупа, то G називається МН[$\overline{\text{T}}$]-групою.

Якщо $\tau = B\overline{\text{T}}$, тобто B — неперіодична підгрупа, то G називається МН[$B\overline{\text{T}}$]-групою.

Наслідок 4.1.2. *Клас МН[ ]-груп належить класу МН[BI]груп, який співпадає з класом МН[I]-груп. Останній клас належить класу МН[$B\overline{\text{T}}$], який, в свою чергу, співпадає з класом МН[$\overline{\text{T}}$], і справедливі твердження:*

1) клас МН[ ]-груп вичерпується групами, у яких майже нормальні всі підгрупи, і співпадає з класом скінченних над центром груп;

2) клас МН[I]-груп вичерпується групами, у яких майже нормальні всі нескінченні підгрупи;

3) клас МН[$\overline{\text{T}}$]-груп вичерпується групами, у яких майже нормальні всі неперіодичні підгрупи.

Доведення випливає з означення 4.1.4 і роботи [34], у якій доведено, що МН[ ]-групи скінченні над центром.

Теорема 4.1.1. *Неперіодичні нескінченні над центром МН[I]групи вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = A \lambda \langle b \rangle$, $|b| = p$ — просте число, A — вільна абелева група рангу $p-1$, $C_A(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;

2) $G = A\langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, p — просте число, $A = A_1A_2...A_i .. A_{p-1}$, де $A_i = C \lambda \langle a_i \rangle \lhd G$, $|A_i| = \infty$, $C \lhd G$, $|C| < \infty$, $A \cap \langle b \rangle = C \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $A/C = A_1/C \times ... \times A_i/C \times ... \times A_{p-1}/C$ — вільна абелева група рангу $p-1$, G/C — група типу 1;

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Завдяки лемам 4.1.3 і 4.1.4 $G \neq FC(G)$ і будь-яка періодична підгрупа C з G скінченна. Якщо $C = P(G) = 1$, то із лем 4.1.5 і 4.1.9 випливає, що G — група типу 1 розглядуваної теореми. Якщо $C = P(G) \neq 1$, то підгрупа C скінченна, а підгрупа $P(G/C)$ одинична, тобто G/C — група типу 1. Звідси легко одержати, що G — група типу 2 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність майже очевидна. Теорема доведена.

О з н а ч е н н я 4.1.5. *Нехай G — повна черніковська група, $A \leqslant Aut\ G$. Група A називається p-адично незвідною, якщо G не містить в собі власних повних A-допустимих підгруп. Якщо $A = \langle \varphi \rangle$, то автоморфізм φ називається p-адично незвідним.*

Л е м а 4.2.10. *Нехай G — черніковська група, K — її повна частина. Якщо G — група із леми 4.1.1, $G \neq FC(G)$, то $G \neq C_G(K)$. Якщо $g \in G \backslash C_G(K)$, то елемент g індукує на K p-адично незвідний автоморфізм.*

Доведення. Легко бачити, що $C_G(K) = FC(G)$. Нехай P — власна $\langle g \rangle$-допустима повна підгрупа з K. Завдяки теоремі 1 з [38] випливає існування такої $\langle g \rangle$-допустимої підгрупи R, що $K = PR$ і перетин $P \cap R$ скінченний. Фактор-групи $\langle g \rangle K/P$ і $\langle g \rangle K/R$ завдяки лемі 3 з [165] скінченні над центрами. Із співвідношення

$\langle g\rangle K/P \cap R \leqslant \langle g\rangle K/P \times \langle g\rangle K/P$ випливає, що $\langle g\rangle K/P \cap R$ — FC-група, а із скінченності $P \cap R$ одержуємо, що і $\langle g\rangle K$ — FC-група. Але тоді $K \leqslant Z(\langle g\rangle K)$, а це суперечить вибору елемента g. Лема доведена.

Наслідок 4.1.3. *Нехай G — черніковська група. Якщо G група із леми 4.1.1, $G \neq FC(G)$, то G — $MH[I]$-група.*

Доведення. Дійсно, нехай H — нескінченна підгрупа G, K — повна частина G. Якщо $H \leqslant C_G(K) = FC(G)$, то H майже нормальна в G. Якщо $H \not\leqslant C_G(K)$, то завдяки лемі 4.2.10 одержуємо $K \leqslant H$. Зокрема, індекс $[G:H]$ скінченний. Отже, G — $MH[I]$-група. Наслідок доведений.

Лема 4.1.11. *Нехай G — черніковська група, K — її повна частина, $K = C_G(K)$. Якщо G — $MH[I]$-група і $G \neq FC(G)$, то G — група одного з наступних типів:*

1) $G = K\langle x\rangle$ — p-група, p — просте число, $x^p \in K$, ранг K дорівнює $p-1$, x індукує на K p-адично незвідний автоморфізм;

2) $G = K \lambda F$, K — p-група, p — просте число, F — циклічна група, порядок якої взаємно простий з p, кожний неодиничний елемент із F індукує на K p-адично незвідний автоморфізм, ранг K не перевищує $q-1$ для всякого $q \in \pi(F)$.

Доведення. Із леми 4.1.10 одержуємо, що K — p-група, p — просте число і кожний елемент із $G\backslash K$ індукує на K p-адично незвідний автоморфізм. Завдяки теоремі 6.1 з [39] одержуємо тоді, що G/K — циклічна група і або $/G/K/ = p$, або G/K — p'-група. У першому випадку $G = K\langle x\rangle$, $x^p \in K$ і із результатів [38, § 3, п.1] одержуємо, що ранг K дорівнює $p-1$. Звідси G — група типу 1 розглядуваної леми.

Якщо G/K — p′-група, то G = K λ F. Із леми 3.6 роботи [39] випливає, що кожний неодиничний елемент із F діє на нижньому шарі K без нерухомих точок. Звідси і одержуємо обмеження на ранг K, тобто в цьому випадку G — група типу 2 розглядуваної леми. Лема доведена.

Т е о р е м а 4.1.2. *Періодичні локально майже розв'язні нескінченні над центром MH[I]-групи вичерпуються групами наступних типів:*

1) G — майже квазіциклічна група з нецентральною квазіциклічною підгрупою;

2) G = K λ <f> — черніковська група з нелокально циклічною повною частиною K, що є силовською p-підгрупою з G, p — просте число, $C_G(K) = K$, кожний неодиничний елемент із <f> індукує на K p-адично незвідний автоморфізм, ранг K не перевищує q−1 для будь-якого $q \in \pi(<f>)$;

3) G = R<b> — черніковська група з повною частиною K, /b/ = p^β, $\beta > 0$, p — непарне просте число, K — p-група рангу p−1, R $\cap$ <b> = K $\cap$ <b> = <b^p>, b індукує на K p-адично незвідний автоморфізм, R = K λ <f> $\lhd$ G, при f $\neq$ 1 R — група типу 2;

4) G = KF — черніковська група з повною частиною K, F містить таку нормальну в G підгрупу C, що G/C — група типу 2;

5) G = R<b> — черніковська група з повною частиною K, R $\lhd$ G, /b/ = p^β, $\beta > 0$, p — непарне просте число, R $\cap$ <b> = K $\cap$ <b> = <b^p>, R = KF, /F/ < ∞, F містить скінченну нормальну підгрупу C з G, що G/C — група типу 3.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Внаслідок [208], лем 4.1.3 і 4.1.4 G — черніковська група з повною частиною K і G $\neq$ FC(G).

Нехай K — квазіциклічна група. Оскільки G — нескінченна над центром група, то $K \not\leq Z(G)$ і, значить, G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Припустимо тепер, що ранг K не менше 2. Якщо $K = C_G(K)$, то завдяки лемі 4.1.11 легко одержуємо, що G — група типу 2 або 3 розглядуваної теореми.

Нехай тепер $K \neq C_G(K)$. Легко бачити, що $C_G(K) \leqslant FC(G)$. FC-центр можна записати у вигляді KN, де N — скінченна підгрупа. Припустимо, що $C = N^G$. Із леми Діцмана (див., наприклад, [65, § 7]) випливає скінченність C. Але тоді $FC(G/C) = FC(G)/C$, а із цієї рівності випливає рівність $C_{G/C}(KC/C) = KC/C$. Отже, G/C — група типу 2 або 3 розглядуваної теореми.

Нехай G/C — група типу 2 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G — черніковська група з повною примарною частиною K і тому G = KF, де F — скінченна підгрупа. Нехай D = KC. Оскільки $C \lhd G$, $|C| < \infty$ і K — повна частина з G, то $K \leqslant Z(D)$. Ясно, що G = DF і $D \lhd G$. Покладемо $F_1 = D \cap F$. Тоді $F_1 \lhd F$ і $D = KF_1$ і, значить, $F_1 \lhd D$. Звідси $F_1 \lhd G$ і $|F_1| < \infty$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $F_1 = C$, і тому G — група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай G/C — група типу 3 розглядуваної теореми. Тоді $G/C = \overline{R}\langle\overline{b}\rangle$ і $\overline{R} \lhd G/C$. Звідси $G = R\langle b\rangle$, $R \lhd G$. Оскільки G — черніковська група, у якої повна частина K є p-групою рангу p−1, то R = KF, $|F| < \infty$. Тепер, як і для груп типу 4 розглядуваної теореми, можна показати, що $C \leqslant F$, і тому G — група типу 5. Необхідність доведена.

Достатність для груп типу 1 очевидна. Якщо G — група одного з типів 2 — 5, то легко показати, що будь-яка підгрупа, яка

належить FC(G), майже нормальна в G, а будь-яка нескінченна підгрупа, яка не належить FC(G), має в G скінченний індекс і тому майже нормальна в G. Теорема доведена.

Т е о р е м а 4.1.3. *Неперіодичні нескінченні над центром МН[$\overline{\text{Т}}$]-групи вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = A \lambda \langle b \rangle$, $|b| = p$ — просте число, A — вільна абелева група рангу $p-1$, $C_A(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;

2) $G = ((((\ K \lambda \langle a_1 \rangle) \lambda \langle a_2 \rangle) \lambda \ldots\ ) \lambda \langle a_{p-1} \rangle)\langle b \rangle$, K — нормальна в G періодична підгрупа, яка є скінченним розширенням центральної підгрупи групи G, a_i — елемент нескінченного порядку, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $b^p \in K$ і G/K — група типу 1.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Якщо G — FC-група, то G — скінченна над центром група. Дійсно, нехай H — довільна підгрупа з G. Покажемо, що H майже нормальна в G. Якщо H неперіодична підгрупа, то H майже нормальна в G за означенням МН[$\overline{\text{Т}}$]-груп. Нехай H — періодична підгрупа. Тоді завдяки наслідку 3.10 з [73] в G існує елемент a нескінченного порядку такий, що $a \in C_G(H)$. Підгрупа $D = H \times \langle a \rangle$ неперіодична, і тому нормальна в підгрупі N, індекс якої [G:N] скінченний. Оскільки T(D) = H, то $H \lhd N$. Це і означає, що підгрупа H майже нормальна в G. Отже, в G майже нормальні всі підгрупи і внаслідок [34] G — скінченна над центром група, що суперечить вибору G. Звідси $G \neq FC(G)$. Якщо P(G) = 1, то із леми 4.1.9 випливає, що G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $P(G) \neq 1$. Покажемо, що $P(G) \leqslant FC(G)$. Дійсно, нехай $P(G) \cap FC(G) = C$. Тоді $C \lhd G$ і $[P(G):C] < \infty$ (див. лему 4.1.2). Оскільки P(G)/C — скінченна нормальна підгрупа із G/C, то в G існує такий

елемент a нескінченного порядку, що $[P(G),a] \leqslant C$. Тому для довільного $g \in P(G)$ $[g,a] = c \in C$. Завдяки лемі Діцмана (див., наприклад, [65, § 53]) нормальне замикання $C^G = C_1$ — скінченна нормальна підгрупа групи G. Ясно, що в фактор-групі G/C_1 елементи C_1g і C_1a переставні, і тому підгрупа $C_1\langle g\rangle\langle a\rangle$ існує. Оскільки G — МН[$\overline{\top}$]-група, то $[G:N_G(C_1\langle g\rangle\langle a\rangle)]$ скінченний. Звідси з урахуванням співвідношень $/C_1/ < \infty$, $T(C_1\langle g\rangle\langle a\rangle) = C_1\langle g\rangle$, $C_1\langle g\rangle \lhd N_G(C_1\langle g\rangle\langle a\rangle)$ одержуємо, що $[G:N_G(g)] < \infty$. Це означає, що $g \in FC(G)$. Отже, $P(G) \leqslant FC(G)$. Оскільки $G/P(G)$ — група типу 1, то із останнього співвідношення легко одержуємо рівність $[G:FC(G)] = p$, p — просте число.

Покажемо тепер, що $P(G) = K$ є скінченним розширенням центральної підгрупи групи G. Дійсно, нехай H — максимальна підгрупа без скруту із $Z(FC(G))$. Завдяки теоремі 3.13 із [73] підгрупа H неодинична і має скінченний $p-1$ ранг ($G/P(G)$ — група типу 2). Очевидно, нормальне замикання $N = H^G$ — скінченно породжена абелева група. Тому $/T(N)/ < \infty$. Розглянемо підгрупу $N\langle b\rangle$, де $G/FC(G) = \langle bFC(G)\rangle$. Оскільки G — МН[$\overline{\top}$]-група, то $[G:N_G(N\langle b\rangle)] < \infty$. Нехай $N_G(N\langle b\rangle) \cap T(Z(FC(G)) = Z$. За попереднім $[K:Z] < \infty$ і $Z \lhd N_G(N\langle b\rangle)$. Ясно, що $Z \cap N\langle b\rangle = T(N\langle b\rangle) \cap Z = M$ і $[T(N\langle b\rangle),Z] \leqslant M$. Оскільки $/T(N\langle b\rangle)/ < \infty$, то $/M\langle b\rangle/ < \infty$ і тому $[Z:C_Z(M\langle b\rangle)] < \infty$. Звідси випливає, що $C_Z(M\langle b\rangle) \leqslant Z(G)$. Отже, $P(G) = K$ є скінченним розширенням центральної підгрупи $C_Z(M\langle b\rangle)$ групи G.

Далі, оскільки G/K — група типу 2 і $[G:FC(G)] = p$, то використовуючи міркування доведення леми 7.1.1 з [74], одержуємо, що G — група типу 2 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Покажемо, що G — МН[$\overline{\tau}$]-група, тобто довільна неперіодична підгрупа H майже нормальна в G.

Нехай G — група типу 1 теореми. Якщо $H \leqslant A$, то, очевидно, що H майже нормальна в G. Якщо $H \not\leqslant A$, то $AH = G$. Звідси легко отримати, що $A \cap H = A_1 \lhd G$. Оскільки елемент b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм, то A/A_1 — періодична група і оскільки ранг A скінченний, то із останнього співвідношення маємо $/A/A_1/ < \infty$. Отже, $[G:A_1] < \infty$ і, значить, $[G:H] < \infty$. Це і означає, що підгрупа H майже нормальна в G і тому група G типу 1 є МН[$\overline{\tau}$]-групою.

Нехай тепер G — група типу 2 теореми. Легко бачити, що $FC(G) = (((K \lambda \langle a_1 \rangle) \lambda \langle a_2 \rangle) \lambda \ldots) \lambda \langle a_{p-1} \rangle$, і якщо $H \leqslant FC(G)$, то H майже нормальна в G. Припустимо, що $H \not\leqslant FC(G)$. Тоді, очевидно, що $G = FC(G)H$. Оскільки G/K — група типу 1, то, як показано вище, $[G/K:KH/K] < \infty$. Звідси $[G:KH] < \infty$. Із умови теореми маємо, що $K \geqslant Z$, $[K:Z] < \infty$ і $Z \leqslant Z(G)$. Тому $N_G(H) \geqslant Z$ і, таким чином, $[G:N_G(H)] < \infty$. Це і означає, що H майже нормальна в G і, значить, G — МН[$\overline{\tau}$]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

4.2. Будова локально майже розв`язних груп з умовами щільності майже нормальності для різних систем підгруп

О з н а ч е н н я 4.2.1. *Група G називається УЩМН(τ)-, УЩМН[τ]-, УЩМН(τ)-, УЩМН[τ]-групою, якщо для будь-якого відрізка підгруп [A;B] такого, що $/[A;B]/ > 2$ і підгрупи A та B мають властивість τ в G існує така МН-підгрупа C, що спра-*

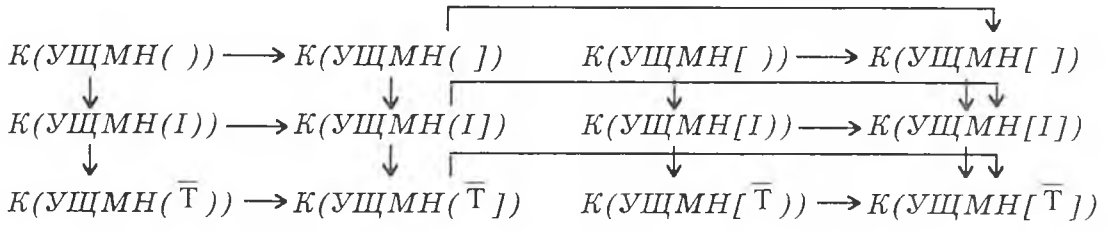
ведливе відповідно одне із співвідношень: (A;B) э C, (A;B] э C, [A;B) э C, [A;B] э C.

Якщо τ — це властивість бути довільною підгрупою з G, то G називається відповідно УЩМН( )-, УЩМН( ]-, УЩМН[ )-, УЩМН[ ]-групою.

Якщо τ — це властивість I, тобто /A/ = ∞, то G називається відповідно УЩМН(I)-, УЩМН(I]-, УЩМН[I)-, УЩМН[I]-групою.

Якщо τ = $\overline{\text{T}}$, тобто A — неперіодична підгрупа, то G називається відповідно УЩМН($\overline{\text{T}}$)-, УЩМН($\overline{\text{T}}$]-, УЩМН[$\overline{\text{T}}$)-, УЩМН[$\overline{\text{T}}$]-групою.

Наслідок 4.2.1. *В нижче наведеній таблиці розміром 3 × 4, елементами якої є 12 введених в означенні 4.2.1 класів груп, стрілками вказано, який із класів є підкласом іншого.*



Всі класи таблиці належать К(УЩМН[$\overline{\text{T}}$]) і містять К(УЩМН( )).

Наслідок безпосередньо випливає з означення 4.2.1.

Твердження 4.2.1 *[165]. Класи локально майже розв'язних УЩМН[ ]- та УЩМН( )-груп співпадають між собою і вичерпуються групами наступних типів:*

1) G — скінченна над центром група;

2) $G = K \lambda \langle b \rangle$, $/b/ = p$ — просте число, K — вільна абелева група рангу $p-1$, $C_K(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на K раціонально незвідний автоморфізм;

3) G містить в собі таку скінченну нормальну підгрупу P, що $G/P = K/P \lambda \langle bP \rangle$ — група типу 2 і $\langle b,P \rangle = F$ — група одного з наступних типів:

а) F — p-група з циклічною максимальною підгрупою;

б) $F = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $\langle b \rangle \triangleleft G$;

в) $F = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $C_F(\langle b \rangle) = \langle b \rangle$;

г) $F = A \lambda \langle b \rangle$, A — елементарна абелева q-група, $b^{p^n} = 1$, b діє на A незвідно і будь-яка циклічна підгрупа з F, яка не входить в P, максимальна в F.

Т е о р е м а 4.2.1. *Локально майже розв'язні нескінченні над центром УЩМН[ ]-групи розв'язні, мають вигляд $G = D\langle b \rangle$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 0$, p — просте число, $D = D_1\, D_2 \ldots D_i \ldots D_{p-1} \triangleleft G$, $D_i = C \lambda \langle a_i \rangle$, $/a_i/ = \infty$, C — скінченна нормальна підгрупа з G, $D \cap \langle b \rangle = C \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $D/C = D_1/C \times D_2/C \times \ldots \times D_{p-1}/C$ — вільна абелева група рангу $p-1$ та вичерпуються групами таких типів:*

1) $C = 1$, $G = D \lambda \langle b \rangle$, $/b/ = p$, D — вільна абелева група рангу $p-1$, $C_D(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на D раціонально незвідний автоморфізм;

2) $C = \langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$, $/c/ \in \{1,r\}$, r — просте число, G/C — група типу 1, $C\langle b \rangle$ — абелева група, або неабелева група порядку rp, або p-група Міллера — Морено, яка не ізоморфна групі діедра порядку 8;

3) $C = \langle c \rangle$, $\langle c \rangle\langle b \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, G/C — нескінченна діедральна група;

4) $C = Q \times \langle b^p \rangle$, $Q \lambda \langle b \rangle$ — скінченна нільпотентна група Міллера — Морено, Q — елементарна абелева q-група, $q \neq p$, G/C — група типу 1, $/Q//b/ > pq$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана нескінченна над центром група. Тоді G — група одного з типів 2, 3 твердження 4.2.1. Зрозуміло, що G має вигляд $G = D\langle b \rangle$, $/b/ = p^{\beta}$, $\beta > 0$, p — просте число, D містить нормальну в G скінченну підгрупу C таку, що G/C — група типу 2 згаданого твердження. Звідси $D \lhd G$, D/C — вільна абелева група рангу p−1, $D \cap \langle b \rangle = C \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$. З цього випливає, що $D = D_1 \ldots D_i \ldots D_{p-1}$, $D_j = C \lambda \langle a_i \rangle$, $/a_i/ = \infty$, $D/C = D_1/C \times \ldots x\, D_i/C \times \ldots \times D_{p-1}/C$ — вільна абелева група рангу p−1. Якщо $C = 1$, то G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $C \neq 1$. Тоді G/C — група типу 1 розглядуваної теореми і тому $G = DX$, де $X = C\langle b \rangle$ — скінченна підгрупа з G, $/X/ > p$, C — її максимальна нормальна в G підгрупа і $D \cap X = C$. Зрозуміло, що b, а тому і X, не належать FC(G). Звідси ні $\langle b \rangle$, ні X не можуть бути МН-підгрупами з G.

Нехай $/[A;B]/ > 2$ і $B \leqslant X$. Тоді за означенням УЩМН[ ]-груп [A;B] э M — майже нормальна підгрупа з G. Ясно, що підгрупа з X, яка породжена скінченним числом МН-підгруп з G, є МН-підгрупою з G. Звідси і оскільки X не МН-підгрупа з G, A — довільна власна немаксимальна підгрупа з X одержуємо, що X не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами. Отже, X задовольняє умову теореми 1.1.1 і може бути групою одного з типів 1 — 6 згаданої теореми і $\langle b \rangle = X$, або $\langle b \rangle$ — максимальна група з X.

Нехай X — підгрупа одного з типів 1, 2, 4 теореми 1.1.1. Тоді C = $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$, де /c/ $\in \{1,r\}$, r — просте число і G — група типу 2 розглядуваної теореми.

Нехай X — підгрупа типу 3 теореми 1.1.1. Тоді X — група кватерніонів порядку 8, C = $\langle c \rangle$, $\langle b^2 \rangle = \langle c^2 \rangle \lhd G$ і G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай X — підгрупа типу 5 теореми 1.1.1. Тоді X = $\langle b \rangle \lambda \langle c \rangle$ — абелева p-група чи p-група Міллера — Морено, яка не ізоморфна групі діедра порядку 8, /c/ = p, /b/ > p, C = $\langle b^p \rangle \times \langle c \rangle$ і G — група типу 2.

Нехай X — підгрупа типу 6 теореми 1.1.1. Тоді /X/ > pq і G група типу 4 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай /[A;B]/ > 2. Покажемо, що [A;B] э C — МН-підгрупа з G. Якщо A — МН-підгрупа з G чи B — МН-підгрупа з G, то все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що A і B не МН-підгрупи з G. Оскільки G/C — група типу 1 розглядуваної теореми, у якої, очевидно, всі неабелеві підгрупи мають скінченний індекс і нормалізатор всякої нескінченної абелевої підгрупи має також скінченний індекс, то CB/C — скінченна група. Тому без порушення загальності можна вважати, що B $\leqslant$ C$\langle b \rangle$ = X. Ясно, що A — власна немаксимальна підгрупа з X і X — група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1, за твердженням якої A $\leqslant$ C $\lhd$ G, що суперечить вибору A. Отже, G — УЩМН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 4.2.1. *Нехай G — УЩМН[I]-група, G $\neq$ FC(G), G — неперіодична група, а будь-яка її нескінченна періодична підгрупа є черніковською. Тоді G = PB, де P $\leqslant$ Z(G), P — квазіциклічна*

підгрупа, $H = P \cap B$ — скінченна підгрупа, B/H — група типу 3 твердження 4.2.1.

Доведення. Позначимо через T максимальну періодичну підгрупу з G, а через P — її повну частину. Якщо a — елемент нескінченного порядку, то за лемою 4.1.2 $P < C_G(a)$ і $P < FC(G)$. Нехай $g \in G$ і $/g/$ скінченний. Підгрупа $H = \langle a \rangle^G$ є скінченно породженою FC-групою і тому вона містить g-допустиму без скруту підгрупу L. Фактор-група G/L є УЩМН[ ]-групою і містить нескінченну періодичну підгрупу. Звідси за лемою 3 з [165] G/L — FC-група. Но тоді $PL/L \leqslant Z(G/L)$. Зокрема, $[g,P] \leqslant L$. Але P — характеристична підгрупа FC(G), тобто $P \lhd G$, а тому $[g,P] \leqslant P$, і, значить, $[g,P] \leqslant P \cap L = 1$. Отже, $P \leqslant Z(G)$. Якщо P — не квазіциклічна підгрупа, то $P = P_1 \times P_2$, де P_1, P_2 нескінченні. Але тоді G/P_i — УЩМН[ ]-група, яка має нескінченну періодичну підгрупу, $i \in \{1, 2\}$. Звідси завдяки лемі 3 з [165] G/P_i — FC-група. Із включення $G \leqslant G/P_1 \times G/P_2$ одержуємо, що і G — FC-група, що не так. Отже, P — квазіциклічна підгрупа.

Фактор-група G/P — УЩМН[ ]-група, а тому вона буде групою типу 3 з твердження 4.2.1. Зокрема, G/P — скінченно породжена майже абелева група. Тому існує скінченно породжена підгрупа B з властивістю $G = PB$. Очевидно, що підгрупа $H = P \cap B$ скінченна, $B/H = B/P \cap B \cong PB/P = G/P$. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 4.2.2. *Підгрупа A групи G називається стандартним добутком підгруп $A_i = C \lambda X_i$, $i \in I$, якщо X_i — локально циклічна група, $C \lhd A$, A/C — прямий добуток A_i/C, при $/I/ = 0$ $A = C$.*

Т е о р е м а 4.2.2. *Класи періодичних локально майже розв'язних УЩМН[I]- та МН[I]-груп співпадають між собою.*

Неперіодичні УЩМН[I]-групи, що не є МН[I]-групами, мають вигляд $G = (RA)\langle b\rangle = R(A\langle b\rangle) = AF$, *де* R — *центральна в* G *квазіциклічна r-група,* $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $A \lhd G$, A — *стандартний добуток підгруп* $A_i = K \lambda \langle a_i\rangle$, $|a_i| = \infty$, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, r *і* p — *прості числа,* $K \lhd G$, $|K| < \infty$, $A \cap \langle b\rangle = K \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$, $RK = C = P(G)$ — *максимальна періодична нормальна підгрупа з* G, $F = C\langle b\rangle = T(G)$ — *максимальна періодична підгрупа з* G, $R \cap \langle b\rangle = 1$, F/R — *група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1 та вичерпуються групами, у яких* G/R — *група одного з типів 1 — 4 теореми 4.2.1, а сама група* G *може бути групою одного з типів:*

1) $G = R \times (A \lambda \langle b\rangle$, $K = 1$, $\beta = 1$, A — *вільна абелева група рангу* $p - 1$, $C_A(\langle b\rangle) = 1$, b *індукує на* A *раціонально незвідний автоморфізм;*

2) $G = R \times (A\langle b\rangle)$, $K = \langle c\rangle \times \langle b^p\rangle$, $|c| \in \{1, q\}$, q — *просте число,* $K\langle b\rangle$ — *абелева чи група Міллера — Морено,* G *не містить підгруп діедра порядку 8,* G/K — *група типу 1;*

3) $G = R \times (A\langle b\rangle)$, $K = Q \times \langle b^p\rangle$, $|Q| = q^{\gamma}$, q — *просте число,* $\gamma > 1$, b *індукує на* Q *незвідний автоморфізм,* $\Phi(Q) = 1$, G/K — *група типу 1;*

4) $G = R \times (A\langle b\rangle)$, $A = K \times \langle a_1\rangle$, $p = 2$, $K\langle b\rangle$ — *група кватерніонів порядку 8,* $b^{-1}a_1b = a_1^{-1}$;

5) $G = R(A\langle b\rangle)$, $R \cap K = T \leqslant Z(G)$, G/T — *група одного з типів 1 — 4.*

Доведення. Нехай G — періодична локально майже розв'язна УЩМН[I]-група. Покажемо, що тоді G — МН[I]-група. Дійсно, якщо G скінченна над центром група, то G — МН[I]-група. Нехай тепер G — нескінченна над центром група. Тоді внаслідок [208], лем 4.1.3 і 4.1.4 G — черніковська група і $G \neq FC(G)$. Звідси за

наслідком 4.1.3 G — МН[I]-група. Перша частина теореми доведена. Доведемо її другу частину.

Необхідність. Нехай G — неперіодична УЩМН[I]-група. Ясно, G — нескінченна над центром група. Якщо $/P(G)/ < \infty$, то завдяки лемі 4.1.9 легко одержуємо, що G — група одного з типів 1, 2 теореми 4.1.1 і, значить, G — МН[I]-група. Отже, $P(G) = \infty$. Внаслідок [208], лем 4.1.3 і 4.1.4 G — група, у якої всі періодичні підгрупи черніковські. Звідси G задовольняє умову леми 4.2.1, за твердженням якої $D = A\langle b\rangle$, $/b/ = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $R \cap D = T$, $/T/ < \infty$, $A \geqslant G'$, $A \leqslant FC(G)$, $T(A) = K$, $/K/ < \infty$.

Нехай $P(G) = C$. Тоді $R \leqslant C$, $/C/ = \infty$ і G/C — група з леми 4.1.9. Зрозуміло, що $C \geqslant RK$ і G/R — група одного з типів 1 — 4 теореми 4.2.1. Звідси $C = RK\langle b^p\rangle$. Легко бачити, що $C \leqslant FC(G)$ і тому $b^p \in K$ і, значить, $C = RK$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $R \cap \langle b\rangle = 1$. Ясно, що $T \lhd G$ і $G/T = R/T \times D/T$. За попереднім, D/T — група одного з типів теореми 4.2.1. Зрозуміло, що $A/T/K/A$ — вільна абелева група рангу $p-1$, а значить, A — стандартний добуток нормальних в G підгруп $A_i = K \lambda \langle a_i\rangle$, $/a_i/ = \infty$, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Покладемо $F = C\langle b\rangle$. Тоді $F = RK\langle b\rangle = R(K\langle b\rangle)$. Звідси $AF = ARK\langle b\rangle = R(AK\langle b\rangle) = R(A\langle b\rangle) = RD = G$.

Покажемо, що F не МН-підгрупа з G. Дійсно, нехай це не так і нехай $N = N_G(F)$. Тоді $C \leqslant F \leqslant N$, $[G:N] < \infty$ і $[F:C] = p$. Звідси $/F/C/ = p$ і $[G:F] = \infty$. За попереднім, F/C співпадає з своїм централізатором в G/C і F/C — нормальна підгрупа порядку p в неперіодичній підгрупі N/C. Але тоді підгрупа F/C відмінна від свого централізатора в N/C, що неможливо. Отже, F не МН-підгрупа з G. Звідси F/R не МН-підгрупа з G/R. Але тоді за лемою 4.1.5 F/R не

породжується своїми власними немаксимальними підгрупами і тому F/R — група одного з типів 1 — 6 теореми 1.1.1.

Нехай $T = 1$. Тоді $G = R \times D$, $C = R \times K$ і, за попереднім, D — група одного з типів 1 — 4 теореми 4.2.1. Але тоді G — група одного з типів 1 — 4 розглядуваної теореми.

Нехай $T \neq 1$. Тоді $G/T = R/T \times D/T$ — група одного з типів 1 — 4 розглядуваної теореми і, значить, G — група типу 5 теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група з твердження розглядуваної теореми. Тоді вона містить центральну квазіциклічну r-підгрупу R, для якої G/R — група одного з типів 1 — 4 теореми 4.2.1. За цією теоремою G/R — нескінченна над центром група а, значить, і G — нескінченна над центром неперіодична група. Зрозуміло, що $G = RD$, $R \cap D = T$, $/T/ < \infty$. Внаслідок теореми 4.1.1 G не є МН[I]-групою.

Покажемо, що G — УЩМН[I]-група, тобто для будь-якого $/[X;Y]/ > 2$, $/X/ = \infty$ справедливо $[X;Y]$ э H — МН-підгрупа з G. Якщо $X \geqslant R$, то $/[X/R;Y/R]/ > 2$. За теоремою 4.2.1 $[X/R;Y/R]$ э H/R — МН-підгрупа з G/R. Звідси $[X;Y]$ э H — МН-підгрупа з G. Нехай тепер $X \not> R$. Тоді $R \cap X = T_1$, $/T_1/ < \infty$ і, значить, X — неперіодична підгрупа. Зрозуміло, що $FC(G) = RA$, $[G:FC(G)] = p$, $FC(G)$ — скінченна над своїм центром неперіодична група і всі елементи нескінченного порядку з G належать $FC(G)$.

Покладемо $V = X \cap FC(G)$. Тоді V — неперіодична нормальна підгрупа з X. Якщо $X \leqslant FC(G)$, то $[FC(G):N_{FC(G)}(X)] < \infty$ і тому $[G: N_G(X)] < \infty$.

Нехай $X \not\leqslant FC(G)$. Тоді $G = FC(G)X$. Без порушення загальності можна вважати, що $b \in X$. Оскільки V — неперіодична FC-група,

то завдяки [20] вона містить центральну підгрупу без скруту V_1, для якої V/V_1 — локально нормальна група. Нехай $V_2 = V_1^{<b>}$. Тоді $V_2 \lhd X$, $V_2 \leqslant Z(V)$. Оскільки G/R — скінченно породжена група, то скінченно породженими будуть групи X і V. Звідси V_2 містить підгрупу без скруту Z, яка нормальна в X і для якої X/Z — скінченна група. Отже, C λ Z/Z — допустима відносно G/C. Оскільки G/C — група з леми 4.1.9, то G/C/C λ Z/C — скінченна група. З цього випливає, що Z — абелева група рангу p−1. Максимальна вільна абелева підгрупа W з FC(G) теж має ранг p−1 і нормальна в G. Покладемо $U = W \cap Z$. Тоді $U \leqslant X$ і $U \lhd G$. Ясно, що G/U — періодична скінченна над своїм центром група. Звідси підгрупа X/U майже нормальна в G/U і тому X майже нормальна в G. Отже, [X;Y] э H — МН-підгрупа з G. Достатність доведена. Теорема повністю доведена.

Т е о р е м а 4.2.3. *Класи неперіодичних УЩМН[$\bar{\tau}$]- та МН[$\bar{\tau}$]-груп співпадають між собою.*

Доведення. Нехай G — неперіодична УЩМН[$\bar{\tau}$]-група. Покажемо, що тоді G — МН[$\bar{\tau}$]-група, тобто довільна неперіодична підгрупа H з G майже нормальна в G. Завдяки лемам 4.1.1 і 4.1.2 легко одержати, що FC(G) містить всі елементи нескінченного порядку з G і [G: FC(G)] < ∞. Нехай X — довільна періодична підгрупа з FC(G). Завдяки наслідку 3.10 з [73] Z(FC(G)) містить елемент z нескінченного порядку. Звідси і за означенням УЩМН[$\bar{\tau}$]-груп [X × <z>; X × $<z^4>$] э C ◁ N і [G:N] < ∞. Оскільки T(C) = X, то X ◁ N і, значить, X — МН-підгрупа з G. Отже, FC(G) — УЩМН[I]-група, яка за лемою 4.1.4 скінченна над своїм центром. Звідси, при H < FC(G), H — МН-підгрупа з G.

Нехай $FC(G) \not\ni H$. Оскільки $[G:FC(G)] < \infty$, то $H = UX$, де $U = FC(G) \cap H$, $[H:U] < \infty$, $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $/x_i/ < \infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$. За попереднім, U — МН-підгрупа з G. Внаслідок 3.10 з [73] $Z(U)$ містить елемент нескінченного порядку z. Покладемо $W_i = \langle z \rangle^{\langle x_i \rangle}$ і $H_i = W_i\langle x_i \rangle$. Легко бачити, що в W_i існує характеристична без скруту підгрупа V_i і тому в G існують підгрупи $V_i \lambda \langle x_i \rangle$, $X_i = V_i^4 \lambda \langle x_i \rangle$. За означенням УЩМН[$\overline{\top}$]-груп $[X_i;H_i]$ містить МН-підгрупу N_i. Оскільки $H = \langle U, x_1, \dots, x_n \rangle$, то і $H = \langle U, H_1, \dots, H_n \rangle$. Звідси H — МН-підгрупа з G. Теорема доведена.

Наслідок 4.2.2. *Класи неперіодичних УЩМН($\overline{\top}$)-, УЩМН($\overline{\top}$]-, УЩМН[$\overline{\top}$)-, УЩМН[$\overline{\top}$]-груп співпадають між собою.*

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 4.2.3.

Висновки до розділу IV

У підрозділі 4.1 приведені попередні результати, які мають самостійне значення і використовуються в подальшому. Зокрема, теореми 4.1.1 і 4.1.2 описують локально майже розв'язні групи з нескінченними майже нормальними підгрупами, а теорема 4.1.3 — неперіодичні групи з неперіодичними майже нормальними підгрупами.

Підрозділ 4.2 присвячений конструктивному опису локально майже розв`язних груп з щільними системами: всіх, нескінченних та неперіодичних майже нормальних підгруп. Це теореми 4.1.2 – 4.2.3 відповідно.

Всі результати цього розділу, окрім теореми 4.2.1, є новими.

ВИСНОВКИ

Опис узагальнень дедекіндових груп активно здійснюється вже більше 100 років. Зазначимо, що кількість таких досліджень невпинно зростає. На їх основі виникають нові перспективні і самостійні розгалуження в теорії груп. Одне з таких розгалужень одержується за допомогою поняття щільності для різних систем підгруп. Дослідження в ньому продовжуються вже більше 50 років. В дисертаційній роботі зроблено досить широке узагальнення дедекіндових груп, яке базується на понятті щільності нормальності та майже нормальності для різних систем підгруп.

У роботі вперше описані такі класи груп:

— локально ступінчасті ЩН[ ]-групи та їх підкласи (Н-, ЩН[ )-, ЩН( ]-групи);

— локально ступінчасті УЩН[ ]-групи та їх підкласи (УЩН( )-, УЩН[ )-, УЩН( ]-групи);

— локально майже розв`язні МН[I]-групи;

— неперіодичні МН[В$\overline{\text{Т}}$]-групи та їх підкласи (МН[ВI]-, МН[$\overline{\text{Т}}$]-групи);

— локально майже розв`язні УЩМН[I]-групи;

— неперіодичні УЩМН[$\overline{\text{Т}}$]-групи та їх підкласи (УЩМН($\overline{\text{Т}}$)-, УЩМН($\overline{\text{Т}}$]-, УЩМН[$\overline{\text{Т}}$)-групи).

Всі результати дисертаційної роботи мають строге доведення і базуються на класичних теоретико-групових методах.

Результати дисертації можуть використовуватися в різноманітних теоретико-групових дослідженнях, при читанні спецкурсів і

спецсемінарів та при написанні дипломних робіт і наукових рефератів.

Поняття різної щільності властивості V підгрупи групи дає можливість сформулювати багато нових перспективних задач в теорії груп. Зокрема, це стосується властивості нормальності та майже нормальності для всіляких систем підгруп. Наприклад, всякі щільності нормальності можна розглядати для систем: циклічних, нециклічних, абелевих, неабелевих, нільпотентних, ненільпотентних, скінченних, нескінченних, нескінченних абелевих, нескінченних неабелевих та інших систем підгруп.

Аналогічні задачі для нескінченних груп можна сформулювати для всяких щільностей майже нормальності.

Зазначимо, що основні результати дисертаційної роботи будуть базовими в розв`язанні вищенаведених задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ***Dedekind R.*** Uber Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann.– 1897.– 48.– S. 548–561.
2. ***Miller G.A., Moreno H.C.*** Non–abelian groups in which every subgroups is abelian // Trans. Amer. Math. Soc.– 1903.– 4.– P. 398–404.
3. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб.– 1924.– 31.– С. 366–372.
4. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп // Мат. сб.– 1926.– 33.– С. 161–172.
5. ***Smidt O. Yu.*** Uber unendliche Gruppen mit undlichen Kette // Math. Z.– 1928.– 29.– S. 34–41.
6. ***Шмидт О.Ю.*** Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Труды семинара по теории групп.– М.; Л.: Наука.– 1938.– С. 7–26.
7. ***Baer R.*** Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.–B. Heidelberg. Akad.– 1933.– 2.– S. 12–17.
8. ***Baer R.*** Gruppen mit hamiltonschen Kern // Comp. Math.– 1935.– 2.– S. 241–246.
9. ***Baer R.*** Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung // Comp. Math.– 1935.– 2.– S. 247–249.
10. ***Baer R.*** Gruppen mit von Zentrum wesentlich verschidenen Kern und abelscher Faktorgruppe nach dem Kern // Comp. Math.– 1936.– 4.– S. 1–17.
11. ***Baer R.*** Finiteness properties of groups // Duke Math. J.– 1948.– 15.– P. 1021–1032.
12. ***Курош А.Г., Черников С.Н.*** Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук.– 1947.– N 3.– С. 18–59.
13. ***Черников С.Н.*** Бесконечные специальные группы // Мат. сб. 1939.– N 2.– С. 199–214.
14. ***Черников С.Н.*** Бесконечные локально разрешимые группы // Там же.– 1940.– N 1.– С. 35–64.

15. ***Черников С.Н.*** К теории бесконечных специальных групп // Там же.– 1940.– N 3.– С. 539–548.

16. ***Черников С.Н.*** К теории локально разрешимых групп // Там же.– 1943.– N 2–3.– С. 317–333.

17. ***Черников С.Н.*** О бесконечных специальных группах с конечным центром // Там же.– 1945.– N 1.– С. 105–130.

18. ***Черников С.Н.*** О централизаторе полного абелева нормального делителя в бесконечной периодической группе // Докл. АН СССР.– 1950.– N 2.– С. 243–246.

19. ***Черников С.Н.*** О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Мат. сб.– 1951.– N 1.– С. 119–129.

20. ***Черников С.Н.*** О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР.– 1957.– N 1.– С. 60–63.

21. ***Черников С.Н.*** Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Там же.– 1964.– N 4.– С. 759–760.

22. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Там же.– 1966.– N 4.– С. 806–809.

23. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн.– 1967.– N 6.– С. 111–131.

24. ***Черников С.Н.*** О нормализаторном условии // Мат. заметки.– 1968.– N 1.– С. 45–50.

25. ***Черников С.Н.*** Исследования групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн.– 1969.– N 2.– С. 193–200.

26. ***Черников С.Н.*** Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР.– 1970.– N 6.– С. 1280–1283.

27. ***Черников С.Н.*** Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.– 1971.– N 5.– С. 604–2628.

28. ***Черников С.Н.*** О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп.– К.: Наук. думка.– 1971.– С. 17–39.

29. Черников С.Н. Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Там же.– С. 47–65.

30. Черников С.Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1973.– С. 6–14.

31. Черников С.Н. Группы с плотной системой дополняемых подгрупп // Некоторые вопросы теории групп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1975.– С. 5–29.

32. Hall Ph. Complemented group // J. London Maht. Sos.– 1937.– 12.– P. 201–204.

33. Neuman B.H. Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc.– 1954.– N 114.– P. 236–248.

34. Neuman B.H. Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z.– 1955.– N 1.– P. 76–96.

35. Чунихин С.А. О некоторых направлениях в развитии теории конечных групп за последние годы // Успехи мат. наук.–1961.– N 4.– С. 31–50.

36. Шунков В.П. О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика.– 1970.– N 2.– С. 220–248.

37. Зайцев Д.И. О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР.– 1974.– N 6.– С. 1250–1253.

38. Зайцев Д.И. О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследования групп по заданным свойствам подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1974.– С. 72–130.

39. Hartley B. A dual approach to Cernikov modules // Math. Proc. Gambridge Phil. Soc.– 1977.– N 2.– P. 215–239.

40. Ольшанский А.Ю. Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР.– 1979.– N 4.– С. 785–787.

41. Ольшанский А.Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат.– 1980.– N 2.– С. 309–321.

42. Сысак Я.П. Произведения бесконечных групп.– К.: 1982.– 36с. (Препр./ АН УССР. Ин–т математики; 82–83).

43. Группы с ограничениями для подгрупп: Сб. науч. тр.– К.: Наук. думка,

1971.– 228с.

44. Группы с системами дополняемых подгрупп: Сб. науч. тр.– К.: Ин–т математики АН УССР, 1971.– 226с.

45. Группы с заданными свойствами подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1973.– 344с.

46. Исследования групп по заданным свойствам подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1974.– 268с.

47. Некоторые вопросы теории групп: Сб. науч. тр.– Там же, 1975.– 228с.

48. Исследования по теории групп: Сб. науч. тр.– Там же, 1976.– 174с.

49. Строение групп и свойства их подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1978.– 156с.

50. Теоретико–групповые исследования: Сб. науч. тр.– К.: Наук. думка, 1978.– 160с.

51. Группы, определяемые свойствами системы подгрупп: Сб. науч. тр.– К.: Ин–т математики АН УССР, 1979.– 156с.

52. Конструктивное описание групп з заданными свойствами подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1980.– 146с.

53. Исследование групп с заданными свойствами системы подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1981.– 104с.

54. Подгрупповая характеризация групп: Сб. науч. тр.– Там же, 1982.– 116с.

55. Группы и системы их подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1983.– 125с.

56. Строение групп и их подгрупповая характеризация: Сб. науч. тр.– Там же, 1984.– 145с.

57. Строение групп и свойства их подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1986.– 135с.

58. Исследование групп с ограничениями для подгрупп: Сб. науч. тр.– Там же, 1988.– 128с.

59. Комплексный анализ, алгебра и топология: Сб. науч. тр.– Там же, 1990.– 124с.

60. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Сб. науч. тр.– К.: Ин-т математики АН Украины, 1993.– 549с.

61. Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук. пр.– К.: Ін–т математики НАН України, 1997.– 128с.

62. Шмидт О.Ю. Избранные труды. Математика.– М.: АН СССР, 1959.– 316с.

63. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп.– Минск: Наука и техника, 1964.– 158с.

64. Холл М. Теория групп.– М.: Изд–во иностр. лит., 1962.– 468с.

65. Курош А.Г. Теория групп.– М.: Наука, 1967.– 648с.

66. Huppert B. Endliche Gruppen I.– Berlin – Heidelberg – New–York: Springer–Verlag, 1967.– 793s.

67. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы.– М.: Наука, 1967.– 111с.

68. Robinson D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt. I.– Berlin etc.: Springer, 1972.– 210p.

69. Robinson D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt. 2.– Berlin etc.: Springer, 1972.– 254p.

70. Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F. Localle finite groups.– Amsterdam; London: North–Holland Publ., Co., 1973.– 210p.

71. Шеметков Л.А. Формации конечных групп.– М.: Наука, 1978.– 272с.

72. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов.– Там же, 1978.– 119с.

73. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.– Там же, 1980.– 384с.

74. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.– Там же, 1982.– 288с.

75. Черников Н.С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.– К.: Наук. думка, 1987.– 208с.

76. Шунков В.П. M_p-группы.– М.: Наука, 1990.– 160с.

77. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення.– К.: Ін-т математики НАН України, 1996.– 232с.

78. Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф. Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп.– Там же, 1997.– 230с.

79. Лиман Ф.М. Групи з обмеженнями на нормальність деяких систем підгруп // Деп. в ДНТБ України 24.11.97, N 577–Ук97.– 293с.

*80. **Huppert B.*** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Maht. Z.– 1954.– N 4.– S. 409–434.

*81. **Janko Z.*** Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Maht. Z.– 1963.– N 1.– P. 82–89.

*82. **Janko Z.*** Finite simple groups with short chains of subgroups // Maht. Z.– 1964.– N 4.– P. 428–437.

*83. **Buckley J.*** Finite groups whose minimal subgroups are normal // Maht. Z.– 1970.– N 1.– P. 15–17.

*84. **Трофимов П.И.*** О влиянии числа всех классов неинвариантных сопряженных подгрупп на свойства конечной неспециальной группы // Мат. сб.– 1953.– N 1.– С. 45–72.

*85. **Ситников В.М., Устюжанинов А.Д.*** Конечные группы с тремя классами неинвариантных подгрупп // Мат. зап. Урал. ун–та.– 1967.– N 1.– С. 94–102.

*86. **Ito N.*** On the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in a finite group // Acta Sci. Math.– 1955.– N 1–2.– P. 9–11.

*87. **Ito N., Szep J.*** Uber nichtauflosbare endliche Gruppen // Acta Sci. Math.– 1956.– N 1–2.– S. 76–82.

*88. **Лиман Ф.М.*** Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР.– 1967.– N 12.– С. 1073–1075.

*89. **Лиман Ф.Н.*** 2–группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки.– 1968.– N 1.– С. 75–83.

*90. **Лиман Ф.М.*** Р-групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР.– 1968.– N 8.– С. 696–699.

*91. **Лиман Ф.Н.*** Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика.– 1968.– N 4.– С. 70–86.

*92. **Лиман Ф.М.*** Неперіодичні групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР.– 1969.– N 1.– С. 11–13.

*93. **Лиман Ф.Н.*** Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп.– К.: Наук. думка.– 1971.– С. 65–96.

*94. **Ромалис Г.М.*** О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук.–

1962.– N 6.– С. 228

95. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун–та.– 1966.– N 3.– С. 45–49.

96. Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М. О метагамильтоновых группах II // Там же.– 1968.– N 5.– С. 50–53.

97. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метагамильтоновых группах III // Там же.– 1970.– N 3.– С. 195–199.

98. Нагребецкий В.Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Там же.– 1967.– N 1.– С. 80–88.

99. Махнев А.А. О конечных метагамильтоновых группах // Там же.– 1976.– N 1.– С. 60–75.

100. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.– 1983.– N 2.– С. 179–188.

101. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метагамильтоновых групп.– К.: Киев. пед. ин–т, 1983.– 22с.

102. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеризация.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1984.– С. 101–111.

103. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Будова розв'язних метагамільтонових груп // Доп. АН УРСР.– 1985.– N 2.– С. 6–9.

104. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика.– 1986.– N 11.– С. 32–40.

105. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн.– 1987.– N 2.– С. 180–185.

106. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение периодических метабелевых метагамильтонових групп с элементарным коммутантом ранга два // Там же.– 1988.– N 6.– С. 743–750.

107. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения.– К.: Наук.

думка.– 1989.– С. 173–183.

108. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три // Укр. мат. журн.– 1989.– N 2.– С. 170–176.

109. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два // Там же.– 1990.– N 2.– С. 168–175.

110. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н. О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Там же.– 1988.– N 3.– С. 314–322.

111. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н. Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследований алгебраических и топологических структур.– К.: Киев. пед. ин–т.– 1989.– С. 37–45.

112. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Новые характеризации локально нильпотентных $\overline{\text{ин}}$-групп // Укр. мат. журн.– 1988.– N 3.– С. 322–326.

113. Лиман Ф.М. Групи, всі розкладні підгрупи яких інваріантні // Там же.– 1970.– N 6.– С. 725–733.

114. Лиман Ф.Н. Об одном классе бесконечных p-групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1974.– С. 250–259.

115. Лиман Ф.Н. Группы с некоторыми системами инвариантных pd–подгрупп // Группы и системы их подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1983.– С. 100–118.

116. Лиман Ф.Н. О периодических группах, все разложимые pd–подгруппы которых инвариантны // Укр. мат. журн.– 1988.– N 1.– С. 58–61.

117. Лиман Ф.Н. Непериодические группы, все разложимые pd–подгруппы которых инвариантны // Там же.– 1988.– N 3.– С. 330–335.

118. Лиман Ф.Н. О бесконечных группах, все бесконечные pd–подгруппы которых инвариантны // Изв. вузов. Математика.– 1990.– N 3.– С. 75–78.

119. Лиман Ф.Н. О группах, все абелевы нециклические pd–подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн.– 1991.– N 7–8.– С. 974–980.

120. Лиман Ф.Н. О группах, все бесконечные абелевы pd–подгруппы которых нормальны // Там же.– 1992.– N 6.– С. 796–800.

121. Лиман Ф.Н., Лелеченко Т.Г. Группы с инвариантными максимальными абелевыми подгруппами ранга 1 непростых порядков // Подгрупповая характеризация групп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1982.– С. 85–92.

122. Шеметков Л.А. О конечных группах, у которых все повторные π–истинно максимальные подгруппы инвариантны // Докл. АН БССР.– 1962.– N 4.– С. 214–216.

123. Шеметков Л.А. Конечные группы с условием инвариантности для некоторых подгрупп // Сиб. мат. журн.– 1963.– N 5.– С. 1175–1182.

124. Нагребецкий В.Т. Конечные группы, любая ненильпотентная подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та.– 1968.– N 3.– С. 45–49.

125. Субботин И.Я. Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Мат. заметки.– 1972.– N 6.– С. 739–746.

126. Субботин И.Я. Бесконечные конечнопорожденные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Укр. мат. журн.– 1975.– N 3.– С. 406–411.

127. Субботин И.Я. О бесконечных группах, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1980.– С. 92–107.

128. Giordano G. Gruppi con normalizzatori estremali // Matematiche. 1971.– N 2.– P. 291–296.

129. Fattahi A. Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra.– 1974.– N 1.– P. 15–19.

130. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн.– 1987.– N 2.– С. 180–185.

131. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика.– 1988.– N 3.– С. 77–79.

132. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы с пронормальными примар-

ными подгруппами // Укр. мат. журн.– 1989.– N 3.– С. 323–327.

133. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. О группах, все подгруппы которых имеют веер заданного вида // Там же.– 1990.– N 9.– С. 1232–1236.

134. Черніков М.С. Групи, в яких інваріантна кожна абелева підгрупа, що не збігається зі своїм нормалізатором // Доп. АН УРСР.– 1974.– N 11.– С. 977–978.

135. Черников Н.С. Группы, в которых инвариантны все абелевы подгруппы, отличные от своих нормализаторов // Теоретико–групповые исследования.– К.: Наук. думка.– 1978.– С. 117–127.

136. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В. О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР.– 1989.– N 10.– С. 21–22.

137. Cappit D. Generalized Dedekind groups // J. Algebra.– 1971.– N 3.– P. 310–316.

138. Баранник А.Ф. Обобщение метагамильтоновых групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1974.– С. 167–198.

139. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Будова сепараторно дедекіндових груп // Укр. мат. журн.– 1996.– N 10.– С. 1342–1351.

140. Лелеченко Т.Г. Об одном классе групп с сепарирующими подгруппами // Там же.– 1981.– N 5.– С. 604–609.

141. Ito N., Szep J. Uber die Quasinormalteiler fon endlichen Gruppen // Acta Sci. Math. Szeged.– 1962.– 23.– S. 168–170.

142. Baer R. Erreichbare und engelsche Gruppenelemente // Abh. Math. Semin.– Univ. Hamburg.– 1964.– 27.– S. 44–74.

143. Кемхадзе Ш.С. Квазинильпотентные группы // Докл. АН СССР.– 1964.– 155.– С. 1003–1005.

144. Peng T.A. Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc.– 1969.– N 1.– P. 232–234.

145. Еремин И.И. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Мат. сб.– 1959.– N 1.– С. 45–54.

146. Еремин И.И. О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданным свойством // Докл. АН СССР.– 1961.– N 4.– С. 772–773.

147. Best E., Taussky O. A class of groups // Proc. PJA.– 1942.– 47, sect. A.– P. 55–62.

148. Gashutz W. Gruppen, in denen das Normalteiler sein transiv ist // J. reine und angew. Maht.– 1957.– N 1–2.– S. 87–92.

149. Абрамовский И.Н., Каргаполов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук.– 1958.– 13, вып. 3(81).– С. 242–243.

150. Robinson D.J.S. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.– 1964.– 60.– P. 21–38.

151. Медведева Р.П. Обобщение некоторых групп со свойством транзитивности для нормальных делителей // Сиб. мат. журн.– 1965.– N 5.– С. 1068–1073.

152. Абрамовский И.Н. Локально обобщенные гамильтоновы группы // Сиб. мат. журн.– 1966.– N 3.– С. 481–485.

153. Robinson D.J.S. Groups whose images have a transitive normality relation // Lect. Notes. Maht.– 1973.– N 319.– P. 148–155.

154. Giovanni D., Francosi F. Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal // J. Algebra.– 1985.– N 2.– P. 566–580.

155. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. О группах с условием транзитивности // Исследования групп с ограничениями для подгрупп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1988.– С. 73–80.

156. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Локально разрешимые группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей // Методы исследования алгебраических и топологических структур.– К.: Киев. пед. ин–т.– 1989.– С. 45–52.

157. Кузенний М.Ф., Зузук Л.І. Будова періодичних T($\bar{A}$)-груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Укр. мат. журн.– 1995.– N 10.– С. 1361–1369.

158. Кузенний М.Ф. Будова T($\bar{A}$)-груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Там же.– 1996.– N 3.– С. 349–361.

159. Mann A. Groups with dense normal subgroups // Israel J. Math.– 1968.– N 1.– c. 13–25.

160. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные ненильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп // VI Всесоюз. симп. по теории групп.– К.: Наук. думка.– 1978.– С. 49–50.

161. Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XY Всесоюз. алгебр. конф.– Красноярск: Изд–во Краснояр. ун–та.– 1979.– С. 84–85.

162. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 // Там же.– С. 126.

163. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп.– Киев, 1980.– 17с. Деп. в ВИНИТИ 6.09.80, N 19–25–80.

164. Горецкий В.Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариатных абелевых подгрупп // Теоретико–групповые исследования.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1978.– С. 127–138.

165. Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн.– 1983.– N 1.– С. 42–46.

166. Пылаев В.В. Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп // Некоторые вопросы теории групп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1975.– С. 197–217.

167. Пылаев В.В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп.– К.: Ин–т математики АН УССР.– 1976.– С. 111–139.

168. Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Укр. мат. журн.– 1981.– N 3.– С. 407–410.

169. Семко М.М. Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.– К.: Ін–т математики НАН України.– 1997.– 90 с.

170. Семко М.М. Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.– Там же.– 63с.

171. Семко М.М. Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.– Там же.– 62с.

172. Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А. О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика.– 1983.– N 10.– С. 57–63.

173. Семко Н.Н. Непериодические группы с почти нормальными непериодическими подгруппами // Группы и системы их подгрупп.– К.: Ин-т математики АН УССР.– 1983.– С. 79–86.

174. Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М. Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР.– 1985. N 3.– С. 7–9.

175. Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн.– 1991.– N 7, 8.– С. 969–973.

176. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Про групи, близькі до метациклічних // Там же.– 1996.– N 6.– С. 782–790.

177. Семко М.М. Будова локально ступінчастих ЩН[ ]–груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.– К.: Ін–т математики НАН України.– 1996.– Вип. 12.– С. 181–186.

178. Семко М.М. Про будову УЩН[ ]–груп // Там же.– Вип. 13.– С. 196–203.

179. Семко М.М. Будова локально ступінчастих УЩН( )–груп // Укр. мат. журн. — 1998. — N 11. — С. 1532–1536.

180. Семко М.М. Будова нільпотентних УЩН[ ]–груп // Класи груп з обмеженнями для підгруп.– К.: Ін–т математики НАН України.– 1997.– С. 27–41.

181. Семко М.М. Будова локально ступінчастих УЩН[ )–груп // Укр. мат. журн.– 1999.– N 3.– С. 383–388.

182. Семко М.М. Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]–груп // Укр. мат. журн.– 1997.– N 6.– С. 789–98.

183. Семко М.М. Ненільпотентні групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування

до крайових задач.– К.: Ін–т математики НАН України.– 1997.– Вип. 15.– С. 175–187.

184. Семко М.М. Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп // Там же.– Вип. 16.– С. 255–263.

185. Семко М.М. Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп // Укр. мат. журн.– 1997.– N 8.– С. 1148–1151.

186. Семко М.М. Про будову УЩН[ ]–груп з елементарним комутантом рангу два // Там же.– N 10.– С. 1396–1403.

187. Семко М.М. Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України.– 1997.– N 9.– С. 49–53.

188. Семко М.М. Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп // Там же.– N 10.– С. 43–46.

189. Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп // **Семко М.М.**; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1996.– 67с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 12.03.96, N 743–Ук95 // ВИНИТИ, М., 1996, N 7 (291), б/о 72.

190. Будова локально ступінчастих ненільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1996.– 24с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N 2326–Ук96 // ВИНИТИ, М., 1997, N 2 (302), б/о 201.

191. Про будову груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1996.– 41с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N 2340–Ук96 // ВИНИТИ, М., 1997, N 2 (302), б/о 211.

192. Будова нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України. Київ, 1996.– 55с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 12.12.96, N 2370 Ук96 // ВИНИТИ, М., 1997, N 2 (302), б/о 239.

193. Про будову УЩН( )–груп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1997.– 31с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 21.04.97,

N 295–Ук97 // ВИНИТИ, М., 1997, N 7 (307), б/о 255.

194. Про будову локально ступінчастих УЩН[ )–груп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1997.– 17с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N 296–Ук97 // ВИНИТИ, М., 1997, N 7 (307), б/о 256.

195. Про будову локально ступінчастих УЩН( ]–груп // ***Семко М.М.***; Н.–д. ін–т педагогіки АПН України.– Київ, 1997.– 27с.– Укр.– Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N 297–Ук97 // ВИНИТИ, М., 1997, N 7 (307), б/о 257.

196. Семко М.М. Будова деяких УЩН[ ]–груп з нециклічним комутантом // Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 16–18 трав. 1996).– К.: Віпол.– 1996.– С. 389.

197. Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова ЩН[ ]–груп // Там же.– С. 390.

198. Семко М.М. Про будову УЩН[ ]–груп // Укр. мат. журн.– 1998.– N 9.– С. 1250–1261.

199. Семко М.М. Будова нільпотентних недедекіндових УЩН[ ]–груп // Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 15–17 трав. 1997).– К.: Віпол.– 1997.– С. 346.

200. Семко М.М., Кузенний М.Ф. Про будову ненільпотентних УЩН[ ]–груп // Там же.– С. 347.

201. Семко М.М. Будова метациклічних та мінімальних неметациклічних УЩН[ ]–груп // Крайові задачі для диференціальних рівнянь.– К.: Ін-т математики НАН України.– 1998.– Вип. 1 (17).– С. 230–237.

202. Семко М.М. Будова ненільпотентних локально ступінчастих УЩН( ]-груп // Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена пам'яті професора Л.М.Глускіна (1922–1985).– К.: Ін–т математики НАН України.– 1997.– С. 64.

203. Семко М.М. Про групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // Тези VII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 14–16 трав. 1998).– К.: Віпол.– 1998.– С. 453.

204. Семко М.М. Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп.– К.: Ін-т математики НАН України, 1998.– 285с.

205. Herstein N. Aremark on finite groups // Proceedings. Amer. Math. Soc.–

1958.– N 2.– P. 255–257.

206. Устюжанинов А.Д. Конечные 2-группы с тремя инволюциями // Сиб. мат. журн.– 1972.– N 1.– С. 182–197.

207. Dixon J.D. The structure of linear groups.– New York: Van Norstrand, 1971.– 183p.

208. Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.– 1970.– N 5.– С. 579–615.

209. Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф. Группы с условием дисперсивности для подгрупп.– К.: Киев. пед. ин-т, 1985.– 96с.

210. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. Конечные группы Шмидта и их обобщение // Укр. матем. журн.– 1991.– N 7–8.– С. 963–968.

211. Blackburn N. Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London. Maht. Soc.– 1961.– N 41.– P. 1–22.

212. Curcio M. Classification on finite minimal non-metacyclic groups // Acta Soc. Math.– 1984.– N 3–4.– P. 289–295.

213. Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Конструктивное описание конечных минимальных неметациклических групп.– Киев, 1986.– 41с.– Деп. в УкрНИИНТИ 04.01.87, N 33–Ук87.

214. Левищенко С.С, Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н., Томанек Л. Строение конечных минимальных неметациклических групп // Prirodne vedy. Mathematica. Zbornic pedagogickej fakulty v presove university P. I. Safatica.– Kosice. 1990.– Proc. XXIV, Zvazok 1.– S. 49–97.

215. Старостин А.И. О группах Фробениуса // Укр. мат. журн.– 1971.– N 5.– С. 629–639.

216. Schenkmann E. The splitting of certain solvable groups // Proc. Am. Math. Soc.– 1995.– 6.– P. 286–290.

217. Кэтрис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.– М.: Наука, 1969.– 669с.