

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

**Методика вивчення теми «Декартові координати і
вектори в просторі» в середній школі**

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, групи СОМ-24-1,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Калініченко Дмитра Ігоровича

Науковий керівник



Оксана ЯРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Гарант освітньо-професійної програми



Микола СЕМКО, д-р фіз.-мат. наук,
професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
вищої та прикладної математики
протокол від 29.12

Завідувач кафедри



Оксана ЯРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ірпінь – 2025

Реєстрація № 10

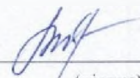
20.01.2026
(дата)

Семчиш І.В.
(підпис відповідальної особи)

Результати перевірки

до захисту
(до захисту, на доопрацювання)

13.01.2026
(дата)


(підпис)

Результат захисту

86
(оцінка)

06.02.2026
(дата)


(підпис)

Голова комісії:

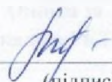

(підпис)

Н.М. Посева
(ініціали, прізвище)

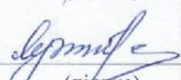
Члени комісії:


(підпис)

М.М. Селішко
(ініціали, прізвище)


(підпис)

І.В. Скосків
(ініціали, прізвище)


(підпис)

О.А. Дрова
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	26		Грива О.А. [підпис]
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	10		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	44		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	8		Голова ек. ком. Лосева Н.М. [підпис] Члени комісії: Семко М.М. Семків І.В. Грива О.А.
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	4		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	25		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	42		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	86		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підписи)
86	B	4 (добре)	06.02.2026	Голова ек. ком. Лосева Н.М. [підпис] Члени комісії: Семко М.М. Семків І.В. Грива О.А.

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

Анотація

Дмитро Калініченко. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ» В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Магістерська робота присвячена дослідженню методики вивчення теми «Декартові координати і вектори в просторі» в середній школі. Аналізуються існуючі підходи до викладання цього розділу стереометрії, виявляються типові труднощі учнів у сприйнятті просторових понять та векторних операцій. Дослідження розглядає роль інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні та їхній вплив на засвоєння матеріалу. Робота робить внесок у методику навчання математики, пропонує ефективні стратегії для підвищення розуміння та засвоєння учнями понять декартових координат та векторів у тривимірному просторі. Очікується, що результати дослідження будуть корисними для вчителів математики та сприятимуть вдосконаленню навчального процесу.

Ключові слова: освітній процес, методика, декартові координати, вектор, скалярний добуток.

Abstract

Dmytro Kalinichenko. METHODOLOGY FOR STUDYING THE TOPIC "CARTESIAN COORDINATES AND VECTORS IN SPACE" IN SECONDARY SCHOOL

The master's thesis is devoted to the study of the methodology for studying the topic "Cartesian coordinates and vectors in space" in secondary school. Existing approaches to teaching this section of stereometry are analyzed, and typical difficulties of students in understanding spatial concepts and vector operations are revealed. The study examines the role of information and communication technologies in education and their impact on the assimilation of material. The work contributes to the methodology of teaching mathematics, offering effective strategies for improving students' understanding and assimilation of the concepts of Cartesian coordinates and vectors in three-dimensional space. It is expected that the results of the study will be useful for mathematics teachers and will contribute to the improvement of the educational process.

Keywords: educational process, methodology, Cartesian coordinates, vector, scalar product

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ	10
1.1. Історичні аспекти розвитку поняття системи координат	10
1.2. Особливості вивчення теми «Координати і вектори» у шкільному курсі геометрії	13
1.3. Особливості викладу теми у шкільних підручниках	19
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ	22
2.1. Методика навчання учнів розв'язувати найпростіші задачі в координатах	22
2.2. Методика вивчення декартових координат і векторів у просторі	30
РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ	70
ВИСНОВКИ	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	81

ВСТУП

Для успішної інтеграції особистості в сучасне суспільство необхідна здатність опановувати математичні прийоми та використовувати їх для вирішення прикладних задач. Математична компетентність є ключовою умовою для освоєння багатьох предметів у загальноосвітній школі, а також для відповідності вимогам сучасного ринку праці, отримання якісної професійної освіти й подальшого навчання на наступних етапах. Відповідно, одним із основних завдань викладання математики є створення сприятливих умов для формування цієї компетентності у кожного учня.

Учитель математики мусить не лише забезпечити учнів фундаментальними знаннями та навичками з основ наук, але й стимулювати розвиток їхнього мислення, зацікавити вивченням математики та активізувати пізнавальну діяльність. Крім того, необхідно сприяти формуванню навичок самостійної роботи, щоб учні після закінчення школи мали змогу самостійно вдосконалювати свої професійні компетенції. Однак шкільне викладання математики часто стикається з серйозними труднощами, адже цей предмет вважається одним із найскладніших для засвоєння. Існують як суб'єктивні, так і об'єктивні причини таких труднощів.

Об'єктивні фактори пов'язані зі специфікою математики як науки, її абстрактністю, що вимагає врахування психологічних особливостей мислення учнів, а також їхніх вікових і індивідуальних відмінностей у процесі пізнавальної діяльності.

Поряд із традиційним змістом та структурою шкільного курсу математики поступово сформувалися й усталені методи його викладання. Ці методи, перевірені часом, у більшості випадків продемонстрували свою ефективність і, найімовірніше, збережуться у шкільній практиці ще в найближчі роки. Однак існує потреба у вдосконаленні навчального процесу, оскільки в дидактиці математики залишається актуальним завдання розробки нових, більш результативних методів навчання. Ця необхідність виникає не лише через

оновлення змісту та структури курсу, що вимагає корекції підходів до роботи вчителя і учнів.

Уже давно встановлено, що традиційні методи навчання мають певні обмеження у своїй ефективності. Сучасний учитель має усвідомлювати, що його основне завдання полягає не лише в передачі учням ґрунтовних і тривалих знань, але й у розвитку їхньої здатності самостійно здобувати ці знання та застосовувати їх на практиці. Нинішні умови вимагають організації такого навчального процесу, який зможе хоча б частково компенсувати скорочення навчальних годин і водночас гарантувати учням належний рівень математичної підготовки.

Для досягнення цієї мети вчителям варто комбінувати різноманітні підходи до навчання: індивідуальні та групові форми роботи, діалогове та контекстне навчання. Вони мають створювати умови для розвитку творчості учнів, впроваджувати активні й інтерактивні методи викладання. Усе це потребує особливого фокусу не лише на засвоєнні знань, а й на формуванні особистості учня через активізацію його природних здібностей, уникаючи при цьому надмірного тиску.

Організація навчання геометрії вимагає від учителя побудови освітнього процесу так, щоб кожен учень здійснював самостійний пошук, аналізував та уточнював методи роботи, застосовуючи їх для розв'язання нових навчальних задач, а також аргументував свої рішення. У такому підході учень стає активним учасником навчання: не лише отримує знання, але й самостійно освоює їх. Саме цей методичний формат дедалі більше впроваджується в сучасній школі.

Зміни, що спостерігаються в суспільній свідомості через гуманізацію, гуманітаризацію, демократизацію та міжнародну інтеграцію, потребують створення нових моделей школи. Аналізуючи нинішній стан розвитку освітньої галузі, можна зробити висновок, що однією з ключових проблем системи освіти залишається недостатня розробленість питання процесу учіння.

Провідні українські вчені-методисти визнають цю проблему однією з найскладніших і найменш досліджених. Методичний аспект її вивчення

знаходиться лише на початковій стадії. Вирішення цієї задачі базується на тому, щоб визнавати учня суб'єктом навчальної та професійної діяльності. Значний внесок у розвиток дидактики математики зробили науковці-дослідники, серед яких Г.П. Бевз, О.Я. Блох, Н.І. Ю.М. Колягін, Е.С. Ляпін, Н.В. Метельський, З.І. Слєпкань та інші. Теоретичний і методологічний фундамент для наших досліджень становлять роботи педагогів і психологів: І.Д. Беха, П.П. Блонського, Л.С. Виготського, Б.В. Гнеденко, О.К. Дусавицького, С.Д. Максименка, О.М. Матюшкіна та інших фахівців цієї галузі [6].

У зв'язку з впровадженням нових навчальних програм і підручників виникла потреба у створенні сучасної методики з математики, яка б узгоджувалася з актуальними освітніми матеріалами. Зокрема, у курсі стереометрії значну роль відіграють знання з теми «Координати і вектори в просторі», адже саме вони активно застосовуються при доведенні теорем та розв'язуванні задач. Отже, існує необхідність у розробці ефективної методики викладання даної теми для учнів 10 класу.

До того ж, більшість існуючих методик не враховують рівневі завдання, що ускладнює адаптацію матеріалу до різних рівнів підготовки учнів. Це обумовлює потребу у створенні методичного підходу, який передбачатиме використання таких завдань, забезпечуючи диференційований підхід до навчання [4].

Проблема, якій присвячене дане дослідження, має надзвичайну актуальність, оскільки її наукова і практична значущість безпосередньо пов'язана з ефективністю сучасної освіти. Недостатній рівень теоретичного обґрунтування та методичної розробки багатьох аспектів викладання цієї теми обумовлює вибір конкретного напрямку дослідження, що був сформульований як «Методика вивчення теми «Декартові координати і вектори в просторі» в середній школі».

У світлі сучасних освітніх реформ виникає потреба у фундаментальному переосмисленні діючої методичної системи, а також її адаптації до нових вимог та моделей навчання.

Об'єктом даного дослідження є процес засвоєння учнями тематики стереометрії у десятому класі при навчанні геометрії на рівні стандарту.

Предмет дослідження охоплює конкретну методику викладання таких тем, як «Декартові координати в просторі» та «Вектори в просторі», у межах курсу стереометрії для загальноосвітніх закладів.

Головною метою цієї роботи є розробка інноваційної методики навчання зазначених тем, що відповідає сучасним вимогам шкільної освіти та здатна забезпечити учням якісне засвоєння матеріалу. Основна гіпотеза дослідження полягає в тому, що інтеграція такої методичної системи сприятиме більш активному розвитку інтелектуальних здібностей школярів, їхніх пізнавальних можливостей і умінь навчатися, водночас стимулюючи інтерес до предмету та спрямовуючи їх на успіх у його освоєнні.

Для досягнення зазначеної мети були реалізовані такі завдання: проведено ґрунтовний аналіз підручників, дидактичних, психологічних та методичних матеріалів щодо представленої тематики; створено науково обґрунтовану методику викладання тем «Декартові координати в просторі» і «Вектори в просторі» в шкільному курсі стереометрії.

Результати практичного застосування даного дослідження можуть бути використані у роботі учителів для підготовки уроків з геометрії, а також знайдуть своє місце у написанні курсових, дипломних та магістерських робіт навчальних закладів.

Апробацію отриманих висновків було проведено на базі освітнього процесу Ворошилівської гімназії, яка функціонує під керівництвом Гніванської міської ради Вінницької області.

Структура роботи органічно відповідає поставленій меті й задачам дослідження. Вона включає вступну частину, три розділи основного тексту, висновки наприкінці роботи, а також список використаних джерел для забезпечення теоретичної бази дослідження.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історичні аспекти розвитку поняття системи координат

Метод координат — це математичний підхід, що дозволяє за допомогою чисел чи інших символів точно визначити положення точки, геометричної фігури або фізичного тіла в просторі. Він використовується як інструмент для дослідження властивостей геометричних об'єктів, їхньої форми, взаємного розташування та поведінки через застосування алгебраїчних засобів у координатній системі.

Історія розвитку координатних систем нерозривно пов'язана як з вирішенням суто математичних задач, так і з практичними потребами тогочасних суспільств, зокрема у сферах навігації, картографії та астрономії. Однією з найзнаменитіших форм координатної системи є прямокутна чи декартова система, запропонована у 1637 році видатним французьким математиком Рене Декартом. Паралельно з цим у європейській математиці почало формуватися поняття полярної системи координат. Однак її корені сягають ще давніх часів: перші уявлення про полярні координати відомі зі Стародавньої Греції, а також знаходять відображення в працях середньовічних арабських учених, які розробляли спеціальні методи для обчислення напрямку на Каабу, одного зі священних центрів ісламу.

Фундаментальна роль у становленні методу координат належить французькому математику П'єру Ферма та вже згаданому Рене Декарту. Метод Ферма, розроблений у 1629 році (хоча опублікований значно пізніше, у 1679 році), побудований на принципі взаємно однозначної відповідності між точками площини та парами чисел $(x; y)$. Система координат Ферма включала одну пряму лінію, яка фактично виконувала функцію сучасної осі абсцис, і визначену початкову точку — аналог сучасного початку координат. Цей підхід став основою для подальшого розвитку математичних методів та значно збагатив арсенал геометричної науки. Положення, наприклад, точки P на деякій кривій

визначалося відстанями А (сучасна абсциса x точки Р) і Е (сучасна ордината y точки Р) (рис.1.1.).

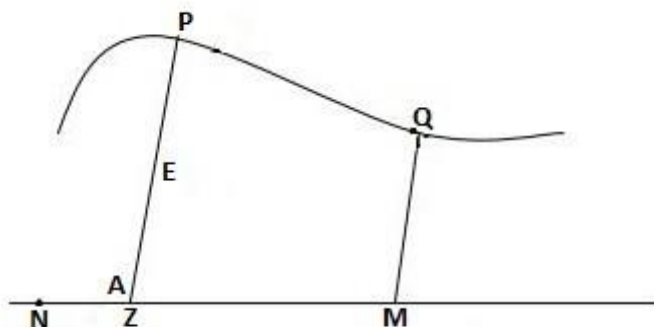


Рис.1.1.

Ферма розглядав лише додатні значення x і y , а тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта (будь-яка з чотирьох частин площини, на які її ділять дві взаємно перпендикулярні прямі).

Прямі PZ і QM – паралельні, але не обов’язково перпендикулярні прямій NM. За допомогою такого підходу встановлювалася відповідність між кривими та їх рівняннями $f(x, y) = 0$. Ферма встановив, що рівняння першого степеня описують прямі, а рівняння другого степеня – конічні перерізи [13].

У системі координат, запровадженій Декартом, використовувалася одна нерухома вісь — абсцис, але на відміну від Ферма, він враховував точки з додатними та від’ємними ординатами. Це породило геометричну інтерпретацію від’ємних чисел, яка зрівняла їх значення із додатними числами. Листування Ферма з іншими математиками свідчить, що він розробив свій метод координат раніше Декарта, хоча останній першим опублікував свої результати. У червні 1637 року в нідерландському місті Лейден вийшла друком праця Декарта «Міркування про метод». Її складовою частиною була робота під назвою «Геометрія», яка спричинила великий переворот у математиці. У «Геометрії» Декарт запропонував універсальний метод розв’язання математичних задач — координатний метод, де алгебраїчні задачі вирішуються через геометричний підхід, а в процесі розв’язання геометричних задач застосовується теорія алгебраїчних рівнянь. Праця виявилася важкою для сприйняття та розуміння, тому її неодноразово коментували й доповнювали такі науковці, як Ф. Дебон, Ф.

Скоотен, Дж. Валліс, Й. Бернуллі та інші. Наприклад, Дж. Валліс розширив межі системи координат, розглядаючи не тільки від'ємні ординати, а й від'ємні абсциси. У 1692 році Й. Бернуллі ввів термін «декартова геометрія». До того моменту робота Ферма про його систему координат залишалася маловідомою, тому більше понять, пов'язаних із координатним методом, асоціювалися з Декартом: декартові координати, декартова система координат, декартове рівняння, декартова площа.

Термін «аналітична геометрія» вперше застосували у 1671 році в книзі Ісаака Ньютона. Слова «абсциса» та «ордината» мають грецьке коріння і походять із теорії конічних перерізів; їх сучасне значення впровадив Готтфрід Лейбніц наприкінці XVII століття. Він також увів термін «координати» для підкреслення рівноправності між абсцисою й ординатою. Загальновживаними ці терміни стали лише в середині XVIII століття. Вісь абсцис уперше згадується в роботах І. Барроу (1670), тоді як поняття осі ординат увів Г. Крамер (1750). Початок координат до 1679 року називали початком абсцис, поки Ф. де Лагір не запровадив нейтральний термін «початок». Традиція позначати невідомі величини останніми літерами алфавіту, а відомі — першими, була започаткована саме Декартом. У роботі «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) Габріель Крамер систематизував і узагальнив здобутки своїх попередників, вперше запропонувавши систему координат з двома рівноправними осями [23].

Таким чином, вихід у світ головної математичної праці Рене Декарта «Міркування про метод» у 1637 році став ключовою подією для науки. Завдяки аналітичній геометрії стало можливим перевести дослідження геометричних властивостей кривих і об'єктів на алгебраїчну мову. Координатний метод спричинив справжній переворот у геометрії та математиці загалом, відкривши універсальний спосіб співвідносити геометричні об'єкти з алгебраїчними виразами та рівняннями.

1.2. Особливості вивчення теми «Координати і вектори» у шкільному курсі геометрії

Вивчення координатної площини у шкільному курсі геометрії починається в 5-му класі. Учні знайомляться з числовим променем та вчаться позначати натуральні числа. У 6-му класі вводяться більш складні поняття: координатна пряма для додатних і від'ємних чисел, а також координатна площина. У цей період учні дізнаються про додатний і від'ємний напрямки, а пряма з визначеним початком, одиничним відрізком і заданим напрямком отримує назву координатної прямої. Для визначення розташування точок на площині вводяться осі координат. Горизонтальну вісь називають віссю абсцис (x), а вертикальну – віссю ординат (y). Ці дві осі утворюють прямокутну систему координат, яка задає координатну площину.

Тема «Декартові координати на площині» розглядається глибше у 9-му класі, де повторюються та систематизуються знання та навички з попередніх класів. У цей час учні працюють з новими завданнями, такими як обчислення відстані між точками на площині, знаходження координат середини відрізка, а також знайомляться з поняттями рівнянь фігур. Додаються такі важливі математичні теми, як рівняння кола, рівняння прямої та опрацювання кутового коефіцієнта прямої.

Вивчення теми «Вектори на площині» також охоплює 9-й клас і передбачає ознайомлення з новими поняттями: вектором, його модулем і напрямом, рівністю векторів, їх координатами, операціями додавання та віднімання, множенням на число, а також характеристиками колінеарних векторів і скалярного добутку. Щоб підвищити зацікавленість учнів, варто нагадати, що поняття векторних величин уже зустрічалося при вивченні фізики у 7-му класі.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 9 клас, рівень стандарту наведено у таблиці 1 [16].

Таблиця 1

№ з\п	Тема уроку	Дата уроку	Зміни	Примітки
Тема 1. Координати на площині (8 год + 8 год з резерву)				
1.	Координатна площина			
2.	Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності.			
3.	Розв'язування типових вправ			
4.	Розв'язування типових вправ			
5.	Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами			
6.	Розв'язування типових вправ			
7.	Розв'язування типових вправ			
8.	Розв'язування типових вправ. Самостійна робота			
9.	Рівняння кола			
10.	Розв'язування типових вправ			
11.	Рівняння прямої			
12.	Розв'язування типових вправ			
13.	Розв'язування типових вправ			
14.	Розв'язування типових вправ. Самостійна робота			
15.	Підсумковий урок «Координати на площині»			
16.	Контрольна робота №1			
Тема 2. Вектори на площині (12 год)				
17.	Вектор. Модуль і напрям вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів			
18.	Розв'язування типових вправ			
19.	Координати вектора			
20.	Розв'язування типових вправ			
21.	Додавання і віднімання векторів			
22.	Множення вектора на число			
23.	Розв'язування типових вправ			
24.	Розв'язування типових вправ. Самостійна робота			
25.	Скалярний добуток векторів			
26.	Розв'язування типових вправ			
27.	Підсумковий урок «Вектори на площині»			
28.	Контрольна робота №2			

Метою вивчення теми «Вектори і координати в просторі» є повторення, систематизація і розширення знань учнів про вектори, координати, рівняння фігур із курсу планіметрії основної школи, поширення відповідних понять на простір, розвиток вмінь застосування векторів і координат. Дана тема вивчається в 10 класі.

Для вивчення даної теми в класах рівня стандарту відводиться 14 годин, профільного та поглибленого рівнів – 24 години.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 10 клас, рівень стандарту наведено у таблиці 2 [17].

Таблиця 2

№ з\п	Тема уроку	Дата уроку	Зміни	Примітки
Тема 3. Координати і вектори у просторі <i>(10 год + 4 год з резерву)</i>				
1.	Прямокутна система координат у просторі			
2.	Розв'язування типових завдань.			
3.	Вектори у просторі. Операції над векторами.			
4.	Розв'язування типових завдань.			
5.	Координати вектора. Операції над векторами, які задано координатами.			
6.	Розв'язування типових завдань.			
7.	Розв'язування типових завдань.			СР
8.	Скалярний добуток векторів.			
9.	Розв'язування типових завдань.			
10.	Симетрія відносно точки та симетрія відносно площини.			
11.	Розв'язування типових завдань.			СР
12.	Підсумковий урок «Координати вектора у просторі»			
13.	Тематична контрольна робота №4			
14.	Підсумковий урок			

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 10 клас, профільного та поглибленого рівнів наведений у таблиці 3 [19].

Таблиця 3

Тема 4. КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРИ (22 +2 год)				
	4.1. Координати та вектори у просторі			
1	Прямокутна система координат у просторі, координатний простір. Координати точки (п.16)	1		
2	Формула відстані між двома точками. (п.16)	1		
3	Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні(п.16)	1		
4	Поняття про координатний метод розв'язування задач. Розв'язування задач на знаходження відстані між точками та координат середини відрізка. <i>Самостійна робота.</i>	1		
5	Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів (п.17)	1		
6	Розв'язування вправ (п.17)	1		
7	Додавання і віднімання векторів. Властивості додавання і віднімання векторів (п.18)	1		
8	Додавання і віднімання векторів. Властивості додавання і віднімання векторів (п.18)	1		
9	Множення вектора на число. Властивості множення вектора на число (п.19)	1		
10	Множення вектора на число. Властивості множення вектора на число. Гомотетія	1		
11	<i>Самостійна робота</i>			
12	Узагальнення та систематизація знань та вмінь учнів з теми «Координати і вектори у просторі» Розв'язування вправ	1		
13	<i>Контрольна робота з теми: «Координати та вектори»</i>	1		
14	Аналіз контрольної роботи. Розв'язування вправ			
	4.2. Скалярний добуток векторів. Геометричні перетворення у просторі			
15	Скалярний добуток векторів, його властивості. Кут між векторами(п.20)	1		
16	Скалярний добуток векторів, його властивості. Кут між векторами	1		
17	Поняття про векторний метод розв'язування задач	1		
18	Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння сфери (п.21)	1		

19	Рівняння площини (п.22)	1		
20	Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини. Паралельне перенесення у просторі	1		
21	Самостійна робота	1		
22	Розв'язування задач і вправ	1		
23	Контрольна робота «Координати та вектори у просторі»	1		
24	Аналіз контрольної роботи. Розв'язування задач і вправ	1		

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня під час вивчення координат і векторів в просторі, 10 клас [17].

Учень/учениця

наводить приклади моделей симетрії відносно точки та прямої із об'єктів навколишнього середовища;

формулює означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу;

розрізняє векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори;

пояснює та записує зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими.

класифікує взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі;

зображає на рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число;

знаходить на рисунку та зображає напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини;

аналізує та досліджує координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки,

яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення;

обґрунтовує перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток векторів;

ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка;

характеризує найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач;

застосовує формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач;

розв'язує вправи, що передбачають: знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту [18].

1.3. Особливості викладу теми у шкільних підручниках

Однією з ключових проблем, пов'язаних із впровадженням профільного навчання в старшій школі, є якість шкільного підручника. У курсі математики старшої школи вивчення теми «Координати та вектори в просторі» передбачено на рівнях стандарту, академічному та профільному.

Підручник для профільного рівня має виконувати не лише навчальну функцію, але й приділяти значну увагу дидактичному компоненту. Він повинен мотивувати учнів до глибокого засвоєння предмета, навчати їх методам здобуття нових знань, умінь і навичок, а також сприяти їх застосуванню і забезпечувати культурний розвиток. Зміст підручника має враховувати досягнення у сферах психології, педагогіки та спеціальних методик, з огляду на закономірності навчального процесу в сучасній школі.

До навчального посібника висувають такі ключові вимоги [8]:

1. Забезпечення свідомого засвоєння матеріалу.
2. Звернення уваги на чіткість і доступність викладу.
3. Формування в учнів навичок мислення.

Простий логічний виклад матеріалу недостатній – потрібно глибше роз'яснювати сутність нових понять, а також демонструвати зв'язок із раніше засвоєними темами.

Підручник під редакцією А. Мерзляка «Математика 10 клас» є абстрактно-дедуктивним; він структурований у шість параграфів, кожен з яких складається з пунктів. У пунктах наведено теоретичний матеріал, ключові поняття (визначення, теореми, доведення тощо), виділені жирним шрифтом або курсивом для акцентування уваги. Теорія завершується прикладами задач різного рівня складності, що дозволяє учням з різним рівнем підготовки здобути практичні навички. Крім того, такі записи також можуть служити орієнтиром для оформлення задач. До кожного пункту запропоновано завдання для самостійного опрацювання, однак їх виконання варто розпочинати лише після ознайомлення з теоретичною частиною. У підручнику зібрано різноманітний дидактичний

матеріал і широкий спектр задач, що дає вчителю можливість обрати найдоцільніші для конкретної теми. Координатний і векторний методи розв'язання задач виділені окремим параграфом, який містить визначення, покроковий алгоритм вирішення та приклади задач із докладними поясненнями. Практичні завдання розподілені на три рівні складності: це дозволяє учителям і учням розпочати з простих вправ і поступово переходити до більш складних. Такий підхід допомагає засвоїти основні поняття теми учням різних рівнів підготовки. Окремо зазначені задачі із позначкою синього ключика: відповіді до них можна використовувати для розв'язання інших аналогічних вправ [25].

Курс стереометрії, представлений у підручнику Г.П. Бевза «Геометрія 10-11 клас», побудований таким чином, щоб його можна було освоїти після опанування будь-якого навчального посібника з геометрії для основної школи. Матеріал теоретичного характеру викладений чітко і логічно, відповідаючи чинним вимогам Міністерства освіти, а також враховуючи вікові особливості учнів старшої школи. Підручник структуровано на п'ять основних параграфів, які містять поділ на окремі тематичні пункти. У рамках матеріалу розглядаються задачі як на прямокутні, так і на сферичні координати, що додає глибини до опанування теми. Особливу увагу приділено детальному розв'язанню задач різних рівнів складності, яке супроводжується поясненнями та наочними ілюстраціями. Щоб забезпечити учнів можливістю самостійного навчання, до кожної підтеми підібрано набір завдань із різною складністю, що дозволяє поглибити практичні навички. Значною перевагою підручника є наявність вправ для повторення, спеціальної рубрики «Коли зроблені уроки», а також запитань для перевірки знань і завдань, що допомагають підготуватися до вивчення нових тем. Усі вправи класифіковані за рівнями складності: початковий і середній рівень має позначку (°), достатній рівень – (•), високий – (••), а задачі розширеного характеру, які можуть бути використані на факультативах чи математичних гуртках, позначаються (*). Завдання для домашнього опрацювання виділяються червоним кольором, тоді як вправи для усного виконання – синім. Такий підхід забезпечує достатню кількість вправ для

ефективного засвоєння ключових понять теми незалежно від рівня підготовки учня.

Для профільного освоєння математики можуть бути використані й інші навчальні посібники, такі як підручники А.П. Єршова «Математика 10-11 клас» та Е.П. Нелін «Геометрія 10 клас». Аналізуючи ці видання, можна зробити висновок, що теоретичний матеріал у них подається доступно, з чітко сформульованими основними поняттями. Задачі для вивчення теми «Координати та вектори» супроводжуються достатньою кількістю прикладів, що сприяють адаптації учнів до практичного застосування теоретичних знань. У навчальних посібниках наведено безліч розв'язаних задач, завдяки яким учням буде легше зрозуміти принципи виконання аналогічних завдань [30].

Таким чином, варіативність підручників профільного рівня створює широкі можливості для вчителя при виборі завдань різної складності, що в кінцевому результаті сприяє якісному і поглибленому засвоєнню навчального матеріалу учнями.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

2.1. Методика навчання учнів розв'язувати найпростіші задачі в координатах

У системі загальної середньої освіти математика займає ключове місце, адже саме тут закладаються основи розумових, моральних та емоційно-вольових якостей особистості. Курс математики формує базу для усвідомленого засвоєння математичних знань, розвитку практичних умінь і навичок, а також отримання комплексної математичної освіти. Першим і найважливішим етапом у розв'язуванні геометричної задачі є підготовка рисунка. Навчитися вирішувати складні геометричні задачі неможливо без міцних навичок створення якісних і точних рисунків. Важливо формувати звичку не приступати до розв'язування задачі, доки не виконано чіткий, «великий і красивий» рисунок, який відповідає як математичним вимогам, так і естетичним критеріям. Тут слід зауважити, що мова йде саме про етап розв'язування задачі, а не про оформлення готового рішення. У процесі роботи з кожною задачею і її методом розв'язування важливо виділяти так звані елементарні задачі. Це задачі, які потребують виконання лише однієї дії — використання відомої теореми чи формули. До таких «дій» також належить вирішення одного лінійного або квадратного рівняння. Виділення елементарних задач є доцільним з педагогічної точки зору, оскільки часто складні геометричні задачі складаються із простих, базових елементів — своєрідних «цеглинок». Таким чином, для успішного розв'язання геометричних задач потрібні три ключові складові: рисунок, метод і обсяг знань. Сюди входить знання основних геометричних фактів і теорем, а також запас опорних задач, які активно застосовуються в роботі. Оскільки в шкільному курсі геометрії здебільшого представлені теореми, необхідні для подальшого засвоєння матеріалу, багато з них мають лише теоретичне значення. Це створює потребу у включенні до навчання додаткових опорних задач — тих, які демонструють

конкретні методи або прийоми розв'язування та допомагають глибше освоїти тему.

Більшість шкільних задач вирішується за допомогою певних алгоритмів, і оволодіння учнями цими алгоритмами є важливим аспектом навчання математики. Водночас варто пам'ятати, що розв'язування задач — це творчий процес, який не завжди піддається алгоритмізації. Спостереження показують, що практика та набуті навички відіграють ключову роль у цьому процесі. Однак неправильно було б вважати, що успіх залежить виключно від кількості виконаних задач.

Значну роль також відіграє система задач, запропонованих учням, а також коментарі та поради вчителя щодо пошуку рішень, формування планів та оформлення результатів. Як приклад, пропонується загальна схема розв'язування геометричних задач, яка може бути корисною учням у процесі вивчення геометрії. Схема розв'язування геометричних задач:

1. Ретельно прочитати умову задачі, записати дані та те, що потрібно знайти.
2. Якщо задача стосується геометричних фігур, виконати креслення із введенням позначень.
3. Скласти план розв'язання задачі.
4. Якщо скласти план не вдалося, перечитати задачу ще раз, сформулювати умову власними словами та розбити її на частини.
5. Замінити кожне поняття його визначенням.
6. З'ясувати взаємозв'язки між величинами, зазначеними в умові задачі.
7. Записати висновки з аналізу умови й виконати окремі частини розв'язання.
8. Спробувати вирішити задачу, починаючи «з кінця».
9. Переглянути отримане рішення: чи немає зайвих роздумів, чи можна зробити міркування простішими?

Дотримання цієї системи допоможе учням краще структурувати процес розв'язування задач і виробити більш ефективні підходи до їх аналізу та виконання.

Розв'язування задач — це одна з активних форм навчання, яка сприяє засвоєнню нових математичних закономірностей, переосмисленню вже відомих теоретичних фактів і розвитку навичок самостійного пошуку знань. У процесі цього учні тренують логічне мислення, поглиблюють розуміння предмету та розширюють свій аналітичний підхід.

Система координат являє собою площину або простір, в якому визначено початок координат та осі, необхідні для встановлення координат точки. Вимірність простору визначається кількістю чисел, потрібних для однозначного визначення будь-якої його точки. Обов'язковими елементами системи координат є початок координат — точка, що слугує базою для відліку відстаней — та одиниця довжини, яка дозволяє вимірювати ці відстані.

Існує декілька типів систем координат:

1. Декартова система координат. Однією з найпоширеніших систем координат у математиці є декартова система, названа на честь Рене Декарта. Вона визначається початком координат і двома векторами, які задають напрям осей. Позиція кожної точки в просторі описується числами, що відповідають її відстані до координатних площин. На площині координати в декартовій системі зазвичай позначаються як $(x; y)$.

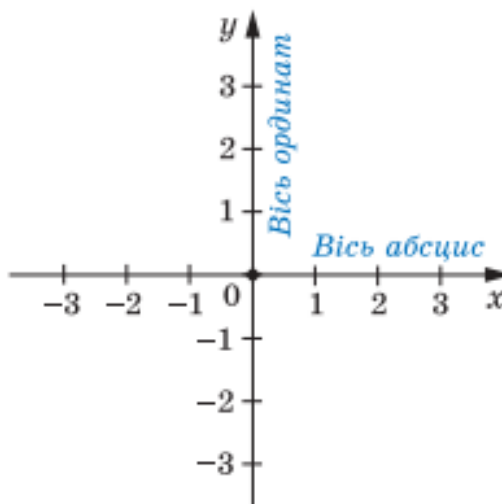


Рис.2.1.

2. Криволінійна або косокутна система координат. На основі декартової системи координат можна побудувати криволінійну систему, в якій координатні осі не є перпендикулярними. На рис. 2.2 представлена декартова косокутна система координат.

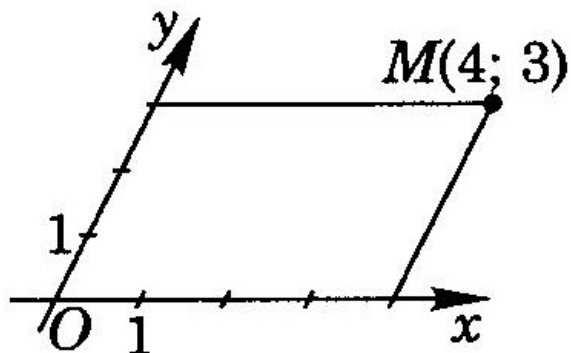


Рис.2.2.

3. Полярна система координат є прикладом значно відмінного підходу до визначення положення точок у порівнянні з декартовою системою. У рамках цієї системи на площині місце розташування точки визначається двома величинами: відстанню ρ , що вимірюється від початку координат до точки, та кутом φ , утвореним між обраною віссю та променем, який сполучає початок координат з точкою (див. рисунок 2.3).

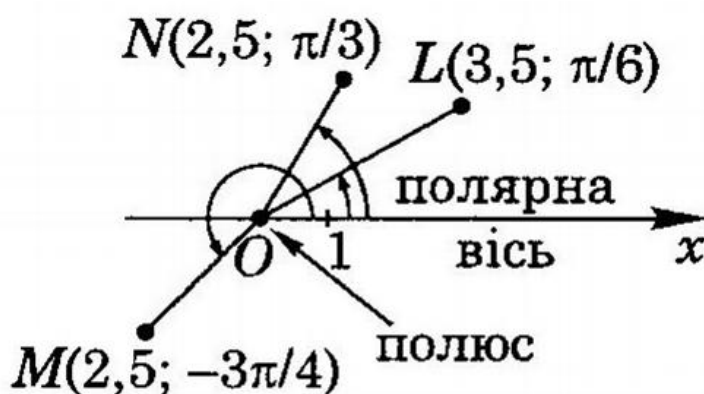


Рис.2.3.

Прямокутна система координат на площині являє собою схему, в якій дві перпендикулярні лінії, відомі як координатні осі, перетинаються в одній точці — початку координат. Обидві осі мають однакову одиницю масштабу, що забезпечує точність і пропорційність виконуваних розрахунків. Для кращого розуміння та практичного застосування даної системи до геометричних задач,

варто зосередитися на аналізі найпростіших випадків. Це дозволяє закласти фундаментальні знання про роботу з координатами й властивості фігур, які можуть бути представлені у цій площині.

Відстань між точками

Задача 2.1. Дано три точки: $A(4;0)$, $B(1;-3)$, $C(-1;3)$. Чи існує трикутник з вершинами у даних точках?

Розв'язання.

Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо у ній дані точки за їхніми координатами (рис. 2.4.). Очевидно, що точки A , B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.

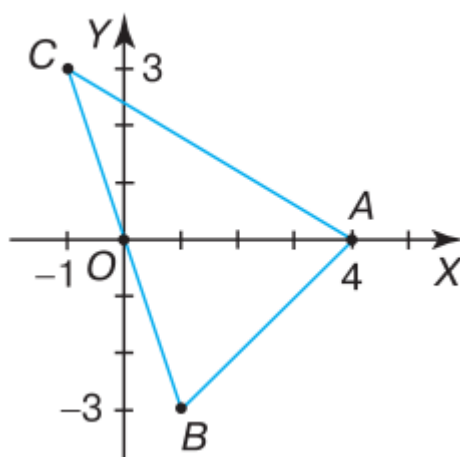


Рис.2.4.

Чи можна строго обґрунтувати висновок, який отримали у задачі? Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього треба знати, як знаходити відстань між двома точками за їх координатами.

Теорема 2.1 (про відстань між двома точками із заданими координатами)

Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Дано: $ХОУ$ – прямокутна декартова система координат (рис.2.5.), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

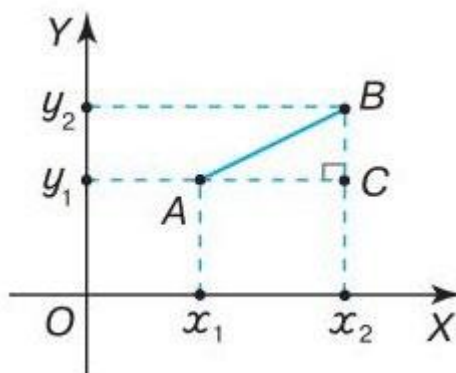


Рис.2.5.

Доведення. Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$. З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат. Нехай C – точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C$ прямий, катет $AC = x_2 - x_1$, катет $BC = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню.

За теоремою Піфагора,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

$$\text{Звідси } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Задача 2.2. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$, $D(2; -2)$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

Розв'язання.

Як відомо, за ознакою паралелограма, чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом. Знайдемо довжини сторін чотирикутника $ABCD$:

$$AB = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0 - 4)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{13}$$

$$AD = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Отже, $AB = CD$, $BC = AD$, тобто чотирикутник $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Координати середини відрізка

Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.

Теорема 2.2 (про координати середини відрізка).

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців (рис.2.6.):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

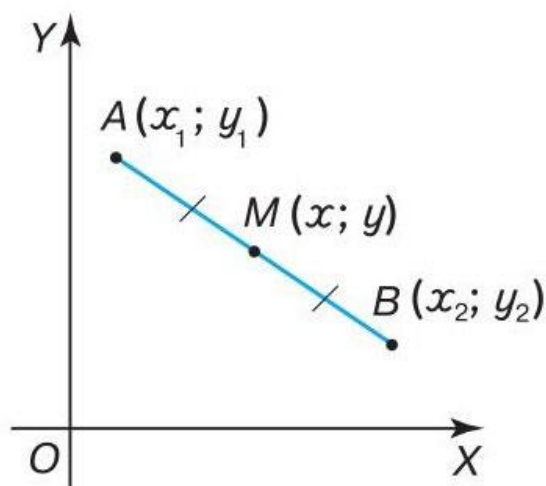


Рис.2.6.

Задача 2.3. Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами у точках: $A(-1; -1)$, $B(1; 4)$, $C(3; 2)$.

Розв'язання

Точка M є серединою сторони BC (рис.2.7.), тому вона має координати:

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad y = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

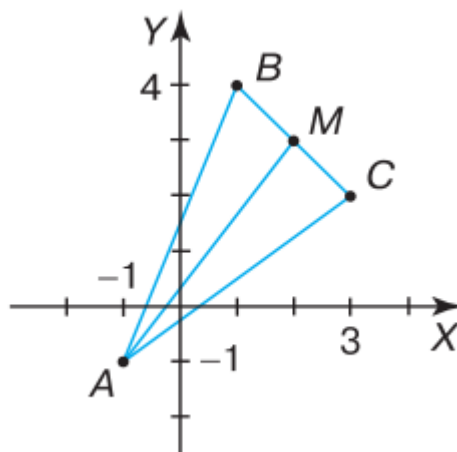


Рис.2.7.

Довжина медіани АМ дорівнює відстані між точками А і М.

Отже,

$$AM = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника.

Для успішного розв'язування геометричних задач координатним методом корисними є наступні вміння:

- оптимально вибрати систему координат
- знаходити координати заданих точок
- переводити геометричну мову на аналітичну
- складати рівняння фігур
- обчислювати відстань між точками, заданими координатами
- бачити за рівнянням конкретний геометричний образ

2.2. Методика вивчення декартових координат і векторів у просторі

В пропедевтичному плані з декартовими координатами учні вперше ознайомлюються на початку 6 класу. Там вводять поняття «система координат», «початок координат», «координатна площина», «координата точки», «абсциса», «ордината», «вісь абсцис», «вісь ординат». Детальніше розглядають ці самі поняття в курсі алгебри під час вивчення графіків функцій та в 9 класі при вивченні однойменної теми в курсі геометрії. Отож коли на уроках стереометрії учні приступають до вивчення декартових координат в просторі, з більшістю понять, пов'язаних з цією темою, вони уже знайомі. Залишається тільки повторити відповідний матеріал, звести все в систему і наголосити, що декартові координати відіграють важливу роль не тільки в алгебрі, а і в геометрії. Аналізуючи діючі підручники з геометрії (рівень стандарту) для 10 класу, ми вирішили, розробляючи методику, орієнтуватись на підручник *Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О.С. Істер. - Київ: Генеза, 2018. - 384 с.*

Метод координат в просторі є логічним продовженням координатного методу на площині. Тому при вивченні методу координат в просторі доцільно по мірі введення нових понять повторювати відповідні поняття з курсу планіметрії.

Розглянемо детально методику вивчення координат і векторів.

Тема: Прямокутна система координат у просторі

Мета: увести поняття прямокутної системи координат та розглянути всі її елементи (координатні осі, координатні площини, як будувати прямокутну систему координат, як знаходити координати точки), розглянути формулу відстані між двома точками у просторі та формулу координат середини відрізка у просторі. Розвивати просторову уяву.

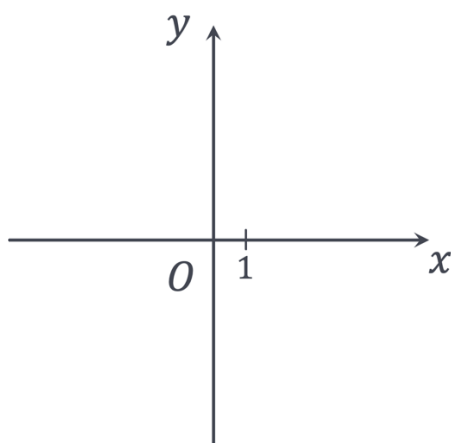
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

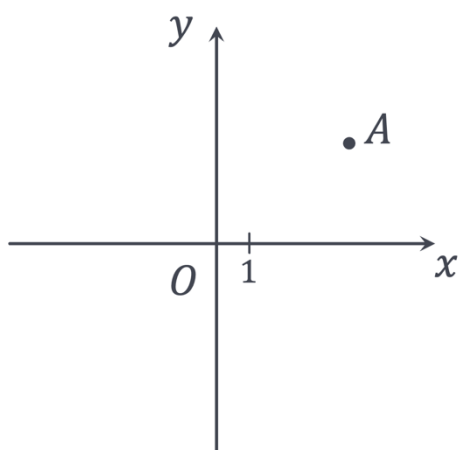
// Прямокутна система координат на площині



➤ Пригадайте, як ми називаємо координатні осі?

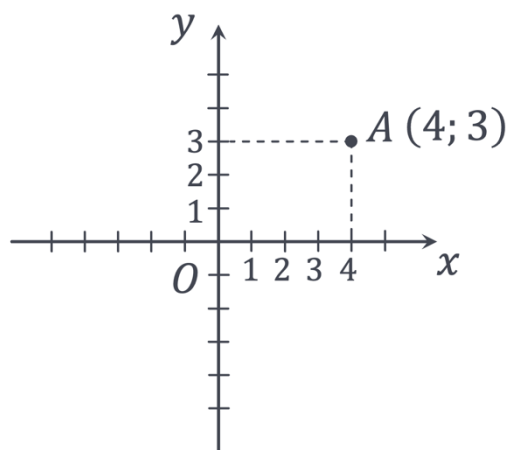
Вісь x – абсциса

Вісь y – ордината



➤ Як визначити координату точки A на площині?

(Учні висловлюють власну думку)



З точки A опустимо перпендикуляри на координатні осі.

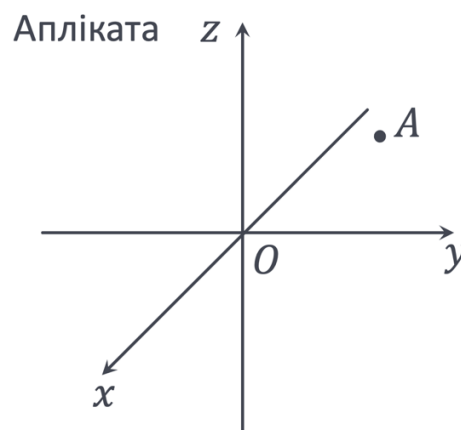
Координати точки A – впорядкована пара чисел (абсциса на першому місці та ординати на другому).

Записуємо: $A(x; y)$

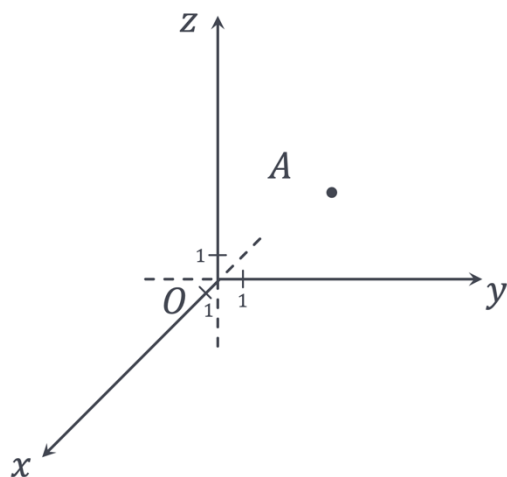
ПРОБЛЕМНЕ ПИТАННЯ

Як визначити координати точки A у просторі?

Для цього вводимо ще одну координату вісь, вісь – аплікат (позначаємо z).



III. Вивчення нового матеріалу



// Прямокутна система координат

Щоб задати прямокутну систему координат у просторі будуємо три взаємно перпендикулярні прямі (координатні осі), які перетинаються в одній точці – точці O (точку O аналогічно до системи координат на площині називатимемо початком координат).

Для зручності домовимось:

- 1) Осі OY і OZ будемо розміщувати горизонтально й вертикально, вісь OX – під рівними кутами до OY і OZ (в зошиті це діагональ клітинки);
- 2) Додатний напрям будемо вказувати так, щоб перехід $OX \rightarrow OY \rightarrow OZ$ виконувався проти годинникової стрілки;
- 3) Одиничні відрізки OY і OZ однакової довжини, OX – удвічі коротший.

Координатні осі: x – вісь абсцис y – вісь ординат z – вісь аплікат

Координатні площини (площини, що проходять через пари координатних прямих):

 xy, xz, zy

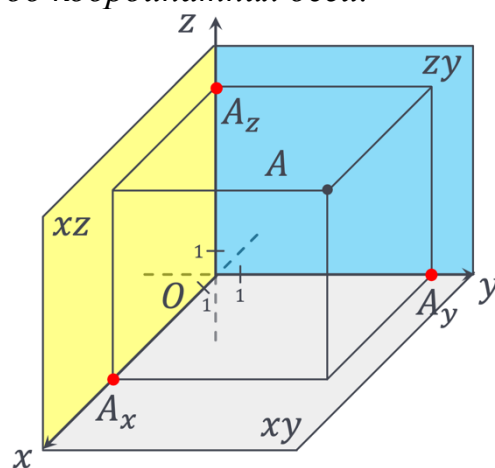
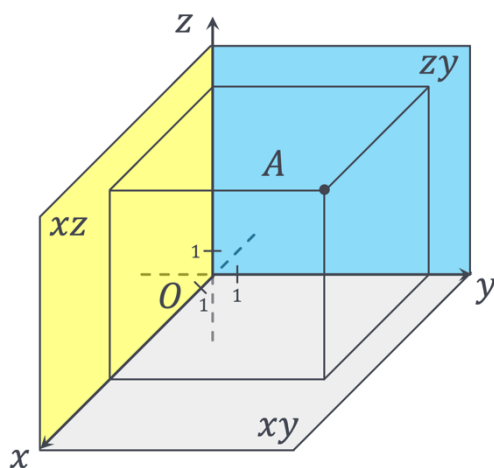
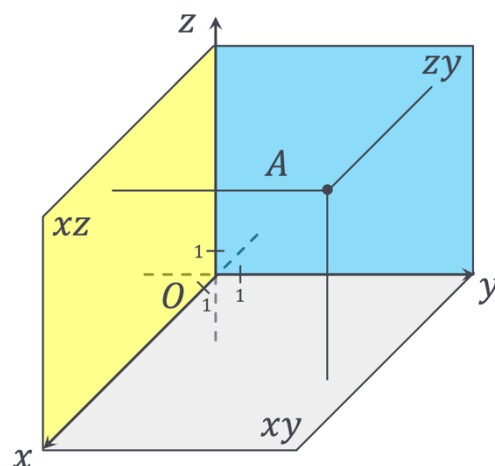
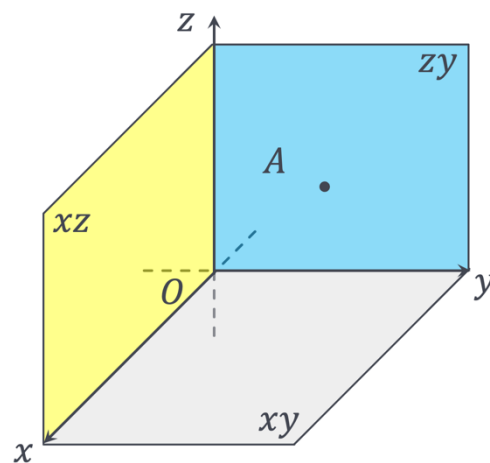
Координати точки – це впорядковані числа, що визначають положення точки.

Як визначити координати точки A ?

1. Щоб визначити координати точки A , проведемо перпендикуляри з даної точки на координатні площини.

2. З побудованих основ перпендикулярів, проводимо перпендикуляри на осі системи координат.

3. Дані перпендикуляри перетнуть координатні осі в точках A_x , A_y і A_z відповідно. Можемо помітити, що утворився прямокутний паралелепіпед, а також, що дані точки можна було отримати якби будували перпендикулярні площини через т. A до координатних осей.



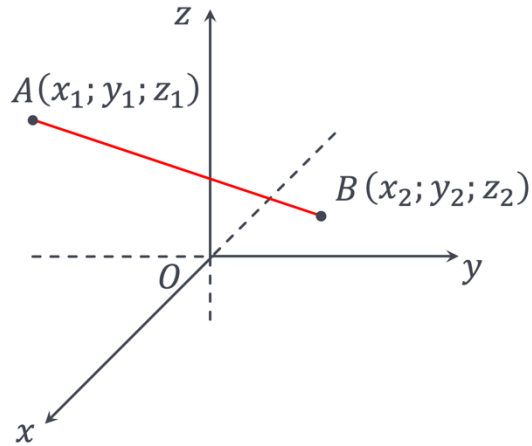
A_x – абсциса точки A ;

A_y – ордината точки A ;

A_z – апліката точки A ;

Записуємо: $A(x, y, z)$

// Формула відстані між точками A і B у просторі



Для знаходження відстані між двома $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ точками у просторі будемо використовувати формулу:

AB

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

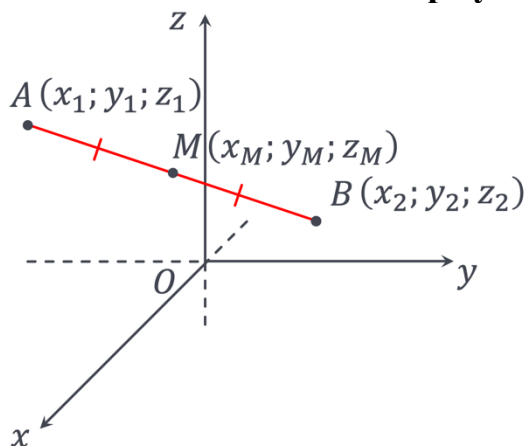
Приклад 1

Знайдемо відстань між точками $A(2, 1, 3)$ і $B(1, 4, 5)$

AB

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - 1)^2 + (5 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14} \text{ см} \end{aligned}$$

// Формула координат середини відрізка AB у просторі



Для знаходження координат середини відрізка у просторі з кінцями в точках $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ будемо використовувати формулу:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M \\ &= \frac{z_1 + z_2}{2} \end{aligned}$$

Приклад 2

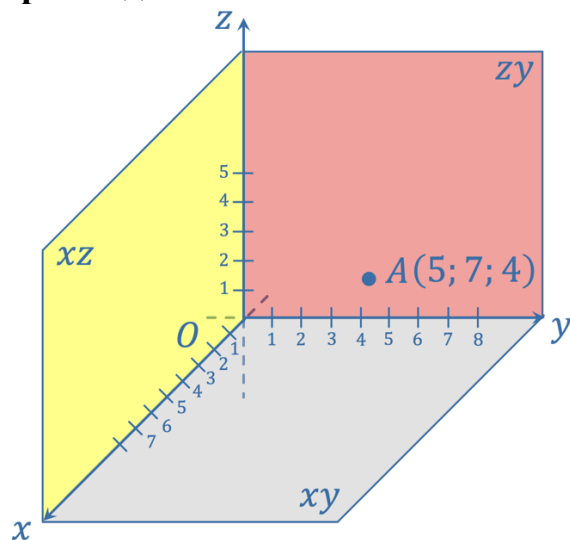
Знайдемо координати середини відрізка між точками $A(2, 1, 3)$ і $B(1, 4, 5)$

$$x_M = \frac{4 + 2}{2} = 3; \quad y_M = \frac{3 + 1}{2} = 2;$$

$$z_M = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

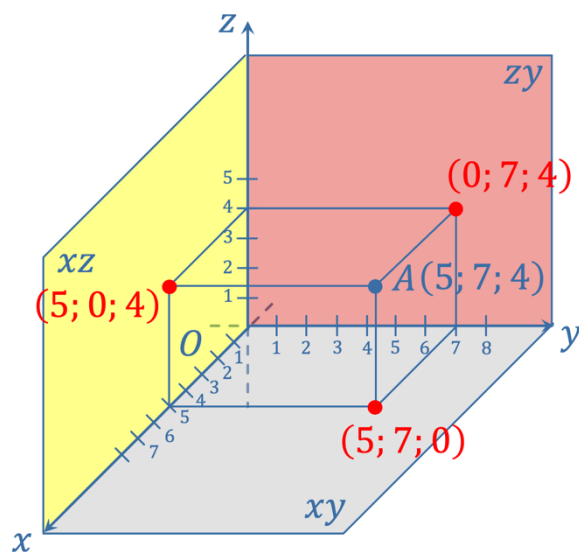
$M(3; 2; 5)$

Приклад 3



Знайдіть координати проекції точки $A(5; 7; 4)$ на координатні площини.

Відповідь: $(5; 7; 0)$
 $(0; 7; 4)$
 $(5; 0; 4)$



Можемо дійти висновку, що:

Проекція точки (x, y, z) на площину:

$xy: (x, y, 0)$

$xz: (x, 0, z)$

$zy: (0, y, z)$

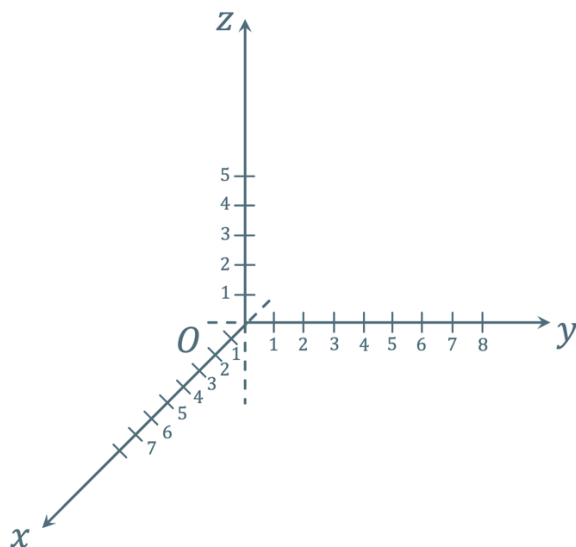
IV. Розв'язування завдань

№1

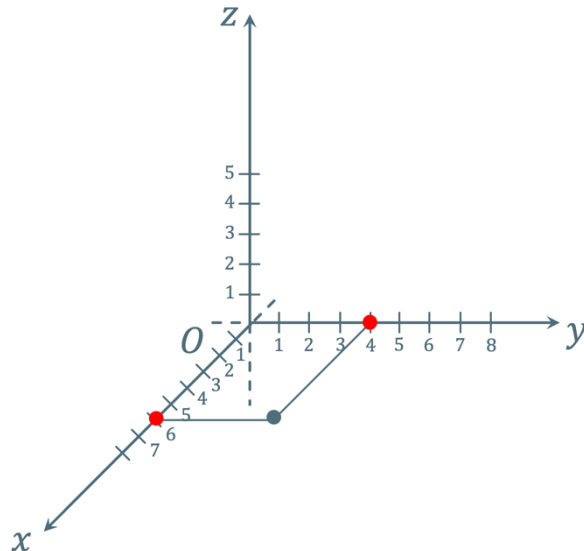
- 1.1 Знайдіть координати проекції точки $A(6; 4; 5)$ на координатні осі та побудуйте дані точки і точку A
- 1.2 Знайдіть відстань від точки $A(6; 4; 5)$ до координатних площин.

1.1 Знайдіть координати проекції точки $A(6; 4; 5)$ на координатні осі та побудуйте дані точки і точку A

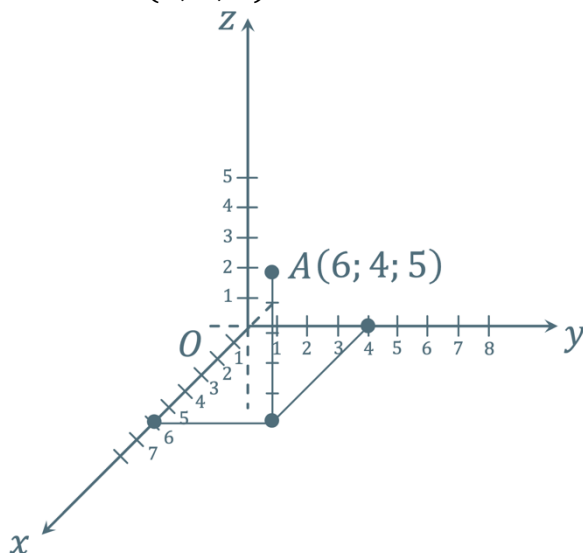
1. Будуємо систему координат.



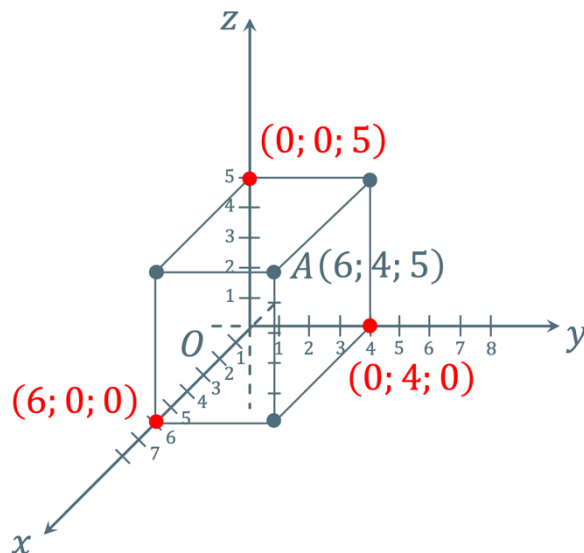
2. Проводимо прямі, паралельні осям ординат і абсцис через точки 6 і 4 відповідно до їх перетину.



3. Будуємо через триману точку промінь, напрям якого збігається з додатним напрямом осі аплікат і відкладаємо на ньому 5 одиничних відрізків. Отримали т. $A(6; 4; 5)$



4. Будуємо прямокутний паралелепіпед з вершинами в отриманих точках



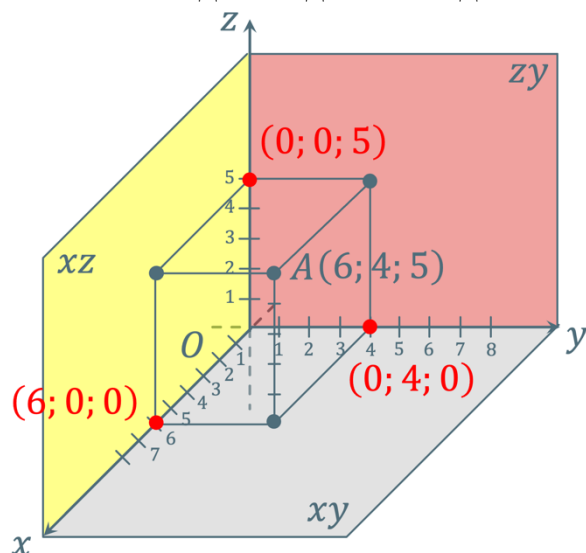
Координати проекцій точки $A(6; 4; 5)$ на координатні осі:

OX $(6; 0; 0)$

OY $(0; 4; 0)$

OZ $(0; 0; 5)$

1.2 Знайдіть відстань від точки $A(6; 4; 5)$ до координатних площин.



xy : 5

xz : 4

yz : 6

№2

Знайдіть координати середини і довжину відрізка AB , якщо $A(0; 3; 5)$, $B(4; 7; 1)$.

Розв'язання:

Нехай т. M – середина відрізка AB , тоді:

$$M_x = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

$$M_y = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

$$M_z = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$M(2; 5; 3)$$

$$AB = \sqrt{(4 - 0)^2 + (7 - 3)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3} \text{ см}$$

Відповідь: $(2; 5; 3)$, $4\sqrt{3}$ см

№3

Знайдіть на осі абсцис таку точку O , яка рівновіддалена від точок $A(4; 2; 1)$ і $B(2; -2; 1)$

Розв'язання:

Точка належить осі абсцис, тому її координати:

$$O(x; 0; 0)$$

Відстані від т. O до точок A і B є однаковими, оскільки таких точок є нескінченність, точки A і B не обов'язково лежать на одній прямій, тому скористаємось формулою відстані між двома точками:

$$OA = \sqrt{(4 - x)^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$OB = \sqrt{(2 - x)^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$\sqrt{(4-x)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$(4-x)^2 + 2^2 + 1^2 = (2-x)^2 + (-2)^2 + 1^2$$

$$16 - 8x + x^2 + 4 + 1 = 4 - 2x + x^2 + 4 + 1$$

$$-6x = -12$$

$$x = 3$$

$$O(3; 0; 0)$$

Відповідь: $O(3; 0; 0)$

V. Підсумок уроку

- Поясніть, як задати прямокутну систему координат у просторі? Як називаються координатні осі?
- Як називаються координатні площини?
- Яким буде загальний вигляд координат всіх точок, які належать площині xz ?
- Як знайти координати середини відрізка у просторі? Які дані потрібні? Яку формулу використати?
- Як знайти відстань між двома точками у просторі?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати § 11

Виконати № 11.2, 11.6, 11.10, 11.15

О.С. Істер

(2018)

Опрацювати §6, п.38

Виконати № 38.4, 38.6, 38.8, 38.10, 38.12

А.Г. Мерзляк

(2018)

Тема: Розв'язування типових завдань за темою «Прямокутна система координат у просторі»

Мета: Формувати вміння використовувати набуті знання для розв'язування типових завдань. Перевірити рівень засвоєного матеріалу, виявити можливі прогалини.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Розв'язування завдань

№1

Чи належить точка осі аплікату?

- | | | | |
|----------------|-----------|----------------|------------|
| 1) $(0; 4; 0)$ | НІ | 2) $(0; 0; 7)$ | ТАК |
| 3) $(7; 0; 0)$ | НІ | 4) $(0; 0; 4)$ | ТАК |

Чи належить точка координатній площині $xу$?

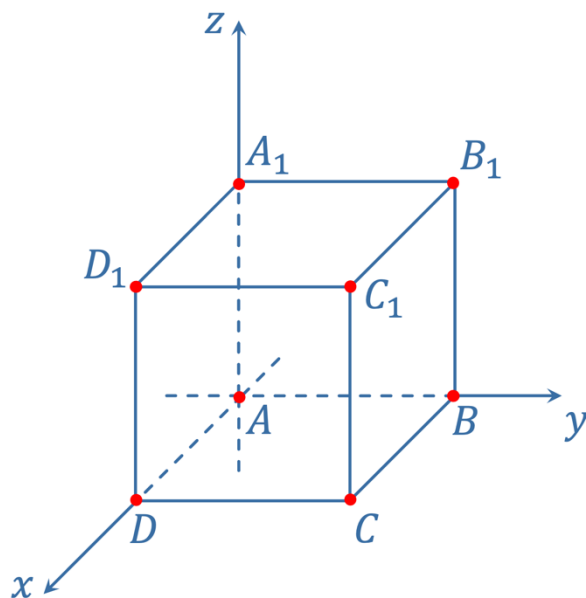
- | | | | |
|----------------|------------|----------------|------------|
| 1) $(0; 4; 7)$ | НІ | 2) $(5; 8; 0)$ | ТАК |
| 3) $(7; 2; 0)$ | ТАК | 4) $(2; 0; 3)$ | НІ |

№2

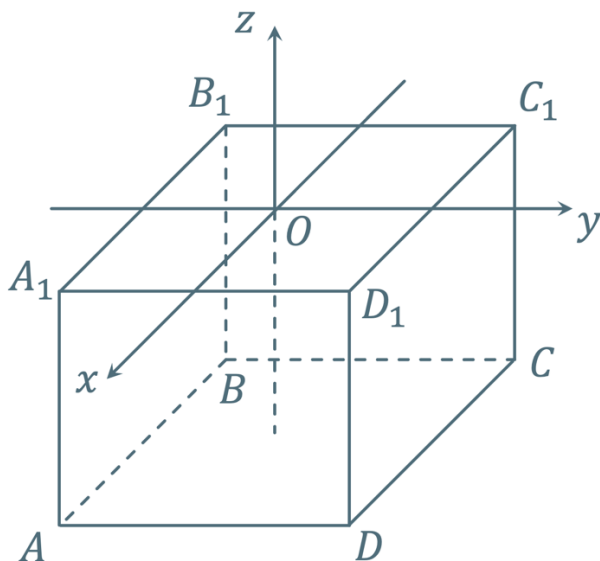
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб, довжина ребра якого дорівнює 4. Назвіть координати всіх вершин куба, якщо початок координат знаходиться в точці A .

Відповідь:

- $A(0; 0; 0)$
- $B(0; 4; 0)$
- $C(4; 4; 0)$
- $D(4; 0; 0)$
- $A_1(0; 0; 4)$
- $B_1(0; 4; 4)$
- $C_1(4; 4; 4)$
- $D_1(4; 0; 4)$



№3



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб, довжина ребра якого дорівнює 4. Початок координат O знаходиться в центрі грані $A_1 B_1 C_1 D_1$, ребра куба паралельні відповідним осям координат. Назвіть координати всіх вершин куба і знайдіть відстань між точками A і C_1

Розв'язання:

$A_1(2; -2; 0)$	$A(2; -2; -4)$
$B_1(-2; -2; 0)$	$B(-2; -2; -4)$
$C_1(-2; 2; 0)$	$C(-2; 2; -4)$
$D_1(2; 2; 0)$	$D(2; 2; -4)$

$$AC_1 = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - (-2))^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

№4

Нехай MN – відрізок, а точка K – його середина. Знайдіть координати точки N , якщо:

- 1) $M(1; 2; 0)$, $K(4; 4; 4)$
- 2) $M(5; 3; 4)$, $K(3; 2; 6)$

Розв'язання:

- 1) $M(1; 2; 0)$, $K(4; 4; 4)$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ M(1; 2; 0) \quad K(4; 4; 4) \quad N(x; y; z) \end{array}$$

$$N(7; 6; 8)$$

$$\frac{1+x}{2} = 4$$

$$1+x = 8$$

$$x = 7$$

$$\frac{0+z}{2} = 4$$

$$0+z = 8$$

$$z = 8$$

$$\frac{2+y}{2} = 4$$

$$2+y = 8$$

$$y = 6$$

2) $M(5; 3; 4), K(3; 2; 6)$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ M(5; 3; 4) & K(3; 2; 6) & N(x; y; z) \end{array}$$
 $N(1; 1; 8)$

$$\frac{5+x}{2} = 3$$

$$5+x = 6$$

$$x = 1$$

$$\frac{4+z}{2} = 6$$

$$4+z = 12$$

$$z = 8$$

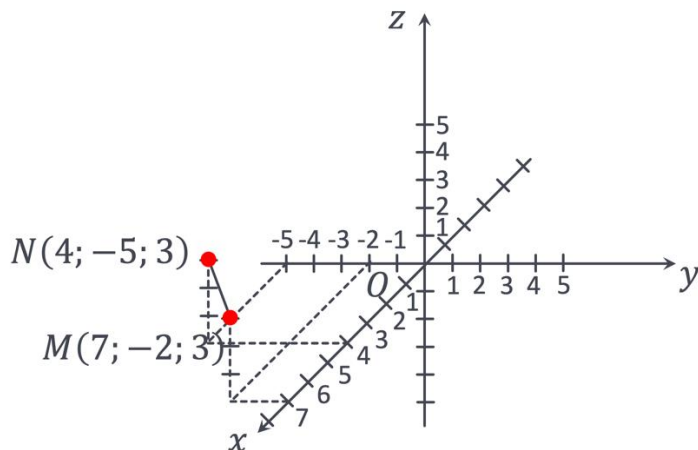
$$\frac{3+y}{2} = 2$$

$$3+y = 4$$

$$y = 1$$

Відповідь: 1) $N(7; 6; 8)$, 2) $N(1; 1; 8)$ **№5**

Точки $A(6; 0; 6)$, $B(0; -6; 0)$, $C(8; -4; 6)$ - вершини трикутника ABC . Знайдіть довжину MN середньої лінії $\triangle ABC$, якщо $MN \parallel AB$. Побудуйте відрізок MN в прямокутній системі координат у просторі.

Розв'язання:

Нехай точка M знаходиться між точками A і C , тоді точка N знаходиться між точками B і C .

Знайдемо координати т. M :

$$\frac{6+8}{2} = 7 \qquad \frac{0+(-4)}{2} = -2$$

$$x = 7$$

$$y = -2$$

$$\frac{0+6}{2} = 3$$

$$z = 3$$

 $M(7; -2; 3)$ Знайдемо координати т. N :

$$\frac{0+8}{2} = 4 \qquad \frac{-6+(-4)}{2} = -5$$

$$x = 4$$

$$y = -5$$

$$\frac{0+6}{2} = 3$$

$$z = 3$$

 $N(4; -5; 3)$ Знайдемо довжину відрізка MN :

$$MN = \sqrt{(4-7)^2 + (-5-(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

Відповідь: $M(7; -2; 3)$, $N(4; -5; 3)$, $MN = 3\sqrt{2}$

III. Підсумок уроку

- Поясніть, як задати прямокутну систему координат у просторі? Як називаються координатні осі?
- Як називаються координатні площини?
- Яким буде загальний вигляд координат всіх точок, які належать площині xz ?
- Як знайти координати середини відрізка у просторі? Які дані потрібні? Яку формулу використати?
- Як знайти відстань між двома точками у просторі?

IV. Домашнє завдання

Повторити § 11

Виконати № 11.8; 11.21; 11.25; 11.31

О.С. Істер

(2018)

Повторити §

Виконати №

А.Г. Мерзляк

(2018)

Тема: Вектори у просторі. Операції над векторами.

Мета: Пригадати поняття вектора, модуля вектора, колінеарних векторів, правила додавання та віднімання векторів, властивості векторів та розширити поняття про вектор у стереометрії.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

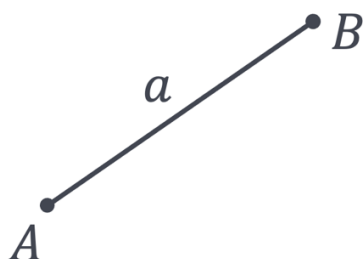
II. Актуалізація опорних знань

Учні вже знають, що таке вектор, як він позначається, що таке модуль вектора, які вектори називаються колінеарними, які вектори називаються рівними і т.д. В 10 класі ми розглядаємо вектор на площині. Для актуалізації опорних знань учням протягом засвоєння матеріалу будуть задаватись запитання за вже відомими їм поняттями.

III. Вивчення нового матеріалу

// Поняття вектора

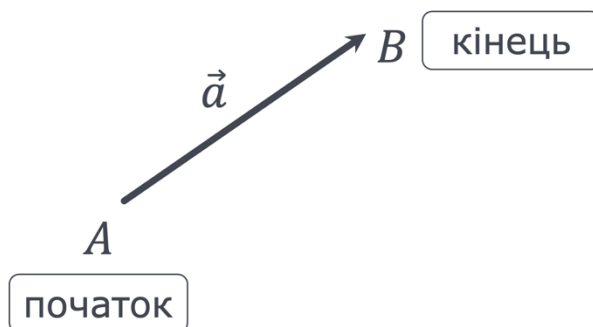
ВІДРІЗОК



- Що треба зробити, щоб даний відрізок став вектором?
(задати напрям)

ВЕКТОР

(Напрявлений відрізок)



Вектор у просторі – це також напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, яка точка є його початком, а яка – кінцем.



$\overrightarrow{AB}$;
 $\vec{a}$,



Вектор $\overrightarrow{AB}$;
Вектор $\vec{a}$.



Пригадайте, чи існує вектор, у якого початок збігається з кінцем?
(Так – це нуль вектор)



Нуль-вектор

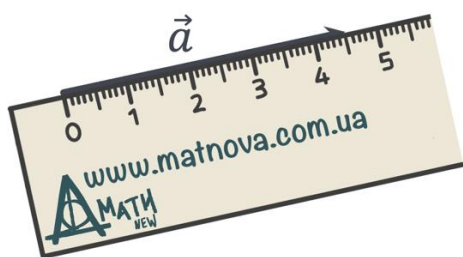
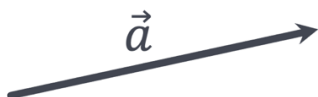
$$\overrightarrow{MM}, \vec{0}$$

• M

Нульовий вектор

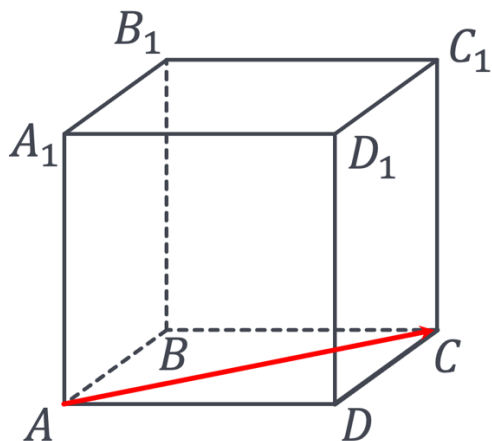
// Поняття модуля вектора

Модуль (довжина або абсолютна величина) вектора $\vec{a}$ – це довжина відрізка a , що зображує вектор $\vec{a}$.



$$|\vec{a}| = 4,5$$

Приклад 1

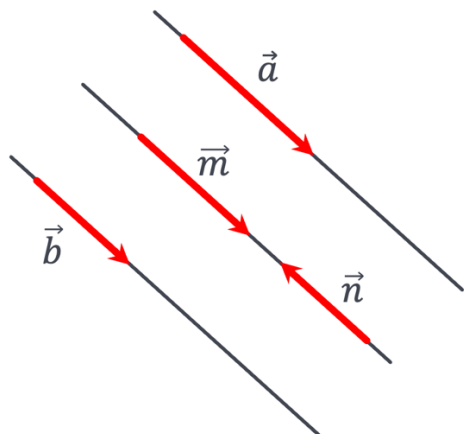


$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб з ребром 1 см.
Знайдіть $|\overrightarrow{AC}|$

Розв'язання:

$$|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

// Поняття колінеарних векторів



Колінеарні вектори – це два ненульові вектори, що лежать на одній прямій або паралельних прямих.



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}; \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{m}$$



Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнаправлені



$$\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$$



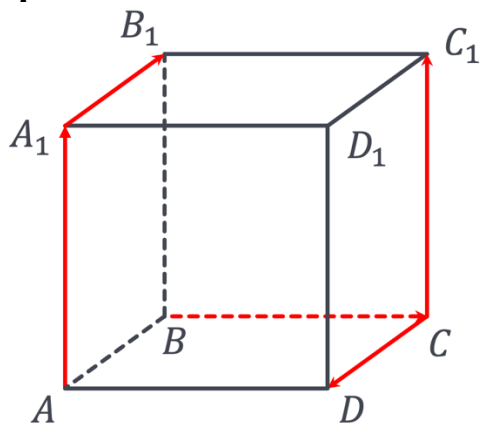
Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ протилежно напрямлені

Рівні вектори – це співнаправлені вектори з рівними модулями.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$



Приклад 2



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб.

- 1) Назвіть колінеарні вектори
- 2) Назвіть рівні вектори

Відповідь:

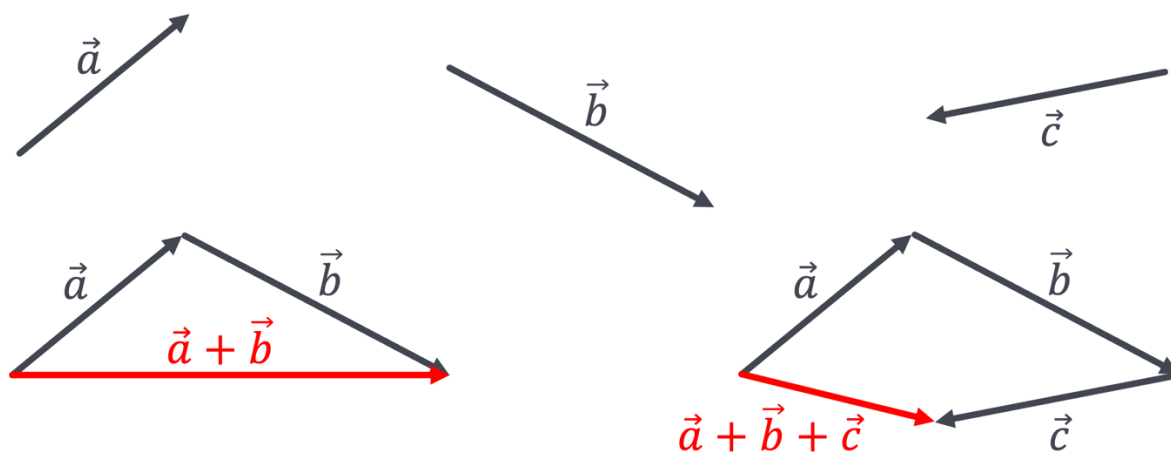
- 1) $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC_1}; \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$
- 2) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$

// Додавання векторів

- Пригадайте, скільки векторів, рівних даному, від даної точки, можна відкласти на площині?

(Один)

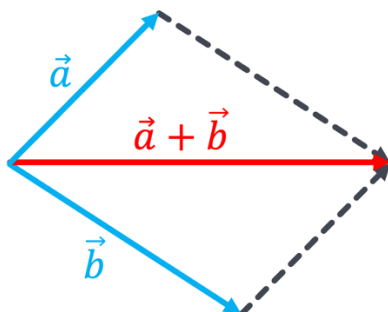
- Пригадайте правило трикутника для додавання векторів
(Учні пригадують правило, яке вчили у 9 класі)



Щоб додати 2 і більше векторів:

- 1) Будуємо вектори, рівні даним, «один за одним» так, щоб початок кожного наступного вектора співпадав з кінцем попереднього.
 - 2) З'єднуємо початок першого вектора з кінцем останнього.
- За даними на рисунку сформулюйте правила додавання векторів, що виходять з однієї точки
(Учні висловлюють власну думку)

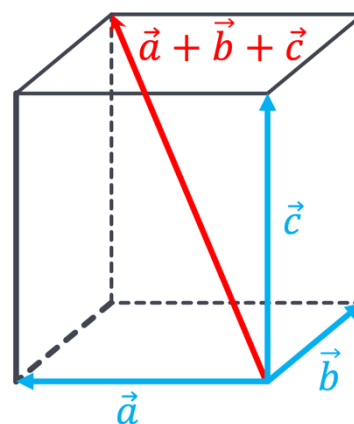
Правило паралелограма



Правило паралелограма для знаходження суми векторів:

- 1) Відкладаємо дані вектори від спільної точки.
- 2) Будуємо на даних векторах паралелограм.
- 3) Будуємо вектор, що є діагоналю паралелограма.

Правило паралелепіпеда

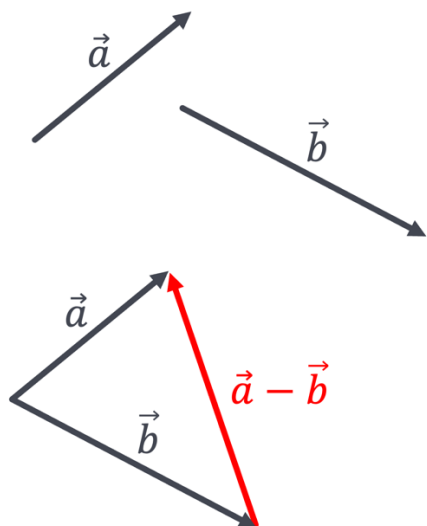


Щоб додати три вектори, які не паралельні одній площині:

- 1) Відкладаємо дані вектори від спільної точки.
- 2) Будуємо на даних векторах паралелепіпед.
- 3) Будуємо діагональ паралелепіпеда, що виходить зі спільного початку даних векторів.
- 4) Задавши напрямок побудованій діагоналі так,

щоб початок був у спільній точці векторів, які додаємо – отримаємо вектор-суму.

// Віднімання векторів



➤ За даним рисунком пригадайте вже відоме Вам правило віднімання двох векторів.

- 1) Відкладаємо дані вектори від спільної точки.
- 2) Будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора-від'ємника, а кінець – з кінцем вектора-зменшуваного.

Вектор-різниця сполучає кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та напрямлений у бік зменшуваного.

// Властивості векторів

Всі засвоєні учнями властивості векторів в планіметрії, справджуються і в стереометрії, пригадаємо ці властивості.

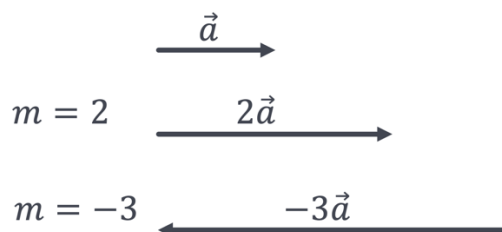
Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та чисел m, n :

- 1) $m\vec{a} = \vec{a}m$
- 2) $(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$
- 3) $m\vec{0} = \vec{0}$
- 4) $0\vec{a} = \vec{0}$
- 5) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
- 6) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

Множення вектора $\vec{a}$ на число m (в результаті отримаємо вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$):

$$|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$$

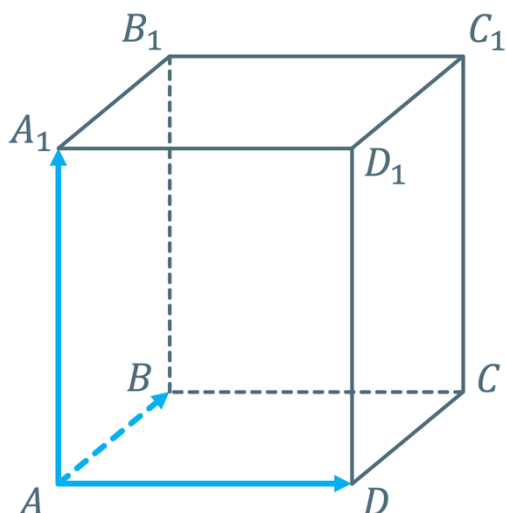
Якщо $m > 0$, то $m\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$



IV. Розв'язування завдань

№1

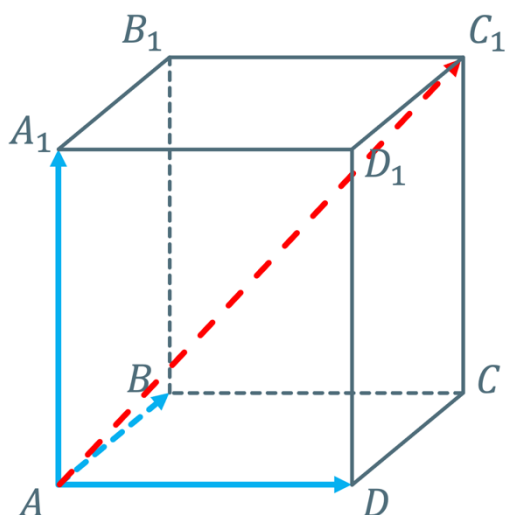
Запропонуйте два способи, як можна додати вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$



Розв'язання:

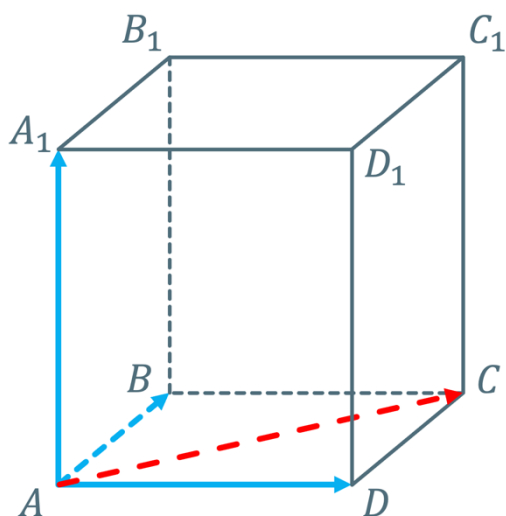
I спосіб

Вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ можна додати за правилом паралелепіпеда, тоді вектор сума:
 $\overrightarrow{AC_1}$

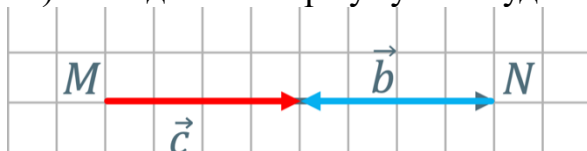


II спосіб

Додаємо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ за правилом паралелограма, тоді:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



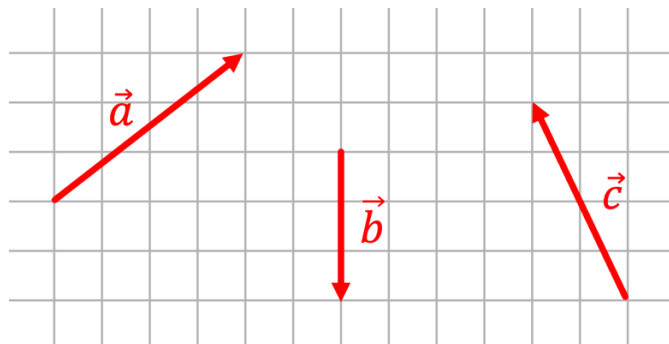
4) Знайдіть вектор суму $\vec{c}$ побудованих Вами векторів



№3

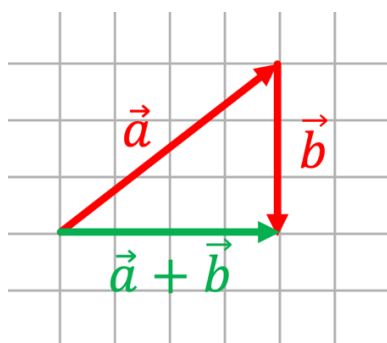
За даними на рисунку побудуйте вектори:

- 1) $\vec{a} + \vec{b}$
- 2) $\vec{a} - \vec{b}$
- 3) $\vec{a} + \vec{c}$
- 4) $\vec{a} - \vec{c}$
- 5) $\vec{b} + \vec{c}$
- 6) $\vec{b} - \vec{c}$

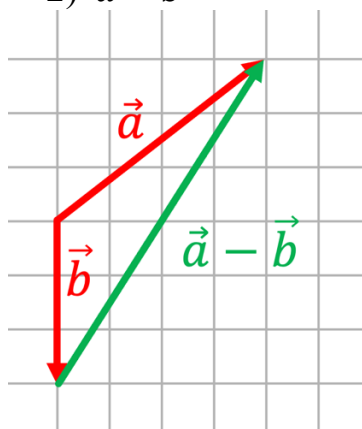


Розв'язання:

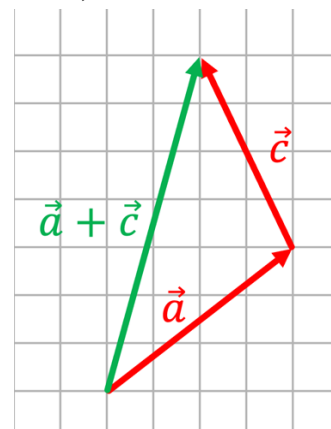
1) $\vec{a} + \vec{b}$



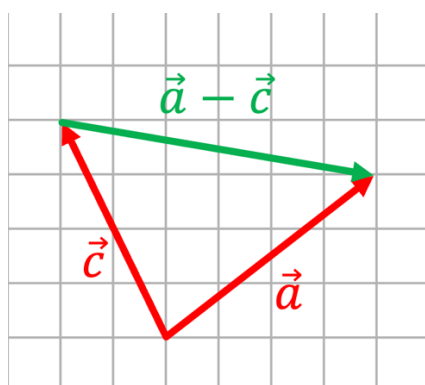
2) $\vec{a} - \vec{b}$



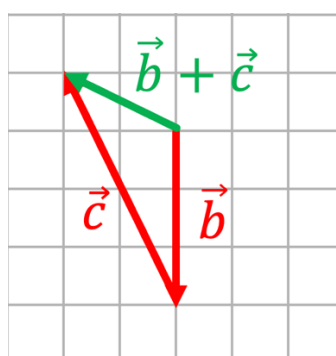
3) $\vec{a} + \vec{c}$



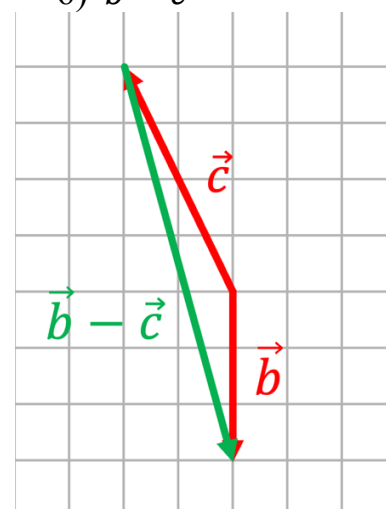
4) $\vec{a} - \vec{c}$



5) $\vec{b} + \vec{c}$



6) $\vec{b} - \vec{c}$



V. Підсумок уроку

- Поясніть, що таке вектор? Модуль вектора?
- Які вектори називаються колінеарними?
- Які умови мають виконуватись, щоб вектори були рівними?
- Чи існує вектор, який не має довжини і напрямку?
- Поясніть, як додати два вектори? Як відняти два вектори?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати § 12

Виконати № 12.4; 12.6; 12.8; 12.16

О.С. Істер

(2018)

Опрацювати § 6, п. 39

Виконати № 39.3, 39.5, 39.8, 39.10, 39.12

А.Г. Мерзляк

(2018)

Тема: Розв'язування типових завдань за темою «Вектори у просторі. Операції над векторами»

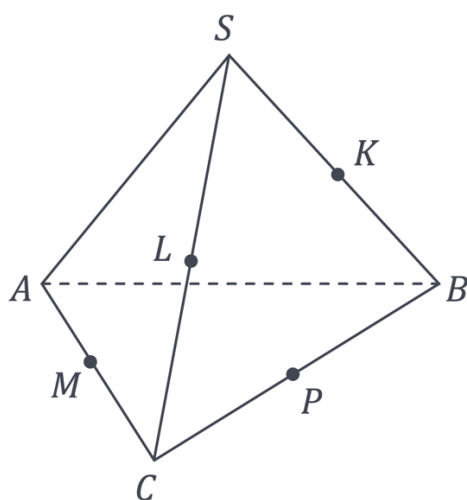
Мета: Формувати вміння використовувати набуті знання для розв'язування типових завдань. Перевірити рівень засвоєного матеріалу, виявити можливі прогалини.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Розв'язування завдань



$SABC$ – тетраедр, усі ребра якого є рівними. Точки M, P, L, K – середини ребер AC, CB, CS, BS відповідно.

Оберіть правильні твердження, поясніть Вашу відповідь.

1) $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{PK}$

2) $|\overrightarrow{ML}| = |\overrightarrow{PK}|$

3) $|\overrightarrow{BS}| = 2|\overrightarrow{PL}|$

4) $|\overrightarrow{LK}| = -0,5|\overrightarrow{BC}|$

№1

Відповідь:

НІ

(Вектори не співнаправлені)

ТАК

(ML і PK середні лінії правильних рівних між собою трикутників, тому довжини ML і PK рівні)

ТАК

(PL – середня лінія $\triangle CSB$)

НІ

(Щоб виконувалась дана рівність, потрібно прибрати «модуль», тоді:

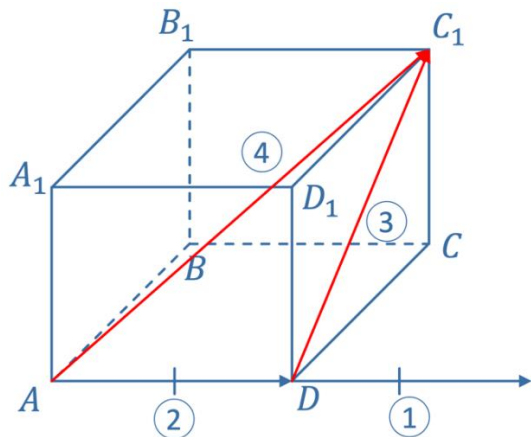
LK – середня лінія $\triangle CSB$, якщо вектор $\overrightarrow{BC}$ помножимо на $-0,5$, то він буде співнаправленим з вектором $\overrightarrow{LK}$ і матиме таку ж довжину)

№2

Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- 1) Відкладіть від т. D вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AD}$
- 2) Укажіть вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$
- 3) Побудуйте вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$
- 4) Побудуйте вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Розв'язання:



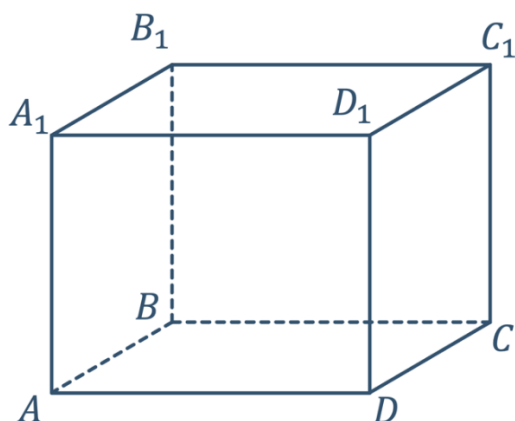
№3

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - паралелепіпед.

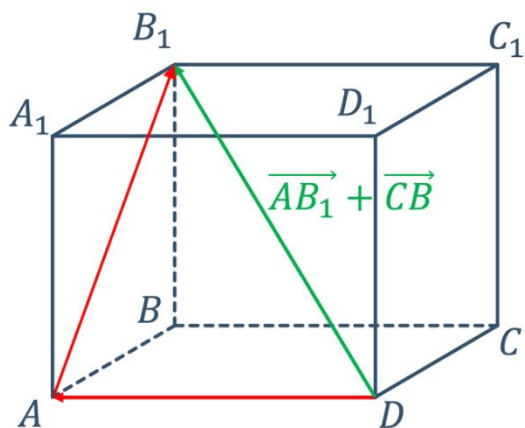
Знайдіть вектора $\vec{a}$, такий, що:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$$

Початком і кінцем вектора $\vec{a}$ мають бути вершини паралелепіпеда.

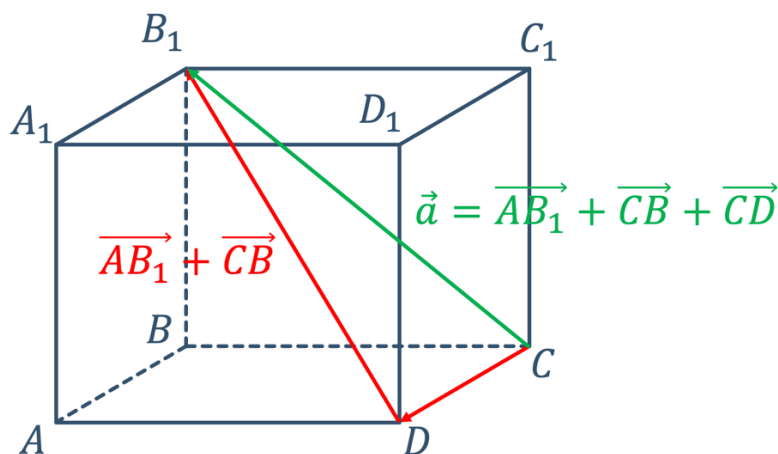


Розв'язання:



Додаємо вектори $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB_1} \\ &= \overrightarrow{DB_1} \end{aligned}$$



До суми векторів $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CB}$ додаємо вектор $\overrightarrow{CD}$:
 $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB_1}$

Отже:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB_1}$$

Відповідь: $\vec{a} = \overrightarrow{CB_1}$

№5

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно перпендикулярні, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$. Знайдіть довжину вектора $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Розв'язання:

1 спосіб

Спочатку додаємо довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за теоремою Піфагора:

$$|\vec{m}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Додаємо до суми довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, довжину вектора $\vec{c}$, також за теоремою Піфагора:

$$\begin{aligned} |\vec{l}| &= |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = |\vec{m}| + |\vec{c}| \\ &= \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \\ &= \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Відповідь: $|\vec{l}| = 5\sqrt{2}$

2 спосіб

// з 9-го класу учням вже відомо, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ //

$$\begin{aligned} |\vec{l}|^2 &= \vec{l}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \\ &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 \\ &= 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} \\ &= 9 + 16 + 25 + 0 + 0 \\ &\quad + 0 = 50 \end{aligned}$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

III. Підсумок уроку

- Поясніть, що таке вектор? Модуль вектора?
- Які вектори називаються колінеарними?
- Які умови мають виконуватись, щоб вектори були рівними?
- Чи існує вектор, який не має довжини і напрямку?
- Поясніть, як додати два вектори? Як відняти два вектори?

IV. Домашнє завдання

Повторити § 12

Виконати № 12.10; 12.14; 12.19; (2018)
12.23; 12.29

О.С. Істер

Повторити § 6, п.39

Виконати № 39.14; 39.16; 39.18; 39.20 (2018)

А.Г. Мерзляк

Тема: Координати вектора. Операції над векторами, які задано координатами.

Мета: Пригадати як раніше знаходили координати вектора за координатами його початку і кінця; як знаходили модуль вектора за координатами його початку і кінця, а також за даними координатами вектора; як додавали і віднімали вектори, що задані координатами; як множили вектор заданий координатами на число; пригадати ознаку колінеарності векторів, заданих координатами та розширити всі ці поняття про вектор у стереометрії.

Хід уроку

I. Організаційний етап

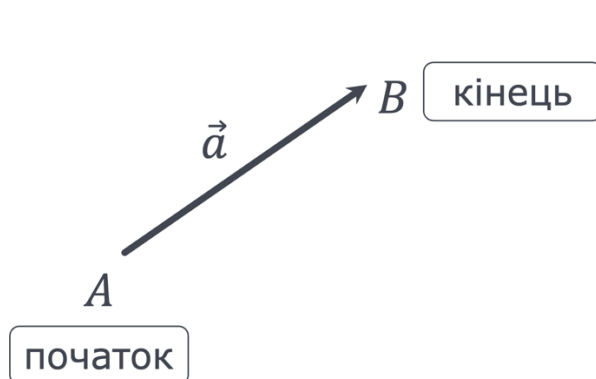
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

III. Вивчення нового матеріалу

// Координати вектора

➤ Пригадайте, як ви знаходили координати вектора на площині?
(Учні висловлюють власну думку)



Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ і $z = z_2 - z_1$



$\overrightarrow{AB}(x; y; z); \vec{a}(x; y; z)$



Вектор $\overrightarrow{AB}$ з координатами x, y і z

У рівних векторів відповідні координати рівні і навпаки.

Приклад 1

Знайдіть координати $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(7; 3; 24)$, $B(5; 0; 8)$

Розв'язання:

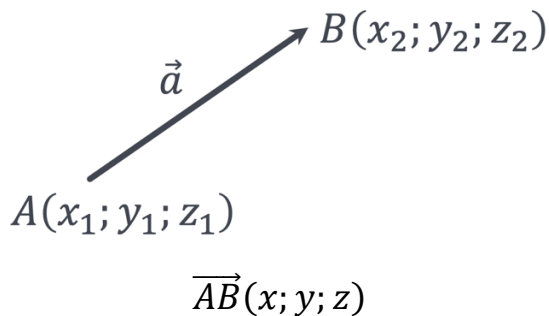
$$x = 5 - 7 = -2; y = 0 - 3 = -3; z = 8 - 24 = -16$$

$$\overrightarrow{AB}(-2; -3; -16)$$

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(-2; -3; -16)$

// Модуль (довжина) вектора

➤ Пригадайте, як ви знаходили модуль вектора на площині?
(Учні висловлюють власну думку)



За координатами кінців вектора:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

За координатами вектора:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Приклад 2

Знайдіть довжину вектора $\vec{AB}(2; 1; 3)$

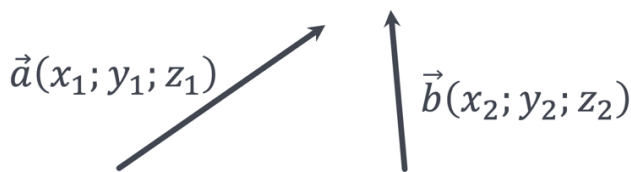
Розв'язання:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Відповідь: $|\vec{AB}| = \sqrt{14}$

// Дії над векторами

➤ Пригадайте, як ви додавали і віднімали вектори, задані координатами? Як множили вектор, заданий координатами, на число?



Сума векторів $\vec{a} + \vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

Різниця векторів $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ :

$$\lambda \vec{a} = \vec{c}(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Приклад 3.1

Знайдіть суму векторів $\vec{a}(0; 7; 4)$ і $\vec{b}(2; 5; 3)$

Розв'язання:

$$x = 0 + 2 = 2; y = 7 + 5 = 12; z = 4 + 3 = 7$$

Відповідь: $\vec{m}(2; 12; 7)$

Приклад 3.2

Знайдіть координати вектора $2\vec{m}$

Розв'язання:

$$2 \cdot \vec{m} = 2\vec{m}(4; 24; 14)$$

Відповідь: $2\vec{m}(4; 24; 14)$

// Ознака колінеарності векторів

- Пригадайте, як ви раніше визначали за координатами векторів колінеарні дані вектори чи ні?

Як дізнатись, чи колінеарні дані вектори?

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) \qquad \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$$

Координати колінеарних векторів пропорційні, тому:

$$1) \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$= \lambda \rightarrow \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ колінеарні}$$

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

$$\lambda > 0 \rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

$$\lambda < 0 \rightarrow \vec{a} \downarrow \vec{b}$$

- 2) Одна й та сама координата дорівнює нулю, а інші пропорційні
 $\rightarrow \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ колінеарні}$

Приклад 4

Чи колінеарні вектори $\vec{m}(2; -10; 8)$ і $\vec{n}(-1; 5; -4)$

$$\frac{2}{-1} = \frac{-10}{5} = \frac{8}{-4} = -2 \rightarrow \vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$$

Відповідь: $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$

IV. Розв'язування завдань**№1**

Знайдіть суму і різницю векторів $3\vec{a}$ і $\frac{1}{2}\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(1; 0; 7); \vec{b}(4; 10; 18)$

2) $\vec{a}(0; 0; 2); \vec{b}(2; 0; 8)$

Розв'язання:

1) $3 \cdot \vec{a} = 3\vec{a}(3; 0; 21); \frac{1}{2} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}(2; 5; 9)$

$$3\vec{a}(3; 0; 21) - \frac{1}{2}\vec{b}(2; 5; 9) = \vec{c}(1; -5; 12)$$

$$3\vec{a}(3; 0; 21) + \frac{1}{2}\vec{b}(2; 5; 9) = \vec{d}(5; 5; 30)$$

2) $3 \cdot \vec{a} = 3\vec{a}(0; 0; 6); \frac{1}{2} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}(1; 0; 4)$

$$3\vec{a}(0; 0; 6) - \frac{1}{2}\vec{b}(1; 0; 4) = \vec{m}(-1; 0; 2)$$

$$3\vec{a}(0; 0; 6) + \frac{1}{2}\vec{b}(1; 0; 4) = \vec{n}(1; 0; 10)$$

№2

Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ і його довжину, якщо:

$$1) \vec{A}(-2; 1; 5); \vec{B}(2; 3; 7) \qquad 2) \vec{A}(4; 7; -2); \vec{B}(6; 10; 4)$$

Розв'язання:

$$1) \quad x = 2 - (-2) = 4; y = 3 - 1 = 2; z = 7 - 5 = 2$$

$$\overrightarrow{AB}(4; 2; 2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

$$2) \quad x = 6 - 4 = 2; y = 10 - 7 = 3; z = 4 - (-2) = 6$$

$$\overrightarrow{AB}(2; 3; 6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

№3

При якому значенні a довжина вектора $\vec{m}$ дорівнює $\sqrt{42}$, якщо:

$$1) \quad \vec{m}(5; 1; a)$$

$$2) \quad \vec{m}(a - 3; 4; 1)$$

$$3) \quad \vec{m}(-1; a - 2; a - 3)$$

$$4) \quad \vec{m}(a - 2; a - 3; a - 6)$$

Розв'язання:

$$1) \quad |\vec{m}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + a^2} = \sqrt{42}$$

$$25 + 1 + a^2 = 42$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

$$2) \quad |\vec{m}| = \sqrt{(a - 3)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9 + 16 + 1} = \sqrt{42}$$

$$a^2 - 6a + 26 = 42$$

$$a^2 - 6a - 16 = 0$$

$$D = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad |\vec{m}| = \sqrt{(-1)^2 + (a - 2)^2 + (a - 3)^2} = \sqrt{42}$$

$$\sqrt{1 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 6a + 9} = \sqrt{42}$$

$$2a^2 - 10a + 14 = 42$$

$$2a^2 - 10a - 28 = 0$$

$$a^2 - 5a - 14 = 0$$

За теоремою Вієта:

$$a_1 = 7$$

$$a_2 = -2$$

$$4) \quad |\vec{m}| = \sqrt{(a - 3)^2 + (a - 2)^2 + (a - 6)^2} = \sqrt{42}$$

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4 + a^2 - 6a + 9 + a^2 - 12a + 36} = \sqrt{42}$$

$$3a^2 - 22a + 49 = 42$$

$$3a^2 - 22a + 7 = 0$$

$$D = 484 - 84 = 400 = 20^2$$

$$a_{1,2} = \frac{22 \pm 20}{6} = \left[\begin{array}{l} 7 \\ 2 \\ 6 \end{array} \right] = \frac{1}{3}$$

V. Підсумок уроку

- Поясніть, як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
- Поясніть, як можна знайти модуль вектора?
- Поясніть, як додати (відняти) два вектори, якщо відомі координати їх початків і кінців?
- Поясніть, як помножити вектор, який задано координатами, на число?
- Поясніть, як знаючи координати двох векторів, з'ясувати – колінеарні дані вектори чи ні?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати § 13

Виконати №13.2; 13.8; 13.12; 13.18; 13.24

О.С. Істер

(2018)

Опрацювати §6, п. п. 40-41

Виконати № 40.6; 40.8; 40.16; 41.5; 41.10

А.Г. Мерзляк

(2018)

Тема: Розв'язування типових завдань за темою «Координати вектора. Операції над векторами, які задано координатами»

Мета: Формувати вміння використовувати набуті знання для розв'язування типових завдань. Перевірити рівень засвоєного матеріалу, виявити можливі прогалини.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Розв'язування завдань

№1

Які з даних пар векторів колінеарні?

- | | |
|--|------------|
| 1) $\vec{a}(3; -1; 4)$ і $\vec{b}(-6; 2; 8)$ | НІ |
| 2) $\vec{m}(4; 2; 5)$ і $\vec{n}(8; 4; 10)$ | ТАК |
| 3) $\vec{k}(0; 7; 1)$ і $\vec{l}(0; 14; 2)$ | ТАК |
| 4) $\vec{e}(0; 2; 0)$ і $\vec{h}(0; 6; 0)$ | ТАК |
| 5) $\vec{t}(0; 0; 5)$ і $\vec{d}(10; 0; 0)$ | НІ |

№2

Дано вектори $\vec{a}(2; 0; 3)$ і $\vec{b}(-1; 2; 0)$. Обчисліть:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $\vec{a} + \vec{b}$ | 2) $(-3\vec{a}) - (2\vec{b})$ |
| 3) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ | 4) $(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b})$ |

Розв'язання:

- 1) $\vec{a}(2; 0; 3) + \vec{b}(-1; 2; 0) = \vec{c}(1; 2; 3)$
- 2) $(-3\vec{a}) - (2\vec{b})$
 $-3 \cdot \vec{a} = 3\vec{a}(-6; 0; -9); \frac{1}{2} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$
 $3\vec{a}(-6; 0; -9) + \frac{1}{2}\vec{b}\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right) = \vec{d}\left(-6\frac{1}{2}; 1; -9\right)$
- 3) $\vec{a}(2; 0; 3) + \frac{1}{2}\vec{b}\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right) = \vec{e}\left(1\frac{1}{2}; 1; 3\right)$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) \\
 & \vec{a}(2; 0; 3) - \vec{b}(-1; 2; 0) = \vec{h}(3; -2; 3) \\
 & \vec{a}(2; 0; 3) + \vec{b}(-1; 2; 0) = \vec{c}(1; 2; 3) \\
 & \vec{h}(3; -2; 3) + \vec{c}(1; 2; 3) = \vec{m}(4; 0; 6)
 \end{aligned}$$

№3

З'ясуйте, чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо:

$$1) \quad \vec{A}(5; -2; 7); \vec{B}(3; 1; 12); \vec{C}(2; 8; 4); \vec{D}(0; 11; 1)$$

$$2) \quad \vec{A}(8; 1; 3); \vec{B}(10; 4; 7); \vec{C}(7; 0; 3); \vec{D}(9; 3; 7)$$

Розв'язання:

Оскільки у рівних векторів відповідні координати рівні і навпаки, то:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \overrightarrow{AB}(-2; 3; 5); \\
 & \overrightarrow{CD}(-2; 3; -3); \\
 & \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \overrightarrow{AB}(2; 3; 4); \\
 & \overrightarrow{CD}(2; 3; 7); \\
 & \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Відповідь:} \quad & 1) \quad \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD} \\
 & 2) \quad \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}
 \end{aligned}$$

№4

При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(3; m; 4)$ і $\vec{b}(5; 7; n)$ будуть колінеарними?

Розв'язання:

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні за умови, що $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, тому:

$$\overrightarrow{(3; m; 4)} = \lambda \overrightarrow{(5; 7; n)}$$

$$3 = \lambda \cdot 5$$

$$\lambda = \frac{3}{5}$$

$$m = \lambda \cdot 7 = \frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$$

$$4 = \lambda \cdot n$$

$$4 = \frac{3}{5} \cdot n$$

$$n = 4 : \frac{3}{5} = 4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

$$\text{Відповідь: } m = 4\frac{1}{5}; n = 6\frac{2}{3}$$

Відомо, що $A(6; 6; 4)$, $B(10; 0; 12)$, $C(6; 2; 12)$, $D(0; 11; 0)$. За допомогою векторів доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – трапеція.

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів, які лежать на сторонах даної трапеції:

$$\overrightarrow{AB}(4; -6; 8);$$

$$\overrightarrow{BC}(-4; -2; 0);$$

$$\overrightarrow{CD}(-6; 9; -12);$$

$$\overrightarrow{DA}(6; -5; 4)$$

Перевіримо, чи колінеарні вектори, що лежать на протилежних сторонах трапеції:

$$-\frac{4}{6} = -\frac{6}{9} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

$$-\frac{4}{6} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{0}{4} \rightarrow \overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$$

Отже, $ABCD$ – трапеція.

Доведено.

III. Підсумок уроку

- Поясніть, як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
- Поясніть, як можна знайти модуль вектора?
- Поясніть, як додати (відняти) два вектори, якщо відомі координати їх початків і кінців?
- Поясніть, як помножити вектор, який задано координатами, на число?
- Поясніть, як знаючи координати двох векторів, з'ясувати – колінеарні дані вектори чи ні?

IV. Домашнє завдання

Повторити § 13

О.С. Істер

Виконати № 13.6; 13.14; 13.16; 13.20; (2018)

13.26

Повторити § 6, п.40-41

А.Г. Мерзляк

Виконати № 41.12; 41.14; 41.18; 41.20 (2018)

Тема: Скалярний добуток векторів

Мета: Пригадати, що є кут між векторами; як раніше знаходити скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами, а також знають теорему про скалярний добуток векторів та наслідок з неї (властивість та ознаку перпендикулярних векторів), скалярний квадрат вектора та властивості векторів та розширити всі ці поняття про вектор у стереометрії.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

Учні вже вміють на площині знаходити кут між неколінеарними векторами, знають яким буде кут між співнапрямленими та протилежнонапрямленими векторами; знаходити скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами, а також знають теорему про скалярний добуток векторів та наслідок з неї (властивість та ознаку перпендикулярних векторів); знають як знайти скалярний квадрат вектора та властивості векторів. Для актуалізації опорних знань учням протягом засвоєння матеріалу будуть задаватись запитання за вже відомими їм поняттями.

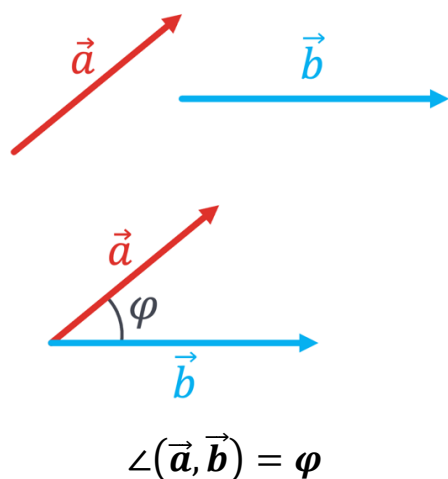
III. Вивчення нового матеріалу

// Поняття кута між векторами

- Пригадайте, що є кутом між двома ненульовими векторами, які не мають спільного початку?

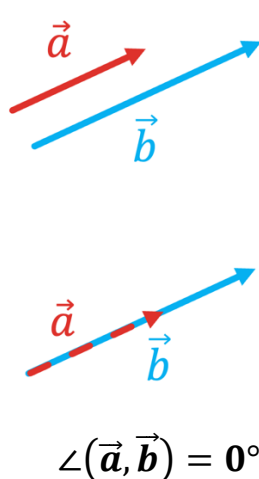
(це кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок)

Неколінеарні вектори

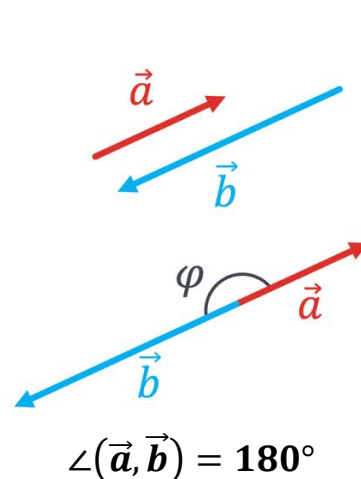


Колінеарні вектори

Співнапрямлені



Протилежно напрямлені



// Скалярний добуток векторів

➤ Пригадайте, як ви знаходили скалярний добуток векторів?

Скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) \cdot \vec{b}(x_2; y_2; z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат

Теорема про скалярний добуток векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між

Наслідок (властивість і ознака перпендикулярних векторів)

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки.

Приклад 1

При якому значенні y вектори $\vec{a}(2; 3; 0)$ і $\vec{b}(-3; y; 4)$ будуть перпендикулярними?

Розв'язання:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot y + 0 \cdot 4 = 0;$$

$$-6 + 3y = 0;$$

$$3y = 6;$$

$$y = 2.$$

// Скалярний квадрат вектора і властивості скалярного добутку

Знайдемо скалярний квадрат вектора, заданого координатами:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right)^2 = |\vec{a}|^2$$



$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$



Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля

// Властивості скалярного добутку

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та будь-якого числа λ виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переставна властивість)
- 2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сполучна властивість)
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (розподільна властивість)

IV. Розв'язування завдань

№1

Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(0; 3; -5)$, $\vec{b}(7; 8; 2)$;
- 2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Розв'язання:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + (-5) \cdot 2 = 14$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

№2

Дано вектори $\vec{m}(1; y; 7)$ і $\vec{n}(-2; 3; 2)$. При якому значенні y буде виконуватись рівність $\vec{m} \cdot \vec{n} = 12$?

Розв'язання:

$$-2 + 3y + 14 = 12$$

$$3y = 12 - 14 + 2$$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

Відповідь: $y = 0$

№3

Відомо, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть:

- | | |
|--|---|
| 1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ | 2) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$ |
| 3) $(\vec{b} - \vec{a})^2$ | 4) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ |

Розв'язання:

$$1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3^2 = 6 + 9 = 15$$

$$2) (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 + 12 = 20$$

$$3) (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 - 12 + 8 = 5$$

$$4) \quad \vec{a}\vec{b} = 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

V. Підсумок уроку

- Що є кутом між векторами, які не перетинаються? Яка градусна міра між співнаправленими векторами?
- Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомі їх координати?
- Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомі їх довжини і кут між ними?
- Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює... ?
- Як знайти градусну міру між векторами, якщо відомі їх довжини?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §14

Виконати № 14.2; 14.6; 14.8; 14.21

О.С. Істер

(2018)

Опрацювати § 6, п.42

Виконати № 42.4; 42.6; 42.8; 42.11

А.Г. Мерзляк

(2018)

Тема: Розв'язування типових завдань за темою «Скалярний добуток векторів. Кут між векторами»

Мета: Формувати вміння використовувати набуті знання для розв'язування типових завдань. Перевірити рівень засвоєного матеріалу, виявити можливі прогалини.

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Розв'язування завдань

№1

$\vec{a}$ і $\vec{b}$ - ненульові вектори. Вкажіть співнапрямлені, протилежно напрямлені, перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- | | |
|---|------------------------------|
| 1) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ | Співнапрямлені |
| 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ | Перпендикулярні |
| 3) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ | Протилежно напрямлені |
| 4) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ | Неколінеарні |

№2

Знайдіть скалярний квадрат вектора $\vec{a}$, якщо:

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 1) $\vec{a}(1; 0; -1)$ | 2) $\vec{a}(2; 3; -5)$ |
| 3) $ \vec{a} = 4$ | 4) $ \vec{a} = 2\sqrt{3}$ |

Розв'язання:

- 1) $\vec{a}^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$
- 2) $\vec{a}^2 = 2^2 + 3^2 + (-5)^2 = 4 + 9 + 25 = 38$
- 3) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16$
- 4) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

№3

Знайдіть кут між векторами:

- | | |
|--|---|
| 1) $\vec{a}(2; 0; -2)$ і $\vec{b}(3; -3; 0)$ | 2) $\vec{a}(1; 2; 3)$ і $\vec{b}(-9; 3; 1)$ |
|--|---|

Розв'язання:

$$1) \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6 + 0 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 4} \cdot \sqrt{9 + 9 + 0}} = \frac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{144}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$2) \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-9 + 6 + 3}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{81 + 9 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{91}} = 0$$

$$\varphi = 90^\circ$$

№4Дано вектори $\vec{m}(-5; 0; 1)$ і $\vec{n}(5; -1; 0)$. Обчисліть:

1) $|\vec{m} + \vec{n}|$

2) $|2\vec{m} - \vec{n}|$

Розв'язання:

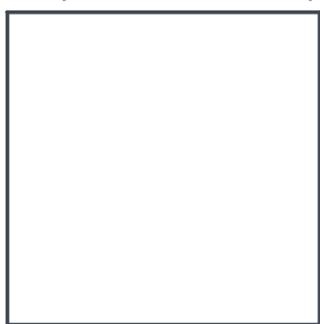
1) $\vec{m}(-5; 0; 1) + \vec{n}(5; -1; 0) = \vec{c}(0; -1; 1)$

$$|\vec{m} + \vec{n}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2) $2 \cdot \vec{m} = 2\vec{m}(-10; 0; 2)$

$$2\vec{m}(-10; 0; 2) - \vec{n}(5; -1; 0) = \vec{d}(-15; 1; 2)$$

$$|2\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{225 + 1 + 4} = \sqrt{230}$$

№5Доведіть, що $ABCD$ – квадрат, якщо $A(1; 1; 1)$, $B(1; 5; 1)$, $C(5; 5; 1)$, $D(5; 1; 1)$
 $B(1; 5; 1)$
 $C(5; 5; 1)$

 $A(1; 1; 1)$
 $D(5; 1; 1)$
Доведення:

$$\overrightarrow{AB}(0; 4; 0) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0 + 16 + 0} = 4$$

$$\overrightarrow{BC}(4; 0; 0) \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 0 + 0} = 4$$

$$\overrightarrow{CD}(0; -4; 0) \quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{0 + 16 + 0} = 4$$

$$\overrightarrow{AD}(4; 0; 0) \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 0 + 0} = 4$$

Оскільки довжини всіх сторін рівні, то даний чотирикутник ромб.

$$\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{0 + 0 + 0}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = 0 \rightarrow \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$$

Оскільки протилежні кути ромба рівні і сума кутів чотирикутника 360° , то в даного ромба всі кути рівні, отже він є квадратом.

Доведено

III. Підсумок уроку

- Що є кутом між векторами, які не перетинаються? Яка градусна міра між співнаправленими векторами?
- Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомі їх координати?
- Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомі їх довжини і кут між ними?
- Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює... ?
- Як знайти градусну міру між векторами, якщо відомі їх довжини?

IV. Домашнє завдання

Повторити § 14

О.С. Істер

Виконати № 14.4; 14.14; 14.12; 14.18; (2018)
14.21

Повторити § 6, п.42

А.Г. Мерзляк

Виконати № 42.13; 42.15; 42.17; 42.21 (2018)

РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Сучасний освітній процес усе більше інтегрує інформаційні технології в різні аспекти навчання. Особливу роль вони відіграють у рамках дистанційної чи змішаної освіти, де ключовим елементом стає використання інтерактивних інструментів. Завдяки їм учителі мають змогу зробити викладання дисциплін більш доступним, цікавим і ефективним для учнів.

Інтерактивне навчання створює сприятливі умови для формування впевненості учнів у власних знаннях та інтелектуальних здібностях, а також сприяє їхній успішності. Це особливо важливо в процесі викладання математики, де інтерактивні технології можуть значно підвищити рівень взаємодії між вчителем і учнями, забезпечуючи послідовну та зрозумілу презентацію матеріалу. Використання онлайн-ресурсів і інтерактивних програм дозволяє підготувати навчальні матеріали, які розраховані на широке застосування через планшети, мультимедійні дошки або навіть смартфони.

Однією з передових платформ, що активно впроваджуються в математичній освіті, є інтерактивне середовище GeoGebra. Ця програма пропонує широкий набір інструментів для інтеграції з сучасними веб-технологіями, відкриваючи можливості підтримки навчального процесу через інтернет та гармонійного поєднання дистанційного навчання із традиційними методами у класі. GeoGebra стає незамінною особливо при вивченні геометричних аспектів математики, забезпечуючи вчителям зручний спосіб наочно демонструвати побудови та взаємодію між різними математичними об'єктами.

GeoGebra об'єднує геометричні та алгебраїчні концепції, дозволяючи учням глибше проникнути в сенс математики і відкривати зв'язки між її різними розділами. Під час геометричних викладок учні працюють із такими поняттями, як відстань, розміри або вектори, тоді як у алгебрі досліджуються числа, змінні й математичні вирази. Інтеграція цих двох сфер у GeoGebra сприяє формуванню

цілісного розуміння матеріалу, оскільки платформа дає змогу зв'язувати геометричні об'єкти з алгебраїчними виразами, створюючи динамічне навчальне середовище. Ця програма дозволяє не лише виконувати розрахунки чи будувати графічні моделі, але й здійснювати трансформації створених конструкцій, таких як точки, відрізки чи вектори. При цьому користувачі можуть інтуїтивно змінювати побудови, додаючи нові елементи або модифікуючи існуючі. Завдяки можливості безпосередньої роботи з координатами точок, можна легко створювати і виводити на екран вектори, як у двовимірному вимірі на площині, так і в тривимірному просторі. Візуалізація динамічних креслень через мультимедійні дошки дозволяє розв'язувати задачі високого рівня складності та активно залучати учнів до процесу.

Особливу ефективність платформа демонструє на уроках геометрії у секціях стереометрії. Використання таких інструментів, як 3D-калькулятор, робить опанування понять просторових побудов векторів значно легшим для школярів. Учням стає зрозумілим поняття рівності та колінеарності векторів, а ще вони отримують можливість обчислювати довжини векторів, їхній скалярний добуток або навіть кути між ними за допомогою алгебраїчного калькулятора у комбінації з графічними побудовами.

Програма GeoGebra є надзвичайно корисним інструментом, який забезпечує широкі можливості для візуалізації досліджуваних об'єктів, зокрема векторів, а також детального аналізу їх властивостей під час виконання різноманітних математичних операцій. Вона також виконує функцію інтегрованого інструментально-вимірювального комплексу, пропонуючи користувачам набір спеціалізованих інструментів, за допомогою яких можна створювати об'єкти, здійснювати їх трансформації та точно вимірювати необхідні параметри.

Для роботи з векторами у GeoGebra доступний графічний калькулятор, який доповнюється зручними панелями інструментів та меню «Алгебра», що забезпечує ефективну організацію процесу створення й аналізу об'єктів. Щоб успішно засвоїти матеріал, вектори можуть бути побудовані декількома

способами: через координати точок, які визначають місцезнаходження початку та кінця вектора (як показано на рис. 3.1), або ж з використанням графічної іконки «Вектор». Друга опція дозволяє автоматично задавати координати об'єкта, значно спрощуючи процес побудови (рис. 3.2).

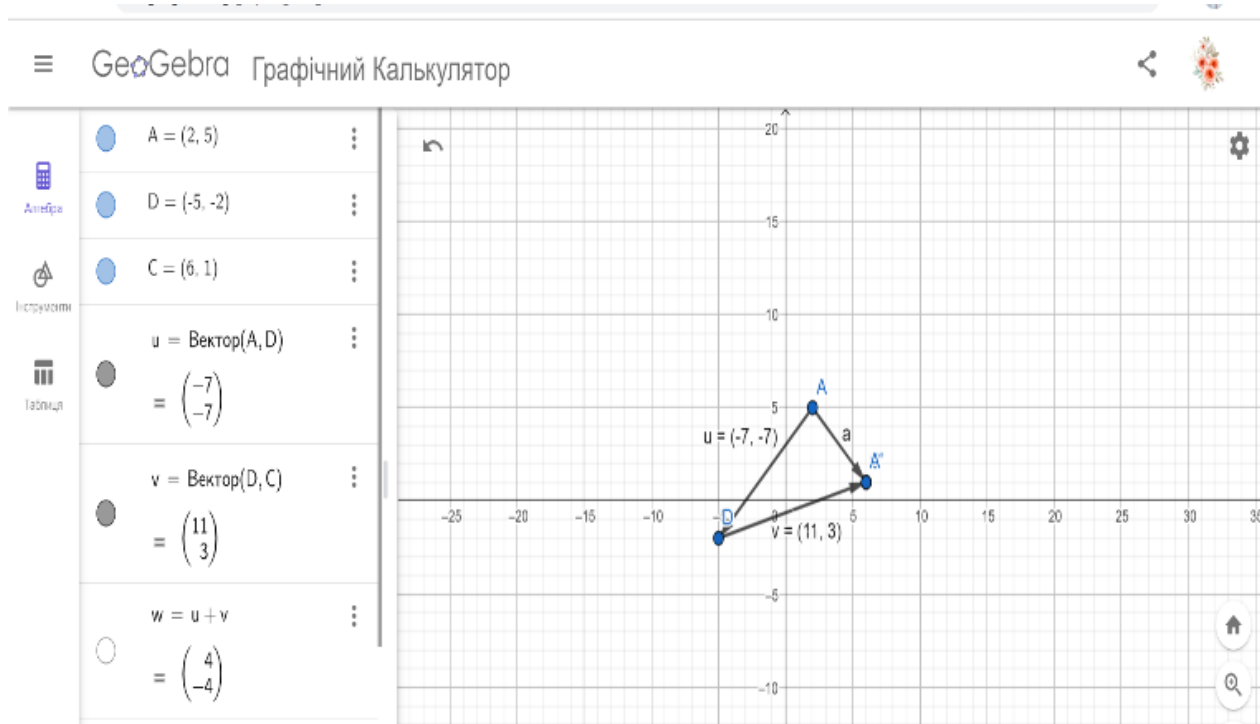


Рис. 3.1. Побудова вектора за координатами

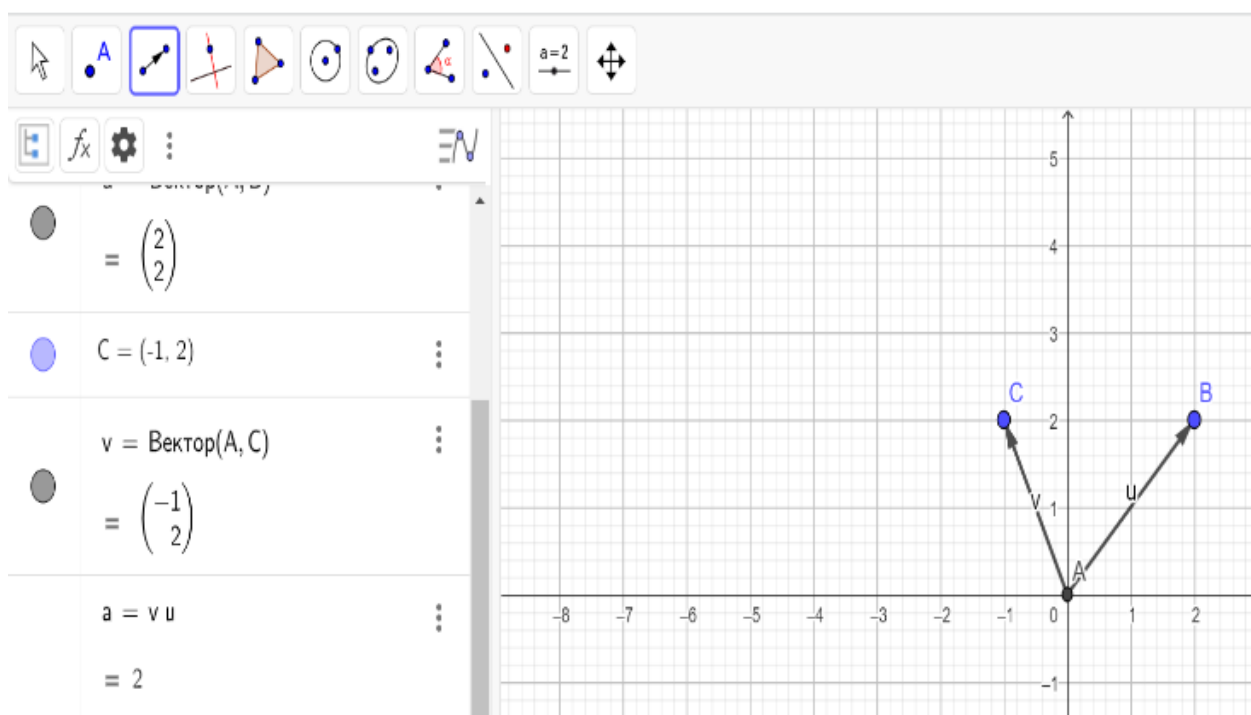


Рис. 3.2. Побудова вектора через іконку Вектор

За допомогою інструментів середовища GeoGebra можна обчислювати скалярний добуток векторів, визначати їх довжини та перевіряти на колінеарність. У процесі розв'язання задач із векторами часто виникає необхідність знаходити кут між ними, що також зручно і наочно реалізується у програмі GeoGebra (рис. 3.3).

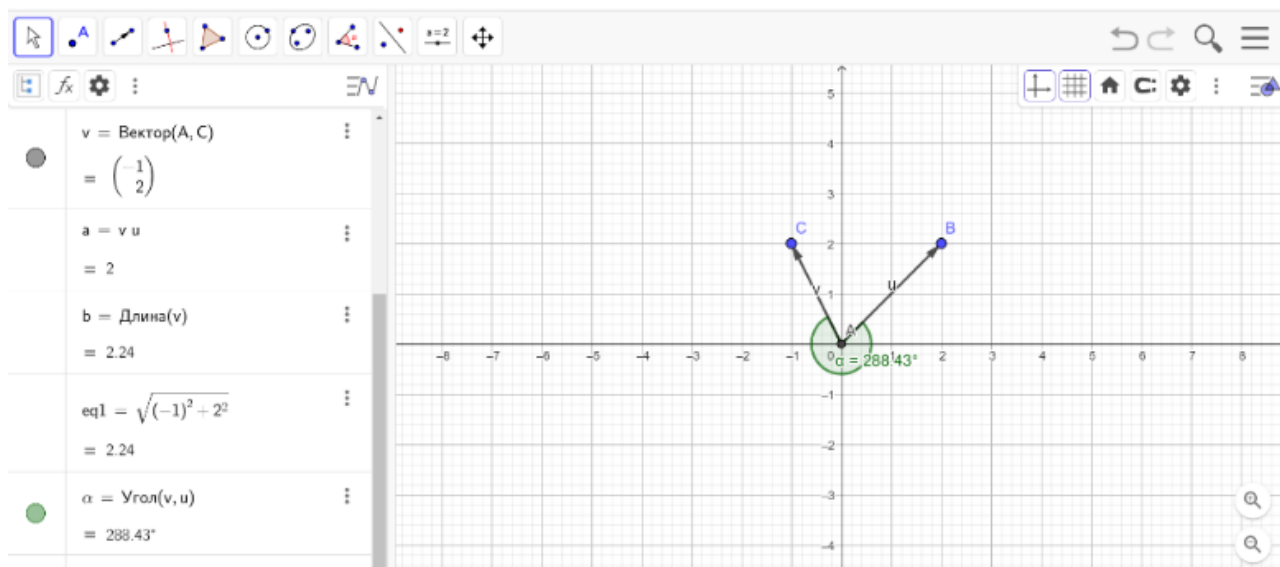


Рис. 3.3. Приклад в програмі GeoGebra

У процесі вивчення стереометрії, зокрема теми «Вектори у просторі», учні часто стикаються з труднощами уявлення тривимірної системи координат через недостатній розвиток просторового мислення. Як наслідок, засвоєння нового матеріалу переводиться на рівень механічного запам'ятовування без глибокого розуміння. Це робить теми стереометрії складними й менш привабливими для опанування. Використання інтерактивного середовища GeoGebra ефективно вирішує цю проблему, забезпечуючи не лише легший підхід до матеріалу, але й роблячи навчання більш захопливим і змістовним [8].

Завдяки 3D Калькулятору в системі GeoGebra учні з легкістю можуть виконувати геометричне моделювання, здійснювати паралельне перенесення, додавання й віднімання векторів, обчислювати кут між векторами та проводити інші дослідницькі завдання. Це створює сприятливе середовище для засвоєння матеріалу на практиці. Наприклад, усі перелічені операції з векторами у

тривимірному просторі можна реалізувати легко і наочно завдяки інструментам GeoGebra, що значно підвищує ефективність навчального процесу (рис. 3.4, 3.5).

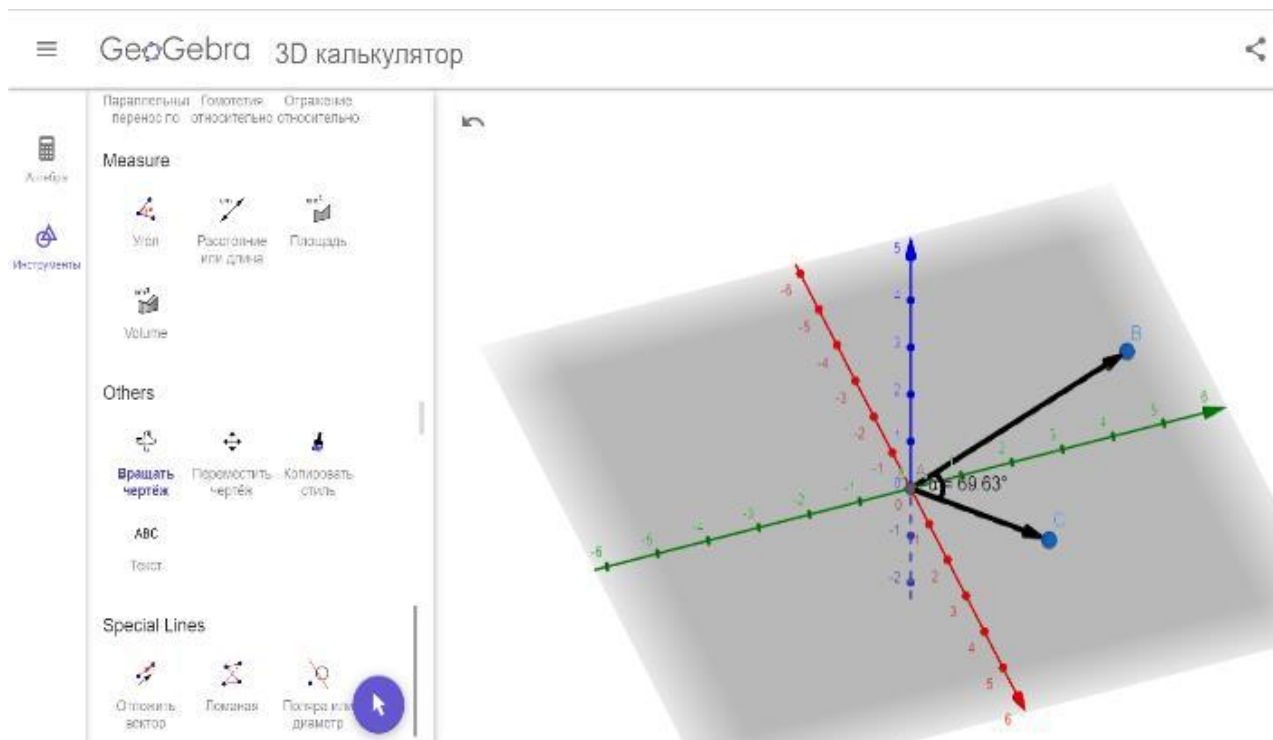


Рис. 3.4. Знаходження кута між векторами

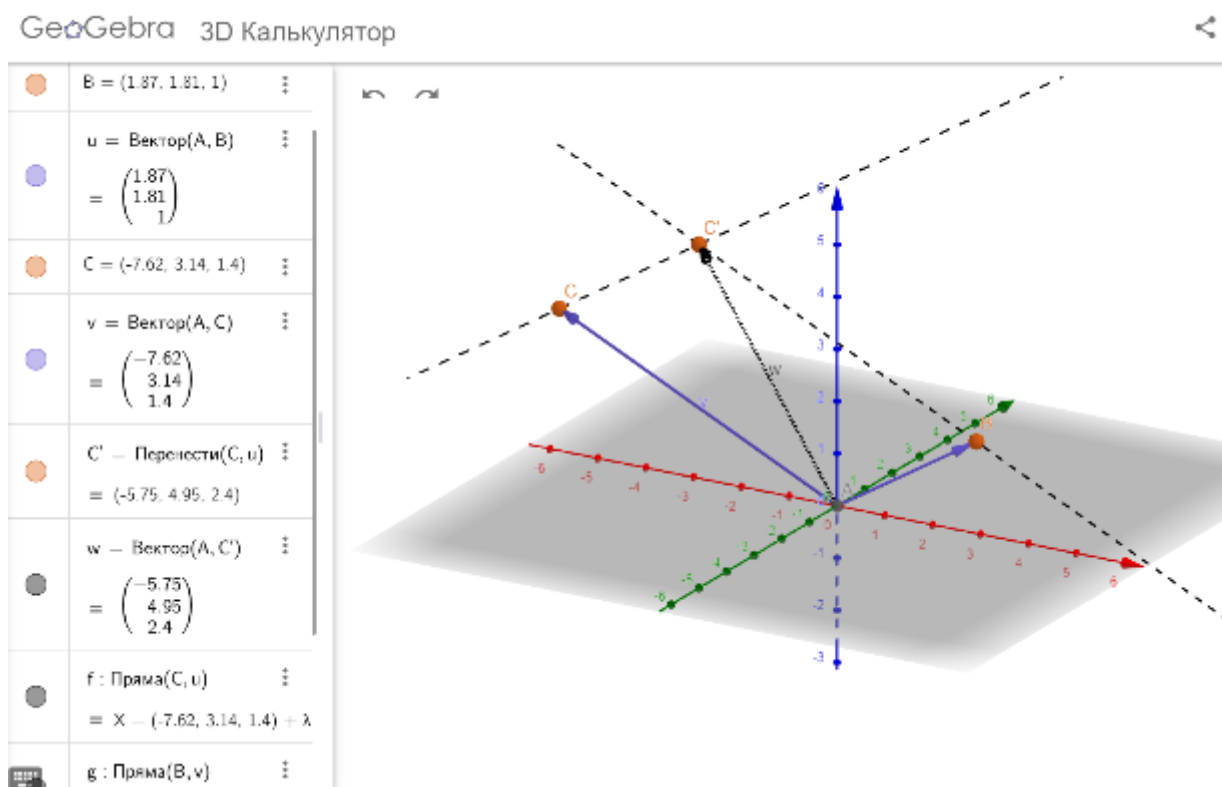


Рис. 3.5. Додавання векторів у просторі

Система GeoGebra є потужним інструментом для візуалізації та дослідження математичних об'єктів, що поєднує сучасний підхід, зручність у використанні та широкі можливості для моделювання й ілюстрації методів побудови. Вона сприяє підвищенню ефективності навчального процесу, допомагаючи вчителям активізувати пізнавальну діяльність учнів, спростити розуміння математичних тем і посилити інтерес до вивчення цього предмета.

ВИСНОВКИ

У сучасній освітній системі спостерігається значне зростання обсягу та складності навчальних програм, прискорення темпів навчання і впровадження новітніх освітніх технологій. У таких умовах надзвичайно важливим є використання форм і методів навчання, які здатні стимулювати високу пізнавальну активність учнів, сприяти поглибленню їх знань та вдосконаленню навичок. Методика викладання навчального матеріалу має особливе значення для розвитку пізнавального інтересу учнів. Доведено, що школярі проявляють активність під час уроку і краще запам'ятовують нову інформацію, якщо вчитель пропонує вирішення певної проблеми, демонструє життєвий приклад або ставить запитання, які потребують пошуку відповідей.

Сучасний урок стає не монологом, а справжнім діалогом, дискусією чи бесідою, доповненою інтерактивними технологіями. Елементи проблемного та розвивального навчання є ефективними засобами залучення учнів до активного навчального процесу, тому їх варто інтегрувати в структуру кожного заняття. Використання таблиць, схем, мультимедійних презентацій та нестандартних форматів проведення занять, таких як брейн-ринг, інтерактивні змагання чи мозковий штурм, допомагає зробити уроки цікавими та змістовними.

Перед вчителями математики стоїть важливе завдання — навчити учнів мислити аналітично, узагальнювати інформацію та формувати творче мислення й інтерес до предмета. Недостатність дидактичних, методичних чи довідкових матеріалів може негативно вплинути на якість навчального процесу, спричинивши його монотонність. Тому створення власної ефективної методики стане значущим внеском кожного педагога у розвиток освіти.

Кожен автор педагогічних та методичних розробок прагне, аби його праця була не лише формальною, але й мала високу методичну та практичну цінність, сприяючи вдосконаленню діяльності вчителів та впливу на якість навчального процесу. Адже питання «Як навчати ефективно?» залишається актуальним на всіх етапах розвитку педагогіки. Ця актуальність є позитивною тенденцією,

оскільки стимулює професійний і творчий ріст освітян, допомагає їм розвивати свої здібності, набувати нових компетентностей та вдосконалювати педагогічну майстерність.

Маємо надію, що запропонована методика стане корисним інструментом для вчителів, надаючи можливість більш змістовно та ефективно організовувати навчально-виховну роботу. Вона не лише полегшить діяльність педагога, але й позитивно впливатиме на сприйняття і засвоєння матеріалу учнями, сприяючи їхньому більш глибокому розумінню тем. Якщо школярі зможуть зрозуміти та прийняти кредо «Навчатися – це цікаво», це неодмінно принесе багато користі для освітнього процесу, підвищить їхню мотивацію і перетворить навчання на джерело задоволення.

Математика, як і раніше, залишається одним із найбільш важливих шкільних предметів, що займає провідне місце в освітній системі. Її значущість полягає не лише у фундаментальності знань, які вона дає, але й у тісних міжпредметних зв'язках із іншими дисциплінами, що забезпечує широке застосування її принципів у реальному житті. Неможливо уявити сучасний світ без впливу математики — вона проникає у всі аспекти людського існування.

На сьогоднішній день вчителями накопичений значний обсяг методичних напрацювань, які дозволяють більш результативно організовувати навчальний процес. Останнім часом спостерігається зміна акцентів у оцінюванні уроків: дедалі частіше основним критерієм якості заняття стає активність учнів на протязі всього уроку. Як зазначають багато педагогів і методистів, якщо учні були залучені до навчального процесу всі 45 хвилин, урок варто вважати вдалим. Для досягнення такого результату необхідно дотримуватися динамічного темпу проведення заняття, але при цьому важливо не перетворювати урок на гонку з постійним підганянням учнів, що може негативно впливати на якість засвоєння матеріалу. Деякі освітяни пояснюють поспішність у проведенні уроків значним перевантаженням сучасних програм і підручників.

Розробка методик є надзвичайно важливою для освітнього процесу, адже вона значною мірою полегшує роботу вчителя. Використовуючи ефективні

методичні матеріали, педагог має змогу оптимізувати свої часові ресурси, зробити навчання доступним та максимально результативним для учнів. Такий підхід дозволяє підвищити загальний рівень освіти та створити більш комфортні умови для всіх учасників навчального процесу.

Під час написання магістерської роботи було проведено ґрунтовний аналіз численних джерел, серед яких навчальні посібники, методичні рекомендації, психолого-дидактична література, а також науково-методичні публікації. У результаті дослідження вдалося створити практичний матеріал, що стане у нагоді педагогам для організації ефективного навчально-виховного процесу.

Зокрема, розроблена методика викладання теми координат і векторів є корисним інструментом для системного контролю рівня знань, умінь та навичок учнів з цієї дисципліни, забезпечуючи структурований підхід до засвоєння матеріалу. У пропонованій роботі містяться практичні завдання, які враховують принципи чотирирівневого навчання, що дозволить викладачеві більш об'єктивно оцінювати успішність учнів. Експериментальне впровадження методики дало змогу сформулювати кілька важливих висновків.

По-перше, запропонована система навчання побудована на міцній теоретичній базі, з акцентом на закріпленні матеріалу та формуванні прийомів розумової і навчальної діяльності. Це сприяє розвитку в учнів здатності до самостійного та творчого опанування нових знань.

По-друге, для досягнення цього необхідно створити умови для усвідомленого засвоєння теоретичних основ і забезпечення навичок вирішення задач різного типу за допомогою загального підходу.

Третім висновком є практична значимість отриманих результатів: вони можуть бути застосовані в рамках освітньої діяльності навчальних закладів. Особливу увагу слід приділити використанню проблемних методів навчання, які сприяють формуванню розвивальної складової освітнього процесу. Проблемний підхід дозволяє активніше залучати учнів до вирішення задач і стимулювати їх інтелектуальну діяльність. У свою чергу, впровадження особистісно орієнтованих педагогічних технологій надає вчителям можливість більш

ефективно вирішувати сучасні педагогічні завдання, роблячи процес навчання та виховання більш прогнозованим і контрольованим. Для підтримки об'єктивності оцінювання навчальних результатів, а також створення сприятливого середовища для саморозвитку учнів важливо використовувати підхід рівневого навчання. Такий формат не лише сприяє формуванню якісної освітньої основи, але й гарантує широкий простір для самореалізації кожного школяра.

Створена методика базується на ключових концептуальних засадах теорії розвивального навчання, що забезпечує можливість формулювання наступних рекомендацій для її впровадження та практичного застосування. Перше, зміст навчального матеріалу повинен бути глибоко інтегрованим із цілями розвивального навчання та спиратись на принципи «зон ближчого розвитку» учнів, про які говорив Л. С. Виготський. Ці зони формуються в процесі активної взаємодії між учнем, вчителем та однолітками, стимулюючи спільну чи індивідуальну навчально-пізнавальну діяльність. Ключовими елементами структурного наповнення мають бути задачі-проблеми, що вирішують суперечності між існуючими знаннями і новими фактами прикладного чи практичного характеру. Це сприяє розвитку науково-теоретичного мислення, формуванню таких змістово-теоретичних дій, як аналіз, абстрагування, узагальнення, планування та рефлексія, а також стимулює розвиток самосвідомості, персональної навчально-професійної активності і науково-дослідницької компетенції. Другий аспект стосується включення до змісту навчального матеріалу не лише теоретичних понять, що структурують дисципліну, але й принципів методології отримання нового знання. Для цього необхідно акцентувати увагу на загальнонаукових методах теоретичного здобуття знань та способах мислення, які стають фундаментом для виконання математичних, навчально-професійних та дослідницьких завдань, що реалізуються через постановку і розв'язання відповідних прикладних задач. Третій принцип вимагає логічної структуризації навчального матеріалу, його поділу на окремі блоки (модулі), у рамках яких визначаються основні змістові узагальнення. До таких узагальнень необхідно віднести ключові відношення,

теоретичні поняття з їх властивостями, універсальні способи розв'язання задач і методики роботи з ними. Структурування навчального матеріалу означає виділення його значущих елементів та встановлення зв'язків між ними, завдяки чому формується цілісна система знань з їх глибоким впорядкуванням та організацією. Це дозволяє учням краще уявляти цілісність дисципліни й засвоювати операційний компонент її змісту. Четвертий акцент робиться на вивченні теоретичних понять із аналізу умов їх походження та поступового розвитку. Такий підхід відкриває можливості для учнів глибше зрозуміти доцільність введення нових концепцій і сприяє побудові стійкої наукової теорії з обґрунтованим фундаментом. Особливу увагу слід приділити задачам різного типологічного рівня, адже саме вони стають центральним компонентом формування навчально-професійної діяльності студентів. Задачний підхід дозволяє моделювати практичну сторону навчання і водночас сприяє підвищенню індивідуальної зацікавленості у предметі. Остання рекомендація підкреслює важливість фундаментальності змісту навчання. Комплекс теоретичних знань і оволодіння способами пізнавальних дій має забезпечити учням здатність до самостійного продовження навчальної траєкторії, закладаючи базу для професійної самореалізації та саморозвитку. Це є запорукою формування усвідомленого підходу до майбутньої діяльності і забезпечення можливостей для проактивного управління власною освітою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Стереометрія в опорних схемах. - Київ: Факт, 2000. - 68 с.
2. Барболіна А.С. ШЛЯХИ МОТИВАЦІЇ ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ РІЗНОЇ ПРОФІЛЬНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ - м. Чернігів, 16-17 вересня 2022 р. - С.20-24.
3. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. - 288 с.
4. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184-189.
5. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти /М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. - К.: УОВЦ «Оріон», 2018. - 288 с.
6. Василенко А. В. Психолого-педагогічні умови розвитку просторового мислення учнів /А. В. Василенко //Наука і школа. - 2013. - № 12 - С. 69-72.
7. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. - 272 с.
8. Гулівата І. О. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ ПОБУДОВИ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР З ВИКОРИСТАННЯМ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ. - Інформаційні технології і засоби навчання, 2013, Том 34, №2
9. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О.С. Істер. - Київ: Генеза, 2018. - 384 с.
10. Істер О.С. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О.С. Істер, О.В. Єргіна. - Київ: Генеза, 2018. - 368 с.

11. Коменський Я. А. Велика дидактика. Закони добре організованої школи /Я. А. Коменський //Історія зарубіжної педагогіки: хрестоматія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. /Є. І. Коваленко, Н. І. Белкіна; М-во освіти і науки України, Ніжин. держ. ун-т ім. М. Гоголя. – Київ: Центр учбової літератури, 2006. - С.155-185.
12. Королюк О.М., Прус А.В. Методика навчання математики в старшій школі. Модуль 1: Стереометрія: навчально-методичний посібник. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. - 61 с.
13. Красницький М. П. Просторова уява та уявлення особистості й асоціативне мислення. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 59-61.
14. Мала Л. О. Психолого-педагогічні особливості організації мислення учнів у процесі розв’язування стереометричних задач /Л. О. Мала. //Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». - 2016. - № 17. - С.80 - 87.
15. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: Гімназія, 2018. - 256 с.
16. Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 240 с.
17. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: <http://surl.li/xxthjt>
18. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Рівень стандарту). URL: <http://surl.li/xxthjt>
19. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: <http://surl.li/xxthjt>
20. Нелін Є.П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти /Є.П.Нелін. - Харків: Вид-во «Ранок», 2018. - 240 с.

21. ПРУС А. В. ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ (дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук). – Київ, 2007.
22. Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв’язування задач стереометрії. Інформаційні технології і засоби навчання. № 6. 2014. - С. 124-133.
23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. - Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.
24. Скасків Л. В., Мартиненко В. В. МОЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ GRAN-2D ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ. 6 th International scientific and practical conference “Modern directions of scientific research development” (November 24-26, 2021) Chicago, USA. 2021. – С.602-608.
25. Стереометрія у старшій школі: посібник для вчителя /Я. С. Бродський, В. Ю. Гречук, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2005. - 404 с.
26. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: монографія /Н.А. Тарасенкова. - Черкаси: Відлуння-плюс, 2002. - 400 с.
27. Теличко І. І. Методика використання наочності при вивченні взаємного розміщення прямих і площин в курсі стереометрії в загальноосвітніх навчальних закладах різних типів та у вищих навчальних закладах I-II рівнів акредитації: навчальний посібник - Кам’янець-Подільський. - 2011. - 175 с.
28. Філон Л.Г., Швець В.О. Елементи стереометрії в курсі математики основної школи. - Донецьк: Норд-Прес, 2006. - 180 с.
29. Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. Математика в школі 2009. № 4. с. 17-24.
30. Швець В. О. Теорія та практика спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. В. О. Швець, А. В. Прус. Житомир: Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. - 156 с.