

*В.В. ЛАГОВСЬКИЙ
Є.А. СТОРОЖУК
М.М. СЕМКО*

МАТЕМАТИЧНЕ
ПРОГРАМУВАННЯ
У ВПРАВАХ І ЗАДАЧАХ

ДЕРЖАВНА ПОДАТКОВА АДМІНІСТРАЦІЯ УКРАЇНИ

**АКАДЕМІЯ ДЕРЖАВНОЇ ПОДАТКОВОЇ
СЛУЖБИ УКРАЇНИ**

**КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ**

**В.В. ЛАГОВСЬКИЙ
Є.А. СТОРОЖУК
М.М. СЕМКО**

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ У ВПРАВАХ І ЗАДАЧАХ

КИЇВ - 2001

УДК 519.2(076)

**Математичне програмування у вправах і задачах /Лаговський
В.В., Сторожук Є.А., Семко М.М. – Київ: Ін-т математики НАН
України, 2001. – 96 с.**

В посібнику подано основні відомості з теоретичного курсу, наведено
основні методи розв'язування задач та завдання для самостійної роботи.

Для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм
навчання.

Рецензенти:

заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних
наук, професор Л.А.Курдаченко

(Дніпропетровський національний університет),

доктор фізико-математичних наук, професор М.Ф.Кузенний

(Інститут математики НАН України).

Затверджено до друку вченою радою
Академії державної податкової служби України.

ISBN 966-02-2188-6

© **В.В. Лаговський,
Є.А. Сторожук,
М.М. Семко**

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	2
РОЗДІЛ 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	3
1.1 Предмет і метод математичного програмування	3
1.2. Вектори. Дії над векторами. Поняття евклідового простору	4
1.3 Розв'язування систем m - лінійних алгебраїчних рівнянь з n - невідомими, методом Жордано - Гаусса. Загальний базисний та опорний розв'язки системи лінійних рівнянь	10
РОЗДІЛ 2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	15
2.1. Загальна задача лінійного програмування. Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування	15
2.2 Форми запису задач лінійного програмування. Їх еквівалентність і способи перетворення. Складання математичної моделі задач економічного змісту	27
2.3 Опорні розв'язки. Симплексні таблиці	36
2.4 Симплексний метод розв'язку задач лінійного програмування	43
2.5 Штучний базис. M - задача	49
2.6 Двоїсті задачі лінійного програмування. Застосування оцінок в післяоптимізаційному аналізі	55
РОЗДІЛ 3	63
3.1 Транспортна задача	63
РОЗДІЛ 4	76
4.1 Загальна задача нелінійного програмування. Графічний метод розв'язку задач НЛП	76
4.2 Задачі дробово - лінійного програмування	84
РОЗДІЛ 5	91
5.1 Цілочисельне лінійне програмування	91
ЛІТЕРАТУРА	96

ПЕРЕДМОВА

В реальних економічних умовах завжди існує множина можливих варіантів розв'язку будь-яких виробничих задач, починаючи з вибору і закінчуючи способом перевезення готової продукції. На практиці кожен раз необхідно розглядати велику кількість різних варіантів розв'язку однієї і тієї ж задачі, відкидаючи один і приймаючи інший. Природно, що різні варіанти вимагають неоднакових витрат і дають різні економічні ефекти. В зв'язку із цим в даних умовах виникає задача на знаходження найбільш ефективного варіанта дій.

Найбільш ефективний варіант дій називають оптимальним, пошуком якого займається спеціальна дисципліна — оптимальне планування.

Пошук оптимального плану це, як правило, складна задача, тому її можливо розв'язати без широкого застосування економіко-математичних методів. Сучасні математичні методи дозволяють відшукати оптимальний план, без прямого порівняння усіх можливих варіантів.

До таких економіко-математичних методів відносяться і методи математичного програмування.

Отже, стає очевидним той факт, що підготовка висококваліфікованих економістів, робітників менеджменту і аудиту, фінансистів, які здатні забезпечити усі етапи планування виробництва, та руху продукції від виробника до споживача, неможлива без широкого використання ними класичних і сучасних математичних методів. Виникає необхідність покращання рівня математичної підготовки студентів економічних спеціальностей.

Мета даного посібника — означити з основними методами розв'язку задач математичного програмування тих розділів, які складають основу даного курсу. Подано короткі теоретичні відомості до цих розділів, які необхідні для розв'язку наведених задач. Тому даний посібник не можна розглядати як системний виклад всього теоретичного курсу.

РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Предмет і метод математичного програмування.

Зміст математичного програмування складають теорія і методи розв'язання задач на знаходження екстремумів функцій на множинах, визначених системою обмежень, тобто пошук умовного екстремуму функцій багатьох змінних.

Задачі математичного програмування знаходять застосування в різних областях діяльності людини, де необхідний вибір одного із можливих варіантів дій (програми дій). Наприклад, при розв'язанні проблеми управління і планування виробничих процесів.

Математичне програмування один із розділів науки про дослідження операцій, що знаходиться на межі наук і оперує як кількісними так і якісними факторами.

Операцією прийнято називати будь-яку систему дій, об'єднану єдиним замислом і направлену на досягнення єдиної мети. Операція завжди є керованим заходом.

Усякий визначений вибір, залежних від нас параметрів називається *розв'язком*.

Розв'язки, що забезпечують найбільш ефективне досягнення поставленої мети, називаються *оптимальними*.

Дослідження операцій — це застосування наукового методу комплексними науковими колективами, для розв'язку задач пов'язаних з управлінням організованими системами, з метою отримання розв'язків, які найкращим чином відповідають меті всієї організації.

Під *прийняттям рішень* в дослідженні операцій розуміють складний процес в якому можна виділити чотири основні етапи:

1. побудова якісної моделі даної проблеми, тобто виділення факторів, що суттєво і несуттєво впливають на дане явище. Встановлення закономірностей, яким вони підлягають, а також встановлення критеріїв за якими оцінюють ефективність роботи системи;
2. побудова математичної моделі розглядуваного явища, тобто запис в математичних термінах розглядуваного явища. Цей етап, також, включає побудову цільової функції, тобто функції змінних, більше або менше значення якої вказує на покращання протікання даного явища;

3. дослідження впливу змінних на значення цільової функції. На цьому етапі знаходять такі значення змінних, які дають максимальне чи мінімальне значення цільової функції, тобто пошук оптимального розв'язку.
4. співставлення знайдених результатів із досліджуваним явищем, тобто експертна перевірка знайдених результатів.

В математичному програмуванні виділяють два напрямки. До першого відносять усі детерміновані задачі, тобто задачі, в яких вся вихідна інформація є повністю визначена. До другої частини, стохастичного програмування, відносять задачі, в яких вихідна інформація частково, або повністю є невизначеною, або деякі параметри є випадковими величинами.

В математичному програмуванні виділяють такі основні розділи:

1. лінійне програмування;
2. нелінійне програмування;
3. цілочисельне програмування;
4. динамічне програмування (розглядаються методи, основані на використанні ідей рекурентного підходу);
5. стохастичне програмування.

Специфікою задач математичного програмування є те, що до них, як правило, не застосовуються класичні методи математики по знаходженню екстремумів функцій.

1.2. Вектори. Дії над векторами. Поняття евклідового простору.

Вектором називається впорядкований набір чисел виду

$$\underline{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Два вектори $\underline{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ і $\underline{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ називаються рівними, якщо рівні їхні відповідні координати, тобто $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Очевидно, говорити про рівність можна лише тих векторів, що мають однакову кількість координат.

Сумою двох векторів називається вектор, координати якого рівні сумі відповідних координат даних двох векторів:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$$

Добутком вектора $\underline{x}$ на число α називається вектор, координати якого рівні добутку відповідних координат вектора $\underline{x}$ на число α

$$\alpha \underline{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n)$$

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Евклідовим векторним простором називається сукупність векторів для яких введено операції додавання, множення вектора на число, скалярного добутку двох векторів, і для цих операцій виконуються аксіоми:

1. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;
2. $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$;
3. існує нульовий елемент $\overline{0}$, для якого виконується умова: $\overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$, $\overline{x}$ - будь-який вектор даної сукупності;
4. для будь-якого вектора $\overline{x}$ існує протилежний йому вектор $-\overline{x}$ такий, що:
 $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$;
5. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$;
6. $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$;
7. $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$;
8. $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$;
9. $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z}$;
10. $(\alpha\overline{x}) \cdot \overline{y} = \alpha(\overline{x} \cdot \overline{y})$;
11. $\overline{x} \cdot \overline{x} > 0$, при $\overline{x} \neq \overline{0}$.

Норма (довжина) вектора $\overline{x}$ в евклідовому просторі визначається за формулою $|\overline{x}| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Система векторів $\overline{a}_1; \overline{a}_2; \dots; \overline{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існує такий набір чисел $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$, де, принаймні, одне із них не дорівнює нулю, що виконується рівність:

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \dots + \alpha_n \overline{a}_n = \overline{0}$$

Якщо дана рівність виконується лише при умові, що всі α рівні 0, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то дана система векторів є лінійно незалежною.

Для того, щоб перевірити чи є дана система лінійно незалежною необхідно скласти матрицю, рядками якої є координати відповідних векторів, після чого - знайти ранг цієї матриці.

Якщо ранг матриці буде менший кількості векторів, то система є лінійно залежною.

Теорема 1.

Якщо система векторів містить нульовий вектор, то така система є лінійно залежною.

Базисом векторного простору називають систему векторів $\bar{a}_1; \bar{a}_2; \dots; \bar{a}_n$, що має такі властивості:

1. ця система є лінійно незалежною;
2. будь-який вектор з даного векторного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів даної системи, тобто, для будь-якого $\bar{x} \in R^n$ існує такий набір чисел $x_1; x_2; \dots; x_n$, що виконується умова:

$$\bar{x} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n$$

($x_1, x_2, \dots, x_n$ - координати вектора $\bar{x}$ в даному базисі).

Теорема 2.

В даному базисі один і той же вектор простору має єдині координати.

Приклади розв'язування задач:

Задача 2.1.

Дано систему векторів:

$$\bar{a}_1 = (1; 2; 0; 4);$$

$$\bar{a}_2 = (2; 3; 4; 5);$$

$$\bar{a}_3 = (1; 3; 0; 1);$$

$$\bar{a}_4 = (4; 8; 4; 10).$$

Перевірити, чи є дана система лінійно залежною.

Розв'язок:

Складемо матрицю, елементами якої є координати даних векторів, і знаходимо її ранг. Щоб знайти ранг матриці необхідно за допомогою елементарних перетворень матриці зробити під головною діагоналлю нулі.

До елементарних перетворень відносять:

- перестановка рядків;
- відкидання нуля - рядка (стовпчика);
- транспонування матриці;
- множення або ділення рядка на одне і те ж число;
- додавання одного рядка до іншого, попередньо помноживши його на певне число.

Візьмемо за основу перший рядок. Помножимо усі його елементи на -2 і потім додамо до відповідних елементів другого рядка. Таким чином, на першому місці другого рядка утвориться число 0. Тепер перший рядок (в

попередньому вигляді) помножимо на число -1 і додамо до третього рядка, після чого помножимо на -4 і додамо до четвертого. Отже у першому стовпчику, під першим елементом першого рядка, утворилися нулі. Тепер необхідно утворити нулі під другим елементом другого рядка. Для цього візьмемо за основу вже другий рядок, і додавши його до третього рядка, отримаємо матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 & -4 \\ \swarrow & & \\ & \searrow & \\ & & \searrow \end{matrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \swarrow \\ \searrow \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Із двох однакових рядків один можна викреслити (оскільки, при подальших перетвореннях, він перетвориться в нуль-рядок). Залишилося три рядки, отже, ранг матриці дорівнює трьом. Кількість векторів в системі — чотири. Якщо ранг менший кількості векторів, то система лінійно залежна.

Задача 2.2.

Дано систему векторів.

$$\vec{a}_1 = (2; 1; 0);$$

$$\vec{a}_2 = (3; 2; 1);$$

$$\vec{a}_3 = (1; 2; 4).$$

Перевірити чи утворює дана система базис, і якщо так, то знайти координати вектора $\vec{x} = (4; 1; -3)$ в даному базисі.

Розв'язок:

Для того, щоб дана система утворювала базис, вона повинна, принаймні бути лінійно незалежною і кількість лінійно-незалежних векторів цієї системи, повинна бути рівна кількості їх координат. Складемо матрицю координат векторів і знаходимо її ранг. Для зручності поміняємо місцями перший і третій рядки.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-3) \\ \times 4 \end{matrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 33 \\ 0 & -12 & -32 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 33 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

отже, ранг дорівнює трьом, кількість векторів - 3, таким чином, система лінійно незалежна. Значить утворює базис.

Знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі, це означає знайти такі числа x_1, x_2, x_3 , для яких виконується рівність:

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3$$

тобто вектор $\vec{x}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

В такому разі координати вектора $\vec{x}$ є лінійною комбінацією відповідних координат векторів базису.

$$\begin{cases} 4 = x_1 \times 2 + x_2 \times 3 + x_3 \times 1 ; \\ 1 = x_1 \times 1 + x_2 \times 2 + x_3 \times 2 ; & x_1 = ? \quad x_2 = ? \quad x_3 = ? \\ -3 = x_1 \times 0 + x_2 \times 1 + x_3 \times 4 . \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом Гаусса. Складаємо розширену матрицю коефіцієнтів при невідомих і виконаємо відповідні перетворення:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Остання матриця дає можливість записати нову систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 ; \\ -1x_2 - 3x_3 = 2 ; \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

розв'яжемо її

$$-1x_2 - 3 \times (-1) = 2;$$

$$-x_2 = -1;$$

$$x_2 = 1.$$

$$x_1 + 2 \times 1 + 2 \times (-1) = 1;$$

$$x_1 = 1.$$

Відповідь: $\bar{x} = (1; 1; -1)$

Задача 2.3

Дано систему векторів:

$$\bar{a}_1 = (1; 2; 3);$$

$$\bar{a}_2 = (2; 0; 4);$$

$$\bar{a}_3 = (3; 5; 1).$$

Перевірити, чи є вона лінійно залежною і якщо ні, то представити вектор $\bar{x} = (7; 9; 11)$ у вигляді лінійної комбінації цих векторів.

Розв'язок:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A = 3$$

Оскільки, ранг рівний кількості векторів, то система лінійно незалежна.

Представити вектор $\bar{x}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, - це означає, знайти такі числа x_1, x_2, x_3 , щоб виконувалась умова:

$$\bar{x} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3$$

$$\begin{cases} 7 = x_1 \times 1 + x_2 \times 2 + x_3 \times 3; \\ 9 = x_1 \times 2 + x_2 \times 0 + x_3 \times 5; \\ 11 = x_1 \times 3 + x_2 \times 4 + x_3 \times 1. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; & x_3 = 1; \\ x_2 + 4x_3 = 5; & x_2 = 1; \\ 15x_3 = 15. & x_1 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $\bar{x} = 2\bar{a}_1 + 1\bar{a}_2 + 1\bar{a}_3$

1.3 Розв'язування систем m - лінійних алгебраїчних рівнянь з n - невідомими, методом Жордано - Гаусса. Загальний базисний та опорний розв'язки системи лінійних рівнянь.

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Розв'язком системи називають сукупність дійсних чисел (вектор) $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, які після підстановки їх у дану систему, перетворюють рівняння системи в тотожності.

Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається несутімсною, в протилежному випадку - сумісною. Кажуть, що сумісна система визначена, якщо вона має тільки один розв'язок, і невизначена, якщо число розв'язків більше одиниці.

Теорема Кронекера - Капеллі: система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) сумісна тоді, і тільки тоді, коли ранг матриці коефіцієнтів при невідомих системи A рівний рангу її розширеної матриці $\bar{A}$, (тобто якщо $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$) де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Одним із найбільш ефективних методів дослідження і розв'язування СЛАР є метод Жордано-Гаусса.

Коротко суть цього методу. В матриці A даної системи виберемо елемент $a_{rs} \neq 0$. Назвемо цей елемент ведучим, а r -й рядок і s -й стовпчик матриці A — відповідно ведучим рядком і стовпчиком. Далі будемо перетворювати розширену матрицю $\bar{A}$ слідуєчим чином. Усі елементи ведучого рядка поділимо на ведучий елемент $a_{rs} \neq 0$ і результат запишемо в r -й рядок нової матриці. Усі елементи ведучого стовпчика (крім ведучого елемента, який стає рівним 1) стають нулями у новій матриці. Усі інші елементи в новій матриці обраховують за схемою:

$$\begin{array}{c} \Delta - O \\ \left[\begin{array}{c}] \\ \end{array} \right] \Delta' \end{array} \quad O' = O - \frac{\Delta \cdot \Delta'}{\left[\begin{array}{c}] \\ \end{array} \right]} \quad (*)$$

де $\left[\begin{array}{c}] \\ \end{array} \right]$ - ведучий елемент, Δ - елемент ведучого стовпчика, Δ' - елемент ведучого рядка, O' - елемент в новій матриці, O - елемент в старій матриці.

Нова матриця може бути також перетворена. Цей процес продовжують до тих пір, поки кількість утворених стовпчиків з нулями не стане рівна кількості залишених рядків (нуль-рядки відкидаються). Після цього складають нову систему, що еквівалентна старій, а отже має тіж самі розв'язки.

Приклади розв'язування задач.

Задача 3.1

Дано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язати дану систему методом Жордано-Гаусса.

Розв'язок:

2	3	1	9
3	-2	-1	-2
[1]	1	1	4

Виберемо ведучий елемент (краще вибрати елемент, що рівний 1). Цей елемент стоїть в третьому рядку і першому стовпчику, тому в новій таблиці в першому стовпчику усі елементи (крім ведучого) будуть рівні 0. Третій рядок нової таблиці буде складатись з елементів третього рядка старої таблиці, поділених на ведучий елемент, тобто на 1. Усі інші елементи обраховуються за схемою (*)

$$\begin{aligned} a_{12} &= 3 - \frac{1 \cdot 2}{1} = 1; & a_{13} &= 1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -1; & b_1 &= 9 - \frac{2 \cdot 4}{1} = 1; \\ a_{22} &= -2 - \frac{3 \cdot 1}{1} = -5; & a_{23} &= -1 - \frac{3 \cdot 1}{1} = -4; & b_2 &= -2 - \frac{3 \cdot 4}{1} = -14 \end{aligned}$$

таким чином отримали нову таблицю:

0	[1]	-1	1
0	-5	-4	-14
1	1	1	4

Виберемо новий ведучий елемент (в третьому рядку вибирати, уже, ведучий елемент не можна) і виконаємо аналогічні перетворення:

0	1	-1	1
0	0	[-9]	-9
1	0	2	3

Останні перетворення дають таблицю:

0	1	0	2
0	0	1	1
1	0	0	1

Складаємо систему по останній таблиці:

$$\begin{cases} x_2 = 2; \\ x_3 = 1; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x = (1; 2; 1)$

Задача 3.2

Дано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 11; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_5 = 11. \end{cases}$$

Розв'язати дану систему методом Жордана - Гаусса.

Розв'язок:

2	3	1	-1	1	11
[1]	1	-1	1	1	0
3	4	0	0	2	11
0	[1]	3	-3	-1	11
1	1	-1	1	1	0
0	1	3	-3	-1	11

0	1	3	-3	-1	11
1	0	-4	4	2	-11

При подальших перетвореннях один із двох однакових рядків перетворюється в нульовий. Тому один з них можна викреслити, тоді залишиться всього 2 рядки.

Перетворення виконується до тих пір, поки не утвориться стільки стовпчиків з 1 та 0, скільки є рядків у таблиці.

Після цього складаємо по цій таблиці нову систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 11; \\ x_1 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -11 \end{cases}$$

Ця система містить дві базисні змінні: x_1, x_2 .

Базисними називаються змінні, що відповідають умовам:

1. перед ними стоїть коефіцієнт +1;
 2. ці змінні стоять лише в одному рівнянні, причому різні змінні стоять в різних рівняннях;
- всі інші змінні системи називаються вільними.

Визначаємо базисні змінні:

$$\begin{cases} x_2 = 11 - 3x_3 + 3x_4 + x_5; \\ x_1 = -11 + 4x_3 - 4x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

Загальний розв'язок даної системи матиме вигляд

$$\bar{x} = (-11 + 4x_3 - 4x_4 - 2x_5; 11 - 3x_3 + 3x_4 + x_5; x_3; x_4; x_5)$$

Якщо всім вільним змінним надати значення 0 і обчислити базисні, то ми отримаємо частинний розв'язок який називається базисним.

$$\text{Отже при } x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 0 \text{ маємо } \bar{x}_b = (-11; 11; 0; 0; 0)$$

Опорними розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають невід'ємні базисні розв'язки.

Так як у нашому випадку $x_1 = -11$, то отриманий базисний розв'язок не є опорним.

Задача 3.3.

Дано:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$$

Розв'язати дану систему методом Жордано-Гаусса. Знайти загальний розв'язок даної системи та опорний.

Розв'язок:

2	-3	1	1	-1
[1]	-1	3	6	0
3	-4	4	7	-1
0	-1	-5	-11	-1
1	-1	3	6	0

Оскільки утворилося два однакові рядки один із них можна викреслити, подальші перетворення приводять до таблиці:

0	1	5	11	1
1	0	8	17	1

Запишемо систему:

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 1; \\ x_1 + 8x_3 + 17x_4 = 1 \end{cases}$$

Базисними змінними є x_1 та x_2 . Визначимо їх:

$$\begin{cases} x_2 = -5x_3 - 11x_4 + 1; \\ x_1 = -8x_3 - 17x_4 + 1 \end{cases}$$

Отже загальний розв'язок має вигляд:

$$\bar{x} = (1 - 8x_3 - 17x_4; 1 - 5x_3 - 11x_4; x_3; x_4)$$

Щоб знайти базисний розв'язок, підставимо замість вільних змінних 0.

$$\bar{x} = (1; 1; 0; 0)$$

Оскільки, базисний розв'язок містить невід'ємні числа, то він являється і опорним розв'язком.

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування — це розділ математичного програмування, в якому розглядаються задачі цільова функція яких, а також обмеження є лінійними.

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

- Якщо задача лінійного програмування містить не більше двох змінних, то її можна розв'язати графічним методом.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1.1. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ 3x_1 + 9x_2 \leq 18; \\ x_1 - x_2 \leq 1; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. & \quad \begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(B)} \end{array} \end{aligned}$$

Розв'язок:

Нерівності (А) - називаються основними обмеженнями.
Нерівності (В) - неосновні обмеження.
Неосновні обмеження, як правило, вказують на невід'ємність змінних.

Щоб розв'язати дану задачу, необхідно нерівності в системі записати у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 12; \\ 3x_1 + 9x_2 = 18; \\ x_1 - x_2 = 1; \\ x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння в системі координат $x_1 O x_2$ задають прямі лінії. Щоб їх побудувати запишемо ці рівняння у вигляді рівнянь прямої у відрізках на осях, а саме:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

$$l_1: \frac{4x_1}{12} + \frac{2x_2}{12} = 1$$

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1;$$

$$l_2: \frac{3x_1}{18} + \frac{9x_2}{18} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x_2}{2} = 1;$$

$$l_3: \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-1} = 1$$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-1} = 1.$$

Побудуємо ці прямі в системі координат $X_1 O X_2$ (рис. 1):

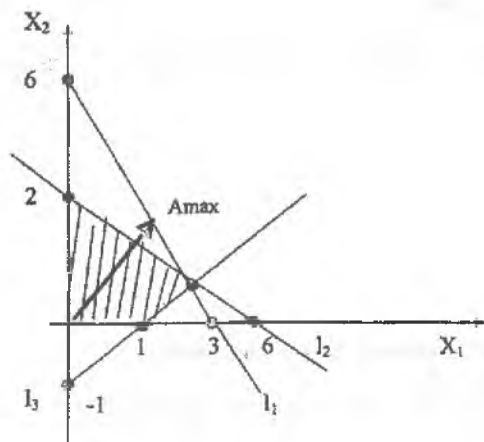


Рис. 1

Пряма $x_1=0$ - це є вісь Ox_2 , а пряма $x_2=0$ - це є вісь Ox_1 . Заштрикована область - є областю допустимих розв'язків, тобто це така частина площини, точки якої мають такі координати, які задовольняють усі нерівності системи (тобто є розв'язками системи лінійних обмежень). Серед цих розв'язків слід шукати *оптимальний розв'язок*.

Взагалі областю допустимих розв'язків може бути не лише опуклий многокутник, (Рис. 2а і 2б) а також і:

А) опукла, многокутна необмежена область (Рис. 2в);

Б) єдина точка (Рис. 2г);

В) порожня множина (Рис. 2д).

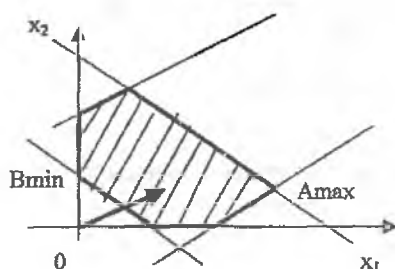


Рис. 2 а)

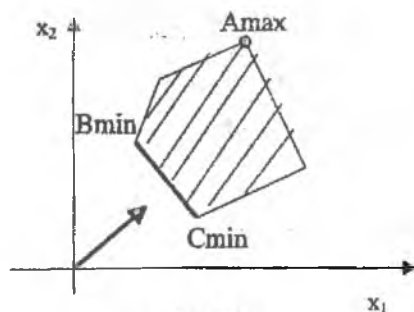


Рис. 2б).

Відрізок ВС перпендикулярний градієнту. Розв'язком задачі на міні буде множина точок відрізка ВС.

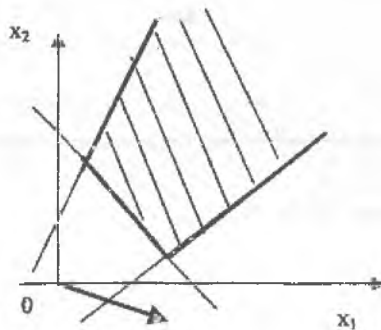


Рис. 2в)

Цільова функція на області допустимих розв'язків необмежена зверху. Тому розв'язків на $\max$ задача не має.

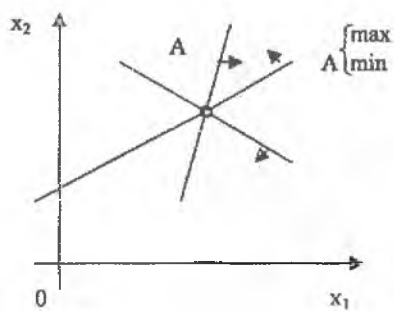


Рис. 2 г)

Область допустимих розв'язків – єдина точка A

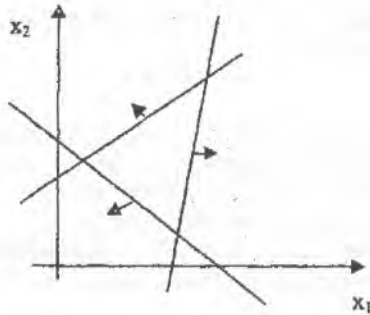


Рис. 2 д)

Області допустимих розв'язків не існує.

Теорема 1.

Область допустимих розв'язків задач лінійного програмування є опуклою множиною.

Теорема 2.

Оптимальні розв'язки задач лінійного програмування містяться на межі області допустимих розв'язків.

Цільова функція $z = 2x_1 + 3x_2$ представляє собою на площині x_1Ox_2 сім'ю паралельних прямих (ліній рівня), кожна із яких відповідає певному значенню Z .

Знайти оптимальні розв'язки допоможе градієнт цільової функції.

Градієнтом функції називається вектор із координатами:

$$\text{grad}Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)$$

Гradient показує напрям найшвидшого зростання значення функції. Він завжди перпендикулярний до ліній рівня.

Координати градієнта лінійної функції рівні коефіцієнтам, що стоять при x_1, x_2 в цільовій функції.

$$\text{grad}Z=(2;3)$$

Щоб знайти розв'язок, необхідно поставити лінійку перпендикулярно до вектора і переміщати її в напрямку вектора, до тих пір, поки лінійка не дійде до крайньої точки області. Ця точка має такі координати, які і є розв'язками задачі (якщо задача на пошук максимуму).

В нашому випадку це точка А. Вона є точкою перетину прямих l_1 та l_2 . То щоб знайти її координати необхідно розв'язати систему рівнянь, що задають ці дві прямі:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2=12; \\ 3x_1+9x_2=18. \end{cases}$$

Визначимо x_2 з першого рівняння:

$$2x_2=12-4x_1;$$

$$x_2=6-2x_1;$$

Підставляємо значення x_2 в друге рівняння:

$$3x_1+9(6-2x_1)=18;$$

$$3x_1-18x_1=18-54;$$

$$-15x_1=-36;$$

$$x_1 = \frac{-36}{-15} = \frac{12}{5} = 2,4;$$

$$x_2 = 6-2 \times 2,4 = 6-4,8 = 1,2.$$

Отже, розв'язком задачі є точка А(2,4;1,2)

Після цього знаходимо значення цільової функції в цій точці:

$$Z_{\max} = 2 \times 2,4 + 3 \times 1,2 = 4,8 + 3,6 = 8,4$$

Відповідь: $Z_{\max} = 8,4$; $x_{\max} = (2,4;1,2)$

Задача 1.2.

Розв'язати графічним методом:

$$\min Z = -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1+3x_2 \leq 18; \\ -x_1-x_2 \leq 2; \\ x_1+4x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 18 ; \\ -x_1 - x_2 = 2 ; \\ x_1 + 4x_2 = 8 ; \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} l_1: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{6} &= 1 \\ l_2: \frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{-2} &= 1 \\ l_3: \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Побудуємо градієнт функції $\text{grad}Z = (-1; -2)$ та прямі $l_1 - l_3$.

Розв'язком є точка А, знайдемо її координати як перетин прямих l_1 і l_3 .

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 18 ; \\ x_1 + 4x_2 = 8 . \end{cases}$$

$$x_2 = 8 - \frac{x_1}{4}$$

$$9x_1 + 3\left(8 - \frac{x_1}{4}\right) = 18$$

$$9x_1 + 6 - \frac{3x_1}{4} = 18$$

$$x_1 = \frac{16}{11}, \quad x_2 = \frac{18}{11}$$

$$x = \left(\frac{16}{11}; \frac{18}{11}\right)$$

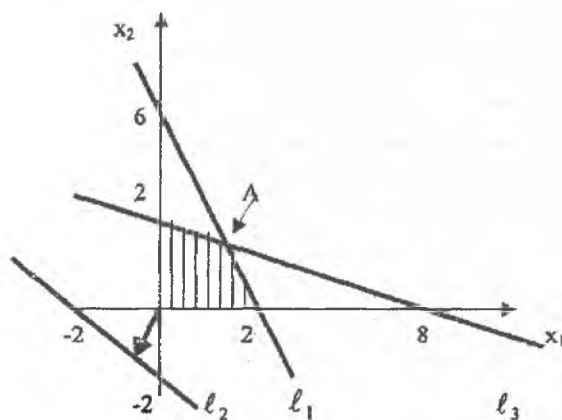


рис.3

$$Z_{\min} = -\frac{16}{11} - 2 \times \frac{18}{11} = -\frac{52}{11} = -4\frac{8}{11}$$

Існує ряд задач які містять більш ніж дві змінні, але, при цьому, можуть бути розв'язані графічним методом. Для таких задач повинна виконуватись умова:

$$n - m \leq 2$$

де n – кількість невідомих, m – кількість основних обмежень.

Задача 1.3

Розв'язати графічним методом:

$$\max Z = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4; \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3; \\ x_3 - x_4 - x_5 = 2; \\ x_i \geq 0, (i=1;5) \end{cases}$$

Розв'язок:

Необхідно спочатку розв'язати систему обмежень методом Жордано - Гаусса, (щоб виділити базисні змінні).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
1	-1	1	-1	1	4
0	[1]	1	1	1	3
0	0	1	-1	-1	2
1	0	2	0	2	7
0	1	1	1	1	3
0	0	[1]	-1	-1	2

1	0	0	2	4	3
0	1	0	2	2	1
0	0	1	-1	-1	2

Складаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + 4x_5 = 3; \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ x_3 - x_4 - x_5 = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Визначаємо базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_4 - 4x_5; \\ x_2 = 1 - 2x_4 - 2x_5; \\ x_3 = 2 + x_4 + x_5 \end{cases} \quad (2)$$

В даній задачі всі невідомі є невід'ємними числами, тому якщо в системі (1) відкинути базисні змінні, то ми із рівнянь отримаємо нерівності, а саме:

$$\begin{cases} 2x_4 + 4x_5 \leq 3; \\ 2x_4 + 2x_5 \leq 1; \\ -x_4 - x_5 \leq 2; \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Замість базисних змінних в цільову функцію підставимо їхні значення, тобто вирази, що стоять в системі (2).

$$Z = (3 - 2x_4 - 4x_5) + (1 - 2x_4 - 2x_5) + 2(2 + x_4 + x_5) - x_4 = 3 - 2x_4 - 4x_5 + 1 - 2x_4 - 2x_5 + 4 + 2x_4 + 2x_5 - x_4 = 8 - 3x_4 - 4x_5$$

$\max Z = 8 - 3x_4 - 4x_5$ -- нова цільова функція задачі.

Таким чином отримали нову умову задачі із двома змінними
 $\max Z = 8 - 3x_4 - 4x_5$

$$\begin{cases} 2x_4 + 4x_5 \leq 3; \\ 2x_4 + 2x_5 \leq 1; \\ -x_4 - x_5 \leq 2; \\ x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

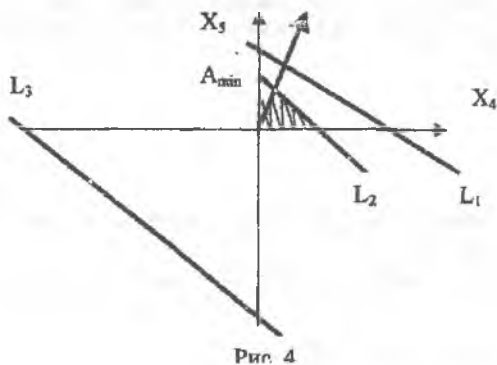
Далі ця задача розв'язується аналогічно попередній; запишемо нерівності у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_4 + 4x_5 = 3; \\ 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ -x_4 - x_5 = 2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x_4}{3/2} + \frac{x_5}{3/4} = 1 & l_1 \\ \frac{x_4}{1/2} + \frac{x_5}{1/2} = 1 & l_2 \\ \frac{x_4}{-2} + \frac{x_5}{-2} = 1 & l_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо градієнт цільової функції

$$\text{grad} Z = (2; 3)$$

Побудуємо на площині x_1, x_2 прямі $l_1 - l_2$ та градієнт функції.



Розв'язком буде точка $A(0; \frac{1}{2})$; отже $x_4 = 0$; $x_5 = \frac{1}{2}$.

Знайдемо значення змінних x_1 ; x_2 ; x_3 підставивши значення $x_4 = 0$ і $x_5 = 1/2$ у систему (2)

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1; \\ x_2 = 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0; \\ x_3 = 2 + 0 + \frac{1}{2} = 2,5; \end{cases}$$

отже розв'язком є $x = (1; 0; 2,5; 0; 0,5)$.

Значення цільової функції $Z_{\max} = 8 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0,5 = 6$.

Задача 1.4

Розв'язати графічним методом:

$$\min Z = -2x_1 + 3x_2 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_5 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_i \geq 0 \quad x = 1,5 \end{cases}$$

Розв'язок:

Визначимо базисні змінні:

$$\begin{cases} x_5 = 3 - x_1 - 2x_2; \\ x_4 = 4 - 2x_1 - x_2; \\ x_3 = 1 - 3x_1 - x_2; \end{cases}$$

Підставимо значення базисних змінних у цільову функцію:

$$Z = -2x_1 + 3x_2 - (4 - 2x_1 - x_2) = -2x_1 + 3x_2 - 4 + 2x_1 + x_2 = -2 + 4x_2$$

В заданій системі обмежень відкинемо базисні змінні, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 4; \\ 3x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Запишемо нерівність у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3; \\ 2x_1 + x_2 = 4; \\ 3x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 = 0, x_2 = 0; \end{cases}$$

Запишемо рівняння прямих у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$l_1: \frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3} = 1$$

$$l_2: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = 1$$

$$l_3: \frac{x_1}{1/3} + \frac{x_2}{1} = 1$$

$$Z = \text{grad}(0; 4)$$

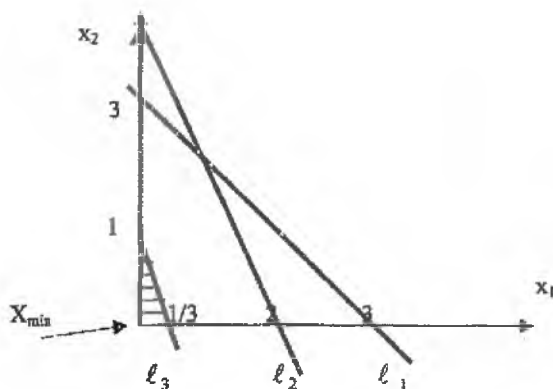


Рис. 5

$$x_1=0; \quad x_2=0$$

$$x_3=1-0-0=1; \quad x_4=4; \quad x_5=3$$

Відповідь: $\bar{x} = (0; 0; 1; 4; 3) - \min$

$$Z_{\min} = -2 \times 0 + 3 \times 0 - 4 = -4$$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати графічним методом задачі лінійного програмування.

$$1. \quad a) \begin{cases} \min Z = 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \max Z = 16x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 - 5x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 16 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 5) \end{cases}$$

$$2. \quad a) \begin{cases} \max Z = 6x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \min Z = 6x_1 + 10x_2 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 60 \\ 8x_1 + 16x_2 - x_3 - x_5 = 108 \\ 8x_1 + 18x_2 - x_4 - x_5 = 120 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 5) \end{cases}$$

$$3. \quad a) \begin{cases} \max Z = 2,5x_1 + 3x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \min Z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ x_1 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 6) \end{cases}$$

$$4. \quad a) \begin{cases} \min Z = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 37 \\ 5x_1 + x_2 \leq 49 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \max Z = 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 5) \end{cases}$$

$$5. \quad a) \begin{cases} \min Z = 2x_1 - 6x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \max Z = -x_1 + x_3 + 7x_4 + 7x_5 \\ x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 55 \\ x_2 + 12x_3 + 11x_5 = 132 \\ x_1 + 3x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 5) \end{cases}$$

$$6. \quad a) \begin{cases} \max Z = 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \min Z = 3x_5 + x_6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_6 = 20 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 50 \\ -x_2 + x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 = 72 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 6) \end{cases}$$

2.2 Форми запису задач лінійного програмування. Їх еквівалентність і способи перетворення. Складання математичної моделі задач економічного змісту.

На практиці, для розв'язку дається економічна задача, що не представлена в математичній формі. Тому, одним із головних етапів розв'язку, є побудова математичної моделі процесу, що є об'єктом дослідження.

Математична модель — це запис в математичних символах, абстракція реального явища.

Існує три основні форми запису задачі лінійного програмування:

1. загальна форма запису (дивись п. 1.3 ст.10);
2. стандартна (симетрична) форма запису задачі лінійного програмування:

$$\max Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} \times x_i \leq b_j ; & (j=\overline{1,m}) \\ x_i \geq 0, & (i=\overline{1,n}) \end{cases}$$

або

$$\min Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} \times x_i \geq b_j ; & (j=\overline{1,m}) \\ x_i \geq 0, & (i=\overline{1,n}) \end{cases}$$

Особливістю цієї форми запису є те, що коли задача на знаходження max, то усі основні обмеження є нерівностями із знаком $\leq$.

Якщо на знаходження min, то - із знаком $\geq$, причому, як у першому, так і в другому випадках, на усі невідомі накладається умова невід'ємності;

3. канонічна (основна) форма запису:

$$\max Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} \times x_i = b_j ; & (j=\overline{1,m}) \\ x_i \geq 0, & (i=\overline{1,n}) \end{cases}$$

Особливістю цієї форми є те, що усі основні обмеження є рівняннями. На усі невідомі накладається умова невід'ємності.

Необхідність існування різних форм запису пов'язана з тим, що існують різні методи розв'язування задач лінійного програмування, і для кожного із них, задача повинна бути представлена у певній формі.

Задані три форми запису є *еквівалентними*, оскільки за допомогою певних перетворень можна перейти від однієї форми запису до іншої.

1. При необхідності, задачу мінімізації можна замінити задачею максимізації, і навпаки, а саме:

$$\begin{array}{ll} \text{умову} & \max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \\ \text{можна замінити на} & \min(-Z) = -C_1 X_1 - C_2 X_2 - \dots - C_n X_n \end{array}$$

Приклад:

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \Rightarrow \min(-Z) = -2x_1 + 3x_2 - x_3$$

2. Нерівність типу $\geq$ можна перетворити у нерівність типу $\leq$, шляхом множення обох частин нерівності на -1 , і навпаки, а саме:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1 \end{array}$$

Приклад:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4$$

3. Будь-яку нерівність можна представити у вигляді рівняння, а саме:

$$\begin{array}{l} \text{а) } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \text{ де } x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{б) } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \text{ де } x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

Приклад:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \Rightarrow \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

4. Будь-яке рівняння виду $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ можна представити у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \end{cases}$$

Приклад:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Будь-яку змінну, що може бути як додатною так і від'ємною можна представити у вигляді різниці 2-х невід'ємних змінних, а саме:

$$X_i = X_i'' - X_i', \quad \text{де } x_i'' \geq 0, x_i' \geq 0$$

Наведемо деякі приклади математичних моделей задач економічного змісту.

Задача про суміші.

Задача визначення оптимального складу суміші тоді, коли із наданих видів сировини необхідно отримати, шляхом змішування, новий вид сировини із заданими наперед властивостями. При цьому вартість такої суміші повинна бути мінімальною.

Припустимо, що суміш необхідно виготовити із N різних видів сировини, кожна з яких містить m видів необхідних для суміші елементів.

Нехай a_{ij} кількість i-того елемента в одиниці j-ї сировини, вартість якої рівна C_j .

Позначимо через a_i' та a_i'' відповідно найменшу і найбільшу кількість i-того елемента в суміші.

А через d_j – запас, який маємо на запланований період сировини j-го виду.

Для складання моделі позначимо x_j кількість сировини i-того виду, яку ми запланували використати для виготовлення суміші. Тоді вартість суміші може бути обчислена за формулою:

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j, \text{ а математична модель задачі буде мати вигляд:}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot X_j \geq B_i' ; & (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot X_j \leq B_i'' ; & (i=1,2,\dots,m) \\ 0 \leq x_j \leq d_j & (j=1,2,\dots,m) \end{cases}$$

Приклад:

Було встановлено, що для найкращої відгодівлі тварин необхідно, щоб вони щодоби споживали вітаміни: А, В, С, в кількостях не менше ніж, відповідно, 100; 50; 200 одиниць. Для відгодівлі тварин використано два види корму: P_1 та P_2 . Місткість вітамінів А, В, С в 1кг., корму P_1 відповідно становить 2; 3; 0 одиниць, а в P_2 – 1; 2; 3 одиниць.

Вартість 1кг., корму P_1 становить 50 коп., корму P_2 – 60 коп. Необхідно скласти такий раціон харчування, щоб тварини отримували необхідну кількість вітамінів, а вартість цього корму була мінімальна.

Розв'язок:

Для зручності запишемо дані в таблицю:

Вітаміни	P_1	P_2	Кількість
А	2	1	100
В	3	2	50
С	0	3	200
Вартість	0,5	0,6	

Позначимо через x_1 кількість корму P_1 , через x_2 – P_2 . Тоді вартість раціону становитиме: $Z = 0,5x_1 + 0,6x_2$

Місткість вітаміну А в раціоні становитиме $2x_1 + 1x_2$; вітаміну В становитиме $3x_1 + 2x_2$; С – $0x_1 + 3x_2$.

Їхній вміст в раціоні не повинен бути меншим за вказану кількість.

Таким чином, отримаємо математичну модель задачі:

$$\min Z = 0,5x_1 + 0,6x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \geq 100; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 50; \\ 0x_1 + 3x_2 \geq 200; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача про оптимальний план випуску продукції.

Ця задача виникає при розробці планів випуску продукції підприємств. Суть її в наступному.

Нехай для виготовлення кожного із n видів продукції використовується m видів ресурсів. Причому затрати i -го виду ресурсів на одиницю j -го виду продукції складає a_{ij} .

Нехай прибуток від виробництва і реалізації одиниці j -го виду продукції складає C_j грошових одиниць.

Запаси ресурсів обмежені і складають відповідно $B_1, B_2, \dots, B_m$ одиниць.

Нехай A_{1j} і A_{2j} відповідно нижня і верхня межа допустимого об'єму випуску продукції j -го виду.

Необхідно встановити такий план випуску продукції, який при наявних об'ємах ресурсів задовольняв би заданим обмеженням на випуск кожного виду продукції і в той же час забезпечував найбільший сумарний прибуток підприємству. Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, & (i=1,2,\dots,n) \\ A_{1j} \leq x_j \leq A_{2j} & (j=1,2,\dots,m) \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Приклади розв'язування задачі.

Задача 2.1

В деному раціоні присутні два продукти харчування, причому продукту P_1 повинно вийти не більше 200 одиниць. Вартість одиниці продукції P_1 складає 2 коп., а продукту P_2 - 4 коп. Ці два продукти містять два основні вітаміни А і С. В продукті P_1 вони входять в кількості 0,2 і 0,4 одиниці, а в продукті P_2 - 0,2 і 0,2. Визначити оптимальний раціон з мінімальною вартістю. Якщо вітаміну А в раціоні повинно бути не менше 120 одиниць, а вітаміну С - 160 одиниць.

	P_1	P_2	
А	0,2	0,2	≥ 120
С	0,4	0,2	≥ 160
Ц	2к	4к	
	≤ 200		

Розв'язок:

x_1 - кількість продукту P_1 ;

x_2 - кількість продукту P_2 ;

$Z = 2x_1 + 4x_2$ - їх загальна вартість;

$0,2x_1$ - кількість вітаміну А в продукті P_1 ;

$0,4x_1$ - кількість вітаміну С в продукті P_1 ;

$0,2x_2$ - кількість вітаміну А в продукті P_2 ;

$0,2x_2$ - кількість вітаміну С в продукті P_2 ;

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 120; \\ 0,2x_2 + 0,4x_1 \geq 160; \\ x_1 \leq 200; \quad x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,2x_2 = 120; \\ 0,2x_2 + 0,4x_1 = 160; \\ x_1 = 200; \\ x_1 = 0; x_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_1: \frac{x_1}{600} + \frac{x_2}{600} = 1$$

$$l_2: \frac{x_1}{400} + \frac{x_2}{800} = 1$$

$$l_3: x_1 = 200$$

$$\text{grad}Z = (200; 400),$$

(координати вектора $\text{grad}Z = (2; 4)$ помножимо на 100 для зручності його побудови)

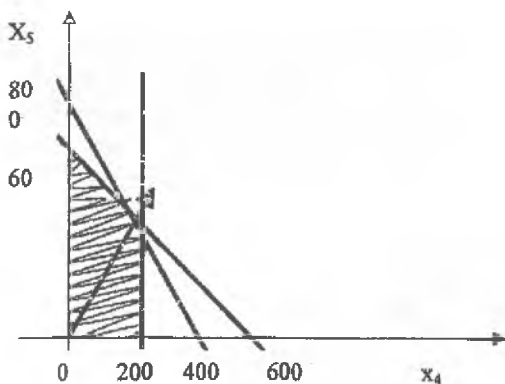


Рис. 6

Відповідь: $x_1=200$, $x_2=400$

$$Z_{\min} = 2 \times 200 + 4 \times 400 = 2000$$

Задача 2.2

Для продажу двох видів товарів А і В торгове підприємство використовує чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсів на реалізацію одиниці товару А, відповідно становлять 2; 1; 4; 0, а для товару В - 2;2;0;4. Кількість цих ресурсів на підприємстві відповідно становить 12; 8; 16; 12. Прибуток від реалізації одиниці товару А – 2 грн., товару В – 3 грн. Знайти оптимальний план реалізації товарів, що забезпечує підприємству максимальний прибуток.

	А	В	К-ть
P_1	2	2	12
P_2	1	2	8
P_3	4	0	16
P_4	0	4	12
П-к	2 грн	3 грн	

Розв'язок:

x_1 - кількість товару А;

x_2 - кількість товару В;

$Z = 2x_1 + 3x_2$ - загальний прибуток;

$2x_1$ - кількість ресурсів P_1 у товарі А;

$1x_1$ - кількість ресурсів P_2 у товарі А;

$4x_1$ - кількість ресурсів P_3 у товарі А;

$0x_1$ - кількість ресурсів P_4 у товарі А;

$2x_2$ - кількість ресурсів P_1 у товарі В;

$2x_2$ - кількість ресурсів P_2 у товарі В;

$0x_2$ - кількість ресурсів P_3 у товарі В;

$4x_2$ - кількість ресурсів P_4 у товарі В;

Математична модель задачі

$$\text{Max} Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 4x_1 + 0x_2 \leq 16; \\ 0x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 12; \\ x_1 + 2x_2 = 8; \\ 4x_1 + 0 = 16; \\ 0 + 4x_2 = 12; \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_1: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} = 1$$

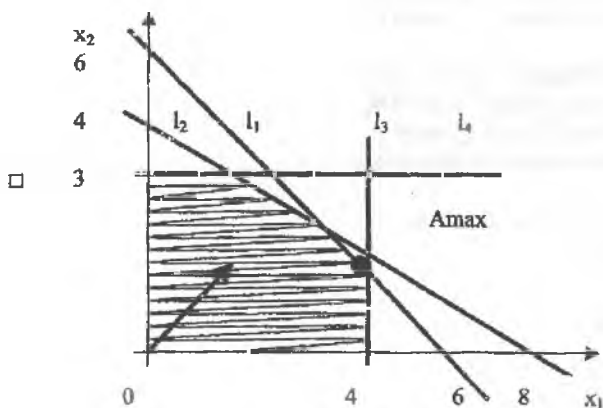
$$l_2: \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 1$$

$$l_3: 4x_1 = 16 \quad l_4: 4x_2 = 12$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3$$

$$\text{grad} Z = (2; 3)$$

Будуємо малюнок та знаходимо розв'язок.



$$\begin{cases} x_1 = 4; \\ 2x_1 + 2x_2 = 12. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14 \text{ (грн)}$$

Відповідь: план випуску: товару А – 4; товару В – 2; прибуток – 14 (грн)

Задача 2.3

Необхідно скласти добовий раціон для відгодівлі свиней з тієї собівартістю. Причому раціон повинен включати не більше 2,5 кг. ячменю. Кормових одиниць за добу споживають не менше 2,4 кг., протеїну - 200 г. Комбікорм містить в одному кілограмі 100 г. протеїну і 0,9 кг кормових одиниць. Ячмінь містить відповідно 80 г. протеїну і 0,92 кг кормових одиниць. Вартість 1 кг комбікорму 9 коп., ячменю – 3 коп.

	Комб.	Ячмінь	
Прот.	0,1	0,08	$\geq 0,2$
Кор.од	0,9	0,92	$\geq 2,4$
В-ть	9	3	
		$\leq 2,5$	

Розв'язок:

x_1 - кількість комбікорму;

x_2 - кількість ячменю.

$$\min Z = 9x_1 + 3x_2$$

0,1 x_1 - кількість протеїну в комбікормі;

0,9 x_1 - кількість кормових одиниць в комбікормі;

0,08 x_2 - кількість протеїну в ячмені;

0,92 x_2 - кількість кормових одиниць в ячмені.

$$\min Z = 9x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,08x_2 \geq 0,2 ; \\ 0,9x_1 + 0,92x_2 \geq 2,4 ; \\ x_2 \leq 2,5 ; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0,1x_1 + 0,08x_2 = 0,2 ; \\ 0,9x_1 + 0,92x_2 = 2,4 ; \\ x_2 = 2,5 ; \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_1: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2,5} = 1 ; \quad l_2: \frac{x_1}{8/3} + \frac{x_2}{2,6} = 1 ; \quad l_3: x_2 = 2,5$$

$$\text{grad} Z = (4,5; 1,5)$$

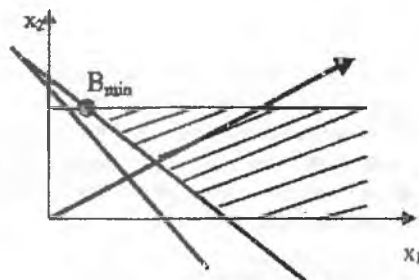


Рис. 8

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,92x_2 = 2,4; \\ x_2 = 2,5 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{9}; \quad x_2 = 2,5$$

$$Z_{\min} = 9 \times \frac{1}{9} + 3 \times 2,5 = 8,5$$

Відповідь: $(\frac{1}{9}; 2,5)$

2.3 Опорні розв'язки. Симплексні таблиці.

Основним із методів розв'язку задач лінійного програмування є *симплексний метод*. Для того, щоб задачу можна було розв'язати симплексним методом, необхідно, щоб вона була представлена в канонічному вигляді.

Приклад.

$$\max Z = 2x_1 - x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6; \\ x_i \geq 0, \quad (i=1,5) \end{cases}$$

Дана задача представлена в канонічному вигляді (усі основні обмеження є рівняннями), при чому, кожне рівняння містить "свою" базисну змінну: x_3, x_4, x_5 . Змінні x_1, x_2 є вільними. Для того, щоб скласти базисний розв'язок необхідно визначити базисні змінні

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 - x_2; \\ x_4 = 5 - x_1 + x_2; \\ x_5 = 6 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

вільним змінним надають значення 0.

тоді: $x_1=0; x_2=0$
 $x_3=4; x_4=5; x_5=6$
 $\bar{X}=(0;0;4;5;6)$

Опорним називається невід'ємний базисний розв'язок.

Оскільки, даний розв'язок не містить від'ємних чисел, то він є опорним.

Для того, щоб можна було зразу знайти опорний розв'язок, необхідно, щоб вільні члени стояли з правої сторони рівняння і були невід'ємні, а в системі обмежень були б виділені базисні змінні.

Приклад.

$$\min Z = x_1 - x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_3 - x_5 = -7; \\ x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Для того, щоб умова задачі була записана в "зручному" вигляді, необхідно в першому рівнянні вільний член перенести в праву сторону; в третьому рівнянні вільний член стоїть справа, але він від'ємний, тому рівняння потрібно помножити на -1 .

Маємо:

$$\min Z = x_1 - x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6; \\ -2x_1 + x_3 + x_5 = 7; \\ x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Дана система, уже, містить базис, це змінні: x_2, x_4, x_5 . Надавши вільним змінним значення 0, знайдемо опорний розв'язок:

$$x_1=0, x_2=4, x_3=0, x_4=6, x_5=7; \quad \bar{x}=(0;4;0;6;7)$$

Розглянемо випадок коли задача представлена в стандартному вигляді:

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ 2x_1 - x_2 \leq 6; \\ x_1 - 3x_2 \leq 1; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Для того, щоб знайти опорний розв'язок даної задачі, її умову потрібно записати в канонічному вигляді, ліва частина нерівностей менша за праву, тому, щоб отримати рівняння, необхідно додати до лівої частини кожної нерівності певну невід'ємну змінну.

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 1; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Дана система відразу показує наявність базису: x_3, x_4, x_5 , а значить, можна відразу скласти опорний розв'язок:

$$\bar{x}=(0;0;4;6;1)$$

Приклади розв'язування задач.

Задача 3.1

Знайти опорний розв'язок задачі лінійного програмування.

$$\max Z = 7x_1 - 18x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1; \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'язок:

1. Спочатку необхідно зробити так, щоб усі вільні члени в системі основних обмежень були невід'ємні. Для цього необхідно першу нерівність помножити на -1 :

$$\max Z = 7x_1 - 18x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

2. Необхідно задачу записати у канонічному вигляді. Для цього першу і другу нерівності потрібно перетворити у рівняння:

$$\max Z = 7x_1 - 18x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Утворена система містить базис, тому можна відразу ж записати опорний розв'язок: $\bar{X} = (0; 0; 6; 1; 4)$

Одна і таж задача лінійного програмування може мати декілька опорних розв'язків. Саме серед опорних розв'язків і знаходиться оптимальний розв'язок, який максимізує чи мінімізує цільову функцію.

Суть симплексного методу полягає в тому, що ми перебираємо опорні розв'язки і по певному критерію оцінюємо їх на оптимальність. Але оскільки опорних розв'язків може бути дуже багато, то такий метод розв'язку був би малоефективний, якби симплексний метод не давав можливості знаходити "напрямок", в якому необхідно шукати оптимальний розв'язок, що скорочує процес розв'язку.

Задача 3.2

Скласти симплексну таблицю до задачі:

$$\max Z = 200x_1 + 300x_2 - 400x_3 + 250x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 80; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 80; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 70; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язок:

Спочатку знаходимо опорний розв'язок:

$$\bar{x} = (0; 0; 80; 80; 70;)$$

Складасмо таблицю:

B3	C6	A0	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	p1
			200	300	-400	250	0	
x ₃	-400	80	2	3	1	0	0	p2
x ₄	250	80	1	-1	0	1	0	
x ₅	0	70	3	4	0	0	1	p3
Z ₇ -C ₁		12000	-750	-1750	0	0	0	

c4
p2

B3 – стовпчик, в який записуються базисні змінні.

C6 – стовпчик, в який записуються коефіцієнти, що стоять при даних базисних змінних у цільовій функції.

A0 – стовпчик в який записуються значення базисних змінних в опорному розв'язку.

p1 – записуються коефіцієнти, що стоять при змінних у цільовій функції.

p2 – записуються коефіцієнти, що стоять при змінних у системі основних обмежень.

c4 – записується значення цільової функції при даному опорному розв'язку.

для цього потрібно стовпчик C6 помножити на стовпчик A0: $Z_0 = C6 \times A0$

$$Z_0 = -400 \times 20 + 250 \times 80 + 0 \times 70 = -8000 + 20000 + 0 = 12000$$

p3 – записуються індекси або оцінки змінних.

Саме характер цих оцінок і є критерієм оптимальності розв'язку задачі.

$$\Delta_i = C6 \times x_i - p1_i$$

$$\Delta_i = (-400 \times 2 + 250 \times 1 + 0 \times 3) = -750$$

(Оцінки змінних, що стоять в базисі, завжди будуть дорівнювати нулю).

Якщо задача на знаходження max цільової функції, то знайдений опорний розв'язок буде оптимальним, якщо усі оцінки змінних є невід'ємні.

Якщо задача на знаходження min, то критерієм оптимальності є відсутність додатних оцінок, тобто усі оцінки від'ємні або дорівнюють 0.

Задача 3.3

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_2 \leq 4; \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Скласти:

1. опорний розв'язок;
2. симплексну таблицю.

Розв'язок:

1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_2 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$\bar{x} = (0; 0; 6; 4; 10)$$

2.

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	2	0	0	0
x_3	0	6	1	1	1	0	0
x_4	0	4	0	1	0	1	0
x_5	0	10	2	1	0	0	1
$Z_j - C_j$		0	-1	-2	0	0	0

Задача 3.4

Знайти опорний розв'язок та скласти симплексну таблицю.

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 \geq -6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ -x_1 + x_2 \geq 6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 3; & x_1 = 0; \quad x_2 = 0 \quad - \text{вільні змінні} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; & x_3 = 10; \quad x_4 = 3; \quad x_5 = 6 - \text{базисні змінні} \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

тоді опорний розв'язок має вигляд: $\bar{x} = (0; 0; 10; 3; 6)$.

Складаємо симплексну таблицю:

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	-3	0	0
x_3	-3	10	2	1	1	0	0
x_4	0	3	1	4	0	1	0
x_5	0	6	-1	1	0	0	1
$Z_j - C_j$		-30	-9	-7	0	0	0

Задача 3.5

$$\min Z = 2x_1 - x_2 + 3x_4 - 5x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -10; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 \leq 18; \\ 3x_3 - 5x_5 \geq -10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5} \end{cases}$$

Знайти опорний розв'язок та скласти початкову симплексну таблицю.

Розв'язок:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 \leq 18; \\ -3x_3 + 5x_5 \leq 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 10; & x_1 = 0; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = 0 - \text{вільні змінні}; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 18; & x_4 = 0; \quad x_5 = 0; \quad x_6 = 8; \quad x_7 = 10 - \text{базисні змінні}; \\ -3x_3 + 5x_5 + x_7 = 10; & x = (0; 10; 0; 0; 0; 8; 10) \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 7} \end{cases}$$

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-1	0	3	-1	0	0
x_2	-1	10	-1	1	-1	0	0	0	0
x_6	0	8	2	0	3	-1	0	1	0
x_7	0	10	0	0	-1	0	5	0	1
$Z_j - C_j$		-10	-1	0	1	-3	1	0	0

2.4 Симплексний метод розв'язку задач лінійного програмування

Задача 4.1

Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом.

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 6; \\ x_1 + 4x_2 \leq 4; \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

Розв'язок:

1. Спочатку запишемо дану задачу в канонічному вигляді і знайдемо початковий опорний розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 4; \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 4 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 4, \quad \bar{x} = (0; 0; 6; 4)$$

2. Складаємо початкову симплексну таблицю:

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_3	0	6	2	4	1	0
x_4	0	4	1	[4]	0	1
$Z - C_1$		0	-1	-2	0	0

3. Дана задача на пошук $\max$ цільової функції, тому критерієм оптимальності розв'язку даної задачі є відсутність від'ємних оцінок змінних.

В напій задачі є дві від'ємні оцінки -1 ; -2 . Це означає, що знайдений опорний розв'язок не є оптимальним, тобто необхідно шукати інший.

Для цього у базис потрібно ввести нову змінну. Серед двох від'ємних оцінок вибираємо найбільшу по модулю. Це число -2 . Значить у базис необхідно ввести змінну x_2 , оскільки -2 є оцінка саме змінної x_2 .

Тепер необхідно визначити замість якої змінної введемо змінну x_2 . Для цього числа в стовпчику Ао поділимо на додатні числа, що стоять в стовпчику x_2 (тобто на коефіцієнти тієї змінної, яку будемо вводити у базис). Ці відношення називають симплексними

$$\text{Тобто для } x_3: \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ для } x_4: \frac{4}{4} = 1.$$

Серед знайдених чисел знаходимо найменше. Це число 1. Воно відповідає змінній x_4 . Це означає, що замість змінної x_4 введемо змінну x_2 .

3. Складемо наступну симплексну таблицю:

БЗ	Сб	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_3	0	2	1	0	1	-1
x_2	2	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$
Z, C_j		2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

Для цього в стовпчик БЗ запишемо нові базисні змінні x_3 і x_4 . У стовпчик Сб запишемо коефіцієнти цих базисних змінних у цільовій функції.

Всі інші числа обраховуються за методом Гаусса – Жордано. Ключовим елементом є число, що стоїть на перетині стовпчика x_2 із рядком змінної x_4 в попередній таблиці.

5. В даній таблиці присутня від'ємна оцінка. Це означає, що новий розв'язок не є найкращим, необхідно шукати інший.

Від'ємною є оцінка змінної x_1 . Це означає, що в новий базис необхідно ввести змінну x_1 . Щоб визначити, замість якої змінної, потрібно стовпчик Ао поділити на додатні числа стовпчика x_1 .

Серед знайдених чисел вибираємо найменше. Це число 2. Воно відповідає змінній x_3 . Значить в новій таблиці замість змінної x_3 пишемо x_1 . Ключовим елементом буде 1. Заповнюємо нову таблицю:

БЗ	Сб	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_1	1	2	1	0	1	-1
x_2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Z, C_j		3	0	0	$\frac{1}{2}$	0

В останній таблиці від'ємні оцінки відсутні. Це означає, що знайдений розв'язок є оптимальним.

Сам розв'язок визначається слідуючим чином. Базисні змінні отримують значення, що стоять в стовпчику Ао, тобто $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{2}$; вільним змінним надається значення 0. Значення цільової функції при даному розв'язку береться з нижньої клітинки стовпчика Ао, тобто $Z_{\max} = 3$.

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $Z_{\max} = 3$

Зауваження:

Змінна x_4 має оцінку 0, але в базис ця змінна не входить. Це означає, що дана задача має безліч розв'язків, а знайдений розв'язок є одним із них.

Отже, якщо хоча б одна вільна змінна має нульову оцінку в останній симплексній таблиці, то це значить, що дана задача має безліч розв'язків.

Задача 4.2

Розв'язати :

$$\max Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 22; \\ x_1 \geq 0; \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Розв'язок:

Запишемо задачу в канонічному вигляді та знайдемо опорний розв'язок :

$$\max Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 22; \\ x_2 + x_5 = 2; \\ x_i \geq 0; \quad i=1,5 \end{cases}$$

опорний розв'язок : $x_0 = (0; 0; 6; 22; 2)$

БЗ	C _B	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
			3	6	0	0	0
X ₃	0	6	1	2	1	0	0
X ₄	0	22	5	2	0	1	0
X ₅	0	2	0	[1]	0	0	1
Z ₀ - C _j		0	-3	-6	0	0	0
X ₃	0	2	[1]	0	1	0	-2
X ₄	0	18	5	0	0	1	-2
X ₂	6	2	0	1	0	0	1
Z ₁ - C _j		12	-3	0	0	0	6
X ₁	3	2	1	0	1	0	-2
X ₄	0	8	0	0	-5	1	[8]
X ₂	6	2	0	1	0	0	1
Z ₂ - C _j		18	0	0	3	0	0

Розв'язком даної задачі є $x_1 = (2; 2; 0; 8; 0)$, $Z_{\max} = 18$

Але оскільки змінна x_5 , яка не входить в базис, має нульову оцінку, то це означає, що дана задача має безліч розв'язків. Знайдемо ще один оптимальний опорний розв'язок, для цього в базис введемо змінну x_5 (оскільки вона має нульову оцінку). Знаходимо симплексні відношення:

$$x_2 : \frac{2}{1} = 2; \quad x_4 : \frac{8}{8} = 1.$$

БЗ	C_B	A_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
			3	6	0	0	0
X_1	3	4					
X_5	0	1					
X_2	6	1					
$Z_j - C_j$		18	0	0	3	0	0

Отже $\bar{x}_2 = (4; 1; 0; 0; 1)$

Твердження: якщо $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ є оптимальними опорними розв'язками деякої задачі лінійного програмування, то оптимальним також буде розв'язок, що представлений у вигляді:

$$\bar{x} = \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{x}_2, \text{ де } \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_2 \geq 0$$

таким чином загальний розв'язок задачі буде записано у вигляді:

$$\bar{x} = \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{x}_2 = \lambda_1(2; 2) + \lambda_2(4; 1) = (2\lambda_1 + 4\lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2);$$

враховуючи $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$\bar{x} = (2\lambda_1 + 4(1 - \lambda_1); 2\lambda_1 + 1 - \lambda_1) = (4 - 2\lambda_1; 1 + \lambda_1) \text{ де } \lambda_1 \geq 0.$$

Графічно розв'язок даної задачі представлено на рис.9

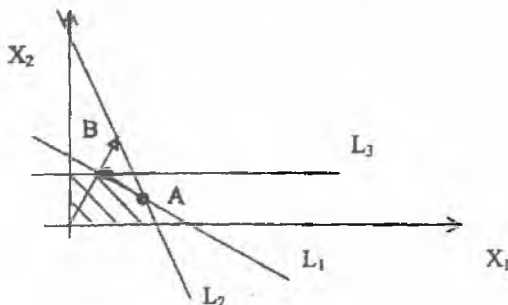


Рис. 9

Розв'язком є множина точок відрізка АВ

Задача 4.3

Розв'язати симплексним методом.

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12; \\ x_1 \leq 3; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок:

Якщо розв'язувати дану задачу симплексним методом, то третя таблиця, яку ми отримаємо в процесі розв'язку, (початок розв'язку опущений) матиме вигляд:

БЗ	C _B	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			2	1	0	0
X ₁	2	30	1	0	0	1
X ₃	0	78	0	-4	1	3
Z _j - C _j		60	0	-1	0	2

Задача на пошук максимуму. Опорний розв'язок $x = (30; 0; 78; 0)$ не оптимальний, оскільки присутня від'ємна оцінка $\Delta_2 = -1 < 0$; необхідно в базис ввести змінну x_2 , але усі елементи стовпчика змінної x_2 не додатні, симплексні відношення знайти неможливо, отже цільова функція є необмеженою.

Графічно розв'язок цієї задачі представлено на рис. 10.

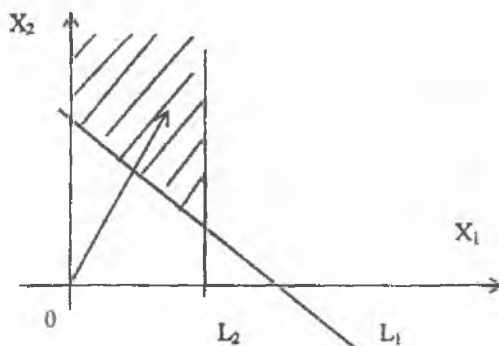


Рис. 10

Задача 4.4

Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування:

$$\min Z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2; \\ -x_1 - x_2 \geq -4; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,4} \end{cases} \quad \bar{X}_6 = (0; 0; 2; 4)$$

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			-1	-1	0	0
x_3	0	2	2	1	1	0
x_4	0	4	1	1	0	1
$Z_j - C_j$		0	1	1	0	0

Оскільки дана задача на пошук $\min$, то критерієм оптимальності є відсутність додатних оцінок. Дві змінні x_1 та x_2 мають додатні оцінки. Необхідно вибрати найбільшу з них. Оскільки вони рівні, беремо довільну. Наприклад, оцінку змінної x_2 . Знаходимо симплексні відношення (поділивши числа стовпчика A_0 на числа стовпчика x_2).

$2 : 1 = 2; \quad 4 : 1 = 4$. Найменше симплексне відношення 2, отже замість змінної x_3 введемо в базис змінну x_2 . Ключовим елементом для заповнення нової таблиці є число 1. Нова таблиця має вигляд:

БЗ	СБ	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			-1	-1	0	0
x_2	-1	2	2	1	1	0
x_4	0	2	-1	0	-1	1
$Z_j - C_j$		-2	-1	0	-1	0

Додатні оцінки відсутні, отже знайдений розв'язок є оптимальний $x_2 = 2$, $x_4 = 2$, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

Відповідь: $x = (0; 2; 0; 2)$; $Z_{\min} = -2$.

Задача 4.5

Розв'язати симплексним методом

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_2 \leq 3; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок:

Запишемо задачу в канонічному вигляді і знайдемо опорний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; & x_1 = 0, \quad x_2 = 0; \\ x_2 + x_4 = 3; & x_3 = 4, \quad x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

БЗ	Сб	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			2	4	0	0
x_3	0	4	1	1	1	0
x_4	0	3	0	[1]	0	1
$Z_j - C_j$		0	-2	-4	0	0
БЗ	Сб	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			2	4	0	0
x_3	0	1	[1]	0	1	-1
x_2	0	3	0	1	0	1
$Z_j - C_j$		12	-2	0	0	4

БЗ	Сб	Ао	x_1	x_2	x_3	x_4
			2	4	0	0
x_1	2	1	1	0	1	-1
x_2	4	3	0	1		
$Z_j - C_j$		14	0	0	2	2

Отже: $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad Z_{\max} = 14$

2.5 Штучний базис. М – задача.

Задача 5.1

Знайти опорний розв'язок, та скласти початкову симплексну таблицю.

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + x_3 \geq 9; \\ -x_1 + 3x_3 \geq 3; \\ x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Розв'язок:

Необхідно знайти опорний розв'язок та скласти початкову симплексну таблицю.

Спочатку дану задачу запишемо в канонічному вигляді. Для цього:

- 1) перше рівняння запишемо без змін;
- 2) друга нерівність типу $\leq$. Це означає, що ліва частина менша за праву і тому потрібно додати до неї деяку змінну x_5 ;
- 3) останні дві нерівності мають ліві частини більші, ніж праві, тому від них потрібно відняти деякі змінні x_6 та x_7 відповідно.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - x_6 = 9; \\ -x_1 + 3x_3 - x_7 = 3; \\ x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1;7}) \end{cases}$$

Система має чотири основних обмеження, тому повинно бути чотири базисні змінні. В третьому і четвертому рівняннях базисних змінних не має. Введемо штучні базисні змінні ω_1 і ω_2 .

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - x_6 + \omega_1 = 9; \\ -x_1 + 3x_3 - x_7 + \omega_2 = 3; \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1;7} \\ \omega_j \geq 0 \quad j = \overline{1;2} \end{cases}$$

Цільова функція даної задачі буде мати вигляд:

$$z = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 - M \cdot \omega_1 - M \cdot \omega_2$$

Зуваження: якщо задача на знаходження максимуму то перед M ставиться знак "-", якщо на знаходження мінімуму – то знак "+".

Між оптимальними планами вихідної задачі і M - задачі існує наступний зв'язок: якщо в оптимальному плані M - задачі усі штучні змінні ω_i рівні нулю, то значення усіх інших координат розв'язку X дадуть оптимальний розв'язок вихідної задачі. Якщо, хоча б одна із змінних ω_i не дорівнює нулю, то вихідна задача не має розв'язку.

В нашої задачі початковий опорний розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (0; 0; 0; 4; 10; 0; 0; 9; 3) \\ &\quad x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ \omega_1 \ \omega_2 \end{aligned}$$

Побудуємо початкову симплексну таблицю:

БЗ	Сб	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	ω ₁	ω ₂
			9	6	-3	0	0	0	0	-M	-M
X ₄	0	4	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
X ₅	0	10	1	1	0	0	1	0	0	0	0
ω ₁	-M	9	3	1	0	0	0	-1	0	1	0
ω ₂	-M	3	-1	0	3	0	0	0	-1	0	1
Z ₀ -C _j		0	-9	-6	3	0	0	0	0	0	0
		-12M	-2M	-M	-3M	0	0	M	M	0	0

У випадку M – задачі рядок оцінок розбивається на два рядки: у верхній рядок записують вільні члени виразів $Z_0 = \bar{C}_6 \cdot \bar{A}_0$ і $Z_j - C_j = \bar{C}_6 \cdot \bar{A}_j - C_j$, а у нижній – доданки, що містять M .

Наприклад, для стовпчиків змінних x_1 ; x_2 ; ω_1

$$X_1: Z_1 - C_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (1) - M \cdot 3 - M \cdot (-1) - 9 = -9 - 2M;$$

у верхню клітинку записуємо -9 , у нижню $-2M$.

$$X_2: Z_2 - C_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - M \cdot 1 - M \cdot 0 - 6 = -6 - M;$$

у верхню клітинку записуємо -6 , у нижню $-M$.

$$\omega_1: Z_8 - C_8 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 1 - M \cdot 0 - (-M) = 0;$$

у верхню і у нижню клітинки записуємо значення 0.

Задача 5.2

Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ 2x_1 + x_2 \geq 2; \\ x_{1,2} \geq 0; \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + \omega_1 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + \omega_2 = 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}; \\ \omega_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + M \times \omega_1 + M \times \omega_2$$

(Якщо задача на $\min$, то M має знак плюс).

БЗ	Сб	A ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			2	3	0	0	M	M
ω ₁	M	2	1	2	-1	0	1	0
ω ₂	M	2	[2]	1	0	-1	0	1
Z _j -C _j								
		4M	3M	3M	-M	-M	0	0

БЗ	Сб	A ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			2	3	0	0	M	M
ω ₁	M	1	0	[3/2]	-1	1/2	1	-1/2
X ₁	2	1	1	1/2	0	-1/2	0	1/2
Z _j -C _j		2	0	-2	0	-1	0	1
		M	0	3/2M	-M	1/2M	0	-3/2M

Спочатку позбуваються додатних оцінок в нижньому рядку.

Сб		A ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			2	3	0	0	M	M
X ₂	3	2/3	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3
X ₁	2	3/2	1	0	1/3			
Z _j -C _j		31/3	0	0	-4/3	-1/3	4/3	1/3
		3	0	0	0	0	-M	-M

Після того, як позбулись додатних чисел в нижньому рядку оцінок, переходимо до верхнього рядка оцінок, тепер тут необхідно позбутись додатних чисел.

Зауваження: звертати увагу слід лише на ті числа, що стоять над нулями нижнього рядка. В нашій таблиці над нулями стоять не додатні числа, тому знайдений розв'язок є оптимальний.

$$x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Відповідь: } x = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0; 0; 0; 0 \right)$$

Задача 5.3

Розв'язати симплексним методом

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ x_{1,2} \geq 0; \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6; \\ x_{1,2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \omega_1 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 6; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - M\omega_1 - M\omega_2$$

БЗ	СБ	Ао	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			3	-2	0	0	-M	-M
ω ₁	-M	10	1	1	1	0	1	0
ω ₂	-M	6	2	[3]	0	-1	0	1
Zj-Cj								
		-16M	-3M	-4M	-M	M	0	0

БЗ	СБ	Ао	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			3	-2	0	0	-M	-M
ω ₁	-M	8	1/3	0	[1]	1/3	1	-1/3
x ₂	-2	2	2/3	1	0	-1/3	0	1/3
		-4	-13/3	0	0	2/3	0	-2/3
Zj-Cj		-8M	-1/3M	0	-M	-1/3M	0	-3/2M
БЗ	СБ	Ао	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	ω ₁	ω ₂
			3	-2	0	0	-M	-M
x ₃	0	8	1/3	0	1	1/3	1	-1/3
x ₂	-2	2	2/3	1	0	-1/3	0	1/3
		-4	1	0	0	2	8	-2
Zj-Cj		0	0	0	0	0	M	M

Відповідь: $\bar{x} = (0; 2; 8; 0; 0; 0)$ $Z_{\max} = -4$

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати, використовуючи симплекс метод розв'язку ЗЛП (якщо це треба, привести до канонічного вигляду).

$$1) \begin{cases} \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10; \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_3 + x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 - x_4 - 2x_6 = 5; \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 3; \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \max(6x_1 + x_3) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \max(x_1 + 3x_2 - 5x_4) \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28; \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30; \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \max(6x_1 + x_3) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \max(3x_1 - x_2) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \min(2x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6) \\ x_2 + x_3 + 2x_6 = 100; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 = 200; \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \max(-x_1 - x_2 + 2x_3) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1; \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \max(3x_1 + 2x_3 - 6x_6) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18; \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24; \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

2.6 Двоїсті задачі лінійного програмування. Застосування оцінок в післяоптимізаційному аналізі.

Для будь-якої задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту задачу, тоді та задача для якої поставлена двоїста називається прямою задачею.

Приклад.

$$\max Z = 20x_1 + 30x_2 - 40x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 400 & -y_1; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 600 & -y_2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 700 & -y_3; \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 500 & -y_4; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 500 + 600y_2 + 700y_3 + 500y_4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \quad 2y_2 + 4y_4 \geq 20; \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 30; \\ -y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \geq -40; \\ y_1 \geq 0, \quad y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Для побудови двоїстої задачі використовують такі правила:

1. Двоїста задача містить стільки нових змінних, скільки основних обмежень в прямій задачі.
2. Якщо пряма задача на $\max$, то двоїста на $\min$, і навпаки.
3. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами основних обмежень двоїстої задачі, а вільні члени обмежень прямої задачі стають коефіцієнтами в цільовій функції двоїстої задачі.
4. Коефіцієнти, що стоять при x_1 в системі основних обмежень прямої задачі, стають коефіцієнтами в першому обмеженні двоїстої задачі. Аналогічно для x_2 , і так далі.
5. Якщо змінна прямої задачі може бути будь-якою, тобто і додатною і від'ємною, то відповідне їй обмеження є рівнянням. І навпаки, якщо основне обмеження прямої задачі є рівнянням, то відповідна змінна двоїстої задачі може набувати будь-яких значень.
6. Якщо задача на $\max$, то усі нерівності повинні бути виду « $\leq$ », якщо на $\min$, то - « $\geq$ ».

Приклад:

$$\min Z = 3x_1 - 4x_2 = 6x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 10; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Оскільки задача на міц, то усі нерівності повинні бути із знаком "≥", тому третє обмеження помножимо на -1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 10; \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -30; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\max F = 20y_1 + 10y_2 - 30y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3; \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \leq -4; \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 6; \\ -y_1 + y_2 - y_3 = -1; \\ y_{2,3} \geq 0 \end{cases}$$

Основна нерівність теорії двоїстості: для будь-якої пари розв'язків $\bar{x}$ і $\bar{y}$ взаємодвоїстих задач справедлива нерівність $z(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$.

Критерій оптимальності Канторовича (достатня ознака оптимальності):

якщо для деяких допустимих розв'язків $\bar{x}$ і $\bar{y}$ пари двоїстих задач виконується рівність $z(\bar{x}) = f(\bar{y})$, то $\bar{x}$ і $\bar{y}$ - є оптимальними планами відповідних задач.

Теорема двоїстості: якщо одна із взаємодвоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і інша також має оптимальний розв'язок, причому екстремальні значення цільових функцій співпадають, якщо одна із двоїстих задач не має розв'язку, то і інша також не має розв'язку.

Знайти розв'язок однієї із взаємодвоїстих задач, якщо відомий розв'язок іншої можна за допомогою оцінок змінних в останній симплексній таблиці розв'язку цієї задачі.

Приклад:

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язавши двоїсту, знайти розв'язок прямої задачі.

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ x_{1,2} \geq 0; \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 12 - y_1;$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12 - y_2;$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

$$\min F = 12y_1 + 12y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 2; \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 1; \\ y_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$4y_1 + 3y_2 \geq 1;$$

$$y_{1,2} \geq 0$$

Розв'яжемо дану задачу симплексним методом.

$$\min F = 12y_1 + 12y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 2; \\ 4y_1 + 3y_2 - y_4 = 1; \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4} \end{cases}$$

$$4y_1 + 3y_2 - y_4 = 1;$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4}$$

$$\min F = 12y_1 + 12y_2 + M\omega_1 + M\omega_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + \omega_1 = 2; \\ 4y_1 + 3y_2 - y_4 + \omega_2 = 1; \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4} \end{cases}$$

$$4y_1 + 3y_2 - y_4 + \omega_2 = 1;$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4}$$

складаємо симплексну таблицю:

B3	C6	A0	y1	y2	y3	y4	ω1	ω2
			12	12	0	0	M	M
ω1	M	2	2	1	-1	0	1	0
ω2	M	1	4	3	0	-1	0	1
Zj-Cj		3M	6M	4M	-M	-M	0	0
ω1	M	3/2		-1/2	-1	1/2	1	-1/2
y1	12	1/4	1	3/4	0	-1/4	0	1/4
Zj-Cj		3	0	-3	0	-3	0	3
		3/2M	0	-1/2M	-M	1/2M	0	-3/2M
y4	0	3	0	-1	-2	1	2	-1
y1	12	1	1					
Zj-Cj		12	0	-6	-6	0	6	0
		0	0	0	0	0	-M	-M

x1

x2

$$y = (1; 0; 0; 3; 0; 0)$$

$$F_{\min} = 12$$

Відповідь: $x_1 = 6, x_2 = 0; Z_{\max} = F_{\min} = 12$

Пряма задача містить дві основні змінні: x_1 і x_2 .

При складанні двоїстої задачі, коефіцієнти змінної x_1 дали можливість побудувати перше обмеження $2y_1 + y_2 \geq 2$;

потім була введена додаткова змінна y_3 : $2y_1 + y_2 - y_3 = 2$.

Коефіцієнти змінної x_2 дали можливість побудувати друге обмеження $-4y_1 + 3y_2 \geq 1$ потім була введена додаткова змінна y_4 :

$4y_1 + 3y_2 - y_4 = 1$. Таким чином можна стверджувати, що основним змінним x_1 і x_2 відповідають додаткові змінні двоїстої задачі y_3 і y_4 відповідно.

Змінні x_1 і x_2 набувають значень модулів оцінок відповідним їм додаткових змінних останньої симплексної таблиці

$$x_1 \rightarrow y_3 \quad (|\Delta_3| = |-6|) \quad x_2 \rightarrow y_4 \quad (|\Delta_4| = |0|)$$

розв'язок прямої задачі має вигляд:

$$x_{\max} = (6; 0) \quad z_{\max} = 12$$

В загальному зв'язок змінних прямої і двоїстої задач та оцінок в останній симплексній таблиці можна представити так:

основні x_1	x_2	...	x_j	...	x_n						
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	x_{n+1}	x_{n+2}		x_{n+i}	...	x_{n+m}
додаткові y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+j}		y_{m+n}	y_1	y_2		y_i		y_m
						Δ_{n+1}	Δ_{n+2}		Δ_{n+i}		Δ_{n+m}
оцінки Δ_1											
(змінних x_i)											

$$\begin{aligned} \text{звідси} \quad y_1 &= |\Delta_{n+1}| ; \quad y_2 = |\Delta_{n+2}| ; \quad \dots ; \quad y_m = |\Delta_{n+m}| \\ y_{m+1} &= |\Delta_1| ; \quad \dots ; \quad y_{m+n} = |\Delta_n| \end{aligned}$$

Приклади, розв'язування задач.

Задача 6.1.

Підприємство може випускати чотири види продукції P_1, P_2, P_3, P_4 . Для цього використовується три види ресурсів. об'єм першого ресурсу становить 2400, другого - 1200, третього - 3000. Ціна за реалізацію одиниці продукції P_1 становить 75, P_2 - 30, P_3 - 60, P_4 - 120. Норми витрати ресурсів на виготовлення одного виду продукту наведено в таблиці.

Необхідно:

1. знайти план випуску продукції, що дає max виручки;
2. скласти двоїсту задачу, розв'язати її і дати економічний аналіз знайденим розв'язкам.

	P_1	P_2	P_3	P_4	об'єм ресурсів
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Вартість	75	30	60	120	

x_1 - кількість продукції P_1 ; x_2 - P_2 ; x_3 - P_3 ; x_4 - P_4

Тоді план випуску: $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$

За продаж x_1 штук продукції P_1 підприємство отримує $75x_1$, тоді за продукцію P_2 виручка становить $30x_2$; P_3 - $60x_3$; $P_4=120x_4$. Нам необхідно знайти такий план випуску, що дає максимальну загальну виручку, тобто:

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4$$

На виготовлення продукції P_1 першого ресурсу витрачається $2x_1$, продукції P_2 - $1x_2$, P_3 - $0,5x_3$, P_4 - $4x_4$.

Тоді загальні витрати першого ресурсу становлять:

$$2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4$$

Очевидно, що ця величина не може перевищувати об'єм даного ресурсу:

$$2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 \leq 2400$$

Аналогічно, для другого і третього ресурсу:

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1200;$$

$$3x_1 + 6x_3 + x_4 \leq 3000$$

Тоді математична модель матиме вигляд:

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 \leq 2400; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1200; \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 \leq 3000; \\ x_i \geq 0, \quad i=1;4 \end{cases}$$

Розв'язуємо симплексним методом, для цього запишемо математичну модель в канонічному вигляді.

$$\begin{cases} x_5 + 2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 = 2400; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 1200; \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 + x_7 = 3000; \\ x_i \geq 0, \quad i=1;7 \end{cases}$$

(опущена друга таблиця).

БЗ	СБ	Ао	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
			75	30	60	120	0	0	0
x ₅	0	2400	2	1	0,5	4	1	0	0
x ₆	0	1200	1	5	3	0	0	1	0
x ₇	0	3000	3	0	6	1	0	0	1
Zj-Cj		0	-75	-30	-60	-120	0	0	0
x ₄	120	550	11/24	1/24	0	1	1/4	-1/24	0
x ₃	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
x ₇	0	50	13/24	-241/24	0	0	-1/4	-47/24	1
Zj-Cj		90000	0	75	0	0	30	15	0

Третя таблиця не містить від'ємних оцінок, це означає, що знайдений розв'язок є оптимальним: $\bar{x} = (0; 0; 400; 550; 0; 0; 50)$

Згідно розв'язку, щоб отримати максимальний прибуток $Z_{\max} = 90000$, нам необхідно випускати 400 одиниць продукції P_3 , і 550 одиниць продукції P_4 . Продукцію P_1 та P_2 при цьому випускати не слід. Змінна x_1 не входить у базис розв'язку, але при цьому має нульову оцінку, тому дана задача має не один розв'язок (взагалі з математичної точки зору задача має безліч розв'язків). Новий розв'язок ми можемо отримати, якщо введемо у базис змінну x_1 (тому, що вона має нульову оцінку).

Змінна $x_7 = 50$, це означає, що третій ресурс використовується не повністю. Є його залишок кількістю 50 одиниць. Оскільки x_5 та x_6 дорівнюють 0 то це означає, що перший і другий ресурси використовуються повністю.

Будуємо двоїсту задачу.

$$\min F = 2400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 75; \\ y_1 + 5y_2 \geq 30; \\ 0,5y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq 60; \\ 4y_1 + y_3 \geq 120; \\ y_i \geq 0, \quad i=1;3 \end{cases}$$

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти за допомогою останньої симплексної таблиці прямої задачі.

основні	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	додаткові
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
додаткові	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	основні

$$\text{маємо: } \bar{y} = (30; 15; 0 \mid 0; 75; 0; 0). \quad F_{\min} = 90000$$

Двоїсті змінні показують міру дефіцитності ресурсів, вони чисельно рівні змінні цільової функції при зміні відповідного ресурсу на одиницю. Відповідно, зміна першого ресурсу на одиницю приводить до збільшення об'єму реалізації на $y_1 = 30$; другого - на $y_2 = 15$. Третій ресурс в надлишку, тому його збільшення до будь-якої зміни цільової функції не приведе.

Додаткові двоїсті змінні показують міру збитковості продукції, яку, згідно розв'язку, недоцільно випускати. Значить, $y_5 = 75$ вказує на те, що вартість ресурсів, що будуть витрачені на виготовлення одиниці продукції другого виду (в оптимальних оцінках), перевищує вартість одиниці цієї продукції (30) на $y_5 = 75$.

Задачі для самостійної роботи.

1. Підприємство може випускати n видів продукції $P_j (j=1, \bar{n})$. Для цього використовується m видів ресурсів. Загальний об'єм ресурсів $b_i (i=1, \bar{m})$ і норми їх затрат на одиницю продукції j -го виду (a_{ij}) наведені в таблиці. Там же наведені ціни реалізації C_j одиниці кожної продукції.

а) Використовуючи симплексний метод визначити оптимальний асортимент продукції, що випускається, який дасть підприємству максимальний прибуток.

б) Скласти модель двоїстої задачі. Із симплексної таблиці прямої задачі, використовуючи відповідність між змінними прямої і двоїстої задачі, записати оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Дати економічний аналіз основних і додаткових змінних обох задач.

параметри задачі	Номер варіанта										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_1	75	90	80	300	200	40	60	10	25	50	200
C_2	30	60	30	350	250	30	30	70	10	100	250
C_3	60	40	20	600	500	60	70	120	20	150	125
C_4	120	70	10	650	400	70	35	130	40	400	180
b_1	2400	1800	3000	1280	10000	2800	1000	1600	12000	17000	7400
b_2	1200	2100	700	2200	2600	800	300	1100	6000	350	5200
b_3	3000	8000	3400	8000	3700	2500	650	1000	15000	15000	20000
a_{11}	2	1	2	4	25	4	20	20	20	3	15
a_{12}	1	0	1	4	25	2	10	10	10	1	20
a_{13}	0,5	2	1	4	20	2	60	10	5	1	25
a_{14}	4	1	3	4	15	2	10	10	40	2	25
a_{21}	1	0	1	6	4	2	5	6	10	1	6
a_{22}	5	1	0	3	10	0	30	5	50	2	4
a_{23}	3	3	2	4	4	2	40	4	30	0	10
a_{24}	0	2	1	3	6	2	15	33	0	1	4
a_{31}	3	4	1	16	8	2	60	4	30	0	10
a_{32}	0	2	2	24	7	4	40	6	0	1	4
a_{33}	6	0	1	40	4	2	10	10	60	2	7
a_{34}	1	4	8	52	10	0	40	13	10	1	8

2. Необхідно скласти раціон харчування, який включає в себе продукти трьох видів Π_1, Π_2, Π_3 в кількостях відповідно не менше ніж a_1, a_2, a_3 одиниць. Для складання раціону можуть бути використані три виду сировини M_1, M_2, M_3 , які містять вказані речовини в різних співвідношеннях. Покупна ціна кожного виду сировини також різна. Вміст харчових речовин в сировині, готового продукту і ціни на кожний вид сировини наведені в таблиці.

1. За допомогою симплексного методу необхідно визначити такий набір сировини який забезпечить необхідну місткість харчових речовин в продукті і сумарна вартість його при цьому була б найменшою.

2. Скласти модель двоїстої задачі. Використовуючи відповідність між змінними прямої і двоїстої задач, та симплексну таблицю для прямої задачі записати оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Дати повний економічний аналіз основних і додаткових змінних прямої і двоїстої задач.

Харчовий	Сировина			Мінімальна місткість
продукт	M_1	M_2	M_3	речовини в продукті
Π_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1
Π_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2
Π_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3
ціна за одиницю продукції	C_1	C_2	C_3	

Параметри задачі	Номер варіанта										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_1	62	93	70	78	95	90	95	90	85	60	35
a_2	30	45	40	45	70	50	80	60	78	45	20
a_3	44	70	50	60	80	65	90	75	80	58	28
a_{11}	4	6	7	8	12	9	13	11	11	10	12
a_{12}	4	5	5	6	9	7	10	8	12	11	7
a_{13}	6	8	8	9	6	8	7	9	8	9	8
a_{21}	6	8	8	9	11	10	12	10	10	8	9
a_{22}	1	2	2	3	6	4	7	5	9	6	5
a_{23}	2	3	3	4	7	5	8	6	7	9	7
a_{31}	4	7	9	6	9	7	7	8	8	9	6
a_{32}	6	9	8	11	9	12	10	13	10	9	8
a_{33}	4	6	8	6	9	7	8	8	9	5	4
C_1	8	12	9	10	8	8	9	7	8	5	9
C_2	5	7	6	7	7	9	5	6	6	9	8
C_3	6	9	7	8	11	11	12	10	10	4	7

РОЗДІЛ 3

3.1 Транспортна задача.

Особливий клас задач лінійного програмування складають транспортні задачі. Суть транспортних задач полягає в наступному. Дано певну кількість постачальників певного продукту. І вказано скільки кожен з них пропонує цього продукту. Задається певна кількість споживачів цього ж продукту і вказується потреби кожного з них. Задається вартість перевезення одиниці продукції від певного постачальника до певного споживача. Необхідно скласти такий план перевезень, щоб усі споживачі отримали необхідну кількість продукту і при цьому сумарна вартість перевезень була б мінімальна. Умови транспортної задачі задають, як правило у вигляді таблиць.

	A_1	A_2	A_3	...	...	...	A_n
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	...	...	a_{1n}
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	...	...	a_{2n}
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	...	...	a_{3n}
...	...	...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	...	...	a_{mn}

A_i – кількість продукції, яку пропонує i -тий постачальник, $i = \overline{1, n}$

B_j – кількість продукції, яку потребує j – тий споживач, $j = \overline{1, m}$

a_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i -того постачальника до j -того споживача.

Позначимо:

X_{ij} – кількість продукції, яка перевозиться від i -того постачальника до j -того споживача.

Якщо сумарна кількість продукції, що пропонується постачальниками рівна сумарній кількості продукції, що потребують споживачі, то транспортна задача є задачею закритого типу.

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^m B_j$$

Тоді сумарна вартість перевезення буде обчислюватись за формулою:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

Вираз (1) є цільовою функцією транспортної задачі. Система обмежень буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = B_j; & j=\overline{1;m}; \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = A_i; & i=\overline{1;n}; \\ x_{ij} \geq 0 & j=\overline{1;m}; \quad i=\overline{1;n} \end{cases}$$

Дана система обмежень складена для транспортних задач закритого типу. Вона передбачає, що всю продукцію, яку має певний постачальник вивозять і потреби кожного із споживачів повністю забезпечуються.

Теорема 1 Для того, щоб транспортна задача мала розв'язок, необхідно й достатньо, щоб вона була закритою.

Якщо транспортна задача буде відкритого типу, то в системі обмежень рівняння стануть нерівностями із знаком $\leq$. Отже, транспортна задача відкритого типу, має наступну математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq B_j; & j=\overline{1;m}; \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = A_i; & i=\overline{1;n}; \\ x_{ij} \geq 0 & j=\overline{1;m}; \quad i=\overline{1;n} \end{cases}$$

$$\text{при умові, що } \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^m B_j$$

або

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = B_j; & j=\overline{1;m}; \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq A_i; & i=\overline{1;n}; \\ x_{ij} \geq 0 & j=\overline{1;m}; \quad i=\overline{1;n} \end{cases}$$

Оскільки дана задача відноситься до задач лінійного програмування то її можна розв'язувати симплексним методом.

Але очевидно, що симплексні таблиці такої задачі будуть громіздкими і весь процес розв'язування буде порівняно складним. Особливість транспортної задачі полягає в тому, що для її розрахунку існує свій метод. Для того, щоб розв'язати транспортну задачу необхідно спочатку скласти деякий початковий (опорний) розв'язок. Для цього використовується два основні методи:

1. *метод північно-західного кута* (таблиця №1).

Недоліком цього метода є те, що початковий план перевезень може бути дуже далеким від оптимального розв'язку, оскільки не враховується вартість перевезень, а тому сам розв'язок задачі, в подальшому, може бути досить довгим.

Суть цього метода полягає в тому, що поступово заповнюються клітинки (складається план перевезень), з верхнього лівого кутка в правий нижній

Таблиця 1

сп \ пос	200	50	50	150	200	50	
100	100	2	1	3	2	1	4
150	100	50	4	7	8	2	3
200			50	150			
	2			4	5	6	0
150					150		
	3					6	3
100						50	50
	3	2	2	3	2	2	4

2. Більш кращим є *метод найменшого елемента* (таблиця №2)

Суть методу найменшого елемента полягає в тому, що ми, в першу чергу, заповнюємо ті клітинки, де вартість перевезення найменша. Заповнювати таблицю можна по стовпчикам, тобто спочатку шукаємо найменшу вартість перевезення в першому стовпчику, а потім в другому і так далі.

(Заповнювати таблицю можна по рядкам, або в цілому по таблиці)

Таблиця 2

сп пос	200	50	50	150	200	50	
100	2	1	3	2	100	1	4
150	3	4	7	8	100	2	3
200	150	50					
	2	1	4	5	6	0	
150	50		50	50			
	3	2	1	5	6	3	
100				100			
	3	2	2	3	2	4	

Підрахуємо загальну вартість перевезення за таким планом:

$$Z = 100 \times 1 + 100 \times 2 + 50 \times 3 + 150 \times 2 + 50 \times 1 + 50 \times 3 + 50 \times 1 + 50 \times 5 + 100 \times 3 = 1500$$

Для оцінки даного плану перевезень на оптимальність застосуємо метод потенціалів.

Потенціалами називають такі числа u_j і v_i для яких виконується умова:

$$u_j + v_i = a_{ji}, \quad \text{для } x_{ji} \neq 0$$

(тобто, для “заповнених” перевезеннями клітинок)

Для заповнення потенціалів. Спочатку в рядку потенціалу V на першому місці поставимо число 0. Тепер від цього числа піднімаємося згору і знаходимо заповнену клітинку. (Таблиця 3).

Це клітинка ($j = 4$; $i = 1$) із перевезенням 50. Вона “допоможе” записати потенціал u_4 , а саме: $v_1 + u_4 = a_{41}$; $0 + u_4 = 3 \Rightarrow u_4 = 3$

Таблиця 3

		i =						
		1	2	3	4	5	6	
j =	сп \ пос	200	50	50	150	200	50	U
1	100					100		
2	150					100	50	
3	200	150	50					2
4	150	50		50	50			3
5	100				100			
V		0	-1	-2				

Тепер від потенціалу $u_4 = 3$ переміщаємося по рядку до іншої заповненої клітинки, наприклад із перевезенням 50-(4; 3); $v_3 + u_4 = 1$; $v_3 + 3 = 1 \Rightarrow v_3 = -2$ і т.д. Як видно, далі заповнити потенціали ми не можемо, оскільки не вистачає заповнених клітинок. В таких випадках заповнюють іде одну клітинку (якщо є в цьому потреба, то і більше) нульовим перевезенням. Візьмемо, наприклад клітинку (3 : 6) і запишемо туди перевезення 0. Тепер ця клітина вважається заповненою і це дає можливість знайти потенціал v_6 і в подальшому знайти всі інші потенціали.

В результаті отримаємо таблицю:

Таблиця 4

сп пос	200	50	50	150	200	50	U
100	2	1	3	2	100	4	4
150	3	4	7	8	100	50	5
200	150	50				0	2
150	50		50	50			3
100				100			1
V	0	-1	-2	2	-3	-2	

Далі обчислимо оцінки вільних клітинок за формулою

$$S_{ij} = a_{ij} - (u_i + v_j)$$

де S_{ij} — оцінка пустої клітинки; a_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції у відповідній клітинці; $u_i; v_j$ — потенціали.

Якщо для вільних клітинок всі оцінки $S_{ij} \geq 0$, то побудований опорний план перевезень є оптимальний. При наявності хоча б однієї від'ємної оцінки $S_{ij} < 0$ в число базисних вводять клітинку, для якої оцінка S_{ij} є мінімальною серед усіх найбільшою по модулю серед від'ємних. Для такої клітинки буде утворено цикл перерозрахунків і далі будується новий план перевезень.

Знайдемо оцінки пустих клітинок в нашій задачі

Таблиця 5

СП ПОС	200	50	50	150	200	50	u
100	-2 2	-2 1	1 3	-4 2	100 1	2 4	4
150	-2 3	0 4	4 7	1 8	100 2	50 3	5
200	150 2	50 1	4 4	1 5	7 6	0 0	2
150	50 3	0 2	50 1	50 5	6 6	2 3	3
100	2 3	2 2	3 2	100 3	4 2	5 4	1
V	0	-1	-2	2	-3	-2	

План перевезень є оптимальним, якщо в пустих клітинках (незаповнених перевезенням) відсутні від'ємні оцінки. В даному випадку від'ємні оцінки присутні, це означає, що знайдений план перевезень необхідно змінити.

Для цього серед від'ємних оцінок незаповнених клітинок вибираємо ту, яка найбільша по модулю. Якщо ж таких оцінок декілька, то вибираємо ту клітинку, в якій вартість перевезення найменша. В цю клітинку необхідно буде записати деяке перевезення. В нашому випадку найбільшою по модулю від'ємною оцінкою є -4 . Тепер, починаючи з цієї клітинки необхідно побудувати цикл перерозрахунків (Таблиця 6).

замкнену лінію, яка починається в знайденій нами клітинці. Ця лінія складатиметься лише з горизонтальних і вертикальних відрізків, причому, вершини цієї замкненої лінії повинні знаходитись лише в заповнених клітинках.

В тій клітинці, що незаповнена і з якої починали малювати замкнену лінію ставиться знак "+", потім рухаючись по лінії на вершинах по черзі ставимо знаки "+" та "-". (Таблиця 6)

Далі розглядаємо ті клітинки, де поставлений знак "-". Вибираємо серед них найменше перевезення. В нашому випадку це число 50. Це число потрібно додати до перевезень в тих клітинках, де стоїть знак "+" і відняти в тих клітинках, де стоїть знак "-".

Після перерозрахунку отримали новий план перевезень, який необхідно занести в нову таблицю.

Таблиця 6

СП ПОС	200	50	50	150	200	50	u
100	-2 2	-2 1	3	-4 +	2 100	1 4	4
150	-2 3	0 4	4 7	1 8	+	100 2	50 3
200	150 2	50 1	4 4	1 5	7 6	0 0	2
150	50 3	2	50 1	50 5	6 6	2 3	3
100	2 3	2 2	3 2	100 3	4 2	5 4	1
V	0	-1	-2	2	-3	-2	

Для того, щоб побудувати цикл перерозрахунку, спочатку будемо

Далі процес повторюється спочатку. Необхідно заповнити потенціали, знайти оцінки в пустих клітинках і по оцінкам встановити, чи є знайдений розв'язок оптимальним. Якщо ні, то побудувати цикл перерозрахунку та змінити план перевезень.

Цей процес повторюється до тих пір, поки не зникнуть від'ємні оцінки в пустих клітинках.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1.1

Знайти оптимальний план перевезень дизельного пального із трьох паливозберігаючих баз A_1 ; A_2 ; A_3 в яких міститься відповідно 3000; 150; 300 тонн пального, пального, яке призначено для п'яти АЗС: B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 ; B_5 .

Потреби АЗС відповідно становлять 80; 170; 150; 200; 130 тонн. Матриця витрат на перевезення 1 тонни палива має вигляд:

$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ 4 & 8 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Розв'язок:

Знайдемо опорний розв'язок застосувавши метод "найменшого елемента" (Таблиця 7).

Таблиця 7

ПОС \ СП	80	170	150	200	150	u
300	3	6		6		1
	4	8	150 1	2	100 1	
150	4	2	2			2
	6	+	4	150 1	0 2	
300		-	2	+	4	5
	80 6	170 6	7	50 4	9	
v	0	1	0	-1	0	

Після того як побудували опорний розв'язок, визначаємо потенціали. При визначенні потенціалів виявляємо, що в плані перевезень не вистачає однієї заповненої клітинки. Введемо нульове перевезення, заповнивши, наприклад, клітинку (2; 5) (Впишемо у цю клітинку перевезення 0. Після цього можна визначити усі потенціали.

Визначаємо оцінки пустих клітинок. Бачимо, що клітинка (2; 2) містить від'ємну оцінку. Отже знайдений план перевезень не оптимальний. Знайдемо інший, для цього побудуємо цикл перерахунку. (Таблиця 7) На від'ємних вершинах найменша кількість вантажу в клітинці (2; 4), а саме 150. Додаємо що кількість там де стоїть знак "+" і віднімаємо там де стоїть знак "-". Отримаємо новий план перевезень (Таблиця 8).

Таблиця 8

ПОС \ СП	80	170	150	200	150	u
300	4	7		7		0
	4	8	150 1	2	150 1	
150	5		2	1		1
	6	150 2	4	1	0 2	
300	80		1		3	5
	5	20 6	7	50 4	9	
v	0	1	1	-1	1	

Від'ємні оцінки відсутні, отже знайдений план перевезень є оптимальний.

Знайдемо загальну вартість перевезень

$$Z_{\min} = 150 \cdot 1 + 150 \cdot 1 + 150 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 80 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 200 \cdot 4 = 1920 \text{ (гр.од.)}$$

Відповідь: оптимальний план перевезень:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 0 & 150 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 20 & 0 & 200 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 1920 \text{ (гр. од.)}$$

Зауваження: Якщо в останній таблиці, що містить оптимальний план перевезень, хоча б одна пуста клітинка містить оцінку 0, то знайдений оптимальний план перевезень не єдиний.

Розглянемо задачу відкритого типу, тобто таку задачу, в якій загальна кількість товару, що пропонується постачальником нерівна загальній кількості товару, що потребує споживач. (Таблиця 9)

Таблиця 9

ПОС \ СП	20	70	10	50	40	110
100	1	2	2	2	4	1
50	4	3	3	3	3	2
150	1	2	4	4	2	3
200	4	3	1	1	1	4

Перевіримо чи є дана задача відкритого типу. Спочатку знайдемо загальну кількість товару, що пропонує постачальник: $100+50+150+200=500$; загальну кількість товару, що потребує споживач: 300.

Ці числа нерівні між собою. Отже задача відкритого типу. Постачальник пропонував в цілому на 200 одиниць продукції більше, ніж потребував споживач. Тому необхідно в умову задачі ввести додаткового фіктивного споживача, який потребує таку кількість товару, на яку більша пропозиція. Оскільки, споживач фіктивний, то не будуть здійснюватись ніякі перевезення, а значить вартість перевезень рівна 0. Таким чином отримали задачу закритого типу, яка може бути розв'язана методом потенціалів (Таблиця 10).

Таблиця 10

сп пос	20	70	10	50	40	110	200	U
100	20	70	10	3	5	0	2	1
	1	2	1	2	4	1	0	
150	2	0	2	3	3	50	1	2
	4	3	4	3	3	2	0	
150	-2	-1	0	3	1	60	90	3
	1	2	3	4	2	3	0	
200	1	-1	-1	50	40	1	110	3
	4	3	2	1	1	4	0	
V	0	1	0	-2	-2	0	-3	

Присутні від'ємні оцінки – це означає, що знайдений план перевезень не є оптимальним і його потрібно змінювати.

Серед від'ємних оцінок виберемо найбільшу по модулю -2 та побудуємо цикл перерозрахунку. Зробивши необхідні перетворення отримаємо новий план перевезень (Таблиця 11).

Таблиця 11

сп пос	20	70	10	50	40	110	200	U
100	0	70	10	4	6	20	2	-1
	1	2	1	2	4	1	0	
150	4	0	2	4	4	50	1	0
	4	3	4	3	3	2	0	
150	20	-2	0	4	2	40	90	1
	1	2	3	4	2	3	0	
200	4	0	0	50	40	2	110	0
	4	3	2	1	1	4	0	
V	0	3	2	-1	-1	2	-1	

сп пос	20	70	10	50	40	110	200	U
100	0 1	30 2	10 1	1 2	3 4	60 1	0 0	1
50	2 4	0 3	2 4	1 3	1 3	50 2	1 0	2
150	20 1	40 2	2 3	3 4	1 2	0 3	90 0	1
200	3 4	1 3	0 2	50 1	40 1	3 4	110 0	1
V	0	1	0	0	0	0	-1	

Від'ємні оцінки відсутні, значить знайдений розв'язок є оптимальним, тобто маємо план перевезень, який дає найменшу загальну вартість перевезень.

$$Z_{\min} = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 90 \cdot 0 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 0 + 110 \cdot 0$$

Задачі для самостійної роботи.

В m пунктах виробництва A_i є запаси однорідного продукту в кількості a_i ($i=1, \bar{m}$) одиниць. Цей продукт необхідно відвести n споживачам B_j в кількості b_j ($j=1, \bar{n}$). Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції із пункту A_i в B_j задані і складають C_{ij} ($i=1, \bar{m}; j=1, \bar{n}$).

Необхідно знайти оптимальний план транспортування при якому весь продукт із пунктів виробництва буде вивезений (в тому разі якщо попит споживачів більший, або рівний пропозиції) або попит споживачів в повній мірі буде задовільнений (в тому разі якщо пропозиція виробників буде більша) і сумарні транспортні затрати будуть мінімальні.

Умова задачі представлена у вигляді.

$$C = \begin{array}{c|cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & a_1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & a_2 \\ \hdashline C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} & a_m \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_n & \end{array}$$

1)

6	5	7	5	100
1	2	8	6	150
8	10	15	2	60
75	90	60	75	bj/ai

2)

4	1	9	7	110
5	6	1	12	190
6	3	8	9	100
80	80	170	80	bj/ai

3)

2	3	4	1	2	100
2	4	6	3	1	150
3	4	5	7	2	50
6	3	9	9	1	200
120	150	30	200	50	

4)

4	3	2	1	50
4	3	1	2	120
1	4	5	2	60
1	2	2	4	120
70	110	60	120	

5)

4	7	2	3	60
2	5	6	1	130
1	1	4	4	160
2	1	7	6	140
70	120	150	130	

6)

5	1	2	3	300
6	3	7	1	200
4	5	3	2	500
2	4	6	4	700
240	430	680	400	

7)

3	1	5	4	2	200
6	4	2	7	3	450
1	2	3	4	1	500
5	2	3	4	6	100
300	400	200	100	180	

8)

5	3	1	4	2	6	1780
4	2	3	6	1	3	2000
1	3	7	4	5	2	1530
3	4	6	7	1	5	2860
850	1870	1900	1500	1000	800	

9)

2	4	3	1	6	3	3000
5	7	4	5	2	1	5000
3	6	1	4	3	7	1250
1	3	2	6	4	5	7300
2300	3200	4000	1760	150	2200	

10)

4	1	2	5	6	100
7	3	4	2	5	70
6	4	7	1	8	130
2	5	6	4	7	150
100	120	70	150	60	

РОЗДІЛ 4.

4.1 Загальна задача нелінійного програмування.

Графічний метод розв'язку задач НЛП.

Часто на практиці приходиться зустрічатись із задачами у яких цільова функція, або деякі із обмежень в системі є нелінійними. Такі задачі відносять до задач нелінійного програмування. Математична модель таких задач має вигляд:

$$\begin{cases} \max(\min) Z = f(x_1; x_2; \dots, x_n) \\ d_i(x_1; x_2; \dots, x_n) \leq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

де $Z=f(x_1; x_2; \dots, x_n)$ – є цільова функція, яка може бути нелінійною, або ж хоча б одна із функцій $d_i(x_1; x_2; \dots, x_n)$ системи обмежень, є нелінійною.

Приклад 1.

Знайти план виробництва продукції, який забезпечив би максимальну рентабельність, якщо відомо d_i – затрати виробничих фондів, необхідних для виготовлення однієї одиниці продукції $P_i(i = \overline{1, n})$, c_i – вартість одиниці продукції, a_{ij} – норми витрат ресурсів, b_j – об'єм ресурсів ($j = \overline{1, m}$). Математична модель такої задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \max Z = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^n d_i \cdot X_i} \\ a_{ji} x_i \leq b_j; \quad j = \overline{1, m} \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Приклад 2.

Дано функцію споживача $Z=x_1 \cdot x_2$, де $x_1; x_2$ – це деякі блага. p_1, p_2 – ціна тих благ, I – доход споживача. Тоді можна поставити задачу на знаходження таких значень x_1 і x_2 , що дають максимум $Z=x_1 \cdot x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Ряд задач нелінійного програмування можна розв'язати графічним методом. Для цього задача не повинна містити більше ніж дві змінні.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1.1

Розв'язати графічним методом задачу НЛП.

$$\max(\min) Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

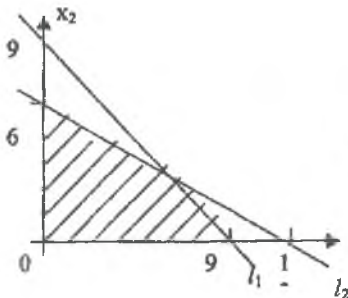
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок:

1. Побудуємо область допустимих розв'язків, тобто множину точок площини, координати якої задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

для цього нерівності запишемо у вигляді рівнянь, та в системі координат $x_1 O x_2$ побудуємо ті лінії, які вони задають (Рис. 11).



$$l_1: x_1 + 2x_2 = 12 \quad - \quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} = 1$$

$$l_2: x_1 + x_2 = 9 \quad - \quad \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{9} = 1$$

Рис. 11

2. Розглянемо функцію $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, це функція двох змінних. У просторі вона задає деяку поверхню (в даному випадку параболоїд). Знайти максимум деякої функції, на області допустимих значень, це означає: серед усіх точок поверхні, які проєктуються на область допустимих значень, знайти таку точку, значення функції в якій найбільше (тобто значення координати Z цієї точки найбільше; іншими словами: серед усіх точок поверхні, які проєктуються на область допустимих значень, дана точка лежить найвище).

Розв'язати дану задачу можна за допомогою ліній рівня функції.

Лінійю рівня функції $Z = f(x_1, x_2)$ називають лінію, що описується рівнянням $f(x_1, x_2) = h$, де $h = \text{const}$

В даній задачі лінії рівня будуть задаватись рівняннями:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = h, \text{ (де } h = \text{const)}$$

тобто лінії рівня це кола із центром в точці $O(2; 3)$ і радіусами $R = \sqrt{h}$. Кожна лінія рівня є сукупність точок поверхні, які мають однакове значення координати Z (тобто знаходиться на однаковій висоті) (Рис. 12).

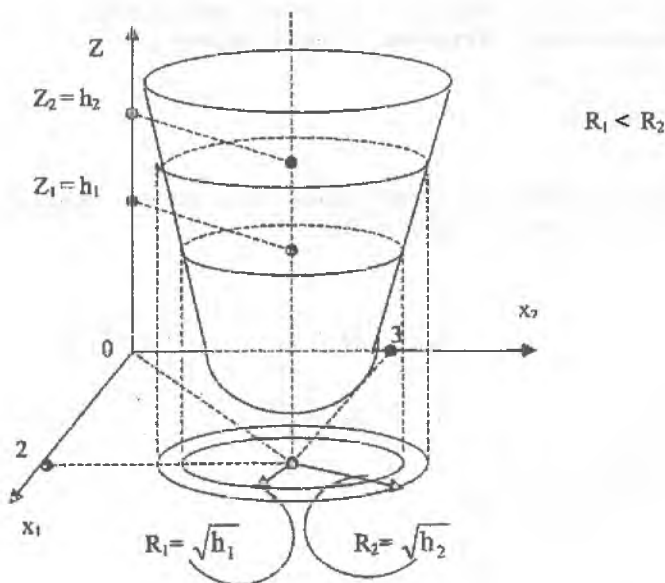


Рис. 12

Для розв'язку задачі не має необхідності будувати саму поверхню, яку задає функція, достатньо в площині x_1Ox_2 зобразити проєкції ліній рівня. Як

видно з рисунка, для даної функції, чим вище знаходиться лінія рівня, тим більший її радіус.

Отже, щоб знайти максимум заданої функції, необхідно побудувати таке коло в площині x_1Ox_2 з центром в точці $O(2; 3)$, радіус якого найбільший із можливих, але при цьому, щоб хоч одна точка цього кола лишилась би на області допустимих розв'язків (або необхідно знайти точку області допустимих розв'язків, яка найбільше віддалена від точки $O(2; 3)$)

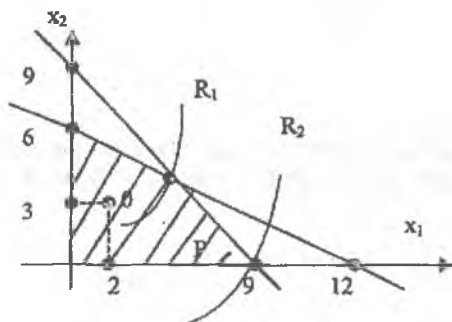


Рис. 13

Таким колом є коло із радіусом R_2 (Рис. 13), воно проходить через точку $P(9; 0)$, ця точка і є точкою максимуму заданої функції.

Знайти мінімум функції — це фактично знайти точку поверхні, що лежить “нижче” від осей. Очевидно, що $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = h \geq 0$; це означає, що найменше значення, яке може набувати функція — це 0. Це значення функція набуває в точці $O(2; 3)$. Ця точка лежить в області допустимих розв'язків, а отже є розв'язком.

$$\text{Таким чином} \quad \max \rightarrow (9; 0) \quad Z_{\max} = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$$

$$\min \rightarrow (2; 3) \quad Z_{\min} = (2-2)^2 + (3-3)^2 = 0$$

$$\text{Відповідь: } \max: x_1 = 9; x_2 = 0; Z_{\max} = 58; \min: x_1 = 2; x_2 = 3; Z_{\min} = 0.$$

Зауваження: Для задач нелінійного програмування характерно те, що оптимальні розв'язки (якщо вони існують) містяться на межі області допустимих розв'язків. Для задач нелінійного програмування характерна можливість розміщення оптимальних розв'язків в середині області допустимих розв'язків.

Задача 1.2

Розв'язати задачу НЛП графічним методом.

$$\max(\min) Z = 2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок:

(Область допустимих розв'язків в цьому прикладі така ж, як і в попередньому прикладі). Розглянемо цільову функцію; лінії рівня задаються рівняннями:

$$2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2 = h,$$

або

$$\frac{(x_1 - 5)^2}{h/2} + \frac{(x_2 - 7)^2}{h} = 1$$

Це рівняння еліпсів. Центром кожного з цих еліпсів буде точка $O'(5; 7)$, а велика і мала півосі мають, відповідно, довжини $\sqrt{\frac{h}{2}}$ і $\sqrt{h}$. Точка $O'(5; 7)$

знаходиться за межами області допустимих розв'язків. Чим вище лінія рівня, тим більше значення h , а значить, тим більшими будуть довжини півосей $\sqrt{\frac{h}{2}}$;

$\sqrt{h}$. Тому лінією найнижчого рівня, яка має спільну точку з областю допустимих розв'язків, буде еліпс із точкою дотику M (Рис. 14). Для визначення координат точки M використаємо умову: $k_1 = k_2$, де k_1 – кутовий коефіцієнт прямої l_1 , а k_2 – кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса в точці M .

Очевидно, що $k_1 = -\frac{1}{2}$ (дійсно, $x_1 + 2x_2 = 12 \Rightarrow 2x_2 = -x_1 + 12 \Rightarrow$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 6 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}.$$

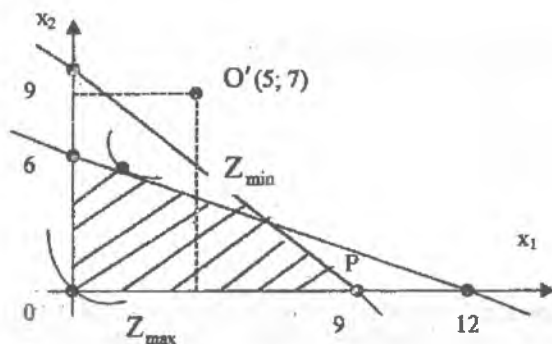


Рис. 14

Кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса обчислюється за формулою

$$k_2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}$$

(як кутовий коефіцієнт дотичної до лінії яка задана неявною функцією)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2(x_1 - 5); \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = x_2 - 7 \text{ отже } k_2 = -\frac{2(x_1 - 5)}{x_2 - 7}.$$

Оскільки точка M лежить на прямій l_1 то її координати повинні задовольняти рівняння цієї прямої, тому можна скласти систему:

$$\begin{cases} -\frac{2(x_1 - 5)}{x_2 - 7} = -\frac{1}{2}, \\ x_1 + 2x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо: $x_1 = \frac{38}{9}$; $x_2 = \frac{35}{9}$

$$Z_{\min} = 2 \cdot \left(\frac{38}{9} - 5\right)^2 + \left(\frac{35}{9} - 7\right)^2 = \frac{98}{9}$$

Лінією найвищого рівня, яка має спільну точку з областю допустимих розв'язків буде еліпс, який проходить через точку $O(0; 0)$, або точку $P(9; 0)$. По рисунку не завжди можна точно визначити яка саме, тому оскільки $Z(0; 0) = 99$ а $Z(9; 0) = 81$ то лінія найвищого рівня проходить через точку $O(0;0)$ і $Z_{\max} = 99$.

$$\text{Відповідь: } \bar{x}_{\max} = (0;0) Z_{\max} = 99; \quad \bar{x}_{\min} = \left(\frac{38}{9}; \frac{35}{9}\right) Z_{\min} = \frac{98}{9}.$$

Задача 1.3

Розв'язати графічним методом задачу НЛПІ.

$$\max(\min) Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 1, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 25, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок:

1. Спочатку побудуємо область допустимих розв'язків. Для цього нерівності системи запишемо у вигляді рівнянь та побудуємо лінії які вони задають:

$$l_1 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$$

$$l_2 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$$

$$l_3 : x_1 + x_2 = 5$$

лінія l_1 є коло із центром в точці $P(4; 2)$ і радіусом 1,

лінія l_2 є коло із центром в точці $P(4; 2)$ і радіусом 5,

лінія l_3 є пряма, перепишемо її рівняння у вигляді $\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1$.

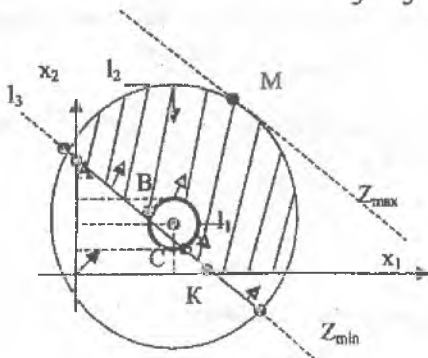


Рис. 15

Цільова функція є лінійною функцією, тому лініями рівня будуть прямі, загальне рівняння яких $x_1 + x_2 = h$. Градієнт цільової функції – $\text{grad}Z = (1; 1)$, він вкаже напрям зростання значення функції. Як видно із рисунка, розв'язком задачі на мінімум, буде множина точок відрізків АВ і СК. Як приклад можна взяти точку $K(5; 0)$ тоді $Z_{\min} = 5$. Максимуму функції відповідає точка М. Щоб знайти її координати, треба використати слідуючі умови. Лінія рівня є дотичною до кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$ в точці М і при цьому її кутовий коефіцієнт $k_1 = -1$. (дійсно, $x_1 + x_2 = h \Rightarrow x_2 = -x_1 + h \Rightarrow k_1 = -1$). З іншого боку кутовий коефіцієнт обчислюється за формулою

$$k_2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = -\frac{2(x_1 - 4)}{2(x_2 - 2)}$$

$$(\text{де } \varphi(x_1; x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 0).$$

Точка М належить колу l_2 отже маємо систему:

$$\begin{cases} -\frac{2(x_1 - 4)}{2(x_2 - 2)} = -1; \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4 = x_2 - 2; \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 2; \\ (x_2 + 2 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25. \end{cases}$$

$$(x_2 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25;$$

$$x_2 - 2 = \frac{5}{\sqrt{2}};$$

$$x_2 = 2 + \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{тоді} \quad x_1 = 2 + \frac{5}{\sqrt{2}} + 2 = 4 + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Отже максимум функція набуває в точці $M\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{причому } Z_{\max} = 4 + \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 6 + 5\sqrt{2}.$$

Задачі для самостійної роботи.

Графічно розв'язати задачі НЛП.

$$1. \max(\min)Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \max(\min)Z = -x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$3. \max(\min)Z = \frac{1}{2} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14; \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$4. \max(\min)Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$5. \max(\min)Z = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 8)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

4.2 Задачі дробово – лінійного програмування.

До задач дробово – лінійного програмування (ДЛП) відносяться задачі, математична модель яких може бути представлена у вигляді:

$$\max Z = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \times x_i + C_o}{\sum_{i=1}^n d_i \times x_i + d_o}$$

$$\begin{cases} q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j \\ j = \overline{1, m} \end{cases}$$

Де функції $q_j(x_1; x_2; \dots; x_n)$ є лінійними. Такі задачі можуть бути приведені до задач ЛП шляхом заміни змінної:

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n d_i x_i + d_0} ; \quad y_1 = x_1 y_0 = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^n d_i x_i + d_0} ;$$

$$y_n = x_n y_0 = \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n d_i x_i + d_0}$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 2.1

$$\max Z = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ x_i \geq 0; i=1,2 \end{cases}$$

Розв'язок:

Візьмемо цільову функцію задачі. Поділимо почленно чисельник на знаменник.

$$Z = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 3 \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

Введемо нові змінні:

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2} ; \quad y_1 = x_1 y_0 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} ; \quad y_2 = x_2 y_0 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

Тоді цільова функція набуде вигляду:

$$Z = 3y_1 + y_2$$

За умовою задачі $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$. Значить знаменник дробу $\frac{1}{x_1 + x_2}$ буде невід'ємним числом (але при цьому він не повинен дорівнювати 0), а значить $y_0 > 0$. А отже, саме цей дріб, а значить і змінна y_0 , може бути лише додатнім:

$\frac{1}{x_1 + x_2} = y_0 > 0$, тому, якщо, під час розв'язку задачі, змінна y_0 виявиться рівна

0, то це означатиме, що вихідна задача розв'язку немає.

Очевидно, що змінні y_1 та y_2 також будуть невід'ємними, оскільки чисельник і знаменник цих змінних невід'ємні.

Розглянемо систему обмежень: поділимо обидві частини першої нерівності на вираз (x_1+x_2) .

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\leq 4 \quad |:(x_1+x_2) \\ \frac{x_1}{x_1+x_2} + 2 \frac{x_2}{x_1+x_2} &\leq \frac{4}{x_1+x_2} \end{aligned}$$

Тоді ми можемо ввести нові змінні, та отримати нову нерівність:

$$\begin{aligned} y_1+2y_2 &\leq 4y_0; \\ y_1+2y_2-4y_0 &\leq 0 \end{aligned}$$

Розглянемо другу нерівність:

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2 &\leq 15 \quad |:(x_1+x_2) \\ 5 \frac{x_1}{x_1+x_2} + 3 \frac{x_2}{x_1+x_2} &\leq \frac{15}{x_1+x_2}; \\ 5y_1+3y_2-15y_0 &\leq 0 \end{aligned}$$

Таким чином, математична модель даної задачі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \max Z &= 3y_1+y_2 \\ \begin{cases} y_1+2y_2-4y_0 \leq 0; \\ 5y_1+3y_2-15y_0 \leq 0; \\ y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0; \quad y_0 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Вихідна задача мала 2 змінні. Дана модель має 3 змінні. Отже, потрібно ввести ще одне обмеження. Для цього запишемо дріб, чисельник і знаменник якого рівні знаменнику цільової функції. Очевидно, що такий дріб рівний 1.

$$\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} = \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_1+x_2} = y_1+y_2=1$$

Остаточна математична модель набуває вигляду:

$$\begin{cases} \max Z = 3y_1+y_2 \\ y_1+2y_2-4y_0 \leq 0; \\ 5y_1+3y_2-15y_0 \leq 0; \\ y_1+y_2 = 1; \\ y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0; \quad y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Дана задача є задачею лінійного програмування і тому її можна розв'язати симплексним методом. Зведемо цю задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 4y_0 + y_3 = 0; \\ 5y_1 + 3y_2 - 15y_0 + y_4 = 0; \\ y_1 + y_2 + \omega_1 = 1; \\ y_0 > 0; \quad y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,4} \\ \max Z = 3y_1 + y_2 - M\omega_1 \end{cases}$$

Побудуємо симплексну таблицю і розв'яжемо дану задачу:

БЗ	СБ	Ао	y ₁	y ₂	y ₀	y ₃	y ₄	ω ₁
			3	1	0	0	0	-M
y ₃	0	0	1	2	-4	1	0	0
y ₄	0	0	5	3	-15	0	1	0
ω ₁	-M	1	1	1	0	0	0	1
Z _j -C _j		0	-3	-1	0	0	0	0
		-M	-M	-M	0	0	0	0
y ₁	3	1	1	1	0	0	0	6/15
y ₀	0	8/23	0	2/15	1	0	7/35	1/15
y ₃	0	1/3	0	23/15	0	1	-4/15	7/15
Z _j -C _j		3	0	2	0	0	0	3
		0	0	0	0	0	0	M

(наведено тільки останню і першу таблиці)

Розв'язок даної задачі має вигляд:

$$y_0 = \frac{8}{23}; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = \frac{1}{3}; \quad y_4 = 0; \quad (y_5 = 0); \quad \omega_1 = 0$$

Знайдемо розв'язок вихідної задачі, використавши формули:

$$y_1 = x_1 \times y_0; \quad y_2 = x_2 \times y_0 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{y_0}; \quad x_2 = \frac{y_2}{y_0}$$

$$x_1 = \frac{1}{8/23} = \frac{23}{8} \quad x_2 = \frac{0}{8/23} = 0$$

$$\text{Відповідь: } Z_{\max} = 3; \quad x = \left(\frac{23}{8}; 0\right)$$

Задача 2.2

$$\min Z = \frac{2x_1 - 3x_3 + 4}{x_1 + x_2 + 6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4; \\ x_1 - 2x_3 = 5; \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'язок:

Розглянемо цільову функцію:

$$Z = \frac{2x_1 - 3x_3 + 4}{x_1 + x_2 + 6} = 2 \frac{x_1}{x_1 + x_2 + 6} - 3 \frac{x_3}{x_1 + x_2 + 6} + 4 \frac{1}{x_1 + x_2 + 6} = 2y_1 - 3y_3 + 4y_0$$

Перетворимо нерівності системи обмежень:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \quad \backslash : (x_1 + x_2 + 6);$$

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + 6} + 2 \frac{x_2}{x_1 + x_2 + 6} - 3 \frac{x_3}{x_1 + x_2 + 6} \leq \frac{4}{x_1 + x_2 + 6};$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 - 4y_0 \leq 0;$$

$$x_1 - 2x_3 = 5 \quad \backslash : (x_1 + x_2 + 6);$$

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + 6} - 2 \frac{x_3}{x_1 + x_2 + 6} = \frac{5}{x_1 + x_2 + 6};$$

$$y_1 - 2y_3 - 5y_0 = 0$$

Складемо додаткове обмеження:

$$\frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 6} = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + 6} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + 6} + \frac{6}{x_1 + x_2 + 6} = y_1 + y_2 + 6y_0 = 1$$

Математична модель набуває вигляду:

$$\min Z' = 2y_1 - 3y_3 - 4y_0 + y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - 4y_0 \leq 0; \\ y_1 - 2y_3 - 5y_0 = 0; \\ y_1 + y_2 + 6y_0 = 1; \\ y_0 > 0; \quad y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3} \quad \omega_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Приведемо цю задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - 4y_0 + y_4 = 0; \\ y_1 - 2y_3 - 5y_0 + \omega_1 = 0; \\ y_1 + y_2 + 6y_0 + \omega_2 = 1; \\ y_0 > 0; y_i \geq 0; i=1;4 \quad \omega_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\min Z' = 2y_1 - 3y_3 + 4y_0 + M\omega_1 + M\omega_2$$

БЗ	C _B	A ₀	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₀	ω ₁	ω ₂
			2	0	-3	0	4	М	М
y ₄	0	0	[1]	2	1	1	-4	0	0
ω ₁	М	0	1	0	-2	0	-5	1	0
ω ₂	М	1	1	1	0	0	6	0	1
Z _j - C _j		0	-2	0	3	0	-4	0	0
		М	<u>2М</u>	М	-2М	0	М	0	0
y ₁	2	0	1	2	1	1	-4	0	0
ω ₁	М	0	0	-2	-3	-1	-1	1	0
ω ₂	М	1	0	-1	-1	-1	[10]	0	1
Z _j - C _j		0	0	4	5	2	-12	0	0
		М	0	-3М	-4М	-2М	<u>9М</u>	0	0
y ₂	2	4/10	1				0	0	
ω ₁	М	1/10	0				0	1	
y ₀	4	1/10	0	-1/10	-1/10	-1/10	1	0	1/10
Z _j - C _j		12/10	0	28/10	38/10	8/10	0	0	12/10
		1/10М	0	-21/10М	-31/10М	-11/10М	0	0	-9/10М

Задача на пошук мінімуму, критерієм оптимальності розв'язку є відсутність додатних оцінок. В нижньому рядку оцінок додатних чисел не має; над нулями, у верхньому рядку оцінок, також стоять нулі. Таким чином знайдений розв'язок є оптимальний. Але в базисі присутня ненульова змінна

$\omega_1 = \frac{1}{10}$. Це означає, що вихідна задача розв'язку не має, бо система обмежень несумісна.

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати задачі дробово - лінійного програмування використавши симплекс-метод.

$$1. \min Z = \frac{-3x_1 + 3x_2}{3 + x_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$3. \min Z = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5; \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \max Z = \frac{x_1 - x_2}{2x_1 + 3x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - x_2 \leq 10; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$4. \max Z = \frac{x_1 - 2x_2}{3 + x_2}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 - 4x_2 \leq 2; \\ x_1 - x_2 \leq 5; \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

РОЗДІЛ 5

5.1 Цілочисельне лінійне програмування

В багатьох задачах оптимального планування значення невідомих вказує на кількість одиниць того чи іншого обладнання, автомашин, поголів'я худоби і т.д., тобто є цілими числами. Задачі лінійного програмування, в яких допустимі множини включають також вимогу цілочисельності всіх (або деяких) змінних, називаються задачами цілочисельного лінійного програмування.

Прикладом математичної моделі такої задачі є:

$$\begin{cases} \max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad ; (i=1; 2; 3; \dots; m) \\ x_j \geq 0, \quad (j=1; 2; 3; \dots; n) \\ x_j \in Z, \quad j \in N_1 \end{cases}$$

де N_1 деяка підмножина множини $\{1; 2; 3; \dots; n\}$.

Якщо $N_1 = \{1; 2; 3; \dots; n\}$, то це буде задача повністю цілочисельного лінійного програмування, у протилежному випадку, ми маємо справу з задачею частково цілочисельного лінійного програмування.

Одним із ефективних методів розв'язування задач ЦЧЛП є метод Гоморі, який полягає в послідовному відокремленні від допустимої множини нецілочисельної задачі ЛП підмножин, які не містять точок з цілими координатами. Таке відокремлення здійснюється введенням у задачу деяких додаткових обмежень.

Розглянемо алгоритм методу Гоморі на прикладі:

$$\left. \begin{aligned} \max Z &= 20x_1 + 40x_2; \\ \left[\begin{array}{ll} 2x_1 + 5x_2 \leq 1600 & ; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 3000 & ; \\ x_1 \geq 0; & x_2 \geq 0 \end{array} \right] & (1) \end{aligned} \right\} (I^*) \\ x_1, x_2 \in Z$$

Розв'язок:

1. Спочатку, за допомогою симплекс - методу, розв'язують задачу лише при обмеженнях (1) (тобто задачу нецілочисельного лінійного програмування).

Запишемо дану задачу в канонічному вигляді:

$$\max Z = 20x_1 + 40x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1600; \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 3000; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$

$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0.$$

Початкова симплекс - таблиця має вигляд:

БЗ	C _Б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			20	40	0	0
X ₃	0	1600	2	5	1	0
X ₄	0	3000	5	6	0	1
Z ₀ - C _j		0	-20	-40	0	0

В процесі розв'язку (друга таблиця пропущена) отримаємо наступну симплекс-таблицю:

БЗ	C _Б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			20	40	0	0
X ₂	40	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{13}$
X ₁	20	$415\frac{5}{13}$	1	0	$\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$
Z ₀ - C _j		$14461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$

Ця таблиця містить оптимальний розв'язок нецілочисельної задачі ЛПІ.

$x_1^0 = 415\frac{5}{13}$; $x_2^0 = 153\frac{11}{13}$ (2), даний розв'язок не може бути розв'язком нецілочисельної задачі, тому необхідно перейти до наступного етапу.

2. серед дробових частин розв'язку (2) виберемо ту, що є найбільшою.

$$\max(\{x_1^0\}, \{x_2^0\}) = \max\left(\left\{415\frac{5}{13}\right\}; \left\{153\frac{11}{13}\right\}\right) = \frac{11}{13} = \{x_2^0\}$$

отже рядок останньої симплексної таблиці, що відповідає змінній x_2 допоможе побудувати додаткове лінійне обмеження.

$$\left\{\frac{5}{13}\right\}x_3 + \left\{-\frac{2}{13}\right\}x_4 \geq \frac{11}{13}$$

тобто $\sum_{j=1}^n \{a_{ij}^*\} x_j \geq \{x_i^0\}$, де x_i^0 змінна оптимального розв'язку, що має

найбільшу дробову частину, a_{ij}^* - число, що стоїть у рядку змінної x_i^0 в останній симплексній таблиці.

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_2 \geq \frac{11}{13}; \quad \left(-\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$$

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 - x_5 = \frac{11}{13};$$

$$-\frac{5}{13}x_3 - \frac{11}{13}x_4 + x_5 = -\frac{11}{13}.$$

допишемо дане обмеження до останньої симплекс - таблиці. Тепер отримаємо нову таблицю:

БЗ	С _б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
			20	40	0	0	0
X ₂	40	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0
X ₁	20	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	0
X ₅	0	$-\frac{11}{13}$	0	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{11}{13}$	1
Z _j - C _j		$14461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$	0

Щоб далі розв'язати дану задачу (в стовпчику A₀ з'явилося від'ємне число) треба виконати наступні операції.

А) Розглянемо рядок, що містить від'ємне число в стовпчику A₀, і виберемо будь-яке від'ємне число в цьому рядку. Вибране число стоїть в стовпчику змінної, що треба ввести у базис.

Б) Для чисел з однаковими знаками складемо симплексні відношення.

В) Найменше симплексне відношення визначає ту змінну, яку виводимо із бази.

Г) Складаємо нову таблицю, виконуючи симплексні перетворення.

В нашій задачі, в рядку змінної x_5 візьмемо число $-\frac{11}{13}$, для даного стовпчика знайдемо симплексні відношення.

$$\left(-\frac{11}{13}\right) : \left(-\frac{11}{13}\right) = 1; \quad 415 \frac{5}{13} : \frac{5}{13} = 1080$$

найменше симплексне відношення 1. Отже замість змінної x_5 введемо змінну x_4

БЗ	C_B	A_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
			20	40	0	0	0
X_2	40	154					
X_1	20	415					
X_5	0	0					
$Z_j - C_j$		14461	0	0	$\frac{60}{11}$	0	$\frac{20}{11}$

Маємо оптимальний цілочисельний розв'язок розширеної задачі. Тоді оптимальний розв'язок вихідної задачі, враховуючи обмеження (1*), $\bar{x} = (415; 154)$ $Z_{\max} = 14461$.

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати методом Гоморі слідуючи задачі:

1.

$$\max Z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 \leq 44; \\ x_1 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

2.

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \leq 24; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

3.

$$\max Z = 7x_1 - 9x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9; \\ 3x_2 \leq 7; \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

4.

$$\max Z = x_1 - 7x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 - 3x_2 \leq 2; \\ x_1 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

5.

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

6.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 1; \\ 4x_1 - x_2 \leq 15; \\ x_1 + 3x_2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлі числа} \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Богаєнко Б.М., Григорків В.С. Математичне програмування Київ; Лотос, 1996 – 265 с.
2. Аманов С.А. Линейное программирование — М.: Наука, 1981 – 312 с.
3. Карасев А.И., Аксютин З.М. Курс высшей математики для экономических вузов. — 4.2. — М.: Высш. шк., 1983 – 280 с.
4. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1979-11 бс.
5. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. — М.: Высш. шк., 1980 – 342 с.
6. Калихман Л.М. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высш. шк., 1980 – 342 с.
7. Вивальнюк Л.М. Елементи лінійного програмування. Вища шк., 1975.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А., Исследование операций. — К.: Высш. шк., 1984. – 212 с.
9. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Под общей редакцией профессора А. В. Кузнецова. — Минск, 1995. – 382 с.

Навчальне видання

*Володимир Вікторович Лаговський
Євген Анатолійович Сторожук
Микола Миколайович Семко*

**Математичне програмування
у вправах і задачах**

Видавництво Українського фітосоціологічного центру
Київ-28, а.с. 2, тел/факс (044) 264-11-61

Підписано до друку 22.08.2001. Формат 60х84 1/16
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Тираж 300 прим.
Умовн. друк. арк. 7.7. Умовн. вид. арк. 8.1. Зам. № 155

Надруковано у друкарні Українського фітосоціологічного центру
Київ-22, просп. акад. Глушкова 2/12, кімн. 214