ДЕРЖАВНА ФІСКАЛЬНА СЛУЖБА УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

СЕРІЯ «ПОДАТКОВА ТА МИТНА СПРАВА В УКРАЇНІ»

Серію «Митна справа в Україні» засновано в 2001 р. Її продовженням є серія «Податкова та митна справа в Україні», яку започатковано в 2015 р.

О. Ю. Бащук,
В. О. Клименко,
В. О. Клименко

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ. ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія

Навчальний посібник

За загальною редакцією О. Ю. Бащук

Ірпінь
2016

УДК 512.64:514.12(075.8)
ББК 22.11я73
Б33

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного університету ДПС України
(Протокол № 7 від 26 лютого 2015 року)

Рецензенти:
Мейш В. Ф., доктор фізико математичних наук, професор (Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України);
Кучменко С. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент (Національний університет ДПС України).

Бащук О. Ю.
Б33 Математика для економістів. Вища математика. Частина І. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посіб. / О. Ю. Бащук, В. О. Клименко, В. О. Клименко; за заг. ред. О. Ю. Бащук. – Ірпінь: Видавництво Національного університету ДПС України, 2016. – 126 с. (Англ. мовою). – (Серія «Податкова та митна справа в Україні», т. 51).

ISBN 978-966-337-401-7

Навчальний посібник складено на основі досвіду роботи авторів відповідно до типових програм для вищих навчальних закладів економічного профілю для підготовки фахівців на базі ОКР молодшого спеціаліста.

Містить два розділи (лінійна алгебра, аналітична геометрія), що складаються з 12 лекцій. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв'язування типових задач.

Орієнтовано на студентів економічних спеціальностей ВНЗ з поглибленим вивченням англійської, а також всіх, хто бажає самостійно вивчати англійську математичну термінологію, і тим самим полегшити процес опанування пакетами математичних програм.

УДК 512.64:514.12(075.8)
ББК 22.11я73

© О. Ю. Бащук, В. О. Клименко, В. О. Клименко, 2016
© Видавництво Національного університету ДПС України, 2016

ISBN 978-966-337-401-7

STATE FISCAL SERVICE UKRAINE
NATIONAL UNIVERSITY OF STATE TAX SERVICE OF UKRAINE

O. Y. Baschuk,
V. O. Klymenko,
V. O. Klymenko

MATHEMATICS FOR ECONOMISTS. THE HIGHEST MATHEMATICS

Part I. Linear algebra. Analytic geometry

The training manual

Revised by O. Y. Bashchuk

Irpin
2016

UDK 512.64:514.12(075.8)
BBK 22.11я73
B33

Approved for publication by
the Academic Council of National State Tax University of Ukraine
(Minutes № 7 dated February, 26, 2015)

Reviewers:
Meish V. F., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (The Institute of Mechanics after S.P. Timoshenko National Academy of Sciences of Ukraine);
Kuchmenko S. M., Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor (National University of State Tax Service of Ukraine).

Bashchuk O. Y.
B33 Mathematics for Economists. The Highest Mathematics. Chapter I. Linier Algebra / O. Y. Bashchuk, V. O. Klymenko, V. O. Klymenko; revised by O.Y. Bashchuk – Irpin: National University of State Tax Service of Ukraine, 2016. – 126 p. – (English).

ISBN 978-966-337-401-7

The training manual is written based on the authors' experience following the typical courses for Economic institutes and training specialists on the basis of junior specialist.

The manual contains two chapters: "Linier Algebra" and "Analytic Geometry" including 12 lectures. Theoretical materials are complemented by examples of typical tasks solution.

The training manual is oriented at the students of economic institutes with in-depth study of English and for those who would like to independently study English mathematical terminology and facilitate knowledge of mathematics program packages.

UDK 512.64:514.12(075.8)
BBK 22.11я73

© O. Y. Bashchuk, V. O. Klymenko, V. O. Klymenko, 2016
© National State Tax University of Ukraine, 2016

ISBN 978-966-337-401-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....7

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.....8
1. Матриці та їх види. Дії над матрицями 8
2. Визначники та їх властивості 12
3. Векторний простір 16
4. Ранг матриці.....20
5. Обернена матриця 22
6. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (далі – СЛАР) 24
6.1. Розв'язування систем з однаковою кількістю рівнянь та невідомих.....25
6.1.1. Матричний метод розв'язання 25
6.1.2. Теорема Крамера.....26
6.2. Розв'язування систем m-лінійних алгебраїчних рівнянь з n-невідомими.....28

РОЗДІЛ ІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.....36
1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.....36
2. Скалярний добуток 38
3. Векторний добуток 42
4. Мішаний добуток.....43
5. Пряма на площині 44
6. Пряма і площина в просторі 50
7. Пряма в просторі.....54
8. Основні криві другого порядку 57

ЛІТЕРАТУРА.....125

CONTENT

PREFACE 65

PART I. LINEAR ALGEBRA 66
1. Matrices, their kinds, operations for matrices 66
2. Determinants and their properties 70
3. Vectors spaces 74
4. Rank of a matrix 78
5. Inverse matrix 80
6. Systems of linear algebraic equations 82
   6.1. The solving of systems with the same number of equations and variables 83
      6.1.1. Matrix method for solving equation 1 83
      6.1.2. Kramer's theorem 84
   6.2. The solving of systems of m-linear equations with n-variables 86

PART II. ANALYTIC GEOMETRY 94
1. Analytic geometry subject and method. The simplest problems 94
2. The scalar product of two vectors 96
3. The vector product 100
4. The triple product 101
5. Equation of a line on the plane 102
6. Equations of a plane and a line in space 108
7. A line in space 113
8. The main curves of the second order 117

BIBLIOGRAPHY 125

ПЕРЕДМОВА

Підготовка фахівців економічного профілю вимагає засвоєння фундаментальних знань з вищої математики як для подальшого глибокого вивчення багатьох базових та професійно орієнтованих дисциплін, так і для застосування їх у практичній діяльності.

При цьому студенти-економісти повинні мати не лише достатню математичну підготовку, а й володіти, як мінімум, англомовною математичною термінологією.

Навчальний посібник допоможе студентам у майбутньому опанувати такі важливі для практики курси «Математичне програмування» та «Економіко-математичне моделювання». Він містить типові задачі, приклади та зразки їх розв'язування, що дозволяє самостійно опанувати термінологією та методикою розв'язування прикладів, полегшити вивчення англомовної літератури та розв'язування економічних задач.

Видання містить два розділи: «Лінійна алгебра» та «Аналітична геометрія», що складається з 12 лекцій, написаних англійською мовою.

Автори щиро сподіваються, що цей навчальний посібник допоможе студентам засвоїти не тільки розділи курсу з вищої математики, а й підняти свій рівень знання англійської мови та добре оволодіти англомовною математичною термінологією.

Автори наперед вибачаються перед читачами за можливі помилки друку, беруть до уваги усі пропозиції та зауваження щодо оформлення і змісту цього посібника.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Матриці та їх види. Дії над матрицями

Прямокутна таблиця дійсних чисел a_{ij}, де $i = 1,2,...\,\mathrm{m}$ та $j = 1,2,...n$, складена із m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}....a_{1n} \\ .. \ . \ . \ .. \\ a_{m1}.. \ .a_{mn} \end{bmatrix},$$

називається *матрицею*. Коротке позначення: $A = [\,a_{ij}\,]$.

Дійсні числа a_{ij} називаються елементами матриці. Вказаний елемент a_{ij} лежить на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Добуток $m \times n$ називається розміром матриці A і позначається $A_{m\times n}$.

У випадку, коли $m = n$, маємо квадратну матрицю розміру n: наприклад, матриця Леонтьєва (витрати – випуск) економічного випуску продукції n-го типу. $L_{m\times n} = [\,l_{ij}\,]$, $l_{ij} \geq 0$, $i, j = 1,2,...,n,$ де l_{ij} – величина i-го роду необхідного виробництва для випуску одиничного виробництва j-го роду.

Матриця, яка має єдиний рядок, називається вектором-рядком, а матриця з одним стовпцем є вектором-стовпцем.

Дві матриці $A_{m\times n} = \|a_{ij}\|$ та $B_{m\times n} = \|b_{ij}\|$ однакового розміру, коли $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,...m$; $j = 1,2,...n_i$ називаються рівними. Матриця, всі елементи якої нульові, називається нульовою матрицею і позначається $O_{m\times n} = \|a_{ij}\|$, де $a_{ij} = 0$, $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,...m$; $j = 1,2,...n$.

Квадратна матриця з одним одиничним елементом в кожному рядку та стовпці та з нулями в усіх інших елементах називається матрицею перестановок, наприклад

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Якщо в квадратній матриці всі елементи, розміщені поза головною діагоналлю – нулі, то матриця називається діагональною. Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається

$$E_{n\times n} = \lfloor \delta_{ij} \rfloor, \text{ де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Дії над матрицями

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру.

Означення 1. Якщо $A_{m\times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ та $B_{m\times n} = \lfloor b_{ij} \rfloor$ є матрицями однакового розміру, то матриця $C_{m\times n} = \lfloor c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \rfloor$ називається сумою матриць A і B, тобто $C = A + B$.

Приклад 1. Нехай

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. Тоді сума

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Для додавання матриць справедливі такі операції.

1. $A + B = B + A$ (комутативність);
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність);
3. $A + O = A$;
4. Для кожної матриці A знайдеться протилежна матриця $-A$, тобто $A + (-A) = 0$. Якщо $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, то $-A = \lfloor -a_{ij} \rfloor$.

Добуток матриць визначається тільки для *узгоджених* матриць, тобто коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Зокрема, квадратні матриці завжди *узгоджені*. Зауважимо, що узгодженість A з B не відповідає оберненому твердженню. Тобто множення матриць не комутативне: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Означення 2. Добутком $A \times B$ матриць $A_{m\times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ та $B_{n\times k} = \lfloor b_{ij} \rfloor$ є матриця $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$, елемент якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів $i-$ го рядка матриці A на відповідні елементи j-го

стовпця матриці B. Тобто $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$, $i = 1,2,...m$ та $j = 1,2,...k$.

Приклад 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Множення матриць має такі властивості:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$ (не комутативність);
2. $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність);
3. $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивність через додавання);
4. $AO = OA = O$.
5. $AE = EA = A$.
6. Властивість визначників така, що $|AB| = |A|\,|B|$.

Означення 3. Добутком матриці $A_{m \times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ на число k є матриця B, елементами якої є добутки елементів даної матриці на число k. Тобто $B_{m \times n} = \lfloor b_{ij} = ka_{ij} \rfloor$, $kA = Ak = B$ або

$$k \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_{11} \ldots ka_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ ka_{m1} \ldots ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Справедливі такі властивості операцій:

1. $k(tA) = (kt)A$;
2. $k(A + B) = kA + kB$;
3. $(k + t)A = kA + tA$.

З означень випливає, що добуток квадратних матриць завжди існує. Квадратні матриці можна підносити до будь-якого степеня.

Означення 4. Кількість множення матриць називається її степенем.

Приклад 3. Нехай

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, то A в кубі є

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

Означення 5. Якщо матриця дорівнює своєму квадрату, тобто $A = A^2$, то вона називається *ідемпотентною*.

Приклад 4. Матриця

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ є *ідемпотентною*:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо два типи добутку двох векторів.

Означення 6. Внутрішній або скалярний добуток двох векторів є добуток вектора-рядка на вектор-стовпець, який дорівнює числу:

$$a_{1\times n}\, b_{n\times 1} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j .$$

Приклад 5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = -1.$

Означення 7. Прямим добутком двох векторів є добуток вектора-стовпця на вектор-рядок, який дорівнює матриці:

$$b_{n\times 1} \quad a_{1\times n} = \begin{bmatrix} b_1 a_1 \ldots b_1 a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n a_1 \ldots b_n a_n \end{bmatrix}.$$

Приклад 6.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Означення 8. Перестановка рядків і стовпців називається *транспонуванням*. Транспонована матриця A часто записується як A^t.

Приклад 7. Нехай

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, транспонуємо і отримуємо

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Цю операцію часто застосовують при обчисленні матриць.

Запишемо наступні властивості:

1. $\left(A^t\right)^t = A$;
2. $(kA)^t = kA^t$;
3. $(A+B)^t = \left(A^t + B^t\right)$;
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Квадратна матриця називається симетричною, коли виконується рівність $A = A^t$, та антисиметричною, коли $A = -A^t$.

2. Визначники та їх властивості

Означення 1. Визначник матриці є скалярною величиною (число), яка дорівнює знакозмінній сумі добутку елементів квадратної матриці, взятих по одному із кожного рядка або стовпця з необхідним знаком.

Визначник $n \times n$ часто записують як

$$D = det\, A = \sum sgn(i_1,...,i_n)a_{1i_1}\, a_{2i_2}...a_{ni_n},$$

де $sgn(i_1,...,i_n) = \begin{cases} +1 & для\ парних\ \ перестановок\ (i_1,...,i_n) \\ -1 & для\ непарних\ \ перестановок\ (i_1,...,i_n) \end{cases}$.

Розміщення чисел $(i_1,...,i_n)$ називається парною (непарною) перестановкою, якщо воно отримується як результат парного (непарного) числа заміни положення елементів із даної множини $(1,2,...,n)$.

Якщо A є матрицею 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

то визначник цієї матриці є визначником другого порядку і записується як

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Тут ми маємо парну перестановку $(1,2)$ в $a_{11}a_{22}$ та непарну $(2,1)$ в $a_{21}a_{12}$. Таким чином виведемо наступне правило: визначником другого порядку є число, яке дорівнює добутку елементів по головній діагоналі мінус добуток елементів по побічній діагоналі.

Якщо A є матрицею 3×3,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

то визначник цієї матриці є визначником третього порядку і відповідно до означення (1) дорівнює:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Обчислення визначника третього порядку можна звести до мнемонічного правила, так званого *правила Саррюса*: до правої частини визначника дописуються два стовпці без зміни порядку і добутку елементів, які стоять на головній діагоналі та паралельні їй, віднімають добутки елементів на побічній діагоналі та її паралелях.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Властивості визначників

Розглянемо рядки матриці A n-го порядку, як рядок векторів $z_1,...,z_n$. Тоді властивості визначника A (часто пишуть $D(z_1,...,z_n)$) можна сформулювати наступним чином:

1. Перестановки рядків можуть змінити тільки знак визначника.

2. Спільний множник для всіх елементів рядка можна винести за знак визначника.

3. Коли додаються два визначника, які відрізняються один від одного тільки елементами єдиного рядка, то відповідні елементи додаються.

4. Додавання k-го рядка, помноженого на будь-яке число α, до i-го рядка не змінює визначник $D(i \neq k)$:

$$D(z_1,...,z_i,...,z_k,...,z_n) = D(z_1,...,z_i + \alpha z_k,...,z_k,...,z_n).$$

5. $D(z_1,...,z_n) = 0$ тільки у випадку лінійної залежності множини $(z_1,...,z_n)$ рядка–векторів. Зокрема, $D = 0$, якщо елементами рядка є нулі або два рядка є пропорційними.

6. $det\, A = det\, A^t$, тому всі властивості сформульовані для рядка-векторів також справедливі для стовпця-векторів.

Обчислення визначників

Означення 2. Нехай D – визначник n-го порядку. Тоді визначник, отриманий шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця із даного визначника називається мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника D.

Означення 3. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор зі знаком, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад 1. Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, тоді алгебраїчним доповненням $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) = 6$.

Визначник порядку n можна обчислити за допомогою визначників порядку $n-1$ (їхні алгебраїчні доповнення) відповідно до наступної теореми розкладання.

Теорема 1. Будь-який визначник можна розкласти як суму добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення.

Сума добутків елементів одного рядка або стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка або стовпця дорівнюють нулю:

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}A_{ki},\ 1\le k\le n;$$

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}A_{li}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{il},\ \text{якщо}\ k\ne l.$$

Приклад 2. Обчислити визначник матриці $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&4&0\\2&1&2\end{bmatrix}$.

Розв'язання. У нашому випадку маємо матрицю, в якій елемент $a_{23}=0$. Тому найкраще обирати рядок або стовпець, де є елемент $a_{23}=0$. Розкладемо визначник за другим рядком. Маємо

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=$$

$$=(2\cdot2-3\cdot1)+4(1\cdot2-2\cdot3)=1-16=-15.$$

Розкладаючи визначник за третім стовпцем, отримаємо такий самий результат:

$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&4\\2&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=$$

$$=3(-1\cdot1-4\cdot2)+2(1\cdot4-2\cdot(-1))=-27+12=-15.$$

Визначники вищих порядків більше ніж 3×3 краще обчислювати методом Гаусса (виключення). Цей метод заснований на властивостях визначників 1–6.

Приклад 3

$$D=\begin{vmatrix}2&9&9&4\\2&-3&12&8\\4&8&3&-5\\1&2&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5&9&4\\2&-7&12&8\\4&0&3&-5\\1&0&6&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&5&3&4\\2&-7&4&8\\4&0&1&-5\\1&0&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&9&9&4\\2&-3&12&8\\4&8&3&-5\\1&2&6&4\end{vmatrix}=$$

(властивість 4) (властивість 2)

$$=3\cdot\left\{\begin{vmatrix}2&4&8\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2&3&8\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}+0\right\}=0-21\begin{vmatrix}2&3&4\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}=-21\begin{vmatrix}1&1&0\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}=$$

(теорема 1) (властивість 5) (властивість 4)

$$= -21\left\{\begin{vmatrix}1-5\\2\ \ 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4-5\\1\ \ 4\end{vmatrix}\right\} = -21\{(4+10)-(16+5)\} = 66 \cdot 21 = 1368.$$

(теорема 1)

3. Векторний простір

Відомо, що на декартовій площині *xoy* положення довільної точки (a,b) визначає вектор $\vec{x}(a,b)$, де числа a і b називаються координатами вектора (рис. 1). Звичайно, цю систему можна розширити до три- або n-вимірного простору.

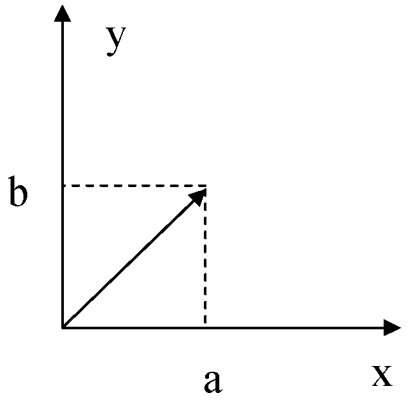


Рис. 1

Означення 1. Довільна упорядкована множина $x_1, x_2, ..., x_n$, складена із n дійсних чисел, називається n – вимірним вектором $\vec{x}$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються координатами $\vec{x}$.

Кожному вектору відповідають тільки свої координати. Координати вектора можна записати в упорядкований рядок $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, і тоді маємо вектор-рядок, або в упорядкований стовпчик, це буде відповідно вектор-стовпець.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

На множині V всіх n-вимірних векторів можна виконувати дії додавання та множення дійсних чисел за наступними правилами:

1. Для двох довільних векторів $\vec{a},\vec{b}\in V$ знайдеться єдиний вектор $\vec{a},\vec{b}\in V$, який дорівнює сумі координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Зокрема, існує єдиний нульовий вектор такий, що $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, для всіх $\vec{a}\in V$.

2. Операція додавання асоціативна, тобто для кожного $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ виконується рівність $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right);$.

3. Операція додавання комутативна, тобто для будь-яких двох векторів $\vec{a},\vec{b}\in V$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

4. Розв'язність. Для кожного $\vec{a},\vec{b}\in V$ знайдеться такий $\vec{x}\in V$, що виконується рівність $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$.

Розв'язання. $\vec{x}\in V$ називається різницею векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ і позначається $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$. Коли $\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{x}=-\vec{a}$ і називається протилежним вектором відносно $\vec{a}$.

5. Для кожного $\vec{a}\in V$ та дійсного α знайдеться елемент $\alpha\vec{\alpha}\in V$. Зокрема, $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$. Елемент $\alpha\vec{a}$ називають добутком вектора на число.

6. Множення чисел асоціативне

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha\left(\beta\vec{a}\right),\ \vec{a}\in V$.

7. Додавання та множення є дистрибутивним відносно один одного $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ і $\vec{a},\vec{b}\in V$.

Означення 2. Множина V всіх n-вимірних векторів з операціями додавання та множення, відповідними до умов 1–7 називається n-вимірним векторним простором.

Всі операції розглянуті вище можна застосовувати до координат відповідних векторів.

Приклад 1. Нехай задано

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix},$$ тоді їх лінійна комбінація

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \alpha x_2+\beta y_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha x_n+\beta y_n \end{pmatrix}.$$

Найбільш важливим поняттям в теорії n-вимірного векторного простору є *лінійна залежність* множини векторів.

Означення 3. Множина векторів $\left\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k\right\}$ n-вимірного векторного простору V називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$, які одночасно не дорівнюють нулю, що виконується рівність $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+...+\lambda_k\vec{x}_k=0$.

Якщо ця рівність можлива лише за умови, $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$, то вектори *лінійно незалежні.*

Приклад 2. Будь-яка кількість колінеарних векторів на площині є лінійно залежною. У протилежному випадку будь-яка пара неколінеарних векторів лінійно незалежна на площині.

Таким чином робимо загальний висновок:

Теорема 1. Будь-яка множина $n+1$-векторів є лінійно залежною в n – вимірному векторному просторі. Із цього формулюємо наступне означення.

Означення 4. Множина n-лінійних незалежних векторів n-вимірного векторного простору називається базисом цього простору.

Приклад 3. Множина n-вимірних векторів

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,...,0), \\ \vec{e}_2 = (0,1,...,0), \\ ..... \\ \vec{e}_n = \underbrace{(0,0,...,1)}_{n \text{ координат}}. \end{cases}$$

складає базис n – вимірного векторного простору. Цей базис називається стандартним.

Приклад 4. У тривимірному просторі три довільні упорядковані не компланарні вектори складають базис.

Головним надзвичайним результатом всієї теорії є теорема.

Теорема 2. Кожний вектор $\vec{x}$ n-вимірного векторного простору можна однозначно розкласти на суму базисних векторів, помножених на числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, тобто $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n$, числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ називаються координатами вектора $\vec{x}$ в базисі $\left\{ \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \right\}$.

Приклад 5. Знайти в двовимірному векторному просторі з базисом $\vec{a}_1 = (2,3), \vec{a}_2 = (1,-1)$ координати вектора $\vec{x} = (1,-6)$, записаних у стандартному базисі.

Розв'язання. Знайдемо невідомі координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ як x_1 та x_2.

Маємо

$$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = (2x_1, 3x_1) + (x_2, -x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - x_2) = (1,-6).$$

Два вектора рівні, якщо рівні їх координати. Тому отримуємо систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ 3x_1 - x_2 = -6. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Відповідь: $\vec{x} = (-1,3)$ в базисі $\vec{a}_1 = (2,3), \vec{a}_2 = (1,-1)$.

4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Виділяємо в ній довільним чином k-рядків та k-стовпців $k \le min(m;n)$. Із елементів, які стоять на перетині взятих рядків і стовпців, складаємо визначник, який називається мінором k-порядку матриці A.

Означення 1. *Рангом матриці* називається найвищий порядок мінора цієї матриці, що не дорівнює нулю.

Ранг матриці позначають: $r, r(A)$ або $rangA$.

Властивості рангу матриці

1. $0 \le r(A) \le min(m \times n)$.

2. $r(A) = 0$, якщо $A = 0$.

3. Для квадратної матриці n-го порядку $r(A) = n$ тільки тоді, коли матриця неособлива $(det\, A \neq 0)$.

Означення 2. Всі ненульові мінори, порядок яких визначає ранг матриці, називаються базисними.

Головний зміст розглянутого поняття полягає в наступному.

Теорема 1 *(про базисні мінори).* Кожний стовпець цієї матриці є лінійною комбінацією її базисних стовпців та кожний рядок цієї матриці – лінійна комбінація базисних рядків.

Теорема відіграє ключову роль у розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, це корисно застосовувати при обчисленні рангу матриці.

Елементарні перетворення матриці.

При таких елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

1. Перестановка місцями рядків (стовпців).

2. Викреслювання рядка (стовпця), який містить всі нульові елементи.

3. Якщо маємо два однакових рядка (стовпця), то один рядок (стовпець) викреслюємо.

4. Транспонування матриць.

5. Множення кожного елемента довільного рядка (стовпця) на число, яке не дорівнює нулю.

6. Додавання до елементів довільного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і теж число, яке не дорівнює нулю.

Ці перестановки полегшують обчислення рангу матриці.

Приклад 1. Знайти ранг матриці $r(A)$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Віднімаємо із другого рядка подвійний перший рядок і в той же час із третього рядка перший, помножений на 8. Ці перетворення не змінюють ранг матриці (властивість 6). Маємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{pmatrix}.$$

Помножимо другий рядок на $-\frac{1}{7}$ та третій на $-\frac{1}{21}$(властивість 5) та отримаємо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Побачивши, що другий та третій рядки рівні, застосовуємо 3 властивість та одержуємо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким чином,

$r(A)=2$, оскільки маємо ненульовий мінор другого порядку $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

5. Обернена матриця

Основні поняття

Означення 1. Оберненою для заданої квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}, добуток якої на матрицю A як зліва, так і справа дорівнює одиничній матриці, тобто $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, де E – одинична матриця того самого порядку, що і матриця A.

Така матриця точно існує, коли матриця A не вироджена (неособлива), тобто коли $det\,A\neq 0$, і може бути визначена за формулою:

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{det\,A}, \qquad (1)$$

де A^{*} є *приєднана* матриця до матриці A.

Означення 2. Транспоновану матрицю, складену з алгебраїчних доповнень до її елементів, називають *приєднаною* до матриці A.

Якщо матриця неособлива, то приєднана матриця отримується множенням оберненої матриці на визначник.

Приклад 1. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Спочатку обчислимо визначник матриці. Застосовуючи теорему 1, розкладемо визначник за другим рядком.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=3A_{21}+2A_{23}=-3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-24+20=-4.$$

Знаходимо A_{ij} – алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Складаємо приєднану матрицю

$$A^{*}=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ -8 & 9 & 10\\ 4 & -5 & -6\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

За формулою (1) маємо

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{\det A}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

Дійсно:

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\cdot 4-2\cdot 7+1\cdot 6 & -1\cdot 8+2\cdot 9-10 & 1\cdot 4-2\cdot 5+1\cdot 6\\ 3\cdot 4-0\cdot 7-2\cdot 6 & -3\cdot 8+0\cdot 9+2\cdot 10 & 3\cdot 4-0\cdot 5-2\cdot 6\\ 4\cdot 4+2\cdot 7-5\cdot 6 & -4\cdot 8-2\cdot 9+5\cdot 10 & 4\cdot 4-2\cdot 5-5\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Обернену матрицю можна застосовувати для розв'язання неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) з невиродженою матрицею.

6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Основні поняття

Відомо, що алгебраїчні рівняння, які містять тільки сталі величини, помножені на змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, називаються *лінійними алгебраїчними рівняннями* та записуються у вигляді:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b.$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ та b довільні дійсні числа.

Система m алгебраїчних рівнянь з відповідними n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

називається $m \times n$ системою лінійних алгебраїчних рівнянь, де a_{ik} – коефіцієнти системи, b_i – вільні члени. У випадку, коли $b_i = 0$ маємо *однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь*, в інших випадках система неоднорідна. Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ з ненульовими елементами, які тотожно задовольняють (1), називається нетривіальним розв'язком системи.

У випадку однорідної системи існує нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, який часто називають *тривіальним.*

Дві системи з однаковим розв'язком називаються еквівалентними.

6.1. Розв'язування систем з однаковою кількістю рівнянь та невідомих

6.1.1. Матричний метод розв'язання

Розглянемо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2)$$

Позначивши:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

можемо переписати систему у матричному вигляді:

$$A \cdot \vec{X} = \vec{b}. \quad (3)$$

Якщо визначник $det\, A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши ліворуч обидві частини рівняння (3) на A^{-1}, отримуємо: $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$; $E \cdot \vec{X} = \vec{X}$, то отримуємо розв'язок задачі:

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}. \quad (4)$$

Таким чином виводимо наступне твердження:

СЛАР з невиродженою матрицею безумовно розв'язна.

Приклад 2. Розв'язати наступну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Запишемо в матричному вигляді $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$ та $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 15\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Матриця є невиродженою. Визначник цієї матриці обчислювали в попередньому прикладі ($det\,A=-4$).

Таким чином дана система розв'язна. Застосовуючи обернену матрицю A^{-1}, яку знайшли в попередньому прикладі, маємо:

$$\vec{X}=A^{-1}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 15\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\cdot2-8\cdot9+4\cdot15\\ -7\cdot2+9\cdot9-5\cdot15\\ -6\cdot2+9\cdot10-6\cdot15\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\ -8\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.$

6.1.2. Теорема Крамера

Виведену вище формулу (4) можна записати у вигляді так званого правила Крамера. Підставляючи формулу (1) в (4), розв'язок неоднорідної системи $n\times n$ можна представити у вигляді:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{det\,A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\ldots A_{n1}\\ A_{12} & A_{22}\ldots A_{n2}\\ . & . \ . \ . \ . \ . \ .\\ A_{1n} & A_{2n}\ldots A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Розв'язок i-ої невідомої x_i визначається за формулою

$$x_i=\frac{1}{det\,A}(A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\ldots+A_{ni}b_n)=\frac{1}{det\,A}\begin{vmatrix}a_{11}\ldots b_1\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ldots b_2\ldots a_{2n}\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ a_{n1}\ldots b_n\ldots a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{D_i(b)}{D},$$

$$i=1,2,\ldots,n, \qquad (6)$$

де D_i – визначник, який утворюється з даного визначника $D = det\, A$ заміною i-го стовпця на вектор-стовпець $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$.

Таким чином, сформулюємо наступну теорему:

Теорема 1 *(теорема Крамера).* Кожна система $n \times n$ лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$, в якій визначник $det\, A \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_i = \dfrac{D_i(b)}{D}$, $i = 1,2,...,n.$

Формула (6) відома як *правило Крамера.*

Приклад 3. Застосовуючи правило Крамера, розв'язати наступну систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 16 & 0 & 7 \\ -11 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 16 & 7 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -(-64+77) = -13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -(-13-13) = 26,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 13 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = -13(5-8) = 39.$$

Застосовуючи формулу (6), отримуємо:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$$

Відповідь: $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$

6.2. Розв'язування систем m-лінійних алгебраїчних рівнянь з n-невідомими

Будь-яка однорідна система має тривіальний розв'язок. Чи існує нетривіальний розв'язок у такої системи? Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розглянемо однорідну систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Маємо два рівняння та три невідомих, тому одну невідому можемо вибрати довільно. Припустимо, що $x_3 = \alpha$, де α – довільне дійсне число. Підставляючи значення x_3 в друге рівняння отримуємо $x_2 = -\alpha$. Підставляючи це значення в перше рівняння маємо $x_1 = -\alpha$. Таким чином отримуємо множину розв'язків даної системи:

$$L = \{\alpha(-1,-1,1)\}.$$

Протилежним до цього є приклад однорідної системи 2×2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

яка має тільки тривіальний розв'язок.

Серед неоднорідних систем існують такі, які не мають розв'язку. Наприклад система:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що розв'язком цієї системи є порожня множина.

Загальну теорію систем лінійних рівнянь можна розвинути за допомогою матричної теорії.

Нехай є матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, (2)

Вектор невідомих змінних $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, (3)

а вектор вільних членів $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$. (4)

Рівняння (1) можна переписати в наступному вигляді

$$A \cdot \vec{X} = \vec{b}. \quad (5)$$

Введемо ще декілька понять.

Означення 1. Матриця, виведена із матриці A з приєднаним до неї стовпцем сталого вектора вільних членів, називається розширеною матрицею. Розширена матриця часто записується у вигляді:

$$A/b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & .b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & .b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & .b_m \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Важливу роль відіграє наступна фундаментальна теорема.

Теорема 1 *(Кронекера-Капеллі)*. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) сумісна (має розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці $r(A) = r(A/b)$.

Застосовуючи цю теорему, можна сформулювати наступні правила для розв'язання СЛАР.

1. При розв'язанні СЛАР повинні з'ясувати її сумісність. Для цього необхідно обчислити і порівняти $r(A)$ та $r(A/b)$. Якщо $r(A) \neq r(A/b)$, то за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна (немає розв'язку). Таким чином питання про розв'язок системи закривається. Проте, коли $r(A) = r(A/b) = r$, то система (5) сумісна і для того, щоб розв'язати систему, необхідно вибрати базисний мінор(це мінор, порядок якого визначає ранг матриці). Припустимо, що це є r перших рядків та r перших стовпців у матриці A, тобто

$$M = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} a_{r2} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

У цьому випадку початкова система буде еквівалентною системі, складеної з r перших рядків (решту рівнянь відкидаємо):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (8)$$

2. При розв'язанні системи (8) може бути два варіанти: $r = n$ або $r < n$. Розглянемо перший випадок $r = n$ (кількості рівнянь). В цьому випадку маємо єдиний розв'язок $\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, (9) де A^{-1} – обернена матриця.

Висновок 1. Коли $r = n$ система (5) має єдиний розв'язок.

3. Коли $r < n$ можемо приймати змінні $x_{r+1}, \ldots, x_n$ за вільні члени, тобто вони можуть приймати довільні числові значення $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$. Решта невідомих називається базисними. Вони задовольняють наступній СЛАР.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{1n}\alpha_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{2n}\alpha_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r - a_{rr+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{rn}\alpha_n. \end{cases} \qquad (10)$$

Цю систему можна трактувати як систему $r \times r$ з визначником, рівним базисному мінору $M \neq 0$. Відповідно теоремі Крамера система (9) має єдиний розв'язок $x_i = \dfrac{M_i(c)}{M}$, $i = 1,2,...,r$, де c є вектор-стовпець, складений із вільних членів:

$$c = b_r + \alpha_{r+1} a_{r+1} + ... + \alpha_n a_n,\ \vec{b}_r = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_r \end{pmatrix},\ \vec{a}_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{1r+1} \\ a_{2r+1} \\ . \\ . \\ a_{rr+1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_{r+2} = \begin{pmatrix} a_{1r+2} \\ a_{2r+1} \\ . \\ . \\ a_{rr+2} \end{pmatrix}, \ldots \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{rn} \end{pmatrix}.$$

За властивістю (3) визначників маємо

$$x_i = \frac{M_i(b_r)}{M} - \alpha_{r+1} \frac{M_i(a_{r+1})}{M} - ... - \alpha_n \frac{M_i(a_n)}{M}. \qquad (11)$$

Висновок 2. Якщо система (8) сумісна, тобто $r(A) = r(A/b) = r < n$, то базисні змінні виражаються лінійно через $k = n - r$ вільними змінними $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, x_{r+2} = \alpha_{r+2}, ..., x_n = \alpha_n$, як показано у формулі (11).

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання

З'ясуємо сумісність даної системи. Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix},\ r(A) = 2.$$

Додамо 1-й рядок до другого та викреслимо 3-й рядок. Мінор другого порядку не дорівнює нулю, тому ранг матриці дорівнює двом.

Аналогічно знаходимо ранг розширеної матриці

$$A/b=\begin{pmatrix}1&-4&2&0&-1\\2&-3&-1&-5&-7\\3&-7&1&-5&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&2&0&-1\\3&-7&1&-5&-8\\3&-7&1&-5&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&2&0&-1\\3&-7&1&-5&-8\end{pmatrix},$$

$r(A)=2.$

Таким чином система сумісна, а кількість базисних змінних дорівнює рангу матриці, тобто 2. За базисний мінор візьмемо

$$M=\begin{vmatrix}1&-4\\3&-7\end{vmatrix},$$

який розташований на перетині двох перших рядків та стовпців даної матриці. Базисними змінними будуть x_1 та x_2 і відповідно вільними змінними – x_3, x_4. Відкидаємо третє рівняння та отримуємо систему 2×2, яку маємо розв'язати:

$$\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3=-1,\\3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8.\end{cases}$$

Перенесемо вільні члени в праву частину і отримаємо:

$$\begin{cases}x_1-4x_2=-1-2x_3,\\3x_1-7x_2=-8-x_3+5x_4.\end{cases}$$

Таким чином:

$$b_2=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix},\ M=\begin{vmatrix}1&-4\\3&-7\end{vmatrix}=5,$$

$$M_1(a_3)=\begin{vmatrix}2&-4\\1&-7\end{vmatrix}=-10,\ M_1(a_4)=\begin{vmatrix}0&-4\\-5&-7\end{vmatrix}=-20,\ M_1(b_2)=\begin{vmatrix}-1&-4\\-8&-7\end{vmatrix}=-25,$$

$$M_2(a_3)=\begin{vmatrix}1&0\\3&-5\end{vmatrix}=-5,\ M_2(a_4)=\begin{vmatrix}1&0\\3&-5\end{vmatrix}=-5,\ M_2(b_2)=\begin{vmatrix}1&-1\\3&-8\end{vmatrix}=-5.$$

Підставляючи в формулу (11), коли $r=2$, легко знайти

$$x_1 = \frac{M_1(b_2)}{M} - \alpha_3 \frac{M_1(a_3)}{M} - \alpha_4 \frac{M_1(a_4)}{M} = -\frac{25}{5} - \alpha_3\left(-\frac{10}{5}\right) - \alpha_4\left(-\frac{20}{5}\right) =$$
$$= -5 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4;$$
$$x_2 = \frac{M_2(b_2)}{M} - \alpha_3 \frac{M_2(a_3)}{M} - \alpha_4 \frac{M_2(a_4)}{M} = -\frac{5}{5} - \alpha_3\left(-\frac{5}{5}\right) - \alpha_4\left(-\frac{5}{5}\right) =$$
$$= -1 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Відповідь: $x_1 = -5 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4$; $x_2 = -1 + \alpha_3 + \alpha_4$, де α_3 і α_4 – довільні дійсні числа.

Розглянуту систему можна також розв'язати методом Гаусса (метод послідовного виключення невідомих), розв'язуючи сумісні рівняння за допомогою елементарних перетворень.

Означення 2. Множину лінійних алгебраїчних рівнянь називають сумісною, якщо кількість незалежних рівнянь дорівнює кількості невідомих.

Означення 3. Елементарними перетвореннями рядків (стовпців) матриці називають:

1) множення будь-якого рядка (стовпця) на число;

2) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця);

3) перестановка довільних двох рядків (стовпців).

Метод Гаусса (метод виключення) полягає у зведенні сумісних рівнянь до трикутного вигляду, тобто до трикутної матриці.

Застосуємо цей метод до розв'язання попередньої системи.

Як було доведено, ця система складається із базисного мінора 2×2, тому третє рівняння даної системи зайве. Легко показати, що це рівняння є сумою перших двох. Виключивши його, отримуємо сумісну систему.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Віднімаючи із другого рівняння перше, помножене на 2, легко прийдемо до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

Підставляючи значення $x_2 = -1 + x_3 + x_4$ в перше рівняння системи отримуємо розв'язок системи в наступному вигляді:

$x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4$; $x_2 = -1 + x_3 + x_4$, де x_3 та x_4 – довільні дійсні числа.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$

$r(A) = 2.$

$$A/b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3.$

за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна $r(A) \neq r(A/b)$.

Приклад 4. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи; визначимо $r(A)$ та $r(A/b)$

$$A/b=\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\2&3&-1&13\\0&3&4&5\\-3&1&4&-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&5&-3&-11\\0&3&4&5\\0&-2&7&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&-2&7&16\\0&0&29&58\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&-2&7&16\\0&0&29&58\end{pmatrix}.$$

Ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної і дорівнює 3, тобто $r(A)=r(A/b)=3$. Із цього виводимо наступне:

1. Система є розв'язною.

2. Вона має єдиний розв'язок ,тому що четверте рівняння є наслідком перших трьох рівнянь даної системи і його можна виключити із сумісної множини рівнянь трикутного вигляду:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=12,\\-2x_2+7x_3=16,\\29x_3=58,\end{cases}$$

Із системи легко знаходимо її розв'язок:

$x_1=9;\ x_2=-1;x_3=2$

Відповідь: $x_1=9;\ x_2=-1;x_3=2$.

РОЗДІЛ ІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Розділ математики, в якій геометричні точки та фігури описуються за допомогою алгебраїчних понять з приведенням їх в координатну систему, називається *аналітичною або координатною геометрією.*

В основу аналітичної геометрії покладено метод координат, запропонований французьким математиком Рене Декартом.

Декартова прямокутна система координат – система, в якій точку в просторі визначено як відстань, виміряну вздовж множини взаємно перпендикулярних осей від даного початку координат.

У декартовій площині точка $A(a;b)$ визначається шляхом відкладання a одиниць вздовж осі OX та b одиниць вздовж осі OY, та знаходження точки перетину перпендикулярів до осей від цієї точки, як показано на рис. 1.

Число a називається абсцисою т. A та число b – її ординатою.

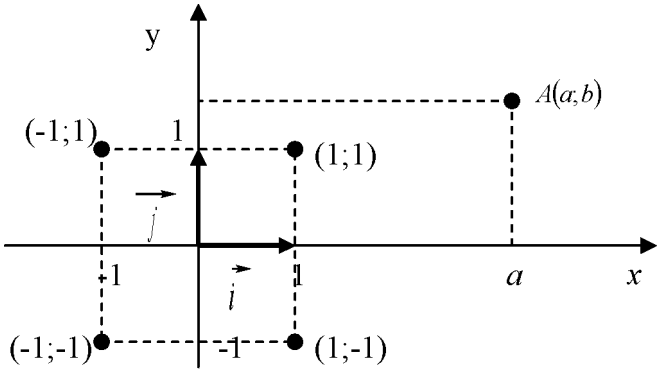


Рис 1. Декартові координати

Умовно прийнято, що додатні напрямки осей – від початку координат праворуч та вгору, тому чотири точки $(\pm 1;\pm 1)$ розташовуються, як показано на рис.1. У першому квадранті a і b додатні. Решта квадрантів нумерується проти годинникової стрілки від першого.

Система декартових координат поширюється на випадок трьох та більше вимірів. У тривимірному випадку застосовується правостороння множина осей, що передбачається більшістю стандартних формул.

Існує однозначна відповідність між точками декартової площини та множиною векторів, які починаються в початку координат, тобто кожну точку $A(a;b)$ можна вважати кінцем вектора $\overline{OA}$, початком якого є початок координат: $\overline{OA} = (a;b)$.

Крім того, кожній точці A на площині можна поставити у відповідність вектор $\overline{AB}$, пов'язаний з A, тобто початок вектора знаходиться в точці $A(x_1;y_1)$, а його кінець у $B(x_2;y_2)$, що позначається як $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, а тому з цього маємо

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1). \qquad (1)$$

Далі замість (1) будемо застосовувати наступне позначення: $\bar{a} = (a_x; a_y)$, де $x_2 - x_1$ та $y_2 - y_1$ – координати вектора $\overline{AB}$, які відповідають ортонормованому базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$,

$$\overline{AB} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1). \qquad (2)$$

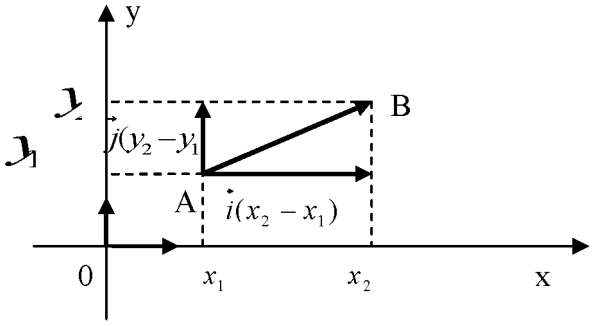


Рис. 2. Розкладання вільного вектора за базисом

Вектор, який можна приєднати до будь-якої точки площини, називається вільним. Вектор, який приєднаний до початку координат, називається радіусом-вектором.

Пара $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ одиничних та взаємно ортонормованих векторів складають базис для множини вільних векторів на площині, тобто будь-який вектор із цієї множини можна розкласти за базисом, як показано в формулі (2).

Будь-яка пара некомпланарних векторів може складати базис. В аналітичній геометрії на площині в якості базиса застосовують пару $\{\vec{i},\vec{j}\}$ одиничних, взаємно ортогональних векторів. У просторі, відповідно, застосовують трійку одиничних взаємно ортогональних векторів $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ (рис. 3).

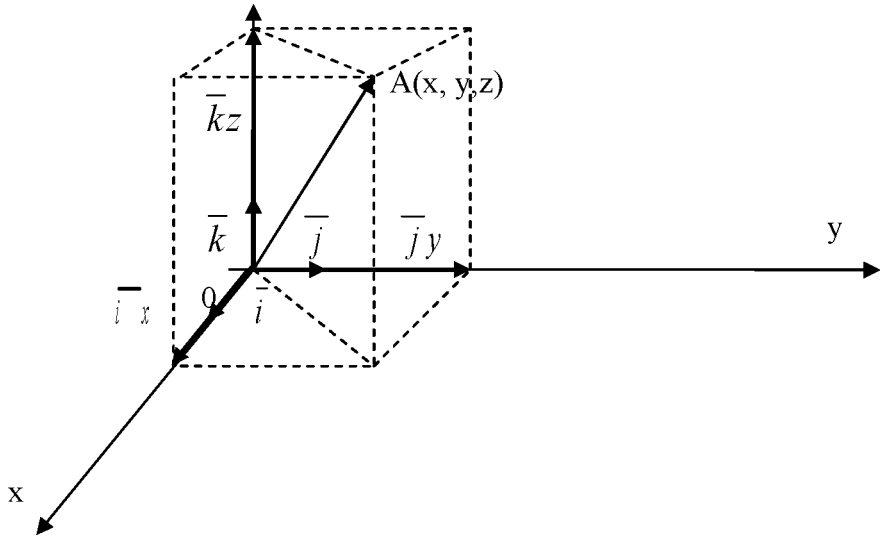


Рис. 3 Розкладання радіуса-вектора $\overrightarrow{OA}$ за базисом $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z.$

Правило 1. Координатами вільного вектора є різниця координат кінця вектора та його початку координат.

Відображення вектора за допомогою його координат є єдиним в даній координатній системі, і це полегшує обчислення вектора.

Розглянемо, наприклад, обчислення скалярного добутку двох векторів.

2. Скалярний добуток

Означення 1. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot cos(a,b). \qquad (3)$$

Існує більш зручний спосіб обчислення скалярного добутку.

Твердження 1. Нехай $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ – два вектора, які розташовані в довільній прямокутній координатній системі в просторі. Тоді скалярний добуток в координатній формі має вигляд:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (4)$$

Доведемо це твердження для двовимірного випадку (рис. 4)

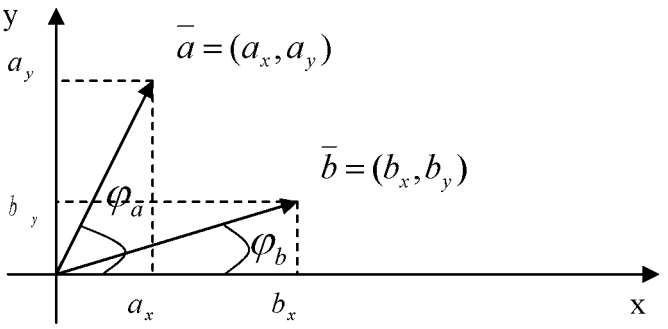


Рис. 4. Скалярний добуток двох векторів на площині

Як бачимо із рисунка 4

$$a_xb_x+a_yb_y=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi_a\cos\varphi_b+|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi_a\sin\varphi_b=$$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|(\cos\varphi_a\cos\varphi_b+\sin\varphi_a\sin\varphi_b)=$$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi_a-\varphi_b)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vec{a},b=\overrightarrow{a\cdot b}.$$

Другий приклад – це обчислення відстані $d(A,B)$ між двома точками $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$ в просторі.

Враховуючи, що відстань – це модуль $|\overline{AB}|$ вектора $\overline{AB}$, можна вивести наступне

$$d(A,B)=|\overline{AB}|=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Зауваження. Пряме доведення твердження 1 дає безпосереднє обчислення скалярного добутку:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\vec{i}\,a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z)(\vec{i}\,b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

При цьому враховано, що: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ та нулі в інших випадках.

Означення 2. Трійка кутів (зазвичай позначається α, β, γ), які утворюють лінію в просторі або вектор з додатними напрямами осей $X, Y, Z,$ називається *напрямними кутами*.

Наприклад, на рис. 5 напрямні кути вектора $\overline{p}$ є кути xop, yop, zop відповідно.

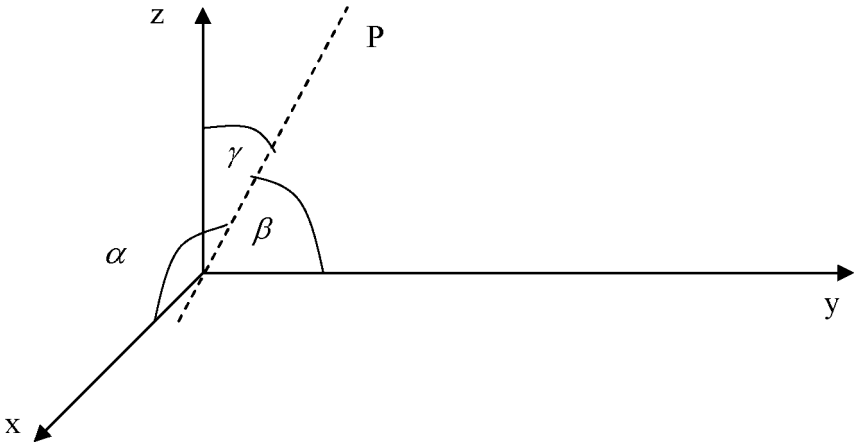


Рис. 5. α, β, γ – напрямні кути вектора $\overline{p}$

Означення 3. Трійка косинусів напрямних кутів лінії або вектора називається *напрямними косинусами*.

Напрямні косинуси довільного вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ обчислюються за формулою

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_2-x_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}; \\ \cos\beta = \dfrac{y_2-y_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}; \\ \cos\gamma = \dfrac{z_2-z_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}. \end{cases} \tag{5}$$

Піднесемо до квадрату напрямні косинуси, додамо їх один до одного і легко одержимо наступну формулу:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{6}$$

Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює 1.

Кожний вектор однозначно визначається своїми координатами, тобто два вектора рівні, якщо їх відповідні координати рівні.

Вектори, які лежать на прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їх координат.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (7)$$

Ділення відрізка в даному відношенні

Розглянемо відрізок AB, який утворюють точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, і знайдемо точку $C(x, y, z)$, яка ділить відрізок у відношенні $k = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$, див. рис. 2.

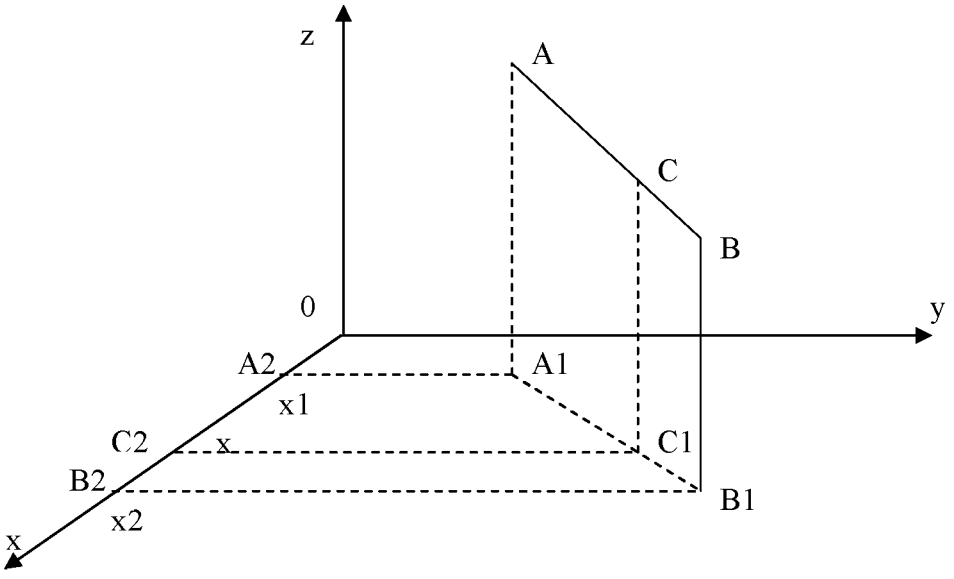


Рис. 2. Ділення прямої на відрізки

Для розв'язання задачі спочатку спроектуємо AB на площину XOY та потім її проекцію A_1B_1 на вісь OX. Відповідно до теореми Фалеса $\dfrac{A_1C_1}{C_1B_1} = \dfrac{A_2C_2}{C_2B_2} = k.$

Із останньої рівності виводимо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \Leftrightarrow x - x_1 = k(x_2 - x);$$

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}.$$

Аналогічно, проектуючи $A_1 B_1$ на вісь OY, отримуємо $y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$, аналогічно для осі OZ $z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k_2}$ і таким чином записуємо кінцевий результат:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k},\ y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k},\ z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k_2}. \tag{8}$$

Зокрема, якщо C середина відрізка, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{9}$$

3. Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів є третій вектор, який дорівнює добутку модулів даних векторів на синус кута між ними

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right| \sin\varphi. \tag{1}$$

Цей вектор перпендикулярний до кожного із даних векторів і відповідає правилу правої руки. Позначається $\bar{a} \times \bar{b}$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані координатами: $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, то векторний добуток визначається за формулою

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \tag{2}$$

$$\vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Довжиною векторного добутку $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$ є площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 1)

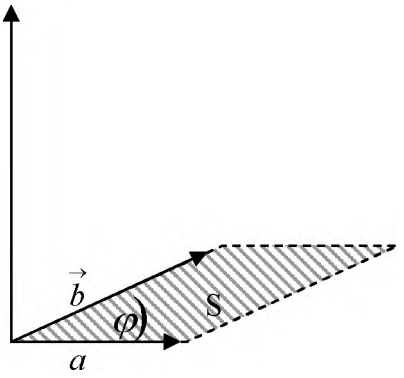


Рис. 1

Правостороння система трьох векторів $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$: $\bar{c}\perp$ до площини, в якій лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, зведені до одного початку. Чотири пальці правої руки спрямовані у напрямі $\bar{a}$, який наближений до вектора $\bar{b}$ проти годинникової стрілки, великий палець спрямований як вектор $\bar{c}$.

Приклад 1

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах.

Розв'язання

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2}=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}(од^2).$$

4. Мішаний добуток

Означення 2. Мішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює векторному добутку $\bar{a}\times\bar{b}$, помноженому скалярно на вектор $\bar{c}$, тобто

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) \qquad (1)$$

Позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Мішаний добуток дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Якщо вектори задані своїми координатами $\bar{a}\ (a_x, a_y, a_z)$, то мішаний добуток обчислюється за формулою.

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}. \qquad (2)$$

Наслідок. Якщо вектори компланарні (і тільки в цьому випадку), мішаний добуток дорівнює 0, інакше кажучи, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ є необхідною і достатньою умовою компланарності векторів.

5. Пряма на площині

Прямолінійна одновимірна геометрична фігура нескінченної довжини і без товщини називається прямою.

На площині пряма, яка з'єднує дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, має рівняння

$$y = kx + c, \qquad (1)$$

де k – це кутовий коефіцієнт прямої

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

та c – точка перетину прямої з віссю OY (див. рис. 1)

Будь-яка інша точка $M(x\ , y)$ буде належати прямій, якщо вектори $\vec{M_1M}$ та $\vec{M_1M_2}$ колінеарні, тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y\ - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3)$$

Таким чином, отримали рівняння прямої через дві точки.

Якщо пряма з відомим кутовими коефіцієнтом k проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння прямої має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4)$$

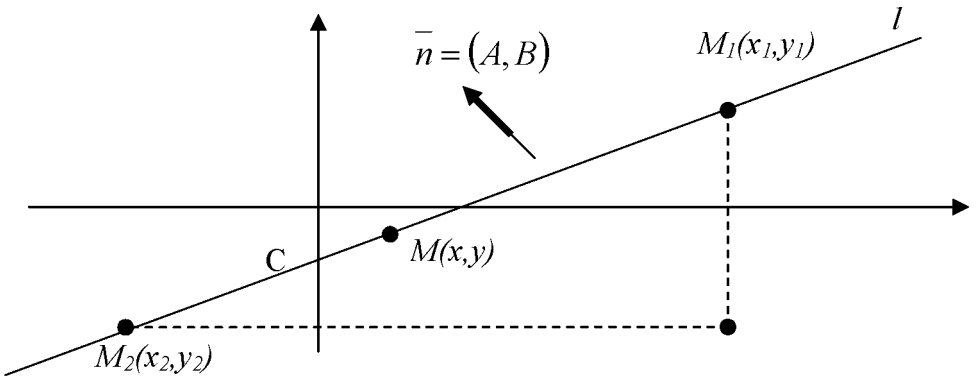


Рис. 1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k

Зокрема, коли пряма проходить через точки $A(a;0)$ та $B(0;b)$ (див. рис. 2),

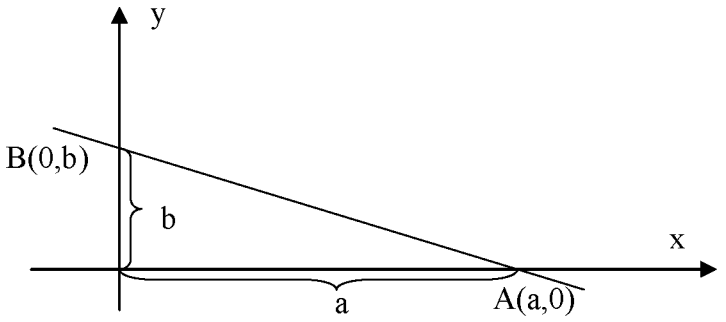


Рис. 2. Рівняння прямої у відрізках на осях

то отримуємо рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (5)$$

У випадку двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 можна обчислити кут φ між двома прямими, застосовуючи формулу

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (6)$$

Із цього виразу легко вивести наступне твердження: $k_1 = k_2 \Rightarrow$ прямі паралельні $(\varphi = 0),; \Rightarrow$ прямі перпендикулярні $(\varphi = \pi/2) \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0,\ k_1 k_2 = -1.$

Загальне рівняння прямої можна вивести наступним чином.

Нехай маємо точку $M_1(x_1 y_1)$ на прямій та поточну точку $M(x, y)$. Вектор $\bar{n}(A, B)$ перпендикулярний до прямої. Тоді $\bar{n} \cdot (\overline{M_1 M}) = 0$, або

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (7)$$

Це є рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_1; y_1)$ перпендикулярно до даного вектора $\bar{n}(A, B)$, який називається *нормальним вектором прямої*. Існує багато нормальних векторів прямої і всі ці вектори колінеарні.

Рівняння (7) лінійне відносно змінних x та y і може бути записане у вигляді

$$Ax + By + C = 0, \qquad (8)$$

що можна віднести до *загального рівняння прямої*.

Обернене твердження: вираз (8) з поточною точкою $M(x; y)$ в декартових координатах описує пряму на площині.

Розглянемо окремі випадки прямої в декартовій системі координат залежно від коефіцієнтів A, B, C (вираз 8).

1. Коли $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ рівняння (8) зводиться до рівняння у відрізках $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$, тобто пряма перетинає вісі в точках $(-C/A; 0)$ та $(0; -C/B)$

2. Коли $A = 0$ пряма $By + C = 0$ паралельна осі OX та проходить через точку $(0; -C/B)$, тому нормальний вектор $\vec{n} = (O, B)$ перпендикулярний осі OX.

3. Аналогічно коли $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі OY і проходить через точку $(-C/A; 0)$.

4. Коли $C = 0$, пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат.

5. Коли $A = C = 0$, рівняння $By = 0 \Rightarrow y = 0$ – це є вісь OX.

6. Коли $B = C = 0$, маємо рівняння $x = 0$ – це вісь OY.

Якщо прямі задані в загальному випадку $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то кут між ними φ можна обчислити як кут між нормальними векторами $\overline{n_1}(A_1 B_1)$ та $\overline{n_2}(A_2 B_2)$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}. \qquad (9)$$

Із цього співвідношення випливає, що прямі паралельні, якщо їх нормалі колінеарні

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad (10)$$

і прямі перпендикулярні, коли $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$,

тобто $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. (11)

Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно ненульовому вектору $\overline{S}$ (рис. 3), який називається *напрямним вектором прямої.*

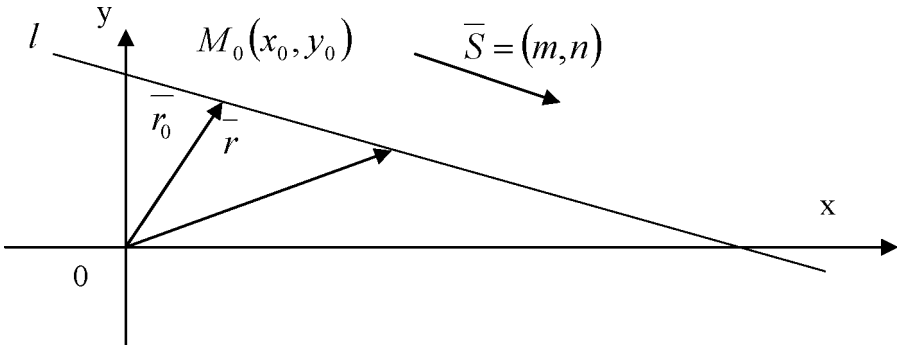


Рис. 3. Рівняння прямої через дві точки з напрямним вектором

Положення прямої на площині визначається повністю точкою M_0 та вектором $\overline{S}$, тому маємо єдину пряму, що проходить через дану точку та паралельна вектору. Рівняння прямої можна вивести із дослідження векторів: $\overline{r} - \overline{r}_0$ та $\overline{S}$ колінеарні (див. рис. 3), тому робимо наступний висновок: $\overline{r} - \overline{r}_0 = t \cdot \overline{S}$, де t параметр.

Це рівняння записується в наступному вигляді

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{S} \qquad (12)$$

і називається *параметричним рівнянням*.

Перепишемо (12) в координатній формі. Отримуємо наступну систему, яка називається також *параметричним рівнянням прямої*, $\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \end{cases}$, яка еквівалентна рівнянню

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (13)$$

Рівняння (10) називається *канонічним рівнянням прямої*.

Кут між двома прямими з напрямними векторами $\overline{s_1}$ та $\overline{s_2}$ обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\left|\vec{s}_1\right|\left|\vec{s}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2}}\sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}}. \qquad (14)$$

Прямі паралельні, коли $\overline{S_1}$ і $\overline{S_2}$ колінеарні $\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (15)

Прямі перпендикулярні, коли $\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2 = 0$, тобто $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0.$ (16)

Нормальне рівняння прямої

Розглянемо пряму на площині, як показано на рис. 4.

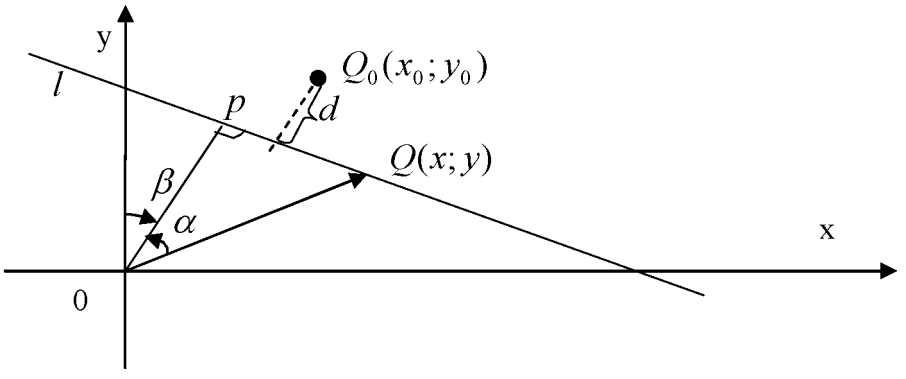


Рис. 4. Нормальне рівняння прямої

Побудуємо з початку координат перпендикуляр до даної прямої, що перетинає пряму в точці p. Довжина перпендикуляра $d(0, p) = p$, вектор $\overline{n}$, напрямлений вздовж перпендикуляра, має напрямні кути α та β, тобто $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

Нехай $Q(x, y)$ – змінна точка прямої, проекція вектора $\overline{OQ}$ на перпендикуляр дорівнює довжині перпендикуляра

$$\overline{OQ} \cdot \bar{n} = p. \tag{17}$$

Враховуючи, що $\bar{n} = \left(\cos\alpha, \cos(\pi/2 - \alpha)\right) = (\cos\alpha, \sin\alpha))$ та $\overline{OQ} = (x, y)$, легко виводимо із (13) так зване нормальне рівняння прямої:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{18}$$

Така форма рівняння полегшує знаходження відстані від довільної точки до прямої на площині.

Наприклад, знайдемо відстань від Q_0 до прямої (див. рис. 4). Аналізуючи положення Q_0, можна дійти висновку, що необхідна відстань – це є різниця проекції $\overline{OQ}$ та перпендикуляра $d(0, p) = p$: $d(Q_0, l) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ (19)

Коли Q_0 буде знаходитися на протилежному боці від прямої, то зміниться знак, тобто

$$d(Q_0, l) = p - x\cos\alpha - y\sin\alpha. \tag{20}$$

Таким чином можна вивести допоміжне поняття відхилення довільної точки $Q_0(x_0, y_0)$ від даної прямої із нормального рівняння прямої:

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p. \tag{21}$$

Отже, для обчислення відхилення деякої точки Q_0 від даної прямої необхідно підставити в нормальне рівняння прямої замість змінної координати відповідну координату даної точки.

Обчислення відстані від точки до даної прямої – це обчислення модуля відхилення

$$d = |\delta|. \tag{22}$$

Коли пряму задано загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0, \tag{23}$$

то нормальне рівняння отримується множенням на нормуючий множник

$$\mu = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2}, \tag{24}$$

де знак обирається протилежним до знака вільного члена C. Тоді відстань d можна обчислити за наступною формулою:

$$d = d(Q_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (25)$$

6. Пряма і площина в просторі

Площина – це плоска поверхня, тобто це така геометрична фігура, яка має таку саму властивість, що лінія, яка з'єднує дві будь-які точки і повністю належить цій поверхні.

Площина може бути визначена:

1) точкою та нормальним вектором площини;

2) перетином двох прямих;

3) трьома точками, які не лежать на одній прямій.

Всі три способи визначення площини еквівалентні. Спочатку знайдемо рівняння площини в просторі (в тривимірній декартовій системі координат).

Розглянемо площину, що проходить через точку $M_0(x, y_0, z_0)$, перпендикулярно до вектора $\bar{n}(A, B, C)$, вектор $\bar{n}(A, B, C)$ – нормальний вектор площини (рис. 1).

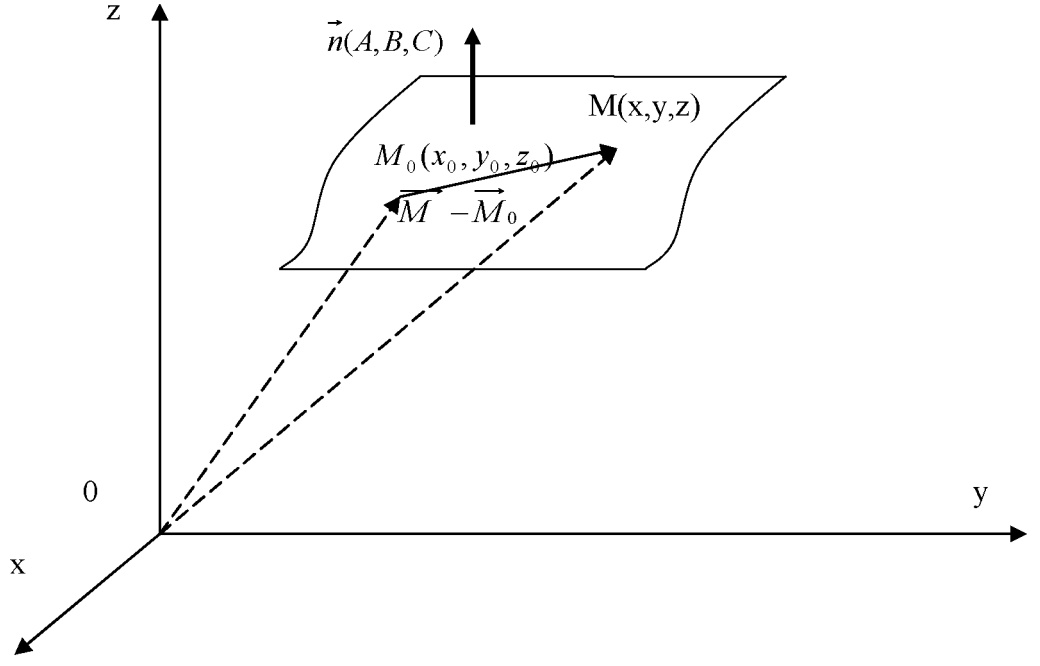


Рис. 1

Точка $M(x, y, z)$ – змінна точка на площині. Вектори $\overrightarrow{M_0M}\,(x-x\ ; y-y_0)$ і $\vec{n}(A,B,C)$ перпендикулярні, тому $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. Звідси отримуємо рівняння *площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\vec{n}(A; B; C)$.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

У рівнянні (1) розкриємо дужки та, позначивши $Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D, отримуємо *загальне рівняння площини*:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Виведемо рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3. Нехай M – змінна точка на площині. Тоді маємо три вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$, які лежать в одній площині. Із умови компланарності векторів маємо, що $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}=0$. Перепишемо це рівняння в координатній формі і отримаємо рівняння *площини за трьома заданими точками:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Із загального рівняння площини (2) виведемо рівняння *площини у відрізках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (4)$$

де

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}.$$

Нормальне рівняння площини

Виведемо рівняння площини як проекцію радіуса вектора змінної точки $M(x, y, z)$ на нормальний вектор $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, що проходить через початок координат (рис. 2)

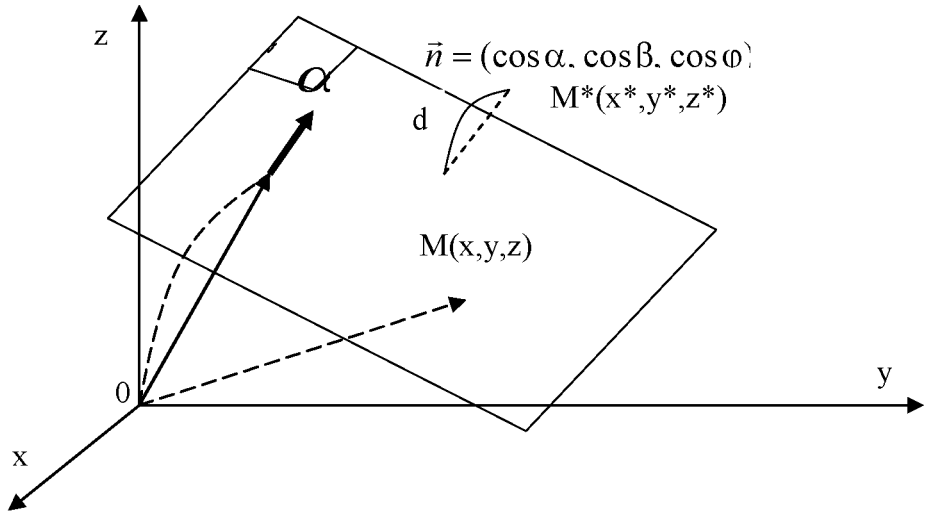


Рис. 2. Нормальне рівняння площини

Позначаючи відстань перпендикуляра від початку координат до площини через p, легко отримуємо наступне рівняння (нормальне рівняння площини):

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (5)$$

Нехай $M^*(x^*, y^*, z^*)$ – змінна точка, d – відстань від точки до площини. Проекція радіуса вектора $\overrightarrow{OM^*}$ на $\vec{n}$ дає наступну формулу для обчислення відстані від точки до площини:

$$d(M^*, \alpha) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6)$$

Введемо додаткове поняття: відстань від точки до площини – модуль відхилення точки від площини

$$d = |\delta|, \ \delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\varphi - p, \qquad (7)$$

Для того, щоб вивести з загального рівняння площини нормальне, вводимо нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (8)$$

Знак береться протилежним до вільного члена D.

Приклад 1. Обчислити відстань від точки $M^*(-2;-1;3)$ до площини $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Загальне рівняння площини перетворюємо в нормальне рівняння (5):

$\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\dfrac{1}{3}$, тоді отримаємо:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

$$\overline{n}\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Обов'язкова перевірка

$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$.

Підставляємо координати M^* в нормальне рівняння і отримуємо відхилення δ від даної площини:

$$\delta = -\frac{2}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{3}(-4) - \frac{2}{3}\cdot 3 - 1 = -3\,.$$

Це і є наша відстань

$$d = |\delta| = |-3| = 3.$$

Кут між площинами

Кут між двома площинами дорівнює куту, утвореними прямими l_1, l_2, що лежать у відповідних площинах і перпендикулярні лінії перетину площин.

Нехай площини a_1 та a_2 задані відповідно своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут φ між площинами a_1 та a_2 визначається кутом між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, а саме:

$$cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}. \qquad (9)$$

Умови паралельності та перпендикулярності площин

$$a_1 \parallel a_2 \Rightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}\ \ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

$a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$ або $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

7. Пряма в просторі

Пряма в просторі може бути визначена:

1) як перетин двох площин;

2) прямою, що проходить через задану точку паралельно вектору;

3) прямою, що проходить через дві точки.

Пряма, яка визначена перетином двох площин, є геометричним місцем точок, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

Нехай l – пряма, яка задовольняє системі (1), та α, β – дійсні числа, які не дорівнюють нулю, тоді рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (2)$$

визначає площину, що проходить через пряму.

Систему (1) можна вважати *загальним рівнянням прямої в просторі*.

Означення 1. Ненульовий вектор, який належить прямій або паралельній прямій, називається *напрямним вектором* прямої.

Виведемо рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та має напрямний вектор $\overline{S}(l, m, n)$.

Нехай $M(x, y, z)$ – змінна точка на прямій, тоді вектор $\overline{MM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ колінеарний вектору $\overline{S}(l, m, n)$.

Звідси отримуємо *канонічне рівняння прямої*.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3)$$

Якщо кожний дріб прирівняти до деякої сталої $t \in R$, то отримуємо *параметричне рівняння прямої*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (4)$$

У цьому рівнянні $t \in (-\infty; \infty)$ розглядається як параметр, а x, y, z – функції від t. Якщо трактувати t як час та систему (4) як

рівняння руху точки M, то система описує прямолінійний і єдиний рух M в момент часу $t = 0$ із точки M_0. Швидкість точки M описується наступним виразом:

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \tag{5}$$

Рівняння прямої через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_3)$ виводиться із (3) за умови, що напрямний вектор M_1M_2 та пряма проходить, наприклад, через т. M_1

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

Рівняння прямої як перетин двох площин

Виведемо канонічне рівняння прямої із загального. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, описаній в (1). Якщо знаємо координату x_0, тоді маємо

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0; \\ B_2 y + C_2 z = D_2 - A_2 x_0. \end{cases} \tag{7}$$

Система має розв'язок відносно y та z за умови:

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0, \tag{8}$$

В іншому випадку будуть відомі y_0 або z_0.

Таким чином, розв'язуючи рівняння (7), знайдемо точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

Напрямний вектор $\bar{S}$ знаходимо як векторний добуток двох нормалей $\overline{n_1}$ та $\overline{n_2}$ (кут між площинами). Тоді

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

де $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ та $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ – відповідні нормальні вектори даних площин.

Приклад 1. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

Розв'язання. Введемо z_0 і запишемо (10) наступним чином:

$$\begin{cases} x_0-2y_0=4-3z_0, \\ 3x_0+2y_0=4+5z_0. \end{cases}$$

Із першого рівняння маємо: $x_0=2+\frac{1}{2}z_0$.

Підставляючи в друге рівняння, отримаємо

$$y_0=\frac{7}{4}z_0-1.$$

Таким чином отримаємо координати:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}z_0+2, \\ y=\frac{7}{4}z_0-1, \\ z=z_0, \end{cases}$$

Нехай z_0=0, тоді $M_0=(2,-1,0)$.

Напрямний вектор прямої $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=(1,-2,3)$ і $\vec{n}_2=(3,2,-5)$:

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k},,$$

$$\vec{s}=(4,14,8).$$

Отримаємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8} \text{ або}$$

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

Відповідь:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

Приклад 2. Взаємне розміщення прямої та площини. Умова перпендикулярності прямої і площини.

Розв'язання. Запишемо загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ та канонічне рівняння прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, тоді вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ паралельний вектору $\vec{S} = (l, m, n)$, якщо задовольняє наступну умову

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Відповідь. Пряма $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ перпендикулярна до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

8. Основні криві другого порядку

Геометричне місце точок у декартовій системі координат, які задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

називають *алгебраїчними кривими другого порядку.*

Точку, відносно якої всі точки кривої розташовані симетрично, називають центром кривої другого порядку.

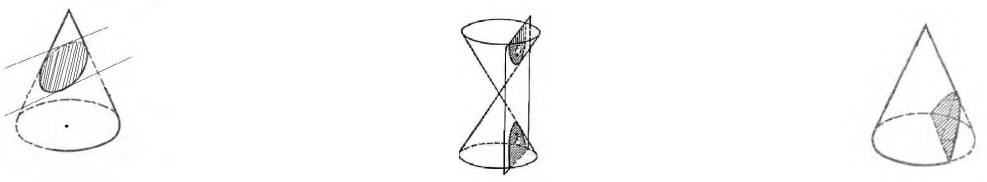
Точка $S(x_0, y_0)$ є центром кривої другого порядку (1) тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0; \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

за умови, що $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0.$

Це необхідна та достатня умова для кривої точки $S(x_0; y_0)$.

Дослідимо такі важливі криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола та парабола; які отримані перетином прямого кругового конуса площинами, як показано на рис. 1.



Еліпс Гіпербола Парабола

Рис 1. Конічні перетини

Коло

Колом називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої даної точки – центра кола.

Канонічне рівняння кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

де r – радіус кола та (a,b) – координати центра кола. Коли $a=b=0$, то центр кола співпадає з початком координат:

$x^2+y^2=r^2$.

Еліпс

Еліпс – це замкнена геометрична фігура подібна до видовженого кола та симетрична відносно різних по довжині осей (більшої та меншої).

Означення 1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є сталою величиною $(a>c)$ і більшою від відстаней між фокусами (позначається $2a$).

Фокуси позначаються F_1 і F_2, а відстань між ними – $2c$. У декартових координатах фокуси розміщуються вздовж осі OX симетрично відносно початку координат.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

де $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Точки $((\pm a,0);(0;\pm b))$ перетину еліпса з координатними осями називаються вершинами еліпса (рис. 2)

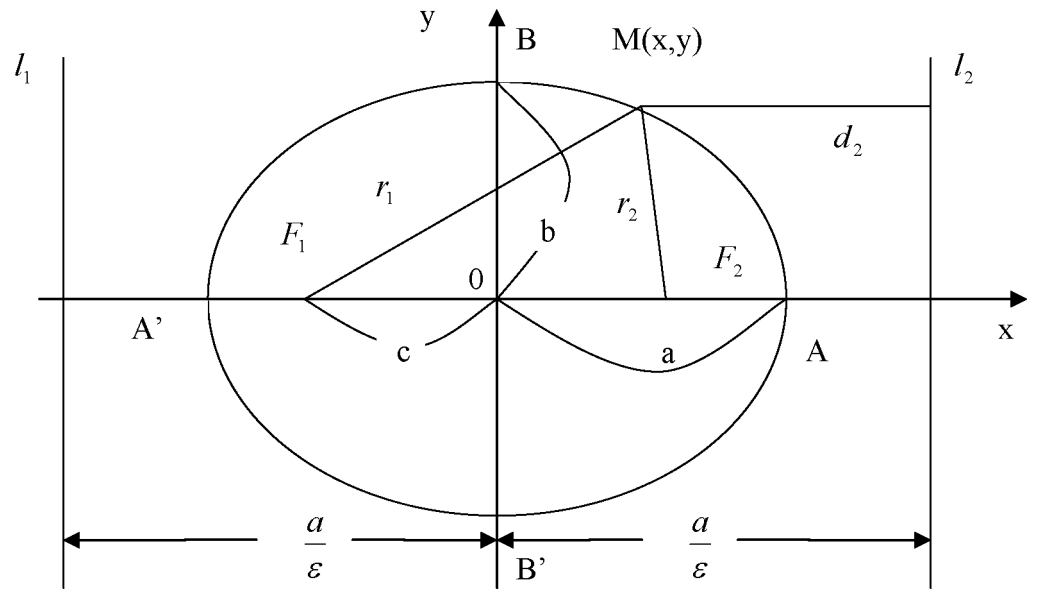


Рис 2. Еліпс

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (4) називається ексцентриситетом еліпса, де a – велика піввісь.

Очевидно, що $\varepsilon < 1$ ($\varepsilon = 0$ для кола).

Наступне поняття відіграє важливу роль у математичному описі кривих другого порядку, отриманих конічними перетинами.

Означення 2. Фіксовану лінію на опуклій стороні конічного перетину, яка володіє такою властивістю, що відношення відстаней від будь-якої точки кривої до фокусу і до цієї прямої є сталою величиною і рівною ε відповідної кривої, називають директрисою конічного перетину.

Директриси еліпса визначаються наступним відношенням:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (5)$$

У цьому контексті можна визначити еліпс як геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від фокуса до будь-якої точки еліпса та перпендикуляра до директриси l є сталою величиною і дорівнює $\frac{r}{d} = \varepsilon$, де ε – ексцентриситет еліпса. (6)

Якщо M – довільна точка еліпса, то відрізки $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ називаються фокальними радіусами точки M. Їх можна обчислити наступним чином:

$$r_2 = \varepsilon d_2 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = a - \varepsilon x.$$
$$r_1 = \varepsilon d_1 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = a + \varepsilon x, \qquad (7)$$

Гіпербола

Означення 3. Гіпербола є конічним перетином з ексцентриситетом, більшим одиниці, який отримується шляхом перетину площини обох частин конуса (див. рис 3). Гіпербола має дві асимптоти (дві фіксовані лінії, що перетинаються) та два фокуса. Коли центром симетрії є початок координат, то маємо рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8)$$

де дійсна вісь збігається з віссю OX та уявна вісь – OY, $2a$ – відстань між точками перетину з віссю OX та $2c$ – відстань між фокусами. За означенням $a < c$. Дамо означення гіперболи.

Означення 4. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок, які називаються фокусами гіперболи, є сталою величиною (позначимо її 2a).

Виведемо рівняння гіперболи. Із рисунка 3 маємо

$r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$.

Відповідно за означенням (3) $|r_1 - r_2| = 2a$

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a \qquad \text{або}$$

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 2a.$$

Підносячи до квадрату обидві частини рівняння, отримуємо

$$(c+x)^2 + y^2 = (c+x)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Зводимо подібні члени, маємо:

$2cx = -2cx + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 4a^2$ або $cx - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$.

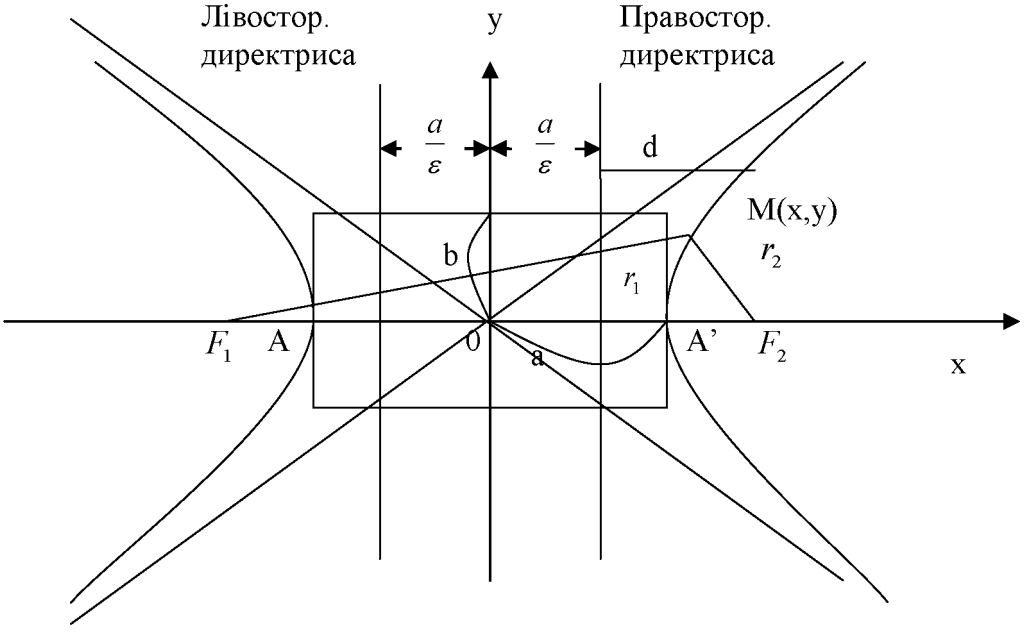


Рис. 3. Гіпербола

Знову піднесемо до квадрату обидві частини та отримуємо:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(c^2 - 2cx + x^2\right) + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Позначивши $b^2 = c^2 - a^2$, ділимо обидві частини рівняння на a^2b^2 та отримуємо кінцевий результат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9)$$

Формула (9) називається *канонічним рівнянням гіперболи*.

Точки $(\pm a,0)$ перетину гіперболи з віссю OX називаються *вершинами гіперболи*.

Прямокутник зі сторонами $2a$ та $2b$, симетричний відносно дійсних та уявних осей гіперболи, називається *головним прямокутником гіперболи*.

Його діагоналі

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \qquad (10)$$

є асимптотами гіперболи.

Відношення $$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (11)$$

називається ексцентриситетом гіперболи, де a – відстань від центра гіперболи до її вершини. Очевидно, що ексцентриситет гіперболи більше одиниці $\varepsilon > 1$.

Фокальні радіуси точок правої гілки параболи обчислюється за формулою:

$$r_1 = \varepsilon x + a, r_2 = \varepsilon x - a. \quad (12)$$

Фокальні радіуси точок лівої гілки параболи обчислюється за формулою:

$$r_1 = -\varepsilon x - a, r_2 = -\varepsilon x + a. \quad (13)$$

Якщо гіперболу задано рівнянням (9), то її директриси визначаються за формулою:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \quad (14)$$

У цьому контексті гіперболу можна визначити як геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від фокуса до будь-якої точки гіперболи та перпендикуляра до директриси l стала величина і дорівнює

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad (15)$$

де ε – ексцентриситет гіперболи.

Парабола

Парабола утворюється перетинами конуса з площиною, яка паралельна одній із твірних конуса.

Визначається наступним канонічним рівнянням

$$y^2 = 4ax, \quad (16)$$

де $2a$ відстань між фокусом та директрисою, коли крива симетрична відносно осі OX та її вершина лежить на початку координат, рис. 4.

З цими координатами рівняння директриси є

$$x = -a \quad (17)$$

Фокальний радіус довільної точки $M(x, y)$ параболи (тобто довжина відрізка FM) можна обчислити за формулою

$$r = x + a. \quad (18)$$

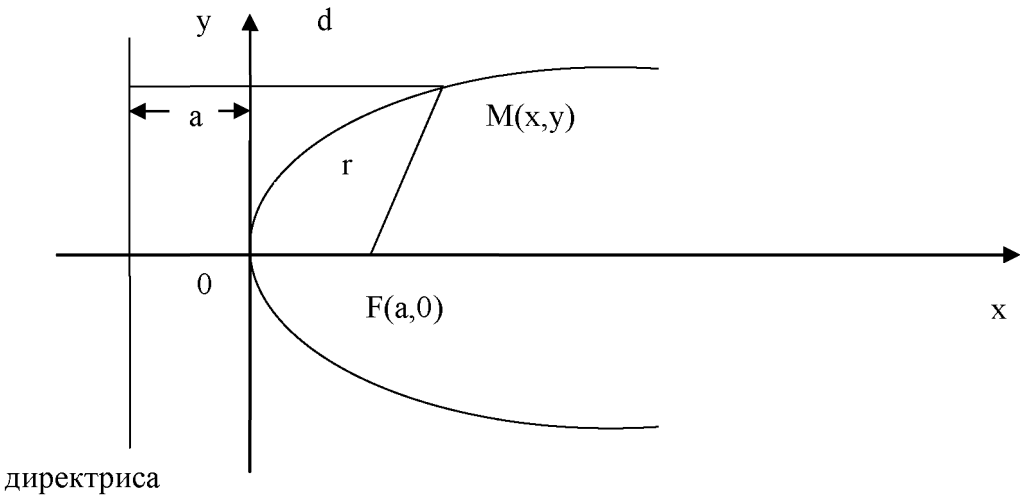


Рис. 4. Парабола

Означення директриси параболи відповідає наступному означенню кривої.

Означення 4. Параболою називається геометричне місце точок площини, для кожної із яких відстань від деякої фіксованої точки площини, яка зветься фокусом параболи, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка зветься директрисою параболи.

Дійсно, якщо $r = d$ (рис.4), маємо

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,,\ d = (x+a).$$

Прирівнюємо праві частини $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a \quad \Leftrightarrow$ $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$.

За допомогою елементарних перетворень отримуємо:

$y^2 = 4ax$, тобто рівняння (16).

Таким чином, ексцентриситет параболи $\varepsilon = \dfrac{r}{d} = 1.$

Наслідок

Розглянуто важливі криві другого порядку за допомогою понять фокуса, директриси та ексцентриситета, які однозначно визначають геометричне місце точок площини, утворених конічними перетинами (рис. 5).

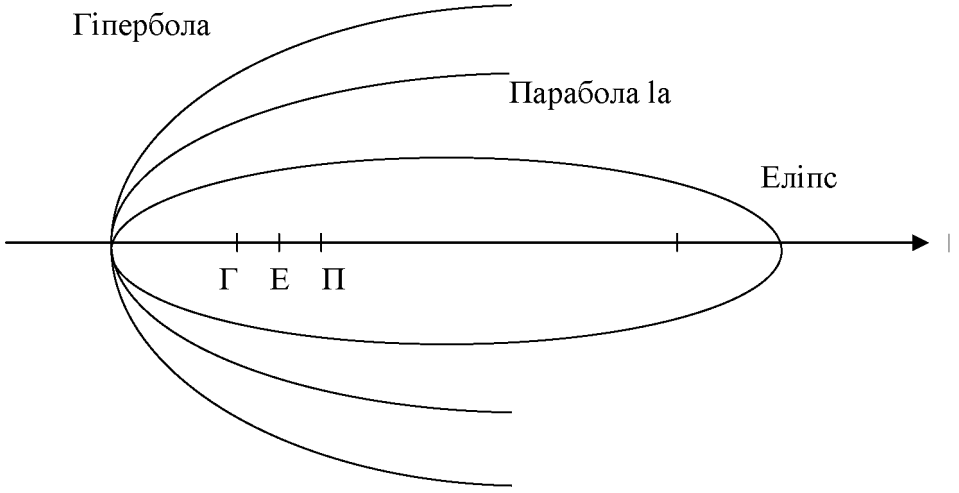


Рис. 5. Фокуси (Е) еліпса, фокус (Г) однієї гілки гіперболи та фокус (П) параболи, що мають спільну вершину

PREFACE

Training of economy specialists requires knowledge of the highest mathematics fundamentals to further enhance knowledge of many basic and professionally oriented courses as well as to facilitate their practical appliance.

At the same time students-economist should obtain sufficient mathematics skills along with minimal English mathematical terminology.

This training manual will help students to develop greater understanding of such important practical courses as "Mathematical Programming" and "Economic and Mathematical Modelling" in the future. There are typical exercises, examples and solutions which allow to assimilate the related terminology and problem solving methodic as well as facilitate understanding of English literature and finding solutions of economic tasks.

This course contains the following chapters: "Linier Algebra" and "Analytic Geometry" including 12 lectures in English.

Authors sincerely hope that this training manual will help students to better understand chapters of the highest mathematics course as well as improve English language skills, in particular, mathematical terminology.

Authors would like to apologize in advance for any printing mistakes and accept all propositions and remarks concerning completion and content of these guidelines.

PART I. LINEAR ALGEBRA

1. Matrices, their kinds, operations for matrices

A rectangular array of real entries a_{ij}, where $i=1,2,..m$ and $j=1,2,..n$, set out in m rows and n columns written in the form

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

is called matrix. We denote in brief:

$$A=\lfloor a_{ij} \rfloor.$$

Real numbers a_{ij} are called entries and entry denoted a_{ij} lies at the intersection of the i^{th} row and the j^{th} column. A product $m\times n$ is called dimension of the matrix A that is usually denoted as $A_{m\times n}$.

In case $m=n$ we have a square matrix of order n: for example Leontief matrix (expenses output matrix) of the economic manufacturing productis of n kinds.

$L_{n\times n}=\lfloor l_{ij} \rfloor$, $l_{ij}\geq 0$, i, j=1,2,…,n, where l_{ij} – a quantity of i^{th} kind of production required for manufacturing a unit of production of j^{th} kind.

A matrix having the sole row is called row-vector and the one having the sole column, correspondingly, column-vector.

Two matrices $A_{m\times n}=\lfloor a_{ij} \rfloor$ and $B_{m\times n}=\lfloor b_{ij} \rfloor$ having the same dimension in case

$$a_{ij}=b_{ij}, i=1,...,m; j=1,...,n,$$

are called equal. A matrix with all entries zero is called *zero matrix* $O_{m\times n}=\lfloor a_{ij} \rfloor$, where $a_{ij}=0, i=1,...,m; j=1,...,n$.

A square matrix, for example,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A square matrix of which all the elements other then those on its main diagonal are zero is called *diagonal matrix*. A diagonal matrix of which, all elements are equal is called scalar matrix. A diagonal matrix in which every diagonal entry is one and the other elements are all zero is called *identity matrix*.

$$E_{n\times n} = \lfloor \delta_{ij} \rfloor, \text{ where } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Addition is defined for the matrices of the same dimensions.

Definition 1. Let

$$A_{m\times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor \text{ and } B_{m\times n} = \lfloor b_{ij} \rfloor,$$

are the matrices of the same dimensions then matrix

$$C_{m\times n} = \lfloor c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \rfloor,$$

is called sum of matrices A and B, i.e.

$$C = A + B.$$

Example 1. Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Then the sum

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Addition of the matrices possesses the following properties:

1°. $A + B = B + A$ (commutative property).

2°. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associative property).

3°. $A + 0 = A$.

4°. For every matrix A there is the matrix – A which is *contrary* to A, i.e.

$$A + (-A) = 0.$$

If $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ then $-A = \lfloor -a_{ij} \rfloor$.

The product of matrices is defined only if they are *conformable*, that is, if the number of columns of the first equals the number of rows of the second. In particular two any square matrices are always conformability of A with B doesn't imply reverse statement. This circumstance reveals in the matrices product being noncommutative.

Definition 2. A product $A \times B$ of matrices $A_{m\times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ and $B_{n\times k} = \lfloor b_{ij} \rfloor$ is matrix $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ in which the ij^{th} entry is the *inner* product of i^{th} row of the first with the j^{th} column of the second:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1,2,...m;\ j = 1,2,...k.$$

Example 2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{bmatrix}.$

Multiplication of matrices is characterized by the following properties:

1. This operation is not commutative, i.e. existence of AB and BA doesn't imply equality $AB \neq BA$.
2. $(AB)C = A(BC)$, (associative property).
3. $(A + B)C = AC + BC$, (distributive over addition property).
4. $AO = OA = O.$
5. $AE = EA = A.$
6. Determinants have the property that $|AB| = |A|\,|B|$

Definition 3. Multiplication of the matrix $A_{m\times n} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ by a scalar k is the matrix $B_{m\times n} = \lfloor b_{ij} = ka_{ij} \rfloor$ having the same dimension,

$kA = Ak = B$, or equivalently

$$k\begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ..... \\ a_{m1}...a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ..... \\ a_{m1}...a_{mn} \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_{11}...ka_{1n} \\ ..... \\ ka_{m1}...ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Multiplication by scalar has the following properties:

1. $k(tA) = (kt)A.$
2. $k(A + B) = kA + kB.$
3. $(k + t)A = kA + At.$

From these definitions it follows that in case of square matrices their product always exists. Moreover arbitrary power of the square matrix may be defined.

Definition 4. A number of times a matrix is multiplied by itself is called power of the matrix.

Example 3. Let $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, then the third power of A is

$$A^3=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 19\\ 0 & 27\end{bmatrix}.$$

Definition 5. A matrix having the property that it is equal its own square, i.e.

$$A=A^2,$$

is called *idempotent*.

Example 4. The matrix

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

is idempotent:

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

There are two kinds of the product of two vectors.

Definition 6. An *inner* or *scalar* product of two vectors is the product of a row-vector by a column-vector which equals to the scalar:

$$a_{1\times n}\,b_{n\times 1}=\sum_{j=1}^{n}a_j b_j.$$

Example 5. $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=-1.$

Definition 7. Direct product of two vectors is the product of a column-vector by a row-vector which equals to the matrix:

$$b_{n\times 1}\;\;a_{1\times n}=\begin{bmatrix}b_1a_1\ldots b_1a_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_na_1\ldots b_na_n\end{bmatrix}.$$

Example 6. $\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{bmatrix}.$

Definition 8. Interchanging the rows and columns of a matrix is called *transposing*. The transpose of matrix A is often denoted A^t.

Example 7. Let

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix},$$

then the transpose of this matrix is $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

This operation is very useful when doing matrix calculations according to the following properties:

1. $\left(A^t\right)^t = A$.
2. $(kA)^t = kA^t$.
3. $(A+B)^t = \left(A^t + B^t\right)$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Square matrix A is called symmetric when the equality $A = A^t$ holds and *antisymmetric* in case of $A = -A^t$.

2. Determinants and their properties

Definition 1. A scalar quantity representing a certain defined alternating sum of products of elements of a square matrix, one from each row and column, taken with a definite sign is called a *determinant* of the matrix.

The determinant of the $n \times n$ square matrix is often denoted

$$D = det\, A = \sum sgn(i_1,...,i_n) a_{1i_1}\, a_{2i_2} ... a_{ni_n}, \qquad (1)$$

where $sgn(i_1,...,i_n) = \begin{cases} +1 \ for\ even\ permutation(i_1,...,i_n), \\ -1 \ for\ odd\ permutation(i_1,...,i_n). \end{cases}$

Arrangement of numbers $(i_1,...,i_n)$ is called even(odd) permutation if it was obtained as a result of even(odd) number of exchanges of element positions of the original $(1,2,...,n)$.

If A is matrix 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Then the determinant of A has rank 2, often written

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Here, we have, the even permutation $(1,2)$ in $a_{11}a_{22}$ and odd one $(2,1)$ in the second term $a_{21}a_{12}$. Thus we derive the following rule:

If A is matrix 3×3,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Then has determinant of rank 3? Which according to (1) is equal to

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Evaluation of a determinant of rank 3 may be performed according to the mnemonic rule, usually called the *Sarrus rule.*

Sarrus rule: write to the right of the determinant its two first columns without changing their order, calculate the sum of products of main diagonal elements together with those being parallel to it and subtract the sum of products of off diagonal elements together with those being parallel to the last:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Properties of the determinants

Let's consider rows of the determination A having rank n as row-vectors $z_1, z_2, ..., z_n$.

Then properties of the determinate A, often written

$D(z_1, ..., z_n)$,

may be formulated as follows:

1. Permutations of the rows may change only the sign of a determinant:

$$D(z_1,...,z_i,...,z_k,...,z_n) = -D(z_1,...,z_k,...,z_i,...,z_n).$$

2. Multiplier which is common for all elements of a row may be taken out from the determinant and placed before it:

$$D(z_1,...,\alpha z_k,...,z_n) = \alpha D(z_1,...,z_k,...,z_n).$$

3. When adding two determinants which are differ from each other only by elements of a single row the corresponding elements of row are summed:

$$D(z_1,...,z_k,...,z_n) + D(z_1,...,z'_k,...,z_n) = D(z_1,...,z_k + z'_k,...,z_n).$$

4. Adding of the k-th row multiple to the i-th row doesn't change a determinant $D(i \neq k)$:

$$D(z_1,...,z_i,...,z_k,...,z_n) = D(z_1,...,z_i + \alpha z_k,...,z_k,...,z_n).$$

5. $D(z_1,....,z_n) = 0$ only in case of *linear dependence* of the set $(z_1,....,z_n)$ of row-vectors. D=0 in a case of one row consisting of zeroes or two rows being proportional each other in particular.

6. $det\, A = det\, A^t$. Thus all properties having been formulated for row-vectors are correct for column-vectors as well.

Evaluation of determinants

Definition 2. Let D is a determinant having a rank n. Then the determinant of the submatrix obtained be deleting the i-th row and j-th column from the given determinant or matrix is called the minor M_{ij} of the element a_{ij} of the determinant or matrix given. This has order one less then the given matrix or determinant.

Definition 3. The (ij) – cofactor of a matrix A is the number:

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Example 1. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, then its (1,2) – cofactor

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) = 6.$$

Determinant of rank n can be evaluated in terms of determinants of rank $n-1$ (its cofactors) according to the following expansion theorem.

Theorem 1. Any determinant can be expanded as the sum of the products of the entries in any one row or column and their respective cofactors and the series of the products of the elements in the row or column with the cofactors of the elements in another is zero:

$$D=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\hat{A}_{ik}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,\hat{A}_{ki},1\le k\le n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,\hat{A}_{li}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\hat{A}_{il}=0 \text{ if } k\neq l.$$

Example 2. Let $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Evaluate determinate A.

Solution

In our case we have the matrix of which entry $a_{23}=0$. So the most preferable variant for application of the above theorem is the 2-nd row to choose:

$$detA=a_{21}\hat{A}_{21}+a_{22}\hat{A}_{22}+a_{23}\hat{A}_{23}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=(2\cdot 2-3\cdot 1)+4(1\cdot 2-2\cdot 3)=1-16=-15.$$

Expanding the determinant with respect to the entries of the 3-rd column we have meet the same result:

$$detA=a_{13}\hat{A}_{13}+a_{23}\hat{A}_{23}+a_{33}\hat{A}_{33}=(3)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=3(-1\cdot 1-4\cdot 2)+2(1\cdot 4-2\cdot(-1))=-27+12=-15.$$

In actual computations of determinants of matrices larger than 3×3 the *Gaussian elimination* technique is almost always preferred. This technique is based on the most determinant properties 1–6.

Example 3

$$D=\begin{vmatrix}2&9&9&4\\2&-3&12&8\\4&8&3&-5\\1&2&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5&9&4\\2&-7&12&8\\4&0&3&-5\\1&0&6&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&5&3&4\\2&-7&4&8\\4&0&1&-5\\1&0&2&4\end{vmatrix}=$$

(property 4) (property 2)

$$=3\cdot\left\{-5\begin{vmatrix}2&4&8\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2&3&4\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}+0\right\}=$$

(Theorem 1)

$$=0-21\begin{vmatrix}2&3&4\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}=-21\begin{vmatrix}1&1&0\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix}=$$

(property 5) (property 4)

$$=-21\left\{\begin{vmatrix}1&-5\\2&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4&-5\\1&4\end{vmatrix}\right\}=-21\{(4+10)-(16+5)\}=$$

(theorem 1)

$$=66\cdot 21=1386.$$

3. Vectors spaces

We know that on the *Cartesian plane xoy* the arbitrary point (a,b) defines the vector $\vec{x}(a,b)$, where the numbers a and b are called *coordinates* of the vectors as is shown on the Fig. 1.

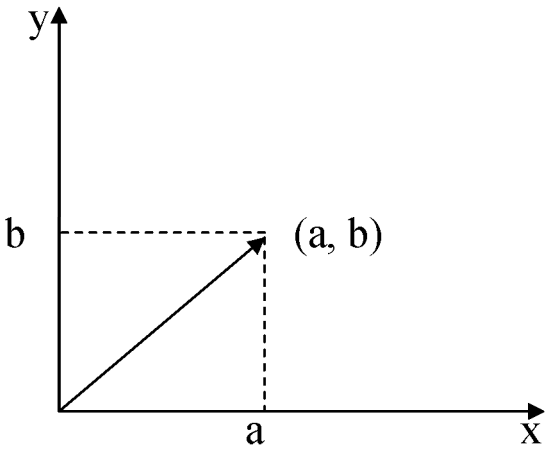


Fig. 1

This system extends naturally to three or more dimensions.

Definition 1. Arbitrary ordered set $x_1, x_2, ..., x_n$ made of n real numbers is called n-dimensional vector $\vec{x}$. The numbers $x_1, x_2, ..., x_n$ are called coordinates of the vector $\vec{x}$.

Every vector is uniquely defined by its coordinates. Coordinates of the n-dimensional vector may be arranged both in a row order

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

in that case we have the *row-vector*, or in a column order

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$, in this case the vectors called correspondingly – *column–vector*.

On the set V of all n-dimensional vectors we can define operations of additions and multiplication by real numbers subjects to the following rules:

1. For two arbitrary vectors $\vec{a}, \vec{b} \in V$ there is a unique vector $\vec{a} + \vec{b} \in V$ – the sum of $\vec{a}$ and $\vec{b}$. In particular there is a unique zero vector $\vec{0}$ such that $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ for all $\vec{a} \in V$.

2. Addition is associative operation, i.e. for every $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ holds the equality $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

3. Addition is commutative operation, i. e. for every two $\bar{a},\bar{b}\in V$ holds the equality $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

4. Resolvability. For every $\bar{a},\bar{b}\in V$ there exist $\bar{x}\in V$ such that holds the following equality $\bar{a}+\bar{x}=\bar{b}$.

Solution $\bar{x}\in V$ is called the difference of vectors $\bar{a}$ and $\bar{b}$ and denoted

$$\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}.$$

In case $\bar{b}=\bar{0}$ $\bar{x}=\overline{-a}$ is called the *reverse* element with respect to $\bar{a}$.

5. For every $\bar{a}\in V$ and real α there is element $\alpha\bar{a}\in V$. In particular $1\bar{a}=\bar{a}$. The element $\alpha\bar{a}$ is called the product of vector $\bar{a}$ by number α;

6. Multiplication by numbers is an associative operation on V: $(\alpha\beta)\bar{a}=\alpha(\beta\bar{a})$, $\bar{a}\in V$;

7. Addition and multiplication are distributive with respect to each other: $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$, $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$, $\bar{a},\bar{b}\in V$.

Definition 2. The set V of all n- dimensional addition and multiplication defined for them according to the conditions (1–7) is called n-dimensional vector space.

All operations having been introduced above should be treated as operations with coordinates of corresponding vectors.

Example 1. Let given

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ and $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, then their linear combination

$$\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \vdots\\ \alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}.$$

The most important notion in the theory of n-dimensional vector spaces is the *linear dependence* of a set of vectors.

Definition 3. A set of vectors $\{\bar{x}_1,...,\bar{x}_k\}$ of n – dimensional vector space V is called *linearly dependent* if there any real numbers $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k$ not all equal to zero, such to the following equality holds

$$\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+...+\lambda_k\bar{x}_k=0.$$

In case the above relation holds only for $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$ the vectors $\bar{x}_1,...,\bar{x}_k$ are called *linearly independent.*

Example 2. Any number of collinear vectors in a plane is linearly dependent, contrary to that any pair of non-collinear vector is linearly independent on the plane.

There is a general result:

Theorem 1. Every set consisting of $n+1$ vectors is linearly dependent in n-dimensional vector space.

From this we may formulate

Definition 4. A set of any n linearly independent vectors of the n – dimensional vector space is called basis of this space.

Example 3. The set of n – dimensional vectors

$$\begin{cases}\bar{e}_1=(1,0,...,0),\\ \bar{e}_2=(0,1,...,0),\\ .....\\ \bar{e}_n=\underbrace{(0,0,...,1)}_{n\ coordinates},\end{cases}$$

forms a basis in n-dimensional vector space. This basis is called standard.

Example 4. In 3-dimensional space any three ordered non-coplanar vectors form a basis. The main remarkable result of the whole theory is theorem 2.

Theorem 2. Every vector $\bar{x}$ of n-dimensional vector space may be uniquely expanded into the sum o of multiples of basis vectors $\bar{a}_1,...,\bar{a}_n$:

$$\bar{x}=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n.$$

The numbers $\lambda_1,...,\lambda_n$ are called the coordinates of vector $\bar{x}$ in the basis $\{\bar{a}_1,...,\bar{a}_n\}$.

Example 5. Find in two-dimensional vector space with basis $\vec{a}_1 = (2,3), \vec{a}_2 = (1,-1)$, given coordinates of the vector $\vec{x} = (1-6)$ written in the standard basis.

Solution

Denoting unknown coordinates of vector $\vec{x}$ in the basis $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ as x_1 and x_2. we have

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = (2x_1,3x_1) + (x_2,-x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - x_2) = (1,-6).$$

Two vectors are equal if they have equal coordinates. Thus we readily derive from the above equation:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -6 \end{cases}.$$

This system can be easily solved:

$x_1 = -1, x_2 = 3.$

Answer: $\vec{x} = (-1,3)$ in the basis $\vec{a}_1 = (2,3), \vec{a}_2 = (1,-1)$.

4. Rank of a matrix

Consider the $m \times n$ matrix:

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Let's mark out k arbitrary chosen rows and columns. The determinant composed of the entries which are located at the intersections of the chosen rows and columns is called the k-th order minor of matrix A.

Definition 1. The number of rows or column in the highest order non-zero minor of the matrix is called the rank of the matrix.

Rank of the matrix is often denoted r (A) and has the following properties:

1. $0 \le r(A) \le min(m \times n)$.

2. $r(A) = 0$, if $A = 0$.

3. In case of square $n-$ order $r(A) = n$ if the matrix A is non-singular, i.e. $(det\, A \neq 0)$.

Definition 2. Every non-zero minor of a matrix whose order is equal to its rank is called the basic minor. Rows and columns making up the basic minor are called the basic ones. Fundamental meaning of the notion having just been introduced is in the following.

Theorem 1 (about the basic minor). Every column of the matrix given as a linear combination of its basic columns and every row of it – linear combination of basic rows.

This theorem plays a key role in the solution of systems of linear algebraic educations. It has in particular, the following useful consequences which are important when calculating r (A):

1. The rank of the matrix doesn't depend on permutation of its columns (rows) ;

2. The rank of the matrix doesn't change when zero-column (row), is deleted.

3. The rank of the matrix doesn't change, when the column (row), being a linear combination of the rest of its columns (rows), is deleted.

4. The rank of the matrix doesn't change, when multiplying its columns (rows) by a number that is not zero;

5. The rank of the matrix doesn't change, when adding to its arbitrary column (row) arbitrary linear combination of the rest of its columns (rows).

These transformations of a matrix is often called *elementary*.

The facilitate calculation of r (A).

Example 1. Evaluate $r(A)$, if

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Solution

Let's subtract from the 2-nd row doubled the 1-st row and at the same time from the 3-d subtract the 1-st row one multiplied by 8. Due to the property 5, these transformations do not change the rank. We have

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{pmatrix}.$$

Now let's multiply the 2-nd row by -1/7 while the 3-d one by -1/21. Keeping in mind property 4 we deduce

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

We observe that the 3-d row is the same as the 2-nd one. Thus due to the property 3, we have

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; r(A) = 2.$$

Because there is non-zero 2-nd order minor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

5. Inverse matrix

Main notions

Definition 1. The matrix inverse of a given matrix with respect to matrix multiplication is called the inverse matrix i.e., if A is the given matrix then its inverse A^{-1} satisfies the following relation: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Such a matrix exists precisely when A is non-singular i.e. det A ≠ 0, and it is then computable by the *adjoint* formula

$$A^{-1} = \frac{A^*}{det\, A}. \qquad (1)$$

that is, the transpose of the matrix of the quotients of its cofactor by its determinant. In the above expression A^* (adjugate matrix) is the matrix

the entries of whose transpose are the cofactor of the given square matrix. If the given matrix is invertible, its adjugate is obtained by multiplying its inverse matrix by its determinant.

Example 1. Let the matrix given $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Compute A^{-1}

Solution

Let's compute first adjugate A.

$$detA=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=3A_{21}+2A_{23}=-3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-24+20=-4.$$

The cofactors of the entries of the matrix given are:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Thus adjugate to A matrix is

$$A^{*}=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ -8 & 9 & 10\\ 4 & -5 & -6\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{\det A}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & -4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

Realy:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\cdot 4-2\cdot 7+1\cdot 6 & -1\cdot 8+2\cdot 9-10 & 1\cdot 4-2\cdot 5+1\cdot 6 \\ 3\cdot 4-0\cdot 7-2\cdot 6 & -3\cdot 8+0\cdot 9+2\cdot 10 & 3\cdot 4-0\cdot 5-2\cdot 6 \\ 4\cdot 4+2\cdot 7-5\cdot 6 & -4\cdot 8-2\cdot 9+5\cdot 10 & 4\cdot 4-2\cdot 5-5\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

The inverse matrix may be used for the solution of the inhomogeneous system of the linear algebraic equations with non-singular matrix.

6. Systems of linear algebraic equations

Main notions

It is well known that the algebraic equation consisting only of constant multiples of variables $x_1, x_2, ..., x_n$ is called *linear algebraic equation* denoted

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b.$$

Here $a_1, a_2, ..., a_n$ and b are arbitrary real numbers.

A system of m algebraic linear equations with respect to n variables $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

is called the $m \times n$ *system of linear equations*, a_{ik} – coefficients of the system and b_i – free terms. In case of all $b_i = 0$ we have the *homogeneous system of linear equations* otherwise the system is called non-homogeneous. A vector $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ having non-zero entries that

satisfies (1) identically is called the non-trivial solution of the system. In case of the homogeneous system there may exist zero solution $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ which is often called *trivial* one.

Two systems having the same solutions are called *equivalent*.

6.1. The solving of systems with the same number of equations and variables

6.1.1. Matrix method for solving equations

Let's consider the inhomogeneous system of the linear algebraic equations.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Denoting:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

We may rewrite the system if the matrix from:

$$A \cdot \vec{X} = \vec{b}. \tag{2}$$

There is the inverse matrix A^{-1} because we have assumed that determination A ≠ 0.

Then, multiplying (3) from the left by A^{-1} we readily obtain the solution of the problem

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}. \; A^{-1} \cdot A = E; \; E \cdot \vec{X} = \vec{X},$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b} \tag{3}$$

Thus we've derived the following suggestion:

Inhomogeneous system of linear algebraic equation with non-singular matrix is *unconditionally* solvable.

Example 2. Solve the following system

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_3 = 2, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Solution

Here $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$.

The matrix of the system is non-singular. Its determinant has been computed in the previous example $det\, A = -4$.

Thus the problem given is solvable using the expression for A^{-1} having been found in the previous example we have:

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\cdot 2 - 8\cdot 9 + 4\cdot 15 \\ -7\cdot 2 + 9\cdot 9 - 5\cdot 15 \\ -6\cdot 2 + 9\cdot 10 - 6\cdot 15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Answer: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3..$

6.1.2. Kramer's theorem

Formula (3) having been derived above, may be written in a form of so-called Kramer's rule. Substituting (1) into (3), we may represent a solution of $n \times n$ nonhomogeneous system as follows:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{det\, A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Then i-th coordinate x_i of the solution is determinate according to the following formula:

$$x_i = \frac{1}{det\,A}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) = \frac{1}{det\,A}\begin{vmatrix} a_{11}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i(b)}{D},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \qquad (5)$$

where D_i is determinant derived from the given determinant $D = det\,A$ be replacing of its i-th column by the vector

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

So we are able to formulate the following theorem:

Theorem 1. Kramer's theorem. Every $n \times n$ system of the linear algebraic equations

$$Ax = b,$$

such that $D = det\,A \neq 0$ has a unique solution $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, where

$$x_i = \frac{D_i}{D},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

The formula (5) are knows as the *Kramer's rule*.

Example 3. Using the Kramer's rule solve the following system

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Solution

Here

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 16 & 0 & 7 \\ -11 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 16 & 7 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -(-64+77) = -13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -(-13-13) = 26,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 13 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = -13(5-8) = 39.$$

Thus, using formulate (6) for $i = 1,2,3,$ we have:

$x_1 = \frac{D_1}{D} = -1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2\ ,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$

Answer: $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$

6.2. The solving of systems of m-linear equations and n-variables

Any homogeneous system always has a trivial solution. The issue is whether there is a non - trivial solution?

Example 1. Consider the homogeneous system

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

We have here two equations and three variables x_1, x_2, x_3. So, one of them may be chosen arbitrary. Let's assume

$$x_3 = \alpha,$$

where α is the arbitrary real number. Substituting this value of x_3 into the 2-nd equation we get $x_2 = -\alpha$. Substituting now the values being found into the 1-st equation one obtains $x_1 = -\alpha$. Thus in this case we have the set of solutions of the system given

$$L = \{\alpha(-1,-1,1)\},$$

contrary to that the homogeneous 2×2 system

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

has only trivial solution $x_1 = x_2 = 0$.

Among the nonhomogeneous systems there are unsolvable systems.

For example, the system

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

is obviously unsolvable.

The general theory of systems of the linear equations may be developed using the matrix theory.

Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

the vector of unknown variables

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

and the vector of free terms, correspondingly,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Then equation (1) may be written in the following form

$$Ax = b. \tag{5}$$

Let's introduce some more definitions.

Definition 1. The matrix derived from matrix A by adjoining to its columns a constant vector of free terms is called the *augmented matrix*. The augmented matrix is often denoted

$$A/b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & .b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & .b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & .b_m \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Then the key role plays the following fundamental theorem:

Theorem 1 (Kronecker Capelli) A system of the linear algebraic equations is solvable if and only if

$$r[A] = r[A/b].$$

Using the theorem we are able to formulate the following rules for solving of the linear systems.

1. Solving the linear system (5) we should study first its solvability. With that end in view it is necessary to compute and compare $r(A)$ and $r(A/b)$. In case of

$$r[A] \neq r[A/b],$$

according to the Kronecker-Capelli theorem the system (5) is unsolvable. Thus the solution of such system is out of the question.

But in case

$$r[A] = r[A/b] = r,$$

the system (5) is solvable. To solve the system one should choose a basic minor M. We may assume that this are r first rows together with the r first columns of the matrix A i.e.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2r} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

In this case the initial system A will be equivalent to the system made of r first rows (the rest being omitted):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (8)$$

2. Let's solve (8). There may occur two possibilities: $r = n$ or $r < n$. We consider the first possibility $r = n$. In this case we have immediately the unique solution of the problem discussed:

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot b. \tag{9}$$

Where A^{-1} – inverse matrix.

Conclusion 1. In case $r = n$ the system (8) has a unique solution.

3. In case $r < n$ we may treat the variables $x_{r+1},...,x_n$, as free ones, i.e. they all are taking arbitrary numerical values $\alpha_{r+1},...,\alpha_n$. The rest of variables are called basic. They satisfies the following system of linear equations:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\alpha_{r+1} - ... - a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}\alpha_{r+1} - ... - a_{2n}\alpha_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r - a_{rr+1}\alpha_{r+1} - ... - a_{rn}\alpha_n \end{cases} \tag{10}$$

The system may be treated as $r \times r$ system with its determinant equation to the basis minor $M \neq 0$. According to Kramer's theorem the above system has a unique solution

$$x_i = \frac{M_i(c)}{M},\ i = 1,2,...,r,$$

where c is a column vector made of free forms:

$$c = b_r + \alpha_{r+1}a_{r+1} + ... + \alpha_n a_n,$$

$$\vec{b}_r = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_r \end{pmatrix},\ \vec{a}_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{1r+1} \\ a_{2r+1} \\ . \\ . \\ a_{rr+1} \end{pmatrix},\ \vec{a}_{r+2} = \begin{pmatrix} a_{1r+2} \\ a_{2r+1} \\ . \\ . \\ a_{rr+2} \end{pmatrix},\ ...\ \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Due to the linear property 3 of the determinants

$$x_i = \frac{M_i(b_r)}{M} - \alpha_{r+1}\frac{M_i(a_{r+1})}{M} - ... - \alpha_n\frac{M_i(a_n)}{M}. \tag{11}$$

Example 2. Solve the system

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

Solution

We start from the studding of a solvability of the system given:

$$r=\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\2&-3&-1&-5\\3&-7&1&-5\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\2&-3&-1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\2&-3&-1&-5\end{bmatrix}=2,$$

because the last matrix, having been derived from the initial one by subtracting from the 3-d row of the sum of two first rows, contains the non-zero 2×2 minor

$$\begin{vmatrix}2&0\\-1&-5\end{vmatrix}=-10\neq 0.$$

The augmented matrix we analyses analogously:

$$r\begin{bmatrix}1&-4&2&0&-1\\2&-3&-1&-5&-7\\3&-7&1&-5&-8\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&-4&2&0&-1\\2&-3&-1&-5&-7\end{bmatrix}=2.$$

Thus the system given is solvable. A number of its basic variables is equal 2. In a role of the basic minor we may choose

$$M=\begin{vmatrix}1&-4\\2&-3\end{vmatrix},$$

made of entries which are the crossings of two first rows with two first columns of the given matrix. Then the basic variables are x_1 and x_2, and, correspondingly, x_3, x_4 are the free ones.

Thus, omitting the third equation from the system, we derive the 2×2 system which we have to solve:

$$\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3=-1,\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7.\end{cases}$$

Transfer to the right free variables: x_3, x_4, we have

$$\begin{cases}x_1-4x_2=-1-2x_3,\\2x_1-3x_2=-7+x_3+5x_4.\end{cases}$$

Thus:

$$b_2=\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ M_1(a_3) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -10,\ M_1(b_2) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

$$M_1(a_4) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -20,\ M_2(a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$M_2(a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5,\ M_2(b_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -5.$$

Substituting the above expressions into (11) in case of $r = 2$, $i = 1,2$ one easily derives:

$$x_1 = \frac{M_1(b_2)}{M} - \alpha_3 \frac{M_1(a_3)}{M} - \alpha_4 \frac{M_1(a_4)}{M} =$$

$$= -\frac{25}{5} - \alpha_3\left(-\frac{10}{5}\right) - \alpha_4\left(-\frac{20}{5}\right) = -5 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4;$$

$$x_2 = \frac{M_2(b_2)}{M} - \alpha_3 \frac{M_2(a_3)}{M} - \alpha_4 \frac{M_2(a_4)}{M} =$$

$$= -\frac{5}{5} - \alpha_3\left(-\frac{5}{5}\right) - \alpha_4\left(-\frac{5}{5}\right) = -1 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Answer: $x_1 = -5 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4;\ x_2 = -1 + \alpha_3 + \alpha_4$ where α_3 and α_4 are arbitrary real numbers.

The above system, may be solved, by the Gaussian elimination the solution of simultaneous equations by the elementary operation.

Definition 2. A set of the linear algebraic equations is called simultaneous when the number of unknowns equals the number of independent equations.

Definition 3. Operations of multiplying a row or column of a matrix by a scalar adding a scalar adding a scalar multiple of another row or column to a given one; and transfer sing two rows or columns are known as elementary row operations and elementary column operations respectively.

The Gaussian elimination or pivoting reduces a simultaneous set of equation to the triangular form i.e. having the triangular matrix.

Let's apply this method to the solution of the previous system.

As it was proved above the system is characterized by 2×2 superfluous basic minor.

Thus we have here one equation.

This is the 3-d equation of the system given. It is easy to see that first equation is the sum of the two first equal of the system. So, eliminating it from the system , we obtain the simultaneous system

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Subtracting from the 2-nd equation the 1-st multiplied by 2 we easily transform the above set to the triangular form

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

Subtracting the value $x_2 = -1 + x_3 + x_4$ into the 1-st equation of the system we'll get the solution of the system in the following form:

$x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4$; $x_2 = -1 + x_3 + x_4$, where x_3 and x_4 are arbitrary real numbers.

Example 3. Solve the following system

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Solution

$$r[A] = r\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 10 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 10 \end{bmatrix} = 2.$$

$$r[A/b] = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 13 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

From this we conclude the system is not solvable, conditions of the Kronecker-Capelli theorem are not satisfies

$r(A) \neq r(A/b)$.

Example 4. Solve the following system

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$$

Solution

In this case

$$r = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & -20 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{bmatrix}$$

that yields $r(A) = r(A/b) = 3$. The number of unknowns is 3.

From this we conclude :

1) The system is solvable ;

2) The solution is unique, because the 4-th equation is a consequence of the three first equations of the system given and the one may be derived from the simultaneous set of equations of the triangular from:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ -2x_2 + 7x_3 = 16, \\ 29x_3 = 58. \end{cases}$$

From the above system we easily derive the solution of the system given:

$x_1 = 9;\ x_2 = -1; x_3 = 2$.

Answer: $x_1 = 9;\ x_2 = -1; x_3 = 2$.

PART II. ANALYTIC GEOMETRY

1. Analytic geometry subject and method. The simplest problems

A branch of mathematics in which geometrical points and figures are described using algebraic notation in terms of their position in a coordinate system is called the analytic or coordinate geometry.

We'll use Cartisian coordinates (or rectangular coordinates) which is the system for representation of a point in space in terms of its distance, measured along a set of mutually perpendicular axes, from a given origin:

on the *Cartisian plane* the point A(a, b) in located by measuring a units along the x-axis and b units along the y-axis, and then finding the point of intersection of the perpendiculars to the axes at those points, as shown in Fig. 1;

a is then the *abscissa* and b the *ordinate*.

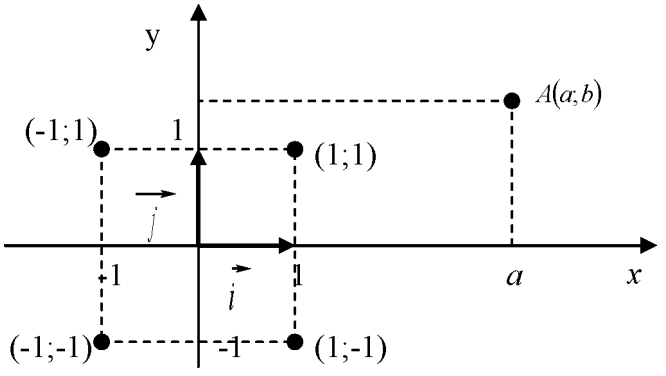


Fig 1. Cartisian coordinates

By convention, the positive directions of the axes point to the right and upwards, so that the four points $(\pm 1,\pm 1)$ are placed as shown; by convention the *first quadrant* is that in which both quantities a and b are positive and the other quadrants are numbered anticlockwise from the first.

This system extends naturally to three or more dimensions; in three dimensions the convention is to use a right-handed set of axes, and many standard formulae presuppose this.

There is a natural one-to-one correspondence between points of the Cartisian plane and a set of vectors located at the origin, i.e. every point A(a, b) may be regarded as a tail of the vector $\overrightarrow{OA}$ having its head at the origin: $\overrightarrow{OA}=(a,b)$. Moreover we may assignee to each point $A(x_1, y_1)$of the plane the vector $\overrightarrow{AB}$, «based at A»

i.e. having its head at $A(x_1, y_1)$ and its tail at $B(x_2, y_2)$denoted $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ implying

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1), \qquad (1)$$

(Further we'll use, instead of (1), the following notation: $\vec{a}=(a_x, a_y)$),

where x_2-x_1 and y_2-y_1 – coordinates of the vector $\overrightarrow{AB}$ which are associated to the given orthogonal bases $\{\vec{i}, \vec{j}\}$,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{i}(x_2-x_1)+\vec{j}(y_2-y_1), \qquad (2)$$

(see Fig. 2).

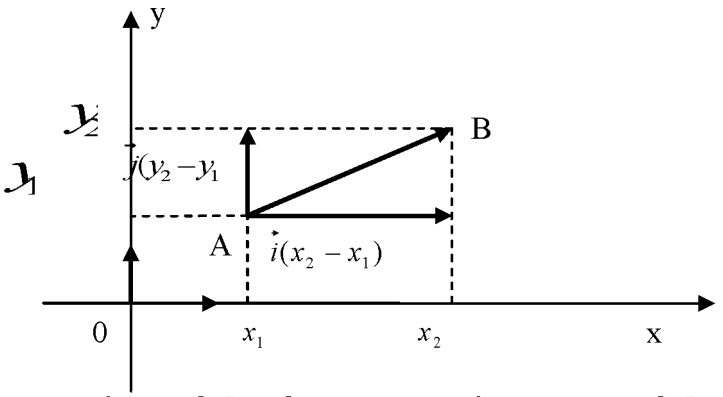


Fig. 2. Expansion of the free vector in terms of the basis vectors

The vector determined only up to translation (unattached to the origin) is called free contrary to that the vectors attached to the origin are called the position vectors.

A pair $\{\vec{i}, \vec{j}\}$of the unit and mutually orthogonal vectors forms a bases in the set of all free vectors laying in the plane, i.e. any vector

from this set may be expanded in terms of the basis vectors in the form given by (2). This is an essential demand for a pair of vectors to be the basic vectors in the given set. Such expansion exists for any pair of noncoplanar vectors which form a basis too. But in analytic geometry we'll use in a role of basis vectors in a plane the pair $(\vec{i}, \vec{j})$ of the unit mutually orthogonal vectors and in space, respectively, the right-handed triple of the unit mutually orthogonal vectors $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, see Fig. 3.

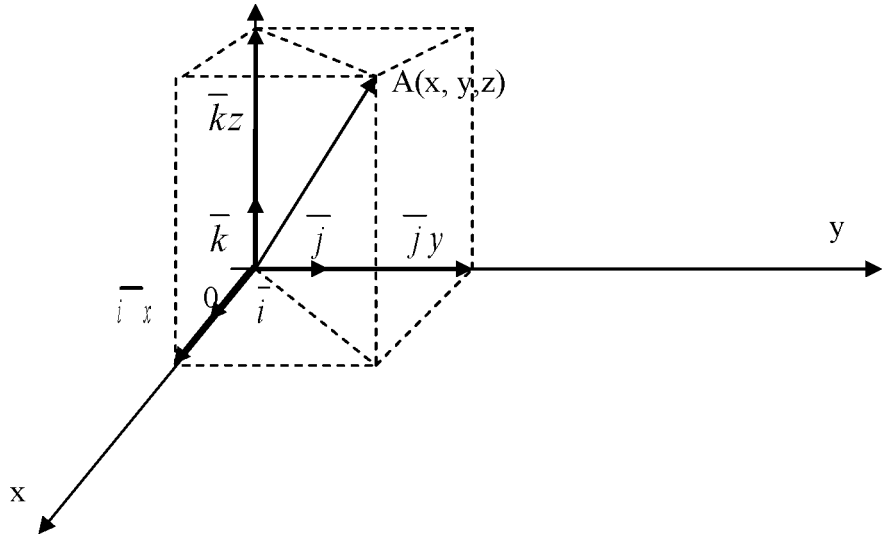


Fig. 3. Expansion of the position vector $\overline{OA}$ in terms of the basis vectors $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$: $\overline{OA} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$

Rule 1. Coordinates of the free vector are the differences of the corresponding coordinates of its ends.

Image (1) of a vector by its coordinates is unique for the given coordinate system and facilitates vector calculations. Let's consider, for example, the calculation of the scalar product of two vectors.

2. The scalar product of two vectors

Definition 1. The scalar product of two vectors is the product of the magnitudes of the given vectors and the cosine of the angle between their directions, i.e. We, denote, as $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right).$$

But there is more convenient way to compute $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

Statement 1. Let $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ and $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ are two vectors reluted to a certain rectangular coordinate system in space, then

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

We'll prove the statement for two-dimensional case, using Fig. 1:

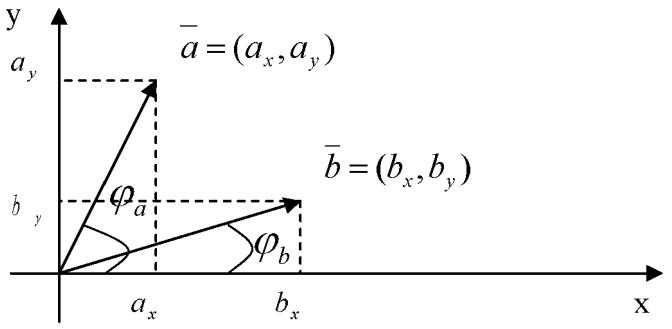


Fig. 1. A scalar product of two vectors in the Cartisian plane

As it can be seen from the Fig. 1:

$$a_xb_x+a_yb_y=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi_a\cos\varphi_b=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(\cos\varphi_a\cos\varphi_b+\sin\varphi_a\cos\varphi_b)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi_a-\varphi_b)=$$

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Another example is the computing of the distance $d(A,B)$ between two points $A(x_1,y_1,z_1)$ and $B(x_2,y_2,z_2)$ in space.

Referring the distance $d(A,B)$ as the magnitude $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ of the vector $\overrightarrow{AB}$ we may derive:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=$$ (using the statement 1)=

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Remark. A direct proof of the statement 1 may be performed by means of the immediate calculations:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z)(\vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

due to the following expressions:

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ and zeroes in other cases.

Definition 2. The triple of angles, usually designated, α,β,γ, that the line in space or a vector makes with the positive directions of the *x*-, *y*- and *z*- coordinate axes respectively are called the direction angles that determines uniquely the orientation of the line or vector.

For example, in Fig. 2, the direction angles of *P* are the angles *xOP*, *yOP* and *zOP* respectively.

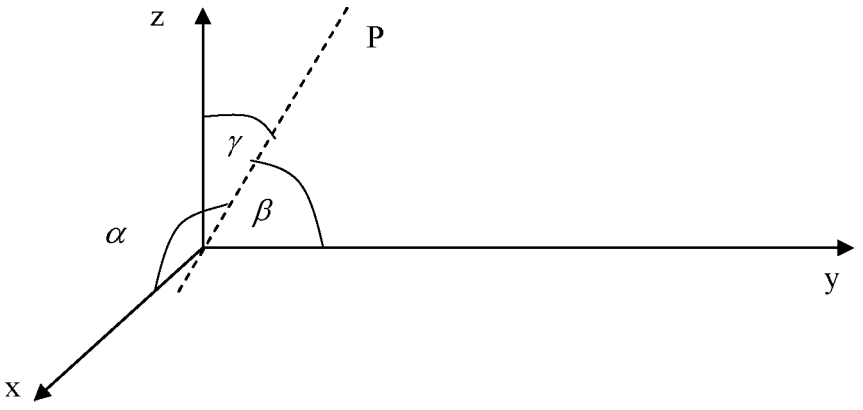


Fig. 2. α,β,γ **are the direction angles of P.**

Definition 3. The triple of cosines of the direction angles of a line or vector are called direction cosines.

The direction cosines of the free vector $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, are determined as follows:

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{x_2-x_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}; \\ \cos\beta=\dfrac{y_2-y_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}; \\ \cos\gamma=\dfrac{z_2-z_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}. \end{cases} \qquad (3)$$

Rising to the 2-nd power the direction cosines and adding them to each other we easily derive from (3) the following relation:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

So the sum of the squares of the direction cosines is 1.

Every vector is determined uniquely by its coordinates, i.e. two vectors $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ and $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ are equal if their coordinates equal to each other, $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

The vectors laying on the pair of parallel lines are called collinear vectors. Necessary and sufficient conditions for two vectors to be collinear are:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},$$

i.e. their coordinates is proportional.

The division of the line segment in a given ratio

Let's consider a line segment AB, made by points $A(x_1, y_1, z_1)$ and $B(x_2, y_2, z_2)$, and find the point $c(x, y, z)$ dividing the segment in the ratio $k = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$, see Fig. 3:

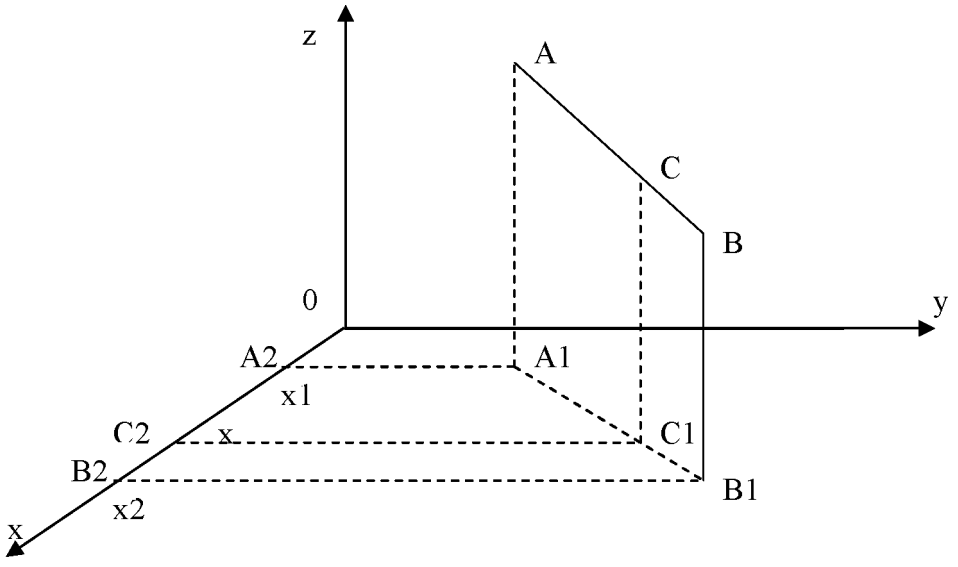


Fig. 3. The line segment division in a given ratio.

To solve the problem we project AB at first on the plane xOy and then its projection A_1B_1 on $OX-axis$. According to the Fales theorem

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{A_2C_2}{C_2B_2} = k.$$

From the last equality we derive

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=k \Leftrightarrow x-x_1=k(x_2-x) \Rightarrow x=\frac{x_1+kx_2}{1+k}.$$

Studing, analogously, projection of A_1B_1 on $Oy-axis$ we derive

$$y=\frac{y_1+ky_2}{1+k},$$

and $z=\dfrac{z_1+kz_2}{1+k}$

(after projecting of AB on the plane xOz).

Thus the final result is:

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k},\ y=\frac{y_1+ky_2}{1+k},\ z=\frac{z_1+kz_2}{1+k}.$$

In particular, the point dividing AB by two $(k=1)$ has the coordinates:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{z}.$$

3. The vector product

Definition 1. Vector product is that of two vectors in three dimensions that is itself a vector, of which the magnitude is the product of the magnitudes of the given vectors and the sine of the angle between their directions, and of which the direction is perpendicular to the plane of the given vectors, forming a right-handed system. It is denoted $\bar{a}\times\bar{b}$, and is equal to the determinant

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \tag{1}$$

$$\vec{i}(a_yb_z-b_ya_z)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x).$$

Thus $|\bar{a}\times\bar{b}|$ is the area of a parallelogram with sides $\vec{a}$ and $\vec{b}$, see Fig. 1.

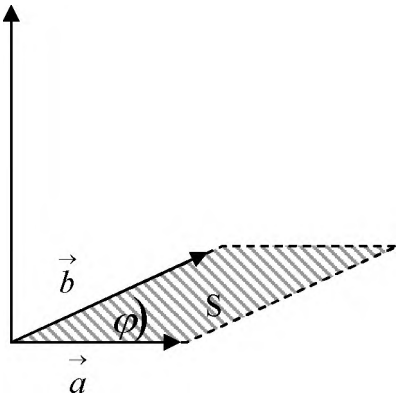


Fig. 1

of the triple of vectors $\{\bar{a}, \bar{e}, \bar{c}\}$: $\vec{c}$ is perpendicular to the plane constituted by $\vec{a}$ and $\vec{b}$; $\vec{a}$ may be matched with $\vec{b}$ if turning on the least of two possible angles between $\vec{a}$ and $\vec{b}$; four fingers of the right hand are bended in the direction in which $\vec{a}$ turns to be matched with $\vec{b}$; while thumb shows the direction of $\vec{c}$.

Example 1. Compute the areas of the parallelogram with sides

$$\vec{a} = (1,1,2) \text{ and } \vec{b} = (2,-1,3),$$

where coordinates of the vectors are given in the canonical basis $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$

Solution

Accordingly to the definition of vector product (20) we have

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}.$$

4. The triple product

Definition 2. The product of three vectors in three-space defined in terms of the scalar product and the vector product as the scalar quantity

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\,.$$

of which the absolute value equals the volume of a parallelepiped with the three vectors as generators. It is denoted $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

This may be computed as the determinant of the matrix of which the rows are the coordinates of the vectors in the given order. Really, using (1) we easily derive:

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}. \qquad (1)$$

Corollary. The triple product of the coplanar vectors is zero.

5. Equation of a line on the plane

A straight one-dimensional geometrical figure of infinite length and no thickness is called line. Any pair of points uniquely determine a line of which the segment between the given points is the shortest path between them. In two dimensions, the line joining (x_1, y_1) and (x_2, y_2) has the equation

$$y = kx + c, \qquad (1)$$

where k is the slope,

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad (2)$$

and c is the intercept with the $y-axis$ of a cartesian coordinate system, as shown by the bold line in fig. 1.

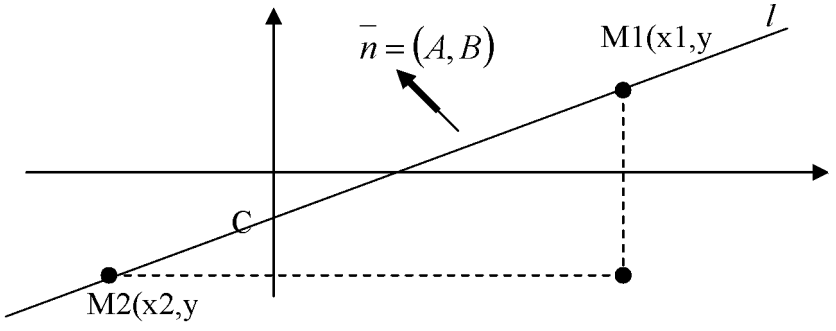


Fig. 1. Line

If vectors $\vec{M_1M}$ and $\vec{M_1M_2}$ is collinear, then any other point $M(x, y)$ to be owned directly of the line (denoted *l*).

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3}$$

So that, is obtained equation of the line passing through two points.

The slope-intercept equation of the line is in the form $y=kx+c$, where c is the $y-$intercept; and the point-slope equation is of the form:

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{4}$$

here (x_0, y_0) is a fixed point of the line.

In particular, when the line passes through the point *A(a, 0)* and *B(0,b),* as shown in Fig. 2:

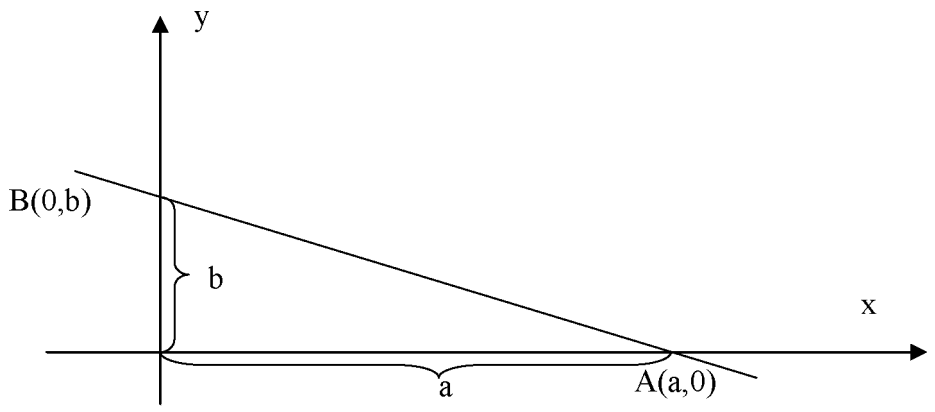


Fig. 2. The line passing through the point located on the co-ordinate axes

The above equation (4) yields:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{5}$$

The above equation may be regarded as the one in terms of its *x*- and *y*-intercepts. In case slopes k_1 and k_2 of two lines are known, one may compute one of the angles φ between them using the following formula $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

From this expression we easily conclude:

$k_1 = k_2$ =>the lines are parallel with each other,

$k_2 k_1 = -1$ or $k_2 = -\frac{1}{k_1}$=> the lines are perpendicular to each other.

A general equation of the line may be derived as follows. Denoting $\overline{OM} = (x, y)$ the position vector of the current point *(x,y)* of the line and $\bar{n} = (A, B)$ the vector which is normal to it we immediately derive:

$$\bar{n} \cdot \left(\overline{OM} - \overline{OM_1}\right) = 0 \text{ or}$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (6)$$

The above equation is the one of the line passing through the point x_1, y_1 being perpendicular to the given vector $\bar{n} = (A, B)$.

This vector is called the normal vector of the line. There are a set of normal vectors of the given line. All those vectors are collinear.

The equation (6) is linear with respect to variables x and y and may be written in the following form

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7)$$

which is referred as the general equation of a line.

Conversely:

every expression (7) with *(x,y)* being a point in the Cartisian plane depending on the specific values of the coefficients *A, B, C* in (7):

1. In case of $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ the equation (7) is reduced to the equation of the line in terms of its x- and y-intercepts,

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1, \text{ i. e.}$$

the line intersects the corresponding coordinate axes in point

$$\left(-\frac{C}{A}, 0\right) \text{ and } \left(0, -\frac{C}{B}\right).$$

2. In case of $A = 0$ the line $B_y + C = 0$ is parallel to O_x and passes trough $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$, since the normal vector $\bar{n} = (0, B)$ is collinear to O_x.

3. Analogously in case of $B=0$ the line $A_x+C=0$ is parallel to O_y and passes through $\left(-\frac{C}{A},0\right)$.

4. In case of $C=0$ the line $A_x+B_y=0$ passes through the origin.

5. In case of $A=C=0$ the equation $B_y=0$ <=> $y=0$ is the one that determine the x-axis.

6. In case of $B=C=0$ we have the equation $x=0$ determining the *y-axis*.

In general case of two lines given $A_1x+B_1y+C_1=0$ and $A_2x+B_2y+C_2=0$ one of the angles φ between the corresponding normal vectors $\overline{n}_1=(A_1,B_1)$ and $\overline{n}_2=(A_2,B_2)$:

$$cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}.$$

As it follows from the above relation the lines are parallel with each other in case $\overline{n_1}$ and $\overline{n_2}$ being collinear, i.e.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};$$

the lines are perpendicular to each other in case $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0$, i.e.

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Canonical line equation

Let a line passes through $M_0(x_0,y_0)$ being parallel with the non-zero vector $\overline{S}$, (see Fig. 3) which is usually called the direction vector of the line.

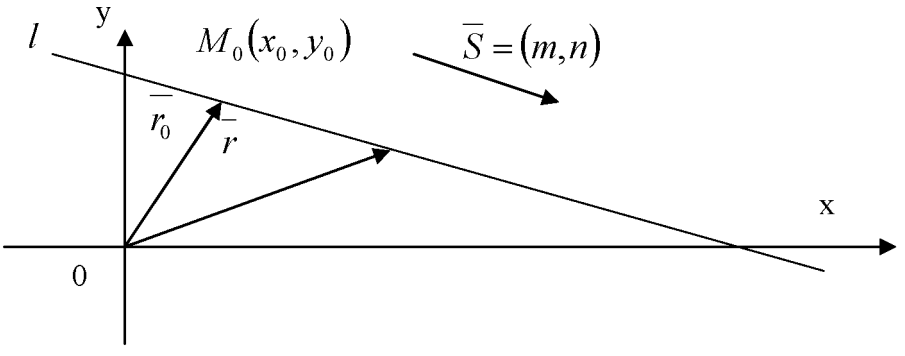


Fig. 3. The line passing through the given point and its direction vector

The line position in the plane is defined completely by the definition of M_0 and $\bar{S}$ since there s a unique line which passes through the given point being at the same time parallel with a given vector. Its equation ma be derived from the observation the vectors and $\bar{S}$ being collinear, that immediately reveals in the following conclusion:

$$\bar{r} - \bar{r_0} = t\bar{s}, \text{ where } t \text{ is the parameter.}$$

The last equation is usually written in the following form

$$\bar{r}(t) = \bar{r_0} + t\bar{s}, \tag{8}$$

and is called the parametric form of the line equation.

Rewriting (8) in coordinate form we have the following system (which is called as above):

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt \end{cases},$$

that is equivalent to the equation

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{9}$$

The above equation is called the canonical line equation.

The angle φ between two lines, having the direction vectors $\overline{S_1} = (m_1; n_1)$ and $\overline{S_2} = (m_2; n_2)$ can be computed from the obvious relation

$$cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2}}\sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}}.$$

The lines are parallel with each other in case of $\overline{S_1}$ and $\overline{S_2}$ being collinear i.e.

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ and perpendicular if $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$,

i.e. $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Normal equation a line

Let's consider a line located in the plane xOy, shown in Fig. 4:

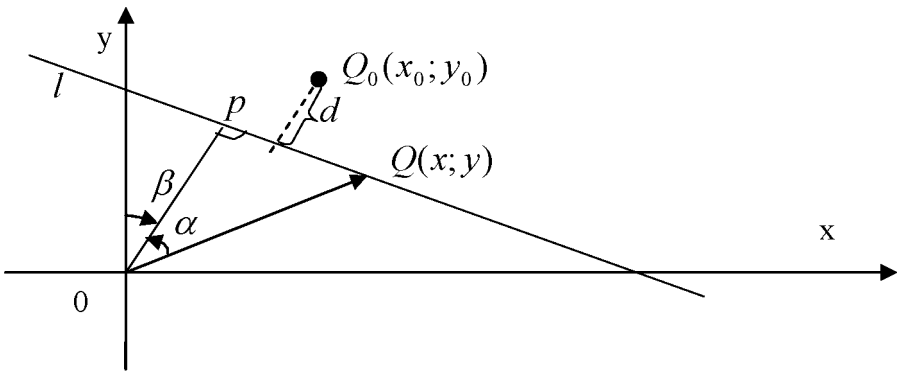


Fig. 4. Normal equation of a line

Let's draw now a perpendicular to the given line passing through the origin, denoting its crossing with the line P. Let the perpendicular distance

$$d(0,P)=P.$$

and the unit vector $\bar{n}$ directed along the perpendicular has direction angles α and β i.e.

$$\bar{n}=(\cos\alpha,\cos\beta).$$

Let $Q(x,y)$ be a variable point of the line, then the projection of the vector $\overline{OQ}$ upon the perpendicular is equal to the perpendicular distance p:

$$\overline{OQ}\cdot\bar{n}=p. \qquad (10)$$

Taking into consideration that

$$\bar{n}=\left(\cos\alpha,\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

and

$$\overline{OQ}=(x,y),$$

we easily derive from (10) the so-called normal equation of a line.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (11)$$

Such form of the line equation facilitates the determining of the distance from the arbitrary point of a plane, for example M_0, to the line, see Fig 4. Really, analyzing the position of Q_0 shown on the Fig. 4, we may conclude that the needed distance equals to the difference of the projection of $\overline{OQ_0}$ upon the perpendicular and $d(0,P)=P$:

$$d(Q_0,l)=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p. \qquad (12)$$

In case of Q_0 being located from the opposite side of the line one obviously should change the sign before the right-hand expression in (12) i.e.

$$d(Q_0,l) = p - x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha . \qquad (13)$$

So, it is reasonable to introduce an auxiliary notion of the deviation δ of the arbitrary point $Q_0(x_0, y_0)$ from the given line defined through the normal equation (14):

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p . \qquad (14)$$

So, to compute the deviation of some point Q_0 from the given line, one must substitute into the normal equation instead of the variable coordinates the respective coordinates of the point given.

To compute the distance of a point from the given line, one must compute the modulus of deviation

$$d = |\delta| . \qquad (15)$$

In case of a line, defined through the general equation

$$A_x + B_y + C = 0, \qquad (16)$$

Its normal equation may be derived through the multiplication of (16) by the norming factors

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (17)$$

Whose sign is chosen to be opposite to the sign of free term C in (16). Then, the distance *d* may be computed as follows:

$$d = d(Q_0,l) = \frac{|1Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad (18)$$

6. Equations of a plane and a line in space

A plane is a flat surface. This is a geometrical figure that has the property that the line joining any two of its points lies completely on its surface. A plane may be uniquely defined, for example, by:

1) a point and a normal vector to the plane;
2) two lines having the common crossing;
3) three points which are not on the same line.

All three ways of the determining of a plane are equivalent. We use the first to finch the equation of a plane in Cartesian three-dimensional space.

So, let's consider a plane passing through the point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ of which normal vector is $\vec{n} = (A, B, C)$, see Fig. 1

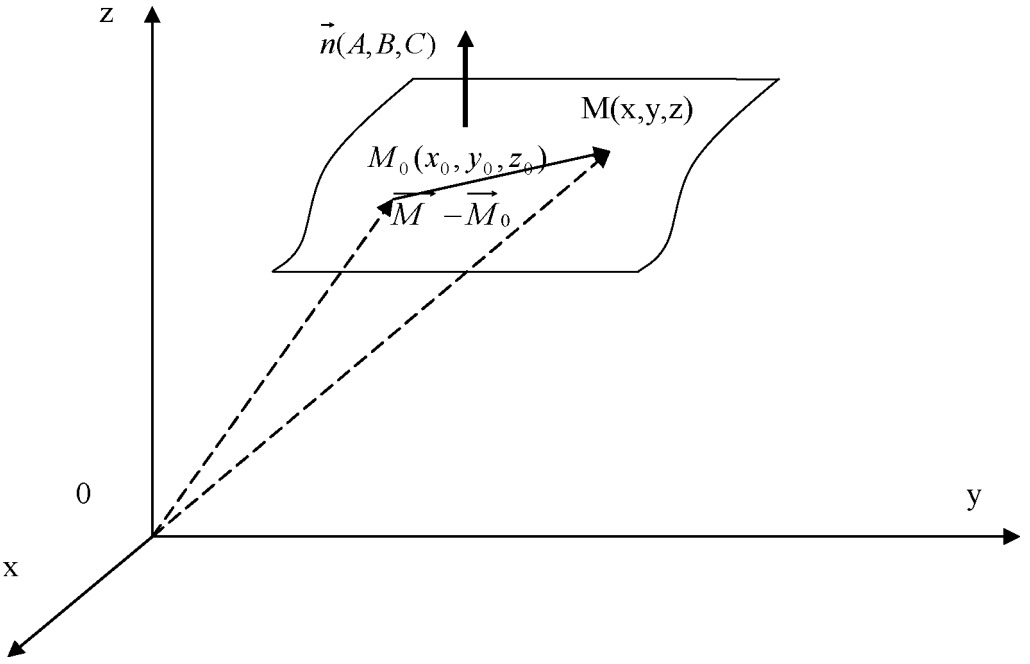


Fig. 1. A pies of the plane passing through the point $M(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{n} = (A, B, C)$ is the normal to it

Let $M(x, y, z)$ is the variable point on the plane. The normal $\vec{n}$ is orthogonal to the plane, i.e. to every vector laying in it, in particular to the vector

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Thus we have

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \text{ or}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

The above equation defines the plane passing through the point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ and having the normal vector $\vec{n} = (A, B, C)$.

When opening in (1) the brackets and denoting the quantity $-Ax_0 - By_0 - Cy_0$ as D one obtains (1) in the following form

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

This equation may be referred as a *general equation of a plane*.

Let's derive an equation of the plane passing trough the three given points: $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ and $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Denoting the variable point $M(x, y, z)$ we obtain three coplanar vectors:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

of which triple product is zero. Using (2) we derive the required equation:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Let in equation (3) none of its coefficients is zero then dividing it by $-D$, we transform this equation to the following form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4)$$

Where

$$a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C},$$

are the coordinates of intersections of the plane with the corresponding coordinate axes. So, (4) may be regarded as the plane equation in terms of its $x-$, $y-$, and $z-$ intercepts.

Normal equation of a plane

We may derive also an equation of a plane through the projection of the position vector of a variable point $M(x, y, z)$ on the normal vector $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\varphi)$ passing through the origin, see Fig. 2:

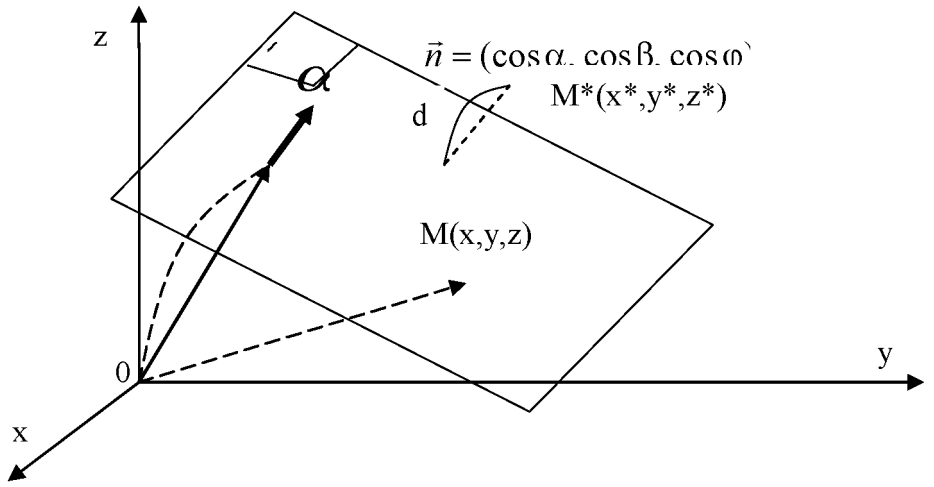


Fig. 2. Normal equation of a plane

Denoting the perpendicular distance from the origin to the plane p, we easily come to the following equation:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\varphi - p = 0. \qquad (5)$$

This one is called the normal equation of the plane. Let $M^*(x^*, y^*, z^*)$ is an arbitrary point and d its perpendicular distance from the plane. Projecting its position vector $\overrightarrow{OM^*}$ on $\vec{n}$, we obtain the following formulae for computing d:

$$d(M^*, 2) = \begin{cases} x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\varphi - p, \text{in case} \\ \text{of plane a being between } M^* \text{ and } O; \\ -x^*\cos\alpha - y^*\cos\beta - z^*\cos\varphi + p, \text{in case} \\ \text{of } M^* \text{ and } O \text{ being at the same sidefrom the plane.} \end{cases}$$

We may introduce an auxiliary notion: $\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\varphi - p,$ witch is called the deviation of M^* from the plane given. And compute the distance as follows: $d = |\delta|$.

The general equation of a plane (2) may be transformed to the normal equation through the multiplication of it by the factor

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (6)$$

where the sign is opposite to the sign of the free term D in (2)

Example2. Compute the perpendicular distance d from the point $M^*(-2, -4, 3)$ to the plane defined by its general equation

$$2x - y + 2z + 3 = 0. \qquad (7)$$

Solution

Transform first equation (7) to the normal form. Using (6) one finds: $\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{3}$, then the normal forms of (7) us as follows

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0, \tag{8}$$

(one may control oneself when making the calculations through the testing the obligatory identity: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi = 1$. In our example we have $(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 = 1$).

Substituting coordinate of M^* into, normal equation (8), we'll obtained the deviation δ of M^* from the plane given: $\delta = -\frac{2}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{3}(-4) - \frac{2}{3}\cdot 3 - 1 = -3$

Thus the required distance is $d = |\delta| = |-3| = 3$.

As it may be seen from the above discussion, the distance computing may be formalized by the following expression.

$$d(M^*, \alpha) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{9}$$

The angle between planes

The angle between two planes is taken to be the angle between two lines, one lying in each plane, drawn perpendicular to the intersection of the planes at the same point.

Let equations of the planes given are: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Then the angle between planes may be computed as this between the respective normal vectors $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ and $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ of these planes:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{10}$$

In case of planes α and β being perpendicular $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ that immediately leads to the following requirement for two planes being perpendicular:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (11)$$

Two planes are parallel is case of normal vectors $\vec{n}_1$ and $\vec{n}_2$ being collinear, i.e. the equalities:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (12)$$

must be satisfied.

7. A line in space

There are several ways to define a line in space analytically. For example, the line mat be define:

a) as common line of the intersection of two planes;

b) through the given point and vector, which is parallel with the line;

c) by two points given.

The line, treated as the intersection of two planes, is the locus of points of which coordinates satisfied the solvable:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

i.e. coefficients A_1, B_1, C_1 of the 1-st equation are not proportional to A_2, B_2, C_2 of the 2-nd equation. Otherwise the system (1) determines either two parallel planes or one the same plane.

Let l be a line defines through the system (1) and α, β a real numbers which are not identically zero, then the equation

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2)$$

defines the plane passing through the line l.

The system (1) may be referred as the *general equation* of a line in space.

Definition 1. A non-zero vector laying on the given line or being parallel with it is called the *direction vector of the line*.

Let's derive an equation of the line defined through the given point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ and direction vector $\vec{n} = (l, m, n)$ see Fig. 1:

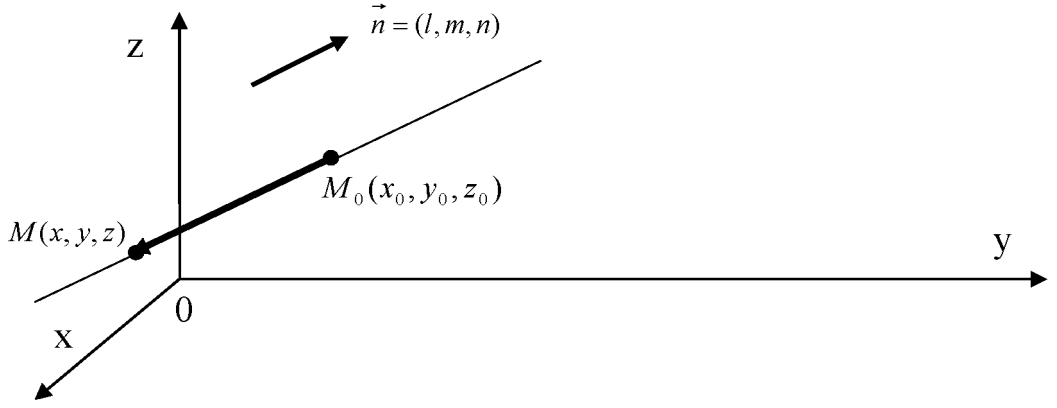


Fig. 1. A line in space passing through the point M_0 and having the direction vector $\vec{n}$

Let $M(x, y, z)$ be the variable point of the line, then the vector $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ is collinear with the vector $\vec{n} = (l, m, n)$ that implies the following equation of the line

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3}$$

The above equation is called the canonical equation of the line.

Equation the equal fractions in (3) to some constant $t \in R$ we may derive the equation of a line in the parametric form:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{4}$$

In the above equation we consider $t \in (-\infty, +\infty)$ as a parameter and $x, y, z -$ as functions of it. If t changes the point M moves along the line. If one treats t as time and the system (4) as equations of motion of the point M, then the system describes rectilinear and uniform motion of M beginning at instant $t = 0$ from the point M_0. The velocity of the point M is defined by the following expression

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \tag{5}$$

An equation of the plane, passing through the two given points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ and $M_2(x_2, y_2, z_2)$, follows from (3), if one takes into

consideration that in this case $\overrightarrow{M_2M_1}$ plays the role of the direction vector for the line passing through the point, for example, M_1.

Thus we have the required equation:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{6}$$

Deriving of the canonical equation of the line using the general one

We start from the definition of a point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ laying on the line defined by (1). Let's assume the coordinate x_0 be known and write (1) in the following form:

$$\begin{cases} B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0, \\ B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0. \end{cases} \tag{7}$$

The above system is solvable with respect to y and z provided its determinant

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = B_1C_2-B_2C_1\neq 0, \tag{8}$$

otherwise we should try another variant of the known variable $(y_0 \; or \; z_0)$.

Thus, solving (7), we determine the point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. the direction vector $\vec{n}$ we'll define analyzing Fig.19.

If we assume, that the planes, depicted on Fig.19, are defined by the equations

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\text{and } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

then the direction vector $\vec{n}$ of the common line of their intersection (as it follows from the direction of an between two planes) is

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

where $\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ and $\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ are the corresponding normal vectors of the given planes.

Example 1. Constitute the canonical equation of the following line

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases} \tag{10}$$

Solution

We assume z_0 being known and rewrite (10) in the following form

$$\begin{cases} x_0-2y_0=4-3z_0, \\ 3x_0+2y_0=4+5z_0. \end{cases} \tag{11}$$

Adding these equations, we get

$$x_0=2+\frac{1}{2}z_0 \tag{12}$$

Substituting (12) into the 1-st equation (11) we get

$$y_0=\frac{7}{4}z_0-1.$$

Thus any point with coordinates:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}z_0+2, \\ y=\frac{7}{4}z_0-1, \\ z=z_0, \end{cases}$$

where z_0 is arbitrary lies on the line defined by (10). We put $z_0=0$, then $M_0=(2,-1,0)$.

Now let's determine the direction vector $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ where $\vec{n}_1=(1,-2,3)$ and $\vec{n}_2=(3,2,-5)$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Thus $\vec{n}=(4,14,8)$ and the canonical equation (3) of the given line is $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8}$ or

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}. \tag{13}$$

Answer:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

Example 2 Derive the condition of the line, defined by its canonical equation, being perpendicular to the plane, defined as follows

$$Ax+By+Cz\ +D=0.$$

Solution

The direction vector φ_b is parallel with the normal vector $\vec{N}=(A,B,C)$ of the given plane, thus the following conditions must be satisfied

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (14)$$

Answer. The line

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

is perpendicular to the plane

$$Ax+By+Cz\ +D=0,$$

if and only if

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

8. The main curves of the second order

A locus of points of which coordinates with respect to a certain Cartesian coordinate system satisfies the algebraic equation of the second order.

$$Ax^2+Bxy\ +Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (1)$$

Is called the *algebraic curve of the 2-nd order.*

The point with respect to which points of the curve are arranged symmetrically is called the *centre* of the curve. The algebraic curve of the second order having unique center is called the *central* one.

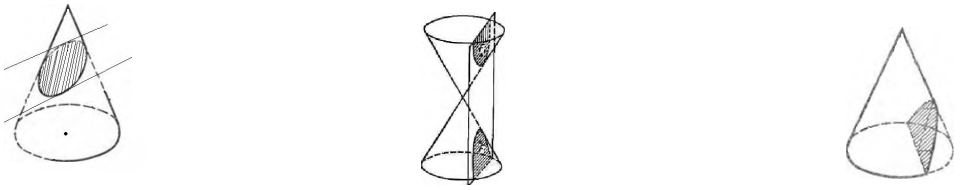
The point algebraic $S(x_0, y_0)$ is center of the 2-nd order curve (1) if and only if its coordinates satisfies the following

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Thus the condition $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Is necessary and sufficient for the point $S(x_0, y_0)$ being the centre of the curve.

The important class of 2-nd order curves studied below: ellipse, hyperbola and parabola, from the general point of view, are formed by the intersection of a plane and a right circular cone as shown in Fig. 1:



ellipse **hyperbola** **parabola**

Fig. 1. Conic sections

Such curves are called the conic sections.

Circle

The circle is a closed plane curve every point of which is equidistant from a given fixed point, the centre.

Its equation is

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{3}$$

where R is the radius and (a,b) is the centre. In case of $a = b = 0$ (3) is called the canonical equation of the circle:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3'}$$

Ellipse

Ellipse is a closed geometrical figure shaped like an elongated circle and symmetric about two axes of different lengths (the major and minor axes).

Definition 1. Ellipse is the locus of plane for which the sum of the distances from the two fixed points, named foci, is constant. The above sum of distances is denoted usually $2a$. The foci are denoted F_1 and F_2 and the distance between them – $2c$. In the Cartisian coordinates for which the foci are located on the $x-dxis$ symmetrically about the origin the canonical equation of an ellipse is

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

where

$$b=\sqrt{a^2-c^2}\,.$$

Points $(\pm a,0)$ and $(0,\pm b)$ of the intersections, of an ellipce with coordinate axes are called of the ellipse, see fig. 2:

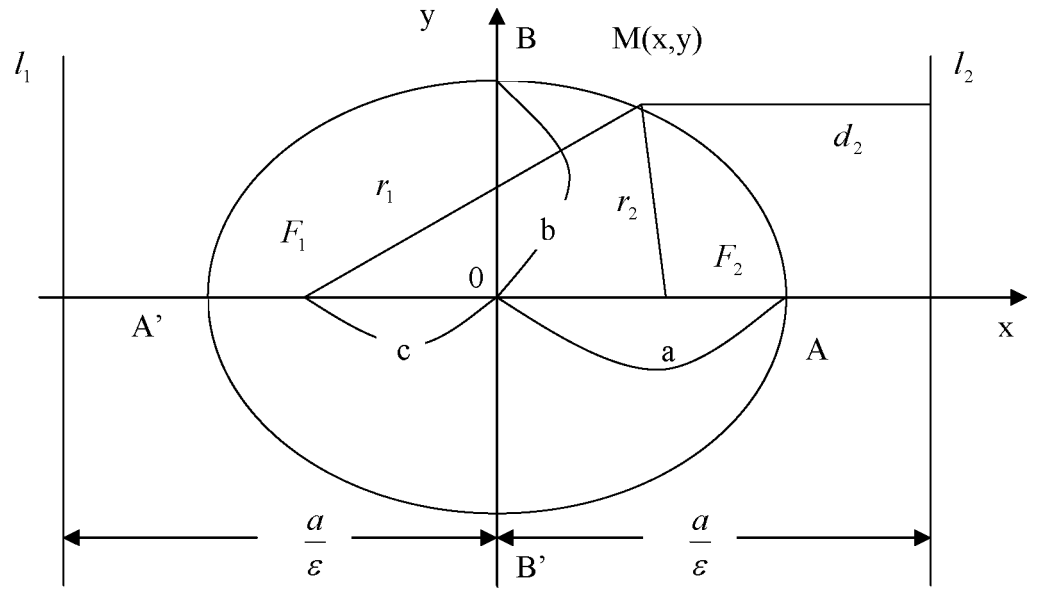


Fig. 2. Ellipse in the canonical basis

The ratio

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

is called the eccentricity of an ellipse, where a is its major axis. It is obvious that

$$\varepsilon<1\ (\varepsilon=0 \text{ for circle}).$$

The following notion plays the crucial role in the mathematical description of the whole class of the $2-nd$ order curves being the conic sections.

Definition 2. A fixed live, on the convex side of the conic section, in terms of which, together with the focus and the eccentricity, the locus of points that constitute the conic section is defined, is called the directrix of the conic section.

Directrixes of an ellipse are determined by the following eguations:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{6}$$

In this context one may define the ellipse as the locus of plane whose distance from the focus F is in the fixed proportion ε to their perpendicular distance from the directrix l,

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{7}$$

where $\varepsilon-$the eccentricity of the ellipse. The location of the variable point M of the ellipse may be determined in terms $FM_2 = r_2$ which are called the focal radii of M. The may be found as follows:

from (7) we have correspondingly:

$$r_1 = \varepsilon d_1 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = a + \varepsilon x,$$

$$r_2 = \varepsilon d_2 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = a - \varepsilon x. \tag{8}$$

Hyperbola

Hyperbola is a conic section, see fig. 3, with eccentricity greater then 1, formed by a plane that cuts both bases of a cone; it two intersecting fixed lines, and has two foci: When symmetrical abut the coordinate axes it has equation:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

where the transverse axis coincides with the $x-axis$, conjugate axis lies on the $y-axis$, ra is the distance between the two intersections

with the $x-axis$, and $2c$ is the distance between, the foci. By the definition, $a < c$. The hyperbola may be defined as follows:

Definition3. Hyperbola is the focus of plane for which the absolute value of the difference of their distances from two fixed points, named foci, is a constant quantity.

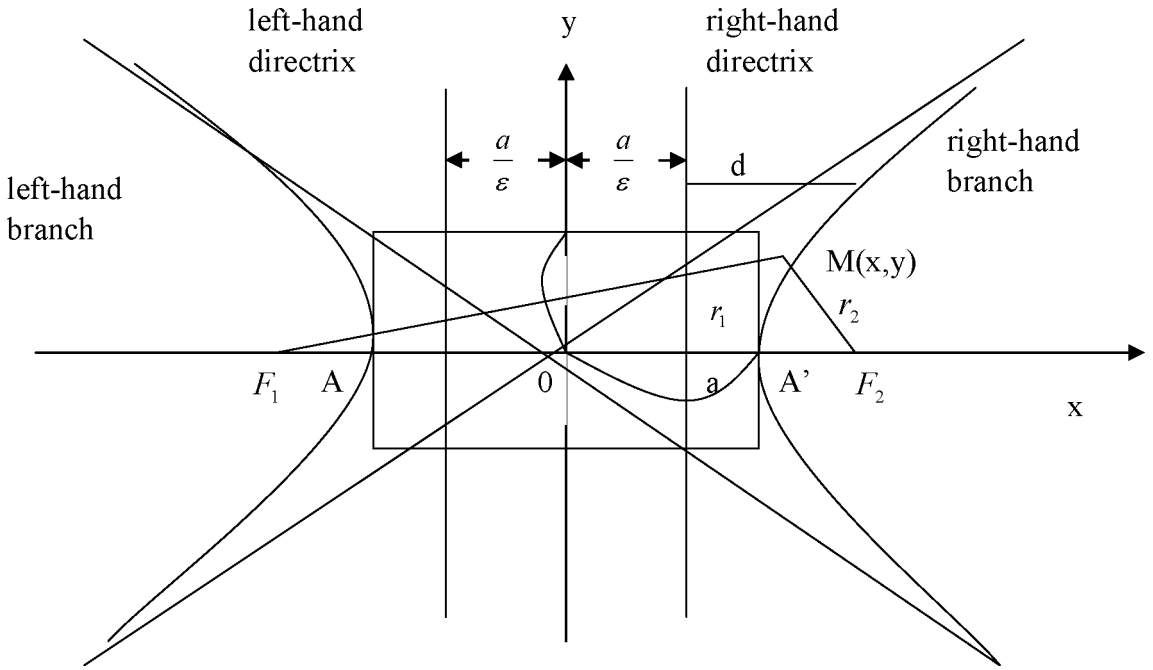


Fig. 3. Hyperbola

Let's derive in the given coordinates equation of the hyperbola using definition 3. From the fig. 3 we have

$$r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \text{ and } r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Accordingly to the definition of a hyperbola the following relation holds:

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a \text{ or}$$

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 2a.$$

Raising to the second both sides of the above equation we obtain:

$$(c+x)^2 + y^2 = (c+x)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Reducing the similar terms we have

$$2cx = -2cx + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + 4a^2 \text{ or}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Raising to the second once more we derive from the above equation:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(c^2 - 2cx + x^2\right) + a^2y^2$$
$$\Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Denoting

$$b^2 = c^2 - a^2$$

and dividing both sides of the last equation bya^2b^2 we obtain the final result:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

This is called the canonical equation of the hyperbola.

Points $(\pm a,0)$ of the intersections of a hyperbola with the x-axis are called vertexes of the hyperbola. The rectangle with its sides $2a$ and $2b$which is symmetric about transverse and conjugate axes of the hyperbola is called the main rectangle of the hyperbola. Its diagonals

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \tag{11}$$

are the asymptotes of the hyperbola.

The ratio

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{12}$$

is called the eccentricity of the hyperbola, where a is the distance from the centre of the hyperbola (point (0,0)) to its vertex. It is obvious that the eccentricity of any hyperbola is greater than 1,

$$\varepsilon > 1.$$

The focal radii of the right-hand branch of the hyperbola are defined by the following formulae

$$r_1 = \varepsilon x + a, r_2 = \varepsilon x - a, \tag{13}$$

and of the left-hand branch, correspondingly, by

$$r_1 = -\varepsilon x - a, r_2 = -\varepsilon x + a. \tag{14}$$

We may also unify the definition of a hyperbola, is the sense of the previous section, using the notion of the directrix of the hyperbola. In case of the hyperbola equation given in the form (10), its directrixes are defined by the following equations:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \text{ see Fig. 3.} \qquad (15)$$

In this context we come to the definition of the hyperbola as the locus of points whose distance from the focus F is in the fixed proportion ε to their perpendicular distance from the corresponding directrix (see Fig. 13), i.e.

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \qquad (16)$$

Parabola

Parabola is a conic section formed by the intersection of a cone with a plane parallel with the generator. It is a conic with unit eccentricity, with canonical equation

$$y^2 = 4ax. \qquad (17)$$

Where $2a$ is the distance between focus and directrix, when the curve is symmetrical about the x-axis and has its vertex at the origin, see Fig. 4:

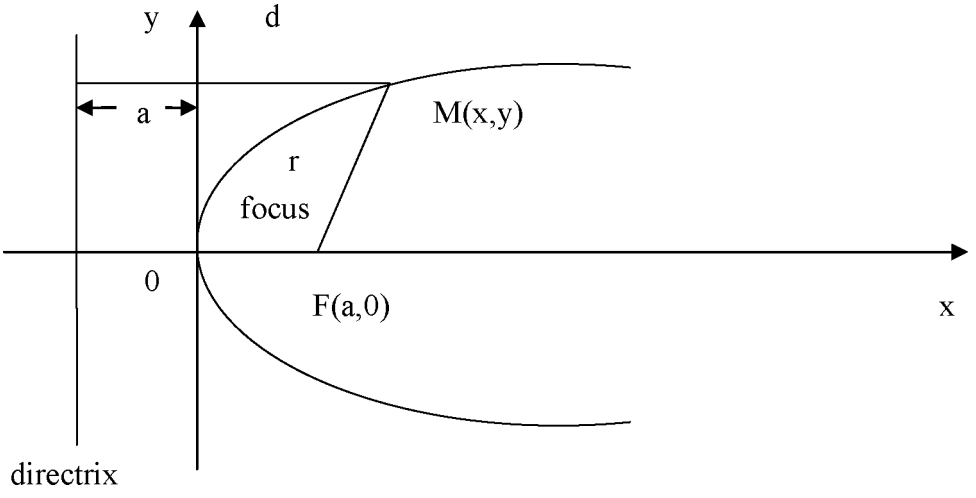


Fig. 4. Parabola

In these coordinates equation of the directrix is

$$x = -a, \qquad (18)$$

then the focal radius of variable point M is

$$r = x + a. \qquad (19)$$

This definition of the parabola directrix is conformable with the following definition of this curve:

Definition 4. Parabola is the locus of points for which the distance from the fixed point, named focus, equals the distance to the fixed line, named directrix.

Really, using the geometry shown in Fig. 4, let's compute d and r in equation

$$r = d: \tag{20}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,,\ d = x + a.$$

Then we easily derive from (20):

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2,$$

or, reducing the similar terms,

$$y^2 = 4ax, \text{ i. e. equation (17).}$$

Thus parabola eccentricity is

$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1.$$

Corollary

We have defined an important class of 2-nd order curves in terms of focus, directrix and eccentricity, which define uniquely the locus of points constituting the conic sections, see Fig. 5

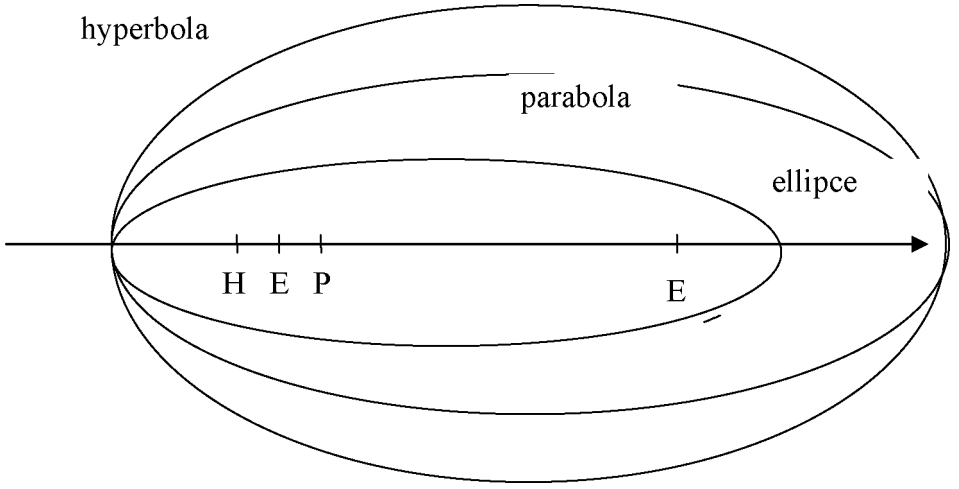


Fig. 5. Foci (E) of an ellipse, the focus (H) of one branch of an hyperbola and the focus (P) of a parabola that all share a vertex

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі / М. К. Бугір. – К.: Видавничий центр «Академія», 1998. – 277 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посібник / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К. Вища школа, 1993. – 648 с.

3. Мамонова Г. А. Англо-український, українсько-англійський словник-довідник математичних термінів / Мамонова Г. А., Шимпф О. М. – Ірпінь: НУДПСУ, 2010. – 106 с.

4. Мантуров О. В. Курс высшей математики / О. В. Мантуров. – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.

5. Конспект лекцій з вищої математики / Семко М. М., Кучменко С. М., Скасків Л. В., Харенко С. Б., Ярова О. А. – Київ, 2014. – 208 с.

6. Руденко І. Б. Курс лекцій з вищої математики (перша частина) / Руденко І. Б., Харенко С. Б., Чернобай О. Б. – Київ, 2008. – 155 с.

7. Шаншиева С. А. Английский язык для математиков (интенсивный курс для начинающих): (учебник) / С. А. Шаншиева. – [2-е изд., доп. и перераб.]. – МГУ, 1991. – 400 с.

8. Щипачев В. С. Высшая математика / Щипачев В. С. – М.: Высш. шк., 1991. – 479 с.

9. Gusev V. A., Litvinenko V., Mordkovich A. G.. Solving problems in geometry. – Moscow, 1988, 222 p.

10. Gusev V. A., Mordkovich A. G. Mathematics for those entering techical schools. – Moscow.

11. Heimer R. T., Henry E. Garland modern intermediate algebra Holt. – Canada, 1980, 648 p.

12. Krasnov M. I., Kiselyov A. I., Makarenko G. I. A book of problems in ordinary differential equations. – Moscow, 1981, 331 p

13. Lohwater's A. I. Russian-English dictionary of the mathematical sciences. Edited by R. P. Boas America N Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2001, 341 p.

Навчальне видання

СЕРІЯ «ПОДАТКОВА ТА МИТНА СПРАВА В УКРАЇНІ»

Серію «Митна справа в Україні» засновано в 2001 р. Її продовженням є серія «Податкова та митна справа в Україні», яку започатковано в 2015 р.

Бащук Олена Юріївна,
Клименко Василій Олександрович,
Клименко Володимир Олександрович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ. ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія

Навчальний посібник

Редактор *І. Є. Бойко*

Форматування та
комп'ютерна верстка *О. В. Лисенко*

Здано до друку 11.01.2016 р. Формат 60×84/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman».
Ум. друк. арк. 6.0. Друк. арк. 6.6.
Наклад 300 прим. Замовлення № 531.

Підготовлено до друку Видавничо-інформаційним центром
Національного університету ДПС України
08200, вул. К. Маркса, 31, м. Ірпінь, Київська обл., Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 4336 від 12.06.2012 р.

У СЕРІЇ «МИТНА СПРАВА В УКРАЇНІ» ВИЙШЛИ ДРУКОМ:

2002

«Основи митної справи»

«Митний контроль та митне оформлення»

2003

«Таможенное оформление морских грузов»

«Основы таможенного дела в Украине»

«Митний контроль на автомобільному транспорті»

2004

«Митний контроль на залізничному транспорті»

«Митне оформлення автотранспортних засобів»

«Основи митної справи в Україні»

«Митний кодекс України та нормативно-правові акти, що регулюють його застосування»

«Митний контроль на повітряному транспорті»

«Митне регулювання зовнішньоекономічної діяльності в Україні»

«Коментар до Митного кодексу України»

2005

«Порядок заповнення вантажної митної декларації»

2006

«Основи мистецтвознавчої експертизи та вартісної оцінки культурних цінностей»

«Історія митної справи в Україні»

«Митне регулювання зовнішньоекономічної діяльності в Україні»

2008

«Основи митної справи в Україні»

2009

«Таможенный контроль: на пути к международным стандартам»

«Таможенный контроль в морских пунктах пропуска»

«Митне оформлення енергоносіїв»

«Митна безпека»

«Міжнародні перевезення товарів автомобільним транспортом: теорія і практика»

2010

«Святий Матфей. Митар. Апостол. Євангеліст»

«Історія митної діяльності: Україна в європейському контексті»

2011

«Митні інформаційні технології»

«Особливості митної класифікації товарів»

«Інфраструктура відкритих ключів: технології, архітектура, побудова та впровадження»

«Розподілені бази даних»

2012

«Інформаційно-аналітичне забезпечення діяльності митних органів»

«Митний кодекс України» / Коментар до ст. 6»

«Митна політика та митна безпека: концептуальне визначення та шляхи забезпечення»

«Архітектура комп'ютера»

«Комп'ютерна схемотехніка»

2013

«Актуальні питання теорії та практики митної справи»

«Історія митної діяльності»

«Механізми державного управління митною справою»

«Формування системи митного аудиту»

2014

«Митна енциклопедія, т. 1»

«Митна енциклопедія, т. 2»

«Митна енциклопедія, т. 3»

Серію «Митна справа в Україні» засновано в 2001 р. Її продовженням є серія «Податкова та митна справа в Україні», яку започатковано в 2015 р.

Редакційна колегія:
П. В. Пашко, д.е.н. (голова)
І. Г. Бережнюк, д.е.н.
А. І. Крисоватий, д.е.н.
А. А. Мазаракі, д.е.н.
Л. Л. Тарангул, д.е.н.
В. В. Ченцов, д.іст.н., д.н.д.у.
А. Д. Войцещук, к.е.н.

У СЕРІЇ «ПОДАТКОВА ТА МИТНА СПРАВА В УКРАЇНІ» ВИЙШЛИ ДРУКОМ:

2015

«Реформування податкової системи України: сучасні виклики та орієнтири»
«Міжнародні економічні відносини: у 2-х частинах»
«Адміністративно-правове сприяння соціально-економічному розвитку в Україні: теоретико-методологічні засади»
«Бухгалтерський облік в умовах застосування інформаційних технологій: історія та практика»
«Розслідування злочинів, пов'язаних із неналежним виконанням професійних обов'язків медичними працівниками: сучасний стан, проблеми та напрями удосконалення»
«Формування управлінської компетентності майбутніх економістів у процесі професійної підготовки: теорія і практика»
«Let Develor English skills»
«Кримінальний процес України»
«Європейська інтеграція»
«Проблеми правового закріплення принципів фінансового контролю»
«Протидія розслідуванню кримінальних правопорушень у сфері оподаткування: теорія та практика»
«Сучасні інформаційні системи і технології: управління знаннями»
«Інформатика та обчислювальна техніка: практикум»

2016

«Малий та середній бізнес у взаємовідносинах із податковими органами: соціологічна інтерпретація»
«Актуальні питання розвитку банківської системи України»
«Психологічні основи у професійній підготовці фахівців ПМ»
«Математика для економістів. Вища математика. Частина І. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія»
«Формування бюджетної стратегії України: теорія, методологія, практика»
«Економічна кібернетика: введення в спеціальність»
«Основи інформатики та обчислювальної техніки: практикум»
«Інформаційні системи та технології у фінансових установах»
«Регулятивний потенціал фінансового ринку в умовах глобальних викликів»
«Практикум з інформаційних систем в економіці»
«Практикум з WEB-програмування»
«Правовий статус фіскальних органів України та держав-членів Європейського Союзу»
«Митна справа»
«Соціалізація студенської молоді у процесі професійної підготовки»
«Основи психології та конфліктології для фахової підготовки економістів»
«Фінансове забезпечення інноваційного розвитку»
«Система державного фінансового контролю: формування та розвиток в Україні»
«Методологічні основи спеціальної фізичної підготовки студентів за розділом «Легка атлетика»
«Розвиток бухгалтерського обліку в умовах інтеграційних процесів»
«Моделювання систем захисту інформації»