

№60/2021

Znanstvena misel journal

The journal is registered and published in Slovenia.

ISSN 3124-1123

VOL.2

The frequency of publication – 12 times per year.

Journal is published in Slovenian, English, Polish, Russian, Ukrainian.

The format of the journal is A4, coated paper, matte laminated cover.

All articles are reviewed

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

Free access to the electronic version of journal

Chief Editor – Christoph Machek

The executive secretary - Damian Gerbec

Dragan Tsallaev — PhD, senior researcher, professor

Dorothea Sabash — PhD, senior researcher

Vatsdav Blažek — candidate of philological sciences

Philip Matoušek — doctor of pedagogical sciences, professor

Alicja Antczak — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Katarzyna Brzozowski — PhD, associate professor

Roman Guryev — MD, Professor

Stepan Filippov — Doctor of Social Sciences, Associate Professor

Dmytro Teliga — Senior Lecturer, Department of Humanitarian and Economic Sciences

Anastasia Plahtiy — Doctor of Economics, professor

Znanstvena misel journal

Slovenska cesta 8, 1000 Ljubljana, Slovenia

Email: info@znanstvena-journal.com

Website: www.znanstvena-journal.com

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ ТА МЕТОДУ КООРДИНАТ

Скасків Л.В.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Університет державної фіскальної служби України,
м. Ірпінь
Мартиненко В.В.
здобувач вищої освіти
Університет державної фіскальної служби України,
м. Ірпінь

SOME FEATURES OF THE STUDY METHODOLOGY VECTOR METHOD AND COORDINATE METHOD

Skaskiv L.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin
Martynenko V.
master's student
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin

Анотація

У статті розглядаються особливості методики вивчення векторного методу та методу координат у шкільному курсі математики.

Abstract

The article considers the peculiarities of the method of studying the vector method and the method of coordinates in the school course of mathematics.

Ключові слова: векторний метод, метод координат, задачі на доведення.

Keywords: vector method, coordinate method, proof problems.

Під час вивчення математики доводяться багато теорем. Та іноді ці доведення теорем для учнів здаються важкими, багато з них запитують: «А навіщо це потрібно?». І це природнє питання, тому що не завжди підручники дають на нього повну відповідь.

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень: синтетичним, аналітичним, аналітико-синтетичним (його інколи називають методом руху з двох кінців), методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія та подібність), алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний.

Експериментальні дослідження психологів і методистів, досвід роботи передових учителів свідчать, що коли в учнів сформовано загальні й специфічні розумові дії, які є складовими уміння доводити, то за належної організації вивчення вже в основній школі учні можуть засвоїти основні методи доведень та методичні прийоми, які використовуються при доведенні теорем.

Дану тему у своїх підручниках та посібниках розглядали Слєпкань З. І., Семенець С. П., Погорєлов А. В., Панчук В. І., Швець В. О.

Метод координат в курсі геометрії розпочинається у 8 класі, а перед цим була проведена пропедевтична робота в курсі математики 6 класу. Перевага методу координат перед синтетичним методом, за якого безпосередньо розглядаються фігури

і кожна задача потребує особливого підходу, в його алгоритмічності. Справді, за допомогою методів координат будь – яка задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізуються. Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії. Цей метод спрощує розв'язання багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу, що стосується векторів, тригонометричних функцій [1].

У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка в звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат і його застосуванням до розв'язування геометричних задач (доведення теорем). У зв'язку з цим варто на прикладах розв'язання принаймні двох задач виділити правило – орієнтир методу координат:

1. Виділити умови і вимоги задачі (теореми). Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними.

2. Використовуючи умови задачі (теореми), перетворити рівності зі змінними і прийти до результату на мові координат.

3. Здобутий результат перевести на мову геометрії.

Координати дозволяють визначати за допомогою чисел положення будь-якої точки простору або площини. Це дає можливість «шифрувати» різного роду фігури, записуючи їх за допомогою чисел. Співвідношення між координатами найчастіше визначає не одну точку, а декілька або безліч (сукупність) точок.

Встановлення зв'язків між алгеброю, з одного боку, і геометрією - з іншого, було по суті революцією в математиці. Воно відновило математику як єдину науку, в якій немає «китайської стіни» між окремими її частинами.

Суть методу координат як методу доведення та розв'язання завдань полягає в тому, що, задаючи фігури рівняннями і висловлюючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо вирішувати геометричну задачу засобами алгебри. Зворотно, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні та аналітичні співвідношення і факти геометрично і таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач [3].

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, які, з'єднуючись, дають «багаті плоди», які вони не могли б дати, залишаючись розділеними.

Щоб вирішувати завдання як алгебраїчні, так і геометричні методом координат, необхідне виконання 3 етапів:

1) переклад завдання на координатну (аналітичну) мову;

2) перетворення аналітичного вираження;

3) зворотний переклад, тобто переклад з координатної мови на мову, в термінах якої сформульовано задачу.

Для розробки методики формування вміння застосовувати координатний метод важливо виявити вимоги, які пред'являє логічна структура вирішення завдань мисленнєвого характеру. Координатний метод передбачає наявність в учнів умінь і навичок, що сприяють застосуванню цього методу на практиці. Проаналізуємо вирішення декількох завдань. У процесі цього аналізу виділимо вміння, які є компонентами уміння використовувати координатний метод при вирішенні завдань [2].

Приклад 1. У трикутнику ABC: AC = b, AB = c, BC = a, BD - медіана. Доведіть, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{2}$.

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб точка A служила початком координат, а вісь Ox була прямою AC (рис.1)

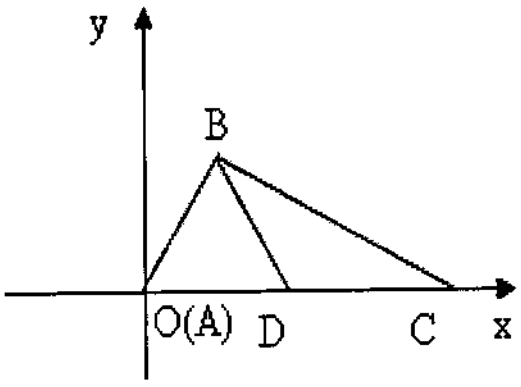


Рис. 1

У вибраній системі координат точки A, C і D мають наступні координати: A(0,0), C(b,0), D($\frac{b}{2}$,0). Позначимо координати точки B через x і y. Тоді використовуючи формулу для знаходження відстаней між двома точками, заданими своїми координатами, отримуємо:

$$x^2 + y^2 = c^2,\ (x-b)^2 + y^2 = a^2 \qquad (1)$$

За тією ж формулою $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + + y^2$ (2)

Використовуючи формули (1) знаходимо x та y.

Вони рівні: $x = \frac{c^2-a^2+b^2}{2b}$; $y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4b^2}}$.

Далі, підставляючи x та y у формулу (2), знаходимо:

$$BD^2 = (\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b})^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2};$$

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

Приклад 2. Доведіть, що рівняння площини, яка симетрична даній відносно початку координат, відрізняється від неї тільки знаком вільного члена.

Доведення. Нехай рівняння площини-прообразу має вигляд $ax + by + cz + d = 0$. Довільна точка цієї площини $M(x, y, z)$ переходить у точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, де $\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = -y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$

Звідси маємо: $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$. Підставимо ці координати точки М у рівняння площини-прообразу і отимаємо рівняння для x_1, y_1, z_1: $-ax_1 - by_1 - cz_1 + d \leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 - d = 0$.

Або у звичному позначенні змінних маємо рівняння площини-образу: $ax + by + cz - d = 0$, що і потрібно було довести [4].

Приклад 3. Які б не були точки A, B, C, справджується векторна рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Доведення. Нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ – дані точки. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $x_2 - x_1, y_2 - y_1$; координати вектора $\overrightarrow{BC}$: $x_3 - x_2, y_3 - y_2$. Отже, координати вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$: $x_3 - x_1, y_3 - y_1$. А це і є координати вектора $\overrightarrow{AC}$. За теоремою (рівні вектори мають рівні координати, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні) вектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ рівні. Теорему доведено.

За чинною програмою з математики вектори передбачено вивчати в два етапи: спочатку вивчаються вектори на площині, а потім - у просторі. У підручнику О. В. Погорелова у 8 класі крім основних понять, що стосуються векторів, вивчаються всі операції над векторами (додавання, віднімання, множення вектора на число і скалярний добуток двох векторів, розкладання векторів по координатних осях).

Базова програма вимагає в 8-9 класах мати уявлення про вектор, рівні вектори, вміти виконувати операції над векторами, передбачені програмою, і використовувати вектори до розв'язування нескладних стандартних задач (обчислення довжин відрізків і міри кутів, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів).

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом – орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, перше з яких учні вміють доводити і без застосування векторів. Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила-орієнтира векторного методу доведення тверджень.

1. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умову і вимоги, виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, якщо це потрібно, вектори у вигляді суми чи різниці інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності й прийти до потрібної.

3. Перекласти одержану рівність на мову геометрії.

Приклад 4. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Дано: ΔABC, AP⊥BC, BQ⊥AC, O - точка перетину AP і BQ належить CL.

Довести: CL⊥AB (рис. 2)

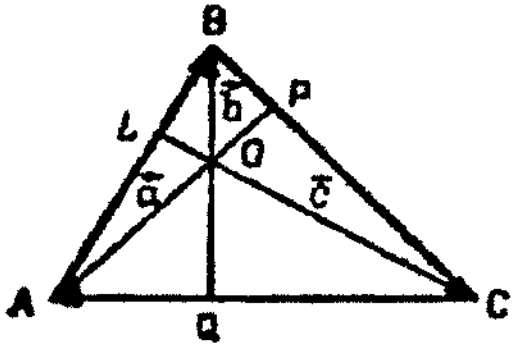


Рис. 2

Доведення.

Введемо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Треба довести, що $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$.

За умовою $\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0, \vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0$, тоді ми можемо, зробивши перетворення, скласти наступні вирази:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \vec{c} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$$

так як $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AB}$ - протилежні вектори, тому $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, а це означає, що CL ⊥ AB, тобто відрізок CL - висота ΔABC.

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, однак певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання теореми (задачі). Для формування навичок використання правила-орієнтира варто запропонувати учням розв'язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, про властивість діагоналей ромба, прямокутника.

Слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів.

Список літератури

1. Богданович М.В., Козак М.В., Король Я.А. Методика викладання математики: Навч. пос. – 3-є вид., перероб. і доп. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 336 с.

2. Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С. 35-40.

3. Скасків Л. В. Застосування графічного методу до розв'язування квадратних рівнянь /Л.В. Скасків //Priority directions of science and technology development: Abstracts of VI International Scientific and Practical Conference, 20-22 Febuary, 2021. – Kyiv, Ukraine, 2021. – P. 551–554.

4. Скасків Л.В., Руденко В.В. Застосування графічного методу до розв'язання алгебраїчних задач //Міжнародний податковий конгрес. – Ірлінь, 2020. – С.1300-1302.