Теорія ймовірностей та математична статистика



Національний університет державної податкової
служби України
Кафедра вищої математики

М.М. Семко
В.О. Коханівський
Л.В. Скасків
О.А. Ярова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Київ – 2007

УДК 519.2 (076)

Теорія ймовірностей та математична статистика */Семко М.М., Коханівський В.О., Скасків Л.В., Ярова О.А.* – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007.– 256 с.

У посібнику подаються основи теорії ймовірностей та математичної статистики. Матеріал поділено на 14 тем, у межах кожної з яких усі теоретичні відомості ілюструються розв'язаними задачами, наводяться контрольні питання та задачі для розв'язання з відповідями до них. Приводяться розрахункові завдання для самостійних та контрольних робіт.

Посібник рекомендується для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор **М.Ф. Кузенний** (Інститут математики НАН України);
кандидат фізико-математичних наук, доцент **Д.Я.Требенко** (Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Затверджено до друку вченою радою
Національного університету державної податкової служби України
(протокол №5 від 29.03. 2007 р.)

З М І С Т.....3

ВСТУП.....7

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРІКИ.....9
1.1. Короткі теоретичні відомості 9
1.2. Контрольні питання.....15
1.3. Задачі розділу.....15

Розділ 2. СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ.....19
2.1. Стохастичний експеримент.....19
2.2. Дії над подіями.....22
2.3. Контрольні питання.....25
2.4. Задачі розділу.....26

Розділ 3. ПОНЯТТЯ ЙМОВІРНОСТІ.....28
3.1. Класичне означення ймовірності.....31
3.2. Статистичне означення ймовірності.....33
3.3. Контрольні питання.....34
3.4. Задачі розділу.....34
3.5. Геометричні ймовірності.....37

Розділ 4. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ.....43
4.1. Незалежність подій.....43
4.2. Умовні ймовірності.....45
4.3. Контрольні питання.....47
4.4. Задачі розділу.....48

Розділ 5. ЙМОВІРНОСТЬ СУМИ ТА ДОБУТКУ ПОДІЙ.....50
5.1. Основні формули.....50
5.2. Контрольні питання.....51
5.3. Задачі розділу.....53

Розділ 6. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ.....61
6.1. Короткі теоретичні відомості.....61
6.1. Контрольні питання.....64
6.3. Задачі розділу.....65

Розділ 7. СХЕМА БЕРНУЛЛІ.....71
7.1. Короткі теоретичні відомості.....71
7.1. Контрольні питання.....74
7.3. Задачі розділу.....75

Розділ 8. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.....78
8.1. Дискретна випадкова величина.....78
8.2. Неперервна випадкова величина.....81
8.3. Контрольні питання.....82
8.4. Задачі розділу.....83

Розділ 9. ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.....92
9.1. Короткі теоретичні відомості.....92
9.1. Контрольні питання.....95
9.3. Задачі розділу.....95

Розділ 10. СУМІСНИЙ РОЗПОДІЛ.....100
10.1. Короткі теоретичні відомості.....100
10.1. Контрольні питання.....104
10.3. Задачі розділу.....105

Розділ 11. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ.....113
11.1. Нормальний закон розподілу.....113
11.2. Рівномірний закон розподілу.....119
11.3. Показниковий закон розподілу.....120
11.4. Біномний закон.....121
11.5. Розподіл Пуассона.....123
11.6. Розподіл Пірсона.....124
11.7. Розподіл Стьюдента.....127
11.8. Розподіл Фішера.....128
11.9. Контрольні питання.....130

11.10. Задачі розділу.....131

Розділ 12. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ.....136
12.1. Нерівність Чебишова.....136
12.2. Теорема Чебишова.....138
12.3. Теорема Бернуллі.....139
12.4. Центральна гранична теорема.....140
12.5. Контрольні питання.....145
12.6. Задачі розділу.....145

Розділ 13. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТАТИСТИКИ.....147
13.1. Основні теоретичні положення.....147
13.2. Оцінки параметрів розподілу.....149
13.3. Довірчі інтервали.....151
13.4. Контрольні питання.....155
13.5. Задачі розділу.....155

Розділ 14. ГІПОТЕЗИ.....158
14.1. Поняття статистичних гіпотез.....158
14.2. Гіпотези про рівність середніх значень.....163
14.3. Гіпотези про середнє значення.....169
14.4. Гіпотези про дисперсію.....172
14.5. Гіпотеза про рівність дисперсій.....175
14.6. Контрольні питання.....178
14.7. Задачі розділу.....179

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ.....191
Додаток А. Розрахункова робота 1.....192

А 1. Задачі теорії ймовірностей.....192
А.2. Індивідуальні завдання.....196

Додаток В. Розрахункова робота 2.....200

В 1. Знаходження нормального розподілу.....200
В.2. Індивідуальні завдання.....205

Додаток С. Розрахункова робота 3.....218

С.1. Розподіл Пуассона.....218
С.2. Індивідуальні завдання.....220

Додаток D. Розрахункова робота 4.....200

D.1. Застосування критерію X 222
B.2. Індивідуальні завдання.....205

Додаток Е. Розрахункова робота 5 238

Е.1. Кореляція 238
Е.2. Індивідуальні завдання.....239

Додаток F. Основні таблиці.....244

F.1. Нормальний розподіл.....244
F.2. Розподіл Стьюдента.....248
F.3. Розподіл Пірсона.....250
F.4. Розподіл Фішера.....252

Література.....255

Вступ

Посібник призначений для студентів економічних навчальних закладів усіх форм навчання, які вивчають курс теорії ймовірностей з елементами математичної статистики.

В посібник включені основні базові поняття, приклади та задачі, пов'язані з різними формами означення ймовірності випадкової події, з умовними ймовірностями, додаванням та множенням ймовірностей. Задачі вимагають знання формул повної ймовірності, Байєса, Бернуллі, Пуассона, а також локальної та інтегральної формул Муавра-Лапласа. Окремими параграфами виділені задачі на закони розподілу, числові характеристики дискретних та неперервних випадкових величин. Розглядаються основні задачі математичної статистики, а також математичні поняття, моделі та методи, сукупність яких являє собою ймовірнісний інструментарій для збору та обробки результатів експериментальних досліджень.

Типові задачі на початку кожного параграфа є розв'язаними. Для більшості задач наведені відповіді. Приводяться необхідні для розв'язання задач математико-статистичні таблиці. Контрольні запитання дозволяють, у певній мірі, перевірити готовність студента до практичного розв'язання задач. В посібник включені розрахункові завдання, які можуть бути використані як індивідуальні чи контрольні завдання для студентів.

Зауважимо, що розв'язування задач теорії ймовірностей є винятково важливим тому, що при цьому виробляється теоретико-ймовірнісна інтуїція студента, яка необхідна йому при вивченні нових економічних дисциплін, таких як "Економетрія", "Теорія ризику", "Теорія надійності", "Інформатика" та інші. Окрім того, розв'язування задач теорії ймовірностей сприяє умінню будувати математичні моделі реальних економічних процесів.

Автори висловлюють щиру подяку співробітникам кафедри вищої математики Національного університету державної податкової служби України, з якими вони обговорювали різні питання, висвітлені в даному посібнику. Автори особливо вдячні рецензентам проф. Кузенному М.Ф. і проф. Працьовитому М.В. та проф. Братійчуку М.С. за цінні зауваження та плідну співпрацю під час підготовки цього посібника до друку.

Автори сподіваються одержати від фахівців зауваження, рекомендації та побажання, спрямовані на покращення посібника при його подальшому виданні.

Розділ 1

Елементи комбінаторики

1.1 Короткі теоретичні відомості

Комбінаторикою називається розділ математики, що вивчає правила групування елементів множини.

Якщо ми маємо m різних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в одній множині і n різних елементів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в другій, то, очевидно, можемо утворити mn різних пар вигляду (a_i, b_j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Цей факт є наслідком загального правила, яке називається *головним принципом комбінаторики*.

Головний принцип комбінаторики. *Припустимо, що потрібно по черзі виконати k операцій. Якщо першу операцію можна виконати n_1 способами, другу — n_2 способами, і т.д., і, нарешті, k-ту операцію — n_k способами, то всі k операцій можна виконати*

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k \tag{1.1}$$

різними способами.

Розглянемо конкретні способи підрахунку числа підмножин, які можна утворити з даної множини елементів.

Означення 1.1. Нехай дано множину n різних елементів. Кожний упорядкований запис цих елементів будемо називати *перестановкою*. Число різних перестановок із n елементів будемо позначати символом P_n.

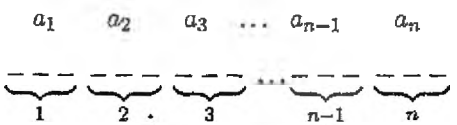
Приклад 1.1. З елементів a, b, c можна утворити такі перестановки:

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (c,a,b),\ (c,b,a),\ (b,c,a),\ (b,a,c).$$

Теорема 1.1. *Число всіх перестановок із n елементів визначається формулою*

$$P_n = n!. \tag{1.2}$$

Доведення. Уявімо собі, що маємо n місць і будемо розміщати n елементів на цих місцях.



Коли будемо поміщати елемент на k-те місце, то будемо говорити, що виконуємо операцію k-того типу.

Очевидно, що кожне розміщення відповідає певній перестановці. Розміщення будемо розпочинати від першого місця (тобто від лівої до правої сторони). На перше місце можемо поставити кожний з n елементів і, отже, маємо n операцій першого типу. На друге місце можемо поставити кожний з решти $n-1$ елементів, оскільки один елемент уже зайнятий (він стоїть на першому місці), і, тому, маємо $n-1$ операцій другого типу. На третьому місці можемо поставити кожний з решти $n-2$ елементів, оскільки два вже зайняті. Аналогічно, на четвертому місці можемо поставити кожний з $n-3$ елементів і т.д. На останнє n-те місце залишиться лише один елемент. Отже, наше розміщення складається з n операцій першого типу, $n-1$ операцій другого типу і т.д., однієї операції n-того типу. Тому, згідно з головним принципом комбінаторики число всіх розміщень дорівнюватиме $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$.

Зауваження. Оскільки перестановки — то просто упорядкування елементів даної множини, то теорема 1.1 може бути такою:

Теорема 1.2. *Множину з n різних елеметів можна упорядкувати $n!$ різними способами.*

Приклад 1.2. Знайти скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 3; 5; 7; 2; 6.

Р о з в' я з о к. Оскільки серед даних чисел немає однакових і нуля, то переставляючи цифри в числі 35726, ми щоразу будемо отримувати нове п'ятизначне число. Отже, нам потрібно знайти число перестановок із 5 елементів, тобто

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Приклад 1.3. Знайти скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 3; 5; 7; 0; 6.

Р о з в' я з о к. Оскільки серед даних чисел є нуль, то на відміну від попереднього прикладу не всі перестановки нас улаштовують. Так, число 03576 не є п'ятизначним. Отже, від числа всіх можливих різних перестановок з 5 елементів нам потрібно відняти число тих у яких нуль стоїть на першому місці, а таких перестановок буде рівно $P_4 = 24$. Відповідь буде така: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

Згідно означення 1.1 перестановки містять стільки ж елементів, що й сама множина. Однак, в комбінаториці часто виникає потреба розглядати впорядковані записи з меншою кількістю елементів. Так, наприклад, якщо множина складається з п'яти елементів, то можна поставити питання, скільки існує впорядкованих записів, що складаються із трьох елементів цієї множини?

Означення 1.2. Нехай дано множину n різних елементів. Упорядкований запис із k $(1 \leq k \leq n)$ елементів даної множини називається варіацією k-елементовою з множини n-елементової. Число всіх таких варіацій позначають A_n^k.

Якщо число k дорівнюватиме n, то така варіація співпаде з перестановкою. Для варіацій, так само як і для перестановок, порядок запису елементів є істотний. Так, наприклад, упорядковані підмножини $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ із множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ є різними варіацями. Нагадаємо, що варіації ще часто називають розміщеннями.

Приклад 1.4. З множини $H = \{a, b, c\}$ можемо утворити наступні 2-елементові варіації:

$$(a, b),\ (b, a),\ (a, c),\ (c, a),\ (b, c),\ (c, b).$$

Користуючись формулою 1.1, легко підрахувати число всіх можливих варіацій

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.3)$$

Приклад 1.5. Скільки натуральних чисел можна утворити з цифр 3; 5; 7; 2?

Р о з в' я з о к. Із даних цифр можна утворювати чотирицифрові, трицифрові, двоцифрові та одноцифрові числа. Тому потрібно підрахувати сумарне число можливих варіацій

$$N = A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4^1.$$

Оскільки

$$A_4^4 = 24,\ A_4^3 = 24,\ A_4^2 = 12,\ A_4^1 = 4,$$

то відповідь буде така

$$N = 24 + 24 + 12 + 4 = 64.$$

Нехай маємо множину з n різних елементів і довільне натуральне число k. Розглянемо впорядкований запис, що складається з k елементів даної множини, причому можливе повторення цих елементів. Такі записи називаються варіаціями з повтореннями. Якщо, наприклад, множина складається з двох елементів a та b, то наступні записи

$$(a,a,a),\ (b,b,b),\ (a,a,b),\ (a,b,a),\ (b,a,a),\ (a,b,b),\ (b,a,b),\ (b,b,a)$$

будуть 3-елементові варіації з повтореннями. Число таких варіацій позначатимемо $\bar{A}_n^k$. Неважко переконатися в справедливості наступної формули

$$\bar{A}_n^k = n^k. \qquad (1.4)$$

Нехай ми маємо деяку множину елементів, в якій елемент a_1 повторюється n_1 разів, елемент a_2 повторюється n_2 разів і т.д., елемент a_k повторюється n_k разів. Виникає питання, скільки різних перестановок можна утворити, переставляючи дані елементи?

Будемо говорити, що елемент a_k має тип k. Наприклад, елемент a_1 має тип 1. Уявимо, що елементи a_1, яких є рівно n_1, перенумеровані числами від 1 до n_1. Аналогічно поступимо з рештою елементів і одержимо множину з $n_1+n_2+\cdots+n_k$ різних елементів, бо вони тепер відрізняються або типом, або номером. Розглянуті елементи дадуть $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!$ перестановок, серед яких, зрозуміло, будуть і однакові.

Якщо у фіксованній перестановці ми почнемо переставляти місцями елементи a_1 (а вони стоять на n_1 місцях), то кожен раз будемо отримувати ту саму перестановку і число таких (однакових) перестановок буде рівне $n_1!$. Аналогічні міркування стосуються решти елементів. Згідно головного принципу комбінаторики число однакових перестановок становитиме $n_1!n_2!\ldots n_k!$. Якщо число всіх можливих перестановок поділити на число однакових, то отримаємо відповідь на поставлене питання у вигляді твердження.

Теорема 1.3. *Число всіх різних перестановок з елементів a_1, $a_2,\ldots$, a_k, які повторюються відповідно n_1, n_2, $\ldots,n_k$ разів, визначається формулою*

$$P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k) = \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}. \tag{1.5}$$

Приклад 1.6. Скільки різних слів, які мають сенс або ні, можна утворити, переставляючи літери в слові "математика"?

Р о з в' я з о к. Слова утворюємо, переставляючи 10 букв. Серед них буква „м" повторюється два рази, буква „а"— три рази й буква „т"— 2 два рази. Отже, число різних слів буде таким

$$P_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200.$$

Означення 1.3. Нехай дано множину H яка складається з n елементів. Різні підмножини, які містять k елементів множини H, називаться k-елементовими *комбінаціями* даної множини H.

З а у в а ж е н н я. Для комбінацій не є істотним порядок розташування елементів. Так, наприклад, 3-елементові підмножини $\{1,2,3\}$, $\{3,2,1\}$ з множини $\{1,2,3,4,5\}$ складають одну комбінацію.

Приклад 1.7. З множини $H = \{a, b, c\}$ можемо утворити такі 2-елементові комбінації:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}.$$

Число всіх k-елементових комбінацій з n-елементової множини позначається символом C_n^k. Для обчислення кількості комбінацій можна користуватись наступними формулами

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \tag{1.6}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.7}$$

Приклад 1.8. З групи 10 спортсменів потрібно утворити команду з чотирьох спортсменів. Скількома способами це можна зробити?

Р о з в' я з о к. Зрозуміло, що потрібно знайти C_{10}^4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210.$$

Означення 1.4. Нехай дано множину H яка складається з n різних елементів. Підмножини які складаються з k елементів множини H, причому ці елементи можуть повторюватися, називаються k–елементовими *комбінаціями з повтореннями* з n–елементової множини.

Приклад 1.9. З елементів a, b, c можемо утворити наступні 2–елементові комбінації з повтореннями:

$$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}.$$

Число всіх k–елементових комбінацій з повтореннями з n–елементової множини позначають символом $\bar{C}_n^k$ і обчислюють при допомозі формули

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{1.8}$$

1.2 Контрольні питання

1. Сформулюйте головний принцип комбінаторики.
2. Дайте означення таким сполукам: перестановки, розміщення та комбінації.
3. Дайте означення повторним та безповторним вибіркам.
4. Дайте означення розміщенням та комбінаціям з повтореннями.
5. Напишіть усі 2-елементові комбінації елементів множини $\{a, b, c\}$.
6. Напишіть усі 2-елементові комбінації з повтореннями елементів множини $\{a, b, c\}$.
7. Напишіть усі 2-елементові розміщення елементів множини $\{a, b, c, d\}$.
8. Напишіть усі 2-елементові розміщення з повтореннями елементів множини $\{a, b, c, d\}$.
9. Напишіть усі перестановки елементів множини $\{a, b, c\}$.
10. Наведіть приклади розміщень даного складу.
11. Чи може бути в комбінації кілька однакових елементів?
12. Чи важливий порядок розташування елементів в комбінації?
13. Чи важливий порядок розташування елементів в розміщенні?
14. Чи може бути в розміщенні кілька однакових елементів?
15. У чому полягає суттєва відмінність між розміщеннями та комбінаціями?
16. Що більше: A_n^k чи A_{n+1}^{k+1}?
17. Що більше: а) C_{20}^{10} чи C_{20}^{5}; б)C_{20}^{5} чи C_{21}^{6}?
18. Доведіть рівність $C_n^k = C_n^{n-k}$.
19. Доведіть рівність $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.
20. Доведіть рівність $C_n^k = 2^k$.
21. Сформулюйте алгоритм побудови трикутника Паскаля.
22. Розкладіть вираз $(1 + x)^n$ у вигляді многочлена.

1.3 Задачі розділу

1.1. Скількома способами можна розсадити 4 студентів на 25 місцях? *Відповідь.* 12650.

1.2. Скількома способами можна розмістити k предметів у n ящиках? *Відповідь.* n^k.

1.3. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститися з неї? Дати відповідь на те саме запитання, якщо підняття й спуск відбуваються різними шляхами. *Відповідь.* 49; 42.

1.4. У розиграшу першості країни з футболу бере участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна й бронзова медалі? *Відповідь.* $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$.

1.5. На шести дисках автоматичної камери схову нанесено по 12 різних букв. Скільки невдалих спроб може зробити особа, яка не знає секретного слова? *Відповідь.* Число всіх варіантів дорівнює $12^6 = 248832$. Значить невдалих спроб може бути 248831.

1.6. Група студентів складається із 10 хлопців та 15 дівчат. У кінці навчання у групі було дві шлюбні пари. Скільки для цього існувало варіантів? *Відповідь.* $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 = 4725$.

1.7. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4? *Відповідь.* 100.

1.8. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси? *Відповідь.* 7!.

1.9. У групі студентів вивчають 10 предметів. У понеділок 6 лекційних пар, причому всі вони різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок? *Відповідь.* A_{10}^6.

1.10. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?
Відповідь. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$.

1.11. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник? *Відповідь.* $n(n-3)/2$.

1.12. Скількома способами можна розставити на шаховій дошці розмірами $n \times n$ дві різнокольорові тури так, щоб вони не били одна одну? *Відповідь.* $n^2(n-1)^2$.

1.13. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов забирати речі, то виявилося, що він забув номер. Пасажир лише пам'ятає, що в номері були числа 23 і 37. Щоб відкрити камеру, треба правильно набрати п'ятизначний номер. Яку найбільшу кількість номерів треба перебрати, щоб відкрити камеру? *Відповідь.* 60.

1.14. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію (голова, заступник та секретар), що складається з 3 осіб? *Відповідь.* $7 \cdot 6 \cdot 5$.

1.15. Скількома способами читач може вибрати 3 книжки з 6? *Відповідь.* $C_6^3 = 20$.

1.16. Скільки підмножин має множина, що містить n елементів? (Вважати, що порожня множина є підмножиною кожної множини). *Відповідь.* 2^n.

1.17. У залі n лампочок. Скільки всього є різних способів її освітлення, при яких горить рівно k лампочок? Скільки всього може бути різних способів освітлення зали? *Відповідь.* C_n^k; 2^n.

1.18. Скільки можна зробити перестановок із n елементів, у яких дані 2 елементи не стоять поруч? *Відповідь.* $(n-2)(n-1)!$.

1.19. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну? *Відповідь.* $(8!)^2 = 40320^2$.

1.20. Скільки слів з п'яти букв можна утворити з букв a, b, c, якщо відомо, що буква a зустрічається в слові не більше двох раз, b – не більше одного разу, c – не більше трьох раз?
Відповідь. $5!/3! + 5!/(2! \cdot 3!) + 5!/(2! \cdot 2!) = 60$.

1.21. Скількома способами можна поділити $3n$ різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала n предметів? *Відповідь.* $C_{3n}^n C_{2n}^n C_n^n$.

1.22. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних лазерних принтерів, якщо на базі їх є 11 різних типів?
Відповідь. C_{16}^{10}. Скористатись формулою для числа комбінацій з повтореннями: $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

1.23. Скільки існує різних трикутників, довжини сторін яких можуть набувати таких значень: 4, 5, 6 та 7 см?
Відповідь. $\bar{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$.

1.24. Скільки можна побудувати прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражаються натуральними числами від 1 до 6? *Відповідь.* $\bar{C}_6^3 = C_8^3 = 56$.

1.25. Міжнародна комісія складається з 9 осіб. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба виготовити і як їх розподілити серед членів

комісії, щоб доступ до сейфа був можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше 6 членів комісії? Розглянути задачу для випадку, коли комісія складається з n осіб, а сейф можна відкрити лише при наявності не менше m членів комісії.

Відповідь. Які б $(m-1)$ членів комісії не зібрались, повинен знайтись замок, який вони не можуть відімкнути, але ключ до цього замка є у кожного з решти $(n-m+1)$ членів комісії. Тому мінімальне число замків дорівнює C_n^{m-1}, а число ключів $(n-m+1)C_n^{m-1}$.

1.26. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, а 10 учнів не відвідують жодного гуртка. Скільки учнів відвідують математичний та фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

Відповідь. 6; 14. Скористатись формулою для числа елементів суми двох множин: $N(A+B)=N(A)+N(B)-N(AB)$, де $N(\Omega)$ – число елементів множини Ω.

1.27. Із 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку й французьку – 5, всі 3 мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

Відповідь. 20. Скористатись формулою для числа елементів суми трьох множин: $N(A+B+C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(AC)-N(BC)+N(ABC)$, де $N(\Omega)$ – число елементів множини Ω.

1.28. У жорстокому бою не менше 70% бійців утратили одне око, не менше 75% – одне вухо, не менше 80% – одну руку і не менше 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку й ногу? (Льюис Кэррол. История с узелками. М., "Мир", 1973).

Відповідь. Найменша кількість бійців, що брали участь у бою дорівнює 20. З них 14 бійців втратили одне око, 15 – одне вухо, 16 – одну руку і 17 бійців утратили одну ногу. Мінімальне число бійців, що втратили одночасно око, вухо, руку й ногу дорівнює 2.

Розділ 2

Стохастичний експеримент та випадкова подія

2.1 Стохастичний експеримент

В кожній теорії чи, то математичній, чи філософській, релігійній чи будь-якій іншій завжди існують такі початкові поняття, на основі яких визначаються інші поняття. Характерною ознакою таких початкових або базових понятть є те, що вони не визначаються на підставі більш простих понять, а вже самі за означенням є первинними, тобто такими в справедливості та існуванні яких не сумніваються і на основі яких будуються складніші поняття. Так, наприклад, в арифметиці до таких понять відноситься число, в геометрії – точка, пряма, площина. В філософії ними є такі поняття як матерія, ідея. В релігії Бог не визначається, а приймається як такий, що існує вічно.

Початковими поняттями в теорії ймовірностей є поняття *стохастичного експерименту (досліду, випробування)* та *випадкової події*. Дамо пояснення цих понять.

Під *стохастичним експериментом*, розуміють такий експеримент, результати (наслідки) якого не можна передбачити напевно заздалегідь, а під *випадковою подією* — результат такого експерименту. Вважається, що стохастичний експеримент можна

повторити яке завгодно число разів за даних незмінних умов.

Приклад 2.1 *(підкидання монети).* Підкидаючи монету, матимемо два можливі реультати: герб або цифра. Перед її підкиданням ми не можемо точно передбачити який буде результат, оскільки дуже багато факторів (деякі із них нам навіть не відомі) впливають на результат кожного підкидання. Серед цих факторів можна назвати такі: початкова швидкість монети, кут, під яким викинуто монету, ступінь гладкості поверхні столу на який падає монета, та багато інших. Взагалі кажучи, існують сотні параметрів від яких залежить результат підкидання монети. І оскільки ми не в змозі регулювати всі ці параметри, то і не можемо передбачити результат експерименту.

Приклад 2.2 *(дворазове підкидання монети).* Експеримент полягає в тому, що монету підкидаємо два рази. Якщо позначимо випадання герба літерою Г, а цифри літерою Ц, то можливі результати нашого експерименту можна зобразити так ГГ , ГЦ , ЦГ , ЦЦ, де, наприклад, ГЦ означає, що спочатку випав герб, а потім цифра.

Приклад 2.3 *(підкидання кубика).* Експеримент полягає у підкиданні шестигранного кубика з пронумерованими гранями. Можливі результати цього експерименту будуть такими: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ситуація тут є така сама як і в першому прикладі, тобто ми не можемо напевно предбачити якою гранню випаде кубик.

Приклад 2.4 *(дворазове підкидання кубика).* Експеримент полягає в тому, що ми підкидаємо кубик два рази. Можливі результати експерименту можна зобразити парами цифр (i, j), де $i, j = 1, 2, \ldots, 6$.

У всіх попередніх прикладах число можливих результатів експерименту було скінченним. Неважко навести приклади, де таких можливих результатів буде нескінченна кількість.

Приклад 2.5. Будемо підкидати монету до тих пір, поки не випаде перший раз герб, після чого експеримент припиняємо. Результати такого експерименту можна подати у вигляді послідовностей (ЦЦ. . . ЦГ). Очевидно, число таких послідовностей буде нескінченним.

Приклад 2.6 *(задача про зустріч).* Дві особи A та B домовилися про зустріч у інтервалі часу $[a,b]$. Якщо позначити через x момент приходу A, а через y момент приходу B, то кожна пара чисел (x,y), де $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, може бути результатом такого експерименту. Очевидно, що число таких пар чисел буде нескінченним.

Тепер перейдемо до пояснення сутності елементарної події. Події A, B, C і т.д. називаються взаємно несумісними в даному експерименті, якщо настання (поява) однієї події виключає можливість настання будь-якої іншої.

Означення 2.1. Взаємно несумісні результати стохастичного експерименту називаються елементарними подіями.

Означення 2.2. Множина всіх елементарних подій стохастичного експерименту називається *простором елементарних подій* і позначається літерою Ω. Іншими словами, якщо розглядається певний стохастичний експеримент S, то Ω є множиною всіх можливих результатів цього експерименту.

Приклад 2.7. В прикладі 2.1 простір елементарних подій буде таким: $\Omega = \{\text{Г}, \text{Ц}\}$, у прикладі 2.2 – $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}$, в прикладі 2.3 – $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, в прикладі 2.4 – $\Omega = \{(i,j)\ i,j = 1,2,\ldots,6\}$, в прикладі 2.5 – $\Omega = \{\text{Г}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦГ}, \text{ЦЦЦГ}, \text{ЦЦЦЦГ}, \ldots\}$, а в прикладі 2.6 – $\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, a \le y \le b\}$.

Кожну підмножину A з простору Ω будемо називати *подією*. Якщо в стохастичному експерименті маємо деякий результат ω і $\omega \in A$, то будемо говорити, що відбулася подія A і що елементарна подія ω *сприяє події* A.

Порожню множину позначимо буквою $\emptyset$. Оскільки завжди $\Omega \subset \Omega$ і $\emptyset \subset \Omega$, то множини Ω і $\emptyset$ є подіями. Перша з них називається *достовірною або певною подією*, натомість друга – *подія неможлива*.

Приклад 2.8 *(дворазове підкидання монети).* В цій ситуації (приклад 2.2) $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}$ і, якщо подія A полягає в тому, що два рази випаде герб, то $A = \{\text{ГГ}\}$, а якщо подія B полягає в тому, що хоча б один раз випаде герб, то $B =$

{ГГ, ГЦ, ЦГ}. Елементарна подія {ГГ} сприяє подіям A та B, а елементарна подія {ГЦ} сприяє події B, але не сприяє події A.

Приклад 2.9 *(підкидання кубика).* Маємо $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і, нехай подія A полягає в тому, що випало парне число очок, тобто $A = \{2, 4, 6\}$, і тоді елементарна подія $\{4\}$ сприяє події A, а елементрна подія $\{3\}$ ні.

Приклад 2.10 *(дворазове підкидання кубика).* Тепер $\Omega = \{(i, j)\ i, j = 1, 2, \ldots, 6\}$, і якщо подія A полягає в тому, що сума очок при двох підкиданнях рівна 5, то $A = \{(i, j) : i + j = 5\}$, або, що те саме $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

2.2 Дії над подіями

Оскільки випадкові події трактуються як підмножини множини Ω, то дії над подіями можна означити так само як і дії над множинами. Це означає, що, наприклад, суму двох подій A та B можна означити як третю подію C, що складається лише з тих елементарних подій, які належать або до A, або до B. Але, в теорії ймовірностей використовують притаманну їй термінологію. Це означає, що ми будемо говорити про настання відповідної події. Так сума подій у терії ймовірностей визначається так:

Означення 2.3. *Сумою або об'єднанням* двох випадкових подій A та B називається така подія, яка настає тоді та лише тоді, коли настає хоча б одна з подій A чи B (або обидві разом).

Сума подій A та B позначається $A + B$ або $A \cup B$. З цього означення випливає, що подія $A + B$ складається лише з тих елементарних подій, які належать або до A, або до B, або до обох подій разом.

Приклад 2.11. Розглянемо при яких умовах можлива рівність $A + B = A$. Оскільки сума включає кожний з доданків, то $B \subseteq A$. На мові подій це співвідношення означає, що подія B сприяє події A.

Приклад 2.12 *(дворазове підкидання кубика).* Розглянемо події:

$$A = \{(i,j) : i+j \le 7\};$$
$$B = \{(i,j) : 4 \le i+j < 10\};$$
$$C = \{(i,j) : 8 \le i+j \le 9\}.$$

Подія A полягає в тому, що сума очок при двох підкиданнях не більша 7. Аналогічно трактуються дві інші події. Неважко переконатись, що $A \cup B = \{(i,j) : i+j < 10\}$, $B \cup C = B$.

Означення 2.4. Добутком двох випадкових подій A та B називається подія, яка настає тоді і лише тоді, коли настає кожна з даних подій.

Добуток подій A та B позначається так: $A \cap B$, або AB. Він складається лише з тих елементарних подій, які спільні для обох подій A та B.

Приклад 2.13 *(продовження прикладу 2.12).* Зрозуміло, що $A \cap B = \{(i,j) : 4 \le i+j \le 7\}$, і $B \cap C = C$.

Означення 2.5. Різницею випадкових подій A та B називається подія, яка настає тоді і лише тоді, коли настає подія A, але не настає подія B.

Різницю подій A та B будемо позначати так $A \backslash B$, або $A - B$. Різниця подій A та B складається лише з тих елементарних подій, які належать до A, але не належать до B.

Приклад 2.14 *(продовження прикладу 2.12).* Зрозуміло, що $B \backslash A = \{(i,j) : 7 < i+j < 10\}$, а $A \backslash B = \{(i,j) : i+j < 4\}$.

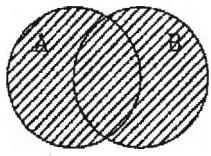
Подія $\Omega \backslash A$ називається *доповненням* події A або подією *протилежною* до події A. Таку подію позначають так $\bar{A}$. Очевидно, що подія $\bar{A}$ настає тоді і лише тоді, коли не настає подія A і що $\bar{\bar{A}} = A$. Зазначимо, що операція переходу до протилежної події — одна з найважливіших в теорії ймовірностей.

Приклад 2.15 *(продовження прикладу 2.12).* Маємо $\bar{A} = \{(i,j) : i+j > 7\}$, $\bar{B} = \{(i,j) : i+j < 4\} \cup \{(i,j) : i+j \ge 10\}$.

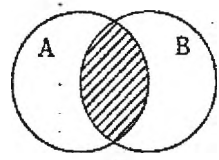
Означення 2.6. Події A та B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$. Або по-іншому, несумісні події A та B не можуть відбутись одночасно в даному досліді.

Приклад 2.16 *(продовження прикладу 2.12).* Події A та C є несумісними, оскільки $AC = \emptyset$.

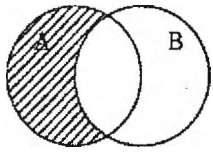
Наступні діаграми ілюструють всі ці означення операцій з подіями.



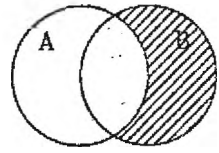
Об'єднання подій $A \cup B$



Добуток подій $A \cap B$



Різниця подій $A \setminus B$



Різниця подій $B \setminus A$

Рис. 2.1. Дії над подіями

Означення 2.7. Говорять, що подія A *тягне за собою* подію B (або, що подія B є *наслідком* події A, або подія A *належить* до події B), якщо подія B настає щоразу, коли настає подія A. У цьому випадку пишемо $A \subset B$.

Очевидно, що якщо $A \subset B$, то кожна елементарна подія, яка належить до A належить і до B. Продовжуючи приклад 2.12, бачимо, що $C \subset B$.

Вище ми розглядали дії з двома подіями. Але суму та добуток подій можна означити для довільної кількості подій. Так сумою випадкових подій A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ називається подія, яка настає тоді і лише тоді коли настає принаймі одна з даних подій. Суму подій позначають $\cup_{i=1}^{n} A_i$ або $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

Добутком випадкових подій A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ називається подія яка настає тоді і лише тоді коли настає кожна з даних подій. Добуток подій позначають $\cap_{i=1}^{n} A_i$ або $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Для операцій з подіями виконуються ті самі властивості що

і для операцій з множинами. Подамо без доведення відповідне твердження.

Теорема 2.1. *Операції з подіями мають такі властивості:*

1) $AB = BA$ – *комутативність добутку.*

2) $A \cup B = B \cup A$ – *комутативнімть суми.*

3) $A(BC) = (AB)C$ – *асоціативність добутку.*

4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – *асоціативність суми.*

5) $A(B \cup C) = AB \cup AC$ – *роздільність добутку відносно суми.*

6) $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$ – *роздільність суми відносно добутку.*

7) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – *закони де Моргана.*

2.3 Контрольні питання

1. Наведіть приклади стохастичних експериментів.
2. Наведіть приклади експериментів, які не будуть стохастичними.
3. Наведіть приклади випадкових подій.
4. Які випадкові події називаються елементарними?
5. Що називається простором елементарних подій?
6. Опишіть простір елементарних подій при підкиданні двох монет та двох гральних кубиків.
7. Експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значень з відрізка $[0, 1]$. Опишіть простір елементарних подій.
8. Монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі тією самою стороною. Опишіть простір елементарних подій.
9. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку вибирають одну; потім з решти, які залишились, вибирають другу. Опишіть простір елементарних подій при такому експерименті.
10. Які випадкові події називаються достовірними, а які — неможливими?
11. Опишіть ситуацію, коли одна подія сприяє іншій.

12. Дайте означення суми, добутку та різниці двох подій.
13. Які події називаються несумісними?
14. Які події називаються протилежними?
15. Чи завжди дві несумісні події будуть протилежними?
16. У якому випадку сума двох подій дорівнює їх добутку?
17. Які властивості операцій з подіями?
18. Поясніть суть законів де Моргана.

2.4 Задачі розділу

2.1. Доповнити:
a) $A \cup A = \ldots$ b) $AA = \ldots$ c) $A \cup \Omega = \ldots$ d) $A\Omega = \ldots$
e) $\Omega \subset A \Rightarrow A = \ldots$ f) $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \ldots$ g) $AB = A \Leftrightarrow \ldots$
h) $A \cup B = B \Leftrightarrow \ldots$ i) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow \ldots$
j) $\bar{A} \cup B = \Omega \Leftrightarrow \ldots$ k) $(B \setminus A) \cup A = B \Leftrightarrow \ldots$.
l) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = \ldots$ m) $(A \setminus A \cap B) \cup B = \ldots$
n) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \ldots$
o) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \ldots$

2.2. Довести що:
a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
b) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,
c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

2.3. Нехай $A \subset B$. Доповнити рівності:
a) $A \cup B = \ldots$ b) $AB = \ldots$ c) $A \setminus B = \ldots$ d) $ABC = \ldots$

2.4. Подія E описана за допомогою подій A, B, C. Спростити цей запис якщо:
a) $E = (A \cup B)(\bar{A} \cup B)$,
b) $E = (A \cup B)C \cup (B \cup C)A \cup (C \cup A)B$,
c) $E = (A \cup B)(B \cup C)$ для $A \subset C$,
d) $E = (A \cup B)(\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B})$.

2.5. Підкидаємо кубик то тих пір поки не отримаємо підряд одиницю та двійку. Описати простір елементарних подій цього експерименту.

2.6. Нитку довжиною l розірвано на дві частини. Описати простір елементарних подій цього експерименту.

2.7. З партії, що містить N виробів, серед яких є n бракованих, взято m виробів. Описати простір елементарних подій. Описати подію A: серед узятих виробів k — бракованих.

Розділ 3

Поняття ймовірності

Нехай стохастичний експеримент S має лише скінченну кількість результатів, тобто

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Неважко зрозуміти, що можлива ситуація, коли результати експерименту S не є рівно можливими, тобто настання одних результатів має більше шансів ніж настання інших. Наприклад, якщо підкидаємо кубик в якого грань з номером 6 найважча, то з практичного досвіду відомо, що ця грань найчастіше буде внизу, а отже грань із номером 1 буде випадати найчастіше. Для того щоб мати можливість порівнювати шанси настання кожного результату в даному експерименті, нам потрібна деяка числова характеристика кожного результату ω_i. А оскільки, випадкові події складаються з елементарних подій, то це дало б можливість порівнювати шанси різних подій відбутися чи ні у результаті експерименту S. Таку характеристику ми вводимо в наступному означені.

Означення 3.1. Говорять, що на множині елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ задана *ймовірність*, якщо кожній елементарній події ω_i поставлено у відповідність деяке число $p(\omega_i)$ таким чином,

що виконуються умови:

$$\text{а) } p(\omega_i) \geq 0 \text{ для всіх } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$$

Приклад 3.1 *(підкидання симетричної монети).* В цьому експерименті маємо $\Omega = \{\text{Ц}, \text{Г}\}$. Нехай $p(\text{Ц}) = 1/2$, $p(\text{Г}) = 1/2$. Зрозуміло, що властивості а) та б) виконуються.

В цьому експерименті ймовірність можна було б означити і так: $p(\text{Ц}) = 1/3$, $p(\text{Г}) = 2/3$. І в цьому випадку властивості а), б) виконуються. Але зрозуміло, що таке означення ймовірності суперечило б суті експерименту, оскільки, надавало б перевагу гербові, що для симетричної монети є неправдивим.

Приклад 3.2 *(підкидання кубика).* Тепер маємо $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вважаючи кубик симетричним, природньо покласти

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6.$$

Властивості а) та б) виконуються.

Припустимо тепер, що кубик не є симетричним і нехай, наприклад, вага грані буде рівна її номеру. Тепер ймовірності випадання граней не будуть, очевидно, однакові і їх можна означити, наприклад, так:

$$p(1) = \frac{6}{1+2+3+4+5+6} = 3/21, \; p(2) = 5/21, \; p(3) = 4/21,$$
$$p(4) = 3/21 = 1/7, \; p(5) = 2/21, \; p(6) = 1/21.$$

Означення 3.2. Нехай подія $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. *Ймовірністю події* A називається число

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i). \tag{3.1}$$

Приклад 3.3 *(продовження прикладу 3.2).* Нехай $A = \{3, 6\}$. Якщо кубик симетричний, то маємо $p(A) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Теорема 3.1. *Для ймовірності виконуються такі властивості:*

1) $p(\Omega) = 1$, $p(\emptyset) = 0$.

2) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

3) Якщо A *та* B *не перетинаються, то* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

4) Якщо $A \subset B$, *то* $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.

5) Якщо $A \subset B$, *то* $p(A) \leq p(B)$.

6) $p(A) \leq 1$ *для всіх подій* A.

7) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

8) $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$.

Доведення. Рівність $p(\Omega) = 1$, то, власне кажучи, є умова б) означення, а рівність $p(\emptyset) = 0$ є наслідком того, що множина $\emptyset$ не має жодного елемента.

Оскільки

$$p(\bar{A}) + p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in \bar{A}} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

то маємо рівність 2.

Якщо A та B не перетинаються, то очевидно

$$p(A) + p(B) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = p(A \cup B).$$

А це є властивість 3.

Для доведення властивості 4 зауважимо, якщо $A \subset B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$ і $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, і тому з властивості 3 дістаємо

$$p(B) = p(A) + p(B \setminus A),$$

що рівносильне пунктові 4.

Для доведення рівності 5 зазначимо, оскільки $p(B \setminus A) \geq 0$, то, як слідує з рівності 4, $p(B) - p(A) \geq 0$, що рівносильне пунктові 5. Пункт 6 слідує з попереднього, якщо $B = \Omega$.

Для доведення властивості 7 зауважимо, що $A \cup B = B \cup (A \backslash AB)$ і $(A \backslash AB) \cap B = \emptyset$, $AB \subset B$. Тому

$$p(A \cup B) = p(B \cup (A \backslash AB)) = p(B) + p(A \backslash AB)$$
$$= p(A) + p(B) - p(AB).$$

Пункт 8 слідує з попереднього і того, що $p(AB) \geq 0$.

3.1 Класичне означення ймовірності

Припустимо, що всі результати експерименту S рівноможливі, тобто $p(\omega) = 1/n$ для кожної елементарної події $\omega \in \Omega$. Якщо подія A складається з k елементарних подій, то згідно з формулою (3.1) маємо

$$p(A) = \frac{k}{n}. \tag{3.2}$$

Іноді цю формулу записують так

$$p(A) = \frac{\text{число елементарних подій, які сприяють події } A}{\text{число всіх елементарних подій}}.$$

Це є класичне означення ймовірності, автором якого є Лаплас.

Приклад 3.4. Підкидаємо два рази симетричний кубик. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що сума очок дорівнює 5, тобто $A = \{(i,j) : i + j = 5\}$.

Розв'язок. Всіх можливих результатів підкидання є 36, а результати (1,4),(4,1), (2,3), (3,2) сприяють події A. Тому

$$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Багато задач на застосування формули (3.2) можна звести до трьох нижченаведених схем.

а) Вибір із поверненням. Припустимо, що в деякому ящику є n різних предметів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З ящика навмання беруть один предмет, реєструють його, потім кладуть назад у ящик. Якщо здійснити k таких виймань, то можна отримати певну

впорядковану послідовність предметів, яку зручно записати у вигляді рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Такий рядок називається вибіркою обсягу k із множини X, що має n предметів. Число різних вибірок об'єму k дорівнює n^k. Вважатимемо, що всі n^k вибірок рівноймовірні, іншими словами, ймовірність довільної конкретної вибірки дорівнює $1/n^k$.

До схеми випадкового вибору з поверненням можна звести велике число дослідів. Наприклад, підкидання монети можна уявити як випадковий вибір із поверненням елементів із множини X={герб, цифра}. Дворазове підкидання кубика можна уявити як послідовний випадковий вибір із поверненням двох елементів із множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вияснення дня народження k випадкових студентів можна звести до послідовного вибору з поверненням k елементів із множини X ={1, 2, 3,. . . , 365}.

б) Вибір без повернення. В цьому випадку вийнятий предмет не кладеться назад у ящик і наступні виймання здійснюються з меншого числа предметів. Унаслідок k таких виймань отримаємо упорядкований рядок довжиною k без повторень. Число таких рядків дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Як і в попередньому пункті вважатимемо, що всі A_n^k вибірок рівноймовірні, іншими словами, ймовірність довільної такої вибірки дорівнює $1/A_n^k$.

в) Наступна схема відіграє суттєву роль у демографії, статистиці населення, статистичному контролі якості продукції тощо. Розглянемо множину, що складається з $M + N$ предметів, причому M предметів мають деяку властивість A, а решта N предметів її не мають. З множини взяли навмання k предметів. Яка ймовірність того, що серед цих k $(k = m + n)$ предметів m предметів мають властивість A, а n – її не мають? Наступна формула дає відповідь на це запитання

$$p = \frac{C_M^m \cdot C_N^n}{C_{M+N}^{m+n}} \tag{3.3}$$

Приклад 3.5. У партії з N деталей – M бракованих. Навмання беруть n деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде m бракованих.

Р о з в' я з о к. Елементарним наслідком досліду є вибір певних n деталей із загальної кількості N деталей. Число таких наслідків дорівнює кількості комбінацій з N по n, тобто C_N^n.

Подія A є виймання n деталей, із яких m бракованих. Сприятливим випадком для події A є поява групи з n деталей, в якій $n-m$ якісних деталей та m бракованих. Кількість таких груп дорівнює $C_{N-M}^{n-m} \times C_M^m$, бо групу з m бракованих деталей можна утворити C_M^m способами, а групу з $n-m$ якісних деталей C_{N-M}^{n-m} – способами. При цьому будь-яка група якісних деталей може комбінуватися з будь-якою групою бракованих.

Шукана ймовірність події A дорівнює відношенню числа наслідків, які сприяють цій події, до числа усіх елементарних наслідків

$$P(A) = \frac{C_{N-M}^{n-m} C_M^m}{C_N^n},$$

що співпадає з формулою (3.3).

3.2 Статистичне означення ймовірності

Припустимо, що при n-кратному випробуванні подія A настала m разів. Число

$$\mu(A) = \frac{m}{n} \tag{3.4}$$

називають відносною частотою настання події A. Практика показує, що при багаторазовому повторенні досліду відносна частота має властивість сталості, тобто в досить довгих серіях випробувань числа $\mu(A)$ групуватимуться навколо деякого числа $p(A)$, яке і вважають імовірністю події A. Наприклад, при багаторазовому підкиданні монети відносні частоти появи герба групуватимуться навколо числа $\frac{1}{2}$, а при багаторазовому підкиданні кубика відносні частоти появи одиниці

групуватимуться навколо числа $\frac{1}{6}$. Для першого випадку кажуть, що імовірність появи герба дорівнює $\frac{1}{2}$, а для другого –, що імовірність появи одиниці дорівнює $\frac{1}{6}$.

3.3 Контрольні питання

1. Дайте означення ймовірності для елементарних подій.
2. Дайте означення ймовірності для довільної події.
3. Чому дорівнює ймовірність достовірної та неможливої подій?
4. Як пов'язані ймовірності протилежних подій?
5. Чому дорівнює ймовірність суми двох сумісних подій?
6. Чому дорівнює ймовірність суми двох несумісних подій?
7. При якій умові ймовірність суми двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей?
8. При якій умові ймовірність різниці двох подій дорівнює різниці їх ймовірностей?
9. Чи може ймовірність суми двох подій перевищувати суму їх ймовірностей?
10. Зформулюйте класичне означення ймовірності. В чому полягає його недолік?
11. Зформулюйте статистичне означення ймовірності. В чому полягає його недолік?
12. В чому суть аксіоматичного означення ймовірності? Його переваги?

3.4 Задачі розділу

3.1. Кинуті два кубики. Знайти ймовірності таких подій: а) сума очок, що випали, дорівнює семи; б) сума очок, що випали, дорівнює восьми, а різниця чотирьом; в) сума очок, що випали, дорівнює восьми, якщо наперед відомо, що їх різниця дорівнює чотирьом; г) сума очок, що випали, дорівнює п'яти, а добуток – чотирьом. *Відповідь.* а) 1/6; б) 1/18; в) 1/2; г) 1/18.

3.2. В урні є 7 білих та 5 чорних куль. Знайти ймовірність того, що: а) навмання вийнята куля буде чорною; б) дві навмання вийняті кулі будуть чорними. *Відповідь.* а) 5/12; б) 5/33.

3.3. У ящику є 15 деталей, із яких 10 – пофарбовані. Складальник навмання виймає три деталі. Знайти ймовірність того, що вийняті деталі виявляться пофарбованими. *Відповідь.* 24/91.

3.4. У конверті серед 100 фотокарток знаходиться одна фотокартка що розшукується. З конверта навмання вийнято 10 карток. Знайти імовірність того, що серед них буде потрібна. *Відповідь.* $1 \cdot C_{99}^{9}/C_{100}^{10} = 1/10$.

3.5. Абонент, що набирає номер телефону, забув три останні цифри. Пам'ятаючи лише те, що забуті цифри різні, він набирає номер навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри. *Відповідь.* $1/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 1/720$.

3.6. У бригаді працює вісім чоловіків та шість жінок. Для виконання завдання довільно виділено десять працівників. Знайти ймовірність того, що серед призначених буде чотири жінки. *Відповідь.* $C_6^4 C_8^6/C_{14}^{10} = 60/143$.

3.7. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. Навмання відібрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів буде 5 відмінників. *Відповідь.* $C_8^5 C_4^4/C_{12}^9 = 14/55$.

3.8. Яка ймовірність того, що у 12 студентів дні народження припадають на різні місяці? *Відповідь.* $12!/12^{12}$.

3.9. У групі 12 студентів. Яка ймовірність того, що принаймні два з них народились в одному місяці? *Відповідь.* $1 - (12!/12^{12})$.

3.10. У групі r студентів. Обчислити ймовірність того, що принаймні два з них народилися в тому самому місяці. *Відповідь.* $1 - (A_{12}^r/12^r)$.

3.11. У групі є r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох із них збігаються дні народження? *Відповідь.* $1 - (A_{365}^r/365^r)$.

3.12. Серед N виробів знаходиться M бракованих. Навмання беруть n виробів. Яка ймовірність того, що серед них більше, ніж m бракованих виробів $(m < n < M)$? *Відповідь.* $\sum_{k=m+1}^{n} C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$.

3.13. У лотереї є n білетів, серед них m таких, що виграють. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів? *Відповідь.* $\sum_{s=1}^{r} C_m^s C_{n-m}^{r-s}/C_n^r$.

3.14. На екзамені може бути запропоновано N питань. Студент знає відповіді на n питань. Екзаменатор задає студентові k питань, а для того щоб скласти екзамен, треба відповісти не менше, як на r питань ($r < k$). Яка ймовірність того, що студент складе екзамен? *Відповідь.* $\sum_{s=r}^{k} C_n^s C_{N-n}^{k-s}/C_N^k$.

3.15. На різні клітинки шахової дошки довільним чином поставили дві тури (білу та чорну). Яка ймовірність, що вони опиняться під ударом одна одної? *Відповідь.* $64 \cdot 14/(64 \cdot 63) = 2/9$.

3.16. На полиці розставлені довільно 10 книжок, серед яких є три найпотрібніші. Яка ймовірність, що ці три книжки будуть поряд? *Відповідь.* $3! \cdot 8!/10! = 1/15$.

3.17. Студенти зібралися у театр. Було куплено 37 квитків (ряд у партері), які потім випадковим чином роздали студентам. Яка ймовірність того, що студент А та студентка В будуть сидіти у театрі поруч? *Відповідь.* $36! \cdot 2/37! = 2/37$.

3.18. n дівчат та n хлопців займають довільним чином $2n$ місць за круглим столом. Яка ймовірність того, що: а) жодні дві дівчини не будуть сидіти поруч; б) усі дівчата будуть сидіти поруч? *Відповідь.* а) $2(n!)^2/(2n)!$; б) $(n+1)(n!)^2/(2n)!$.

3.19. Кубик підкидають шість разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть всі шість граней. *Відповідь.* $6!/6^6$.

3.20. Підкидають 12 кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел $1, 2, \ldots, 6$ випаде двічі? *Відповідь.* $12!/(2^6 \cdot 6^{12})$.

3.21. У ліфті 7 пасажирів; ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі? *Відповідь.* $A_{10}^7/10^7$.

3.22. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбивають на дві підгрупи по n команд кожна. Яка ймовірність того, що дві найбільш сильні команди виявляться: а) у різних підгрупах? б) в одній підгрупі? в) яка ймовірність того, що чотири найбільш сильні команди попадуть по дві в різні підгрупи? *Відповідь.* а) $C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}/C_{2n}^n = n/(2n-1)$; б) $2C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}/C_{2n}^n = (n-1)/(2n-1)$; в) $C_4^2 C_{2n-4}^{n-2}/C_{2n}^n$.

3.23. Розглянемо квадртане рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$, де A, B, C визначаються відповідно як результати трьох послідовних

підкидань кубика. Знайти ймовірність того, що: а) рівняння має дійсні корені; б) рівняння має раціональні корені.

Відповідь. а) 43/216; б) 5/54.

3.24. Довести, що більш ймовірно при підкиданні чотирьох кубиків одержати принаймні одну одиницю, ніж при 24 підкиданнях двох кубиків одержати принаймні один раз дві одиниці. (Відповідь відома як "парадокс де-Мере". Придворний кавалер і азартний гравець Шевальє де-Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програшах).

3.5 Геометричні ймовірності

Існує клас практично важливих задач, у яких події трактуються як підмножини прямої, площини чи простору. Якщо множина A є частина деякої універсальної множини M, то ймовірність події A визначається як відношення міри множини A до міри множини M:

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(M)}, \tag{3.5}$$

де μ – міра множини. Зокрема, мірою може бути довжина відрізка, площа або об'єм фігури.

Приклад. У круг радіуса R навмання кидають точку. Тоді, ймовірність того, що точка опиниться всередині вписаного в коло квадрата дорівнюватиме відношенню площі квадрата $S_1 = 2R^2$ до площі круга $S_2 = \pi R^2$, тобто $\frac{2}{\pi}$.

3.25. На площині проведені два концентричних кола, радіуси яких 5 та 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання на великий круг, попаде також і в кільце, утворене концентричними колами. *Відповідь.* 3/4.

3.26. Стержень довжиною l навмання розламали на дві частини. Яка ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $l/3$? *Відповідь.* 2/3.

3.27. У круг радіуса R вписано правильний n-кутник. У круг кидають навмання точку. Яка ймовірність того, що точка попаде всередину n-кутника?

3.28. На паркетну підлогу навмання кидають монету діаметром d. Паркет має форму квадратів із стороною a ($a > d$). Яка ймовірність того, що монета не перетне жодної зі сторін квадратів паркету?
Відповідь. $(1 - d/a)^2$.

3.29. На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими $2a$. На площину навмання кидають круг радіуса r ($r < a$). Яка ймовірність того, що круг не перетне жодну з прямих?
Відповідь. $1 - r/a$.

3.30. Відрізок довжиною a довільним чином ламають на три частини. Яка ймовірність, що з цих частин можна скласти трикутник?
Розв'язання. Нехай x – довжина першої частини відрізка, y – довжина другої частини. Тоді, довжина третьої частини відрізка дорівнюватиме $a-(x+y)$. Очевидно, що x, y та $a-x-y$ – додатні величини, кожна з яких менша a. Зазначені умови описують множину допустимих точок M:

$$M = \begin{cases} 0 < x < a; \\ 0 < y < a; \\ 0 < a - (x+y) < a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < a; \\ 0 < y < a; \\ 0 < x + y < a. \end{cases}$$

Для того щоб із трьох частин відрізка можна було побудувати трикутник, необхідно й достатньо, щоб кожна сторона трикутника була менша суми двох інших сторін. Відповідна цій умові множина A буде множиною сприятливих точок:

$$A = \begin{cases} x < y + a - x - y; \\ y < x + a - x - y; \\ a - x - y < x + y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a/2; \\ y < a/2; \\ x + y > a/2. \end{cases}$$

На рис. 3.1 зображені множини M та A. Скориставшись формулою (3.5), будемо мати відповідь.

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(M)} = \frac{a^2/8}{a^2/2} = \frac{1}{4}.$$

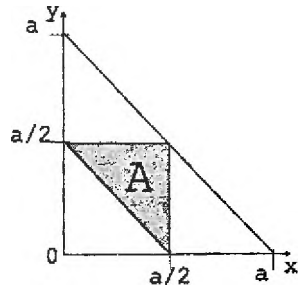


Рис. 3.1. Якщо точка (x, y) попаде в область A, то з відрізків x, y та $a - x - y$ можна побудувати трикутник

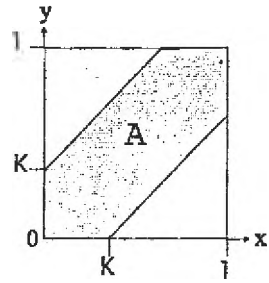


Рис. 3.2. Якщо точка (x, y) належить A, то модуль різниці її координат менший k

3.31. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжиною не більше a можна побудувати трикутник?

Відповідь. $1/2$.

3.32. На одиничному відрізку навмання взяли дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менша k, де $0 < k < 1$?

Розв'язання. Позначимо через x та y взяті точки. Вимога, щоб відстань між x та y була менша k, рівносильна нерівності

$$|x - y| < k \Leftrightarrow x - k < y < x + k.$$

На рис. 3.2 зображена відповідна множина точок, що задовольняють цю нерівність. Скориставшись формулою (3.5), отримаємо відповідь $p = 1 - (1 - k)^2$.

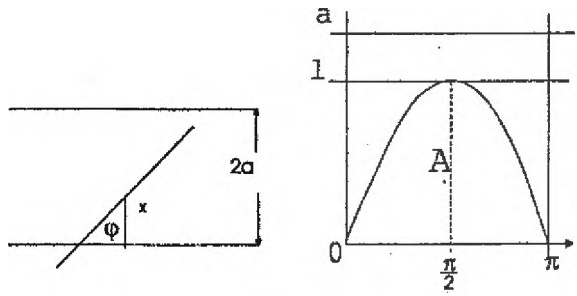


Рис. 3.3. Геометрична ілюстрація задачі Бюфона

3.33. Два судна повинні підійди до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівно можливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному із суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві години.

Відповідь. $(24^2 - 0,5 \cdot (22^2 + 23^2))/24^2 \approx 0,12$.

3.34. (Задача Бюфона). На площині проведені паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На цю площину кидають голку довжиною $2l$. Яка ймовірність, що вона перетне одну з прямих?

Розв'язання. Розглянемо систему випадкових величин (x, φ), де x – відстань від середини голки до найближчої прямої, а φ – кут між голкою та цією прямою (див. рис. 3.3). Областю допустимих значень точки (x, φ) є прямокутник M

$$0 \le x \le a; \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Неважко переконатись, що голка перетне одну з прямих лише у випадку, коли

$$x \le l \sin \varphi.$$

На рис. 3.3 зображена множина A точок, що задовольняють цю нерівність. Скориставшись формулою (3.5), отримаємо відповідь[1]

[1]У науковій літературі згадується факт про серію підкидань голки реально виконану одним дослідником. Для експерименту була взята голка довжиною 7,2 см, а відстань між сусідніми паралельними прямими становила 9 см.

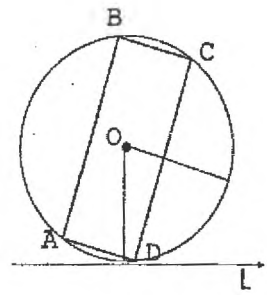


Рис. 3.4. Модель падіння монети

$$p = \frac{\int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}.$$

3.35. Із множини всіх можливих трикутників навмання взяли один. Яка імовірність, що він гострокутний? *Відповідь.* 1/4.

3.36. Якої товщини повинна бути монета, щоб імовірність падіння її на ребро дорівнювала 1/3?

Розв'язання. Монету можна розглядати як циліндр із діаметром основи d і висотою h. Упишемо цей циліндр у кулю радіуса R. Якщо перпендикуляр, опущений з центра кулі до поверхні землі, перетне бічну поверхню циліндра, то можна припустити, що монета впаде на ребро (див. рис. 3.4). Скориставшись формулами для площі сфери $S = 4\pi R^2$ та площі поверхні сферичного сегмента[2] $S = 2\pi R(R - h/2)$, послідовно будемо мати:

$$p = \frac{4\pi R^2 - 2 \cdot 2\pi R(R - h/2)}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}; \qquad \frac{1}{3} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}};$$

Дослідник підкинув голку 500 разів, при цьому частота перетину голки з паралельними прямими виявилась рівною 0,5064. Можна спробувати на основі рівності $p = \frac{2l}{\pi a}$ знайти наближене число π

$$\pi = \frac{2l}{pa} = \frac{7,2}{0,5064 \cdot 4,5} \approx 3,1596.$$

Отримане значення π досить близьке до реального.

[2]Площа сферичної поверхні сегмента дорівнює добутку довжини великого кола на висоту сегмента

$$3 = \sqrt{1 + (d/h)^2}; \qquad \frac{d}{h} = 2\sqrt{2}; \qquad h = \frac{\sqrt{2}}{4}d.$$

Отже, якщо товщина монети h становить $\sqrt{2}/4$ її діаметра, то ймовірність падіння монети на ребро дорівнює $1/3$.

3.37. У коло вписано правильний трикутник. а) Яка ймовірність того, що точка, яка кинута навмання всередину кола, попаде всередину трикутника? б) У середину кола кинуто навмання 13 точок. Яка ймовірність того, що в кожному із сегментів буде по 3 точки, а всередині трикутника – 4 точки?

Розділ 4

Умовні ймовірності

4.1 Незалежність подій

Означення 4.1. Події A та B називаються *незалежними*, якщо

$$p(AB) = p(A)p(B). \tag{4.1}$$

Приклад 4.1. Подія Ω та довільна подія A є незалежними, оскільки

$$p(\Omega A) = p(A) = 1 \cdot p(A) = p(\Omega)p(A).$$

Приклад 4.2. Якщо $p(A) = 0$, то для довільної події B події A та B є незалежними.

Дійсно, оскільки $p(AB) \leq p(A) = 0$, то $p(AB) = 0$. Далі маємо

$$p(AB) = 0 \cdot p(B) = p(A)p(B).$$

Приклад 4.3 *(двократне підкидання кубика).* У цьому випадку $\Omega = \{(i;j);\ i,j = 1,\ldots,6\}$. Розглянемо події:

$$\begin{aligned} A =& \{\text{при першому підкиданні випаде } 1\} = \\ & \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}, \\ B =& \{\text{при другому підкидані випаде } 1\} = \\ & \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}, \\ C =& \{\text{сума очок менша від } 4\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}. \end{aligned}$$

Розглянемо добуток подій AB та AC.

$$AB = \{\text{два рази випаде } 1\} = \{(1,1)\},$$
$$AC = \{(1,1),(1,2)\}.$$

Простим підрахунком знаходимо ймовірності розглянутих подій:

$$p(A) = 1/6;\ \ p(B) = 1/6;\ \ p(C) = 1/12;\ \ p(AB) = 1/36;\ \ p(AC) = 1/18,$$

а тому

$$p(AB) = p(A)p(B),$$

що означає, що події A та B є незалежними. Оскільки

$$p(AC) \neq p(A)p(C),$$

то події A та C є залежними.

Мають місце такі властивості незалежних подій.

Теорема 4.1. *Якщо події A та B незалежні, то незалежними будуть наступні пари подій: а) A та $\bar{B}$ і б) $\bar{A}$ та $\bar{B}$.*

Доведення. а) Скориставшись властивостями 2) та 3) теореми 3.1, переконуємося у справедливості наступних рівностей:

$$\begin{aligned} A &= A\bar{B} \cup AB, \\ p(A) &= p(A\bar{B}) + p(AB), \\ p(A) &= p(A\bar{B}) + p(A)p(B), \\ p(A\bar{B}) &= p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(\bar{B}). \end{aligned}$$

б) Скориставшись законом де Моргана (теорема 2.1) та властивостями 2) та 7) теореми 3.1, будемо мати

$$\begin{aligned} p(\bar{A}\bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) &= 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(AB) = \\ &= p(\bar{A}) - p(B)(1 - p(A)) = p(\bar{A})(1 - p(B)) = p(\bar{A})p(\bar{B}). \end{aligned}$$

Означення 4.1 стосується двох подій. Для більшої кількості подій уводиться складніше поняття *подій незалежних у*

сукупності. Для прикладу, три події A, B та C називаються незалежними в сукупності, якщо виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} p(AB) &= p(A)p(B); \\ p(AC) &= p(A)p(C); \\ p(BC) &= p(B)p(C); \\ p(ABC) &= p(A)p(B)p(C). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 Умовні ймовірності

Розпочнемо з прикладу. Нехай експеримент полягає у троєкратному підкиданні монети. Вважатимемо, що відбулась подія А, якщо герб випав не більше одного разу (випадання герба позначимо буквою Г, а цифри буквою Ц).

А = {(ЦЦЦ), (ГЦЦ), (ЦГЦ), (ЦЦГ)}.

Неважко побудувати простір елементарних подій.

Ω = {(ЦЦЦ), (ЦЦГ), (ЦГЦ), (ЦГГ), (ГЦЦ), (ГЦГ), (ГГЦ), (ГГГ)}.

Оскільки лише чотири елементарних події сприяють події A, то $p(A) = 1/2$.

Нехай тепер про експеримент додатково відомо, що відбулась наступна подія B = {кількість гербів непарна} = {(ЦЦГ),(ЦГЦ),(ГЦЦ),(ГГГ)}. Яка тепер ймовірність події A при тій додатковій інформації?

Подія B складається з 4 елементарних подій, а подія A має лише 3 події елементарні які входять до B. В рамках класичного означення ймовірності нова ймовірність події A буде рівна 3/4. Запишемо це так

$$p(A/B) = \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}. \tag{4.3}$$

Якщо врахувати, що $p(AB) = 3/8$, а $p(B) = 4/8$, то вираз (4.3) можна записати так

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \tag{4.4}$$

Цей вираз служить поясненням для наступного визначення умовної ймовірності.

Означення 4.2. Нехай A та B є дві довільні події і $p(B) > 0$. Умовна ймовірність події A, при умові, що відбулась подія B, означається наступним чином

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \tag{4.5}$$

З цього означення маємо

$$p(AB) = p(B)p(A/B), \tag{4.6}$$

і аналогічно

$$p(AB) = p(A)p(B/A). \tag{4.7}$$

Формули (4.6), (4.7) називаються *формулами ймовірності добутку подій.*

Приклад 4.4. Маємо урну з кулями: 6 білих та 3 чорних. Витягаємо по черзі дві кулі, причому після витягання не повертаємо кулі до урни. Знайти ймовірність того, що будуть витягнуті дві білі кулі.

Р о з в' я з о к. Нехай події A_1 та A_2 означають, що за першим та відповідно другим разом з урни взята біла куля. Тоді

$$p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2/A_1).$$

Зрозуміло, що $p(A_1) = 6/9 = 2/3$. Якщо за першим разом була витягнута біла куля, то в урні залишилось 5 білих та 3 чорних кулі і умовна ймовірність події A_2/A_1 буде дорівнювати

$$p(A_2/A_1) = 5/8.$$

Тому

$$p(A_1A_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{12}.$$

Умовна ймовірність має наступні властивості:

1) $0 \leq p(A/B) \leq 1$,

2) $p(\Omega/B) = 1$,

3) $p(B/B) = 1$,

4) Якщо події A, B є незалежними, то $p(A/B) = p(A)$,

5) Якщо $A_1A_2 = \emptyset$, то $p(A_1 \cup A_2/B) = p(A_1/B) + p(A_2/B)$.

Властивість 4 можна трактувати так: якщо дві події незалежні, то ймовірність настання однієї події не залежить від настання іншої.

Формулу 4.7 можна поширити на довільну кількість подій. Зокрема,

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/(A_1A_2)). \tag{4.8}$$

$$p(A_1A_2 \ldots A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1) \ldots p(A_n/(A_1A_2 \ldots A_{n-1})). \tag{4.9}$$

4.3 Контрольні питання

1. Які події називаються незалежними? Наведіть приклади залежних та незалежних подій.
2. Які події називаються попарно незалежними? Наведіть приклади.
3. Поняття подій незалежних у сукупності. Приклади попарно незалежних подій, які не є незалежними у сукупності.
4. Чи будуть залежними несумісні події?
5. Які ймовірності називають умовними?
6. За якою формулою можна обчислити умовну ймовірність?
7. Чому дорівнює ймовірність добутку двох подій?
8. При якій умові ймовірність добутку кількох випадкових подій дорівнює добутку їх ймовірностей?
9. Назвіть властивості умовних ймовірностей.
10. При якій умові справедлива формула $p(A/B) = p(A)$?

4.4 Задачі розділу

4.1. Двічі підкидають монету. а) Описати простір елементарних подій; б) описати події: A — при першому підкиданні випав герб; B — при другому підкиданні випав герб; в) обчислити $p(A)$, $p(B)$, $p(AB)$, $p(B/A)$.

4.2. Тричі підкидають монету. а) Описати простір елементарних подій; б) описати події: A — двічі випав герб; B — принаймні один раз випав герб; в) обчислити $p(B)$, $p(AB)$, $p(A/B)$.

4.3. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, коли відомо, що сума очок дорівнює 8? *Відповідь.* 2/5.

4.4. Знайти умовну ймовірність $p(A/B)$, якщо події A та B несумісні.

4.5. Навмання вибраний хлопчик виявився членом сім'ї з двома дітьми. Яка ймовірність того, що друга дитина теж хлопчик?

4.6. Серед родин з трьома дітьми обрали одну родину. Нехай A — в родині є хлопчик та дівчинка; B — в родині не більше однієї дівчинки. Вважаючи, що всі елементарні події однаково ймовірні, обчислити $p(A)$, $p(B)$, $p(AB)$ і довести, що події A та B незалежні.

4.7. Підкидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?

Розв'язання. Уведемо позначення: A – шістка випала принаймні один раз; B – на всіх трьох кубиках випали різні грані. Неважко переконатись в правильності наступних рівностей, перші дві з яких обчислюються на основі головного принципу комбінаторики, а третя – за означенням умовної ймовірності:

$$p(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}; \quad p(AB) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3}; \quad p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{1}{2}.$$

4.8. Підкидають два гральних кубики. Розглянемо випадкові події: A_1 –на першому кубику випало парне число очок; A_2 – на другому кубику випало непарне число очок; A_3 – сума очок на кубиках

непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.

Розв'язання. Запишемо у вигляді матриці всі можливі наслідки підкидання двох кубиків:

$$\begin{pmatrix} 1;1 & 2;1 & 3;1 & 4;1 & 5;1 & 6;1 \\ 1;2 & 2;2 & 3;2 & 4;2 & 5;2 & 6;2 \\ 1;3 & 2;3 & 3;3 & 4;3 & 5;3 & 6;3 \\ 1;4 & 2;4 & 3;4 & 4;4 & 5;4 & 6;4 \\ 1;5 & 2;5 & 3;5 & 4;5 & 5;5 & 6;5 \\ 1;6 & 2;6 & 3;6 & 4;6 & 5;6 & 6;6 \end{pmatrix}$$

Безпосереднім підрахунком варіантів, неважко переконатись в справедливості таких рівностей:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{2};$$

$$p(A_1A_2) = p(A_2A_3) = p(A_1A_3) = \frac{1}{4};$$

$$p(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq p(A_1)p(A_2)p(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Рівність $p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2)p(A_3)$ не виконується, отже, події A_1, A_2, A_3 будучи попарно незалежними не будуть незалежними в сукупності (див. формулу (4.2)).

4.9. З урни, яка містить m білих та n чорних куль, беруть послідовно дві кулі. Відомо, що перша куля біла. Яка ймовірність, що друга куля також буде білою?

Розділ 5

Ймовірність суми та добутку подій

5.1 Основні формули

Для розв'язування задач зручно згрупувати розглянуті раніше поняття та факти в одному розділі.

1. Дві події A та B називаються несумісними, якщо вони не перетинаються. Або, іншими словами, настання однієї події виключає можливість настання іншої.
2. Якщо події A_1, A_2,...,A_n попарно несумісні, то ймовірність об' єнання подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n). \qquad (5.1)$$

3. Якщо події A та B сумісні, то ймовірність об'єнання цих подій виразиться формулою

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB). \qquad (5.2)$$

4. Для трьох довільних подій A, B та C ймовірність їх об'єднання виразиться складнішою формулою

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - \\ - p(AB) - p(BC) - p(AC) + p(ABC). \qquad (5.3)$$

5. Для групи довільних подій A_1, A_2,..., A_n формула для ймовірності їх об'єднання матиме такий вид

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i_1<i_2} p(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} p(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} p(A_1A_2 \ldots A_n). \quad (5.4)$$

6. Ймовірність події A при умові, що настала подія B, визначається формулою

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} \quad (p(B) \neq 0). \quad (5.5)$$

7. Для добутку двох довільних випадкових подій A_1 та A_2 справедливі формули:

$$p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2/A_1), \quad (5.6)$$
$$p(A_1A_2) = p(A_2)p(A_1/A_2). \quad (5.7)$$

Ці формули можна поширити на довільну кількість подій, зокрема:

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/(A_1A_2)). \quad (5.8)$$

$$p(A_1A_2 \ldots A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1) \ldots p(A_n/(A_1A_2 \ldots A_{n-1})). \quad (5.9)$$

5.2 Контрольні питання

1. Який зміст у теорії ймовірності вкладається в поняття "стохастичний експеримент" та "випадкова подія"?
2. Які події називаються несумісними?
3. Що називається простором елементарних подій?
4. Як визначається сума, добуток та різниця двох подій?
5. Як визначається сума та добуток кількох подій?
6. Які події називаються протилежними?
7. Чи завжди дві несумісні події є протилежними?
8. Зформулюйте класичне означення ймовірності.

9. Зформулюйте статистичне означення ймовірності.
10. Зформулюйте аксіоматичне означення ймовірності.
11. Які переваги та недоліки класичного, статистичного та аксіоматичного типів означення ймовірності?
12. У яких випадках користуються статистичним, а не класичним означенням ймовірності?
13. Які події називаються незалежними, а які — залежними?
14. Чи існує певний зв'язок між незалежними та несумісними подіями?
15. Чи будуть залежними несумісні події?
16. Які ймовірності називаються умовними?
17. Наведіть основні властивості умовних ймовірностей?
18. Яка ймовірність буде більшою: умовна чи звичайна?
19. Дайте означення подій незалежних у сукупності.
20. Чи правильне твердження: якщо події попарно незалежні, то вони незалежні у сукупності?
21. Чи правильне обернене твердження: якщо події незалежні у сукупності, то вони попарно незалежні?
22. Чому дорівнює ймовірність суми несумісних подій?
23. Чому дорівнює ймовірність суми довільних випадкових подій?
24. При якій умові ймовірність суми кількох випадкових величин дорівнює сумі їх ймовірностей?
25. Чому дорівнює ймовірність добутку двох незалежних випадкових подій?
26. Чому дорівнює ймовірність добутку двох довільних випадкових подій?
27. При якій умові ймовірність добутку кількох випадкових величин дорівнює добутку їх ймовірностей?
28. Чому дорівнює ймовірність суми кількох випадкових подій?
29. Чому дорівнює ймовірність добутку кількох випадкових подій?
30. Як пов'язані ймовірності протилежних подій? У яких випадках зручно визначати ймовірність не самої події, а їй протилежної?

5.3 Задачі розділу

5.1. На полиці випадковим чином розставлено 15 підручників, причому п'ять із них у палітурках. Бібліотекар бере навмання чотири підручники. Знайти ймовірність того, що не менше двох з узятих підручників виявиться у палітурках (подія A).
Розв'язання. Подія A відбудеться, якщо відбудеться одна з трьох попарно несумісних подій: B – два підручники у палітурках, C – три підручники у палітурках, D – чотири підручники у палітурках. Отже, $A = B + C + D$, причому $BC = BD = CD = \varnothing$ За теоремою додавання для несумісних подій маємо

$$p(A) = p(B) + p(C) + p(D).$$

Знайдемо ймовірності подій B, C та D. Для обчислення цих ймовірностей можна скористатись формулою (3.3).

$$p(B) = \frac{C_5^2 C_{10}^2}{C_{15}^4} = \frac{30}{91};$$

$$p(C) = \frac{C_5^3 C_{10}^1}{C_{15}^4} = \frac{20}{273};$$

$$p(D) = \frac{C_5^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{273}.$$

Тоді $P(A) = 30/91 + 20/273 + 1/273 = 111/273$.

5.2. Ймовірність того, що після сонячного дня знов буде сонячний, дорівнює p_1, а після хмарного – хмарний, дорівнює p_2. Сьогодні сонячно. Яка ймовірність, що післязавтра буде: а) сонячно; б) хмарно? *Відповідь.* а) $p_1^2 + (1 - p_1)(1 - p_2)$; б) $(1 - p_1)(p_1 + p_2)$.

5.3. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих пристрої. Ймовірність того, що при аварії пристрій спрацює, дорівнює 0,95 для першого пристрою та 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює лише один пристрій. *Відповідь.* $p = 0,95 \times 0,1 + 0,9 \times 0,05 = 0,14$.

5.4. Два спортсмени стріляють по мішені. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а

для другого – 0,8. Знайти ймовірності того, що при одному залпі у мішень влучить тільки один із стрільців (подія A), у мішень влучать обидва стрільці (подія B), обидва стрільці промахнуться (подія C). *Відповідь.* а) 0,38; б) 0,56; в) 0,06.

5.5. По лінії зв'язку, яка має 4 приймально-передавальні пункти, передається повідомлення. На першому пункті відбувається спотворення повідомлення з ймовірністю 0,1. На кожному наступному пункті ймовірність спотворення зростає на 0,05. Яка ймовірність отримання на кінці лінії вірного повідомлення?
Відповідь. $p = 0,9 \times 0,85 \times 0,8 \times 0,75 = 0,459$.

5.6. Ймовірність одного влучення у ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення у ціль при одному пострілі з першої гармати, якщо відомо, що для другої гармати ймовірність такої події дорівнює 0,8. *Відповідь.* 0,7.

5.7. Із партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого сорту. Ймовірність того, що виріб, який взятий навмання, виявиться вищого сорту, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два вироби будуть вищого сорту.
Відповідь. 0,384.

5.8. Пристрій складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірності безвідмовної роботи (за час t) першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють 0,6; 0,7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом часу t безвідмовно будуть працювати: а) лише один елемент; б) лише два елементи; в) усі три елементи. *Відповідь.* а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

5.9. Ймовірності того, що деталь, яка потрібна складальнику, знаходиться у першому, другому, третьому та четвертому ящиках, відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8 та 0,9. Знайти ймовірності того, що потрібна деталь є: а) не більш ніж у трьох ящиках; б) не менш ніж у двох ящиках. *Відповідь.* а) 0,6976; б) 0,9572.

5.10. Радист тричі викликає кореспондента, причому наступний виклик робиться тільки за умови, що попередній виклик не прийнято. Ймовірність того, що буде прийнято перший виклик, дорівнює 0,3; другий – 0,4; третій – 0,5. Знайти ймовірність виклику кореспондента до закінчення сеансу зв'язку. *Відповідь.* 0,79.

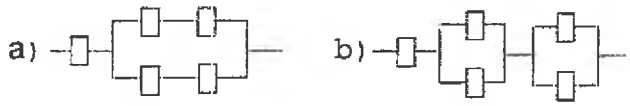


Рис. 5.1. Яка схема надійніша?

5.11. Кожний з вимикачів на схемах a) та b) (див. рис. 5.1) випадково ввімкнений з ймовірністю p. Визначте схему, по якій з більшими шансами пройде струм.

Відповідь. Ймовірність пройти струму по a) дорівнює $p^3(2-p)^2$, а по b) – $p^3(2-p^2)$. Значення першого виразу більше другого.

5.12. В урні є п'ять куль із номерами від 1 до 5. Навмання по одній виймають три кулі без повернення в урну. Знайти ймовірності таких подій: а) послідовно з'являться кулі з номерами 1, 4, 5; б) вийняті кулі будуть мати номери 1, 4, 5 незалежно від того, в якій послідовності вони з'явилися. *Відповідь.* а) 1/60; б) 0,1.

5.13. По каналу зв'язку передають два сигнали: 0 та 1. Через перешкоди сигнал піддається спотворенню з ймовірністю 0,05 незалежно від того, чи були спотворені попередні сигнали, чи ні. Посланий двійковий код 10110. Знайти ймовірність того, що: а) код отримано без спотворень; б) отримана комбінація 01001; в) отримана комбінація 11111.

Відповідь. а) $0,774$; б) $3,125 \cdot 10^{-7}$; в) $2,143 \cdot 10^{-3}$.

5.14. В електричний ланцюг послідовно ввімкнено три елементи, що працюють незалежно один від одного. Ймовірності відмов першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Знайти ймовірність того, що в ланцюзі не буде струму. *Відповідь.* 0,388.

5.15. Пристрій містить два елементи, які працюють незалежно. Ймовірності відмов елементів дорівнюють 0,05 та 0,08. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього досить, щоб відмовив хоча б один елемент. *Відповідь.* 0,126.

5.16. Три дослідники незалежно один від одного проводять вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник зробить помилку при знятті показань приладу,

дорівнює 0,1. Для другого та третього дослідників такі ймовірності відповідно дорівнюють 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що при одному вимірюванні хоча б один із дослідників припустить помилку.

Відповідь. 0,388.

5.17. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з ймовірністю p. Виявлення об'єкта в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено n циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлений? (Знайти ймовірність протилежної події).

Відповідь. $1-(1-p)^n$.

5.18. По цілі стріляють ракетами. Ймовірність влучення кожної ракети в ціль дорівнює p; влучення окремих ракет – незалежні події. Кожна ракета, яка влучила в ціль, уражає її з ймовірністю p_1. Стріляють до поразки цілі або до витрати всього боєзапасу ракет. Є n ракет. Яка ймовірнсть того, що: а) не весь боєзапас буде витрачено? б) після поразки цілі залишиться не менше двох ракет? в) буде витрачено не більше двох ракет?

Розв'язання. Нехай A_i – ціль уражена при i-му пострілі. а) Розглянемо протилежну подію – весь боєзапас витрачено. Звідси маємо: або ціль уражена при n-му пострілі, або ціль взагалі не уражена.

$$p(A_n\bar{A}_{n-1}\dots\bar{A}_2\bar{A}_1+\bar{A}_n\bar{A}_{n-1}\dots\bar{A}_2\bar{A}_1)=$$
$$pp_1(1-pp_1)^{n-1}+(1-pp_1)^n=(1-pp_1)^{n-1}.$$

б) Розглянемо протилежну подію – ціль не уражена або після поразки цілі залишиться менше двох ракет (одна або жодної).

$$p(\bar{A}_n\bar{A}_{n-1}\dots\bar{A}_2\bar{A}_1+A_n\bar{A}_{n-1}\dots\bar{A}_2\bar{A}_1+A_{n-1}\bar{A}_{n-2}\dots\bar{A}_2\bar{A}_1)=$$
$$pp_1(1-pp_1)^{n-2}+(1-pp_1)^{n-1}=(1-pp_1)^{n-2}.$$

в) $p(A_1+\bar{A}_1A_2)=pp_1+pp_1(1-pp_1)=pp_1(2-pp_1)$.

5.19. Прилад, що складається з n блоків, виходить із ладу, якщо виходять із ладу всі блоки. Блоки виходять із ладу незалежно

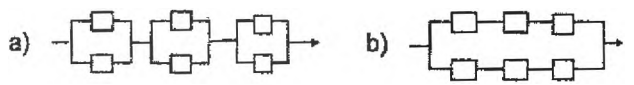


Рис. 5.2. Який спосіб дублювання надійніший?

один від одного. Надійність кожного блоку дорівнює p. Обчислити надійність приладу. *Відповідь.* $1-(1-p)^n$.

5.20. Для підвищення надійності приладу він дублюється другим таким самим приладом; надійність кожного приладу дорівнює p. При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве переключення на другий прилад. Знайти надійність: а) цієї системи приладів; б) системи, якщо пристрій переключення працює з надійністю p_1. *Відповідь.* а) $1-(1-p)^2$; б) $1-(1-p)(1-pp_1)$.

5.21. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ іншими такими самими приладами; надійність приладу дорівнює p. а) Знайти надійність цієї системи приладів. Скільки треба взяти приладів, щоб надійність системи була не менше ніж p? б) Знайти надійність системи приладів, якщо пристрій, що включає дублюючий прилад, має надійність p_1. Скільки треба взяти приладів, щоб надійність була не менше ніж p?
Відповідь. а) $1-(1-p)^n$; б) $1-(1-p)(1-pp_1)^{n-1}$.

5.22. Прилад складається з трьох вузлів. Перший вузол містить n_1 елементів, другий – n_2 елементів, третій – n_3 елементів. Прилад вийде з ладу, якщо зіпсується перший вузол; другий і третій вузли дублюють один одного. Вихід із ладу елемента означає вихід із ладу того вузла, до якого входить цей елемент. Надійність кожного елемента p. Елементи виходять із ладу незалежно один від одного. Знайти надійність приладу. *Відповідь.* $p^{n_1}(1-(1-p^{n_2})(1-p^{n_2}))$.

5.23. Технічна система складається з n блоків, надійність кожного з яких дорівнює p. Вихід із ладу принаймні одного блоку призводить до виходу з ладу всієї системи. Для підвищення надійності системи вона дублюється n такими самими блоками. Який спосіб дублювання дає більш високу надійність: а) дублювання кожного блоку; b) дублювання всієї системи (див. рис. 5.2)? *Відповідь.* Надійність за схемою а) $p_a=(1-(1-p)^2)^n$; надійність

за схемою б) $p_b = 1 - (1-p^n)^2$; $p_a > p_b$.

5.24. Два гравці A та B по черзі стріляють у ціль. Виграє той, хто влучить перший. Ймовірності влучення в ціль для першого та другого гравців відповідно дорівнюють p_1 і p_2. Першим стріляє A. Обчислити ймовірність виграшу для кожного гравця.

Розв'язання. Нехай події M та N означають виграш відповідно для першого або другого гравця. Події – влучення в ціль для першого та другого гравців при i-му пострілі – позначимо відповідно A_i та B_i. Неважко переконатися у справедливості наступних рівностей:

$$M = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3\bar{B}_3A_4 + \ldots;$$
$$N = \bar{A}_1B_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3B_3 + \ldots;$$
$$p(M) = p_1\sum_{n=0}^{\infty}[(1-p_1)(1-p_2)]^n = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)};$$
$$p(N) = 1 - p(M) = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

5.25. Два гравці по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого вперше випаде герб. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

Розв'язання. Задача розв'язується аналогічно попередній. Нехай A – виграв перший гравець, B – виграв другий гравець. Події – при i-му підкиданні монети в першого або другого гравця випав герб – позначимо відповідно A_i та B_i.

$$A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 + \ldots;$$
$$p(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots = \frac{2}{3};$$
$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}.$$

5.26. В урні n білих та m чорних куль. Два гравці по черзі дістають кулі з урни, повертаючи кожен раз узяту кулю в урну. Виграє той, хто першим дістане білу кулю. Знайти ймовірності виграшу для кожного гравця.

Розв'язання. Нехай $A(B)$ – виграв перший (другий) гравець. $A_i(B_i)$ – при i-му вийманні перший (другий) гравець вийняв білу кулю. Аналогічно попереднім двом задачам будемо мати:

$$A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 + \ldots;$$

$$p(A) = \frac{n}{n+m}\left[1 + \left(\frac{n}{n+m}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+m}\right)^4 + \ldots\right] = \frac{n+m}{2m+n};$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{m}{2m+n}.$$

5.27. Система складається з n однакових блоків. Усі блоки виймають і після профілактики навмання ставлять назад. Яка ймовірність того, що хоч один блок займе своє попереднє місце? *Відповідь.* $p = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. Потрібно скористатись формулою (5.4) для ймовірності суми подій.

5.28. Поїзд має N вагонів. Кожен із n пасажирів обирає собі вагон навмання. Яка ймовірність того, що: а) у кожному вагоні буде принаймні один пасажир? б) буде зайнято рівно r вагонів? *Відповідь.* 1/4.

5.29. Покупець випиває у випадковому порядку n стаканів соку і n стаканів води. Обчислити ймовірність того, що випита ним кількість соку після кожного стакана не перевищує випиту кількість води. Яка ймовірність того, що рівно після $2r$ стаканів випита кількість соку не перевищує випиту кількість води? *Відповідь.* $1/(n+1)$.

5.30. Монету підкинули $2n$ раз. Відомо, що герб і цифра випали однакову кількість разів. Яка ймовірність того, що в процесі підкидання число випадання герба було весь час більше числа випадання цифри? *Відповідь.* $1/(2n+1)$.

5.31. У місті з населенням $(n+1)$ чоловік мешканець дізнається про якусь новину. Він передає її першому зустрічному, той ще одному й т. д. На кожному кроці той, хто дізнався про новину, може з однаковою ймовірністю повідомити її будь-кому з n чоловік. Яка ймовірність того, що протягом r одиниць часу: а) новина не повернеться до людини, яка дізналась про неї першою; б) новину

ніким не буде повторено. Розв'язати цю задачу, припускаючи, що на кожному кроці новина повідомляється групі з N випадково обраних осіб.

Розділ 6

Формула повної ймовірності

6.1 Короткі теоретичні відомості

Якщо подія A має складну структуру, то пряме знаходження її ймовірності (наприклад, за допомогою класичного означення) може бути важким завданням. Тому виникає таке питання, а чи не можна поділити подію A на простіші події, ймовірності яких можна легко знайти, а уже потім, на їх основі, знайти ймовірність події A? Виявляється, що часом це можна зробити і наступне твердження описує одну із таких можливостей.

Теорема 6.1. *Нехай події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несумісні, а їх ймовірності не рівні нулеві. Якщо $A \subset \cup_{j=1}^{n} H_j$, то*

$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} p(H_j)p(A/H_j). \tag{6.1}$$

Доведення. З умови $A \subset \cup_{j=1}^{n} H_j$ слідує, що $A = A(\cup_{j=1}^{n} H_j) = \cup_{j=1}^{n} H_j A$. Події $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ не перетинаються, бо за умовою не перетинаються ширші події $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Тому на основі формул (5.1) та (5.6) (с. 50)

переконуємося у справедливості теореми:

$$p(A) = p(\cup_{j=1}^{n} H_j A) = \sum_{j=1}^{n} p(H_j A) = \sum_{j=1}^{n} p(H_j) p(A/H_j). \qquad (6.2)$$

З цього твердження дістаємо наступний наслідок, яким частіше користуються на практиці і який часто називають формулою повної ймовірності.

Теорема 6.2. *Нехай події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несумісні, їх ймовірності не рівні нулеві і $\cup_{j=1}^{n} H_j = \Omega$. Тоді для довільної події A справедлива формула*

$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} p(H_j) p(A/H_j). \qquad (6.3)$$

З а у в а ж е н н я. У теоремі 6.2 на події H_i накладається умова $\cup_{j=1}^{n} H_j = \Omega$, що зручно з таких міркувань. Якщо події H_i рівноймовірні, то ймовірність кожної події H_i дорівнюватиме $1/n$. Дійсно,

$$p(\cup_{i=1}^{n} H_i) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) = np(H_i) = 1.$$

З а у в а ж е н н я. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ зручно називати гіпотезами.

З а у в а ж е н н я. Про попарно несумісні події H_1, $H_2, \ldots$, H_n для яких виконується умова $\cup_{j=1}^{n} H_j = \Omega$, говорять, що вони утворюють повну групу.

Нехай тепер відомо, що відбулась подія A. Очевидно, що подія A настає разом з деякою гіпотезою H_i. Виникає питання, як знайти ймовірність настання кожної гіпотези або, що те саме $p(H_i/A)$? Відповідь на це питання дає формула Байеса.

Теорема 6.3 (Формула Байеса). *Нехай гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ і подія A, $p(A) > 0$ задовольняють умовам теореми 6.1. Тоді має місце формула*

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) p(A/H_i)}{p(A)}. \qquad (6.4)$$

Д о в е д е н н я. Скориставшись означенням умовної ймовірності, будемо мати

$$p(H_i/A) = \frac{p(AH_i)}{p(A)} = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)}.$$

З а у в а ж е н н я. Запишемо формулу 6.4 в розгорнутому вигляді

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + \cdots + p(H_n)p(A/H_n)}.$$

Як бачимо, в чисельнику дробу знаходиться один з доданків знаменника.

Приклад 6.1. Маємо два автомати які виробляють товари першої та другої якості. Перший автомат виробляє в середньому 60% товарів першої якості, а другий 80%. Продуктивність першого автомата в два рази більша ніж другого. Продукція обох автоматів розміщується на одному складі.

а) Беремо зі складу навмання одну одиницю товару. Знайти ймовірність того, що вона буде першої якості.

б) Взятий навмання товар виявився першої якості. Яка ймовірність того, що він виготовлений на першому (другому) автоматі?

Р о з в' я з о к. Нехай A, A_1, A_2 означають події:

A – взятий товар першої якості,

A_1 – товар виготовлений на першому автоматі,

A_2 – товар виготовлений на другому автоматі.

Оскільки продуктивність першого автомату в два рази більша ніж другого, то

$$p(A_1) = \frac{2}{3}; \qquad p(A_2) = \frac{1}{3}.$$

Дійсно, з $3n$ штук товару $2n$ штук зроблено на першому автоматі, а n штук на другому і тому у відповідності з класичним означенням ймовірності маємо

$$p(A_1) = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}, \qquad p(A_2) = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Очевидно,

$$p(A/A_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \quad p(A/A_2) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

Оскільки $A_1 \cup A_2 = \Omega$ і події A_1, A_2 не перетинаються, то на підставі формули повної ймовірності

$$p(A) = p(A_1)p(A/A_1) + p(A_2)p(A/A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}.$$

Для пункту б) на підставі формули Байеса маємо:

$$p(A_1/A) = \frac{p(A_1)p(A/A_1)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5};$$

$$p(A_2/A) = \frac{p(A_2)p(A/A_2)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

6.2 Контрольні питання

1. Яке твердження має назву "формула повної ймовірності"?
2. Яке значення має формула повної ймовірності?
3. Доведіть формулу повної ймовірності.
4. Які події прийнято називати гіпотезами?
5. Чи повинні гіпотези бути рівноймовірними?
6. Чи повинні гіпотези утворювати повну групу?
7. Яку ймовірність називають апріорною?
8. Яку ймовірність називають апостеріорною?
9. Яка теорема має назву "формула Байєса"?
10. Яке значення має формула Байєса?
11. Доведіть формулу Байєса.
12. Як пов'язані між собою формули повної ймовірності та Байєса?
13. Чому ймовірності гіпотез повинні бути додатніми?

6.3 Задачі розділу

6.1. В урну, яка містить дві кулі, поклали білу кулю, після чого з неї навмання вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою, якщо рівноможливі усі припущення про початковий склад куль в урні (кількість білих та чорних).

Розв'язання. Нехай подія A – вийнята з урни куля є білою. Можливі такі припущення (гіпотези) про початковий склад куль в урні: H_1 – білих куль немає, H_2 – одна біла куля, H_3 – дві білі кулі. Оскільки усі три гіпотези рівноймовірні, то $p(H_1) = p(H_2) = p(H_3)$. Крім того, ці гіпотези утворюють повну групу подій, тому $p(H_1)+p(H_2)+p(H_3) = 1$. Таким чином, $p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = 1/3$.

Імовірність вийняти білу кулю за умови, що спочатку в урні не було білих куль, $p(A/H_1) = 1/3$. Імовірність вийняти білу кулю за умови, що спочатку в урні була одна біла куля, $p(A/H_2) = 2/3$. Імовірність вийняти білу кулю за умови, що спочатку в урні були дві білі кулі, $p(A/H_3) = 3/3 = 1$. За формулою повної імовірності

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3)$$

обчислимо ймовірність шуканої події

$$p(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

6.2. Турист навмання вийшов із міста А у місто Б (рис. 6.1). Яка ймовірність того, що він прийде у місто Б?

Відповідь. 11/18.

6.3. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю, після чого з неї навмання вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою, якщо рівноможливі усі припущення про початковий склад куль в урні (кількість білих та чорних).

Відповідь. $\frac{n+2}{2n+2}$.

6.4. У піраміді п'ять гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки

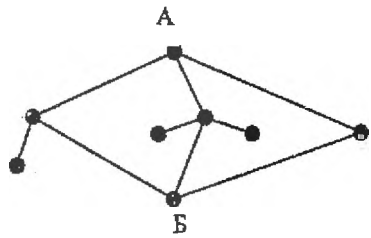


Рис. 6.1. Яка ймовірність, що турист попаде з А у Б?

без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з гвинтівки, яку він узяв з піраміди навмання.

Відповідь. 0,85.

6.5. В першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих, в другій – 20 куль, з яких 4 білі. З кожної урни навмання вийняли по одній кулі, а потім із цих двох куль навмання взяли одну кулю. Знайти ймовірність того, що взята біла куля.

Відповідь. 0,5.

6.6. Турист на кожному роздоріжжі вибирає подальший напрямок руху навмання (див. рис. 6.2). Яка ймовірність того, що турист попаде з пункту А у пункт Б?

Відповідь. 67/120.

6.7. У кожній з трьох урн міститься по 6 чорних та по 4 білі кулі. З першої урни навмання вийнята одна куля і перекладена в другу урну, після чого з другої урни навмання вийнята одна куля і перекладена в третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, яка навмання вийнята з третьої урни, виявиться білою.

Відповідь. 0,4.

6.8. Перед іспитом студент вивчив лише 16 білетів з 30. Як йому доцільніше брати білет – першим, другим чи третім?

Відповідь. Імовірність взяти бажаний білет не залежить від того брати його першим, другим або третім. Ця ймовірність дорівнює відношенню числа вивчених білетів до числа всіх білетів.

6.9. У піраміді десять гвинтівок, чотири з яких мають оптичний приціл. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,8. Стрілець влучив у мішень із гвинтівки, яку взяв із піраміди навмання. Що більш ймовірно: постріл був зроблений із гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього? *Відповідь.* Більш ймовірно, що гвинтівка була без оптичного прицілу (24/43 > 19/43).

6.10. Кількість вантажних автомашин, що їдуть по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легкових автомашин, що їдуть по тому ж шосе, як три до двох. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажна автомашина, дорівнює 0,1, для легкової така ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки автомашина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Відповідь. 3/7.

6.11. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох товарознавців. Імовірність того, що виріб попаде до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9; а другим, – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було визнано стандартним. Знайти імовірність того, що цей виріб перевіряв другий товарознавець. *Відповідь.* 0,47.

6.12. Три стрільці зробили залп, причому дві кулі влучили у мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у мішень, якщо ймовірності влучення у мішень першим, другим та третім стрільцями відповідно дорівнюють 0,6; 0,5 та 0,4.

Відповідь. 10/19.

6.13. Турист прийшов із пункту А у пункт Б (рис. 6.2). Яка ймовірність того, що він пройшов по маршруту АВБ?

Відповідь. 12/67.

6.14. В урні n куль. Усі можливі припущення про число білих куль в урні рівноможливі. Навмання з урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

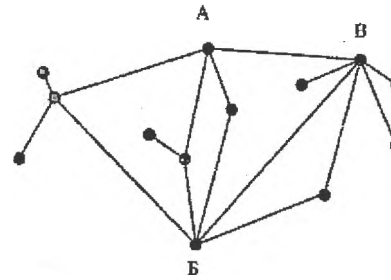


Рис. 6.2. Яка ймовірність, що турист пройде по маршруту АВБ ?

Відповідь. H_i – гіпотеза, що в урні рівно i білих куль.

$$p = \sum_{i=0}^{n} p(H_i)p(A/H_i) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

6.15. У двох урнах знаходиться відповідно n_1 і n_2 куль, із них білих куль m_1 та m_2. З першої урни переклали в другу урну одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Відповідь. A – із другої урни взяли білу кулю. H_1 – із першої урни переклали в другу білу кулю. H_2 – із першої урни переклали в другу не білу кулю.

$$p(H_1) = \frac{m_1}{n_1}; \quad p(H_2) = 1 - \frac{m_1}{n_1};$$

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) =$$

$$= \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2+1}{n_2+1} + \left(1 - \frac{m_1}{n_1}\right)\frac{m_2}{n_2+1} = \frac{m_1 + n_1 m_2}{n_1(n_2+1)}.$$

6.16. Прилад складається з n блоків, які дублюють один одного, і може працювати в одному з двох режимів – сприятливому або несприятливому. В сприятливому режимі надійність роботи кожного блоку дорівнює p_1, а в несприятливому – p_2. мовірність того, що прилад працюватиме в сприятливому режимі дорівнює p, в несприятливому – $(1-p)$. Обчислити надійність приладу.

Відповідь. A – прилад надійний. H_1 – прилад працює в сприятливому режимі. H_2 – прилад працює в несприятливому режимі.

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) =$$

$$= p(1-(1-p_1)^n) + (1-p)(1-(1-p_2)^n).$$

6.17. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що взята з урни куля буде біла, якщо всі припущення про початковий склад білих куль рівноможливі?

Відповідь. A – взята куля – біла. $H_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ – гіпотеза, що спочатку в урні було рівно i білих куль. $p = \sum_{i=0}^{n} p(H_i)p(A/H_i) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{n+1}{n+1}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

6.18. Стрілець A влучає в мішень з імовірністю $p_1 = 0,6$, стрілець B – з імовірністю $p_2 = 0,5$, а стрілець C – з імовірністю $p_3 = 0,4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш імовірно: попав С у мішень чи ні?

Відповідь. A – подія, що в мішень попали 2 кулі. H_1 – гіпотеза, що С влучив у мішень. H_2 – гіпотеза, що С не влучив у мішень.

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) = \\ &= 0,4(0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5) + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = \\ &= 0,2 + 0,18 = 0,38; \\ p(H_1/A) &= \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,2}{0,38} \approx 0,53; \\ p(H_2/A) &= \frac{p(H_2) \cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{0,18}{0,38} \approx 0,47. \end{aligned}$$

6.19. На вхід радіолокаційного пристрою надходять: з імовірністю p – сигнал із шумом і з імовірністю $(1 - p)$ – тільки шум. Якщо надходить сигнал із шумом, то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю p_1, якщо надходить тільки шум, то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю p_2. Відомо, що пристрій зареєстрував сигнал. Яка імовірність, що сигнал надійшов із шумом?

Відповідь. A – прилад зареєстрував сигнал. H_1 – гіпотеза, що надійшов сигнал із шумом. H_2 – гіпотеза, що надійшов лише шум.

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) = pp_1 + (1-p)p_2; \\ p(H_1/A) &= \frac{p(H_1)p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{pp_1}{pp_1 + (1-p)p_2}. \end{aligned}$$

6.20. Три мисливці одночасно вистрілили у вовка. Вовка вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що вовк убитий першим,

другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$.

Відповідь. A – вовка вбито однією кулею. H_1 – вовка вбито першим мисливцем. H_2 – вовка вбито другим мисливцем. H_3 – вовка вбито третім мисливцем.

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(\bar{H}_1)p(A/\bar{H}_1) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,8(0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6) =$$
$$= 0,048 + 0,416 = 0,464;$$
$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1)p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,048}{0,464} = 0,10.$$

6.21. Деталі виробляються на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в n раз перевищує об'єм продукції першого заводу. Частка браку на першому заводі – p_1, на другому – p_2. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона випущена другим заводом?

Відповідь. A – деталь бракована. H_1 – гіпотеза, що деталь виготовлена першим заводом. H_2 – гіпотеза, що деталь виготовлена другим заводом.

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) = \frac{p_1}{n+1} + \frac{n}{n+1}p_2;$$
$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2)p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{np_2}{np_2 + p_1}.$$

Розділ 7

Схема Бернуллі

7.1 Короткі теоретичні відомості

Припустимо, що проводяться n незалежних дослідів, в кожному з яких із однією і тією ж ймовірністю p може наступити деяка подія A. Яка ймовірність того, що в n дослідах подія A наступить рівно k $(0 \leq k \leq n)$ разів? Відповідь на це питання дає формула Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{7.1}$$

де C_n^k – число сполук із n елементів по k, $q = 1 - p$. Числа $P_n(k)$ називаються біномними ймовірностями.

Найімовірніше число успіхів. Серед чисел $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2), \ldots, P_n(n)$ виберемо найбільше. Число k_0 $(0 \leq k_0 \leq n)$, при якому ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називається найбільш імовірним (найімовірнішим) числом успіхів. Рис. 7.1 дає геометричну ілюстрацію найбільш імовірного числа успіхів.

Теорема 7.1. *Якщо число $\alpha = np - q$ не ціле, то найбільш імовірне число успіхів дорівнює найближчому до α справа цілому числу. Якщо число α ціле, то найбільш імовірне число успіхів має два значення: α і $\alpha + 1$.*

Середнє число успіхів. Число np інтерпретують як середнє число успіхів у n дослідах.

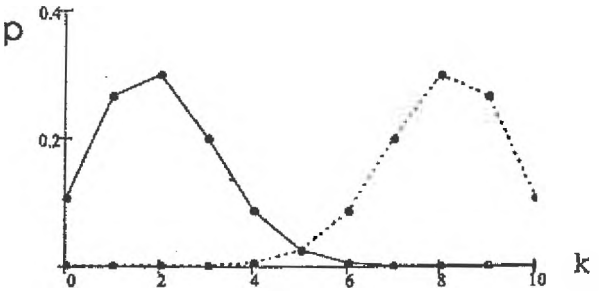


Рис. 7.1. — графік $P_{10}(k)$ для $p = 0,2$; $k_0 = 2$. ... графік $P_{10}(k)$ для $p = 0,8$; $k_0 = 8$

Теорема 7.2 (Локальна теорема Лапласа). *При великих n і не дуже близьких до нуля й одиниці значень p справедлива наближена рівність*

$$P_n(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x); \qquad (7.2)$$

$$\text{де} \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

У додатках на с. 245 подана таблиця F.1 значень функції $\varphi(x)$, а на рис. 7.2 зображений графік цієї функції.

Теорема 7.3 (Інтегральна теорема Лапласа). *При великих n і не дуже близьких до нуля й одиниці значень p справедлива наближена рівність*

$$p(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (7.3)$$

$$\text{де} \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Формули (7.2) та (7.3) можуть зводити складні обчислення біномних ймовірностей (7.1) до порівняно простих обчислень. Для того щоб похибка цих наближених рівностей була незначною, потрібно щоб добуток npq був більший 10.

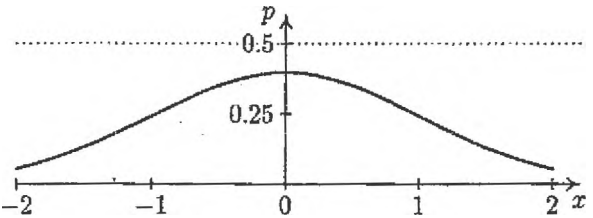


Рис. 7.2. Графік функції $\varphi(x)$

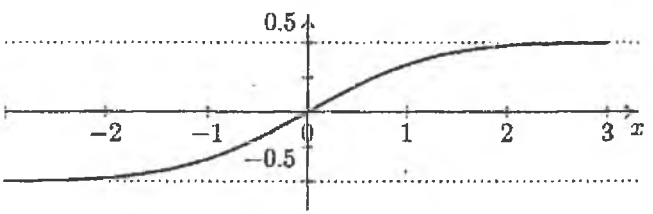


Рис. 7.3. Графік функції $\Phi(x)$

На с. 246 подана таблиця F.2 значень функції $\Phi(x)$. На рис. 7.3 зображений графік цієї функції.

Коли одна з величин p або q близька до нуля, то формулами (7.2) та (7.3) доцільніше не користуватися. Для цього випадку існує більш точна формула Пуассона.

Теорема 7.4 (Формула Пуассона). *При великих n і малих p справедлива наближена рівність*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{7.4}$$

де $\lambda = np$ – середнє число успіхів.

На рис. 7.4 зображений графік функції $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ для $\lambda = 2$.

Для того щоб похибка цієї наближеної рівності була незначною, n має бути не меншим кількох десятків, а добуток np лежати в межах від 1 до 10.

Звернемо увагу на одну властивість формули (7.4). Для обчислення певного числа успіхів необов'язково знати значення

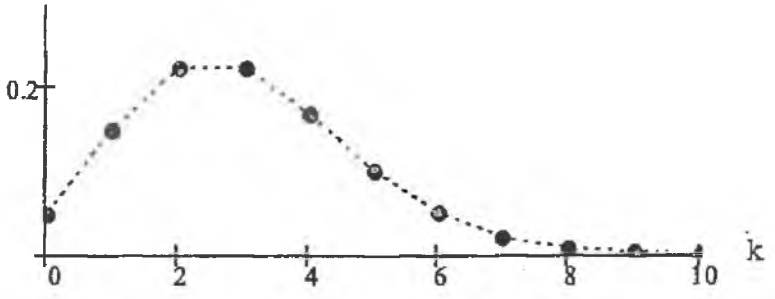


Рис. 7.4. Графік функції $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

n та p. Усе визначається числом $\lambda = np$, яке служить середнім числом успіхів.

Формула Пуассона застосовується для знаходження ймовірностей рідкісних подій. Приклади таких подій неважко назвати: народження близнюків, досягнення 100-літнього віку, аварія на міському транспорті, помилки та дефекти у підручниках і т.д.

7.2 Контрольні питання

1. Який зміст вкладається в поняття "серія незалежних випробувань"?
2. Що таке схема Бернуллі?
3. Як довести рівність $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$?
4. Як знайти найімовірніше число появ випадкової події у серії незалежних випробувань?
5. У яких межах може лежати найімовірніше число успіхів?
6. Чи однозначно визначається найімовірніше число успіхів?
7. Дайте практичне тлумачення числа np як середнього числа успіхів.
8. За якою формулою можна знайти ймовірність рідкісного явища?
9. За яких умов слід застосувати локальну, а за яких – інтегральну формулу Лапласа?
10. За яких умов слід застосовувати формулу Пуассона, а за яких – формули Лапласа?

7.3 Задачі розділу

7.1. Два рівносильних шахісти грають у шахи. Що більш ймовірно: а) виграти дві партії з чотирьох чи три партії із шести; б) одну партію з двох чи дві з чотирьох; в) виграти не менше двох партій з чотирьох чи не менше трьох партій з п'яти (нічиї не враховуються)?

Розв'язання. а) Грають рівносильні шахісти, тому ймовірність виграшу $p = 1/2$, а отже, ймовірність програшу q також дорівнює $1/2$. В усіх партіях ймовірність виграшу є сталою, не має значення, у якій послідовності вигравються партії. Це є підставою для застосування формули Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Обчислимо ймовірність того, що дві партії з чотирьох будуть виграні: $P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = 6/16 = 3/8$.

Обчислимо ймовірність того, що три партії із шести будуть виграні: $P_6(3) = C_6^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^3 = 5/16$.

$P_4(2) > P_6(3)$, отже, виграти дві партії з чотирьох більш ймовірно, ніж три із шести.

б) Обчислимо ймовірність того, що одна партія з двох буде виграна: $P_2(1) = C_2^1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1/2$.

Ймовірність того, що виграні дві партії з чотирьох, обчислена раніше – $P_4(2) = 3/8$.

$P_2(1) > P_4(2)$, отже, виграти одну партію з двох більш ймовірно, ніж дві з чотирьох.

в) Обчислимо ймовірність того, що виграно не менше двох партій з чотирьох: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 3/8 + C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5 + 0,5^4$ або $1 - (P_4(0) + P_4(1)) = 1 - (0,5^4 + C_4^1 \cdot 0,5 \cdot 0,5^3) = 11/16$.

Обчислимо ймовірність того, що виграно не менше трьох партій з п'яти: $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 + C_5^4 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5 + 0,5^4 = 1/2$.

$1/2 < 11/16$, отже, виграти не менше двох партій з чотирьох більш ймовірно, ніж виграти не менше трьох партій з п'яти.

7.2. Монету кидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що "тризуб"випаде: а) менше двох разів; б) не менше двох разів.

Відповідь. а) 3/16; б) 13/16.

7.3. Витрати електроенергії на протязі доби не перевищують установленої норми з ймовірністю $p = 3/4$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрати енергії не будуть перевищувати норми протягом 4 діб. *Відповідь.* 0,3.

7.4. У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) більше двох хлопчиків; в) не більше двох хлопчиків; г) не менше двох та не більше трьох хлопчиків. Ймовірність народження хлопчика прийняти рівною 0,51.
Відповідь. а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62.

7.5. Два баскетболісти незалежно один від одного виконують по 4 кидки м'яча у кошик. Ймовірності попадання баскетболістами при одному кидку дорівнюють відповідно 0,8 та 0,6. Знайти ймовірність того, що в обох баскетболістів буде однакова кількість попадань. *Відповідь.* 0,2517.

7.6. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.
Розв'язання. За умовою $n = 243$; $k = 70$; $p = 0,25$; $q = 0,75$. Зважаючи на те, що $n = 243$ – велике число, використаємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

$$\text{де} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Обчислимо значення аргумента x:

$$x = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{70 - 60,75}{6,75} = 1,73.$$

За таблицею F.1 (с. 245) знайдемо значення функції $\varphi(1,37) = 0,1561$. Остаточно маємо: $P_{243}(70) = 0,1561/6,75 = 0,0231$.

7.7. Ймовірність враження мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде вражена 75 разів. *Відповідь.* 0,04565.

7.8. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків. *Відповідь.* 0,0782.

7.9. Монета кинута $2N$ разів (N – велике число). Знайти ймовірність того, що "тризуб"випаде рівно N разів. *Відповідь.* $0,5642/\sqrt{N}$.

7.10. Взуттєвики вважають, що біля 30 відсотків жінок носять взуття 36-го розміру. З якою ймовірністю співробітники магазину можуть очікувати, що з 300 покупців 75 мають наміри придбати взуття саме 36-го розміру? *Відповідь.* 0,01.

7.11. Проведено 20 пострілів по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі 0,7. Обчислити: а) ймовірність того, що буде принаймні одне влучення; б) ймовірність того, що буде не більше двох влучень; в) найбільш імовірне число влучень.

7.12. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який дорівнює 0,2. Обчислити: а) найбільш імовірне число влучень і його ймовірність; б) ймовірність знищення об'єкту, якщо для знищення потрібно не менше 4 влучень. *Відповідь.* а) 2; 3; 0,25; б) 0,302.

7.13. Знайти ймовірність: а) появи принаймні однієї шістки при підкиданні 6 гральних кубиків; б) появи принаймні двох шісток при підкиданні 12 кубиків; в) появи принаймні трьох шісток при підкиданні 18 кубиків. *Відповідь.* а) 0,665; б) 0,618.

7.14. Підручник виданий тиражем у 100000 примірників. Ймовірність того, що підручник брошурований невірно, дорівнює 0,00001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно п'ять бракованих книжок. *Відповідь.* 0,0375.

7.15. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елементу на протязі часу t дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час t відмовлять рівно три елементи. *Відповідь.* 0,18.

Розділ 8

Випадкові величини

8.1 Дискретна випадкова величина

Математичне очікування дискретної випадкової величини. Припустимо, що закон розподілу дискретної випадкової величини x заданий таблицею

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Число

$$m = M[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \tag{8.1}$$

називається математичним очікуванням дискретної випадкової величини x.

Властивості математичного очікування

1. Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування:

$$M[cx] = cM[x]. \tag{8.2}$$

2. Математичне очікування суми довільних випадкових величин дорівнює сумі їх математичних очікувань:

$$M[x + y] = M[x] + M[y]. \tag{8.3}$$

3. Математичне очікування відхилення випадкової величини від її математичного очікування дорівнює нулеві:

$$M[x - M[x]] = 0. \tag{8.4}$$

4. Якщо випадкові величини незалежні, то математичне очікування добутку дорівнює добутку їх математичних очікувань:

$$M[xy] = M[x]\,M[y]. \tag{8.5}$$

Дисперсія випадкової величини. Математичне очікування квадрата відхилення називається дисперсією:

$$d = D[x] = M[(x - m)^2]. \tag{8.6}$$

Середнє квадратичне відхилення. Корінь квадратний з дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням:

$$\sigma = \sqrt{d}. \tag{8.7}$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини c дорівнює нулю:

$$D[c] = 0.$$

2. При множенні випадкової величини x на стале число c дисперсія множиться на c^2:

$$D[cx] = c^2\,D[x]. \tag{8.8}$$

3. Дисперсію зручно обчислювати за формулою

$$D[x] = M[x^2] - M^2[x]. \tag{8.9}$$

4. Якщо випадкові величини x та y незалежні, то дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій:

$$D[x + y] = D[x] + D[y]. \tag{8.10}$$

5. Для довільних величин x та y дисперсія суми дорівнює сумі їх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[x+y] = D[x] + D[y] + 2K[x,y]. \tag{8.11}$$

6. Кореляційний момент визначається формулою

$$K[x,y] = M[(x - M[x])(y - M[y])]. \tag{8.12}$$

Основна властивість кореляційного моменту – якщо величини x та y незалежні, то їх кореляційний момент дорівнює нулю.

7. Якщо випадкові величини x та y незалежні, то дисперсія їх добутку визначається формулою

$$D[xy] = D[x]D[y] + M^2[x]D[y] + D[x]M^2[y]. \tag{8.13}$$

Початкові моменти. Початкові моменти k-го порядку визначаються такими рівностями

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \tag{8.14}$$

Центральні моменти. Центральні моменти k-го порядку визначаються формулою

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[x])^k p_i. \tag{8.15}$$

Бачимо, що початковий момент першого порядку служить математичним очікуванням, а центральний момент 2-го порядку – дисперсією дискретної випадкової величини x.

Коефіцієнт асиметрії. Коефіцієнт асиметрії це нормований центральний момент третього порядку, що служить характеристикою зміщеності (зсуву) вершини графіка щільності розподілу:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{8.16}$$

Ексцес. Ексцес є нормований центральний момент четвертого порядку, який служить характеристикою гостроверхості (чи плосковерхості) вершини графіка щільності розподілу:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{8.17}$$

8.2 Неперервна випадкова величина

Математичнене очікування неперервної випадкової величини. Вважатимемо, що відома щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини x. Число m (при умові, що воно існує)

$$m = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{8.18}$$

називається математичним очікуванням неперервної випадкової величини x.

Дисперсія неперервної випадкової величини. Ця велична визначається як математичне очікування квадрата відхилення:

$$d = D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx. \tag{8.19}$$

Зазначимо, що означення та основні властивості дискретної випадкової величини легко переносяться і на неперервні величини. Покажемо це на прикладі перенесення формули (8.6):

$$d = D[x] = M[x^2] - M^2[x] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2. \tag{8.20}$$

Початкові та центральні моменти k-го порядку обчислюються за формулами

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k f(x)dx, \tag{8.21}$$

які служать аналогами відповідних формул для дискретного випадку (див. формули 8.15 та 8.16 на с.80).

Якщо відома функція розподілу $F(x)$, то ймовірність попадання значень випадкової величини x у проміжок (a,b) визначається формулою

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a). \tag{8.22}$$

Якщо ж відома щільність розподілу $f(x)$, то ймовірність попадання значень випадкової величини x у проміжок (a,b) дорівнюватиме

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{8.23}$$

8.3 Контрольні питання

1. Що називається випадковою величиною?
2. Які випадкові величини називаються дискретними, а які – неперервними?
3. Якими законами розподілу можна задати дискретну випадкову величину, а якими – неперервну?
4. Які властивості щільності функції розподілу?
5. Чи може щільность функції розподілу приймати значення більше одиниці?
6. Що таке функція розподілу випадкової величини? Які вона має властивості?
7. Чи може функція розподілу бути спадною на деяких проміжках?
8. Чи може функція розподілу приймати значення більше одиниці?
9. Який зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу ймовірностей?
10. Як побудувати многокутник розподілу?
11. Як побудувати функцію розподілу для дискретного випадку?
12. Що таке гістограма? Як вона будується?
13. Як знайти ймовірність попадання значення випадкової величини на заданий проміжок за допомогою функції розподілу?
14. Як знайти ймовірність попадання значення випадкової величини на заданий проміжок за допомогою щільності функції розподілу?

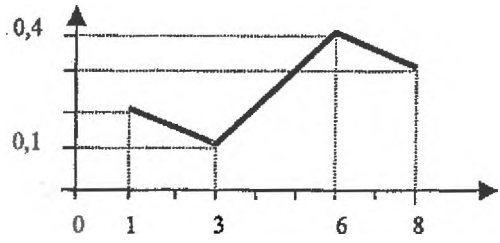


Рис. 8.1. Многокутник розподілу

15. Які числові характеристики випадкової величини Ви знаєте? Як вони обчислюються?
16. Що таке щільність розподілу ймовірностей випадкової величини? Які вона має властивості?

8.4 Задачі розділу

8.1. Дискретна випадкова величина x задана законом розподілу

x	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Побудувати многокутник розподілу та графік функції розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Розв'язання. Побудуємо прямокутну систему координат, причому по осі абсцис будемо відкладати можливі значення x_k, а по осі ординат – відповідні ймовірності p_k. Побудуємо точки $M_1(1;0,2)$, $M_2(3;0,1)$, $M_3(6;0,4)$ та $M_4(8;0,3)$. З'єднуючи ці точки відрізками прямих, отримаємо шуканий многокутник розподілу (рис.8.1). Значення функції розподілу в точці x обчислюються за формулою

$$F(x) = \sum_{(k|x_k<x)} p_k.$$

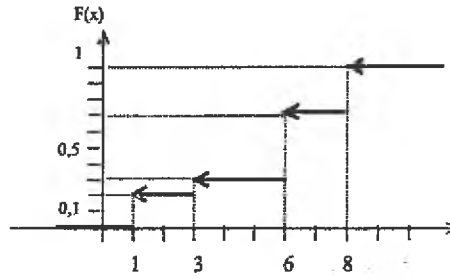


Рис. 8.2. Графік функції розподілу

Скориставшись цією формулою, неважко переконатись, що функція розподілу даної випадкової величини та її графік (рис. 8.2) мають такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ 0.2, & \text{якщо } 1 < x \le 3; \\ 0.3, & \text{якщо } 3 < x \le 6; \\ 0.7, & \text{якщо } 6 < x \le 8; \\ 1, & \text{якщо } x > 8. \end{cases}$$

Математичне сподівання дискретної випадкової величини x дорівнює сумі попарних добутків усіх можливих значень x_k та відповідних ймовірностей p_k :

$$M(x) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 = 5,3.$$

Підставивши у формулу

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x),$$

конкретні значення, обчислимо дисперсію випадкової величини

$$M(x^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 + 6^2 \cdot 0,4 + 8^2 \cdot 0,3 = 34,7.$$
$$D(x) = 34,7 - 5,3^2 = 6,61.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D} = 2,571$.

8.2. Дискретна випадкова величина x задана законом розподілу

a)

x	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

b)

x	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Побудувати многокутник розподілу та графік функції розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Відповідь. a) $m = 4,4$; $d = 2,84$; $\sigma = 1,685$.

8.3. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елементу в одному досліді дорівнює 0.1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді. Побудувати многокутник розподілу.

Відповідь.

x	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

8.4. У партії 10 нестандартних деталей. Навмання відібрано чотири деталі. Написати біномний закон розподілу дискретної випадкової величини x – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних та побудувати многокутник розподілу.

Відповідь.

x	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

8.5. Написати біномний закон розподілу дискретної випадкової величини x – числа випадань "тризуба"при двох киданнях монети.

Відповідь.

x	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

8.6. У партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних.

Відповідь.

x	0	1	2
p	1/45	16/45	28/45

8.7. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрільцеві видають патрони до першого промаху. Потрібно: а) скласти закон розподілу дискретної випадкової величини x – числа патронів, що видано стрільцеві; б) знайти найбільш ймовірну кількість виданих стрільцеві патронів.

Відповідь.

x	1	2	3	...	k	...
p	0,2	0,16	0,128	...	$0,2 \cdot 0,8^{k-1}$	...

8.8. Побудувати многокутник розподілу та графік функції розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини x, що задана законом розподілу

a)

x	-4	6	10
p	0.2	0.3	0.5

b)

x	0.21	0.54	0.61
p	0.1	0.5	0.4

Відповідь. a) m=6; d=27; $\sigma = 5,2$.

8.9. Дискретна випадкова величина x приймає три можливі значення: $x_1 = 4$ із ймовірністю $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ із ймовірністю $p_2 = 0,3$ та x_3 з ймовірністю p_3. Знайти x_3 та p_3, якщо $M(x) = 8$. Побудувати многокутник розподілу та графік функції розподілу.

Відповідь. $x_3 = 21$; $p_3 = 0,2$.

8.10. Двічі кидають монету. Нехай ξ – число поява герба. Знайти розподіл випадкової величини ξ, математичне сподівання $M(\xi)$ та дисперсію $D(\xi)$.

Відповідь. m=1; d=0,5.

8.11. Двічі підкидають гральний кубик. Нехай ξ – сума очок, які випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ і $M(\xi)$.

8.12. Монету підкидають до того часу, поки випаде герб. Нехай ξ – число зроблених підкидань. Обчислити: а) розподіл випадкової величини ξ; б) $p\{\xi > 1\}$, $p\{\xi \le n\}$.

Відповідь. $p(\xi > 1) = \sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

8.13. Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах – незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі – p. Нехай ξ – число зроблених пострілів. Обчислити розподіл випадкової величини ξ.

8.14. Нехай ξ – випадкова величина, яка набуває значень 0, ± 1, ..., $\pm n$ з ймовірностями

$$P\{\xi = i\} = \frac{1}{2n+1}.$$

Обчислити $M(\xi)$, $D(\xi)$.

Відповідь. $m = 0$; $d = n(n+1)/3$.

8.15. Випадкова величина x задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2; \\ 1/2 + (1/\pi)\arcsin(x/2), & \text{якщо } -2 < x \le 2; \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M[x]$, дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що величина x прийме значення з інтервалу $(-1;1)$.

Розв'язання. Щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ знайдемо як похідну від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2; \\ \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & \text{якщо } -2 < x \le 2; \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Математичне очікування $M[x]$ виразиться інтегралом

$$m = M[x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-2}^{+2} \frac{xdx}{\pi\sqrt{4-x^2}},$$

який дорівнює нулеві як інтеграл від непарної функції у симетричних межах.

Дисперсію випадкової величини x знайдемо за формулою (8.19)

$$d = D[x] = M(x^2) - M^2(x) = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2dx}{\pi\sqrt{4-x^2}} - 0^2 = 1.$$

За формулою (8.22) ймовірність попадання значення випадкової величини на проміжок $(a;b)$ дорівнює $p(a < x < b) = F(b) - F(a)$. Отже, $p(-1 < x < 1) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x/2)|_{-1}^{+1} = 1/3$.

8.16. Функція розподілу неперервної випадкової величини (часу безвідмовної роботи деякого пристрою) $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{T}}$ $(x \ge 0)$. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та ймовірність безвідмовної роботи пристрою на протязі часу $x \ge T$.

Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{T}e^{-x/T}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad m=\frac{1}{T};\ d=\frac{1}{T^2};\ p(x\geq T)=\frac{1}{e}.$$

8.17. Випадкова величина x задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\leq 0;\\ x^2, & \text{якщо } 0<x\leq 1;\\ 1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M[x]$, дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина x три рази прийме значення, яке належить інтервалу $(0,25;0,75)$.
Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ 2x, & 0<x\leq 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}\quad m=\frac{2}{3};\ d=\frac{1}{18};\ p=\frac{1}{4}.$$

8.18. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини x

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\leq 0;\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\leq \pi/2;\\ 1, & \text{якщо } x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M[x]$ та дисперсію $D[x]$.
Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \cos x, & 0<x\leq \pi/2;\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}\quad m=\frac{\pi}{2}-1;\ d=\pi-3.$$

8.19. Неперервна випадкова величина x задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}ae^{-ax}, & \text{якщо } x>0\quad (a>0);\\ 0, & \text{якщо } x\leq 0.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M[x]$ та дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що величина x прийме значення, яке належить проміжку $(1;2)$.

Розв'язання. За відомою щільністю $f(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини x її функцію розподілу $F(x)$ слід шукати за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Конкретно, для даної задачі ця функція матиме вигляд

$$F(x) = \int_{0}^{x} ae^{-ax}dx = 1 - e^{-ax},$$

якщо $x > 0$, та $F(x) = 0$, якщо $x \leq 0$.

Обчислимо математичне сподівання

$$m = M[x] = \int_{0}^{+\infty} xae^{-ax}dx = 1/a.$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини x

$$d = D[x] = M[x^2] - M^2[x] = \int_{0}^{+\infty} x^2 ae^{-ax}dx - 1/a^2 =$$

$$= 2/a^2 - 1/a^2 = 1/a^2.$$

8.20. Неперервна випадкова величина x задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \cos x, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi/2; \\ 0, & \text{якщо } x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M[x]$ та дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що величина x прийме значення, яке належить проміжку $(-\pi/4;\pi/4)$.

Відповідь.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

$$m=\frac{\pi}{2}-1;\ d=\pi-3;\ p(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8.21. Неперервна випадкова величина x задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\le \pi/2;\\ 0, & \text{якщо } x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M[x]$ та дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що величина x прийме значення, яке належить проміжку $(-\pi;\pi/4)$.

Відповідь.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

$$m=1;\ d=\pi-3;\ p(-\pi<x<\frac{\pi}{4})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8.22. Щільність розподілу випадкової величини x задана рівністю $f(x)=C/(e^x+e^{-x})$ (закон гіперболічного секанса). Знайти сталу C, функцію розподілу, а також ймовірність того, що у двох незалежних спостереженнях величина x прийме значення менші за одиницю.

Відповідь. $C=\frac{2}{\pi}$; $F(x)=\frac{2}{\pi}arctge^x$; $p(x<1)=F(1)=\frac{2}{\pi}arctge=0,7756$.

8.23. Випадкова величина x має щільність розподілу ймовірності

$$f(x)=\begin{cases}1,5x^2, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ 1,5(2-x)^2, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ 0, & \text{якщо } x\le 0 \text{або} x>2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M[x]$ та дисперсію $D[x]$, а також ймовірність того, що величина x прийме значення, яке належить проміжку $(0,5;1,5)$.

Відповідь.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3/2, & 0<x\le 1;\\ 1+(x-2)^3/2, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$$m=1;\ d=0,1;\ p(0,5<x<1,5)=\frac{7}{8}.$$

8.24. Стержень довжиною l навмання розламали на дві частини. Знайти функцію розподілу довжини меншої частини.

8.25. Дві особи домовились про зустріч на проміжку часу [0, T]. Нехай γ – час, що доведеться чекати одній з них до зустрічі. Знайти функцію розподілу γ і обчислити $M(\gamma)$.

8.26. Купони в коробках перенумеровані цифрами від 1 до n. Для того, щоб виграти, треба набрати повний комплект купонів із різними номерами. З кожної коробки беруть один купон. Знайти математичне очікування числа коробок, які треба випробувати, щоб одержати повний комплект.

Відповідь. $n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1)$. Використати формулу для математичного очікування геометричного розподілу.

8.27. Берегова артилерія помічає ворожий крейсер на віддалі 1 км від берега і розпочинає по ньому стріляти, роблячи щохвилини один постріл. Після першого пострілу крейсер починає втікати із швидкістю 60 км/год. Нехай ймовірність влучення в крейсер обернено пропорційна квадрату віддалі від берегової гармати, а саме: якщо крейсер знаходиться на віддалі x, то ймовірність влучення дорівнює $0,75x^{-2}$. Ймовірність того, що при n влученнях крейсер не затоне, дорівнює 4^{-n}. Обчислити ймовірність того, що крейсеру вдасться втекти.

Розділ 9

Функція випадкової величини

9.1 Короткі теоретичні відомості

Знаходження розподілу функції $f(\xi)$. Нехай випадкова величина ξ задана таким законом розподілу

ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Для побудови таблиці розподілу функції $f(\xi)$ спочатку будують допоміжну таблицю

$f(\xi)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Якщо всі числа $f(x_k)$ різні, то ця таблиця і буде шуканим розподілом функції $f(\xi)$. Якщо ж серед чисел $f(x_k)$ трапляються рівні, то кожній групі рівних значень відводять один стовпчик, додаючи при цьому відповідні ймовірності.

Приклад. Розглянемо випадкову величину x

x	-1	0	1
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Потрібно знайти розподіл для x^2 та x^3.

Очевидно, що x^2 та x^3 матимуть відповідно такі розподіли

x^2	0	1
p	1/3	2/3

x^3	-1	0	1
p	1/3	1/3	1/3

Приклад. Знайдемо функцію $\sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ випадкової величини ξ, яка задана таблицею

ξ	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

Розв'язання. Оскільки $\sin(\frac{\pi}{2}\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при парному } n; \\ 1, & \text{при } n = 4k+1; \\ -1, & \text{при } n = 4k+3, \end{cases}$

то розподіл для функції $\sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ матиме вид

0	1	-1
p_0	p_1	p_{-1}

де ймовірності обчислюються як суми нескінченно спадних геометричних прогресій:

$$p_0 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{4(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{3};$$

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{2(1-\frac{1}{16})} = \frac{8}{15};$$

$$p_{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots = \frac{1}{8(1-\frac{1}{16})} = \frac{2}{15}.$$

Нехай неперервна випадкова величина ξ має щільність розподілу $\varphi(x)$. Розглянемо питання як знайти щільність розподілу для функції $f(\xi)$. Припустимо, що на інтервалі можливих значень величини ξ функція $y = f(x)$ зростає й має неперервну похідну. Тоді існує обернена функція $x = g(y)$, яка також зростає і має неперервну похідну. При цих умовах щільність розподілу $\mu(y)$ для функції $\eta = f(\xi)$ виразиться формулою

$$\mu(y) = \varphi(g(y))\frac{dg(y)}{dy}. \tag{9.1}$$

Якщо ж функція $y = f(x)$ буде спадною, то у формулі слід поставити знак мінус:

$$\mu(y) = -\varphi(g(y))\frac{dg(y)}{dy}. \tag{9.2}$$

Формули 9.1 та 9.2 можна об'єднати в одну:

$$\mu(y) = \varphi(g(y))\left|\frac{dg(y)}{dy}\right|.$$

Приклад. Випадкова величина x має щільність розподілу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Знайти щільність розподілу для x^3.

Для функції $y = x^3$ існує однозначна обернена функція $x = g(y) = \sqrt[3]{y}$. Скориставшись формулою (9.1) будемо мати

$$\mu(y) = \varphi(g(y))\frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.$$

Приклади знаходження розподілу для немонотонної функції $y = f(x)$ розглянуті в наступних задачах цього розділу.

Знаходження математичного очікування та дисперсії функції. Нехай ξ – дискретна випадкова величина, яка своє значення x_k приймає з імовірністю p_k. Математичне очікування для функції $f(\xi)$ виразиться формулою

$$m = M[f(\xi)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)p_k. \tag{9.3}$$

З а у в а ж е н н я. Для знаходження математичного очікування функції $f(\xi)$ достатньо знати закон розподілу аргументу ξ. Закон розподілу функції $f(\xi)$ у даному випадку не використовується.

Для неперервного випадку буде мати місце аналогічна формула

$$m = M[f(\xi)] = \int f(x)\varphi(x)dx, \tag{9.4}$$

де $\varphi(x)$ – щільність розподілу величини ξ.

Дисперсію зручно обчислювати, користуючись співвідношенням

$$d = D[f(\xi)] = M[f^2(\xi)] - M^2[f(\xi)]. \tag{9.5}$$

9.2 Контрольні питання

1. Як розуміти функцію випадкового аргумента?
2. Як знайти закон розподілу для функції, аргументом якої є дискретна випадкова величина?
3. Як знайти закон розподілу для функції, аргументом якої є неперервна випадкова величина?
4. Чому дорівнює математичне очікування функції дискретного аргумента?
5. Чому дорівнює математичне очікування функції неперервного аргумента?
6. Як знайти дисперсію для функції випадкового аргумента?
7. Чи буде лінійна функція нормально розподіленою, якщо її аргумент нормально розподілений?
8. Чи буде квадратна функція нормально розподіленою, якщо її аргумент нормально розподілений?
9. Як розуміти функцію кількох випадкових аргументів?
10. Як знайти закон розподілу для суми двох дискретних випадкових величин?
11. Як знайти закон розподілу для суми двох неперервних випадкових величин?

9.3 Задачі розділу

9.1. Випадкова величина ξ має розподіл

ξ	-1	0	1	2
p	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,4$

Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\eta = 2^{\xi}$.

Розв'язання. Для знаходження математичного сподівання і дисперсії скористаємося формулами (9.3) та (9.5).

$$m = M[2^\xi] = 2^{-1} \cdot 0,2 + 2^0 \cdot 0,1 + 2^1 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,4.$$

$$d = D[2^\xi] = M[(2^\xi)^2] - M^2[2^\xi] =$$
$$= 2^{-2} \cdot 0,2 + 2^0 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,3 + 2^4 \cdot 0,4 - 2,4^2 =$$
$$= 7,75 - 5,76 = 1,99.$$

Розподіл для функції $\eta = 2^\xi$ буде такий

η	0,5	1	2	4
p	0,2	0,1	0,3	0,4

9.2. Нехай ξ – випадкова величина має розподіл

ξ	1	-1
p	0,5	0,5

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \sin \xi\pi$.

Відповідь. $\eta = 0$; $p = 1$.

9.3. Нехай ξ – випадкова величина, яка рівномірно розподілена на відрізку $[-1, 1]$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = |\xi|$.

Відповідь.

$$G(x) = p(|\xi| < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

9.4. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$. Знайти розподіли випадкових величин: а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = \frac{1}{\xi}$; в) $\eta = e^\xi$.

Відповідь.

$$G(x) = p(\xi^2 < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$G(x) = p(\frac{1}{\xi} < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$G(x) = p(e^\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \ln x, & 1 < x \le e; \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

9.5. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \operatorname{arctg} \xi$.
Відповідь.

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9.6. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;2]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi - 1|$.
Відповідь.

$$G(x) = p(|\xi - 1| < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

9.7. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1,3]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$.
Розв'язання. Запишемо щільність $\varphi(x)$ і функцію розподілу $\Phi(x)$ для ξ відповідно:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{для} \quad -1 \le x \le 3; \\ 0, & \text{для} \quad x \notin -1 \le x \le 3. \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x \le -1; \\ \frac{x+1}{4}, & \text{для} \quad -1 < x \le 3; \\ 1, & \text{для} \quad x > 3. \end{cases}$$

Графіки на рис. 9.1 дають уявлення про поведінку цих функцій.

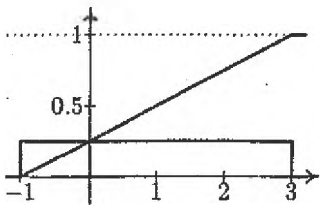


Рис. 9.1. Щільність та функція рівномірного розподілу

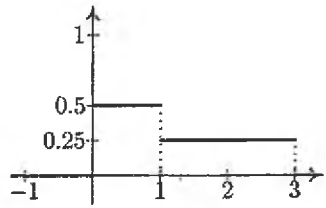


Рис. 9.2. Щільність модуля рівномірного розподілу

Для $x > 0$, будемо мати:

$$p(|\xi| < x) = p(-x < \xi < x) = p((-x < \xi \le 0) \cup (0 < \xi < x)) =$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-x) + \Phi(x) - \Phi(0) = \Phi(x) - \Phi(-x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{x+1}{4}, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} - \begin{cases} \frac{-x+1}{4}, & -1 < -x < 0; \\ 0, & -x \le -1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{x+1}{4}, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} - \begin{cases} \frac{-x+1}{4}, & 0 < x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 1; \\ \frac{x+1}{4}, & 1 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Відповідь. Функція розподілу $F(x)$ та щільність розподілу $f(x)$ для випадкової величини $|\xi|$ запишуться так

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 1; \\ \frac{x+1}{4}, & 1 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

На рис. 9.2 поданий графік функції щільності для $|\xi|$. Бачимо, що

модуль рівномірно розподіленої величини вже не буде рівномірно розподіленим.

9.8. Випадкова величина ξ має розподіл Коші з щільністю $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Знайти функцію розподілу й щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi}$

Відповідь.

$$a)\ G(x) = p(\frac{1}{\xi} < x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x > 0; \\ -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

9.9. Діаметр круга – випадкова величина ξ, яка рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$. Знайти функцію розподілу площі круга.

9.10. Нехай O – початок координат, P – випадкова точка на осі Ox, а Q – точка з координатами $(0, 1)$. Відомо, що кут OQP рівномірно розподілений на відрізку $[-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}]$. Знайти функцію розподілу й щільність розподілу для абсциси точки P.

Відповідь. $OQP = y$, $\eta = OP = \operatorname{tg} y$, $F_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$, $p_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

9.11. Випадкова величина U має стандартизований нормальний розподіл. Знайти розподіл величини U^2.

Розв'язання. Для $x > 0$ маємо:

$$p(U^2 < x) = p(-\sqrt{x} < U < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{r}{2}}\frac{dr}{2\sqrt{r}}.$$

Отже, для випадкової величини $U^2 = \chi^2(1)$ щільність розподілу матиме вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

Розділ 10

Сумісний розподіл

10.1 Короткі теоретичні відомості

Дві випадкові величини x та y називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї величини не залежить від того, яке значення прийняла інша величина.

Закон розподілу системи (x, y) двох випадкових величин x та y можна задати у вигляді такої таблиці

(x,y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Записи в таблиці означають, що випадкова величина (x, y) приймає значення (x_i, y_j) з ймовірністю p_{ij}.

Властивості закону розподілу

1. $p_{ij} \geq 0$ для всіх i та j.
2. $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$.

За відомим сумісним розподілом можна знайти розподіли для кожної з величин x та y окремо. Для цього введемо позначення.

Суму ймовірностей і-го рядка позначимо як $p_{i*} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, а суму ймовірностей j-го стовпчика – як $p_{*j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$. Тоді закон розподілу для кожної з величин x та y можна подати відповідно таблицею

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_{1*}	p_{2*}	$\cdots$	p_{n*}

y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
p	p_{*1}	p_{*2}	$\cdots$	p_{*n}

Знаючи закони розподілу, для величин x та y можна знаходити потрібні параметри: математичне очікування, дисперсію і т.д.

Для незалежності випадкових величин x та y необхідно та достатньо виконання умови

$$p_{ij} = p_{i*} \times p_{*j} \tag{10.1}$$

для всіх і та j.

Закон розподілу для системи (ξ, η) двох неперервних випадкових величин ξ та η, тобто ймовірність того, що значення (ξ, η) буде належати області D, можна задати за допомогою функції $f(x, y)$ – щільності розподілу

$$p(\xi, \eta) \in D = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{10.2}$$

Щільністю розподілу може бути будь-яка невід'ємна функція $f(x, y)$, для якої справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1. \tag{10.3}$$

За відомою щільністю $f(x, y)$ сумісного розподілу (ξ, η) можна знайти щільності для кожної величини ξ та η окремо:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \quad \text{(щільність для } \xi\text{)}; \tag{10.4}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \quad \text{(щільність для } \eta\text{)}. \tag{10.5}$$

Знаючи щільності розподілу, можна для величин ξ та η знаходити потрібні параметри: математичне очікування, дисперсію і т.д.

Для незалежності випадкових величин ξ та η необхідно й достатньо, щоб щільність системи (ξ, η) сумісного розподілу дорівнювала добутку щільностей складових величин:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \tag{10.6}$$

Кореляційний момент. Нехай m_ξ та m_η означають математичне очікування для величин ξ та η відповідно. Кореляційним моментом $\mu_{\xi\eta}$ випадкових величин ξ та η називають математичне очікування добутку їх відхилень:

$$\mu_{\xi\eta} = M[(\xi - m_\xi) \cdot (\eta - m_\eta)]. \tag{10.7}$$

Для обчислення кореляційних моментів для дискретного та неперервного випадків користуються відповідно такими формулами:

$$\mu_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_\xi)(y_j - m_\eta) p_{ij}\,; \tag{10.8}$$

$$\mu_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)(x - m_\xi)(y - m_\eta)\, dx dy. \tag{10.9}$$

Коефіцієнтом кореляції $r_{\xi\eta}$ називається відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень:

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{10.10}$$

Якщо величини ξ та η незалежні, то їх кореляційний момент дорівнює нулеві.

Дві величини ξ та η називаються корельованими, якщо їх кореляційний момент не дорівнює нулеві.

Дві величини ξ та η називаються некорельованими, якщо їх кореляційний момент дорівнює нулеві.

Корельовані величини – залежні. Обернене твердження невірне. Можна навести приклади залежних величин, для яких кореляційний момент дорівнює нулеві.

Якщо коефіцієнт кореляції дорівнює ± 1, то між ξ та η існує лінійна залежність.

Абсолютна величина кореляційного моменту не перевищує добутку їх середніх квадратичних відхилень:

$$|\mu_{\xi\eta}| \leq \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta. \tag{10.11}$$

Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці:

$$|r_{\xi\eta}| \leq 1. \tag{10.12}$$

Кореляційний момент можна знаходити за такою формулою

$$\mu_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi] \cdot M[\eta]. \tag{10.13}$$

В цій формулі $M[\xi\eta] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$ для дискретного випадку і $M[\xi\eta] = \iint xyf(x,y)dxdy$ для неперервного випадку.

Приклад. Для сумісного розподілу системи (x, y), заданої таблицею

(x,y)	0	0,5	1
0	1/6	1/6	1/6
0,5	1/6	1/6	0
1	1/6	0	0

знайти коефіцієнт кореляції.

Розв'язання. Для кожної з величин x та y побудуємо таблиці розподілу

x	0	0,5	1
p	1/2	1/3	1/6

y	0	0,5	1
p	1/2	1/3	1/6

Обчислимо математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для кожної величини x, y. Оскільки

розподіли цих величин однакові, то відповідні параметри для величин x та y будуть рівні.

$$m_x = m_y = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$d_x = d_y = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}5^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

За формулою (10.8) знайдемо кореляційний момент

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)\sum_{j=1}^{3}\left(y_i - \frac{1}{3}\right)p_{ij} =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]\frac{1}{6} +$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right]\frac{1}{6} +$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{2}{9}\right) = -\frac{5}{72}.$$

Скориставшись формулою (10.10), знайдемо коефіцієнт кореляції

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = -\frac{5}{72} \div \frac{5}{36} = -\frac{1}{2}.$$

10.2 Контрольні питання

1. Розкрийте поняття незалежності випадкових величин.
2. Як можна задати закон розподілу системи двох випадкових величин?
3. Назвіть властивості закону розподілу системи випадкових величин.
4. Як за відомим законом розподілу системи (x, y) знайти розподіли для x та y?
5. Зформулюйте для дискретного випадку критерій незалежності випадкових величин.

6. Зформулюйте для неперервного випадку критерій незалежності випадкових величин.
7. Що називається кореляційним моментом випадкових величин?
8. Які властивості має кореляційний момент?
9. Як за кореляційним моментом знайти коефіцієнт кореляції?
10. Які випадкові величини називаються корельованими, а які — некорельованими?
11. Які основні властивості коефіцієнта кореляції?
12. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції для лінійно залежних величин?
13. Яка залежність між випадковими величинами, якщо коефіцієнт кореляції дорівнює ± 1?

10.3 Задачі розділу

10.1. Підкидають два гральних кубики. Описати простір елементарних подій. Нехай ξ – число появ шістки на першому кубику, а η – число появ шістки на другому кубику. Знайти сумісний розподіл для ξ і η. Довести, що величини ξ і η незалежні.
Відповідь. $p(\xi = 0; \eta = 0) = 25/36$; $p(\xi = 0; \eta = 1) = 5/36$; $p(\xi = 1; \eta = 0) = 5/36$; $p(\xi = 1; \eta = 1) = 1/36$.

10.2. Підкидають два гральних кубики. Описати простір елементарних подій. Нехай ξ – число очок на першому кубику, η – число очок на другому кубику. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Довести, що величини ξ і η незалежні.
Відповідь. $p(\xi = i; \eta = j) = 1/36$.

10.3. Підкидають два гральних кубики. Нехай ξ – число очок на першому кубику, а η – максимальне з двох очок. а) Знайти сумісний розподіл ξ та η; б) обчислити $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$ та коваріацію (кореляційний момент) ξ і η.
Розв'язання. Спочатку побудуємо окремо закони розподілу для

кожної з величин ξ та η

$$p(\xi = k) = 1/6 (k = 1; 2; 3; 4; 5; 6);$$
$$p(\eta = 1) = p\{(1;1)\} = 1/36;$$
$$p(\eta = 2) = p\{(1;2), (2;1), (2;2)\} = 3/36;$$
$$p(\eta = 3) = p\{(1;3), (2;3), (3;3), (3;1), (3;2)\} = 5/36;$$
$$p(\eta = 4) = p\{(1;4), (2;4), (3;4), (4;4), (4;1), (4;2), (4;3)\} = 7/36;$$
$$p(\eta = 5) = p\{(1;5), (2;5), \ldots, (5;4)\} = 9/36;$$
$$p(\eta = 6) = p\{(1;6), (2;6), \ldots, (6;5)\} = 11/36.$$

Сумісний розподіл для цих величин буде таким

$(\xi;\eta)$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	0	0	0	0	0
2	1/36	2/36	0	0	0	0
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36

Величини ξ та η залежні, оскільки (див. формулу (10.1))

$$p(\xi = 2; \eta = 2) = \frac{1}{18} \neq p(\xi = 2) \cdot p(\eta = 2) = \frac{1}{72}.$$

Скориставшись формулами (8.1), (8.9) та (8.8), обчислимо математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величин ξ та η:

$$m_1 = M[\xi] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2};$$
$$M[\xi^2] = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6};$$
$$d_1 = D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{35}{12};$$
$$m_2 = M[\eta] = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36};$$

$$M[\eta^2] = \frac{1+12+45+112+225+396}{36} = \frac{791}{36};$$

$$d_2 = D[\eta] = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \approx 1,97.$$

Складемо таблицю розподілу для добутку $\xi\eta$

$\xi\eta$	1	2	3	4	5	6	8	9	10
p	1/36	1/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36

$\xi\eta$	12	15	16	18	20	24	25	30	36
p	2/36	1/36	4/36	1/36	1/36	1/36	5/36	1/36	6/36

Обчислимо математичне очікування для $\xi\eta$

$$M[\xi\eta] = \frac{616}{36} = \frac{154}{9}.$$

Кореляційний момент знайдемо за формулою (10.13)

$$C(\xi;\eta) = M[\xi\eta] - m_1 m_2 = \frac{154}{9} - \frac{7}{2}\cdot\frac{161}{36} = \frac{105}{72}.$$

10.4. Іван та Петро навмання виймають по одній кулі з урни, в якій знаходяться 5 білих, 4 чорних та дві сірих кулі. Вони по черзі виймають кулі з урни без повертання. Іван виймає першим. Нехай ξ – число білих куль в Івана, а η – число чорних куль у Петра. Знайти сумісний розподіл цих величин.

Розв'язання. Наслідком досліду буде розміщення складу (5, 4, 2), в якому елемент Б (біла куля) зустрічається 5 раз, елемент Ч (чорна куля) зустрічається 4 рази, а елемент С (сіра куля) зустрічається 2 рази. Число таких розміщень дорівнює

$$A(5;4;2) = \frac{(5+4+2)!}{5!4!2!} = 6930.$$

Підрахуємо для прикладу ймовірність суми всіх випадків, коли Іван вийняв 2 білі кулі, а Петро – 2 чорні. Нижче схематично зображено один із таких випадків.

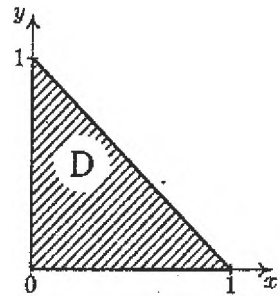


Рис. 10.1. Геометрична ілюстрація області D

Іван	Петро	І	П	І	П	І	П	І	П	І
Б	Ч	Б	Ч	Ч	Б	С	Б	С	Б	Ч

$$p(\xi=2;\eta=2)=\frac{A(2;2;2)A(3;2;0)}{A(5;4;2)}=\frac{1}{6930}\frac{6!}{2!^3}\frac{5!}{2!3!}=\frac{900}{6930}.$$

Користуючись цим прийомом, побудуємо таблицю сумісного розподілу для величин ξ, η

(ξ,η)	0	1	2	3	4	5
0	1/462	10/462	10/462	0	0	0
1	0	20/462	80/462	40/462	0	0
2	0	0	60/462	120/462	30/462	0
3	0	0	0	40/462	40/462	4/462
4	0	0	0	0	5/462	3/462

10.5. Точка (x,y) рівномірно розподілена всередині трикутника з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ та $(0,1)$. Знайти коефіцієнт кореляції між x та y.

Розв'язання. Запишемо щільність рівномірного розподілу

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{для} \quad (x,y)\in D,\\ 0, & \text{для} \quad (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область D зображена на рис. 10.1. За формулами (10.4) та (10.5)

знайдемо функції щільності для кожної з величин x та y:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = 2\int_0^{1-x} dy = 2(1-x);$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = 2\int_0^{1-y} dx = 2(1-y).$$

Скориставшись знайденими функціями, за допомогою формул (8.1), (8.9) та (8.8), знайдемо математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величин x та y:

$$m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$
$$d_x = D[x] = M[x^2] - M^2[x] = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)dx - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$
$$\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Оскільки розподіли для x та y однакові, то $m_y = \frac{1}{3}$, $d_y = \frac{1}{18}$, $\sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

За формулами (10.9) та (10.10) знайдемо відповідно кореляційний момент та коефіцієнт кореляції:

$$\mu_{xy} = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\int_0^{1-x}\left(y - \frac{1}{3}\right)dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 (x-1)dx = -\frac{1}{36};$$
$$r_{xy} = -\frac{1}{36} \div \frac{1}{18} = -\frac{1}{2}.$$

10.6. На інтервалі $(0,1)$ зафіксовано точку a. Випадкова величина x рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$. Нехай d – відстань від точки x до a. Знайти коефіцієнт кореляції між x та d. При якому значенні a величини x і d некорельовані?

10.7. Дві незалежні випадкові величини U_1 та U_2 мають стандартизований нормальний розподіл. Знайти розподіл величини $\chi^2(2) = U_1^2 + U_2^2$.

Розв'язання. Скористаємось відомою теоремою:

Теорема 10.1. *Нехай незалежні випадкові величини ξ та η мають щільності розподілу $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно. Тоді, функція розподілу $F(x)$ їх суми $\xi + \eta$ виразиться формулою*

$$F(x) = p(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t)dt. \qquad (10.14)$$

Згідно задачі 11 розділу 9 випадкові величини U_1^2 та U_2^2 мають одну і ту ж функцію щільності розподілу $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

Скориставшись формулою (10.14), для $x > 0$ отримаємо

$$p(\chi^2(2) < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t)dt = \int_0^x f(t) f(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{x-t}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{x-u^2}} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \left[arcsin \frac{u}{\sqrt{x}} \right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Відповідь.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \le 0, \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

На рис. 10.2 показаний графік цієї функції. Зазначимо, що розподіл $\chi^2(n)$ відіграє важливу роль в математичній статистиці.

10.8. Дві незалежні випадкові величини ξ та η рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$. Чи буде рівномірно розподілена їх сума?

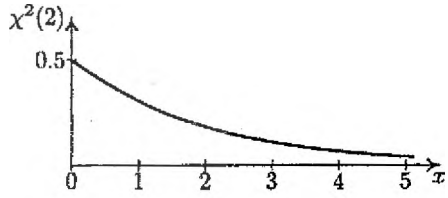


Рис. 10.2. Графік функції $\chi^2(2)$

Розв'язання. Величини ξ та η мають однакову щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{для інших значень } x. \end{cases}$$

Розглянемо область

$$D = \begin{cases} 0 \le t \le 1; \\ 0 \le x - t \le 1. \end{cases}$$

На рис. 10.3 ця область зображена графічно. Якщо точка $(t, x) \in D$, то добуток функцій $f(t)f(x-t) = 1$, в іншому випадку цей добуток дорівнює нулю. Розглянемо два випадки $x \in [0;1]$ і $x \in [1;2]$. Якщо $0 \le x \le 1$, то

$$p(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = \int_0^x dt = x.$$

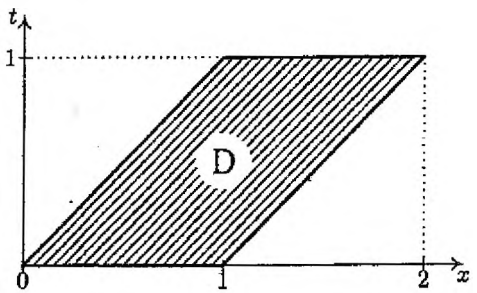


Рис. 10.3. Геометрична ілюстрація області D

Якщо $1 \leq x \leq 2$, то

$$p(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = \int_{x-1}^{1} \cdot\, dt = 2 - x.$$

Отже, сума $\xi + \eta$ матиме таку щільність

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \notin [0;2]; \\ x, & \text{для } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{для } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Як бачимо, сума рівномірно розподілених величин не буде рівномірно розподіленою.

Розділ 11

Основні закони розподілу

11.1 Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу широко застосовується для розв'язання різноманітних практичних задач. Пояснити причини цього вперше удалось А.М. Ляпунову. Він показав, якщо випадкова величина може розглядатись як сума великої кількості інших випадкових величин, то при досить загальних умовах закон розподілу суми близький до нормального розподілу, незалежно від того, як розподілені окремі доданки. Більшість практично важливих випадкових величин є сума великої кількості причин (випадкових величин), що й обумовлює широке застосування нормального розподілу.

Стандартизований нормальний закон розподілу. Щільність стандартизованого нормального закону розподілу визначається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (11.1)$$

Ця крива симетрична відносно осі ординат і при $x \neq 0$ має максимум рівний $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4$ та дві точки перегину при $x = \pm 1$. Для $x \to \infty$ крива щільності наближаються до осі абсцис, причому

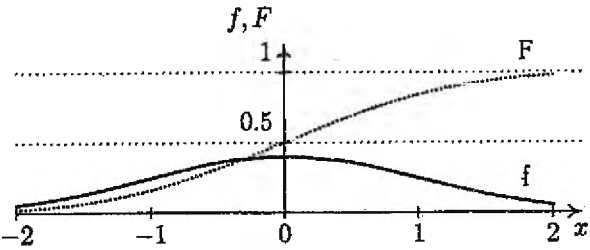


Рис. 11.1. Стандартизований нормальний розподіл

таке наближення відбувається досить швидко. Наприклад, $f(3) = 0,0044$; $f(4) = 0,00013$.

Відповідна інтегральна функція стандартизованого нормального розподілу матиме вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{11.2}$$

Функція $F(x)$ при $x = 0$ дорівнює $0,5$, симетрична відносно точки $(0; 0,5)$ і при зростанні аргумента дуже швидко наближається до одиниці. Так $F(2) = 0,9773$; $F(3) = 0,99865$ і т.д.

Графіки щільності розподілу та функції розподілу показані на рис. 11.1 відповідно суцільною та штриховою лініями. Таблиця F.1 на с. 245 містить значення функції щільності.

Основні параметри стандартизованого нормального розподілу:

- Математичне очікування $M[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$;
- Дисперсія $D[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{d} = 1$.

Теорема 11.1. *Якщо випадкова величина x підлягає стандартизованому нормальному розподілу, то ймовірність*

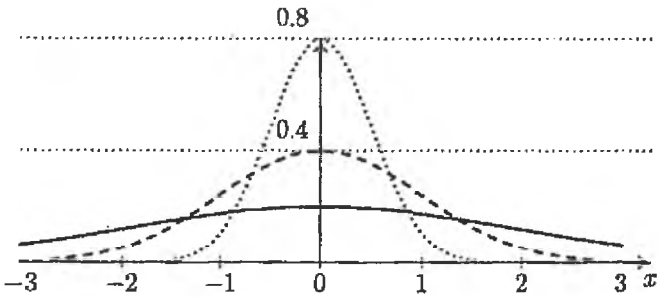


Рис. 11.2. Графіки щільностей нормальних розподілів для математичного очікування $M[x] = 0$ і різних значень середніх квадратичних відхилень: $\sigma = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma = 0,5$.

того, що її значення попаде на відрізок $[\alpha, \beta]$ *визначається формулою*

$$p(\alpha \le x \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{11.3}$$

Нормальний розподіл у загальному випадку. У цьому випадку функція щільності визначається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11.4}$$

Основні параметри нормального розподілу:

- Математичне очікування $M[x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = m$;
- Дисперсія $D[x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \sigma^2$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sqrt{d} = \sigma$.

Параметри m та σ у формулі (11.4) означають: m – математичне очікування нормально розподіленої випадкової величини x, σ – середнє квадратичне відхилення цієї ж величини.

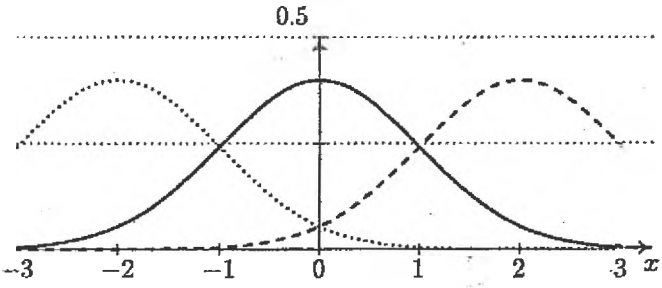


Рис. 11.3. Графіки щільностей нормальних кривих для різних значень математичних очікувань: $M[x] = 0$, $M[x] = 2$, $M[x] = -2$ і фіксованого середнього квадратичного відхилення $\sigma = 1$.

Зазначимо, що згідно властивості щільності для довільних значень параметрів m та σ справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1,$$

тобто площа відповідної необмеженої криволінійної трапеції дорівнює 1.

На рис. 11.2 та 11.3 показані графіки щільностей нормальних розподілів для різних значень параметрів.

Функція Лапласа. Інтеграл із змінною верхньою межею

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{11.5}$$

називають функцією або інтегралом Лапласа.

Функції 11.5 та 11.2 пов'язані простою залежністю

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}.$$

В науковій літературі можна зустріти ще одну функцію

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

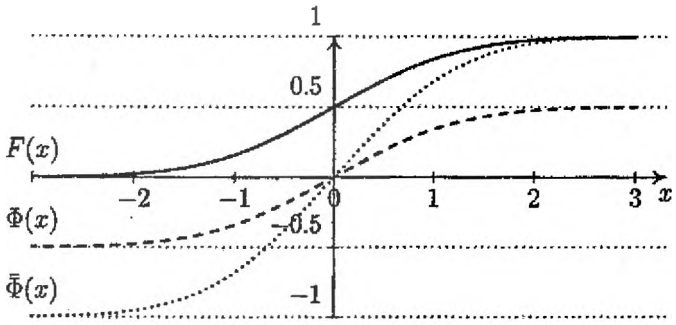


Рис. 11.4. Залежність між інтегралами $F(x)$, $\Phi(x)$ та $\bar{\Phi}(x)$

яку називають інтегралом ймовірності. Очевидно, що $\bar{\Phi}(x) = 2\Phi(x)$. На рис. 11.4 показані графіки цих інтегралів.

Розглянуті функції не можна виразити через елементарні, тому для них побудовані таблиці. Так, таблиця F.2 на с. 246 містить значення функції (11.5).

Теорема 11.2. *Якщо випадкова величина x розподілена нормально з математичним очікуванням m і середнім квадратичним відхиленням σ, то ймовірність того, що значення випадкової величини x належатиме відрізку $[\alpha, \beta]$, визначається формулою*

$$p(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) \qquad (11.6)$$

Правило трьох сигм. Поклавши у формулі (11.6) $\alpha = m - 3\sigma$, $\beta = m + 3\sigma$, отримаємо

$$p(m - 3\sigma \le x \le m + 3\sigma) = p(|x - m| \le 3\sigma) = \\ = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Цей результат називають *правилом трьох сигм*. Суть його полягає у тому, що з досить великою ймовірністю, а саме 0,9973, можна вважати, що значення нормально розподіленої величини лежить у проміжку $m - 3\sigma \le x \le m + 3\sigma$.

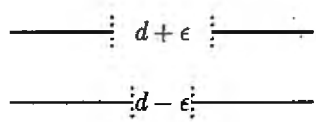


Рис. 11.5. Модель перевірки кульок на відповідність стандарту

Приклад 11.1. Завод виготовляє стальні кульки для підшипників. Кожна кулька повинна мати один і той же діаметр d (проектована довжина). Проте, в силу ряду причин, неминучих у масовому виробництві, фактична довжина діаметра дещо відрізнятиметься від d. Позначимо через x різницю між фактичним і проектованим значеннями діаметра. Величина x (похибка діаметра) має нормальний розподіл із математичним очікуванням 0 і деяким середнім квадратичним відхиленням σ, що характеризує середню точність виготовлення кульок.

Кожна кулька, зійшовши з конвеєра, проходить контроль, суть якого полягає в тому, що кульки проходять через сита з отворами, діаметри яких $d + \varepsilon$ і $d - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Кульки, що проходять через більші отвори, але застрягають у менших вважаються стандартними, решта – бракуються (рис. 11.5). Знайти ймовірність того, що випадково взята з конвеєра кулька буде бракованою.

Р о з в' я з о к. Умовою, що кулька витримає контроль служить нерівність $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Скориставшись формулою (11.6) будемо мати

$$p(-\varepsilon < x < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon - 0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon - 0}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Отже, ймовірність того, що кулька випадково взята з конвеєра буде бракована дорівнює $1 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

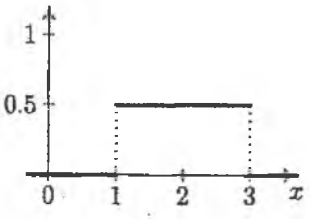


Рис. 11.6. Щільність рівномірного розподілу

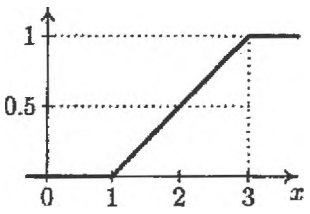


Рис. 11.7. Функція рівномірного розподілу

11.2 Рівномірний закон розподілу

Щільність рівномірного розподілу випадкової величини x визначається рівністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{для} \quad a \le x \le b; \\ 0, & \text{для} \quad x > b. \end{cases} \tag{11.7}$$

На основі щільності можна знайти функцію рівномірного розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{для} \quad a \le x \le b; \\ 1, & \text{для} \quad x > b. \end{cases} \tag{11.8}$$

На рис. (11.6) подані графіки цих функцій.

Основні параметри рівномірного розподілу:

- Математичне очікування $m = M[x] = \frac{a+b}{2}$;
- Дисперсія $d = D[x] = \frac{(a-b)^2}{12}$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Приклади на застосування рівномірного розподілу подані в розділі 3.5, де розглядаються геометричні ймовірності.

11.3 Показниковий закон розподілу

Щільність показникового закону розподілу для числа $\lambda > 0$ задається формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{для} \quad x > 0. \end{cases} \tag{11.9}$$

На рис. 11.8 показані графіки цієї функції для кількох значень λ.

Неважко обчислити і саму функцію розподілу $F(x)$, скориставшись означенням $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{для} \quad x > 0. \end{cases} \tag{11.10}$$

Основні параметри показникового закону розподілу:

- Математичне очікування $m = M[x] = \frac{1}{\lambda}$;
- Дисперсія $d = D[x] = \frac{1}{\lambda^2}$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$.

Ймовірність попадання значень випадкової величини x в інтервал (α, β) дорівнює

$$p(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{11.11}$$

Статистичний зміст параметра λ полягає в наступному, λ – це середнє число подій за одиницю часу, а $1/\lambda$ – це проміжок часу між двома послідовними подіями.

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування, теорії надійності тощо. Нехай t – час безвідмовної роботи деякого елемента, а λ – інтенсивність відмов (середнє число відмов за одиницю часу). Тоді час t роботи елемента можна вважати неперервною випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом із функцією розподілу

$$F(x) = p(t < x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0), \tag{11.12}$$

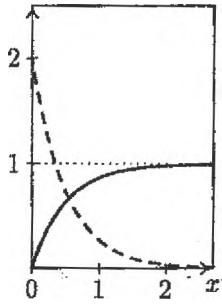


Рис. 11.8. Щільність показникового розподілу

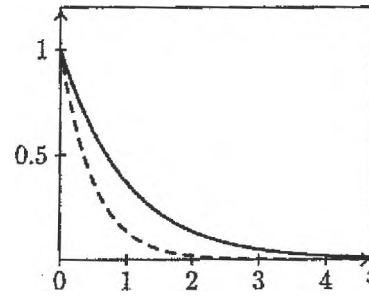


Рис. 11.9. Функція надійності

яка визначає ймовірність відмови елемента за час x.

Протилежна ймовірність

$$R(x) = p(t \geq x) = e^{-\lambda x} \tag{11.13}$$

називається функцією надійності. Функція надійності визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час x. Графік цієї функції показаний на рис. 11.9.

Приклад 11.2. Час t роботи радіолампи має показниковий розподіл. Знайти ймовірність безвідмовної роботи лампи на протязі 600 год., якщо середній час роботи лампи – 400 год.

Р о з в' я з о к. За умовою задачі математичне очікування величини t дорівнює 400 год. Тому $\lambda = \frac{1}{m} = \frac{1}{400}$. За формулою надійності $R(x) = e^{-\lambda x}$ маємо

$$R(600) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1,5} = 0,2231.$$

Можемо сказати: ймовірність того, що лампа пропрацює не менше 600 год. дорівнює 22%.

11.4 Біномний розподіл

Нехай проводиться певне число n незалежних дослідів. В кожному з цих дослідів з однією і тією ж ймовірністю p може наступити

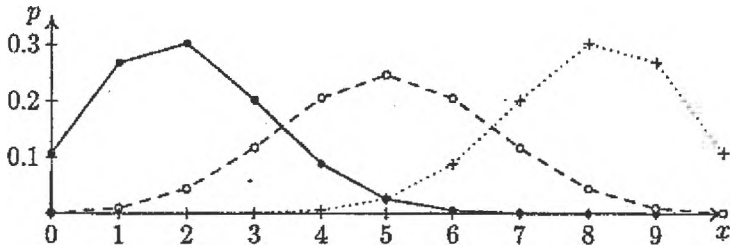


Рис. 11.10. Біномний розподіл

деяка подія A. Розглядається випадкова величина x – число настання події у n дослідах. Відповідна таблиця розподілу для x матиме вигляд

x	0	1	2	...	n
p	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$\cdots$	$P_n(n)$

де

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{11.14}$$

C_n^k – число сполук із n елементів по k, $q = 1 - p$.

Закон розподілу заданий цією таблицею називається біномним. Така назва пов'язана з відомою властивістю бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Основні параметри біномного розподілу:

- Математичне очікування $m = M[x] = np$;
- Дисперсія $d = D[x] = npq$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{npq}$.

На рис. 11.10 показані графіки біномного розподілу для $n = 10$ і різних значень ймовірності p. Кожний графік являє собою дискретну множину точок (для наочності точки послідовно з'єднані ламаною лінією).

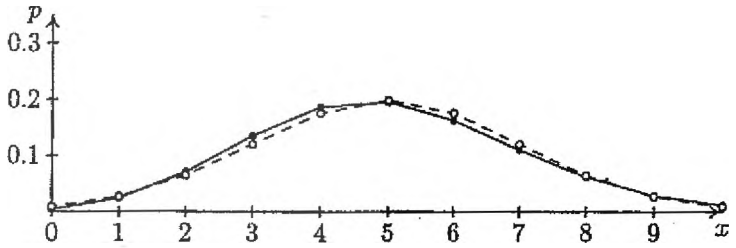


Рис. 11.11: Зв'язок між біномним та нормальним розподілами

Біномний розподіл при $n > 30$ можна апроксимувати нормальним розподілом із параметрами $m = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$. Сказане означає, що при достатньо великих n біномні ймовірності можна знаходити за наближеною формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-m)^2}{2\sigma^2}}$$

з указаними значеннями параметрів m та σ (див. локальну теорему Лапласа на с. 72).

На рис. 11.11 показані графіки біномного та нормального розподілів для різних значень n та p. Ці графіки наочно ілюструють факт наближення біномного розподілу до нормального.

11.5 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона задається таблицею

x	0	1	2	$\cdots$
p	P_0	P_1	P_2	$\cdots$

де

$$P_k = p(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11.15}$$

Основні параметри розподілу Пуассона.

- Математичне очікування $m = M[x] = \lambda$;

- Дисперсія $d = D[x] = \lambda$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Характерною особливістю розподілу Пуассона є рівність дисперсії і математичного очікування.

Розподіл Пуассона заслуговує особливої уваги тому, що серед дискретних розподілів він часто зустрічається на практиці. Укажемо на тісний зв'язок розподілу Пуассона з біномним розподілом. Якщо у виразі для біномних ймовірностей

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (p+q=1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$$

зафіксувати значення k і спрямувати число дослідів n до нескінченності, а ймовірність p – до нуля, причому так, щоб їх добуток зоставався сталим ($np = \lambda = const$), то будемо мати

$$\lim P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (n \to \infty,\ p \to 0,\ np = \lambda).$$

Це співвідношення показує, що при описаному граничному переході таблиця біномного розподілу переходить у таблицю розподілу Пуассона (рис. 11.13). Це дає можливість зводити обчислення біномних ймовірностей для великих n і малих p до простішої формули, а саме (11.15). Для того щоб похибка такої апроксимації була незначною, n має бути не меншим кількох десятків, а добуток np – лежати між 1 та 10. Сказане пояснює часто вживану і другу назву для розподілу Пуассона – закон рідкісних явищ.

На рис. 11.12 показані графіки функції $P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ для різних значень λ. Кожний графік являє собою дискретну множину точок (для наочності точки послідовно з'єднані ламаною лінією).

11.6 Розподіл Пірсона

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ – незалежні нормально розподілені нормовані випадкові величини. Розглянемо суму квадратів цих величин

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2. \qquad (11.16)$$

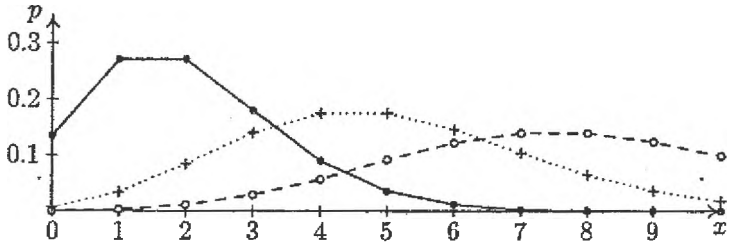


Рис. 11.12. Розподіл Пуассона

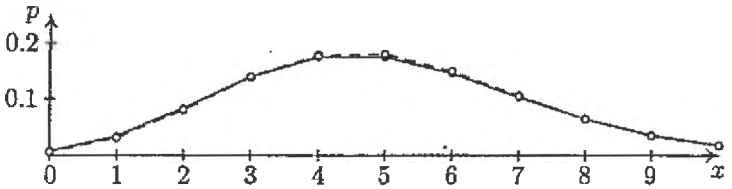


Рис. 11.13. Зв'язок біномного та пуассонівського розподілів

Випадкова величина χ^2 має розподіл, щільність якого задається формулою

$$k_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases} \qquad (11.17)$$

Розподіл, заданий щільністю $k_n(x)$, називається розподілом Пірсона або χ^2-розподілом. Параметр n визначає число ступенів вільності розподілу, а $\Gamma(a)$ – гамма-функція Ейлера. Зокрема, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Розподіл Пірсона $K_n(x) = \int_{-\infty}^{x} k_n(t)\,dt$ визначає ймовірність α настання події $\chi^2 < x$, іншими словами, заданому числу x ставить у відповідність ймовірність α за формулою $\alpha = K_n(x)$. Обернена функція $K_n^{-1}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число x. Таблиця F.4 на с.250 містить значення такої оберненої функції.

Функції $k_n(x)$, $K_n(x)$ та $K_n^{-1}(\alpha)$ у різних підручниках, монографіях та програмних продуктах можуть позначатись по-

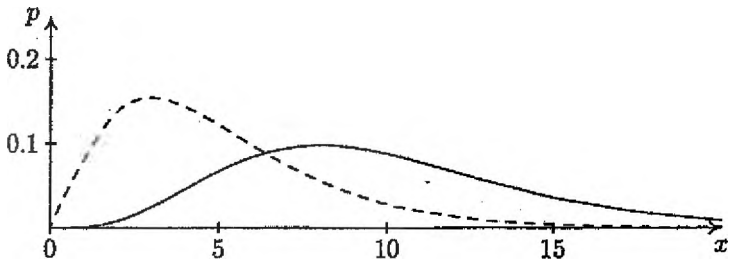


Рис. 11.14. Пірсона розподіл

різному. Так у програмному продукті Mathcad вони позначаються відповідно так: $dchisg(x,n)$, $pchisg(x,n)$ та $qchisg(\alpha,n)$. *Приклад.* Розподіл Пірсона $pchisg(15,987;10) = 0,9$. Обернений розподіл Пірсона $qchisg(0,9;10) = 15,987$.

Основні параметри $\chi^2(n)$-розподілу :

- Математичне очікування $m = M[\chi^2(n)] = n$;
- Дисперсія $d = D[\chi^2(n)] = 2n$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{2n}$.

При $n \leq 2$ функція щільності постійно спадає для $x > 0$, а при $n > 2$ має єдиний максимум у точці $x = n - 2$. Графіки функції щільності для деяких значень n зображені на рис. 11.14.

Розподіл $\chi^2(n)$ для великих n ($n > 30$) можна апроксимувати нормальним розподілом із математичним очікуванням n і дисперсією $2n$. Тому, для великих n користуються нормальним розподілом. Рис. 11.15 ілюструє таку апроксимацію.

Розподіл χ^2 відіграє важливу роль у математичній статистиці. Як приклад, можна послатися на формулу (14.8) с. 173, де з допомогою такого розподілу розв'язуються задачі дисперсійного аналізу.

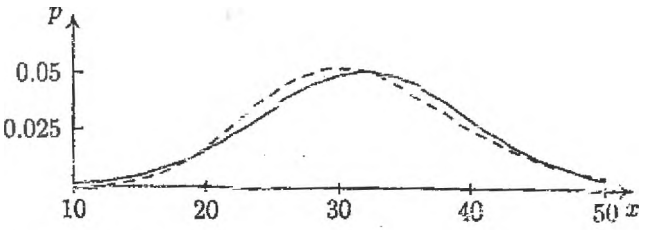


Рис. 11.15. Зв'язок розподілів Пірсона та нормального

11.7 Розподіл Стьюдента

Нехай U, U_1, U_2,..., U_n — незалежні нормально розподілені нормовані випадкові величини. Розглянемо нову випадкову величину

$$t = \frac{U}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2}}. \tag{11.18}$$

Розподілом такої величини є розподіл Стьюдента або t-розподіл, щільність якого задається формулою

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{11.19}$$

Параметр n визначає число ступенів вільності цього розподілу.

Основні параметри розподілу Стьюдента:

- Математичне очікування $m = M[t] = 0$;
- Дисперсія $d = D[t] = \frac{n}{n-2}$;
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

Функція щільності $s_n(x)$ симетрична відносно точки $x = 0$ і має єдиний максимум в цій точці. Графік функції $s_n(x)$ зображений на рис. 11.16, де для порівняння штриховою лінією зображений і графік нормального розподілу.

Інтегральна функція

$$S_n(x) = \int_{-\infty}^{x} s_n(u)\,du$$

дає змогу обчислити ймовірність попадання значень випадкової величини $\mathbf{x}$ у проміжок $(-\infty; x)$. Обернена функція $S_n^{-1}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число x. Наприклад, $S_{11}(-1,796) = 0,05$; $S_{11}^{-1}(0,05) = -1,796$. Таблиця F.3 на с.248 містить значення такої оберненої функції.

Значення функцій $S_n^{-1}(\alpha)$, $S_n^{-1}(1-\alpha)$ рівні за модулем, але протилежні за знаком. Тому $S_{11}^{-1}(0,95) = 1,796$. Зазначимо, що ймовірність прийняти випадковою величиною $\mathbf{x}$ значення, що перевищує число $S_n^{-1}(\alpha)$, дорівнює $1-\alpha$.

Функції $s_n(x)$, $S_n(x)$ та $S_n^{-1}(\alpha)$ у різних джерелах можуть позначатись по-різному. Так у програмному продукті Mathcad вони позначаються відповідно так: $dt(x,n)$, $pt(x,n)$ та $qt(\alpha,n)$.

Розподіл Стьюдента для великих n можна апроксимувати стандартизованим нормальним розподілом. Для невеликих значень n розподіл Стьюдента помітно відрізняється від нормального, що ілюструє рис. 11.16. Ймовірність відхилень від нуля (середнього значення) більша для розподілу Стьюдента ніж для нормального розподілу.

Розподіл Стьюдента широко використовується при математичній обробці результатів вимірювань (с.153), перевірці гіпотез (с.164, с.169) тощо.

11.8 Розподіл Фішера

Щільність розподілу Фішера або F-розподілу задається формулою

$$f_{nm}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{n}{m}x+1)^{\frac{n+m}{2}}}x. \qquad (11.20)$$

Бачимо, що розподіл залежить від двох параметрів m та n, які називаються ступенями вільності. На основі щільності будується

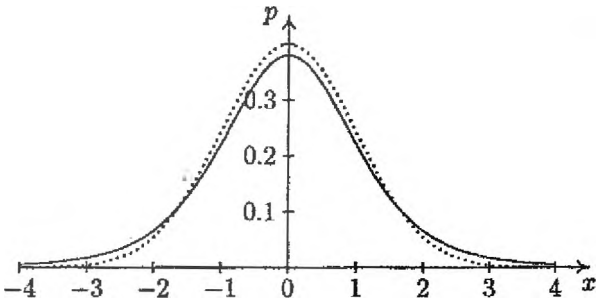


Рис. 11.16. Щільность розподілу Стьюдента

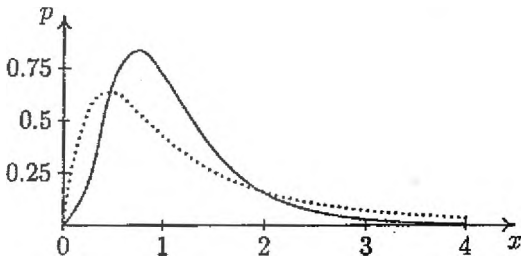


Рис. 11.17. Розподіл Фішера

розподіл Фішера: $F_{nm}(x) = \int_0^x f_{nm}(t)\,dt$. На рис. 11.17 показані два графіки функції щільності.

Якщо деяка випадкова величина ζ підлягає розподілу Фішера, то функція $F_{nm}(x)$ визначає ймовірність α настання події $\zeta < x$, іншими словами, заданому числу x ставить у відповідність ймовірность α за формулою $\alpha = F_{nm}(x)$. Обернена функція $F_{nm}^{-1}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число x. Таблиці F.5 та F.6 на с.252 містять значення оберненої функції.

Функції $f_{nm}(x)$, $F_{nm}(x)$ та $F_{nm}^{-1}(\alpha)$ у програмному продукті Mathcad позначаються відповідно: $dF(x,n,m)$, $pF(x,n,m)$ та $qF(\alpha,n,m)$.

Розподіл Фішера застосовується при розв'язанні важливих задач дисперсійного аналізу (див. приклад на с. 175).

11.9 Контрольні питання

1. Опишіть значення нормального закону для розв'язання різноманітних практичних задач.
2. Яка функція щільності для нормального закону?
3. Як знайти математичне очікування та дисперсію для нормального закону?
4. Розкрийте зміст правила трьох сигм.
5. Дайте означення рівномірного розподілу.
6. Яка щільність розподілу, математичне очікування та дисперсія рівномірного закону?
7. Опишіть практичні задачі, де застосовується рівномірний закон?
8. Дайте означення біномного розподілу.
9. Яка щільність розподілу, математичне очікування та дисперсія біномного закону?
10. Опишіть практичні задачі, де застосовується біномний закон?
11. Який закон розподілу називається показниковим?
12. Охарактеризуйте параметри показникового розподілу.
13. Що таке функція надійності? Наведіть приклади її застосування.
14. Дайте характеристику розподілу Пуассона.
15. Чому закон Пуассона часто називають законом рідкісних явищ?
16. Який зв'язок біномного та пуассонівського розподілів?
17. Дайте означення розподілу Пірсона.
18. Назвіть прикладні задачі, де використовується розподіл Пірсона.
19. Який зв'язок між розподілами Пірсона та нормальним?
20. Дайте означення розподілу Стьюдента.
21. Опишіть роль розподілу Стьюдента при математичній обробці результатів вимірюнань.
22. Який зв'язок між розподілами Стьюдента та нормальним?
23. Дайте означення розподілу Фішера.
24. Опишіть роль розподілу Стьюдента при розв'язанні важливих задач дисперсійного аналізу.

11.10 Задачі розділу

11.1. Проводиться зважування деякої речовини без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування задовольняють нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде проведене з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною 10 г.
Розв'язування. Математичне очікування випадкових помилок дорівнює нулю, тому можна застосувати формулу

$$p(|x| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

Покладемо $\delta = 10$, $\sigma = 20$, тоді $p(|x| < 10) = 2\Phi(0,5)$. За таблицею F.2 на с. 246 знаходимо $\Phi(0,5) = 0,1915$. Отже, шукана ймовірність $p(|x| < 10) = 0,3830$.

11.2. Математичне очікування нормально розподіленої випадкової величини x дорівнює $m = 3$, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$. Написати щільність розподілу x. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини попаде в проміжок $(1;4)$.
Відповідь. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$; $p = 0,5328$.

11.3. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі x, яка розподілена нормально з математичним очікуванням (проектна довжина), рівним 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше 32 та не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина деталі, яка узята навмання: а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.
Відповідь. а) 0,0823; б) 0,0027. З рівності $p(32 < x < 68) = 1$ попередньо знайти σ.

11.4. Випадкові похибки вимірювання задовольняють нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ мм та математичним очікуванням $a = 0$. Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних вимірюваннях похибка принаймні одного вимірювання не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.
Відповідь. $p = 0,41$.

11.5. Випадкова величина x розподілена нормально з математичним очікуванням $a = 10$. Ймовірність попадання

значення x в інтервал $(10;20)$ дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання значення x в інтервал $(0;10)$?

Відповідь. $p = 0,3$.

11.6. Випадкова величина x розподілена нормально з математичним очікуванням $a = 25$. Ймовірність попадання x в інтервал $(10;15)$ дорівнює 0,2. Знайти ймовірність попадання значення x в інтервал $(35;40)$.

Відповідь. $p = 0,2$.

11.7. Вага риби, яку вирощують у ставку, задовольняє нормальному закону з математичним очікуванням $m = 375$ г та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 25$ г. Знайти ймовірність того, що вага однієї уловленої риби буде: а) знаходитись у межах від 300 г до 425 г; б) не більше 450 г; в) не менше 400 г.

Відповідь. а) 0,976; б) 0,999; в) 0,16.

11.8. Випадкова величина x підпорядкована нормальному законові з математичним очікуванням $m = 10$. Яким повинно бути середнє квадратичне відхилення σ, щоб з ймовірністю 0,8 модуль відхилення x від m не перевищував 0,2?

Відповідь. 0,156.

11.9. Вважається, що відхилення довжини деталей від стандарту розподілене нормально з параметрами $m = 40$ см і $\sigma = 0,4$ см. Яку точність довжини виробу можна гарантувати з ймовірністю 0,8?

Відповідь. 0,52.

11.10. Стрільба ведеться з точки 0 вздовж променя Ox. Дальність польоту розподілена нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 80$ м. Який відсоток випущених снарядів дасть переліт від 120 до 160 м?

Відповідь. 4,4.

11.11. Випадкова величина x підпорядкована нормальному законові з математичним очікуванням $m = 1,6$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 1$. Яка ймовірність, що при 4-ох випробуваннях значення x хоча б один раз попаде в інтервал $(1,2)$?

Відповідь. 0,8533.

11.12. Випадкова величина x підпорядкована нормальному законові з математичним очікуванням $m = 2,2$ і середнім квадратичним

відхиленням $\sigma = 0,5$. Яка ймовірність того, що при першому випробуванні значення x знаходитиметься на відрізку $[3,4]$, а при другому випробуванні – на відрізку $[1,2]$?

Відповідь. 0,018.

11.13. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Показання закруглюють до найближчої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена похибка, яка перевищує 0,02 А. Обчислити математичне очікування та дисперсію похибки вимірювання як випадкової величини.

Відповідь. $p = 0,6$; $m = 0,05$; $d = 8,3 \cdot 10^{-4}$.

11.14. Автобуси деякого маршруту йдуть строго за розкладом. Інтервал руху – 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати чергового автобусу менше 3 хвилин. Обчислити математичне очікування та дисперсію часу чекання як випадкової величини.

Відповідь. $p = 0,6$; $m = 2,5$; $d = 2,083$.

11.15. Хвилинна стрілка електричного годинника рухається стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від справжнього не більше ніж на 20 секунд. Обчислити математичне очікування та дисперсію похибки часу за електричним годинником як випадкової величини.

Відповідь. $p = 2/3$; $m = 30$; $d = 300$.

11.16. Всі значення рівномірно розподіленої величини лежать на відрізку $[2,8]$. Знайти ймовірність попадання значення цієї величини в інтервал $(3,5)$.

Відповідь. 1/3.

11.17. Трамваї деякого маршруту йдуть з інтервалом в 5 хв. Пасажир приходить на зупинку в деякий момент часу. Яка ймовірність, що він прийде пізніше ніж одна хвилина після відправлення попереднього поїзда, але раніше ніж 2 хв. до прибуття наступного поїзда?

Відповідь. 2/5.

11.18. Тривалість роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. Знайти ймовірність, що за 24 години елемент: 1) відмовить 2) не відмовить.

Відповідь. $F(24) = 0,3812$; $R(24) = 0,6188$.

11.19. Час безвідмовної роботи телевізора розподілений згідно щільності показникового розподілу $R(t) = 0,002e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. Знайти ймовірність того, що телевізор пропрацює 1000 год.

Відповідь. $R(1000) = e^{-2} = 0,1359$.

11.20. Тривалість роботи електронної лампи є випадкова величина x, яка має показниковий розподіл із параметром $\lambda = 0,003$. Через рік лампу замінюють, якщо навіть вона і не вийшла з ладу. Знайти математичне очікування часу роботи лампи.

11.21. Система складається з n блоків. Нехай t_i – час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $t_1, \ldots, t_n$ – незалежні і мають показниковий розподіл із параметром λ. Система виходить із ладу, якщо перестає працювати принаймні один із блоків. Знайти функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи та математичне очікування безвідмовної роботи.

11.22. Система складається з n блоків. Нехай t_i – час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $t_1, \ldots, t_n$ – незалежні і мають показниковий розподіл із параметром λ. Система працює до того часу, поки працює принаймні один блок. Знайти функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи та математичне очікування часу безвідмовної роботи.

11.23. Система складається з n блоків. Нехай t_i – час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $t_1, \ldots, t_n$ – незалежні і мають показниковий розподіл із параметром λ. Система працює до того часу, поки з ладу не вийде k блоків. Позначимо через x час безвідмовної роботи системи. Обчислити функцію розподілу й щільність розподілу випадкової величини x.

11.24. Три особи A, B і C приходять до поштового відділення і застають вільними два вікна. Обслуговування A і B розпочинається одразу, а обслуговування C розпочинається тоді, коли закінчиться обслуговування або A, або B. Тривалість обслуговування є незалежними однаково розподіленими величинами з показниковим розподілом. а) Яка ймовірність того, що C піде з поштового відділення не останньою? б) Який розподіл і математичне очікування часу, проведеного C в поштовому відділенні?

11.25. Функція розподілу випадкової величини $F(x) = A + B\operatorname{arctg} x$ (розподіл Коші). Знайти сталі A та B, щільність розподілу та ймовірність попадання значення випадкової величини на проміжок $(-1;1)$.

Відповідь. $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{\pi}$; $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $p = 0,5$.

11.26. Щільність розподілу випадкової величини $f(x) = 0,5e^{-|x|}$ (розподіл Лапласа). Знайти функцію розподілу, математичне очікування, дисперсію та ймовірність попадання значення випадкової величини на проміжок $(0;1)$.

Відповідь. $F(x) = 0,5e^{x}$ $(x \le 0)$; $F(x) = 1 - 0,5e^{-x}$ $(x > 0)$; $m = 0$; $d = 2$; $p(0 < x < 1) = 0,316$.

11.27. Швидкість молекул газу має щільність розподілу ймовірностей (закон Максвелла): $f(\nu) = A\nu^2 e^{-h^2\nu^2}$ $(\nu > 0)$. Знайти величину A, математичне очікування та дисперсію швидкості молекул.

Відповідь. $A = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$; $M(\nu) = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $D(\nu) = \frac{3/2-4/\pi}{h^2}$.

11.28. Щільність розподілу ймовірностей випадкових амплітуд бокової качки човна має вигляд (закон Релея): $\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ $(x > 0)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(x)$ амплітуд качки човна.

Відповідь. $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$; $m = \frac{a}{2}$; $d = a^2(2 - \frac{\pi}{2})$.

11.29. Знайти математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл

$$p(x = k) = \frac{C_{N-M}^{n-k} C_M^k}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \min(M, n).$$

11.30. Знайти математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, що має розподіл Паскаля

$$p(x = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (a > 0).$$

Розділ 12

Граничні теореми

12.1 Нерівність Чебишова

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових процесів. Одну просту, але важливу закономірність ми вже знаємо – це групування відносних частот деякої події у довгій серії експериментів навколо ймовірності цієї події. Цей факт лежить в основі практичних застосувань теорії ймовірності. Далі розглянемо зміст важливих закономірностей, об'єднаних спільною назвою "Закон великих чисел", що стосуються середніх значень. Пояснимо сказане. Припустимо, що проводиться велика серія однотипних дослідів. Передбачити результат кожного окремого досліду неможливо – він буде випадковим, невизначеним. Але середній результат (наприклад, математичне очікування) серії дослідів утрачає випадковий характер, стає закономірним.

В основі доведення зазначених закономірностей лежить важлива нерівність, установлена в 1845 р. П.Л. Чебишовим, яка дає можливість довести ряд важливих теорем, об'єднаних спільною назвою "закон великих чисел". Основна з цих теорем належить самому П.Л. Чебишову.

Теорема 12.1 (Нерівність Чебишова). *Нехай випадкова величина x має математичне очікування m і дисперсію d.*

Тоді, ймовірність того, що величина x відхилиться від свого

математичного очікування на величину не меншу ніж $\varepsilon > 0$, *обмежена зверху числом* d/ε^2, *тобто*[1]

$$p(|x - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{d}{\varepsilon^2}. \tag{12.1}$$

Якщо перейти від події $|x - m| \geq \varepsilon$ до протилежної події $|x - m| < \varepsilon$, то нерівність Чебишова можна записати в рівносильній формі

$$p(|x - m| < \varepsilon) > 1 - \frac{d}{\varepsilon^2}. \tag{12.2}$$

Покладемо $\varepsilon = 3\sigma$, де σ – середнє квадратичне відхилення. Тоді з нерівності (12.2) слідує правило трьох сигм.

Правило трьох сигм. Ймовірність події $m - 3\sigma < x < m + 3\sigma$ більша ніж 8/9.

Отримана оцінка досить груба, оскільки клас розподілів досить широкий (на розподіл накладаються лише умови існування математичного очікування та дисперсії). В дійсності, для переважної більшості важливих для практики розподілів така ймовірність значно ближча до 1 ніж 8/9. Так, для нормального закону розподілу ймовірність події $m - 3\sigma < x < m + 3\sigma$ становить 0,9973 (див. с. 117).

Збіжність за ймовірністю. Будемо говорити, що послідовність випадкових величин ξ_n збігається за ймовірністю до числа a, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} p(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) = 0,$$

або рівносильна їй рівність

$$\lim_{n\to\infty} p(|\xi_n - a| < \varepsilon) = 1.$$

[1] Для простого випадку, коли дискретна випадкова величина задана таблицею, нерівність Чебишова доводиться просто:

$$p\left(\left(\frac{x_k - m}{\varepsilon}\right)^2 \geq 1\right) = \sum p_{k_i} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{(x_k - m)^2}{\varepsilon^2} = \frac{d}{\varepsilon^2}.$$

12.2 Теорема Чебишова

Нехай маємо послідовність $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ незалежних випадкових величин, які мають спільне математичне очікування m та дисперсії, обмежені зверху деяким числом C.

Розглянемо випадкову величину

$$\bar{s}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

для якої математичне очікування та дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M[\bar{s}_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1} nM[x_k] = m;$$

$$D[\bar{s}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1} nD[x_k] \le \frac{C}{n}.$$

Скориставшись нерівністю (12.2), матимемо оцінку

$$p(|\bar{s}_n - m| < \varepsilon) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \tag{12.3}$$

з якої слідує важлива теорема Чебишова.

Теорема 12.2 (Теорема Чебишова). *Середнє арифметичне*

$$\bar{s}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

випадкових величин x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *прямує за ймовірністю до математичного очікування* m *при багаторазовому повторенні досліду* $(n \to \infty)$.

Зміст теореми Чебишова пояснимо таким прикладом. На практиці для отримання більш точних результатів вимірювання деякої величини її вимірюють кілька разів і за результат вимірювання беруть середнє арифметичне значення отриманих вимірювань. Нехай: x_1 – результат першого вимірювання, x_2 – результат другого вимірювання і т. д. Конкретні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можна вважати значеннями деяких випадкових величин $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots,$

x_n, які мають спільне математичне очікування m, яке співпадає з точним значенням вимірюваної величини, та спільну дисперсію d, яка характеризує точність вимірювального приладу. Випадкові величини задовольняють всі умови теореми Чебишова. І тому, практично достовірно, що їх середнє арифметичне значення як завгодно мало відрізнятиметься від точного значення вимірюваної величини (за рахунок вибору достатньо великого числа n). Теорема Чебишова обґрунтовує широко розповсюджений на практиці спосіб отримання більш точних значень вимірюваної величини: *для отримання більш точних результатів вимірювання деякої величини її вимірюють кілька разів і за результат вимірювання беруть середнє арифметичне значення отриманих вимірювань.*

12.3 Теорема Бернуллі

Із теореми Чебишова як наслідок можна отримати другу важливу теорему, яка вперше була доведена Я. Бернуллі в 1713 р. Припустимо, що проводиться серія незалежних дослідів, в кожному з яких із ймовірністю p може наступити певна подія A (с. 71). Розглянемо випадкову величину V_n – число настання події A в n дослідах. Очевидно, що V_n можна подати у вигляді суми

$$V_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \tag{12.4}$$

де λ_i – число настання події A в i-му досліді. В i-му досліді подія A може настати (у цьому випадку величина λ_i прийме з ймовірністю p значення рівне одиниці), а може і не настати (у цьому випадку величина λ_i прийме з ймовірністю $q = 1 - p$ значення рівне нулю). Тому величини λ_i незалежні і мають один і той же закон розподілу

λ_i	0	1
p	q	p

(12.5)

Знайдемо параметри цього розподілу:
Математичне очікування $M[\lambda_i] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$;
Дисперсія $D[\lambda_i] = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq$.

Оскільки значенням виразу $\frac{V_n}{n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}$ є відносна частота настання події, то застосувавши до послідовності випадкових величин λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ теорему Чебишова, отримаємо важливу теорему Бернуллі, яка розкриває точний зміст того факту, що відносні частоти в довгій серії дослідів мають властивість групуватись навколо деякого числа.

Теорема 12.3 (Теорема Бернуллі). *При багаторазовому повторенні досліду відносна частота настання події A прямує за ймовірністю до числа p — ймовірності події A в одиничному експерименті.*

12.4 Центральна гранична теорема

У центральні граничні теоремі розглядається питання про закон розподілу великої суми незалежних випадкових величин. Виявляється, що при досить загальних умовах закон розподілу суми буде близьким до нормального розподілу. В загальних рисах зміст обмежень зводиться до того, що вплив кожної окремої випадкової величини на загальну суму повинен бути мізерно малим. Зокрема, як частинний випадок, центральна гранична теорема справедлива для суми великого числа незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу.

Теорема 12.4 (Центральна гранична теорема). *При досить загальних умовах розподіл суми великого числа незалежних випадкових величин близький до нормального розподілу.*

Теорема була доведена в 1900 р. О. М. Ляпуновим. Вона теоретично обгрунтовує можливість широкого застосування на практиці нормального закону розподілу. Розглянемо кілька прикладів.

1) Припустимо, що проводиться вимірювання деякої величини. На результат вимірювання впливає величезна кількість випадкових факторів, таких як коливання атмосферних умов, струс вимірювального приладу, втомленість спостерігача і т.д. Кожний з цих факторів породжує малу похибку x_i при вимірюванні величини. Остаточна похибка буде сумою величезної кількості

випадкових похибок. І хоча закон розподілу кожної з них нам невідомий, тим не менш можна стверджувати, що вся сума (тобто загальна похибка) буде мати закон розподілу близький до нормального.

У повній відповідності зі сказаним, при математичній обробці результатів вимірювань виходять з аксіоми, що *випадкова похибка вимірювань підпорядкована нормальному законові розподілу. З двох параметрів цього закону один, а саме математичне очікування, дорівнює нулеві, а другий параметр – середнє квадратичне відхилення – характеризує точність вимірювальних приладів.*

2) Другий важливий приклад, що ілюструє роль нормального розподілу, дає масове виробництво. У процесі такого виробництва виготовляються великі партії однотипних товарів. Усі важливі характеристики такого товару повинні відповідати певним стандартам. Але в дійсності завжди спостерігається відхилення від стандарту, що пояснюється причинами випадкового характеру, оскільки випуск товару пов'язаний з великим числом операцій, багато з яких виконати точно неможливо. Кожна з цих причин породжує малу похибку, а в сумі такі похибки можуть давати значні відхилення від стандарту. І тут, так само як і в попередньому прикладі, є всі підстави вважати, що сумарне відхилення від стандарту підлягає нормальному законові розподілу.

3) Загальне споживання електроенергії є сумою часток електроенергій, що припадають на кожного споживача. Оскільки число споживачів велике, то можна вважати, що загальне споживання електроенергії матиме розподіл близький до нормального. Подібне можна сказати і про страхову компанію, прибуток або збитки якої є сумою прибутків або збитків кожного окремого поліса.

Сформулюємо важливі частинні випадки центральної граничної теореми. Для зручності подальших формулювань скористаємось поняттям асимптотично нормального розподілу. Розглянемо нескінченну послідовність випадкових величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$, кожна з яких має математичне очікування γ_n та середнє

квадратичне відхидення δ_n. Говорять, що послідовність Z_n має асимптотично нормальний розподіл із параметрами γ_n і δ_n, якщо закон розподілу ймовірностей нормованої випадкової величини $\frac{Z_n-\gamma_n}{\delta_n}$ прямує до стандартного нормального закону розподілу при $n \to \infty$. Сказане означає, що для будь-яких чисел a та b $(a < b)$ має місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} p\left(a < \frac{Z_n - \gamma_n}{\delta_n} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (12.6)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Теорема 12.5. *Якщо незалежні випадкові величини x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ мають один і той самий закон розподілу з математичним очікуванням m та середнім квадратичним відхиленням σ, то сума $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ має асимптотично нормальний розподіл із параметрами nm та $\sigma\sqrt{n}$, тобто, для будь-якого інтервалу (a, b) має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} p\left(a < \frac{s_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (12.7)$$

Теорема 12.6. *За умов справедливості попередньої теореми середнє арифметичне $\bar{s}_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ має асимптотично нормальний розподіл із параметрами m та $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, тобто, для будь-якого інтервалу $(a; b)$ має місце така рівність*

$$\lim_{n\to\infty} p\left(a < \frac{\bar{s}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (12.8)$$

Інтегральна наближена формула Лапласа. Припустимо, що проводиться серія незалежних дослідів, в кожному з яких з імовірністю p може наступити деяка подія A. Знову розглянемо випадкові величини V_n та λ_i (див. формулу 12.4). Усі величини λ_i однаково розподілені, отже мають спільні математичне очікування p та середнє квадратичне відхилення $\sqrt{pq}$. Таким чином, всі умови

теореми 12.5 виконані і тому біномний розподіл буде асимптотично рівний нормальному $(np; \sqrt{npq})$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} p(np + a\sqrt{npq} < V_n < np + b\sqrt{npq}) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Відкинувши знак границі, матимемо наближену рівність

$$p(np + a\sqrt{npq} < V_n < np + b\sqrt{npq}) \approx \Phi(b) - \Phi(a),$$

точність якої залежить від вибору числа n. Увівши позначення: $k_1 = np + a\sqrt{npq}$, $k_2 = np + b\sqrt{npq}$, отримаємо наближену інтегральну формулу Лапласа

$$p(k_1 < V_n < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (12.9)$$

Точність цієї формули суттєво залежить від чисел n і p, а саме, точність покращується (абсолютна похибка зменшується) із ростом добутку npq. На практиці цією формулою користуються тоді, коли $npq > 10$.

Оцінка середнього значення. Покладемо у формулі(12.8) $a = -t$, $b = t$ $(t > 0)$, отримáємо рівність

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\bar{s}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < t\right) = 2\Phi(t). \qquad (12.10)$$

Відкинувши у цій формулі знак границі, перейдемо до наближеної рівності

$$p\left(|\bar{s}_n - m| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(t).$$

Уведемо позначення $\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Тоді $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ і попередня формула набуде такого вигляду

$$p(|\bar{s}_n - m| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (12.11)$$

Інтервал $m - \varepsilon < \bar{s}_n < m + \varepsilon$ називається довірчим інтервалом для середнього значення $\bar{s}_n$, а ймовірність $2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma})$ – надійністю довірчого інтервалу.

Оцінка відносних частот. Перейдемо знову до схеми Бернуллі (с.139, с.71) і розглянемо випадкову величину

$$\frac{V_n}{n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n},$$

яка визначає відносну частоту настання події при n дослідах. Пригадаємо, що $m = M[\lambda_i] = p$, а $\sigma = \sqrt{D[\lambda_i]} = \sqrt{pq}$. Застосуємо наближену рівність (12.11) до послідовності випадкових величин V_n/n. Отримаємо формулу для оцінки відхилення відносної частоти V_n/n настання події при n випробуваннях від ймовірності p цієї події

$$p\left(\left|\frac{V_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \qquad (12.12)$$

Зазначимо, що ймовірність $2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$ називається надійністю оцінки $\left|\frac{V_n}{n} - p\right| < \varepsilon$, а сама ця оцінка, тобто інтервал $p - \varepsilon < \frac{V_n}{n} < p + \varepsilon$, називається довірчим інтервалом для відносної частоти $\frac{V_n}{n}$. Якщо відносна частота лежить в інтервалі $p - \varepsilon < \frac{V_n}{n} < p + \varepsilon$, то, очевидно, інтервал для абсолютної частоти буде в n раз ширший, тобто $n(p - \varepsilon) < V_n < n(p + \varepsilon)$.

Задача про технологічний процес. Вважатимемо, що деякий виробничий технологічний процес відрегульований так, що частка бракованих деталей не більша 1%. Для того щоб перевірити, чи не сталось порушення технологічного процесу (тобто, частка бракованих деталей стала більшою 1%), можна провести вибіркову перевірку. Якщо взяти вибірку рівною n деталей, то число бракованих деталей V_n повинно лежати в довірчому інтервалі $n(p - \varepsilon) < V_n < n(p + \varepsilon)$, надійність якого $p = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ беруть досить близькою до 1.

Візьмемо вибірку в 1000 деталей і надійність $p = 0,999$. З рівності $0,999 = 2\Phi(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}})$, скориставшись таблицею F.2 с. 246,

знайдемо, що $\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = 3,29$. З цього рівняння знайдемо, що $n\varepsilon = 3,29\sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = 10,4$. Підставивши отримані значення в нерівність $V_n < n(p+\varepsilon)$, одержимо кінцевий результат $V_n < n(p+\varepsilon) = 10 + 10,4 = 20,4$.

Отже, якщо у вибірці обсягом в 1000 деталей виявиться бракованих більше 20, то це означає, що технологічний процес розладнався і частка бракованих виробів буде більшою 1%.

12.5 Контрольні питання

1. У чому криється суть закономірностей, об'єднаних спільною назвою "Закон великих чисел"?
2. Зформулюйте нерівність Чебишова. У чому полягає її важливість?
3. Розкрийте поняття збіжності за ймовірністю.
4. Зформулюйте теорему Чебишова. У чому полягає її практична цінність?
5. Зформулюйте теорему Бернуллі. У чому полягає її практична цінність?
6. Розкрийте зміст центральної граничної теореми. У чому полягає її важливість?
7. Розкрийте поняття асимптотично нормального розподілу.
8. Як з центральної граничної теореми отримати інтегральну наближену формулу Лапласа?
9. Назвіть застосування наближених формул Лапласа.
10. Як використовується центральна гранична теорема для оцінки середнього значення?
11. Як використовується центральна гранична теорема для оцінки відносних частот?
12. У чому суть задачі про технологічний процес?

12.6 Задачі розділу

12.1. Монету підкидають 1000 разів. Яка ймовірність, що модуль відхилення частоти появи "герба"від числа 0,5 буде менший 0,1?
Відповідь. $p > 39/40$.

12.2. У ящику 1000 білих і 2000 чорних куль. Вийняли по одній з поверненням 300 куль. Оцінити ймовірність того, що число m вийнятих при цьому білих куль лежить у межах $80 < m < 120$.
Відповідь. $p > 5/6$.

12.3. Нехай у результаті 100 незалежних випробувань знайдені значення випадкової величини x: x_1, $x_2, \ldots, x_{100}$. Нехай математичне очікування $M[x] = 10$ і $D[x] = 1$. Оцінити ймовірність того, що модуль різниці між середнім арифметичним знайдених значень і математичним очікуванням буде менший 0,5.
Відповідь. $p > 24/25$.

12.4. Кубик підкидають 10000 разів. Оцінити ймовірність модуля відхилення частоти появи шістки від її ймовірності менш ніж 0,01.
Відповідь. $p \geq 31/36$.

12.5. Довжина деталей – випадкова величина, середнє значення якої (математичне очікування) дорівнює 90 см, а дисперсія дорівнює 0,0225 см^2. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що: а) модуль відхилення довжини деталі від її середнього значення не перевищить 0,4; б) довжина деталі лежатиме в інтервалі $(89,7; 90,3)$.
Відповідь. $p \geq 0,86$; $p \geq 0,75$.

12.6. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,05. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили і середнім числом відмов за час t виявиться меншою 2.
Відповідь. $p \geq 0,88$.

12.7. Величина x задана законом

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність нерівності $|x - M[x]| < \varepsilon$.
Відповідь. $p \geq 0,64$.

12.8. Ймовірність події при кожному випробуванні дорівнює 0,7. Скільки разів потрібно провести випробування, щоб з ймовірністю 0,9 можна було б очікувати, що модуль відхилення частоти появи події A від її ймовірності не більше 0,5?
Відповідь. $n = 273$.

Розділ 13

Основні поняття математичної статистики

13.1 Основні теоретичні положення

Сучасна *математична статистика* визначається як наука про прийняття рішень в умовах невизначеності. Її задача полягає у створені методів збору й обробки статистичних даних для отримання висновків наукового чи практичного характеру.

Вибірковою сукупністю або просто *вибіркою* називають сукупність випадково взятих елементів. Ту ширшу множину, із якої береться вибірка, називають *генеральною сукупністю*. *Обсягом сукупності* називають число її елементів. Наприклад, якщо з 1000 деталей для аналізу якості відібрали 100, то обсяг генеральної сукупності $N = 1000$, а обсяг вибірки $n = 100$.

При складанні вибірки можна користуватися такими двома способами: випадковим чином відібрати об'єкт, провести його дослідження і повернути або не повернути його назад у генеральну сукупність. У відповідності із сказаним вибірки поділяють на *повторні* і *безповторні*.

Вибірка повинна бути *репрезентативною*, тобто за її даними можна впевнено судити про досліджувану ознаку генеральної сукупності.

Нехай із генеральної сукупності взята вибірка, причому значення x_1 спостерігалось n_1 разів, x_2 — n_2 разів, x_k — n_k разів. Значення $x_1, x_2, \ldots, x_k$ називають *варіантами*, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, — *варіаційним рядом*. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ називають *частотами*, а їх відношення до обсягу вибірки $n_i/N = w_i$ — *відносними частотами*.

Статистичний закон розподілу дискретної випадкової величини x зручно задати таблицею, що встановлює зв'язок між її значеннями та частотами

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_n

Закон розподілу стверджує, що в даній серії випробувань випадкова величина x значення x_i прийняла n_i разів. Часто статистичний закон розподілу задають аналогічною таблицею, яка встановлює зв'язок між значеннями випадкової величини та їх відносними частотами.

Якщо x є неперервна випадкова величина, то її статистичний розподіл також можна подати у вигляді таблиці

x	$(x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$	$(x_3, x_4]$	...	(x_{n-1}, x_n)
n_x	w_1	w_2	w_3	...	w_n

Нехай подія A_k полягає у тому, що значення випадкової величини x потрапило у проміжок (x_{k-1}, x_k). Тоді закон розподілу стверджує, що в даній серії випробувань відносна частота настання події A_k дорівнює w_k.

Статистичною функцією розподілу вибірки $F^*(x)$ називають функцію, яка кожному значенню x ставить у відповідність відносну частоту настання події $\mathrm{x} < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{N}, \tag{13.1}$$

де n_x — число варіант, менших x; N — обсяг вибірки.

Запишемо цю формулу у детальнішому вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le x_1; \\ \sum\limits_{k|x_k<x} w_k, & \text{якщо } x_k < x \le x_{k+1}; \\ 1, & \text{якщо } x > x_n. \end{cases} \tag{13.2}$$

Приклад 13.1. Побудувати статистичну функцію для розподілу

x	2	6	10
n_x	12	18	30

Р о з в' я з о к. Знайдемо обсяг вибірки $N = 12+18+30 = 60$. Якщо $x \le 2$, то $F^*(x) = 0$, оскільки не існує жодного варіанту меншого x. Якщо ж $2 < x \le 6$, то $F^*(x) = 12/60 = 0,2$, бо лише один варіант $x_1 = 2$ із частотою $n_1 = 12$ менший за x. Якщо ж $6 < x \le 10$, то $F^*(x) = (12+18)/60 = 0,5$, бо уже маємо два варіанти $x_1 = 2$ та $x_2 = 6$ із частотами $n_1 = 12$ та $n_2 = 18$, які менші за x. Якщо ж $x > 10$, то $F^*(x) = (12+18+30)/60 = 1$, бо усі варіанти будуть меші x.

Статистична функція для даного розподілу буде такою

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 2; \\ 0,2 & \text{якщо } 2 < x \le 6; \\ 0,5 & \text{якщо } 6 < x \le 10; \\ 1, & \text{якщо } x > 10. \end{cases}$$

13.2 Оцінки параметрів розподілу

Нехай маємо результати n незалежних вимірювань деякої величини. Вважаємо, що ці результати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не мають грубих та систематичних похибок. Потрібно оцінити числове значення параметра Θ досліджуваної величини за результатами вимірювань. Конкретизуємо поставлену задачу. Оцінити значення параметра Θ — означає:

а) знайти таку функцію $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену на множині результатів вимірювання, яка забезпечує необхідне наближення для Θ (така функція називається *точковою оцінкою* або просто *оцінкою*). Наприклад, нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результати вимірювання довжини деталі, а Θ — проектована довжина цієї ж деталі. Тоді середнє арифметичне результатів вимірювання буде точковою оцінкою параметра Θ.

б) знайти межі певного інтервалу (t_1, t_2), який з наперед заданою ймовірністю α містить точне значення параметра Θ.

Така оцінка вже називається *довірчою оцінкою*, а ймовірність α — *довірчою ймовірністю* або *надійністю* оцінки. При цьому інтервал (t_1, t_2) називається *довірчим інтервалом*, а його межі — *довірчими границями*.

Для забезпечення хорошого наближення оцінка повинна задовольняти такі вимоги:

1. Бажано, щоб користуючись оцінкою $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ замість точного значення Θ, ми не робили похибок у сторону його заниження чи завищення, тобто математичне очікування оцінки Q повинно дорівнювати значенню Θ, тобто

$$M[Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \Theta.$$

Оцінка, що задовольняє такі вимозі, називається *незміщеною*. Незміщеність особливо важлива при малому числі дослідів.

2. Бажано, щоб із збільшенням числа n випробувань значення випадкової величини $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ більш тісніше концентрувались біля Θ, тобто виконувалась умова

$$D[Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оцінка, що задовольняє такій вимозі, називається *слушною*.

Оцінка математичного очікування. Вивчення оцінок розпочнемо з важливого випадку — оцінки математичного сподівання m випадкової величини x. В якості такої оцінки виступає середнє арифметичне n значень цієї величини:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{13.3}$$

Вважаючи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадковими величинами, що мають спільний з x розподіл, неважко переконатися у незміщеності та слушності цієї оцінки.

Дійсно, використовуючи відомі властивості (с. 78), знайдемо математичне очікування оцінки $\bar{x}$

$$M[\bar{x}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \frac{1}{n} n M[\mathrm{x}] = m.$$

Це означає, що вибіркове середнє $\bar{x}$ — незміщена оцінка параметра m.

Аналогічним чином можна переконатися у справедливості наступної рівності

$$D[\bar{x}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{1}{n^2} nD = \frac{D}{n}.$$

Права частина рівності прямує до нуля з ростом n, отже і дисперсія $D[\bar{x}]$ прямує до нуля, а це і доводить слушність оцінки.

Оцінка дисперсії. Оцінкою для дисперсії $D[\bar{x}]$ служить наступна випадкова функція

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{13.4}$$

Як і в попередньому випадку можна довести, що розглянута оцінка — незміщена та слушна. Величину (13.4) називають *виправленою статистичною дисперсією.*

13.3 Довірчі інтервали

Розглянемо детальніше питання про оцінку параметра m (математичне очікування) деякої нормально розподіленої величини x. Потрібно на основі дослідних даних оцінити параметр m та побудувати для нього довірчий інтервал, що відповідає заданій надійності. Ця задача має велике практичне значення, особливо при обробці результатів вимірювань.

Частковий розв'язок задачі дає формула (13.3). Недоліком формули є відсутність оцінки для похибки наближення. Тому значно більше значення має довірча оцінка, тобто інтервал (m_1, m_2), який з наперед заданою ймовірністю α містить істинне значення m. Задачу довірчих оцінок розглянемо для двох випадків: а) параметр σ відомий; б) параметр σ невідомий.

Довірчий інтервал для m при відомому σ. Розглянемо випадкову величину

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \tag{13.5}$$

де $\bar{x}$ визначається за формулою (13.3), σ — середнє квадратичне відхилення — вважається відомим параметром, а m — математичне очікування — невідомим.

Величина u буде нормально розподіленою з математичним очікуванням рівним нулеві та середнім квадратичним відхиленням рівним одиниці (нормована величина). За формулою (11.3) будемо мати

$$p(-t_\alpha < u < t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) = \alpha.$$

Таким чином, задавши деяке значення ймовірності α, можна знайти (наприклад, скориставшись таблицею F.2) відповідне йому число t_α як розв'язок рівняння

$$2\Phi(t_\alpha) = \alpha. \tag{13.6}$$

Отримавши шукане число t_α, можна стверджувати, що ймовірність події $-t_\alpha < u < t_\alpha$ дорівнює α.

Скориставшись означенням величини u, можна записати нерівність $-t_\alpha < u < t_\alpha$ у рівносильному вигляді

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{13.7}$$

Ця формула означає, що інтервал

$$\left(\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{13.8}$$

з надійністю α містить невідомий параметр m.

Приклад 13.2. Проведено 5 незалежних спостережень нормально розподіленої величини $\mathbf{x}$ із невідомим параметром m та $\sigma = 2$. Результати досліджень записані в таблиці

x	1	2	3	4	5
n_x	−25	34	−20	10	21

Знайти оцінку $\bar{x}$ для математичного очікування та побудувати для неї 90% довірчий інтервал.

Розв'язок. Скориставшись табличними даними, будемо мати

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4.$$

За допомогою таблиці F.2 знайдемо, що $t_\alpha = 1,65$, де t_α розв'язок рівняння $2\Phi(t_\alpha) = \alpha$. За формулою (13.8) обчислимо довірчий інтервал

$$\left(\bar{x} - t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4 - 1,65\frac{2}{\sqrt{5}}; 4 + 1,65\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$
$$(4 - 1,47; 4 + 1,47) = (2,53; 5,47).$$

Таким чином, можемо з надійністю 90% стверджувати, що невідоме значення параметра m лежить в інтервалі $(2,53; 5,47)$.

Довірчий інтервал для m при невідомому σ. Припустимо, що відома лише певна кількість незалежних спостережень нормально розподіленої випадкової величини x, для якої є невідомими обидва параметри m та σ. Як і в попередньому пункті, потрібно оцінити m, побудувавши для нього довірчий інтервал, що відповідає заданій надійності. Для цієї мети застосовують випадкову величину

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \tag{13.9}$$

де

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{13.10}$$

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{13.11}$$

Доведено, що закон розподілу цієї величини не залежить від параметра σ і підлягає закону розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності (див. с. 127).

Нагадаємо, що щільність розподілу Стьюдента виражається формулою

$$dt(x,n-1)=\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}. \qquad (13.12)$$

Той факт, що величина t підлягає закону розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності, дає можливість обчислити ймовірність попадання її значень у довільний інтервал $(a;b)$, зокрема,

$$p(-t_\alpha<t<t_\alpha)=\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}dt(\tau,n-1)\,d\tau=2\int_0^{t_\alpha}dt(\tau,n-1)\,d\tau.$$

Аналогічно попередньому випадкові, для заданої надійності α знайдемо число t_α, яке служить розв'язком рівняння

$$2\int_0^{t_\alpha}dt(\tau,n-1)\,d\tau=\alpha. \qquad (13.13)$$

Тоді, будемо мати довірчий інтервал

$$\left(\bar{x}-t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \qquad (13.14)$$

який з надійністю α служить оцінкою для параметра m.

Для знаходження числа t_α за даним α можна скористатися таблицею F.3 або функцією $qt(\alpha,n)$ із Mathcad (див. с. 127). При цьому $t_\alpha=qt(\frac{1+\alpha}{2},n-1)$.

Приклад 13.3. Термін служби освітлювальних ламп підлягає нормальному законові розподілу, параметри m та σ якого невідомі. Для оцінки цих параметрів провели 16 контрольних випробувань, на основі яких знайшли, що

$$\bar{x}=3000\,\text{год}, \qquad s=20\,\text{год}.$$

Для невідомого параметра m потрібно побудувати довірчий інтервал із надійністю 0,9.

Р о з в' я з о к. Скористаємося таблицею розподілу Стьюдента F.3. Для $n-1=15$ ступенів вільності та надійності $(1+\alpha)/2=0,95$ знайдемо $t_\alpha = qt(0,95;15) = 1,75$. Отримані значення підставимо у формулу (13.14). Нескладні обчислення дадуть нам довірчий інтервал

$$(3000-8,8;\quad 3000+8,8) = (2991,2;\quad 3008,8),$$

який з надійністю 90% містить невідомий параметр m.

13.4 Контрольні питання

1. Назвіть основне завдання математичної статистики.
2. Що розуміють під генеральною та вибірковою сукупністю?
3. Що називається статистичним рядом?
4. Зформулюйте поняття абсолютних та відносних частот.
5. Дайте означення полігону, гістограми та емпіричної функції розподілу. Як вони будуються?
6. В чому суть задачі про оцінку параметрів розподілу?
7. Яка точкова оцінка середнього значення?
8. Яка точкова оцінка дисперсії?
9. В чому суть інтервальних оцінок?
10. Що таке надійність оцінки?
11. Як побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного очікування при відомому σ?
12. Як побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного очікування при невідомому σ?
13. Яка роль розподілу Стьюдента при побудові довірчих інтервалів?

13.5 Задачі розділу

13.1. У процесі випробування випадкова величина x прийняла такі значення: 2, 5, 7, 1, 10, 5, 9, 6, 8, 6, 2, 3, 7, 6, 8, 3, 8, 10, 6, 7, 3, 9, 4, 5, 6. Потрібно: 1) побудувати таблицю залежності між значеннями випадкової величини та їх частотами; 2) побудувати таблицю статистичного розподілу; 3) побудувати полігон розподілу.

13.2. У процесі випробування випадкова величина $\mathbf{x}$ прийняла такі значення: 16, 17, 9, 13, 21, 11, 7, 7, 19, 5, 17, 5, 20, 18, 11, 4, 6, 22, 21, 15, 15, 23; 19, 25, 1. Потрібно: 1) побудувати таблицю статистичного розподілу, розбивши відрізок [0, 25] на п'ять рівних частин; 2) побудувати гістограму для відносних частот.

13.3. Дано статистичний розподіл

x	11	12	13	14
W_x	0,4	0,1	0,3	0,2

Знайти статистичну функцію розподілу і побудувати її графік.

13.4. Знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для статистичного розподілу

x	13,8	13,9	14	14,1	14,2
n_x	4	3	7	6	5

13.5. Обчислити середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для статистичного розподілу

x	3	7	11	15	19	23
W_x	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

13.6. Обчислити середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для такого статистичного розподілу

x	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n_x	1	5	8	4	2

13.7. Обчислити середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для статистичного розподілу

x	2	5	8	11	14	17	20	23
W_x	0,10	0,20	0,15	0,25	0,05	0,12	0,08	0,05

13.8. Обчислити центральні моменти перших чотирьох порядків для випадкової величини, що має статистичний розподіл

x	11	12	13	14
W_x	0,35	0,25	0,15	0,25

13.9. Обчислити центральні моменти перших чотирьох порядків для випадкової величини, що має статистичний розподіл

x	4	9	14	19
W_x	0,4	0,2	0,3	0,1

13.10. Обчислити початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес для випадкової величини, що має статистичний розподіл

i	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
n_x	3	4	10	5	3

13.11. Обчислити початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес для випадкової величини, що має такий статистичний розподіл

i	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)
n_x	2	4	10	6	3

Розділ 14

Гіпотези про параметри нормального розподілу

14.1 Поняття статистичних гіпотез

Задача перевірки статистичних гіпотез. Часто виникає необхідність у розв'язанні такої задачі: маємо стохастичний експеримент, що полягає у фіксуванні значень деякої випадкової величини $\mathbf{x}$. Провівши такий експеримент n разів і зафіксувавши його результати, отримаємо відповідну вибірку. Якщо закон розподілу $\mathbf{x}$ невідомий, то аналізуючи результати експерименту, або що те саме, дані вибірки, можемо висунути гіпотезу, що випадкова величина $\mathbf{x}$ може мати деякий розподіл G, або результати експерименту узгоджуються (не суперечать) розподілу G.

Зробити за результатом експерименту точний висновок — G є розподілом випадкової величини $\mathbf{x}$ — не можна, оскільки один і той самий результат можливий при різних розподілах.

Гіпотези, в яких мова йде про вид можливого розподілу, називаються статистичними. Наприклад, статистичними будуть гіпотези:

1) величина $\mathbf{x}$ розподілена за законом Пуассона;

2) дисперсії двох нормальних величин $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ рівні між собою.

У першій гіпотезі йде мова про вид невідомого розподілу, а в другій — про параметри двох відомих розподілів.

Висунуту гіпотезу називають *основною* або *нульовою*. Після вибору основної гіпотези решту гіпотез називають *альтернативними* або *конкуруючими* відносно основної. Нульову гіпотезу будемо позначати H_0, а альтернативну — H_1.

Наприклад, якщо нульова гіпотеза допускає, що математичне очікування випадкової величини дорівнює 10, то альтернативна гіпотеза цей факт заперечуватиме. Коротко це можна записати так: $H_0 : a = 10$; $H_1 : a \neq 10$.

Зазначимо, що математична статистика не дає ніяких рекомендацій щодо вибору нульової гіпотези. Вона залежить від поставленої задачі і повністю визначається дослідником.

Методика перевірки статистичних гіпотез. Нехай основна гіпотеза H_0 полягає в тому, що розподілом випадкової величини $\mathbf{x}$ може бути розподіл G. Розглянемо метод перевірки таких гіпотез, згідно якого можна дійти висновку: G може бути розподілом випадкової величини $\mathbf{x}$ (гіпотеза H_0 не відхиляється) або G не може бути розподілом випадкової величини $\mathbf{x}$ (гіпотеза H_0 відхиляється). Висновок про відхилення або невідхилення гіпотези H_0 роблять за результатом експерименту, тобто за вибіркою (крім вибірки ми не маємо нічого, що несло б інформацію про розподіл величини $\mathbf{x}$). Для цього використовують спеціально підібрану випадкову функцію K, розподіл якої вважається відомим. Така функція називається *статистичним критерієм* або просто *критерієм* і залежить від висунутої гіпотези.

Наприклад, розглядається гіпотеза про рівність дисперсій для двох нормальних випадкових величин $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$. Для цього випадку використовують критерій Фішера, який визначається за даними вибірками як відношення виправлених дисперсій:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}.$$

Припустимо, що за даними вибірок знайдені виправлені дисперсії $s_x^2 = 20$ та $s_y^2 = 5$. Тоді $F = 4$.

Далі треба поділити множину можливих значень величини K на дві неперетинні множини S та $\bar{S}$. Якщо значення критерію K, обчислене за даними вибірки, потрапить до S, то гіпотезу H_0 відхиляють, у противному разі — не відхиляють.

Множину S називають *критичною множиною* для перевірки гіпотези H_0. Другу множину $\bar{S}$, що служить доповненням для S, називають *множиною прийняття гіпотези*.

Перейдемо до питання знаходження критичної множини. Для цього розглянемо, які можуть бути помилки при прийняті рішень щодо висунутих гіпотез.

Помилки першого та другого родів. Нехай H_0 — нульова гіпотеза; S — критична множина. Будемо перевіряти гіпотезу H_0, користуючись критичною множиною S: якщо значення K потрапляє до S, то гіпотезу H_0 відхиляємо, а якщо не потрапляє до S, то гіпотезу H_0 не відхиляємо.

При цьому можливі такі випадки:

1. Гіпотеза H_0 справджується. Значення критерію K не потрапило до S, тому гіпотеза H_0 не відхиляється.

2. Гіпотеза H_0 не справджується. Значення критерію K не потрапило до S, отже гіпотеза H_0 не відхиляється.

3. Гіпотеза H_0 справджується. Значення критерію K потрапило до S, тому гіпотеза H_0 відхиляється.

4. Гіпотеза H_0 не справджується. Значення критерію K потрапило до S, тому гіпотеза H_0 відхиляється.

З чотирьох випадків два: 1 та 4 — прийнятні, а решта (2 і 3) — незадовільні. У випадках 2 та 3 ми припускаємося помилок. При цьому помилки у випадку 2 (гіпотеза H_0 не відхиляється, коли вона не справджується) та у випадку 3 (гіпотеза H_0 відхиляється, коли вона справджується) істотно різняться між собою і мають свої назви.

Проілюструємо відмінність між названими помилками на прикладі перевірки медичного препарату на токсичність біологічними методами.

Щодо токсичності препарату висуваються гіпотези: H_0 — препарат токсичний та H_1 — препарат нетоксичний. Необхідно перевірити гіпотезу H_0 — відхилити її або прийняти.

Рішення приймається за спеціально розробленою методикою (критерієм), згідно якої, досліджуючи препарат на токсичність, певну його дозу вводять піддослідним тваринам (мишам, кроликам) і реєструють кількість згубних наслідків. Необхідно за їх кількістю зробити висновок про токсичність препарату.

Як і в кожній задачі перевірки статистичних гіпотез, у розглядуваній можливі помилки:

гіпотеза H_0 не справджується, але згідно з критерієм вона не відхиляється;

гіпотеза H_0 справджується, але згідно з критерієм вона відхиляється.

Подивимося, які наслідки цих помилок у даній конкретній ситуації.

Гіпотеза H_0 не справджується, але згідно з критерієм не відхиляється. Твердження "гіпотеза H_0 не справджується" у розглядуваній задачі означає, що препарат нетоксичний (не є небезпечним для здоров'я), а твердження "H_0 не відхиляється" означає, що препарат класифікується як токсичний. Таким чином, нетоксичний препарат класифікується як токсичний і повертається назад постачальнику (для перероблення або знищення). Наслідки помилки такого роду — збитки, зростання вартості товару (ціна помилки — фінансові збитки).

Гіпотеза H_0 справджується, але згідно з критерієм відхиляється. Твердження "H_0 справджується" означає, що препарат токсичний (небезпечний для здоров'я). Твердження "H_0 відхиляється" означає, що препарат класифікується як нетоксичний (не є небезпечним для здоров'я пацієнтів). Таким чином, токсичний препарат класифікується як нетоксичний і йде на продаж. Наслідком помилки такого роду може стати смерть пацієнта (ціна помилки — летальний кінець).

Цей приклад наочно показує, що описані вище помилки істотно різняться за своєю ціною.

Помилка, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 відхиляється,

коли вона справджується, називається помилкою першого роду.

Помилка, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 не відхиляється, коли вона не справджується, називається помилкою другого роду.

Раніше вже відзначалося, що нульову гіпотезу дослідник вибирає сам. Якщо вибір нульової гіпотези можливий серед кількох варіантів, то за основну гіпотезу вибирають ту, для якої важливіше уникнути помилки, що полягає у відхиленні цієї гіпотези, коли вона вірна. Помилка першого роду — це помилка, яку важливіше уникнути, — помилка, ціна якої вища.

Зазначимо, що якою б не була критична множина S, значення критерію як випадкової величини може потрапити до S, коли гіпотеза H_0 справджується (помилка першого роду), і до $\bar{S}$, коли вона не справджується (помилка другого роду). Звідси слідує таке твердження: *у принципі неможливо побудувати критерій для перевірки гіпотез, який би не призводив до помилок.* Тому, намагаються будувати такі критерії, які мінімізують частоти помилок. Подивимось, як це робиться.

Нехай H_0 — основна гіпотеза. Припустимо для наочності, що вона проста. Конкуруюча гіпотеза H_1 також проста. Перевіряючи гіпотезу, можна припуститися помилок вище розглянутих типів. Постає питання, про ймовірності цих помилок.

Ймовірність помилки першого роду дорівнює ймовірності того, що значення критерію потрапить до критичної множини S, коли гіпотеза H_0 справджується, тобто $p(K \in S|H_0)$. Ймовірність помилки другого роду дорівнює ймовірності того, що значення критерію не потрапить до критичної множини, коли конкуруюча гіпотеза H_1 вірна, тобто $p(K \in \bar{S}|H_1)$.

Отже, ймовірності помилок першого та другого родів однозначно визначаються критичною множиною S (а отже, й частоти помилок першого і другого родів характеризуються цією множиною). Тому, вибираючи S, за умови, що ймовірність помилки першого роду мала, можна знайти ймовірність помилки другого роду, яка визначається вибраною критичною множиною S. Навпаки, можна вибрати S так, щоб ймовірність помилки другого роду була мала, але при цьому ймовірність помилки першого роду

визначиться знову ж таки вибраною множиною S.

Отже, вибрати S так, щоб одночасно були контрольовані ймовірності помилок першого та другого родів (а разом із ними і частоти помилок першого та другого родів), не вдасться. Тому будемо діяти так. Оскільки важливіше уникнути помилки першого роду (її ціна вища), перша вимога буде така: ймовірність помилки першого роду $p(K \in S|H_0)$ має бути малою. Це означає, що, у довгій серії експериментів, гіпотезу H_0, коли вона вірна, будемо відхиляти зрідка.

Таким чином, перша вимога щодо критерію буде такою: фіксуємо мале $\alpha > 0$ і вибираємо критичну множину S так, щоб ймовірність помилки першого роду визначалася умовою

$$p(K \in S|H_0) \leq \alpha.$$

Якщо ця основна вимога задовольняється більш як одним способом, то остаточний вибір критерію здійснюється так, щоб ймовірність відхилення гіпотези H_0, коли вона не вірна, була максимальною, для чого множину S вибираємо якомога ширшою.

Зазначимо, що число α, яке обмежує зверху ймовірність помилки першого роду, називається *рівнем значущості*, а ймовірність $p(K \in S|H_1)$ відхилити основну гіпотезу, коли справджується альтернативна гіпотеза H_1, називається *потужністю критерія* S.

З а у в а ж е н н я. Питання про те, яким має бути рівень значущості, не є статистичною задачею. Здебільшого за рівень значущості приймають числа 0,10; 0,05; 0,01; 0,001. Чим серйозніші наслідки помилки першого роду, тим меншим має бути рівень значущості.

14.2 Гіпотези про рівність середніх значень

Розглянемо дві нормально розподілені випадкові величини x та y. Провівши n незалежних спостережень однієї величини та m незалежних спостережень другої, можна знайти їх вибіркові середні значення $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Ці значення, як правило, будуть різнитися

між собою $\bar{x} \neq \bar{y}$. Виникає питання: істотно чи неістотно різняться між собою вибіркові середні значення?

На поставлене питання можна дати відповідь у термінах перевірки статистичних гіпотез. Припустимо, що дисперсії величин x та y рівні між собою $D[\mathrm{x}] = D[\mathrm{y}]$. На практиці така ситуація можлива, коли порівнюються середні розміри двох партій деталей виготовлених на одному і тому ж станку. Природно допустити, що дисперсії контрольованих розмірів однакові. Середні ж розміри аналізуються з метою перевірки налагодженості станка.

В припущенні, що дисперсії розглядуваних величин рівні, сформулюємо основну гіпотезу $H_0 : M[\mathrm{x}] = M[\mathrm{y}]$ (математичні очікування величин x та y рівні). Прийняття цієї гіпотези означає, що вибіркові середні значення неістотно різняться між собою. Відхилення ж основної гіпотези трактують на користь альтернативної, тобто середні значення вже істотно різняться між собою.

Критерій Стьюдента 1. Розглянемо послідовність формул, де вважається, що дві групи незалежних величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_m$ підлягають одному і тому ж нормальному законові розподілу:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}; \tag{14.1}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}; \tag{14.2}$$

$$s_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}; \tag{14.3}$$

$$s_y^2 = \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_m - \bar{y})^2}{m-1}; \tag{14.4}$$

$$s^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{m+n-2}. \tag{14.5}$$

Критерієм перевірки основної гіпотези служить випадкова величина

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{m+n}{mn}}}, \tag{14.6}$$

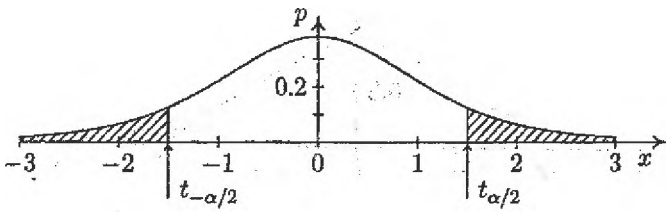


Рис. 14.1. Двобічна критична область

яку називають критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези про рівність середніх значень.

Доведено, що *величина t має розподіл Стьюдента з* $m+n-2$ *ступенями вільності (с. 127).*

Щоб скористатись цим критерієм, потрібно його реалізувати (тобто обчислити) на основі конкретних значень двох вибірок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Далі, відповідно заданому рівню значущості α, будують критичну область, яка, зрозуміло, залежатиме від конкуруючої гіпотези.

Перший випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M[\mathrm{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathrm{x}] \neq M[\mathrm{y}]$.

У цьому випадку, вважаючи нульову гіпотезу вірною, будують двобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала заданому рівню значущості α. Для цього, користуючись функцією $qt(p,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = t_{\alpha/2} = qt(p,k)$, де $p = 1-\alpha/2$, а $k = m+n-2$ — ступінь вільності. Якщо $|t| < t_0$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $|t| > t_0$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.1).

Другий випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M[\mathrm{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathrm{x}] > M[\mathrm{y}]$.

У цьому випадку будують правосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qt(x,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = t_\alpha = qt(p,k)$, де $p = 1-\alpha$, а $k = m+n-2$ — ступінь вільності. Якщо $t < t_0$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $t > t_0$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.2).

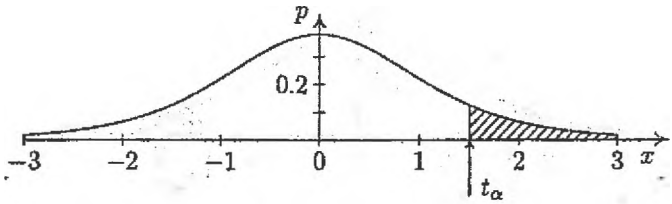


Рис. 14.2. Правобічна критична область

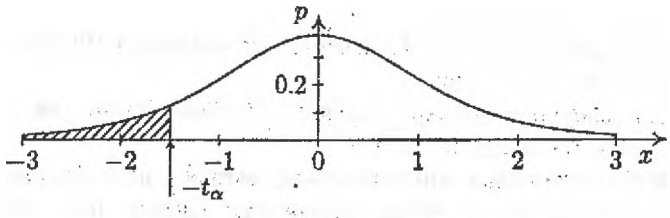


Рис. 14.3. Лівобічна критична область

Третій випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathbf{x}] = M[\mathbf{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathbf{x}] < M[\mathbf{y}]$.

Аналогічно попередньому випадкові, будують лівосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qt(x,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = t_\alpha = qt(\alpha, m+n-2)$. Якщо $t > t_0$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $t < t_0$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.3).

Приклад 14.1. Група з 10 студентів протягом канікул перебувала в спортивному таборі. До і після сезону у них визначали місткість легенів (у мілілітрах). За результатами вимірювань необхідно визначити, чи істотно змінився цей показник під впливом інтенсивних фізичних вправ.

До експерименту: 3400, 3600, 3000, 3500, 2900, 3100, 3200, 3400, 3200, 3400.

Після експерименту: 3800, 3700, 3300, 3600, 3100, 3200, 3200, 3300, 3500, 3600.

Р о з в' я з о к. Можна вважати, що ми маємо по 10

незалежних спостережень деяких випадкових величини x та y. Будемо вважати дисперсії цих величин рівними, оскільки спосіб визначення місткості легенів до і після сезону однаковий. Відносно математичних очікувань величин x та y висувається гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M[\mathrm{y}]$, яку ми приймемо за основну. Проаналізувавши дані прикладу, бачимо, що дані вибірки після експерименту здебільшого переважають дані вибірки до експерименту. Тому, альтернативна гіпотеза буде однобічною відповідно третьому випадкові $H_1 : M[\mathrm{x}] < M[\mathrm{y}]$. Прийняття основної гіпотези буде свідчити про випадкову і неісотну зміну місткості легенів, а її відхилення — про те, що під впливом інтенсивних фізичних вправ місткість легенів змінилася істотно. Знайдемо послідовно середні значення, дисперсії та величину критерія Стьюдента:

$$\bar{x} = \frac{3400 + 3600 + \cdots + 3400}{10} = 3270;$$

$$\bar{y} = \frac{3800 + 3700 + \cdots + 3600}{10} = 3430;$$

$$s_x^2 = \frac{(3400 - \bar{x})^2 + (3600 - \bar{x})^2 + \cdots + (3400 - \bar{x})^2}{9} = 51220;$$

$$s_y^2 = \frac{(3800 - \bar{y})^2 + (3700 - \bar{y})^2 + \cdots + (3600 - \bar{y})^2}{9} = 57890;$$

$$s^2 = \frac{9s_x^2 + 9s_y^2}{18} = 54560;$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{20}{100}}} = -1,5.$$

Ступінь вільності $k = m+n-2 = 10+10-2 = 18$. Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,05$ і знайдемо критичну точку $t_0 = qt(0,05;18) = -1,7$.

Оскільки значення критерію $(-1,5)$ більше за критичну точку $(-1,7)$, то на такому рівні значущості основну гіпотезу приймають і немає підстав вважати, що середнє значення об'єму легень змінилося істотно.

Візьмемо інше значення рівня значущості, наприклад, $\alpha = 0,1$ і знайдемо відповідну критичну точку $t_0 = qt(0,1;18) = -1,33$.

Тут, навпаки — значення критерію $(-1,5)$ менше за критичну точку $(-1,7)$. Тому, на рівні значущості 10% основну гіпотезу відхиляють і вважають, що під впливом інтенсивних фізичних вправ місткість легенів змінилася істотно.

Приклад 14.2. Досліджувалась можливість зменшення видатків на розвідування покладів золота на одній з ділянок родовища. Для цього замість частини шурфів пробурили свердловини методом ударно-канатного свердління (видатки на свердління менші). Результати випробування зразків порід із шурфів і свердловин наведено нижче (вміст Au в міліграмах на кубічний метр породи).

Свердловини: 322, 250, 225, 315, 399, 348, 192, 375, 381, 538, 198, 317, 293.

Шурфи: 478, 299, 541, 457, 251, 221, 548, 431, 397, 462, 457, 251, 221, 548.

Чи можна вважати, що результати випробування зразків, узятих із свердловин, і зразків, узятих із шурфів, різняться неістотно?

Р о з в' я з о к. У даному прикладі маємо 13 незалежних спостережень випадкової величини $\mathbf{x}$ (результати випробування зразків порід із свердловин) та 14 незалежних спостережень випадкової величини $\mathbf{y}$ (результати випробування зразків порід з шурфів). Будемо вважати дисперсії цих величин рівними, оскільки спосіб визначення вмісту золота в міліграмах на кубічний метр породи однаковий для обох методів).

Відносно математичних очікувань величин $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ висувається гіпотеза $H_0 : M[\mathbf{x}] = M[\mathbf{y}]$, яку ми приймемо за основну. Альтернативна гіпотеза матиме двобічний характер $H_1 : M[\mathbf{x}] \neq M[\mathbf{y}]$, що відповідає першому випадкові. Прийняття основної гіпотези буде свідчити про випадкову й неістотну різницю вмісту золота в кубічному метрі породи для обох методів, а її відхилення — про те, що ця різниця істотна.

Обчислимо середні значення, дисперсії та величину критерія Стьюдента:

$$\bar{x} = \frac{322 + 250 + \cdots + 293}{13} = 319,5;$$

$$\bar{y} = \frac{478 + 299 + \cdots + 548}{14} = 397,3;$$

$$s_x^2 = \frac{(322 - \bar{x})^2 + (250 - \bar{x})^2 + \cdots + (293 - \bar{x})^2}{12} = 8938;$$

$$s_y^2 = \frac{(478 - \bar{y})^2 + (299 - \bar{y})^2 + \cdots + (548 - \bar{y})^2}{13} = 1536;$$

$$s^2 = \frac{12s_x^2 + 13s_y^2}{25} = 12280;$$

$$t = \frac{319,5 - 397,3}{\sqrt{12280\frac{13+14}{13\cdot 14}}} = -1,8.$$

Ступінь вільності $k = m+n-2 = 13+14-2 = 25$. Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,1$ і знайдемо критичну точку $t_0 = qt(0,95;25) = 1,7$.

Оскільки значення критерію $|-1,8| > 1,7$, то на рівні значущості 10% основну гіпотезу відхиляємо. Тобто, розбіжність у вимірюваннях для обох методів — невипадкова.

14.3 Гіпотези про середнє значення

Нехай випадкова величина x розподілена нормально. Математичне очікування цієї величини невідоме, проте є підстави вважати, що воно дорівнює певному числу $M[\mathrm{x}] = M_0$. Наприклад, якщо x — довжина партії деталей, що виготовляються станком-автоматом, то припускають, що математичне очікування цієї величини дорівнює проектованому розмірові M_0. Щоб перевірити це припущення, знаходять вибіркове середнє значення $\bar{x}$ і встановлюють істотне чи ні розходження між M_0 та $\bar{x}$. Якщо розходження виявиться неістотним, то станок забезпечує в середньому проектований розмір. Якщо розходження істотне, то станок потребує налагодження.

Критерій Стьюдента 2. Будемо вважати справедливою основну гіпотезу про рівність математичного очікування випадкової величини x певному числу M_0 ($H_0 : M[\mathrm{x}] = M_0$). В якості критерію перевірки основної гіпотези візьмемо випадкову

функцію

$$t = (\bar{x} - M_0)\frac{\sqrt{n}}{s_x^2}, \tag{14.7}$$

де $\bar{x}$ — вибіркове середнє значення, s_x^2 — виправлена вибіркова дисперсія, а n — об'єм вибірки.

Доведено, що ця *величина має розподіл Стьюдента з* $n-1$ *ступенем вільності (с. 127)*.

Критична область будується залежно від конкуруючої гіпотези.

Перший випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathrm{x}] \neq M_0$. У цьому випадку будують двобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала заданому рівню значущості α. Для цього, користуючись функцією $qt(p,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = qt(1-\alpha/2, n-1)$, де n — об'єм вибірки. Якщо абсолютне значення критерію t менше числа t_0, то нульову гіпотезу приймають. У противному випадку її відхиляють (див. рис. 14.1).

Другий випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathrm{x}] > M_0$.

У цьому випадку, вважаючи нульову гіпотезу вірною, будують правосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qt(p,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = qt(1-\alpha, n-1)$. Якщо $t < t_0$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $t > t_0$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.2).

Третій випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : M[\mathrm{x}] = M_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : M[\mathrm{x}] < M_0$.

Аналогічно попередньому випадкові, будують лівосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qt(p,k)$, знаходять критичну точку $t_0 = qt(\alpha, n-1)$. Якщо $t > t_0$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $t < t_0$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.3).

Приклад 14.3. Номінальний опір резистора 2000 Ом. Для контролю відібрано партію з 12 резисторів. Після вимірювання кожного опору з точністю до 5 Ом одержано такі значення: 2130, 2090, 2030, 2080, 1920, 2020, 2015, 2000, 2045, 1940, 1980, 1970.

Чи можна відхилення від номіналу (2000 Ом) розглядати як випадкові (допустимі), чи, навпаки, результати вимірювань свідчать про те, що опір резисторів істотно відрізняється від номіналу?

Р о з в' я з о к. Результати вимірювання підлягають нормальному законові. Тому, можемо говорити про нормально розподілену випадкову величину x. Дані прикладу можна розглядати як окремі значення цієї величини: $x_1 = 2130$, $x_2 = 2090, \ldots; x_{12} = 1970$, а номінал 2000 Ом вважати її математичним очікуванням. Висунемо основну гіпотезу, що відхилення від номіналу мають випадковий і несуттєвий характер, тобто H_0 : $M[\mathrm{x}] = 2000$. Тоді, зміст альтернативної гіпотези H_1 полягатиме в тому, що відхилення від номіналу будуть невипадкові і суттєві, коротко — $H_1 : M[\mathrm{x}] \neq 2000$. У цьому випадку критична область буде двобічна (перший випадок). Обчислимо вибіркові середнє значення, дисперсію та критерій Стюдента:

$$\bar{x} = \frac{2130 + 2090 + \cdots + 1970}{12} = 2018;$$

$$s^2 = \frac{(2130 - \bar{x})^2 + (2090 - \bar{x})^2 + \cdots + (1970 - \bar{x})^2}{11} = 3838;$$

$$t = (2018 - 2000)\sqrt{\frac{12}{3838}} = 1,025.$$

Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,1$ і знайдемо відповідну критичну точку $t_{0,05;11} = 1,8$. Бачимо, що $t = 1,025$ лежить в інтервалі $(-1,8; 1,8)$. Отже, відхиляти головну гіпотезу на рівні значущості $\alpha = 0,1$ не має підстав, а розбіжність вимірювань має випадковий та несуттєвий характер.

Приклад 14.4. Сталевий дріт, що йде на виготовлення канатів, повинен мати середнє граничне значення зусилля на розрив 6720 кг/см^2 (у середньому розрив дроту настає при такій напрузі). Раніше проведена серія спостережень дає підставу вважати, що значення граничного зусилля на розрив, яке витримують окремі зразки дроту, має нормальний розподіл. З метою контролю якості з кожної партії дроту, що надходять на завод, 20 зразків

випробовують на розрив. Результати одного з таких випробувань наведено нижче (фіксувалися граничні значення зусилля на розрив, за яких відбувається руйнування зразка, тобто границя міцності).

Границя міцності: 6300, 6870, 6720, 6980, 6780, 6780, 6780, 6720, 6630, 6660, 6900, 7130, 6690, 6750, 6560, 6700, 6930, 6720, 6950, 6960.

Чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що для цієї партії дроту границя міцності більша ніж 6720 кг/см^2?

Р о з в' я з о к. За нульову гіпотезу приймемо твердження, що середнє граничне значення зусилля на розрив складає 6720 кг/см^2, або $H_0 : m = 6720$. Альтернативна гіпотеза, на відміну від попереднього прикладу, буде вже однобічною $H_1 : m > 6720$. Обчислимо вибіркові середнє значення, дисперсію та критерій (14.7):

$$\bar{x} = \frac{6300 + 6870 + \cdots + 6960}{20} = 6776;$$

$$s^2 = \frac{(6300 - \bar{x})^2 + (6870 - \bar{x})^2 + \cdots + (6960 - \bar{x})^2}{19} = 32120;$$

$$t = (6776 - 6720)\sqrt{\frac{20}{32120}} = 1,4.$$

Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,1$ і знайдемо відповідну верхню границю $t_{0,9;19} = 1,33$. Бачимо, що $t = 1,4 > 1,33$. Отже, основна гіпотеза на рівні значущості десяти відсотків відхиляється. Тому, не можна вважати, що для цієї партії дроту границя міцності більша ніж 6720 кг/см^2.

14.4 Гіпотези про дисперсію

Нехай випадкова величина $\mathbf{x}$ розподілена нормально. Дисперсія цієї величини невідома, проте є підстави вважати, що вона дорівнює певному числу $D[\mathbf{x}] = D_0$. Незалежні спостереження величини $\mathbf{x}$ дадуть нам статистичний матеріал — вибірку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обсягом n. На її основі обчислимо середнє значення та виправлену вибіркову дисперсію s_x^2.

Задача така. Як за величиною вибіркової дисперсії s_x^2 установити, істотно чи ні різняться між собою числа s_x^2 та D_0 (вибіркова та гіпотетична дисперсії).

На практиці така задача виникає, коли потрібно провірити точність приладів, інструментів, станків, технологічної сталості певних процесів. Нехай контролюється розмір деталей, що виготовляються станком-автоматом. Якщо вибіркове значення дисперсії, обчислене на основі вибірки, більше відомої допустимої величини розсіювання розміру деталей, то виникає питання, чи не потребує станок налагодження.

Критерій Пірсона (χ^2 - критерій). Висловимо основну гіпотезу про рівність дисперсії деякому числу $H_0 : D[\mathrm{x}] = D_0$. Для перевірки гіпотези існує спеціальна функція

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{D_0}. \tag{14.8}$$

Доведено, що ця функція має *pchisq*$(x, n-1)$ *або* $\chi^2(x, n-1)$ *розподіл (с. 124)*, де n—об'єм вибірки.

Критична область будується залежно від конкуруючої гіпотези.

Задамо рівень значущості α і обчислимо величину χ^2 за формулою (14.8).

Перший випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] \neq D_0$. У цьому випадку, вважаючи нульову гіпотезу вірною, будують двобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала заданому рівню значущості α. Для цього, користуючись функцією *qchisq*(p, k), знаходять дві критичні точки $\chi_1^2 =$ *qchisq*$(\alpha/2, k)$ та $\chi_2^2 =$ *qchisq*$(1-\alpha/2, k)$, де $k = n-1$ — ступінь вільності.

Якщо $\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2$, то нульову гіпотезу приймають. У противному випадку її відхиляють (див. рис. 14.4).

Другий випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] > D_0$.

У цьому випадку, вважаючи нульову гіпотезу вірною, будують правосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись

функцією $qchisq(p,k)$, знаходять критичну точку $\chi_2^2 = qchisq(1-\alpha, n-1)$.

Якщо $\chi^2 < \chi_2^2$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $\chi^2 > \chi_2^2$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.5).

Третій випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D_0$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] < D_0$.

Аналогічно попередньому випадкові, будують лівосторонню критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qchisq(p,k)$, знаходять критичну точку $\chi_1^2 = qchisq(\alpha, n-1)$.

Якщо $\chi^2 > \chi_1^2$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $\chi^2 < \chi_1^2$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.6).

Приклад 14.5. У результаті перевірки коефіцієнта пружності зразків за стандартною процедурою встановлено, що дисперсія коефіцієнта пружності дорівнює 324. Дібрано вибірку обсягом 20 й одержано оцінку дисперсії $s^2 = 530$. Чи є слушним припущення про нестабільність стандартної процедури перевірки коефіцієнта пружності (стабільність характеризується дисперсією)?

Р о з в' я з о к. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = 324$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] > 324$. Прийняття нульової гіпотези свідчитиме про стабільність стандартної процедури перевірки коефіцієнта пружності, а її не прийняття — про відсутність такої стабільності.

Обчислимо критерій Пірсона:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{D_0} = \frac{(20-1)\cdot 530}{324} = 31,08.$$

Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,1$ і знайдемо критичну точку для побудови критичної області (другий випадок) $\chi_2^2 = qchisq(0,9;19) = 27,2$.

Бачимо, що значення критерію $\chi^2 = 31,08$ більше за критичну точку $\chi_2^2 = 27,2$. Тому є підстава говорити про нестабільність стандартної процедури перевірки коефіцієнта пружності на рівні значущості 10%.

14.5 Гіпотеза про рівність дисперсій

На практиці задача порівняння дисперсій виникає тоді, коли потрібно порівняти між собою точність приладів, інструментів, методів вимірювань тощо. Зрозуміло, що перевагу матиме той прилад чи інструмент, який забезпечуватиме найменшу міру розсіювання результатів, тобто найменшу дисперсію.

Розглянемо дві нормально розподілені випадкові величини **x** та **y**. Провівши n незалежних спостережень однієї величини та m незалежних спостережень другої, можна знайти їх виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 та s_y^2. Потрібно за значеннями s_x^2, s_y^2 та рівнем значущості α перевірити нульову гіпотезу про те, що дисперсії випадкових величин **x** та **y** рівні між собою:

$$D[\mathbf{x}] = D[\mathbf{y}].$$

Припустимо, що нульова гіпотеза прийнята, тобто дисперсії розглядуваних випадкових величин рівні. Тоді, різниця між значеннями виправлених вибіркових дисперсій s_x^2 та s_y^2, вважається неістотною й спричинена, можливо, випадковим відбором об'єктів вибірки. Наприклад, якщо результати вимірювань деякої партії деталей, виконаних двома приладами, мають неістотну різницю між значеннями виправлених вибіркових дисперсій, то вважається, що прилади мають однакову точність.

Якщо ж нульова гіпотеза відхилена, то різниця між значеннями виправлених вибіркових дисперсій s_x^2 та s_y^2, вважається істотною і спричинена різними значеннями дисперсій розглядуваних величин **x** та **y**. Наприклад, якщо результати вимірювань деякої партії деталей, виконаних двома приладами, мають істотну різницю між значеннями виправлених вибіркових дисперсій, то вважається, що прилади мають різну точність.

Критерій Фішера.

В якості критерія перевірки нульової гіпотези про рівність дисперсій $D[\mathbf{x}] = D[\mathbf{y}]$ розглядуваних випадкових величин **x** та **y** беруть відношення їх виправлених дисперсій, тобто випадкову

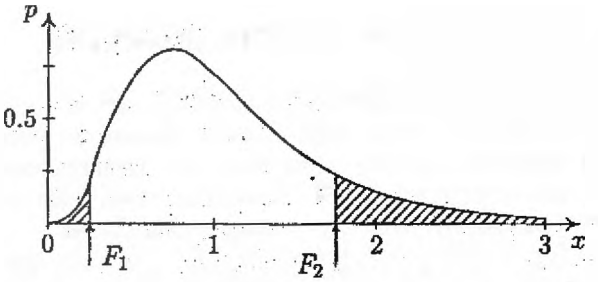


Рис. 14.4. Двобічна критична область

величину

$$F(x, n, m) = \frac{s_x^2}{s_y^2}. \tag{14.9}$$

Величина F при умові справедливості нульової гіпотези має розподіл Фішера зі ступенями вільності $k_1 = n-1$ та $k_2 = m-1$, де n та m — обсяги вибірок (с. 128).

Критична область будується в залежності від виду конкуруючої гіпотези.

Перший випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D[\mathrm{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] \neq D[\mathrm{y}]$.

У цьому випадку будують двобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала заданому рівню значущості α. Для цього, користуючись функцією qF), знаходять критичні точки $F_2 = qF(1-\alpha/2, n-1, m-1)$ та $F_1 = qF(\alpha/2, n-1, m-1)$. Якщо значення F; обчислене за формулою (14.9), попаде в інтервал (F_1, F_2), то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж ні, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.4).

Другий випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D[\mathrm{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] > D[\mathrm{y}]$.

У цьому випадку будують правобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qF(p, k_1, k_2)$, знаходять критичну точку $F_2 = qF(1-\alpha, n-1, m-1)$. Якщо $F < F_2$, то

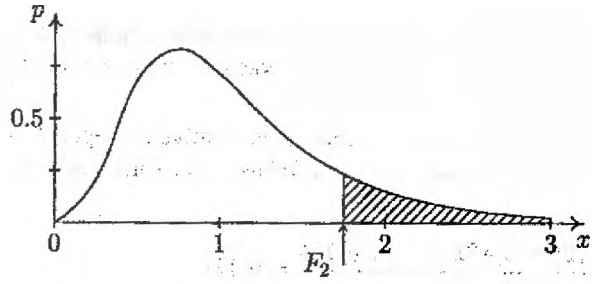


Рис. 14.5. Правобічна критична область

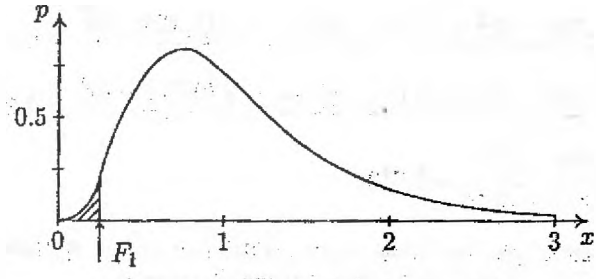


Рис. 14.6. Лівобічна критична область

нульову гіпотезу приймають. Якщо $F > F_2$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.5).

Третій випадок. Нульова гіпотеза $H_0 : D[\mathrm{x}] = D[\mathrm{y}]$. Конкуруюча гіпотеза $H_1 : D[\mathrm{x}] < D[\mathrm{y}]$.

У цьому випадку будують лівобічну критичну область так, щоб ймовірність попадання у неї значення критерію дорівнювала α. Для цього, користуючись функцією $qF(p, k_1, k_2)$, знаходять критичну точку $F_1 = qF(\alpha, n-1, m-1)$. Якщо $F > F_1$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $F < F_1$, то нульову гіпотезу відхиляють (див. рис. 14.6).

Приклад 14.6. При вимірюванні опору дроту двох типів (А та В) одержано дані, наведені нижче.

Дріт А: 0,126; 0,131; 0,126; 0,127; 0,124; 0,130; 0,128; 0,124.

Дріт У: 0,121; 0,121; 0,124; 0,122; 0,120; 0,124; 0,125; 0,120.

Стверджується, що між розсіюваннями опорів дроту типів A та B немає різниці. Чи не суперечить це твердження наведеним даним?

Р о з в' я з о к. Послідовно знайдемо середні значення, дисперсії та величину критерія Фішера для даних вибірок.

$$\bar{x} = \frac{0,126 + 0,131 + \cdots + 0,124}{8} = 0,127;$$

$$\bar{y} = \frac{0,121 + 0,121 + \cdots + 0,120}{8} = 0,122;$$

$$s_x^2 = \frac{(0,126 - \bar{x})^2 + (0,131 - \bar{x})^2 + \cdots + (0,124 - \bar{x})^2}{7} = 6,571 \times 10^{-6};$$

$$s_y^2 = \frac{(0,121 - \bar{y})^2 + (0,121 - \bar{y})^2 + \cdots + (0,120 - \bar{y})^2}{7} = 3,839 \times 10^{-6};$$

$$F = \frac{6,571 \times 10^{-6}}{3,839 \times 10^{-6}} = 1,712.$$

Візьмемо рівень значущості $\alpha = 0,1$ і знайдемо критичні точки для побудови критичної області (перший випадок).

$$F_1 = qF(\alpha/2, k_1, k_2) = qF(0,05; 7; 7) = 0,3;$$
$$F_2 = qF(1 - \alpha/2, k_1, k_2) = qF(0,95; 7; 7) = 3,8.$$

Бачимо, що значення критерію $F = 1,7$ належить інтервалу $(0,3;\ 3,8)$, тому вважаємо, що між розсіюваннями опорів дроту типів A та B немає різниці.

14.6 Контрольні питання

1. З якою метою в математичній статистиці використовують гіпотези?
2. Яка загальна методика перевірки статистичних гіпотез?
3. Що називається статистичним критерієм прийняття рішення?
4. Опишіть можливі помилки при прийнятті рішення. Які це помилки першого та другого родів?

5. В чому суть гіпотез про середнє значення та про рівність середніх значень?
6. Яка роль розподілу Стьюдента при аналізі гіпотез про середні значення?
7. Назвіть практичні задачі, де використовують гіпотези про середні значення.
8. В чому суть гіпотези про рівність дисперсії деякому числу?
9. Зформулюйте критерій Пірсона і опишіть методику його застосування.
10. В чому суть гіпотези про рівність між собою дисперсій двох розподілів?
11. Зформулюйте критерій Фішера і опишіть методику його застосування.
12. Назвіть кілька практичних задач,. де важливою є оцінка дисперсії.

14.7 Задачі розділу

14.1. Щоб порівняти відбивну здатність двох видів фарби, провадили такий експеримент: з 10 вибраних навмання пробних зразків п'ять пофарбували однією фарбою, а решту — іншою. Одержані за допомогою оптичного приладу результати вимірювань наведено нижче.
Фарба А: 195, 150, 205, 120, 160.
Фарба В: 200, 115, 220,185,170.
Чи свідчать ці дані про відмінність відбивної здатності фарб?

14.2. На виробництві електричні лічильники, що мають обертовий диск, були відрегульовані так, що їх робота стала синхронною з роботою стандартного лічильника. Перевірка 10 лічильників, яка полягала у визначенні їхньої сталої за допомогою точних ватметрів і секундомірів, дала такі результати:

Номер ліч.	Значення	Номер ліч.	Значення
1	0,983	6	0,998
2	1,002	7	0,994
3	0,998	8	0,991
4	0,996	9	1,005
5	1,003	10	0,986

Стандартний лічильник характеризує стала 1,000. Чи можна відхилення від стандарту розглядати як випадкові, чи, навпаки, результати вказують на те, що сталі відрегульованих лічильників систематично відрізняються від сталої стандартного лічильника? Відповісти на це запитання, перевіривши гіпотезу про те, що 10 вимірювань утворюють вибірку, одержану з нормального розподілу із середнім 1,000.

14.3. Порівнюють два сорти сталі за здатністю до глибокого відпуску. Для цього виготовили по сім зразків кожного сорту сталі й випробували їх за методом Еріксона, згідно з яким у зразок вдавлюється конус із кульковим наконечником. Глибину проникнення кульки вимірюють у міліметрах. Результати випробувань наведено нижче.

Сталь I: 10,85; 10,24; 10,48; 10,35; 11,07; 9,54; 11,18.

Сталь II: 11,05; 10,07; 10,03; 10,57; 10,27; 9,97; 9,92.

Чи можна вважати, що ці сорти сталі мають однакову здатність до глибокого відпуску?

Розв'язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез.

14.4. Маса пакунка з природним барвником має становити 50 кг, а дисперсія розсіювання маси не повинна перевищувати 0,01 кг^2. При обстеженні 10 пакунків одержано такі результати (маса в кілограмах): 50,10; 50,07; 49,93; 49,81; 49,70; 49,76; 50,08; 50,18; 49,79; 51,02.

Чи свідчать наведені дані, що зазначені вимоги виконуються?

14.5. Подані нижче дані характеризують твердість 14 зразків сплаву в умовних одиницях: 12,1; 13,7; 11,0; 11,6; 11,9; 13,4; 12,2; 12,5; 11,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5; 11,7.

Припустимо, що твердість сплаву розподілена нормально. Чи можна вважати, що параметр a (середнє значення) нормального розподілу дорівнює 12,0?

14.6. На верстаті-автоматі виробляється однакова продукція. Критичним розміром виробів є зовнішній діаметр. Після налагодження верстата відібрали 20 виробів. При цьому виявилося, що вибіркова дисперсія розміру зовнішнього діаметра становить 0,84 мм^2. Через певний проміжок часу з метою контролю точності роботи верстата (і, при потребі, для його налагодження) добирається вибірка обсягом 15 виробів. Виявилося, що вибіркова дисперсія, обчислена за нею, дорівнює 1,07 мм^2.
Чи свідчать наведені дані про зміну точності роботи верстата?

14.7. Швидкість полімеризації перевірили на кількох зразках полімеру. Розрахункова швидкість полімеризації становить 24% за годину. У восьми експериментах одержано такі результати: 23,6; 22,8; 25,7; 24,8; 26,4; 24,3; 23,9; 25,0.
Чи є достатні підстави вважати, що розрахункова швидкість полімеризації узгоджується з цими даними?

14.8. Щоб перевірити, чи впливає на міцність бетону спеціальний спосіб його виготовлення, провели експеримент. З партії сировини було взято шість вибірок, причому однорідних, наскільки це можливо. Потім вибірки навмання поділили на дві групи по три в кожній. Після цього вибірки з другої групи піддали спеціальному обробленню і з кожної виготовили пробний куб. Після 28-денної витримки шести пробних кубів визначили їх опір стиску. Одержали такі результати:
Бетон 1: 290, 311, 284.
Бетон 2: 309, 318, 318.
Примітка. Наведено граничні значення навантаження, при яких відбувається руйнування зразків.
Чи свідчать ці дані про наявність ефекту спеціального оброблення бетону?

14.9. Щоб зменшити вихід небажаного побічного продукту, застосовували каталізатори А та В. При використанні кожного з них були одержані вибірки, подані нижче. Величиною, що спостерігалася, був вихід небажаного продукту у відсотках.

Каталізатор А: 41, 52, 29, 43, 38, 45, 52, 42, 36.
Каталізатор В: 40, 27, 59, 42, 25, 58, 42, 26, 37.
Чи можна вважати, що стабільність виходу небажаного продукту (характеризується дисперсією) при використанні каталізаторів А та В однакова?

14.10. На комп'ютері моделюється нормально розподілена випадкова величина. Реалізація вибірки цієї випадкової величини: 2,41; 2,26; 2,10; 2,53; 1,96; 1,31; 2,32; 2,66.
Чи можна стверджувати, що вибірку одержано з нормального розподілу із середнім 2,5?
Вказівка. Скористатися критерієм Стьюдента, спочатку сформулювавши відповідну задачу перевірки статистичних гіпотез.

14.11. В одному класі з 20 дітей навмання були відібрані 10, яким щоденно почали давати апельсиновий сік. Решта 10 школярів щодня одержували молоко. Через певний час зафіксували збільшення маси дітей у фунтах (один фунт становить 453,6 г):

Сік	4,0	2,5	3,5	4,0	1,5	1,0	3,5	3,0	2,5	3,5
Молоко	1,5	3,5	2,5	3,0	2,5	2,0	2,0	2,5	1,5	3,0

Середнє збільшення маси одного школяра становить у першій групі 2,9 фунта, у другій — 2,4. Чи є істотною ця різниця в середній масі дітей?

14.12. Нижче наведено дані про вимірювання нерівностей поверхні з регулярним профілем (одного й того самого зразка чистоти) за допомогою подвійних мікроскопів.
Мікроскоп I: 0,8; 2,0; 3,1; 3,5; 2,1; 1,7; 0,9; 1,1; 3,3.
Мікроскоп II: 0,7; 2,1; 3,1; 0,9; 3,6; 2,7; 0,8; 4,7; 0,3; 4,1; 2,8; 0,6.
З'ясувати, чи можна вважати точність вимірювання кожним мікроскопом однаковою?

14.13. На сталеливарному заводі з метою контролю вмісту марганцю в одній з марок сталі зробили 10 відливків із конвертора I і стільки ж із конвертора II. Нижче наведено процентний вміст марганцю в кожному відливку.
Конвертор I: 1,20; 1,17; 1,15; 1,21; 1,14; 1,17; 1,18; 1,21; 1,25; 1,14.

Конвертор II: 1,39; 1,29; 1,28; 1,34; 1,32; 1,30; 1,28; 1,35; 1,35; 1,30. Чи можна вважати вміст марганцю в сталі, виплавленій у цих конверторах, однаковим?

14.14. Для зменшення дисперсії відбивної здатності фарби внесено зміни в технологію її виготовлення. Щоб переконатися, що такі зміни справді дають ефект, виготовили 10 пробних зразків. Нижче наведено дані (у відносних одиницях) про відбивну здатність фарби, виготовленої при використанні звичайної (A) та нової (B) технологій, одержані за допомогою спеціального оптичного приладу.

Технологія A: 40, 45, 195, 65, 145.

Технологія B: 110, 55, 120, 50, 80.

Чи свідчать ці дані про зміну дисперсії відбивної здатності фарби?

14.15. Дослідження, що проводилися протягом кількох років після того, як у практиці лижного спорту почала застосовуватися техніка ковзнової ходи, дають підставу припустити, що вона, за умов спеціально підготовленої траси, забезпечує на дистанції 15 км у чоловіків виграш порівняно з традиційною технікою в середньому 2 хв. Нижче наведено результати (у хвилинах) змагань (дистанція 15 км) двох груп лижників: одні проходили дистанцію традиційною ходою, а інші - ковзною.

Традиційна хода: 37,02; 36,74; 37,82; 38,12; 36,91; 37,98; 38,21; 37,51; 37,56; 38,03.

Ковзна хода: 35,81; 35,61; 35,02; 35,53; 35,84; 35,12; 36,12; 36,49; 35,62; 36,28.

Чи можна за результатами цих змагань дійти висновку, що середня різниця результатів становить 2 хв?

14.16. Значення незміщеної оцінки дисперсії вибірки A становить 55,4 кг^2, а вибірки B — 87,3 кг^2. Чи можна стверджувати, що вибірки одержано із сукупності з одним і тим самим значенням дисперсії, якщо їх обсяги становлять відповідно 15 та 12?

Які припущення при цьому необхідно зробити?

14.17. Досліджувалась корозійна стійкість нержавіючої сталі $18Cr10Ni2Mo$ (сталь, що містить 18 % хрому, 10 % нікелю, 2 % молібдену). Експеримент проводили на 12 зразках. Перш ніж дослідити їх на корозійну стійкість, визначили якість сталі, із якої

були виготовлені зразки (відповідність стандарту). Вміст хрому (у масових відсотках) у досліджуваних зразках був такий: 17,4; 17,9; 17,6; 18,1; 17,6; 18,9; 16,9; 17,5; 17,8; 17,4; 24,6; 21,0.
Перевірити, чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що вміст хрому в сталі становить 18 %?

14.18. У лабораторії, де вивчається вплив довкілля на людину, для визначення кімнатної температури, за якої найбільш комфортно почувають себе чоловіки й жінки, були обстежені 10 чоловіків і стільки само жінок. Одержані значення температури найбільшої комфортності (за Фаренгейтом) наведено нижче.
Чоловіки: 74, 71, 77, 76, 72, 75, 73, 74, 75, 72.
Жінки: 75, 77, 78, 79, 77, 73, 78, 78, 80, 76.
Чи свідчать ці дані про те, що температура, за якої людина почуває себе комфортно, для чоловіків та жінок однакова?

$$t°F = (9/5)t°C + 32,$$

де $t°F$ — температура за Фаренгейтом, $t°C$ — температура за Цельсієм.

14.19. Готується гумова суміш, із якої потім виготовляються зразки для випробувань. Очікувана (розрахункова) міцність на згин гуми в умовних одиницях становить 11.
Чи можна за наведеними нижче даними дійти висновку, що одержано гуму з очікуваною міцністю на згин?
Міцність на згин: 10,3; 11,1; 11,8; 12,0; 10,8; 13,6; 12,0; 12,5; 11,6; 12,2;
12,3; 12,5; 12,6; 13,7; 13,3; 10,5.

14.20. На двох верстатах одного класу точності виготовляють однакову продукцію. Критичним розміром виробу є його зовнішній діаметр. Нижче наведено значення оцінок зовнішнього діаметра та оцінок його дисперсії, обчислені за вибірками обсягом 15 та 10, одержаними відповідно з верстатів A і B:

$$\bar{\xi}_A = 45,3; \qquad \bar{S}_A = 1,07; \qquad \bar{\xi}_B = 46,1; \qquad \bar{S}_B = 0,84.$$

Чи можна за цими даними дійти висновку, що зовнішній діаметр виробів, виготовлених на верстатах A та B, однаковий?

14.21. Пропонується нова методика визначення вмісту марганцю в одній з марок сталей, яка, ймовірно, дає менше розсіювання результатів порівняно з традиційною. Нижче наведено процентний вміст марганцю в 10 відливках, визначений за традиційною методикою, та у 8 — за новою.

Традиційна методика: 1,22; 1,15; 1,17; 1,22; 1,26; 1,27; 1,19; 1,22; 1,20; 1,15.

Нова методика: 1,21; 1,24; 1,18; 1,17; 1,15; 1,18; 1,17; 1,17.

Чи є підстава вважати, що нова методика визначення вмісту марганцю дає менше розсіювання порівняно з традиційною?

14.22. Два підприємства (А та В) виготовляють цегляну футерівку для кисневих конверторів. Споживач хоче з'ясувати, чи відрізняється футерівка підприємств за своїми характеристиками, щоб надалі закуповувати продукцію з кращими показниками. Для цього він реєструє кількість плавок, які можна зробити в конверторі до того, як з'явиться потреба замінити футерівку. Одержані дані наведено нижче.

Підприємство А: 237, 224, 218, 227, 234, 215, 219, 225, 230.

Підприємство В: 216, 202, 205, 200, 207, 198, 222, 214, 226, 204.

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про істотну різницю кількості плавок до заміни футерівок, виготовлених на підприємствах А та В?

14.23. Проводилося дослідження шин, що використовуються на автобусах, з метою розроблення модифікації, яка б мала більший пробіг. Зокрема, досліджувалася температура, до якої нагрівалися передні шини під час руху автобуса. За наведеними в таблиці значеннями температури (в умовних одиницях) лівої та правої шин з'ясувати, чи є істотними відмінності в цих показниках.

Авто	Ліва	Права	Авто	Ліва	Права
1	36	27	7	41	60
2	42	45	8	40	34
3	55	84	9	100	117
4	59	84	10	58	78
5	79	70	11	38	56
6	108	99	12	73	88

Сформулювати й розв'язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.

14.24. На автоматичному верстаті обробляються втулки. Після налагодження верстата було дібрано вибірку кількістю 10 виробів. Виявилося, що вибіркове значення ξ діаметра втулки становить 2,059 мм, а вибіркова дисперсія $s^2 = 4,4$ мкм^2. Через певний проміжок часу з метою контролю рівня налагодження верстата на заданий діаметр втулки знову добиралася вибірка кількістю 10 виробів, для якої вибіркове середнє $\xi = 2,063$ мм, а вибіркова дисперсія $s^2 = 8,6$ мкм^2. Припустимо, що протягом зазначеного проміжку часу зміни в роботі верстата можуть позначитися тільки на рівні його налагодження, але точність роботи верстата не зміниться.

Чи свідчать наведені дані про зміну рівня налагодження верстата за проміжок часу, що відокремлює моменти добору вибірок?

14.25. Дисперсія границі міцності на розрив волокна становить 35,63 фунт^2. Очікується, що внесені в технологічний процес аміни зменшать зазначену дисперсію. Зареєстровано такі значення міцності на розрив (у фунтах): 151, 156, 147, 153, 155, 148, 160, 149, 156, 161, 154, 162, 163, 149, 150. 123.

Чи привела зміна технологічного процесу до зменшення дисперсії? (1 фунт=453,6 г).

14.26. Порівнюється дія знеболювальних препаратів А та В (у деяких випадках одним з ліків може бути інертне плацебо (пустушка), що використовується для контролю при дослідженні дії іншого препарату). Група хворих, які виявили бажання взяти участь в експерименті, налічувала вісім чоловік. Цілком можливо, що в цих хворих вік, стать, загальний стан тощо не однакові. Тому дають обидва препарати кожному хворому і щоразу фіксують тривалість знеболювальної дії кожного з них. Щоб забезпечити чистоту експерименту, вжито всі виправдані застережні заходи: між прийманнями обох препаратів минає час, що виключає перекривання їх дії; четверо хворих одержують спочатку препарат В, при цьому жоден із них не знає, який саме препарат він уживає, і т.д. Результати експерименту наведено в таблиці (фіксувалася в годинах тривалість знеболювальної дії препаратів А та В).

Хворий	Трив. преп-ту А	Трив. преп-ту В	Різниця
1	3,2	3,8	0,6
2	1,6	1,0	-0,6
3	5,7	3,6	2,7
4	2,8	5,0	0,8
5	5,5	3,5	-0,5
6	1,2	7,3	2,3
7	6,1	4,8	1,2
8	2,9	8,4	1,9

Зробити висновок про дію препаратів, вважаючи, що: 1) немає апріорної інформації про ефективність препаратів; 2) фармакологічна активність препарату В не менша, ніж препарату А. Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

14.27. Необхідно порівняти границю міцності при розтягу гумової суміші типів А та В. Для цього виготовили партію з восьми зразків прямокутної форми, по чотири з кожної суміші, і піддали їх повздовжньому розтягу. Один із зразків суміші А, визнаний дефектним, був вилучений з партії до початку випробувань.

Одержані результати випробувань (фіксувалася границя міцності при розтягу зразків двох гумових сумішей) наведено нижче.

Суміш А: 3210, 3000, 3315.

Суміш В: 3225, 3320, 3365, 3145.

Чи можна вважати, що склад гуми не впливає на її міцність?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

14.28. Наведені нижче числа є значеннями твердості 10 зразків сплаву в умовних одиницях: 12,1; 13,7; 11,0; 11,6; 11,9; 13,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5.

Чи можна вважати, що дисперсія твердості становить 2,25?

14.29. Дані вимірювання довжини зразків виробів (у міліметрах) до і після відпалювання їх у високочастотній печі такі:

Зразок	До відпалювання	Після відпалювання
1	11,94	12,00
2	11,99	11,99
3	11,98	11,95
4	12,03	12,97
5	12,03	12,03
6	11,96	11,98
7	11,95	12,03
8	11,96	12,02
9	11,92	12,01
10	12,00	11,99

Чи привело термооброблення до зміни розмірів виробів?

14.30. Два оператори провели 14 незалежних експериментів, досліджуючи температуру займання емалі одного складу. Кожен із них випробував 7 зразків. Нижче наведено результати дослідів.
Оператор А: 1450, 1425, 1420, 1410. 1370, 1360, 1270.
Оператор В: 1430, 1420, 1380, 1320, 1320, 1290, 1280.
Чи є істотною різниця між результатами, одержаними різними операторами?
Сформулювати і розв'язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.

14.31. Для того щоб дослідити ефект від використання спеціальної сівалки, 10 ділянок землі засіяли за допомогою звичайної сівалки і 10 ділянок - за допомогою спеціальної, а потім порівняли одержані врожаї. 20 ділянок однакової площі були поділені попарно, причому пару становили суміжні ділянки. Питання про те, яка з двох суміжних ділянок мала оброблятися спеціальною машиною, вирішувалося підкиданням монети. У таблиці подано різниці врожаїв із пар суміжних ділянок, засіяних спеціальною сівалкою і звичайною.

Номер пари	Різниця	Номер пари	Різниця
1	2,4	6	1,6
2	1,0	7	-0,4
3	0,7	8	1,1
4	0,0	9	0,1
5	1,1	10	0,7

Чи підтверджують наведені дані наявність ефекту від використання спеціальної сівалки, інакше кажучи, чи дає вона надбавку врожаю?

14.32. Нижче наведено дані про вимірювання нерівностей поверхні однієї й тієї самої чистоти оброблення за допомогою двох подвійних мікроскопів.

Чи можна вважати, що між показами приладів немає систематичної розбіжності?

Мікроскоп 1: 0,8; 1,9; 3,0; 3,5; 3,8; 2,5; 1,7; 0,9; 1,0; 2,3; 3,3; 3,4.

Мікроскоп 2: 1,4; 2,1; 3,1; 3,6; 2,7; 1,7; 1,1; 0,2; 1,6; 2,8; 4,0; 4,7.

14.33. Точність вимірювань. Визначається границя розривної міцності деякого матеріалу на двох різних стендах А та В. Нижче наведено вибірки значень границі розривної міцності, одержані на цих стендах. З'ясувати, чи можна вважати, що точність вимірювань границі розривної міцності на стендах А та В однакова.

Стенд А: 1,32; 1,35; 1,32; 1,35; 1,30; 1,30; 1,37; 1,31; 1,39; 1,39.

Стенд В: 1,35; 1,31; 1,31; 1,41; 1,39; 1,37; 1,32; 1,34.

14.34. Для контролю напруги в освітлювальній мережі (стандарт 220 В) щогодини протягом доби реєстрували напругу (у вольтах): 220, 222, 220, 220, 220, 222, 220, 218, 218, 220, 220, 222, 222, 220, 218, 220, 222, 216, 218, 214, 210, 218, 223, 215.

Чи можна відхилення від стандарту (220 В) розглядати як випадкові? Чи, навпаки, наведені дані вказують на систематичне відхилення напруги від стандарту?

14.35. Один із методів кількісного аналізу міри спрацювання шини полягає у вимірюванні глибини проникнення щупа в певному місці шини. Є підозра, що поява значної частки дисперсії вимірювань пов'язана з діями контролерів. Щоб виділити із загальної дисперсії вимірювань зазначену частину, двом контролерам запропонували провести по 12 вимірювань у одній і тій самій точці шини. Результати вимірювань наведено нижче.

Контролер X: 121, 121, 126. 130, 127, 131, 127, 124, 125, 119, 126, 123.

Контролер Y: 120, 129, 128, 136, 117, 138, 124, 119, 136, 136, 134, 132.

Чи істотно відрізняються дисперсії вимірювань, проведених різними контролерами?

Розрахунково-графічні роботи

Додаток А

Розрахункова робота 1

А.1 Задачі теорії ймовірностей

(Значення усіх величин для задач 1–21 слід брати з таблиці, поданої у кінці цього додатку)

А.1. Кидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що: а) сума очок не перевищує N; б) добуток очок не перевищує N; в) добуток очок ділиться на N.

А.2. Є вироби чотирьох сортів, причому кількість виробів k-го сорту дорівнює n_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Для контролю навмання беруть m виробів. Визначити ймовірність того, що серед них m_1 першосортних, m_2, m_3 та m_4 – другого, третього та четвертого сорту відповідно ($m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m$).

А.3. Серед n лотерейних квитків k виграшних. Навмання взято m квитків. Обчислити ймовірність того, що: а) серед них l виграшних; б) не більше l виграшних; в) жодного виграшного; г) число виграшних не більше половини куплених.

А.4. У ліфт k-поверхового будинку зайшли n пасажирів ($n < k$). Кожний пасажир незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому (починаючи з другого) поверсі. Визначити ймовірність того, що: а) усі вийшли на різних поверхах; б) хоча б двоє вийшли на одному поверсі; в) усі вийшли на другому поверсі; г) усі вийшли на одному поверсі.

А.5. а) На відрізок одиничної довжини навмання ставиться точка. Обчислити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $1/k$. б) На відрізку одиничної довжини навмання взято дві точки. Обчислити ймовірність того, що відстань між ними менша $1/k$.

А.6. Моменти початку двох подій навмання розподілені на проміжку часу від T_1 до T_2. Одна з подій продовжується 10 хвилин, друга – t хвилин. Визначити ймовірність того, що: а) події "перекриваються" у часі; б) події "не перекриваються" у часі.

А.7. У круг радіуса R навмання ставиться точка. Обчислити ймовірність того, що вона попаде в одну з двох фігур, які не перетинаються та мають площі рівні S_1 та S_2.

А.8. У двох партіях k_1 та k_2 % якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один бракований; б) два бракованих; в) один якісний та один бракований?

А.9. Ймовірність того, що ціль уражена при одному пострілі першим стрільцем p_1, другим — p_2. Перший зробив n_1 пострілів, другий — n_2 пострілів. Визначити ймовірність того, що ціль не уражена.

А.10. Два гравці А та Б по черзі кидають монету. Виграє той, у якого раніше випаде "тризуб".
1) Знайти ймовірність вказаної нижче події.
Варіанти 1–8. Виграв А до k-го кидка.
Варіанти 9–15. Виграв А не пізніше k-го кидка.
Варіанти 16–23. Виграв Б до k-го кидка.
Варіанти 24–31. Виграв Б не пізніше k-го кидка.
2) Які ймовірності виграшу для кожного гравця при необмеженій за часом грі?

А.11. Урна містить M пронумерованих куль. Кулі виймаються по одній без повернення. Розглядають такі події:
A – номери куль в порядку виймання утворюють послідовність $1, 2, \ldots, M$;
B – хоча б один раз співпадає номер кулі та порядковий номер виймання;

C – немає жодного співпадання номера кулі та порядкового номера виймання.

Обчислити ймовірність подій A, B, C. Знайти граничні значення ймовірностей при $M \to \infty$.

А.12. З 1000 ламп n_1 належать першій партії, n_2 — другій та n_3 — третій ($n_1 + n_2 + n_3 = 1000$). У першій партії 6%, у другій 5%, у третій 4% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа бракована.

А.13. В першій урні N_1 білих та M_1 чорних куль, у другій N_2 білих та M_2 чорних. З першої урни у другу перекладено K куль, потім з другої урни вийнято одну кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля біла.

А.14. В альбомі k чистих та l погашених марок. З них навмання беруть m марок, які піддають спецгашенню та повертають в альбом. Потім знову навмання беруть з альбому n марок. Знайти ймовірність того, що усі n марок будуть чисті.

А.15. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому k-ий завод поставляє $m_k\%$ виробів ($k = 1, 2, 3$). Серед виробів k-го заводу $n_k\%$ першосортних. Куплений один виріб. Він виявився першосортним. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений j-им заводом?

А.16. Монета кидається поки "тризуб" не випаде n разів. Знайти ймовірність того, що цифра випаде m разів.

А.17. Ймовірність виграшу в лотерею на один квиток дорівнює p. Куплено n квитків. Знайти найвірогіднішу кількість виграших квитків та відповідну ймовірність

А.18. На кожен лотерейний квиток з ймовірністю p_1 може випасти великий виграш, з ймовірністю p_2 – малий виграш та з ймовірністю p_3 білет може бути безвиграшним ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Куплено n квитків. Визначити ймовірність отримання n_1 великих та n_2 малих виграшів.

А.19. Ймовірність "збою" у роботі телефонної станції при кожному викликові дорівнює p. Надійшло n викликів. Знайти ймовірність m "збоїв".

А.20. Ймовірність появи деякої події у кожному з n незалежних випробувань дорівнює p. Визначити ймовірність того, що число m появи цієї події задовольняє такій нерівності:
Варіанти 1–11: $k_1 \le m \le k_2$.
Варіанти 12–21: $k_1 \le m$.
Варіанти 22–31: $m \le k_2$.

А.21. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини x. Знайти параметр γ, математичне сподівання $M(x)$, дисперсію $D(x)$, функцію розподілу $F(x)$, ймовірність виконання нерівності $x_1 < x < x_2$.

Варіанти 1–8: $$f(x) = \begin{cases} 1/(\gamma - a), & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Варіанти 9–16: $$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma; b], \\ 0, & x \notin [\gamma; b]. \end{cases}$$

Варіанти 17–24: $$f(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Варіанти 25–31: $$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [(b - \gamma)/2; (b + \gamma)/2], \\ 0, & x \notin [(b - \gamma)/2; (b + \gamma)/2]. \end{cases}$$

Далі подана таблиця початкових даних для розрахункових завдань. У першому стовпчику — номери варіантів, у першому рядку — номери задач. У другому рядку — параметри, значення яких конкретизуються у рядку, що відповідає варіантові.

А.2 Індивідуальні завдання

Таблиця початкових даних

	1	2								3				4	5	6		
	n	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	n	l	m	k	k	n	k	T_1	T_2	T
1	3	1	2	3	4	1	1	2	3	10	2	4	6	6	4	4	900	1000	10
2	4	2	2	4	2	1	1	1	2	10	2	3	6	7	4	5	900	1100	20
3	5	2	3	4	1	1	2	3	1	10	3	5	7	8	5	6	1000	1100	10
4	6	1	4	2	3	1	2	1	2	10	3	5	6	9	5	5	1000	1200	20
5	7	4	2	2	2	3	1	2	1	11	2	5	7	10	6	6	1100	1200	15
6	8	3	2	3	2	2	1	3	1	11	3	4	8	11	4	7	1100	1300	15
7	9	5	1	2	2	3	1	1	1	11	3	5	7	12	4	6	900	930	10
8	10	2	5	2	1	1	3	1	1	12	3	8	5	13	3	7	900	1130	20
9	3	4	2	3	2	2	1	2	1	12	2	8	3	14	3	8	1000	1030	15
10	4	3	3	4	1	2	1	2	1	12	2	5	4	13	4	7	1000	1130	15
11	5	2	3	3	3	1	2	3	1	9	2	4	6	12	3	8	1100	1130	5
12	6	1	3	4	3	1	2	2	1	9	3	5	6	11	3	5	1100	1230	5
13	7	2	3	4	2	1	2	3	1	9	2	3	7	10	4	6	1200	1300	5
14	8	1	2	3	5	1	1	2	3	8	2	4	5	9	4	7	1200	1230	10
15	9	2	3	4	2	1	2	2	1	8	2	5	4	8	3	8	1200	1330	5
16	10	3	2	2	4	2	1	1	1	8	3	4	5	7	3	9	1300	1400	10
17	11	4	3	2	3	2	1	2	1	10	4	6	5	6	4	8	1800	1900	10
18	12	3	3	4	2	2	1	2	2	10	5	7	7	7	4	7	1800	2000	20
19	13	2	4	5	1	2	2	3	1	10	4	6	7	8	5	6	1700	1800	10
20	14	3	4	3	2	2	2	3	2	12	4	8	6	9	5	5	1700	1900	20
21	15	2	5	2	3	1	3	1	2	8	2	3	4	10	6	4	1900	2000	15
22	16	4	4	2	2	2	2	2	1	8	2	3	5	11	4	4	1900	2100	15
23	17	2	7	2	1	1	5	2	1	8	2	4	3	12	4	5	1700	1730	10
24	18	3	1	6	2	2	1	3	1	8	3	5	4	13	3	6	1700	1830	20
25	19	2	2	2	3	1	1	1	2	8	1	4	2	14	3	7	1600	1630	15
26	20	1	3	3	2	1	3	1	1	9	2	3	5	12	3	8	1600	1730	15
27	3	1	4	2	2	0	2	1	1	9	3	4	4	11	3	9	1700	1730	5
28	4	2	3	1	3	1	2	0	1	9	2	6	3	10	4	10	1700	1830	5
29	5	3	1	2	3	0	1	1	2	9	4	5	5	9	4	9	1600	1700	5
30	6	3	2	3	1	2	2	2	0	9	3	5	4	8	3	8	1600	1630	10
31	8	2	3	1	3	2	1	0	2	9	2	3	6	7	3	7	1600	1730	5

Продовження далі

Продовження попередньої сторінки

	7			8		9				10	11	12		13				
	R	S_1	S_2	k_1	k_2	p_1	p_2	n_1	n_2	K	M	n_1	n_2	N_1	M_1	N_2	M_2	K
1	11	2.25	3.52	71	47	0.61	0.55	2	3	4	12	100	250	4	1	2	5	3
2	12	2.37	3.52	78	39	0.62	0.54	3	2	5	8	430	180	7	3	5	1	4
3	13	2.49	3.52	87	31	0.63	0.53	2	3	6	5	170	540	2	3	5	4	1
4	14	2.55	1.57	72	46	0.64	0.52	3	2	7	11	520	390	8	2	3	2	5
5	11	2.27	5.57	79	38	0.65	0.51	2	3	8	7	360	600	6	4	1	7	2
6	12	2.39	5.57	86	32	0.66	0.49	3	2	9	10	700	90	3	2	4	4	2
7	13	2.51	1.57	73	45	0.67	0.48	2	3	10	6	240	610	5	5	4	10	6
8	14	2.57	3.52	81	37	0.68	0.47	3	2	11	9	80	710	13	12	4	6	10
9	11	2.29	3.52	85	33	0.69	0.46	2	3	4	3	630	230	1	9	3	3	4
10	12	2.41	3.52	74	44	0.71	0.45	3	2	5	8	500	320	3	7	5	2	3
11	13	2.53	3.52	82	36	0.72	0.44	2	3	6	5	810	70	4	6	7	8	5
12	14	2.59	5.57	84	34	0.73	0.43	3	2	7	10	450	280	2	3	7	1	2
13	15	2.50	8.70	75	43	0.74	0.42	2	3	8	6	270	640	2	2	3	1	1
14	16	2.60	8.50	83	35	0.75	0.41	3	2	9	9	380	470	2	8	3	1	6
15	11	2.20	3.50	76	42	0.76	0.39	2	3	10	4	640	80	4	6	3	3	4
16	12	2.40	3.50	77	41	0.77	0.38	3	2	12	7	160	570	5	5	4	3	3
17	13	2.50	3.50	47	71	0.78	0.37	2	3	5	5	590	200	25	3	25	2	19
18	14	2.60	1.80	39	78	0.39	0.45	3	2	6	11	620	190	20	1	40	7	15
19	15	2.70	7.90	31	87	0.38	0.46	2	3	7	9	730	100	20	4	25	5	7
20	16	2.70	8.20	72	46	0.37	0.47	3	2	8	6	540	200	50	8	20	6	42
21	11	2.30	3.50	38	79	0.36	0.48	2	3	9	12	90	690	40	8	10	2	35
22	12	2.40	3.50	32	86	0.35	0.49	3	2	10	8	220	550	25	2	20	4	12
23	13	2.50	3.50	73	45	0.34	0.51	2	3	11	10	290	700	20	1	40	5	15
24	14	2.60	5.60	81	37	0.33	0.52	3	2	4	7	350	440	25	2	25	6	15
25	15	2.50	8.70	33	85	0.32	0.53	2	3	5	3	470	360	10	3	50	11	7
26	11	2.30	5.60	44	74	0.31	0.54	3	2	6	6	680	230	20	1	20	4	15
27	12	2.40	5.60	36	82	0.29	0.55	2	3	7	9	710	160	25	3	25	7	17
28	13	2.50	3.50	84	34	0.28	0.56	3	2	8	4	180	270	40	5	50	8	12
29	14	2.60	5.60	75	43	0.27	0.57	2	3	9	7	260	620	40	8	20	4	27
30	15	2.70	7.90	83	35	0.26	0.58	3	2	10	5	650	140	25	3	40	2	14
31	12	2.25	3.52	76	42	0.25	0.59	2	3	11	8	230	480	20	1	50	6	11

Продовження далі

Продовження попередньої сторінки

	14				15							16		17	
	k	l	m	n	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	j	n	m	p	N
1	8	10	3	2	50	30	20	70	80	90	1	3	2	0.3	10
2	7	6	2	3	50	30	20	70	80	90	2	7	3	0.3	14
3	6	8	3	1	50	30	20	70	80	90	3	4	7	0.3	13
4	12	5	3	2	60	20	20	70	80	90	1	4	3	0.3	12
5	13	11	2	4	60	20	20	70	80	90	2	3	6	0.3	11
6	6	7	1	4	60	20	20	70	80	90	3	6	4	0.2	20
7	9	8	2	2	40	40	20	90	80	70	1	5	7	0.2	15
8	10	6	2	3	40	40	20	90	80	70	2	7	2	0.2	16
9	7	9	3	1	40	40	20	90	80	70	3	3	4	0.2	17
10	5	5	3	2	30	30	40	90	80	70	1	4	6	0.2	18
11	8	4	2	2	30	30	40	90	80	70	2	5	4	0.1	30
12	9	7	2	1	30	30	40	90	80	70	3	6	2	0.1	24
13	7	8	1	2	20	30	50	80	90	70	1	2	3	0.1	25
14	10	5	2	3	20	30	50	80	90	70	2	7	6	0.1	26
15	11	13	3	2	20	30	50	80	90	70	3	3	5	0.1	27
16	8	10	1	3	10	50	40	70	90	80	1	4	5	0.3	40
17	12	6	2	2	10	50	40	70	90	80	2	7	4	0.3	36
18	9	5	3	1	10	50	40	70	90	80	3	6	5	0.3	37
19	7	8	3	2	70	20	10	90	80	70	1	3	7	0.3	38
20	5	9	1	3	70	20	10	90	80	70	2	2	5	0.3	39
21	6	10	2	3	70	20	10	90	80	70	3	5	2	0.2	21
22	5	7	3	3	20	30	50	70	80	90	1	4	2	0.2	22
23	8	8	2	1	20	30	50	70	80	90	2	2	6	0.2	23
24	7	6	1	2	20	30	50	70	80	90	3	5	6	0.2	31
25	9	4	2	2	20	60	20	80	70	90	1	5	3	0.2	32
26	10	9	2	3	20	60	20	80	70	90	2	7	5	0.1	33
27	6	8	2	1	20	60	20	80	70	90	3	3	8	0.1	34
28	7	10	3	2	40	20	40	90	70	80	1	8	3	0.1	35
29	8	7	3	1	40	20	40	90	70	80	2	4	8	0.1	41
30	9	5	2	2	40	20	40	90	70	80	3	8	4	0.2	44
31	5	9	3	2	30	50	20	70	80	90	2	5	8	0.3	47

Продовження далі

Продовження попередньої сторінки

	18					19			20						21	
	n	n_1	n_2	p_1	p_2	M	n	p	n	p	k_1	k_2	a	b	x_1	x_2
1	15	1	2	0.10	0.20	7	2000	0.003	800	0.01	3	12	-3	5	-4	4
2	15	2	1	0.15	0.15	6	3000	0.002	700	0.01	7	10	-10	2	-6	0
3	15	2	2	0.15	0.15	5	4000	0.001	600	0.01	5	15	-20	40	0	50
4	15	1	1	0.10	0.15	8	5000	0.001	500	0.01	4	13	0.6	2.4	1	3
5	15	3	2	0.20	0.25	4	2000	0.002	400	0.01	2	14	18	34	12	25
6	20	2	2	0.10	0.20	3	1000	0.006	300	0.01	6	11	100	200	110	210
7	20	1	1	0.10	0.15	3	6000	0.001	300	0.02	9	16	-45	-13	-30	0
8	20	2	3	0.15	0.15	7	2000	0.004	200	0.01	3	6	-60	60	-70	50
9	20	1	2	0.20	0.25	8	2500	0.002	200	0.02	7	14	0.2	10	-2	6
10	20	3	2	0.15	0.20	5	1500	0.004	200	0.03	5	16	0.5	20	18.3	21
11	10	2	1	0.10	0.20	6	3000	0.001	200	0.04	10	20	0.4	12	10.3	15
12	10	1	3	0.10	0.25	3	4000	0.002	30	0.01	3		0.8	5	4	4.5
13	10	2	2	0.15	0.15	4	800	0.01	70	0.01	4		1	6.5	2	6.1
14	10	2	3	0.10	0.15	8	400	0.015	60	0.10	13		0.25	8	6.1	7.3
15	10	1	1	0.20	0.25	7	500	0.008	50	0.10	9		2	0	-0.8	-0.1
16	25	1	2	0.10	0.25	5	3000	0.002	40	0.10	7		0.1	53	50	60
17	25	2	2	0.05	0.10	6	2000	0.003	40	0.20	5		-20	10	-7	7
18	25	2	1	0.05	0.15	4	4000	0.002	30	0.02	4		41	4.9	30	42
19	25	1	3	0.10	0.30	3	5000	0.001	30	0.03	2		13	17	13	14
20	25	3	2	0.15	0.20	8	6000	0.001	90	0.01	8		25	35	0	30
21	30	1	1	0.20	0.25	7	7000	0.001	90	0.10	14		-10	-6	-7	0
22	30	1	2	0.20	0.30	6	700	0.01	900	0.01		13	16	26	19	20
23	30	2	1	0.10	0.15	5	600	0.01	800	0.01		12	5	50	45	100
24	30	1	3	0.15	0.20	3	500	0.01	700	0.01		11	-40	30	0	40
25	30	2	2	0.05	0.30	4	400	0.01	600	0.01		10	0.2	7.5	-4	8
26	20	2	1	0.05	0.10	8	300	0.02	500	0.01		9	0.5	19	18.4	30
27	20	1	3	0.10	0.30	7	200	0.03	400	0.01		8	0.4	6	5.9	6.1
28	20	1	1	0.20	0.30	6	200	0.02	300	0.02		7	0.8	0	-0.1	2
29	20	1	2	0.10	0.10	5	200	0.015	200	0.02		6	1	0.5	-10	0.2
30	20	3	2	0.20	0.25	4	1500	0.002	100	0.03		5	0.25	-6	-5	5
31	40	2	1	0.10	0.20	3	500	0.04	60	0.10		4	2	0.5	0.6	0.7

Кінець таблиці

Додаток В

Розрахункова робота 2

В.1 Знаходження нормального розподілу

Короткі теоретичні відомості. Розглянемо деякий статистичний розподіл

x	(ζ_0, ζ_1)	(ζ_1, ζ_2)	...	(ζ_{k-1}, ζ_k)
n	n_1	n_2	...	n_k

Суть розподілу полягає в тому, що в k-му інтервалі (ζ_{k-1}, ζ_k) лежать n_k значень випадкової величини x. Виходячи з характеру експерименту, форми гістограми або інших міркувань, можна висловити гіпотезу про те, що величина x підлягає певному законові розподілу. Далі висунуту гіпотезу перевіряють на основі спеціально розроблених критеріїв. У даному розділі будемо важати, що досліджувані величини мають нормальний закон розподілу. Наша задача — знайти параметри такого розподілу і перевірити на певному рівні значущості узгодженість між емпіричними даними та гіпотезою.

Для знаходження параметрів нормального розподілу (m — середнє значення, σ — середнє квадратичне відхилення) побудуємо нову таблицю

x	x_1	x_2	x_3	...	x_k
w	w_1	w_2	w_3	...	w_k

де x_k — середина інтервалу (ζ_{k-1}, ζ_k), а w_k — відповідна відносна частота.

Знайдемо математичне очікування та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\mathbf{x}$:

$$m = M[x] = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i; \quad d = D[x] = M[x^2] - M^2[x]; \quad \sigma = \sqrt{d}.$$

За цими параметрами можна записати щільність нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для малих h $(h = \zeta_k - \zeta_{k-1})$ теоретичні значення ймовірностей p_i можна знайти за формулою

$$p_i = p(\varsigma_{i-1} \le x \le \varsigma_i) \approx f(x_i) \cdot h, (i = 1, 2, \ldots, k).$$

У загальному випадку, для їх знаходження можна скористатись функцією Лапласса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

При цьому

$$p_i = p(\varsigma_{i-1} \le x \le \varsigma_i) = \Phi\left(\frac{\varsigma_i - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\varsigma_{i-1} - m}{\sigma}\right).$$

Якщо висловлена гіпотеза про нормальний розподіл вірна, то відносні частоти w_i і відповідні їм теоретичні ймовірності p_i повинні бути близькими між собою. Для вияснення питання узгодженості між емпіричними та теоретичними даними можна скористатись критеріями Пірсона, Романовського, Колмогорова та ін.

Критерій Пірсона. Домовимось про такі позначення:
w_i — відносні частоти, отримані на базі статистичних даних;
p_i — обчислені теоретичні ймовірності;
k — число груп таблиці;

n — об'єм вибірки;
t — число умов, що накладаються на частоти w_i;
$r = k - t$ — ступінь волі.

Розглянемо величину

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i}. \qquad \text{(B.1)}$$

Ця величина — випадкова, оскільки в різних дослідах вона приймає різні, наперед невідомі значення. Далі, зрозуміло, що чим менша різниця між величинами w_i та p_i, тим меншим буде значення виразу (B.1). Доведено, що при достатньо великих n закон розподілу величини (B.1) буде близький до розподілу χ^2 ("хі. квадрат") з $r = k - t$ ступенями вільності незалежно від того, якому закону розподілу підпорядкована величина x. Тому, розглянуту величину використовують як критерій при перевірці статистичних гіпотез згідно методики розглянутої у розділі 16.

Наприклад, візьмемо певний рівень значущості α і побудуємо відповідну правобічну критичну область S (с. 173). Критичну точку χ_0^2 можна обчислити різними способами. Зокрема, якщо скористатися функцією $qchisq(p, k)$, то її можна знайти за формулою $\chi_0^2 = qchisq(1 - \alpha, r)$. Таблиця функції $qchisq(p, k)$ міститься в додатках (с. 250). Далі, використовуючи статистичні дані, обчислимо значення χ^2 виразу (B.1). Якщо $\chi^2 < \chi_0^2$, то гіпотезу про нормальний розподіл статистичних даних приймають. Якщо $\chi^2 > \chi_0^2$, то зазначену гіпотезу відхиляють.

Критерій Романовського. Суть критерію полягає в слідуючому. Розглядають величину

$$\alpha = \frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}}. \qquad \text{(B.2)}$$

Якщо $\alpha \geq 3$, то розбіжність між теоретичними та дослідними даними слід вважати не випадковою. Якщо $\alpha < 3$, то таке розходження можна вважати випадковим.

З а у в а ж е н н я. Взагалі кажучи, яким би критерієм прийняття гіпотези ми не користувались, прийняття гіпотези H не

означає, що ця гіпотеза в дійсності вірна, а лише констатує факт відсутності протиріч між результатами спостережень та прийнятою гіпотезою.

Приклад. Таблиця В.1 містить дані про зріст 1000 учнів старших класів. Перевірити, чи не протирічать статистичні дані нормальному законові розподілу.

Табл. В.1. Дані про зріст учнів

i	Зріст (в см.)	Число учнів	w_i	x_i	p_i	$(w_i - p_i)^2/p_i$
0	143–146	1	0,001	144,5	0,0005	
1	146–149	2	0,002	147,5	0,002	$2{,}2E-05$
2	149–152	8	0,008	150,5	0,009	
3	152–155	26	0,026	153,5	0,028	$1{,}4E-04$
4	155–158	65	0,065	156,5	0,066	$1{,}5E-05$
5	158–161	120	0,120	159,5	0,121	$8{,}3E-06$
6	161–164	181	0,181	162,5	0,175	$2{,}1E-04$
7	164–167	201	0,201	165,5	0,197	$8{,}1E-05$
8	167–170	170	0,170	168,5	0,175	$1{,}4E-04$
9	170–173	120	0,120	171,5	0,121	$8{,}3E-06$
10	173–176	64	0,064	174,5	0,066	$6{,}1E-05$
11	176–179	27	0,027	177,5	0,028	$3{,}6E-05$
12	179–182	10	0,010	180,5	0,009	
13	182–185	3	0,003	183,5	0,002	$5{,}4E-04$
14	185–188	1	0,001	186,5	0,0005	
	$\sum$	1000	1,00		1,00	$1{,}26E-03$

Якщо $x_i = a + bi \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1)$, то будемо мати:

$$M[x_i] = M[a + bi] = a + bM[i]; \tag{В.3}$$

$$D[x_i] = D[a + bi] = b^2 D[i]; \tag{В.4}$$

$$\sigma[x_i] = |b|\sqrt{D[i]}. \tag{В.5}$$

Нехай $\mathbf{x}$ — випадкова величина, що характеризує зріст. Неважко помітити, що $x_i = 144{,}5 + 3i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 14)$. Обчислимо середнє значення m, та середнє квадратичне відхилення σ величини $\mathbf{x}$, скориставшись формулами (В.3–В.5):

$$M[i] = \sum_{t=0}^{14} t \cdot w_t = 7,00;$$

$$M[i^2] = \sum_{t=0}^{14} t^2 \cdot w_t = 53,08;$$

$$D[i] = M[i^2] - M^2[i] = 53,08 - 49,00 = 4,08;$$

$$m = M[x] = 144,5 + 3M[i] = 144,5 + 3 \cdot 7,00 = 165,50;$$

$$\sigma = \sigma[x] = 3 \cdot \sqrt{D[i]} = 3 \cdot \sqrt{4,08} = 6,06.$$

Щільність розподілу матиме вигляд

$$f(x) = \frac{1}{6,06\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-165,50)^2}{2 \cdot 6,06^2}} = 0,066e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u = \frac{x - 165,50}{6,06}.$$

Для прикладу, обчислимо виправлену (теоретичну) ймовірність того факту, що зріст старшокласника попаде в інтервал $(170, 173)$

$$p_9 = P(170 < x < 173) \cong f(x_9) \cdot h = 3 \cdot 0,066 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{171,5-165,5}{6,06}\right)^2} = 0,123.$$

Скориставшись функцією Лапласса, подібне обчислення можна провести інакше, а саме

$$p_9 = P(170 < x < 173) = \Phi\left(\frac{173 - 165,50}{6,06}\right) - \Phi\left(\frac{170 - 165,5}{6,06}\right) =$$

$$= \Phi(1,24) - \Phi(0,74) = 0,3925 - 0,2704 = 0,122.$$

Аналогічно обчислюються інші значення p_k. Порівнявши відповідні значення w_i та p_i в колонках таблиці бачимо, що статистичні дані близькі до теоретичних. Переконатись, що дослідні дані не протирічать припущенню про їх нормальний розподіл, можна скориставшись критерієм Пірсона. При обчисленні величини χ^2, рекомендується групи, що містять по кілька елементів, об'єднувати у більші так, щоб вони містили не меньше 10 елементів. Так ми об'єднали 3 перші та 3 останні

групи таблиці. Сума чисел в останньому стовпчику дасть величину критерія

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(w_i - p_i)^2}{p_i} = 1000 \cdot 1,26 \cdot 10^{-3} = 1,26.$$

Для нормального закону число умов, що накладаються на частоти w_i дорівнює трьом, оскільки

$$\sum w_i = 1; \quad \sum w_i \cdot x_i = m; \quad \sum (x_i - m)^2 = d.$$

Маємо всі дані для обчислення ступення вільності $r = k - t = 11 - 3 = 8$. Візьмемо, наприклад, 10% рівень значущості. За допомогою таблиці (с. 250) знайдемо критичну точку $\chi_0^2 = qchisq(1-\alpha, r) = qchisq(0,9;8) = 13,4$. Оскільки значення критерію ($\chi^2 = 1,26$) менше критичної точки ($\chi_0^2 = 13,4$), то немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл зросту учнів.

В.2 Індивідуальні завдання

- *Побудувати таблицю статистичного розподілу.*
- *Побудувати гістограму.*
- *Вирівняти дослідні дані за допомогою нормального закону розподілу.*
- *Перевірити узгодженість між емпіричними та теоретичними даними за допомогою критерія Пірсона.*

Варіант 1									
2.37	-0.94	0.58	-0.38	-0.72	0.76	1.55	-0.53	1.41	-0.06
1.03	0.29	0.06	1.40	0.32	1.65	0.61	2.72	-1.03	0.48
0.61	2.05	1.12	-0.94	0.46	1.18	0.93	0.48	0.34	0.48
-0.50	1.58	1.39	2.30	0.83	1.19	-0.48	0.93	1.07	0.84

1.34	1.14	1.48	3.08	2.73	-1.14	-0.48	1.63	1.31	0.08
-0.10	1.52	2.41	0.16	0.31	0.60	2.75	-0.01	0.33	-0.13
0.51	0.81	-0.23	1.26	1.89	0.89	1.93	1.02	2.26	0.31
1.97	2.48	1.88	1.96	1.67	0.08	0.66	0.98	1.91	-0.11
0.67	1.18	2.30	3.15	1.24	0.81	0.73	0.65	0.79	0.63
1.45	1.31	1.42	1.23	1.84	1.99	2.05	2.50	2.55	2.90
Варіант 2									
1.60	0.07	0.90	0.39	0.19	0.76	1.29	0.14	1.01	0.27
1.15	0.70	0.56	1.05	0.65	1.37	0.83	1.76	-0.04	0.72
0.96	1.70	1.13	0.19	0.70	1.06	0.96	0.71	0.68	0.66
0.20	1.29	1.01	1.55	0.80	1.19	0.35	0.77	1.15	0.85
1.19	1.11	1.16	2.02	1.89	-0.02	0.50	1.49	1.20	0.54
0.31	1.42	1.54	0.74	0.59	0.83	1.91	0.38	0.56	0.37
0.77	0.80	0.28	1.23	1.26	0.76	1.40	1.15	1.53	0.62
1.36	1.62	1.36	1.40	1.43	0.64	0.84	0.78	1.47	0.47
0.93	1.01	1.54	2.15	1.07	0.81	0.82	0.78	0.85	0.97
1.06	1.16	1.04	1.24	1.35	1.44	1.66	1.69	1.97	1.79
Варіант 3									
3.33	0.18	1.52	0.99	0.38	1.74	2.78	0.23	2.20	0.67
-2.19	1.46	1.03	2.09	1.38	2.83	1.81	3.53	-0.47	1.25
1.61	3.36	2.41	0.21	1.27	2.29	1.73	1.01	1.49	1.21
0.22	2.67	2.28	3.19	1.62	2.28	0.98	1.88	2.38	1.54
2.18	2.41	2.41	4.29	3.58	-0.27	0.83	2.88	2.21	1.16
0.86	2.85	3.07	1.36	1.33	1.95	3.96	0.67	1.02	0.85
1.96	1.61	0.64	2.46	2.56	1.90	2.88	2.45	3.42	1.23
2.62	3.05	2.64	2.59	2.60	1.28	1.90	1.97	2.85	0.84
1.94	2.28	3.09	4.17	2.02	1.82	1.84	1.97	1.66	1.86
2.40	2.01	2.41	2.47	2.99	2.67	3.47	3.38	3.94	3.54
Варіант 4									

2.57	1.10	1.82	1.42	1.14	1.94	2.41	1.07	2.07	1.27
2.25	1.54	1.52	2.16	1.66	2.48	1.89	2.77	0.75	1.71
1.78	2.63	2.01	1.24	1.61	2.19	1.79	1.68	1.65	1.61
1.24	2.40	2.04	2.55	1.82	2.00	1.33	.84	2.05	1.78
2.23	2.23	2.22	3.18	2.80	0.86	1.42	2.32	2.25	1.64
1.38	2.39	2.70	1.59	1.52	1.77	2.87	1.28	1.57	1.33
1.89	1.78	1.26	2.13	2.35	1.99	2.32	2.06	2.51	1.72
2.40	2.65	2.34	2.26	2.29	1.69	1.84	1.93	2.37	1.31
1.97	2.06	2.69	3.23	2.10	1.76	1.83	1.82	1.91	1.83
2.01	2.13	2.03	2.06	2.49	2.37	2.55	2.65	2.89	2.78
Варіант 5									
4.24	1.32	2.80	1.95	1.47	2.55	3.90	1.18	3.36	1.79
3.04	2.11	2.30	3.08	2.32	3.87	2.61	4.90	0.93	2.29
2.64	4.26	3.01	1.06	2.13	3.39	2.60	2.07	2.46	2.22
1.08	3.79	3.17	4.18	2.51	3.39	1.90	2.63	3.37	2.82
3.28	3.04	3.37	5.32	4.73	0.62	1.99	3.97	3.27	2.02
1.65	3.72	4.26	2.00	2.25	2.55	4.78	1.63	2.07	1.92
2.84	2.56	1.75	3.31	3.56	2.67	3.54	3.16	4.06	2.45
3.99	4.43	3.83	3.69	3.56	2.05	2.86	2.61	3.69	1.65
2.96	3.04	4.37	5.23	3.40	2.54	2.54	2.59	2.60	2.77
3.20	3.06	3.14	3.32	3.94	3.94	4.43	4.23	4.98	4.64
Варіант 6									
3.71	2.16	2.98	2.40	2.14	2.79	3.29	2.08	3.22	2.31
3.20	2.53	2.56	3.11	2.65	3.26	2.93	3.75	1.86	2.52
2.90	3.59	3.04	2.19	2.56	3.14	2.86	2.51	2.69	2.67
2.03	3.42	3.05	3.54	2.77	3.11	2.48	2.87	3.02	2.81
3.20	3.10	3.04	4.20	3.85	1.93	2.50	3.27	3.17	2.58
2.32	3.48	3.52	2.72	2.51	2.80	3.95	2.46	2.57	2.33
2.85	2.89	2.43	3.22	3.26	2.78	3.36	3.17	3.51	2.73

3.41	3.59	3.28	3.32	3.41	2.54	2.98	2.91	3.42	2.29
2.99	3.08	3.67	4.06	3.06	2.91	2.96	2.95	2.89	3.00
3.24	3.15	3.18	3.16	3.40	3.45	3.61	3.51	3.85	3.76
Варіант 7									
5.24	2.29	3.84	2.61	2.02	3.66	4.71	2.36	4.11	2.92
4.44	3.38	3.18	4.08	3.43	4.56	3.83	5.57	1.61	3.14
3.61	5.48	4.34	2.27	3.24	4.37	3.84	3.35	3.16	3.01
2.33	4.97	4.05	5.07	3.55	4.31	2.94	3.53	4.08	3.65
4.43	4.29	4.11	6.08	5.88	1.57	2.82	4.98	4.01	3.34
2.58	4.64	5.19	3.06	3.40	3.66	5.82	2.90	3.30	2.61
3.64	3.97	2.90	4.46	4.89	3.62	4.51	4.45	5.45	3.08
4.65	5.25	4.82	4.85	4.98	3.08	3.80	3.62	4.59	2.86
3.96	4.37	5.41	6.40	4.03	3.92	3.77	3.53	3.54	3.66
4.40	4.50	4.02	4.34	4.99	4.95	5.24	5.37	5.56	5.75
Варіант 8									
4.52	3.18	3.86	3.33	3.24	3.82	4.31	3.22	4.22	3.38
4.17	3.71	3.51	4.09	3.71	4.33	3.82	4.93	2.93	3.71
3.81	4.62	4.24	3.05	3.53	4.16	3.86	3.65	3.57	3.63
3.01	4.40	4.10	4.54	3.95	4.03	3.48	3.77	4.04	3.86
4.25	4.05	4.08	5.15	4.89	2.90	3.28	4.28	4.20	3.61
3.45	4.42	4.55	3.63	3.64	3.78	4.86	3.37	3.64	3.40
3.91	3.78	3.36	4.06	4.42	3.93	4.47	4.19	4.50	3.59
4.48	4.64	4.46	4.41	4.36	3.55	3.99	3.78	4.26	3.45
3.86	4.24	4.71	5.18	4.07	3.78	3.99	3.84	3.82	3.99
4.24	4.22	4.17	4.23	4.33	4.33	4.60	4.63	4.81	4.94
Варіант 9									
6.25	3.44	4.61	3.67	3.14	4.52	5.88	3.18	5.07	3.94
5.09	4.20	4.38	5.07	4.32	5.55	4.53	6.73	2.92	4.13
4.55	6.42	5.03	3.47	4.01	5.11	4.66	4.14	4.02	4.01

3.37	5.84	5.24	6.05	4.57	5.03	3.66	4.85	5.48	4.72
5.26	5.33	5.45	7.38	6.74	2.60	3.83	5.79	5.21	4.28
3.51	6.00	6.29	4.40	4.15	4.73	6.81	3.68	4.47	4.00
4.66	4.81	3.92	5.15	5.87	4.98	5.77	5.10	6.48	4.07
5.74	6.26	5.65	5.54	5.89	4.22	4.94	4.92	5.97	3.64
4.80	5.48	6.31	7.19	5.23	4.59	4.79	4.86	4.88	4.56
5.02	5.29	5.02	5.00	5.65	5.66	6.11	6.49	6.72	6.86
Варіант 10									
5.53	4.12	4.97	4.41	4.16	4.93	5.31	4.18	5.06	4.29
5.23	4.56	4.54	5.24	4.65	5.31	4.77	5.92	3.88	4.61
4.83	5.74	5.13	4.17	4.56	5.14	4.77	4.68	4.66	4.56
4.15	5.42	5.19	5.65	4.83	5.05	4.48	4.95	5.24	4.84
5.15	5.16	5.12	6.07	5.99	3.85	4.43	5.42	5.03	4.56
4.38	5.35	5.61	4.60	4.64	4.80	5.98	4.27	4.63	4.30
4.88	4.78	4.29	5.14	5.35	4.85	5.28	5.03	5.72	4.69
5.35	5.51	5.38	5.34	5.27	4.61	4.96	4.79	5.42	4.50
4.85	5.02	5.70	6.24	5.24	4.80	4.76	4.96	4.84	4.97
5.20	5.00	5.15	5.03	5.49	5.36	5.57	5.56	5.94	5.86
Варіант 11									
7.17	4.34	5.87	4.65	4.12	5.81	6.85	4.28	6.47	4.69
6.29	5.14	5.07	6.20	5.27	6.86	5.66	7.98	3.59	5.15
5.76	7.16	6.24	4.13	5.11	6.04	5.86	5.04	5.10	5.17
4.31	6.58	6.49	7.48	5.88	6.12	4.56	5.81	6.19	5.93
6.09	6.23	6.38	8.37	7.56	3.80	4.69	6.75	6.05	5.20
4.65	6.96	7.19	5.35	5.23	5.94	7.55	4.71	5.40	4.89
5.86	5.94	4.60	6.07	6.58	5.62	6.74	6.25	7.14	5.11
6.80	7.19	6.67	6.66	6.90	5.12	5.74	5.77	6.57	4.93
5.88	6.41	7.34	8.05	6.19	5.68	5.59	5.69	5.79	5.66
6.07	6.13	6.34	6.05	6.84	6.66	7.05	7.06	7.97	7.88

Варіант 12									
6.62	5.14	5.78	5.40	5.13	5.98	6.49	5.19	6.03	5.38
6.02	5.74	5.63	6.20	5.71	6.33	5.91	6.91	4.78	5.59
5.94	6.55	6.22	5.11	5.74	6.10	5.82	5.54	5.64	5.57
5.20	6.48	6.03	6.66	5.93	6.03	5.32	5.82	6.21	5.81
6.02	6.10	6.18	7.23	6.76	4.83	5.49	6.39	6.17	5.68
5.35	6.31	6.51	5.68	5.74	5.82	6.83	5.31	5.66	5.46
5.81	5.97	5.27	6.01	6.29	5.91	6.47	6.24	6.51	5.60
6.33	6.62	6.36	6.33	6.47	5.61	5.84	5.87	6.37	5.31
5.84	6.12	6.65	7.17	6.04	5.75	5.95	5.87	5.84	5.87
6.08	6.13	6.12	6.21	6.42	6.29	6.75	6.59	6.98	6.80
Варіант 13									
8.03	5.20	6.72	5.60	5.38	6.80	7.51	5.46	7.28	5.62
7.03	6.26	6.40	7.04	6.25	7.76	6.51	8.73	4.95	6.11
6.77	8.09	7.49	5.45	6.40	7.33	6.91	6.38	6.35	6.10
5.21	7.61	7.21	8.06	7.00	7.35	5.91	6.59	7.46	6.92
7.32	7.14	7.20	9.20	8.56	4.97	5.53	7.78	7.18	6.41
5.89	7.93	8.19	6.11	6.20	6.90	8.88	5.85	6.28	5.79
6.66	6.76	5.50	7.22	7.77	6.65	7.50	7.07	8.26	6.15
7.89	8.36	7.60	7.79	7.70	6.12	6.68	6.59	7.51	5.58
6.80	7.10	8.12	9.16	7.01	6.89	6.71	6.68	6.77	6.87
7.46	7.46	7.22	7.16	7.69	7.73	8.38	8.01	8.71	8.93
Варіант 14									
7.54	6.02	6.78	6.33	6.13	6.84	7.30	6.21	7.14	6.31
7.23	6.57	6.73	7.21	6.70	7.48	6.98	7.78	5.77	6.67
6.79	7.66	7.09	6.01	6.55	7.21	6.91	6.54	6.61	6.64
6.06	7.46	7.08	7.52	6.86	7.10	6.50	6.91	7.02	6.97
7.07	7.23	7.07	8.14	7.90	5.99	6.38	7.25	7.22	6.68
6.38	7.29	7.69	6.69	6.66	6.87	7.97	6.41	6.52	6.37

6.92	6.90	6.27	7.18	7.39	6.77	7.48	7.13	7.62	6.67
7.41	7.64	7.38	7.31	7.45	6.70	6.92	6.82	7.30	6.47
6.87	7.24	7.54	8.23	7.08	6.77	6.95	6.90	6.98	6.78
7.12	7.04	7.24	7.24	7.29	7.28	7.61	7.56	7.96	7.80
Варіант 15									
9.28	6.09	7.64	6.68	6.45	7.62	8.66	6.40	8.19	6.81
8.24	7.23	7.38	8.29	7.38	8.59	7.88	9.54	5.67	7.26
7.58	9.13	8.30	6.29	7.32	8.05	7.74	7.22	7.30	7.01
6.20	8.63	8.36	9.08	7.62	8.05	6.85	7.63	8.23	7.59
8.34	8.36	8.44	10.47	9.53	5.79	6.99	8.85	8.39	7.39
6.89	8.99	9.29	7.31	7.11	7.96	9.91	6.83	7.16	6.67
7.54	7.78	6.74	8.28	8.85	7.77	8.72	8.47	9.05	7.36
8.98	9.16	8.92	8.80	8.85	7.41	7.64	7.74	8.64	6.60
7.60	8.02	9.25	10.24	8.47	7.78	7.92	7.65	7.80	7.65
8.33	8.14	8.45	8.37	8.98	8.71	9.49	9.43	9.89	9.89
Варіант 16									
8.53	7.07	7.80	7.48	7.19	7.84	8.37	7.02	8.13	7.42
8.07	7.61	7.59	8.10	7.68	8.31	7.97	8.89	6.81	7.59
7.79	8.63	8.24	7.03	7.53	8.09	7.90	7.73	7.60	7.53
7.12	8.28	8.07	8.74	7.83	8.02	7.47	7.96	8.18	7.86
8.16	8.02	8.17	9.09	8.80	7.00	7.49	8.33	8.22	7.58
7.30	8.27	8.72	7.54	7.58	7.82	8.97	7.45	7.64	7.33
7.98	7.82	7.44	8.21	8.35	7.81	8.30	8.19	8.55	7.63
8.42	8.74	8.31	8.45	8.37	7.61	7.79	7.99	8.48	7.31
7.97	8.07	8.70	9.14	8.24	7.82	7.89	7.88	7.98	7.88
8.21	8.17	8.13	8.03	8.47	8.34	8.66	8.56	8.99	8.82
Варіант 17									
10.02	7.47	8.92	7.64	7.15	8.69	9.79	7.40	9.11	7.98
9.49	8.01	8.18	9.34	8.46	9.90	8.56	10.79	6.81	8.20

8.64	10.26	9.36	7.14	8.12	9.40	8.84	8.05	8.31	8.15
7.31	9.85	9.00	10.24	8.73	9.37	7.77	8.95	9.35	8.72
9.46	9.05	9.31	11.44	10.85	6.99	7.61	9.89	9.24	8.16
7.79	9.97	10.23	8.01	8.23	8.74	10.85	7.56	8.00	7.98
8.68	8.59	7.62	9.09	9.83	8.96	9.61	9.07	10.37	8.19
9.60	10.19	9.79	9.64	9.55	8.49	8.79	8.81	9.50	7.88
8.69	9.35	10.26	11.21	9.14	8.95	8.85	8.69	8.70	8.85
9.25	9.25	9.01	9.31	9.83	9.61	10.14	10.10	10.72	10.76
Варіант 18									
9.58	8.09	9.00	8.31	8.01	8.81	9.25	8.05	9.24	8.45
9.07	8.53	8.64	9.22	8.71	9.40	8.86	9.88	7.79	8.65
8.93	9.60	9.07	8.01	8.70	9.11	8.79	8.63	8.68	8.74
8.18	9.37	9.16	9.68	8.84	9.12	8.33	8.76	9.00	8.88
9.07	9.19	9.18	10.03	9.93	7.96	8.45	9.30	9.22	8.54
8.30	9.34	9.74	8.65	8.63	8.99	9.91	8.34	8.59	8.35
8.87	8.78	8.33	9.17	9.37	9.00	9.37	9.11	9.64	8.60
9.38	9.68	9.38	9.26	9.37	8.66	8.89	8.79	9.46	8.50
8.87	9.05	9.57	10.20	9.00	8.96	8.84	8.88	8.78	8.82
9.16	9.19	9.11	9.18	9.46	9.41	9.59	9.69	9.83	9.80
Варіант 19									
11.36	8.41	9.94	8.78	8.37	9.56	10.58	8.37	10.45	8.75
10.29	9.29	9.38	10.31	9.05	10.62	9.61	11.83	7.87	9.28
9.72	11.04	10.43	8.09	9.05	10.40	9.62	9.13	9.39	9.07
8.14	10.59	10.02	11.47	9.80	10.19	8.52	9.86	10.50	9.59
10.39	10.37	10.42	12.10	11.65	7.60	8.90	10.60	10.34	9.08
8.52	10.91	11.11	9.34	9.02	9.79	11.53	8.75	9.02	8.94
9.90	9.71	8.67	10.05	10.89	9.87	10.69	10.20	11.41	9.46
10.81	11.28	10.79	10.56	10.77	9.40	9.96	10.00	10.92	8.97
9.93	10.08	11.10	12.24	10.21	9.92	9.56	9.74	9.56	9.81

10.41	10.05	10.36	10.19	10.95	10.59	11.06	11.47	11.64	11.79
Варіант 20									
10.59	9.07	9.80	9.28	9.13	9.78	10.32	9.15	10.15	9.32
10.01	9.64	9.71	10.15	9.56	10.49	9.76	10.88	8.91	9.59
9.85	10.63	10.17	9.14	9.69	10.17	9.77	9.72	9.52	9.63
9.03	10.41	10.08	10.71	9.92	10.17	9.45	9.86	10.01	9.99
10.05	10.11	10.04	11.02	10.91	8.85	9.44	10.32	10.17	9.50
9.37	10.25	10.72	9.61	9.72	9.79	10.95	9.35	9.69	9.43
9.85	9.76	9.41	10.05	10.38	9.81	10.46	10.04	10.72	9.53
10.48	10.56	10.36	10.34	10.33	9.58	9.76	9.94	10.40	9.34
9.78	10.15	10.72	11.13	10.12	9.88	9.97	9.75	9.99	9.81
10.21	10.14	10.09	10.10	10.37	10.35	10.53	10.64	10.90	10.85
Варіант 21									
12.21	9.23	10.94	9.66	9.13	10.88	11.71	9.42	11.41	9.98
11.32	10.48	10.05	11.37	10.00	11.53	10.93	12.51	8.66	10.17
10.91	12.43	11.37	9.39	10.39	11.24	10.60	10.01	10.50	10.37
9.25	11.62	11.44	12.24	10.76	11.38	9.80	10.99	11.21	10.58
11.29	11.29	11.04	13.40	12.87	8.68	9.84	11.68	11.48	10.19
9.90	11.71	12.46	10.03	10.25	10.89	12.54	9.52	10.02	9.69
10.56	10.86	9.65	11.17	11.91	10.57	11.56	11.22	12.46	10.40
11.95	12.26	11.56	11.91	11.82	10.25	10.66	10.97	11.75	9.89
10.88	11.32	12.41	13.25	11.16	10.81	10.90	10.78	10.96	10.56
11.13	11.15	11.39	11.08	11.55	11.59	12.05	12.00	12.90	12.84
Варіант 22									
11.69	10.18	10.82	10.45	10.02	10.86	11.28	10.03	11.19	10.47
11.02	10.66	10.53	11.04	10.66	11.27	10.92	11.95	9.97	10.74
11.00	11.50	11.18	10.23	10.60	11.08	10.97	10.56	10.52	10.74
10.17	11.34	11.01	11.74	10.89	11.16	10.40	10.82	11.22	10.77
11.19	11.01	11.05	12.23	11.91	9.93	10.35	11.48	11.03	10.53

10.27	11.27	11.69	10.66	10.63	10.82	11.84	10.37	10.50	10.48
10.84	10.94	10.36	11.18	11.47	10.91	11.26	11.08	11.66	10.75
11.50	11.75	11.42	11.31	11.28	10.59	10.85	10.95	11.37	10.40
10.96	11.21	11.55	12.09	11.17	10.90	10.75	10.84	10.95	10.82
11.14	11.02	11.05	11.02	11.25	11.27	11.61	11.58	11.97	11.82
Варіант 23									
13.16	10.25	11.63	10.92	10.14	11.82	12.98	10.15	12.10	10.90
12.38	11.46	11.32	12.15	11.12	12.67	11.52	13.58	9.64	11.31
11.51	13.13	12.31	10.44	11.01	12.02	11.81	11.19	11.37	11.24
10.37	12.76	12.01	13.50	11.53	12.35	10.97	11.79	12.12	11.91
12.23	12.24	12.18	14.38	13.98	9.65	10.97	12.91	12.48	11.19
10.74	12.64	13.42	11.14	11.21	11.53	13.54	10.81	11.07	10.59
11.83	11.67	10.89	12.05	12.56	11.55	12.99	12.31	13.15	11.37
12.61	13.46	12.92	12.98	12.82	11.48	11.97	11.79	12.87	10.94
11.69	12.43	13.28	14.28	12.13	11.84	11.90	11.54	11.71	11.73
12.28	12.24	12.07	12.49	13.00	12.87	13.33	13.50	13.76	13.63
Варіант 24									
12.64	11.25	11.95	11.49	11.11	11.95	12.39	11.22	12.12	11.29
12.12	11.65	11.64	12.15	11.65	12.38	11.94	12.92	10.90	11.60
11.95	12.71	12.00	11.12	11.70	12.11	11.77	11.71	11.65	11.59
11.15	12.28	12.05	12.73	11.77	12.17	11.39	11.83	12.21	11.95
12.20	12.16	12.01	13.15	12.81	10.75	11.29	12.32	12.16	11.72
11.32	12.31	12.53	11.58	11.58	11.86	12.87	11.35	11.53	11.44
11.80	11.75	11.27	12.21	12.42	11.85	12.46	12.18	12.64	11.66
12.49	12.59	12.49	12.30	12.33	11.50	11.81	11.94	12.31	11.36
11.89	12.21	12.68	13.16	12.06	11.80	11.94	11.89	11.84	11.92
12.03	12.12	12.05	12.20	12.48	12.30	12.60	12.68	12.80	12.82
Варіант 25									
14.37	11.01	12.76	11.82	11.13	12.61	13.67	11.06	13.12	11.70

13.08	12.39	12.27	13,38	12.30	13.70	12.65	14.56	10.62	12.07
12.67	14.21	13.05	11.46	12.15	13.09	12.51	12.39	12.46	12.08
11.40	13.79	13.32	14.02	12.74	13.36	11.50	13.00	13.28	12.81
13.33	13.49	13.08	15.01	14.66	10.55	11.99	13.71	13.44	12.28
11.71	13.56	14.41	12.14	12.13	12.56	14.77	11.82	12.16	11.96
12.92	12.77	11.56	13.45	13.92	12.99	13.50	13.10	14.33	12.44
13.96	14.10	13.80	13.80	13.55	12.47	12.61	12.88	13.70	11.62
12.62	13.41	14.37	15.30	13.17	12.52	12.51	12.72	12.84	12.55
13.21	13.08	13.16	13.19	13.54	13.76	14.08	14.22	14.92	14.64
Варіант 26									
13.73	12.01	12.95	12.41	12.06	12.90	13.27	12.19	13.07	12.43
13.24	12.69	12.54	13.20	12.62	13.34	12.80	13.81	11.94	12.59
12.83	13.62	13.06	12.17	12.73	13.17	12.81	12.53	12.63	12.64
12.11	13.42	13.08	13.71	12.77	13.21	12.49	12.86	13.24	12.95
13.06	13.10	13.23	14.08	13.87	11.88	12.29	13.26	13.20	12.63
12.33	13.34	13.52	12.73	12.71	12.83	13.96	12.49	12.61	12.43
12.90	12.81	12.37	13.08	13.44	12.78	13.42	13.01	13.69	12.61
13.27	13.65	13.49	13.47	13.48	12.56	12.83	12.89	13.34	12.38
12.80	13.12	13.56	14.05	13.15	12.91	12.96	12.94	12.94	12.84
13.19	13.03	13.09	13.18	13.26	13.44	13.63	13.66	13.82	13.79
Варіант 27									
15.01	12.10	13.54	12.80	12.28	13.54	14.68	12.11	14.50	13.00
14.39	13.26	13.28	14.02	13.18	14.60	13.74	15.98	11.92	13.22
13.82	15.27	14.01	12.03	13.32	14.47	13.71	13.09	13.29	13.31
12.16	14.67	14.17	15.42	13.64	14.07	12.79	13.87	14.19	13.76
14.30	14.42	14.17	16.31	15.50	11.96	12.85	14.55	14.09	13.17
12.83	14.52	15.35	13.20	13.26	13.92	15.63	12.75	13.16	12.94
13.67	13.75	12.91	14.37	14.61	13.83	14.72	14.29	15.32	13.14
14.82	15.35	14.67	14.56	14.75	13.39	13.93	13.93	14.94	12.94

13.78	14.10	15.45	16.40	14.23	13.74	13.73	13.71	13.68	13.57
14.43	14.06	14.21	14.33	14.70	14.67	15.48	15.03	15.56	15.94
Варіант 28									
14.66	13.18	13.92	13.25	13.19	13.95	14.33	13.13	14.15	13.31
14.08	13.69	13.75	14.24	13.67	14.47	13.83	15.00	12.85	13.68
13.99	14.70	14.16	13.08	13.58	14.10	13.87	13.68	13.51	13.51
13.12	14.47	14.13	14.56	13.79	14.08	13.30	13.96	14.05	13.93
14.10	14.10	14.01	15.19	14.93	12.87	13.39	14.43	14.05	13.67
13.32	14.49	14.57	13.69	13.75	13.81	14.85	13.36	13.55	13.38
13.86	13.80	13.33	14.02	14.42	13.90	14.44	14.06	14.73	13.56
14.41	14.72	14.34	14.48	14.47	13.59	13.98	13.98	14.29	13.28
13.98	14.24	14.55	15.19	14.17	13.90	13.82	13.84	13.84	13.97
14.14	14.05	14.04	14.02	14.41	14.41	14.74	14.70	14.85	14.79
Варіант 29									
16.23	13.38	14.51	13.91	13.36	14.99	15.99	13.03	15.09	13.71
15.45	14.49	14.30	15.34	14.40	15.83	14.98	16.52	12.87	14.19
14.86	16.39	15.40	13.27	14.41	15.18	14.94	14.10	14.43	14.33
13.44	15.97	15.03	16.07	14.58	15.47	13.76	14.93	15.49	14.79
15.15	15.37	15.36	17.30	16.80	12.83	13.50	15.82	15.11	14.05
13.58	16.00	16.37	14.32	14.08	14.64	17.00	13.54	14.30	13.74
14.56	14.58	13.76	15.17	15.50	14.57	15.85	15.09	16.40	14.14
15.51	16.25	15.79	15.54	15.79	14.33	14.54	14.50	15.53	13.95
14.51	15.08	16.36	17.39	15.35	14.56	14.68	14.93	14.67	14.98
15.33	15.47	15.05	15.37	15.87	15.97	16.13	16.35	16.55	16.64
Варіант 30									
15.74	14.17	14.80	14.42	14.13	14.76	15.41	14.08	15.10	14.39
15.21	14.75	14.62	15.18	14.67	15.27	14.78	15.82	13.96	14.60
14.85	15.52	15.16	14.06	14.62	15.15	14.92	14.63	14.69	14.59
14.24	15.27	15.08	15.60	14.78	15.22	14.50	14.80	15.13	14.93

15.18	15.17	15.16	16.24	15.79	13.81	14.31	15.34	15.25	14.57
14.28	15.25	15.63	14.62	14.72	14.79	15.84	14.42	14.67	14.26
14.96	14.91	14.43	15.24	15.48	15.00	15.34	15.14	15.66	14.52
15.42	15.57	15.40	15.30	15.48	14.60	14.81	14.89	15.40	14.39
14.93	15.10	15.65	16.13	15.21	14.91	14.86	14.89	14.83	14.85
15.18	15.20	15.21	15.08	15.49	15.27	15.74	15.63	15.95	15.85

Додаток С

Розрахункова робота 3

С.1 Розподіл Пуассона

Нехай випадкова величина x приймає значення 0,1,2,... Розподіл Пуассона задає відповідність між значеннями величини x та ймовірностями цих значень за допомогою співвідношення

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda}}{m!}\lambda^m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Характерним для розподілу Пуассона є рівність математичного очікування і дисперсії: $M[x] = D[x] = \lambda$.

Розглянемо статистичну таблицю

0	1	2	...	k
w_1	w_2	w_3	...	w_k

На її основі обчислимо $M[x]$ та $D[x]$. Якщо числа $M[x]$ та $D[x]$ близькі між собою, то можна висловити гіпотезу про те, що дослідні дані підлягають розподілу Пуассона. Приймемо $\lambda \cong M[x]$ і за формулою

$$p_k = p(x = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k$$

обчислимо нові теоретичні (вирівняні) значення.

Суть роботи полягає у знаходженні для емпіричних даних розподілу Пуассона та перевірці гіпотези при допомозі одного з критеріїв (Пірсона чи Романовського с. 202).

Приклад. Взяли репрезентативну вибірку об'ємом в 100 ящиків, в кожному з яких знаходиться певна кількість деталей. Дані про число бракованих деталей у кожному ящику наведено в таблиці

3	5	3	6	3	2	4	0	1	4	4	2	2	7	5	3	4
5	2	3	2	4	8	3	2	1	1	0	3	5	3	2	4	2
2	4	2	5	4	3	6	0	3	1	2	0	4	4	3	6	2
1	3	3	2	2	1	7	5	4	3	1	3	2	5	3	4	3
1	5	1	2	3	4	3	4	6	2	6	2	3	7	4	3	2
1	1	3	3	1	3	1	1	2	5	0	3	1	4	1		

На її основі запишемо статистичний розподіл:

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	5	16	19	25	16	10	5	3	1
W	0,05	0,16	0,19	0,25	0,16	0,10	0,05	0,03	0,01

Обчислимо середнє значення та дисперсію:

$$m = M[x] = \frac{1}{100}(0 \cdot 5 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 25 + +4 \cdot 16 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1) = 3,02;$$

$$M[x^2] = \frac{1}{100}(0^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 16 + 2^2 \cdot 19 + 3^2 \cdot 25 + +4^2 \cdot 16 + 5^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 1) = 12,14;$$

$$d = D[x] = M[x^2] - M^2[x] = 3,02.$$

Візьмемо $\lambda = 3$ і обчислимо ймовірності p_k:

$$p_k = p(x = k) = \frac{3^k}{k!}e^{-3} = 0,05\frac{3^k}{k!};$$

$$p_0 = 0,05\frac{3^0}{1} = 0,05; \quad \ldots \quad p_8 = 0,05\frac{6561}{40320} = 0,01.$$

Отримані значення занесемо у таблицю

x	w_i	p_i	$(w_i - p_i)^2/p_i$
0	0,05	0,05	0,0000
1	0,16	0,15	0,0007
2	0,19	0,23	0,0070
3	0,25	0,23	0,0017
4	0,16	0,17	0,0006
5	0,10	0,10	0,0000
6	0,05	0,05	0,0013
7	0,03	0,02	
8	0,01	0,01	
Σ	1,00	1,01	0,0113

Для обчислення величини χ^2 три останні групи об'єднаємо в одну. Отримаємо $\chi^2 = 100 \cdot 0{,}0113 = 1{,}13$. Число груп $k = 7$. Число умов, що накладаються на частоти $t = 2$. Ступінь вільності $r = k - t = 7 - 2 = 5$. За критерієм Романовського

$$\alpha = \frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2 \cdot r}} = \frac{5 - 1{,}13}{3{,}16} = 1{,}22 < 3.$$

Отже, дослідні дані узгоджуються з розподілом Пуассона.

Покажемо, що аналогічний висновок можна зробити, якщо скористатись критерієм Пірсона. Візьмемо 10% рівень значущості. За допомогою таблиці (с. 250) знайдемо критичну точку $\chi^2_0 = qchisq(1 - \alpha, r) = qchisq(0{,}9; 5) = 9{,}24$. Оскільки значення критерію ($\chi^2 = 1{,}13$) менше критичної точки ($\chi^2_0 = 9{,}24$), то немає підстав відхиляти на 10% рівні значущості гіпотезу про Пуассонівський розподіл бракованих деталей.

С.2 Індивідуальні завдання

- *За даною таблицею статистичного розподілу побудувати полігон розподілу.*
- *Вирівняти дослідні дані за допомогою закону Пуассона.*
- *Перевірити узгодженість між емпіричними та теоретичними даними за допомогою критерія Пірсона.*

Варіант	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	N	37	37	18	6	2	0	0	0	0	0	0
2	N	29	36	22	9	3	1	0	0	0	0	0
3	N	22	33	25	13	5	2	0	0	0	0	0

4	N	17	30	27	16	7	2	1	0	0	0	0
5	N	14	27	27	18	9	4	1	0	0	0	0
6	N	11	24	27	20	11	5	2	0	0	0	0
7	N	8	21	26	21	13	7	3	1	0	0	0
8	N	6	18	24	22	15	8	4	2	1	0	0
9	N	5	15	22	22	17	10	5	2	1	0	0
10	N	4	13	20	22	18	12	6	3	1	1	0
11	N	3	11	18	22	19	13	8	4	2	1	0
12	N	2	9	17	21	19	16	9	5	2	1	0
13	N	2	7	15	20	20	17	10	6	3	1	1
14	N	1	6	13	18	19	16	12	7	4	2	1
15	N	1	5	11	17	19	17	13	10	5	3	1
16	N	1	4	10	15	18	17	14	10	6	3	2
17	N	1	3	8	14	18	18	15	10	7	4	2
18	N	1	3	7	13	17	17	15	11	8	4	2
19	N	0	2	6	11	16	17	16	13	8	5	3
20	N	0	2	5	10	14	17	16	13	9	6	4
21	N	6	22	36	44	38	26	16	8	4	2	0
22	N	4	18	34	42	38	32	18	10	4	2	0
23	N	4	14	30	40	40	34	20	12	6	2	2
24	N	2	12	26	36	38	32	24	14	8	4	2
25	N	2	10	22	34	38	34	26	20	10	6	2
26	N	2	8	20	30	36	34	28	20	12	6	4
27	N	2	6	16	28	36	36	30	20	14	8	4
28	N	2	6	14	26	34	34	30	22	16	8	4
29	N	0	4	12	22	32	34	32	26	16	10	6
30	N	0	4	10	20	28	34	32	26	18	12	8

Додаток D

Розрахункова робота 4

D.1 Застосування критерію χ^2

D.1. В експериментах спостерігалася невід'ємна неперервна випадкова величина ξ. Одержано такі її значення (упорядковані й округлені до 0,01) для $\eta = 48$ експериментів:

0,01	0,04	0,17	0,18	0,22	0,25	0,25	0,29
0,42	0,46	0,47	0,56	0,59	0,67	0,70	0,72
0,76	0,78	0,83	0,85	0,87	0,93	1,00	1,01
1,01	1,02	1,03	1,05	1,32	1,34	1,37	1,47
1,50	1,52	1,54	1,58	1,71	1,90	2,10	2,35
2,46	2,46	2,50	3,73	4,07	6,03	6,21	7,02

Перевірити гіпотезу про те, що ці дані є реалізацією вибірки з показникового розподілу з параметром 1 (його функція розподілу $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$).

D.2. *Кількість смертей від удару копитом.* Нижче наведено класичні дані фон Борткевича про кількість осіб, убитих ударом копита коня в 10 пруських армійських корпусах за 20 років (1875 — 1895):

i	0	1	2	3	4	5 і більше	Разом
n_i	109	65	22	3	1	0	200

Тут i — кількість смертей в одному корпусі за рік; n_i — кількість корпусів, у яких трапилося i смертей.

Перевірити гіпотезу, про те, що кількість смертей від удару копитом коня в одному корпусі протягом року має розподіл Пуассона.

D.3. Абітурієнти, які вступають до інституту, були навмання розподілені на два потоки по 300 чоловік у кожному. Результати екзамену з однієї й тієї самої дисципліни в кожному потоці виявилися такими:

1-й потік: бали "2", "3", "4" та "5" одержали відповідно 33, 43, 80 та 144 чоловіки;

2-й потік: бали "2", "3", "4" та "5" одержали відповідно 39, 35, 72 та 154 чоловіки.

Чи існує зв'язок між оцінкою на екзамені й потоком, в якому абітурієнт складав екзамен?

D.4. З 1871 по 1900 р. у Швейцарії народилося 1359 671 хлопчиків і 1285 086 дівчаток.

Чи узгоджується з цими даними гіпотеза H_o: імовірність народження хлопчика становить 0,5?

D.5. *Розподіл α-частинок.* В експерименті Резерфорда і Гейгера радіоактивна речовина спостерігалася протягом N = 2612 проміжків часу (кожний тривалістю 1/8 хв) і для кожного з них реєструвалася кількість α-частинок, які досягли лічильника.

У таблиці, вміщеній нижче, наведено кількість N_k проміжків часу, протягом яких спостерігалося точно k α-частинок. Загальна кількість частинок T = 10 132. Середня їх кількість, що реєструвалася за один інтервал, λ= T/N = 10132/2612 = 3,879.

k	N_k	k	N_k
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	49
3	525	9	27
4	532	10	10
5	408	>10	6
		Разом	2612

Скориставшись критерієм χ^2, перевірити гіпотезу про те, що кількість частинок, які досягають лічильника, підпорядковується розподілу Пуассона.

D.6. *Кмітливість та матеріальні умови.* У таблиці, вміщеній нижче, наведено результати обстежень 697 школярів. Хлопчиків було впорядковано згідно IQ і відповідно до умов їхнього життя вдома. При цьому використано позначення: A — дуже здібний, B — досить розумний, C — має середні здібності, D — недостатньо розвинений, E — розумово відсталий. Чи можна вважати, що умови життя (забезпеченість) дітей впливають на їхню кмітливість?

Забезпеченість	Кмітливість хлопчиків					Разом
	A	B	C	D	E	
Добра	33	137	125	47	8	350
Погана	21	127	129	61	9	347
Разом	54	264	254	108	17	697

Зауваження. IQ — Intellectual qualsty (розумові здібності) — показник розумових здібностей учнів у балах, який використовується в американській педагогічній практиці.

D.7. Чотири монети були підкинуті 20160 разів, при цьому комбінації: чотири "герби", три "герби" і "решка", два "герби" і дві "решка", один "герб" і три "решка", чотири "решки" з'явилися відповідно таку кількість разів: 1181, 4909, 7583, 5085, 1402 (дані експерименту, проведеного В.І.Романовським).
Чи свідчать ці дані про те, що кількість "гербів", яка з'явилася на чотирьох монетах, є біномно розподіленою випадковою величиною? Сформулювати і розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

D.8. *Помилкове з'єднання телефонних номерів.* У таблиці наведено дані про кількість помилкових з'єднань телефонних номерів. Усього спостерігалося 267 номерів.

k	n_k	k	n_k	k	n_k
0	0	6	22	12	18
1	1	7	43	13	12
2	0	8	31	14	7
3	5	9	40	15	6
4	11	10	35	16	2
5	14	11	20	Разом	267

Тут k — кількість помилкових з'єднань; n_k — кількість номерів, на яких було зафіксовано точно k помилкових з'єднань.
Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл кількості помилкових з'єднань.

D.9. *Аромат тютюну.* Тютюнова фірма хотіла б знати, чи можна відправляти замовникам сигарети та люльковий тютюн у спільній упаковці. (Якщо при цьому якість сигарет не погіршиться, то можна істотно зменшити витрати на їх перевезення). З цією метою провели експеримент. Виготовили 400 картонних коробок і у 250 з них поклали тютюнові вироби обох типів, а в решту — лише сигарети. Через місяць коробки відкрили і всі 400 упаковок сигарет розклали у випадковому порядку. Кілька експертів аналізували аромат сигарет, намагаючись виявити його відмінність від початкового. Результати експерименту наведено в таблиці.

Думка щодо аромату	Тип упаковки		Сума
	Спільна	Окрема	
Не змінився	72	119	191
Змінився	178	31	209
Сума	250	150	400

Чи можна на підставі цих даних вважати, що зв'язок між ароматом сигарет і типом упаковки відсутній?

D.10. У таблиці наведено офіційні дані шведської статистики за 1935 р. про розподіл новонароджених за статтю відповідно до окремих місяців.

Місяць	Дівчат	Всіх	Місяць	Дівчат	Всіх
Січень	3537	7280	Липень	3621	7585
Лютий	3407	6957	Серпень	3596	7393
Березень	3866	7883	Вересень	3491	7203
Квітень	3711	7884	Жовтень	3391	6903
Травень	3775	7892	Листопад	3160	6552
Червень	3665	7609	Грудень	3371	7132
			Разом	42591	88273

Чи свідчать ці дані про те, що кожного місяця протягом року діти народжуються однаково часто? Дівчатка народжуються однаково часто?

Вказівка. Сформулювати і розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

D.11. *Розчин золота.* У тонкому шарі розчину золота через однакові проміжки часу реєструвалася кількість частинок золота, що потрапили в поле зору мікроскопа. При цьому одержано такі результати:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	112	168	130	68	32	5	1	1	0

Тут: i — кількість частинок золота в полі зору мікроскопа; n_i — кількість проміжків часу, протягом яких фіксувалося i частинок золота.

Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл кількості частинок золота, що спостерігалися протягом заданого проміжку часу.

D.12. *Колір волосся і колір очей.* У таблиці наведено дані про 147 навмання вибраних студентів, яких було розподілено згідно з кольором їх волосся (біляcте, темне) та очей (блакитні, карі).

Колір волосся	Колір очей		Разом
	Блакитні	Карі	
Темне	31	41	72
Біляcте	40	35	75
Разом	71	76	147

Чи можна, на підставі цих даних зробити висновок про те, що колір очей пов'язаний з кольором волосся?

D.13. *Перебудова хромосом у клітині.* Рентгенівське опромінення спричинює в органічній клітині певні процеси, які будемо називати перебудовою хромосом. Імовірність кількості перебудов хромосом у клітинах згідно з теорією має підпорядковуватися розподілу Пуассона. Нижче наведено результати експерименту (підраховувалася кількість перебудов Хромосом під дією рентгенівських променів).

i	0	1	2	3	4 і більше	Разом
n_i	434	195	44	9	0	682

Тут i — кількість змін у клітині; n_i — кількість клітин, що мали i змін.

Чи узгоджується з наведеними даними гіпотеза про те, що кількість перебудов має розподіл Пуассона?

D.14. У таблиці наведено дані про 1426 ув'язнених, яких було класифіковано щодо алкогольної залежності (алкоголік, неалкоголік) і характеру злочинів, за які їх засудили (дані Горінга, цитовані К.Пірсоном). Стовпці таблиці впорядковано відповідно до "інтелектуальності" виду злочину, хоча цей зв'язок досить умовний.

	Алкогольна залежність		
Вид злочину	Алкоголіки	Неалкоголіки	Разом
Підпал	50	43	93
Згвалтування	88	62	150
Насильницькі дії	155	110	265
Крадіжка	379	300	679
Виготовлення фальшивих грошей	18	14	32
Шахрайство	63	144	207
Разом	753	673	1426

Чи можна на підставі цих даних зробити висновок про існування зв'язку між алкоголізмом і характером злочину?

D.15. *Бактерії в чашці Петрі.* В чашці Петрі спостерігаються колонії бактерій. Під мікроскопом їх видно як темні цяточки. Чашку Петрі (її дно) поділено на маленькі квадрати, в кожному з яких підраховується кількість колоній (цяток). Результати спостережень такі:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	5	19	26	26	21	13	8	0

Тут i — кількість колоній у квадраті; n_i — кількість квадратів з i колоніями.

Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл кількості колоній за квадратами.

D.16. *Розумові здібності та якість одягу.* У таблиці (Гілбі, Biometrika, 8, 94) наведено розподіл 1725 школярів, класифікованих відповідно до: 1) якості їх одягу; 2) розумових здібностей. При цьому для характеристики розумових здібностей була використана така градація: A — розумово відсталий; B — млявий і недостатньо розвинений; C — недостатньо розвинений; D — млявий, але розумний; E — досить розумний; F — явно здібний; G — дуже здібний.

Здібності	Як одягається				Сума
	Вишукано	Добре	Зодовільно	Погано	
A і B	33	41	39	17	130
C	48	100	58	13	219
D	113	202	70	22	407
E	209	255	61	10	535
F	194	138	33	10	375
G	39	15	4	1	59
Сума	636	751	265	73	1725

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку, що якість одягу школярів і їхні розумові здібності — незалежні ознаки?

D.17. Протягом Другої світової війни на Лондон упало 537 літаків-снарядів. Усю територію Лондона поділили на 576 ділянок з

площею 0,25 км^2. Нижче вказано кількість v_i ділянок, на які впало i снарядів.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8 і більше	Разом
v_i	229	211	93	35	7	0	0	1	0	576

Скориставшись критерієм χ^2, перевірити гіпотезу про те, що кількість літаків-снарядів які впали на ділянку, має розподіл Пуассона.

D.18. *Кмітливість та якість харчування.* У соціальному огляді (K. Pearson and Moul, 1925) 618 хлопчиків були класифіковані згідно з їхнім рівнем кмітливості та якістю харчування.

Якість харчування	Здібності						Разом
	A	B	C	D	E	F	
Добра	9	27	60	63	24	5	188
Задовільна	5	41	126	120	36	6	334
Погана	5	12	38	32	8	1	96
Разом	19	80	224	215	68	12	618

Результати обстежень наведено у вміщеній нижче таблиці. При цьому використано позначення: A — дуже здібний, B — здібний, C — кмітливий, D — мало кмітливий, E — млявий, F — дуже млявий.

Чи існує зв'язок між якістю харчування дітей та їхньою кмітливістю?

D.19. *Селекція гороху Г. Менделем.* В експериментах із селекцією гороху Г. Мендель спостерігав частоти поява різних видів насіння (тут частота — кількість насіння певного виду), що виходять при схрещенні рослин із круглим жовтим і зморшкуватим зеленим насінням. Ці дані та значення теоретичних імовірностей, що визначаються за теорією спадковості Менделя, наведено в таблиці.

Вид насіння	Частота	Імовірність
Кругле жовте	315	9/16
Зиоршкувате жовте	101	3/16
Кругле зелене	108	3/16
Зморшкувате зелене	32	1/16
Разом	556	1

Чи узгоджуються імовірності, знайдені відповідно до теорії Менделя, з наведеними експериментальними даними?

D.20. Проводились експерименти, що полягають в одночасному підкиданні 12 гральних кубиків. Спостерігалась випадкова величина ξ — кількість кубиків, на яких випало 4, 5 або 6 очок. Дані $n = 4096$ експериментів наведено в таблиці.

i	n_i	i	n_i
0	0	7	847
1	7	8	536
2	60	9	257
3	198	10	71
4	430	11	11
5	731	12	0
6	948	Разом	4096

Тут i — значення випадкової величини ξ; n_i — кількість експериментів, у яких випадкова величина ξ набула значення i. Перевірити гіпотезу про біномний розподіл випадкової величини ξ.

D.21. У таблиці наведено дані статті, в якій досліджувався взаємозв'язок між розвитком очей (який визначали за астигматизмом, гостротою зору і т.д.) та розвитком рук (який визначали за піднятою масою). Чи можна на підставі цих даних зробити висновок про те, що розвиток рук не залежить від розвитку очей?

Розвиток рук	Розвиток очей			Разом
	Лівоокі	Двоокі	Правоокі	
Ліворукі	34	62	28	124
Дворукі	27	28	20	75
Праворукі	57	105	52	214
Разом	118	195	100	413

D.22. *Упередженість спостерігача.* Нижче наведено кількість появ останньої цифри в 1000 вимірюваннях, виконаних спостерігачем. Сумнівно, що є якась справжня (обективна) причина, яка зумовлює частішу появу одних цифр порівняно з іншими; тому цілком природно припустити, що відхилення від однакової ймовірності появи цифр свідчить про упередженість спостерігача.

k	n_k	k	n_k
0	158	5	71
1	97	6	90
2	125	7	56
3	73	8	125
4	76	9	129
		Разом	1000

Тут k — остання цифра у вимірюваннях; n_k — кількість вимірювань, в яких останньою була цифра k.
Чи свідчать наведені дані про упередженість спостерігача?

D.23. *Заряд електрона.* У таблиці наведено 58 значень величини e, знайдені Р.Міллікеном при визначенні заряду електрона, що дорівнює $e \cdot 10^{-10}$ одиницям.

1	4,740	13	4,769	25	4,778	37	4,788	49	4,795
2	4,747	14	4,771	26	4,779	38	4,788	50	4,797
3	4,749	15	4,771	27	4,779	39	4,789	51	4,799
4	4,758	16	4,772	28	4,779	40	4,789	52	4,799
5	4,761	17	4,772	29	4,781	41	4,790	53	4,801
6	4,764	18	4,772	30	4,781	42	4,790	54	4,805
7	4,764	19	4,774	31	4,782	43	4,790	55	4,806
8	4,764	20	4,775	32	4,783	44	4,791	56	4,808
9	4,765	21	4,775	33	4,783	45	4,791	57	4,809
10	4,767	22	4,776	34	4,785	46	4,791	58	4,810
11	4,768	23	4,777	35	4,785	47	4,792		
12	4,769	24	4,777	36	4,785	48	4,792		

Перевірити гіпотезу про те, що похибки при визначенні заряду електрона підпорядковуються нормальному розподілу.

D.24. *Глухонімота і стать.* Під час перепису населення Англії та Уельсу в 1901 р. було зареєстровано (з точністю до тисяч) 15 729 000 чоловіків і 16 799 000 жінок; з них 3497 чоловіків і 3072 жінки глухонімі від народження.

Перевірити гіпотезу про те, що глухонімота не пов'язана зі статтю.

D.25. *Нещасні випадки з водіями автобусів.* Нижче наведено частотний розподіл 166 водіїв лондонських автобусів відповідно до кількості нещасних випадків, що трапилися з ними протягом одного року.

Чи можна вважати, що кількість нещасних випадків, які сталися за участю водія протягом року, підпорядковується розподілу Пуассона?

i	n_i	i	n_i
0	45	6	3
1	36	7	2
2	40	8	1
3	19	9	0
4	12	10 і більше	0
5	8	Разом	166

Тут i — кількість нещасних випадків; n_i — кількість водіїв, з якими трапилося i нещасних випадків.

D.26. *Покази механічних годинників.* Механічні годинники, виставлені у вітринах годинникових магазинів, показують випадковий час. Висувається природна гіпотеза: покази цих годинників розподілені рівномірно на інтервалі $[0; 12)$. Результати 1000 спостережень подано в таблиці (весь інтервал $[0; 12)$ поділено на 12 рівних частин: $[i, i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, 11$).

i	n_i	i	n_i
0	77	6	73
1	81	7	70
2	95	8	77
3	86	9	82
4	98	10	84
5	90	11	87
		Разом	1000

Тут i — номер інтервалу від i до $(i+1)$ години, $i = 0, 1, \ldots, 11$; n_i — кількість годинників, покази яких належать i-му інтервалу. Чи узгоджується висунута гіпотеза з цими даними?

D.27. У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами були одержані такі дані про кількість пошкоджених виробів:

i	n_i	i	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 і більше	0
4	9	Разом	500

Тут i — кількість пошкоджених виробів; n_i — кількість контейнерів з i пошкодженими виробами.

Перевірити гіпотезу про те, що кількість пошкоджених виробів на контейнер має розподіл Пуассона.

D.28. *Кмітливість і статура.* Нижче наведено дані про ступінь кмітливості школярів, які мають атлетичну та неатлетичну статуру.

Статура школяра	Ступінь кмітливості		Разом
	Високий	Низький	
Атлетична	581	567	1148
Неатлетична	209	351	560
Разом	790	918	1708

Що можна сказати про зв'язок між кмітливістю школярів та їхньою статурою? Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

D.29. Наведені нижче дані — це кількість тріщин у стержні, виявлених при випробуванні 600 нейлонових стержнів.

i	0	1	2	3	4	5	6 і більше	Разом
n_i	275	207	81	23	8	6	0	600

Тут i — кількість тріщин у стержні; n_i — кількість стержнів, у яких виявлено i тріщин. Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл кількості тріщин у стержні.

D.30. При 24 000 підкиданнях монети К.Пірсон одержав 12012 випадань "герба". Чи узгоджується гіпотеза про симетричність монети з цими даними?

D.31. До вибірки ввійшли 225 бобін мідного дроту. Вимірювали товщину (у мікрометрах) пластикового покриття дроту (див. таблицю).

Товщина	Частота	Товщина	Частота
145	1	153	37
146	3	154	25
147	3	155	23
148	7	156	11
149	11	157	9
150	25	158	2
151	33	159	0
152	34	161	1

Чи можна на підставі цих даних вважати, що товщина дроту має нормальний розподіл?

Зауваження. Тут частота — це кількість бобін, для яких була зареєстрована задана товщина покриття.

D.32. В одному з експериментів із гральними кубиками Уелдон підкинув кубики 49152 рази. При цьому в 25145 випадках випали числа 4, 5 або 6. Чи узгоджується з цими даними гіпотеза про симетричність кубиків?

D.33. Для виявлення зв'язку між дихальною функцією і звичкою до паління результати легеневих проб у групі співробітників установи були зіставлені з режимом паління. В одній з таких проб (проба FEV1) вимірювався об'єм (у літрах) повітря, що видихується через 1 с після форсованого видиху. Результати обстеження наведено в таблиці.

	Нікотинова залежність		
Легенева проба	Не палять	Палять	Разом
Ненормальна	2	16	18
Нормальна	64	83	147
Разом	66	99	165

Чи свідчать ці дані про зв'язок між палінням і дихальною функцією?

D.34. *Гострота зору.* У таблиці зібрано дані про (гостроту зору в 3242 чоловіків віком 30 - 39 років — службовців Королівських артилерійських заводів Великобританії (1943 - 1946 рр.) (гострота зору визначається неозброєним оком за ступенями: вищий, другий, третій, нижчий). Чи можна на підставі цих даних зробити висновок про те, що гострота зору правого і лівого очей не пов'язані між собою?

Ступінь	Ступінь (ліве око)				
(праве око)	Вищий	Другий	Третій	Нижчий	Сума
Вищий	821	112	85	35	1053
Другий	116	494	145	27	782
Третій	72	151	583	87	893
Нижчий	43	34	106	331	514
Сума	1052	791	919	480	3242

D.35. *Катастрофи на вугільних шахтах.* Нижче наведено інтервали (у днях) між послідовними катастрофами на вугільних шахтах Великобританії з 1875 по 1951 р. Катастрофою вважається така ситуація, що призводить до загибелі 10 і більше чоловік. (Дані запозичені з праці Мег'ю, Пірсона і Вінна (Maguire B.A., Pearson E.S., Wynn A.H.A. The time intervals between industrial accidents, Biotetrika, 39 (1952), 168 - 180), їх слід читати по рядках.)

378	36	15	31	215	11	137	4
15	72	96	124	50	120	203	176
55	93	59	315	59	61	1	13
189	345	20	81	286	114	108	188
233	28	22	61	78	99	326	275
54	217	113	32	23	151	361	312
354	58	275	78	17	1205	644	467
871	48	123	457	498	49	131	182
255	195	224	566	390	72	228	271
208	517	1613	54	326	1312	348	745
217	120	275	20	66	291	4	369
338	336	19	329	330	312	171	145
75	364	37	19	156	47	129	1630
29	217	7	18	1357			

Перевірити гіпотезу про показниковий розподіл інтервалів між катастрофами.

D.36. *Цифри в десятковому запису числа* π. Нижче наведено дані про появу цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 серед перших 800 знаків числа π.

k	n_k	k	n_k
0	74	5	73
1	92	6	77
2	83	7	75
3	79	8	76
4	80	9	91
		Разом	800

Тут k — цифра в десятковому запису числа π; n_k — кількість поява цифри серед перших 800 знаків числа π. Чи узгоджується гіпотеза про рівноймовірність поява кожної цифри в десятковому запису числа π з наведеними даними?

D.37. *Колір волосся та колір брів.* У таблиці наведено розподіл кольору волосся та кольору брів у 46 542 шведських призовників.

	Колір волосся		
Колір брів	Біляcте, руде	Темне	Разом
Білясті, руді	30472	3238	33710
Темні	3364	9468	12832
Разом	33836	12706	46542

Чи свідчать ці дані про зв'язок між кольором волосся та кольором брів?

D.38. При $n = 4040$ підкиданнях монети Ж.Бюффон отримав 2048 випадань "герба"і 1992 випадань "решки". Чи узгоджується з цими даними гіпотеза: ймовірність випадань "герба"дорівнює 1/2?

Додаток Е

Розрахункова робота 5

Е.1 Кореляція

Короткі теоретичні відомості. Нехай в результаті n випробувань одержані точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$, які можна вважати значеннями випадкової величини $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Потрібно знайти коефіцієнт кореляції цієї сукупності випадкових значень.

Обчислення будемо проводити за такою схемою:

1) Знайдемо середні статистичні значення для величин x та y:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

2) Обчислимо дисперсію, середнє квадратичне відхилення та коваріацію:

$$d(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2; \qquad d(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2;$$

$$c(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}; \quad \sigma(x) = \sqrt{d(x)}; \quad \sigma(y) = \sqrt{d(y)}.$$

3) Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою

$$r(x,y) = \frac{c(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

4) Запишемо рівняння прямих регресії, користуючись рівняннями:

$$y(x) - \bar{y} = r\frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}(x - \bar{x}); \qquad x(y) - \bar{x} = r\frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}(y - \bar{y}).$$

Ці прямі одержуються методом найменших квадратів відносно осей OY та OX відповідно. Якщо коефіцієнт кореляції за модулем близький до одиниці, то можна вважати, що величини x, y звязані між собою лінійно.

Е.2 Індивідуальні завдання

- *За даними варіантів обчислити середні значення, середні квадратичні відхилення та коефіцієнт кореляції.*
- *Знайти рівняння обох ліній регресії.*
- *Побудувати графіки ліній регресії та дані точки* (x_i, y_i).

Табл. Е.1. Початкові дані для варіантів завдань

Варіант 1			
(0.49; 0.61)	(1.09; 0.45)	(1.56; -0.48)	(2.87; -1.10)
(4.34; -2.95)	(4.65; -3.88)	(5.69; -2.36)	(7.20; -5.45)
(7.53; -9.39)	(8.70; -10.4)	(10.35; -5.30)	(11.14; -15.0)
Варіант 2			
(-0.09; 2.12)	(1.38; 0.95)	(2.06; 0.32)	(2.99; -0.36)
(3.61; -0.35)	(4.89; -3.34)	(5.71; -4.71)	(7.30; -2.42)
(8.06; -4.16)	(8.63; -4.79)	(10.03; -10.4)	(11.20; -10.1)
Варіант 3			
(0.41; 2.48)	(1.10; 2.30)	(2.42; 0.12)	(3.41; -1.45)
(4.24; -1.84)	(4.63; -3.39)	(6.06; -5.25)	(7.15; -1.38)
(7.57; -4.03)	(8.91; -9.26)	(10.31; -11.9)	(10.81; -8.94)
Варіант 4			

(0.23; 3.68)	(1.34; 2.17)	(2.50; 1.15)	(2.51; 1.12)
(4.44; 0.51)	(5.20; -2.61)	(5.94; -4.58)	(7.35; -3.15)
(7.85; -0.58)	(8.62; -5.31)	(10.30; -11.0)	(10.57; -10.1)
Варіант 5			
(-0.25; 5.22)	(1.36; 3.95)	(2.30; 3.13)	(2.52; 1.92)
(3.67; -0.00)	(5.42; -2.17)	(5.68; 1.83)	(7.36; 0.30)
(8.29; -0.36)	(9.45; -2.15)	(9.50; -2.09)	(10.68; -10.4)
Варіант 6			
(-0.37; 6.54)	(0.96; 4.77)	(1.79; 3.39)	(2.86; 2.36)
(3.60; 1.66)	(5.40; -1.88)	(6.44; -3.41)	(7.25; -4.62)
(7.80; -2.59)	(8.95; -7.14)	(10.47; -8.74)	(11.19; -6.72)
Варіант 7			
(-0.31; 7.30)	(1.22; 5.28)	(1.53; 6.07)	(2.84; 3.46)
(4.02; 1.28)	(4.72; 3.83)	(5.85; -0.78)	(6.80; 1.85)
(7.66; 0.04)	(9.14; -5.60)	(10.33; -0.47)	(10.53; -2.02)
Варіант 8			
(-0.38; 8.36)	(1.47; 6.72)	(2.10; 5.39)	(2.64; 4.76)
(4.47; 2.67)	(4.86; 1.67)	(6.29; 3.77)	(6.96; -1.73)
(8.06; 0.04)	(9.40; -3.38)	(10.12; 0.87)	(11.38; -4.96)
Варіант 9			
(-0.46; 9.66)	(0.66; 8.19)	(2.38; 6.44)	(2.59; 6.57)
(3.68; 4.89)	(4.97; 4.62)	(6.16; 1.27)	(6.56; 5.59)
(7.53; -0.45)	(8.66; -2.09)	(9.85; 1.71)	(10.86; -6.76)
Варіант 10			
(0.35; 9.80)	(0.99; 8.90)	(1.58; 8.66)	(2.81; 7.82)
(3.94; 7.51)	(4.96; 7.44)	(5.84; 3.44)	(7.38; 4.40)
(8.15; 4.03)	(8.90; 0.33)	(9.51; -2.21)	(11.00; 3.04)
Варіант 11			
(-0.15; 11.21)	(0.86; 10.18)	(2.13; 9.42)	(3.10; 6.46)
(4.08; 8.95)	(4.89; 6.74)	(5.54; 7.34)	(7.48; 3.11)
(7.61; 5.63)	(9.03; -2.09)	(9.79; 4.91)	(10.52; 1.60)
Варіант 12			

(-0.26; 12.20)	(1.15; 10.43)	(2.40; 10.08)	(3.21; 8.14)
(4.49; 6.01)	(4.68; 8.81)	(5.88; 7.62)	(6.90; 4.95)
(8.02; 4.31)	(9.00; 0.91)	(9.64; 5.32)	(10.99; -2.98)
Варіант 13			
(0.41; 12.48)	(0.78; 12.18)	(2.13; 9.88)	(3.37; 8.19)
(3.77; 8.47)	(5.09; 8.70)	(6.35; 7.13)	(6.64; 7.13)
(7.59; 4.90)	(9.25; 7.31)	(9.65; 3.65)	(11.21; -0.60)
Варіант 14			
(-0.49; 14.51)	(0.62; 13.24)	(1.83; 11.94)	(3.16; 10.48)
(4.27; 8.38)	(5.11; 8.51)	(5.59; 10.14)	(6.97; 7.32)
(8.11; 8.01)	(8.51; 6.06)	(10.26; -0.47)	(10.96; -0.69)
Варіант 15			
(0.36; 14.61)	(0.69; 14.55)	(1.84; 13.58)	(2.68; 13.26)
(4.46; 11.73)	(4.56; 9.97)	(6.41; 9.90)	(7.00; 9.89)
(8.18; 4.78)	(8.83; 5.50)	(9.73; 0.71)	(11.06; 8.27)
Варіант 16			
(0.21; 15.77)	(0.67; 15.14)	(2.32; 14.48)	(3.02; 12.19)
(4.09; 11.26)	(5.05; 8.56)	(5.68; 12.39)	(6.66; 6.33)
(8.39; 8.44)	(9.03; 2.93)	(9.99; 4.40)	(10.72; 8.97)
Варіант 17			
(0.23; 16.80)	(0.74; 16.00)	(1.94; 14.83)	(3.10; 13.88)
(4.13; 13.70)	(5.29; 12.49)	(6.06; 12.75)	(6.90; 7.77)
(8.16; 12.28)	(9.35; 12.32)	(10.22; 4.66)	(11.20; 2.83)
Варіант 18			
(0.37; 17.52)	(0.73; 17.22)	(1.52; 15.97)	(2.72; 14.33)
(3.58; 13.43)	(4.58; 13.59)	(6.44; 11.00)	(7.24; 8.55)
(8.48; 6.59)	(8.52; 11.06)	(10.36; 5.35)	(10.85; 3.98)
Варіант 19			
(0.01; 18.99)	(0.56; 18.48)	(2.34; 16.05)	(3.06; 15.19)
(4.04; 16.52)	(4.81; 14.11)	(6.28; 12.32)	(6.65; 10.51)
(8.46; 9.61)	(9.03; 12.20)	(10.26; 8.94)	(11.34; 5.80)
Варіант 20			

(0.45; 19.51)	(0.99; 19.37)	(2.39; 18.72)	(3.36; 17.15)
(4.16; 14.74)	(4.58; 16.52)	(5.75; 15.93)	(6.70; 12.91)
(7.66; 9.62)	(8.85; 14.08)	(9.86; 12.72)	(11.31; 9.45)
Варіант 21			
(0.20; 20.75)	(0.75; 20.01)	(2.29; 19.78)	(2.96; 18.74)
(3.82; 16.35)	(4.76; 15.98)	(5.67; 17.55)	(7.08; 15.61)
(8.23; 13.32)	(9.29; 14.57)	(9.98; 14.88)	(11.28; 10.87)
Варіант 22			
(0.02; 21.98)	(0.90; 21.44)	(2.21; 18.93)	(2.73; 19.77)
(4.18; 17.08)	(5.33; 16.56)	(6.23; 18.14)	(7.37; 16.10)
(7.93; 14.76)	(9.37; 12.13)	(10.05; 11.58)	(10.91; 13.45)
Варіант 23			
(-0.11; 23.08)	(0.52; 22.35)	(2.41; 20.18)	(2.66; 19.10)
(3.52; 20.25)	(5.46; 18.82)	(5.58; 19.18)	(7.14; 12.61)
(7.87; 11.22)	(9.31; 13.73)	(9.59; 10.88)	(10.52; 7.37)
Варіант 24			
(-0.28; 24.33)	(0.78; 23.30)	(1.70; 22.19)	(2.92; 21.96)
(3.92; 20.55)	(5.05; 20.73)	(6.21; 19.53)	(7.42; 16.73)
(8.13; 15.83)	(9.49; 12.34)	(9.55; 15.03)	(10.97; 8.91)
Варіант 25			
(-0.17; 25.23)	(1.21; 23.62)	(1.74; 23.92)	(3.11; 23.32)
(3.69; 21.61)	(5.43; 18.95)	(6.13; 21.53)	(7.40; 15.44)
(8.13; 17.59)	(8.60; 16.72)	(10.41; 17.29)	(10.82; 12.30)
Варіант 26			
(0.39; 25.71)	(1.39; 24.03)	(2.04; 23.75)	(2.87; 22.76)
(3.69; 21.10)	(5.49; 19.92)	(5.87; 20.18)	(7.48; 16.90)
(7.93; 18.51)	(9.20; 12.30)	(10.16; 15.13)	(10.83; 11.07)
Варіант 27			
(0.47; 26.63)	(0.85; 26.17)	(1.87; 25.40)	(2.85; 23.31)
(4.42; 22.53)	(5.02; 21.85)	(6.30; 22.14)	(6.66; 18.44)
(8.15; 16.70)	(8.54; 15.60)	(9.98; 18.86)	(10.73; 13.44)
Варіант 28			

(0.09; 27.91)	(1.43; 26.45)	(1.95; 26.56)	(2.89; 25.74)
(3.91; 24.53)	(5.46; 21.20)	(6.26; 22.89)	(7.17; 19.99)
(7.94; 22.64)	(8.69; 19.54)	(9.90; 16.39)	(11.39; 11.76)
Варіант 29			
(0.00; 29.00)	(0.75; 28.24)	(1.92; 27.70)	(2.63; 26.48)
(4.44; 22.35)	(4.90; 23.04)	(5.98; 20.78)	(7.50; 18.95)
(7.53; 21.98)	(9.00; 19.10)	(10.08; 23.63)	(11.17; 18.78)
Варіант 30			
(0.22; 29.89)	(1.18; 28.27)	(1.73; 27.95)	(3.30; 26.22)
(4.10; 27.27)	(5.42; 24.06)	(6.36; 21.79)	(6.66; 22.75)
(7.77; 21.56)	(8.86; 16.92)	(10.07; 15.66)	(10.73; 20.25)

Додаток F

Основні таблиці

F.1 Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу широко застосовується для розв'язання найрізноманітніших задач. Пояснити причини цього вдалось А.М. Ляпунову. Він показав, якщо випадкова величина може розглядатись як сума великої кількості інших випадкових величин, то при досить загальних умовах закон розподілу такої величини близький до нормального, незалежно від того як розподілені окремі доданки. Більшість практично важливих випадкових величин є саме такими.

Щільність стандартизованого нормального закону розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad \text{(F.1)}$$

Графік функції показаний на рис. 11.1, а таблиця F.1 містить її значення.

Користуючись функцією Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad \text{(F.2)}$$

можна знайти ймовірність попадання значень нормально

розподіленої величини x у проміжок (α, β):

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \qquad \text{(F.3)}$$

Функцію Лапласа не можна виразити через елементарні функції, тому для обчислення її значень можна користуватись таблицею F.2 або відповідними програмними продуктами (У Mathcad для цього є функції $dnorm(x, m, \sigma)$; $pnorm(x, m, \sigma)$; $qnorm(p, m, \sigma)$).

Табл. F.1. Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363

(продовження далі)

(продовження)										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Табл. F.2. Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
(продовження далі)										

(продовження)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952
3,4	49966	3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989
3,8	49993	3,9	49995	4,0	49997	4,5	50000

F.2 Розподіл Стьюдента

Нехай U, U_1, U_2,..., U_n — незалежні нормально розподілені нормовані випадкові величини. Розглянемо нову випадкову величину

$$t = \frac{U}{\sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2)/n}}. \qquad \text{(F.4)}$$

Розподілом такої величини є розподіл Стьюдента або t-розподіл, щільність якого задається формулою

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad \text{(F.5)}$$

Параметр n визначає число ступенів вільності. Графік функції $s_n(x)$ зображений на рис. 11.16.

Розподіл Стьюдента $S_n(x) = \int_{-\infty}^{x} s_n(u)\,du$ дає змогу обчислити ймовірність попадання значень випадкової величини t в проміжок $(-\infty; x)$. Обернена функція $S_n^{-1}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число $x = S_n^{-1}(\alpha)$. Наприклад, $S_{11}(-1,796) = 0,05$; $S_{11}^{-1}(0,05) = -1,796$. Таблиця F.3 містить значення такої оберненої функції. У першому стовпчику—число ступенів вільності.

Значення функцій $S_n^{-1}(\alpha)$, $S_n^{-1}(1-\alpha)$ рівні за модулем, але протилежні за знаком. Тому $S_{11}^{-1}(0,95) = 1,796$. Зазначимо, що ймовірність прийняти випадковою величиною t значення, що перевищує число $S_n^{-1}(\alpha)$, дорівнює $1-\alpha$.

Функції $s_n(x)$, $S_n(x)$ та $S_n^{-1}(\alpha)$ у різних джерелах можуть позначатись по-різному. Так у програмному продукті Mathcad вони позначаються відповідно так: $dt(x,n)$, $pt(x,n)$ та $qt(\alpha,n)$.

Табл. F.3. Таблиця значень оберненої функції $S_n^{-1}(\alpha)$

	Значення α						
n	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,995
1	0,727	1,376	1,963	3,078	6,314	31,821	63,656
2	0,617	1,061	1,386	1,886	2,920	6,965	9,925
3	0,584	0,978	1,250	1,638	2,353	4,541	5,841
4	0,569	0,941	1,190	1,533	2,132	3,747	4,604
5	0,559	0,920	1,156	1,476	2,015	3,365	4,032
6	0,553	0,906	1,134	1,440	1,943	3,143	3,707
(продовження далі)							

(продовження)							
7	0,549	0,896	1,119	1,415	1,895	2,998	3,499
8	0,546	0,889	1,108	1,397	1,860	2,896	3,355
9	0,543	0,883	1,100	1,383	1,833	2,821	3,250
10	0,542	0,879	1,093	1,372	1,812	2,764	3,169
11	0,540	0,876	1,088	1,363	1,796	2,718	3,106
12	0,539	0,873	1,083	1,356	1,782	2,681	3,055
13	0,538	0,870	1,079	1,350	1,771	2,650	3,012
14	0,537	0,868	1,076	1,345	1,761	2,624	2,977
15	0,536	0,866	1,074	1,341	1,753	2,602	2,947
16	0,535	0,865	1,071	1,337	1,746	2,583	2,921
17	0,534	0,863	1,069	1,333	1,740	2,567	2,898
18	0,534	0,862	1,067	1,330	1,734	2,552	2,878
19	0,533	0,861	1,066	1,328	1,729	2,539	2,861
20	0,533	0,860	1,064	1,325	1,725	2,528	2,845
21	0,532	0,859	1,063	1,323	1,721	2,518	2,831
22	0,532	0,858	1,061	1,321	1,717	2,508	2,819
23	0,532	0,858	1,060	1,319	1,714	2,500	2,807
24	0,531	0,857	1,059	1,318	1,711	2,492	2,797
25	0,531	0,856	1,058	1,316	1,708	2,485	2,787
26	0,531	0,856	1,058	1,315	1,706	2,479	2,779
27	0,531	0,855	1,057	1,314	1,703	2,473	2,771
28	0,530	0,855	1,056	1,313	1,701	2,467	2,763
29	0,530	0,854	1,055	1,311	1,699	2,462	2,756
30	0,530	0,854	1,055	1,310	1,697	2,457	2,750
40	0,529	0,851	1,050	1,303	1,684	2,423	2,704
60	0,527	0,848	1,045	1,296	1,671	2,390	2,660
120	0,526	0,845	1,041	1,289	1,658	2,358	2,617

F.3 Розподіл Пірсона

Нехай U_1, U_2,..., U_n – незалежні нормально розподілені нормовані випадкові величини. Розглянемо суму квадратів цих величин

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2. \tag{F.6}$$

Випадкова величина χ^2 має розподіл, щільність якого задається формулою

$$k_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases} \tag{F.7}$$

Графік функції $k_n(x)$ зображений на рис. 11.14.

Функція $K_n(x) = \int_{-\infty}^{x} k_n(t)\,dt$ називається розподілом Пірсона або χ^2-розподілом. Параметр n визначає число ступенів вільності розподілу, а $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція Ейлера. Зокрема, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Розподіл Пірсона визначає ймовірність α настання події $\chi^2 < x$, іншими словами, заданому числу x ставить у відповідність ймовірность $\alpha = K_n(x)$. Обернена функція $K_n^{-1}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число $x = K_n^{-1}(\alpha)$. Таблиця F.4 містить значення оберненої функції. У першому стовпчику—число ступенів вільності.

Функції $k_n(x)$, $K_n(x)$ та $K_n^{-1}(\alpha)$ у різних джерелах можуть позначатись по-різному. Так у програмному продукті Mathcad вони позначаються відповідно так: $dchisg(x, n)$, $pchisg(x, n)$ та $qchisg(\alpha, n)$.

Табл. F.4. Таблиця значень оберненої функції Пірсона $K_n^{-1}(\alpha)$

	Значення α							
n	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67

(продовження далі)

(продовження)

10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,57	113,15	118,14	124,12
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81

F.4 Розподіл Фішера

Припустимо, що незалежні випадкові величини U та V розподілені згідно закону Пірсона (χ^2) з ступенями вільності n та m відповідно. На їх основі розглянемо нову випадкову величину

$$F = \frac{U/n}{V/m},$$

яка підлягає розподілу Фішера або F-розподілу.

Щільність F-розподілу задається формулою

$$f_{nm}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{n}{m}x+1)^{\frac{n+m}{2}}}, & x > 0, \end{cases}$$

на основі якої будується власне розподіл Фішера: $F_{nm}(x) = \int_0^x f_{nm}(t)\,dt$.

Якщо випадкова величина ζ підлягає розподілу Фішера, то функція $F_{nm}(x)$ визначає ймовірність α настання події $\zeta < x$, іншими словами, заданому числу x ставить у відповідність $\alpha = F_{nm}(x)$. Обернена функція $F^{-1}_{nm}(\alpha)$, навпаки, заданій ймовірності α ставить у відповідність число $x = F^{-1}_{nm}(\alpha)$.

Таблиці F.5 та F.6 містять значення такої оберненої функції. У першому стовпчику—число ступенів вільності чисельника, а у першому рядку—число ступенів вільності знаменника.

Функції $f_{nm}(x)$, $F_{nm}(x)$ та $F^{-1}_{nm}(\alpha)$ у різних джерелах можуть позначатись по-різному. Так у програмному продукті Mathcad вони позначаються відповідно так: $dF(x,n,m)$, $pF(x,n,m)$ та $qF(\alpha,n,m)$.

На рис. 11.17 показані графіки функцій $dF(x,n,m)$ та $pF(x,n,m)$.

Табл. F.5. Таблиця значень оберненої функції Фішера $F^{-1}_{nm}(\alpha)$ для $\alpha = 0,95$ і різних значень ступенів вільності n (чисельник) та m (знаменник)

	m—число ступенів вільності знаменника									
n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	4,53	4,12	3,84	3,63	3,48	3,36	3,26	3,18	3,11	3,06
5	4,39	3,97	3,69	3,48	3,33	3,20	3,11	3,03	2,96	2,90
6	4,28	3,87	3,58	3,37	3,22	3,09	3,00	2,92	2,85	2,79
7	4,21	3,79	3,50	3,29	3,14	3,01	2,91	2,83	2,76	2,71
(продовження далі)										

(продовження)										
8	4,15	3,73	3,44	3,23	3,07	2,95	2,85	2,77	2,70	2,64
9	4,10	3,68	3,39	3,18	3,02	2,90	2,80	2,71	2,65	2,59
10	4,06	3,64	3,35	3,14	2,98	2,85	2,75	2,67	2,60	2,54
11	4,03	3,60	3,31	3,10	2,94	2,82	2,72	2,63	2,57	2,51
12	4,00	3,57	3,28	3,07	2,91	2,79	2,69	2,60	2,53	2,48
13	3,98	3,55	3,26	3,05	2,89	2,76	2,66	2,58	2,51	2,45
14	3,96	3,53	3,24	3,03	2,86	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42
15	3,94	3,51	3,22	3,01	2,85	2,72	2,62	2,53	2,46	2,40
16	3,92	3,49	3,20	2,99	2,83	2,70	2,60	2,51	2,44	2,38
17	3,91	3,48	3,19	2,97	2,81	2,69	2,58	2,50	2,43	2,37
18	3,90	3,47	3,17	2,96	2,80	2,67	2,57	2,48	2,41	2,35
19	3,88	3,46	3,16	2,95	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
20	3,87	3,44	3,15	2,94	2,77	2,65	2,54	2,46	2,39	2,33
30	3,81	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,25
40	3,77	3,34	3,04	2,83	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20
50	3,75	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,40	2,31	2,24	2,18
60	3,74	3,30	3,01	2,79	2,62	2,49	2,38	2,30	2,22	2,16
70	3,73	3,29	2,99	2,78	2,61	2,48	2,37	2,28	2,21	2,15
80	3,72	3,29	2,99	2,77	2,60	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14
90	3,72	3,28	2,98	2,76	2,59	2,46	2,36	2,27	2,19	2,13
100	3,71	3,27	2,97	2,76	2,59	2,46	2,35	2,26	2,19	2,12

Табл. F.6. Таблиця значень оберненої функції Фішера $F^{-1}_{nm}(\alpha)$ для $\alpha = 0,99$ і різних значень ступенів вільності n (чисельник) та m (знаменник)

n	m—число ступенів вільності знаменника									
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	9,15	7,85	7,01	6,42	5,99	5,67	5,41	5,21	5,04	4,89
5	8,75	7,46	6,63	6,06	5,64	5,32	5,06	4,86	4,69	4,56
6	8,47	7,19	6,37	5,80	5,39	5,07	4,82	4,62	4,46	4,32
7	8,26	6,99	6,18	5,61	5,20	4,89	4,64	4,44	4,28	4,14
8	8,10	6,84	6,03	5,47	5,06	4,74	4,50	4,30	4,14	4,00
9	7,98	6,72	5,91	5,35	4,94	4,63	4,39	4,19	4,03	3,89
10	7,87	6,62	5,81	5,26	4,85	4,54	4,30	4,10	3,94	3,80
(продовження далі)										

(продовження)

11	7,79	6,54	5,73	5,18	4,77	4,46	4,22	4,02	3,86	3,73
12	7,72	6,47	5,67	5,11	4,71	4,40	4,16	3,96	3,80	3,67
13	7,66	6,41	5,61	5,05	4,65	4,34	4,10	3,91	3,75	3,61
14	7,60	6,36	5,56	5,01	4,60	4,29	4,05	3,86	3,70	3,56
15	7,56	6,31	5,52	4,96	4,56	4,25	4,01	3,82	3,66	3,52
16	7,52	6,28	5,48	4,92	4,52	4,21	3,97	3,78	3,62	3,49
17	7,48	6,24	5,44	4,89	4,49	4,18	3,94	3,75	3,59	3,45
18	7,45	6,21	5,41	4,86	4,46	4,15	3,91	3,72	3,56	3,42
19	7,42	6,18	5,38	4,83	4,43	4,12	3,88	3,69	3,53	3,40
20	7,40	6,16	5,36	4,81	4,41	4,10	3,86	3,66	3,51	3,37
30	7,23	5,99	5,20	4,65	4,25	3,94	3,70	3,51	3,35	3,21
40	7,14	5,91	5,12	4,57	4,17	3,86	3,62	3,43	3,27	3,13
50	7,09	5,86	5,07	4,52	4,12	3,81	3,57	3,38	3,22	3,08
60	7,06	5,82	5,03	4,48	4,08	3,78	3,54	3,34	3,18	3,05
70	7,03	5,80	5,01	4,46	4,06	3,75	3,51	3,32	3,16	3,02
80	7,01	5,78	4,99	4,44	4,04	3,73	3,49	3,30	3,14	3,00
90	7,00	5,77	4,97	4,43	4,03	3,72	3,48	3,28	3,12	2,99
100	6,99	5,75	4,96	4,41	4,01	3,71	3,47	3,27	3,11	2,98

ЛІТЕРАТУРА

1. **Крамер Г. Математические методы статистики.– М.: Мир, 1975.**
2. **Турчин В.М.** *Математична статистика.*– К.: Академія, 1999.
3. **Дорош А.К., Коханівський О.П.** *Теорія ймовірності та математична статистика. Збірник задач та індивідуальних завдань.*– К.: Київський політехнік, 2000.
4. **Румшинский Л.З.** *Теория вероятностей и математическая статистика.*– М.: Высшая школа, 1977.
5. **Румшинский Л.З.** *Элементы теории вероятностей.*– М.: Наука, 1976.
6. **Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.** *Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.* – М.: Наука, 1965 .
7. **Карасёв А.И.** *Теория вероятностей и математическая статистика.* – М.: Статистика, 1970.
8. **Гмурман В.Е.** *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.* – М.: Высшая школа, 1973.
9. **Барковский В.В. Барковська Н.В. Лопатін О.К.** *Математика для економістів: теорія ймовірностей та математична статистика.* – К.: Національна академія управління, 1997.
10. **Кремер А.Ш.** *Теория вероятностей и математическая статистика.*– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
1. **Гмурман В.Е.** *Теория вероятностей и математическая статистика.*– М.: Высшая школа, 1977.
12. **Колемаев В.А., Калинина В.А.** *Теория вероятностей и математическая статистика.*– М.: ИНФА-М, 1997.

13. **Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.** *Теорія ймовірностей і математична статистика (частина 1).* – К.: КНЕУ, 2000.
14. **Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.** *Теорія ймовірностей і математична статистика (частина 2).*– К.: КНЕУ, 2001.
15. **Бочаров П.П. Печенкин А.В.** *Теория вероятностей и математическая статистика.*– М.: Гардарика, 1998.
16. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** *Теория вероятностей и ее инженерные приложения.* – М.: Наука, 1988.
17. **Войтенко М.А.** *Руководство к решению задач по теории вероятностей.* – М. : ВЗФЭИ, 1988.
18. **Гнеденко Б.В.** *Курс теории вероятностей.* – М.: Наука, 1988.
19. **Калинина В.Н., Панкин В.Н.** *Математическая статистика.*– М.: Высшая школа, 1998 .
20. **Колмогоров А.Н.** *Основные понятия теории вероятностей.*– М.: Наука, 1975.
21. **Кремер Н.Ш.** *Математическая статистика.*– М.: Экономическое образование, 1992.