



Österreichisches Multiscience Journal

VOL 1, No44 (2021)

Österreichisches Multiscience Journal (Innsbruck, Austria)

The journal is registered and published in Austria.

The journal publishes scientific studies, reports and reports about achievements in different scientific fields.

Journal is published in German, English, Hungarian,

Polish, Russian, Ukrainian, and French.

Articles are accepted each month.

Frequency: 12 issues per year.

Format - A4

All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

Edition of journal does not carry responsibility

for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws.

Chief editor: Fabian Huber

Managing editor: Daniel Müller

Matthias Leitner - Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Moritz Winkler - Universität Salzburg

Philipp Mayr - Johannes Kepler University

Sebastian Berger - Medizinische Universität Wien

Sophia Hartl - Technische Universität Graz

Jonas Aigner - Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Elias Holzer - Donau-Universität Krems

Simon Lackner - Fachhochschule Wiener Neustadt

Marie Brandstatter - Fachhochschule Technikum Wien

Julian König - Management Center Innsbruck

«Österreichisches Multiscience Journal»

Editorial board address: Universitätsstraße 22, 6020 Innsbruck, Austria

E-mail: editor@osterr-science.com

Web: <http://osterr-science.com>

**ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КОМБІНАТОРИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ У
ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

Скасків Л. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент
Університет державної фіскальної служби України
місто Ірпінь*

Самбора Ю. В.

*здобувач вищої освіти
Університет державної фіскальної служби України
місто Ірпінь*

**FEATURES OF THE STUDY OF COMBINATORICS AND PROBABILITY THEORY IN THE
SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS**

Skaskiv L.,

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin*

Sambora Yu.

*master's student
University of the State Fiscal Service of Ukraine, Irpin*

Анотація:

У роботі розглянуто основні задачі комбінаторного змісту, проведено аналіз та опис основних методів розв'язування комбінаторних задач. Важливим елементом роботи є наведені приклади задач і розв'язки з детальним поясненням.

Abstract:

The main problems of combinatorial content are considered in the work, the analysis and description of the basic methods of solving combinatorial problems are carried out. An important element of the work is the examples of problems and solutions with a detailed explanation.

Ключові слова: комбінаторика, комбінаторне мислення, комбінаторні задачі, перестановки, розміщення, комбінації.

Keywords: combinatorics, combinatorial thinking, combinatorial problems, permutations, placement, combinations.

У науці і практиці часто зустрічаються задачі, вирішувати які потрібно складаючи різні комбінації з кінцевого числа елементів і підраховувати кількість комбінацій. Такі завдання отримали назву комбінаторних задач, а розділ математики, в якому розглядаються подібні завдання, називають комбінаторикою. Слово «комбінаторика» походить від латинського слова *combinare*, яке означає «з'єднувати, поєднувати». Методи комбінаторики знаходять широке застосування у фізиці, хімії, біології, економіці, теорії ймовірностей і інших областях науки.

«Комбінаторними задачами, називаються завдання, в яких йдеться про ті чи інші комбінації об'єктів» [1]. «Комбінаторика – важливий розділ математики, знання якого необхідні представникам різних спеціальностей. З комбінаторними завданнями доводиться мати справу фізикам, хімікам, біологам, лінгвістам, економістам, програмістам і т. д. Комбінаторні методи лежать в основі рішення багатьох задач теорії ймовірностей, математичної статистики та їх додатків».

З завданнями, які отримали назву комбінаторних, виявляється, люди стикалися ще давно. Уже кілька тисячоліть тому в Стародавньому Китаї захоплювались складанням магічних квадратів, у яких задані числа розташовувалися так, що їхня сума за всіма горизонталями, вертикалями і головною діагоналлю була однією і тою ж. У Стародавній Греції підраховували число різних комбінацій довгих і коротких слів у віршованих розмірах, займалися теорією фігурних чисел, вивчали фігури, які можна скласти з частин особливим чином розрізаного квадрата. Комбінаторні задачі виникли і в зв'язку з такими іграми, як шашки, шахи, доміно, карти, кістки.

У XVIII столітті до рішення комбінаторних завдань зверталися видатні математики. Чудові досягнення в області комбінаторики належать Леонарду Ейлеру. Він розглядав завдання про розбиття чисел, про циклічні розстановки, про побудову магічних квадратів, латинських квадратів. У 1713 році була публікація твору Я. Бернуллі, в якому з достатньою повнотою були викладені відомі на той час комбінаторні факти. Комбінаторними завданнями були зацікавлені і математики, які займалися складанням і розгадуванням шифрів, вивченням древніх писемностей. Тепер комбінаторика застосовується в бага-

тьох галузях науки: в біології, де вона використовується для вивчення складу білків і ДНК, в хімії, механіці складних споруд.

Наразі комбінаторика – це розділ дискретної математики, який оперує скінченими множинами. Тому перші десять уроків в 6 класі присвячено формуванню поняття множини та операціям над множинами. Уроки в 7 класі присвячені розв'язанню найпростіших задач комбінаторики. В 9 класі розглядаються задачі на обчислення ймовірності події, а в 11 класі початки статистики [3].

Нерозривно з комбінаторикою пов'язана і система комбінаторних задач – це сукупність видів і способів вирішення комбінаторних завдань, а також певний порядок їх реалізації як засобу засвоєння програмного змісту початкового курсу математики.

У системі комбінаторних задач виділено взаємопов'язані підсистеми: види комбінаторних задач, способи вирішення комбінаторних завдань, етапи реалізації видів і способів вирішення комбінаторних завдань.

Перша підсистема включає три види завдань: завдання на перестановки, завдання на розміщення, завдання на сполучення (комбінації).

Друга підсистема (способи вирішення комбінаторних завдань) містить два способи: хаотичний перебір, системний перебір.

Третя підсистема (етапи реалізації видів і способів вирішення комбінаторних завдань) складається з підготовчого і основного етапів. Взаємозв'язок першої і другої підсистем полягає в наступному: способи вирішення для всіх видів комбінаторних задач однакові. Реалізація взаємозв'язку здійснюється спочатку за допомогою пропедевтичних завдань (підготовчий етап), а потім – розв'язання комбінаторних завдань усіх видів і різними способами (основний етап).

Зазначена система комбінаторних задач, розроблена в руслі методичної концепції розвиваючого навчання математики стала теоретичною основою для розробки методики навчання школярів розв'язанню комбінаторних задач.

Засобами реалізації розробленої методики є: логіка побудови початкового курсу математики, зорієнтована на формування прийомів розумової діяльності: аналізу, синтезу, порівняння, аналогії, класифікації, узагальнення; нові методичні підходи до засвоєння учнями теоретичних понять і загальних

способів дій; методика навчання розв'язанню текстових завдань, зорієнтована на формування узагальнених умінь: навичок читання, засвоєння конкретного сенсу арифметичних дій, набуття досвіду в співвідношенні предметних, вербальних і схематичних моделей, знайомство зі схемою як способом моделювання.

Ефективність підготовки вчителів математики в області формування в школярів стохастичних уявлень, буде досягнута, якщо підготовка побудована на загальних теоретичних підставах як система неперервної педагогічної освіти, однією з цілей якої є формування професійної компетентності вчителя [2].

В результаті вивчення елементів логіки, комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей учень повинен вміти:

- Читати інформацію, представлену в таблицях, на діаграмах, графіках; складати таблиці, будувати графіки і діаграми.
 - Вирішувати задачі по комбінаториці шляхом систематичного перебору можливих варіантів, а також з використанням правила добутку.
 - Обчислювати середнє значення результатів вимірювань.
 - Знаходити частоту події, використовуючи власні спостереження і готові статистичні дані.
 - Знаходити ймовірність випадкових подій у найпростіших ситуаціях.
 - Використовувати набуті знання і вміння в практичній діяльності та повсякденному житті.
- У навчальній програмі загальноосвітньої школи з алгебри тему «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики» вивчають в 9 та 11 класі (таблиця 1).

Табл. 1

Зміст навчальної програми

Клас	Зміст навчального матеріалу	Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів
9 клас (8 год)	Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики: Основні правила комбінаторики. Частота та ймовірність випадкової події. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки	Учень (учениця): наводить приклади: випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, застосування правил комбінаторики пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події знаходить, відбирає і впорядковує інформацію з доступних джерел розв'язує задачі, що передбачають: використання комбінаторних правил суми та добутку; знаходження ймовірності випадкової події; обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків
11 клас (базовий рівень – 12 год, профільний рівень – 18 год.)	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики: Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку.	Учень (учениця): обчислює відносну частоту події; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові характеристики вибірки даних.

Теорія ймовірностей та математична статистика – навчальний предмет, який має застосування у будь-якій сфері життєдіяльності. Тому має місце методика вивчення стохастичної лінії не лише для учнів, що вивчають в більшій мірі науки природничого профілю, а й для учнів інших напрямків.

Спираючись на методику навчання теорії ймовірностей та математичної статистики взагалі, вирішили зупинитись на основах навчання для різних

профілів, провести порівняльну характеристику у методах навчання.

Дисципліни математичного циклу слід розглядати, як фундаментальні дисципліни у формуванні практично будь-якого фахівця. Профіль навчання визначається з урахуванням інтересів та можливостей учнів, перспектив здобуття подальшої освіти і професійних перспектив учнівської молоді. Пізнавальна діяльність націлена на перетворення образів

(понять, теорій, законів) об'єктів реального світу, що раніше склалися у свідомості учня, що досягається в процесі засвоєння нових знань і способів їх отримання.

Основною метою вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики» є ознайомити учнів з: випадковими подіями; відносною частотою подій; елементами комбінаторики; комбінаторними правилами суми та добутку; вибірковими характеристиками розмаху вибірки, моди, медіани, середнього значення. Також необхідно навчати учнів обчислювати: відносну частоту подій; ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами та знаходити числові характеристики вибірки даних; пояснювати зміст середніх показників та характеристик вибірки.

Одним із завдань шкільної математики є формування в учнів свідомих та стійких обчислювальних навичок. Оскільки обчислювальна культура є тим необхідним запасом знань та вмінь, без якого неможливо розв'язати жодної математичної задачі, то вміння і навички швидко й точно виконувати обчислення є фундаментом вивчення математики та інших навчальних предметів [2].

Розглянули вивчення теорії ймовірностей на базі старшої школи двох профілів: фізико-математичного та філологічного. Оскільки за основу були взяті міжпредметні зв'язки, то і умови задач складалі, використовуючи засади міжпредметного навчання.

У вигляді таблиці 2 представимо умови задач з різних тем для двох профілів: фізико-математичного та філологічного. Після таблиці наведемо методику розв'язання задач.

Табл. 2

Умови задач для різних профілів

Номер задачі	Навчальна тема	Фізико-математичний профіль	Філологічний профіль
1.	Елементи комбінаторики	У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що: 4 найсильніших гравців потраплять по два в різні групи.	У літературному вечорі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що: 4 найдосвідченіших поетів потраплять по два в різні групи.
2.	Випадкові події	У класі 30 учнів. З них 18 відвідують математичний гурток, 10 – фізичний, а 8 учнів не відвідують жодного. Скільки учнів відвідують математичний і фізичний гуртки? Скільки всього учнів відвідують лише математичний гурток?	У бібліотеці деяка кількість полиць. На кожній полиці є хоча б одна книжка. 6 книжок А.П.Чехова, 6 книжок Т.Г. Шевченка, 7 книжок М.О.Булгакова, на чотирьох полицях містяться книги Чехова і Шевченка, на трьох полицях книги Шевченка і Булгакова, на двох – Булгакова і Чехова, на одній полиці книги трьох авторів. Скільки полиць із книжками у бібліотеці? Наскільки полицях книжки Булгакова, Чехова і Шевченка окремо?
3.	Елементи комбінаторики	Скількома способами можна обрати послідовність розв'язання 6 задач?	Скількома способами можна обрати послідовність вивчення 6 віршів?
4.	Елементи комбінаторики	Скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова «математика»?	Скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова «література»?

Розв'яжемо задачі для фізико-математичного профілю.

Задача 1.

У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що: 4 найсильніших гравців потраплять по два в різні групи.

Розв'язання:

$$\frac{C_4^2 \cdot C_{16}^8}{C_{20}^{10}} = \frac{135}{323} \approx 0,42$$

Задача 2.

У класі 30 учнів. З них 18 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, а 8 учнів не відвідують жодного. Скільки учнів відвідують математичний і фізичний гуртки? Скільки всього учнів відвідують лише математичний гурток?

Розв'язання:

Позначимо A і B – множини учнів, що відвідують відповідно математичний і фізичний гуртки, Ω – множина всіх учнів = 30.

Тоді, $N = 30$, $N(A) = 18$, $N(B) = 11$, $N(\bar{A}\bar{B}) = 8$. Кількість учнів, що відвідують математичний та фізичний гуртки $N(AB)$, згідно формули «решета» рівна: $N(AB) = N(A) + N(B) + N(\bar{A}\bar{B}) - N = 18 + 11 + 8 - 30 = 7$.

Тоді кількість учнів, що відвідують лише математичний гурток $N(\bar{A}B) = 18 - 7 = 11$, лише фізичний гурток: $N(A\bar{B}) = 11 - 7 = 4$.

Задача 3.

Скількома способами можна обрати послідовність розв'язання 6 задач?

Розв'язання:

Число елементів $n=6$:

$$N = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Задача 4.

Скільки слів можна утворити переставляючи букви слова «математика»?

Розв'язання:

У слові «математика» є десять букв, з них – буква «м» повторюється 2 рази, «а» - 3 рази, «т» - 2 рази. Тоді загальна кількість слів, які можна утворити переставлянням букв рівна:

$$P_{10} = (2; 3; 2) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$$

Організація навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів передбачає реалізацію особистісно орієнтованої моделі навчання, першочергове завдання якої полягає в тому, щоб розпізнати та розвинути конкретні здібності, схильності, особливості мислення, потенціал кожного учня.

Задля того, щоб кожен учень на уроці активно працював ми пропонуємо ділити клас на підгрупи. Вчителю буде легше спланувати роботу у класі, кожен учень на уроці зможе себе проявити, відповісти на питання, взяти участь у обговоренні, розв'язанні задач, проблемних питань.

Окрім поділу на групи, у класах повинне бути необхідне матеріальне забезпечення. Під матеріальним забезпеченням ми розуміємо: комп'ютер, проектор, екран, дошка, вихід до мережі Інтернет, маркери, необхідні плакати. Причому, плакати, наочності мають пов'язувати міжпредметні зв'язки, тобто мають бути не лише математичної наповненості.

Список літератури

1. Семко М.М., Скасків Л.В., Ярова О.А. Основні поняття сучасної алгебри. – Ірпінь: Університет ДФС України, 2020. – 128 с.
2. Скасків Л.В., Самбора Ю.В. Елементи комбінаторики в загальноосвітніх навчальних закладах. Міжнародний податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки", Ірпінь, 2020. – С. 1312-1314.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів – К.: «Зодіак-ЕКО», 2006.