



СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

№ 1

**МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ
ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ОБЛІКУ АНАЛІЗУ ТА АУДИТУ**

**СТУДЕНТСЬКІ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
ЗАПИСКИ**

Збірник наукових праць

№ 1

**Ірпінь
2021**

УДК 51:53(08)

ББК 22.1я54+22.3я54

С 88

*Рекомендовано до друку
Вченою радою ННІ обліку аналізу та аудиту*

Редакційна колегія: *М. М. Семко*, д-р фіз.-мат. наук, професор (голов. ред); *О. Ю. Бацук*, канд. фіз.-мат. наук, доцент; *Л. В. Скасків*, канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. Б. Чернобай*, канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. А. Ярова*, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

С 88

Студентські фізико-математичні записки :
збірник наукових праць. – Ірпінь : Університет
ДФС України, 2021. – № 1. – 82 с.

Збірник складається з наукових робіт магістрів кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України, присвячених сучасним проблемам математики та методичним принципам її викладання.

Для студентів математичних спеціальностей.

Матеріали розміщено у авторській редакції.

Відповідальність за зміст матеріалів, їх відповідність вимогам чинного правопису і достовірність фактів та статистичних даних несуть автори та їх наукові керівники.

УДК 51:53(08)

ББК 22.1я54+22.3я54

© ННІ обліку, аналізу та аудиту, 2021
© Університет ДФС України, 2021

ЗМІСТ

Скорик М. О., Семко М. М.

Про одну характеристизацію неперіодичних
метагамільтонових груп..... 4

Мікулін Д. М., Семко М. М.

Про групи з умовою щільності нормальності
для неперіодичних неабелевих підгруп 17

Нестерчук К. С., Семко М. М.

Групи з умовою щільності нормальності
для неперіодичних абелевих підгруп 27

Огороднік Н. Ю., Чернобай О. Б.

Приклади використання сучасних технологій
в навчанні математики 34

Богдан С. В., Семко М. М.

Про групи з умовою щільності нормальності
для нескінченних підгруп..... 40

Ключко О. О., Панченко А. С., Бащук О. Ю.

Методика вивчення теми «Похідна та її застосування» на
поглибленому рівні в курсі алгебри та початків аналізу..... 46

Проданик В. Б., Семко М. М.

Про неперіодичні неабелеві групи із щільною
системою неперіодичних неабелевих підгруп 59

Гончар С. В., Кучер А. О., Бащук О. Ю.

Методика вивчення нерівностей та їх систем
в загальних навчальних закладах..... 69

Д. М. Мікулін,
магістрант спеціальності «Математика»

Науковий керівник:
М. М. Семко,
доктор фізико-математичних наук, професор
(Університет ДФС України, м. Ірпінь)

ПРО ГРУПИ З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ НЕАБЕЛЕВИХ ПІДГРУП

Анотація. Будемо говорити, що неабелева група G має щільну систему нормальних неперіодичних неабелевих підгруп, якщо для будь-якої такої пари неперіодичних неабелевих підгруп $A < B$, що A не максимальна в B , існує нормальна в G підгрупа N , розташована між A і B , тобто $A \leq N \leq B$ (УЩН[НН]-група). В даній роботі доведено, що локально ступінчаста УЩН[НН]-група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.

Ключові слова: неперіодична неабелева підгрупа, нормальна підгрупа, комутант групи, дедекіндова група, метагамільтонова група, локально ступінчаста група.

Annotation. We will say that a non-Abelian group G has a dense system of normal non-periodic non-Abelian subgroups, if for any such pair of non-periodic non-Abelian subgroups $A < B$ that A is not maximal in B , there is a normal subgroup N located between A and B , ie. $A \leq N \leq B$ (CDN[NN]-group). In this paper, it is proved that the locally graded CDN[NN]-group with Abelian periodic commutant is metamamiltonian.

Keywords: nonperiodic non-Abelian subgroup, normal subgroup, group commutant, Dedekind group, metagamiltonian group, locally graded group.

Групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Наявність великої кількості нормальних підгруп дуже сильно впливає на структуру

групи. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то неабелеві групи з такою властивістю мають дуже просту будову, як показують результати робіт [1, 2]. Із цих робіт Р. Дедекінда та Р. Бера почалося вивчення довільних груп G , у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності. Цей напрямок є одним з важливих в теорії груп. Його головною метою є опис узагальнень дедекіндових груп. Одне із таких узагальнень здійснюється шляхом звуження системи підгруп Σ , що є нормальними в усій групі. Назване узагальнення дедекіндових груп можна знайти в роботах багатьох авторів.

У 1968 році А. Манн [3] почав вивчати групи, у яких нормальні не всі підгрупи системи Σ , а ті групи G , що мають нормальну підгрупу N , розміщену між будь-якими двома підгрупами A і B із Σ , де A – власна немаксимальна підгрупа з B . У нього Σ – система всіх підгруп групи G . Групи, введені А. Манном, С. М. Черніков у 1975 році назвав групами з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Він же ввів поняття умов щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т. д.) системи підгруп Σ [4, розділ 7]. Будемо говорити, що група G має щільну систему нормальних Σ -підгруп, якщо для будь-якої такої пари підгруп $A < B$, що A не максимальна в B , існує нормальна в G підгрупа N , розташована між A і B , тобто $A \leq N \leq B$. Якщо Σ – система всіх підгруп групи G , то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для всіх підгруп (УЩН[Σ]-груп). Локально ступінчасті такого роду описані у роботах [5 – 14].

Якщо Σ – система всіх неперіодичних неабелевих підгруп групи G , то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для неперіодичних неабелевих підгруп (коротко УЩН[НН]-груп).

В даній роботі доведено, що локально ступінчаста УЩН[НН]-група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.

Лема 1. Якщо комутант G' УЩН[НН]-групи скінченний, то він абелевий.

Доведення. Нехай $C_G(G')$ – централізатор комутанта G' в групі G . Тоді $C_G(G')$ має в G скінченний індекс і тому містить елемент a нескінченного порядку. Нехай підгрупа G' неабелева, p, q і r – різні прості непарні числа і A – максимальна неабелева підгрупа із G' . За означенням УЩН[НН]-груп в G існує нормальна неперіодична неабелева підгрупа X така, що:

$$A < a^{\overset{8}{p} \overset{9}{q} \overset{9}{r}} > \leq X \leq A < a^{8pqr} >.$$

Очевидно, що фактор-група $G/X \in \text{УЩН}[J]$ -групою. Тоді завдяки теоремі 1.2.3 із [14] G/X – абелева група і тому $A = G'$. Отже, комутант G' є скінченною мінімальною неабелевою групою (групою Міллера-Морено). Но тоді завдяки будові груп Міллера-Морено G' має таку нормальну абелеву підгрупу D і такі елементи d і b , що підгрупа D є мінімальною нормальною підгрупою із G' , яка містить елемент d і $G' = D < b >$ (див., наприклад, [4]).

Розглянемо підгрупу $B = D < a^m b >$, де $m = 8pqr$. Вона є неперіодичною неабелевою групою і тому за означенням УЩН[НН]-груп в групі G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X_1 , що:

$$D < a^{ms^2} b^{s^2} > \leq X_1 \leq D < a^m b > ,$$

де s – просте число, s не ділить m . Фактор-група G/X_1 , очевидно, є УЩН[J]-групою, яка містить елемент порядку 8. Но тоді завдяки теоремі 1.2.3 із [14] група G/X_1 абелева і тому X_1 містить G' , що не так. Отже, G' – абелева група. Лема доведена.

Лема 2. Нехай комутант G' локально ступінчастої УЩН[НН]-групи G періодична абелева група. Тоді G' є скінченною абелевою групою.

Доведення. Нехай група G задовольняє умові леми. Оскільки G' – періодична абелева група, то враховуючи цей

факт, доведення леми можна звести до розгляду наступних випадків.

Підгрупа G' міститься в центрі $Z(G)$ групи G . Неважко переконатися, що тоді в групі G існує елемент нескінченного порядку, який не міститься в $Z(G)$. Нехай елемент d має цю властивість і $b \notin C_G(d)$. Тоді існує, очевидно, таке просте число

p , що при довільному i , $i = 1, 2, \dots$ $b \notin C_G(d^{p^i})$. Отже, групи

$B = \langle d, b \rangle$, $B_1 = \langle d^{p^2}, b \rangle$ і $B_2 = \langle d^{p^2}, b \rangle$ неперіодичні неабелеві. Оскільки $B' \leq Z(B)$, то $B_2 < B_1 < B$. За означенням УЩН[НН]-груп в G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що $B_2 \leq X \leq B$. Так як всі підгрупи із B мають скінченне число твірних елементів, то підгрупа $X \cap G' = X_1$ скінченна. Таким чином, фактор-група G/X нескінченна і, очевидно, є розв'язною УЩН[]-групою. Використовуючи тепер теорему 1.2.3 із [14] одержимо, що комутант K/X групи G/X скінченна група, що неможливо, оскільки індекс підгрупи X_1 в G нескінченний. Одержана суперечність показує, що даний випадок неможливий. Користуючись цим, легко переконатися, що в групі G існують елементи нескінченного порядку, які не належать $C_G(G')$.

Підгрупа G' непримарна. Якщо G' розкладається в прямий добуток $G' = A \times B$ двох нескінченних нормальних в G підгруп A і B , то в силу сказаного вище, в групі G існує елемент a нескінченного порядку, який не належить централізатору одній із підгруп A або B , наприклад, $C_G(A)$. Легко встановити, що

знайдеться таке просте число q , для якого $a^{q^i} \notin C_G(A)$ при

деякому натуральному числі i . Тоді підгрупи $A_1 = \langle a^{q^2} \rangle$, $A_2 = \langle a^{q^2} \rangle$ і $A_3 = \langle a \rangle$ неперіодичні неабелеві і утворюють ланцюг $A_1 < A_2 < A_3$. За означенням УЩН[НН]-груп в G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Y , що $A_1 \leq Y \leq A_3$.

Фактор-група G/Y , очевидно, $УЩН[]$ -група і за теоремою 1.2.3 із [14] має скінченний комутант. Звідси випливає, що індекс перетину $Y \cap G'$ в підгрупі G' скінченний, що суперечить припущенню про нескінченність B . Таким чином, G' не розкладається в прямий добуток $G' = A \times B$ двох нескінченних нормальних в G підгруп A і B .

Позначимо через V – добуток всіх скінченних силовських p -підгруп групи G . Тоді фактор-група $G/V \in УЩН[НН]$ -групою з нескінченним примарним комутантом. Отже, залишилось розглянути випадок, коли комутант G' є нескінченною примарною групою.

1. Підгрупа G' примарна і містить елементи як завгодно великих порядків. У цьому випадку, очевидно, $G' = U_{k=1}^{\infty} G_k$, де $G_k = \omega_k(G')$. За попереднім, в групі G існує такий елемент a_1 нескінченного порядку, що $a_1 \notin C_G(G')$. Но тоді для деякого n $a_1 \notin C_G(G_n)$ і тому в G за означенням $УЩН[НН]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Z , що:

$$G_n < a_1^{q^2} > \leq Z \leq G_n < a_1 >$$

для деякого простого числа q . Фактор-група $G/Z \in УЩН[]$ -групою і тому за теоремою 1.2.3 із [14] має скінченний комутант, що суперечить нескінченності індексу $[G' : G_n]$. Отже, залишилось розглянути такий випадок.

2. Підгрупа G' нескінченна примарна і має обмежені в сукупності порядки елементів. Нехай вона є p -групою. Покажемо, що $A_1 = \omega(G') \leq Z(G)$. Дійсно, нехай d – елемент нескінченного порядку із G і $d \notin C_G(A_1)$ (якщо всі елементи нескінченного порядку із G належать $C_G(A_1)$, то легко показати, що $A_1 \leq Z(G)$). Для довільного елемента $a \in A_1$ і $a \notin C_G(d)$ існує, очевидно, таке просте число q , що при довільному i $d^{q^i} \notin C_G(d)$. Тому підгрупи:

$$\langle a, d^{q^2} \rangle, \langle a, d^q \rangle \leq \langle a, d \rangle$$

неперіодичні неабелеві і утворюють ланцюг:

$$\langle a, d^{q^2} \rangle < \langle a, d^q \rangle < \langle a, d \rangle.$$

Тоді за означенням УЩН[НН]-груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа N , що:

$$\langle a, d^{q^2} \rangle \leq N \leq \langle a, d \rangle.$$

Очевидно, що не порушуючи загальності, можна вважати, що $\langle a, d \rangle \trianglelefteq G$. Оскільки фактор-група $G/\langle a, d \rangle \in$, очевидно, УЩН[]-групою і тому завдяки теоремі 1.2.3 із [14] має скінченний комутант. Звідси перетин $B = \langle a, d \rangle \cap G'$ має скінченний індекс в G' . Но тоді група B нескінченна і, значить, її твірні елементи $b_k = d^{-k} a d^k$, де k – довільне ціле число, лінійно незалежні над полем лишків по модулю p . Отже,

$$B = \dots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_{-1} \rangle \times \langle b_0 \rangle \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$$

Підгрупа

$$B_1 = \dots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_0 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$$

із B нормальна відносно підгрупи $\langle d^2 \rangle$ і тому підгрупа $B_1 \langle d^2 \rangle$ неперіодична неабелева. Тоді для деякого простого

числа r підгрупи $B_1 \langle d^{2r^j} \rangle$, $j = 0, 1, 2$ неперіодичні неабелеві і тому за означенням УЩН[НН]-груп знайдеться нормальна

підгрупа виду $B_1 \langle d^{2t} \rangle$, де t – деяке просте число. Но це неможливо, оскільки підгрупа $B_1 \langle d^{2t} \rangle$ не містить спряженого з b_0 елемента $b_1 = b_0^d = a^d$. Ця суперечність показує, що всі елементи нескінченного порядку із G містяться в $C_G(A_1)$ і тому за попереднім $A_1 \leq Z(G)$. Но тоді $G' \neq A$ і тому фактор-група $G/A_1 \in$ УЩН[І]-групою і G'/A_1 – її комутант. Якщо останній нескінченний і $A_2/A_1 = \omega(G'/A_1)$, то по доведеному вище,

$A_2/A_1 = Z(G/A_1)$ і $A_2/A_1 \neq G'/A_1$. Продовжуючи ці міркування, побудуємо зростаючий ланцюг нормальних в G підгруп:

$$\langle 1 \rangle = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < A_{n+1} = G' < G,$$

кожний фактор A_{k+1}/A_k , $0 \leq k \leq n-1$ яких скінченний і $A_{k+1}/A_k \leq Z(G/A_k)$, а фактор A_{n+1}/A_n скінченний і неединичний.

Нехай $C/A_k = C_{G/A_n}(G'/A_n)$. Тоді:

$$\langle 1 \rangle = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < A_{n+1} = G' < C$$

центральный ряд групи G і, значить, група C нільпотентна. Очевидно, фактор-група C/A_n має скінченний індекс в G/A_n і тому містить елемент нескінченного порядку. Звідси випливає, що група C неперіодична.

Покажемо, що група C абелева. Для цього, очевидно, достатньо показати, що всі елементи нескінченного порядку належать $Z(G)$. Справді, нехай елемент d_1 нескінченного порядку із G і $a_1 \notin C_G(d_1)$. Тоді існує таке просте число s ,

що підгрупи $\langle a_1, d_1^{s^i} \rangle$, $i = 0, 1, 2$ неперіодичні неабелеві. За означенням $U\mathcal{C}H[HN]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що:

$$\langle a_1, d_1^{s^2} \rangle \leq X \leq \langle a_1, d_1 \rangle.$$

Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що $\langle a_1, d_1 \rangle \trianglelefteq G$. Оскільки підгрупа $\langle a_1, d_1 \rangle$ нільпотентна група із скінченим числом твірних елементів, то її максимальна періодична частина скінченна і, значить, перетин $\langle a_1, d_1 \rangle \cap G'$ має нескінченний індекс в G' . З іншої сторони, комутант фактор-групи $G'/\langle a_1, d_1 \rangle$ скінченний і тому перетин $\langle a_1, d_1 \rangle \cap G'$ має в G' скінченний індекс. Одержана суперечність показує, що підгрупа C абелева.

Нехай підгрупа C містить елемент f нескінченного порядку такий, що $f \notin Z(G)$. Підгрупа $F = \langle f^g, g \in G \rangle$ (очевидно, що F скінченна підгрупа) нормальна в G і має скінченну максимальну

періодичну підгрупу. Нехай g елемент із G і $g \notin C_G(F)$. Тоді максимальна періодична підгрупа із $F\langle g \rangle$ скінченна. Легко переконатися в існуванні в F таких неперіодичних неабелевих підгруп F_1 і F_2 , що підгрупи $F_2\langle g \rangle$, $F_1\langle g \rangle$ і $F\langle g \rangle$ задовільняють умову:

$$F_2\langle g \rangle < F_1\langle g \rangle < F\langle g \rangle.$$

Тоді за означенням $U\mathcal{C}H[HH]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що:

$$F_2\langle g \rangle \leq X \leq F\langle g \rangle.$$

Фактор-група G/X є, очевидно, $U\mathcal{C}H[]$ -групою і тому завдяки теоремі 1.2.3 із [14] має скінченний комутант, що як і раніше, суперечить нескінченності комутанта G' . Отже, всі елементи нескінченного порядку із C належать центру $Z(G)$. Но тоді, як легко встановити, $C \leq Z(G)$. Оскільки $G' < C$, то $G' < Z(G)$, що неможливо за попереднім. Таким чином, і в цьому випадку отримали суперечність.

Тепер із попереднього випливає, що комутант G' групи G скінченний і, значить, за лемою 1 абелевий. Лема доведена.

Теорема. *Локально ступінчаста $U\mathcal{C}H[1]$ -група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.*

Доведення. В силу леми 2 комутант G' групи G скінченний. Тоді для довільної скінченної неабелевої підгрупи H із $U\mathcal{C}H[HH]$ -групи G скінченна підгрупа $H_1 = HG'$ нормальна в G і тому в $C_G(H_1)$ міститься нескінченна циклічна підгрупа $\langle a \rangle$. За означенням $U\mathcal{C}H[HH]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Z , що:

$$H\langle a^4 \rangle \leq Z \leq H\langle a \rangle.$$

Оскільки підгрупа H характеристична в Z , то $H \trianglelefteq G$. Таким чином, в групі G нормальні всі скінченні неабелеві підгрупи і, значить, всі періодичні неабелеві підгрупи.

Розглянемо тепер неперіодичну неабелеву скінченно породжену підгрупу M із G . Очевидно, що елементи скінченного порядку із M породжують в M скінченну нормальну підгрупу P і групу M можна представити у вигляді:

$$M = (\dots (P \rtimes \langle a_1 \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_n \rangle,$$

де елементи a_i мають нескінченний порядок. Якщо підгрупа P неабелева, то за означенням УЩН/НН-груп в G існують такі нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи X_1 і Y_1 , що:

$$\begin{aligned} (\dots (P \rtimes \langle a_1^{q^2} \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_n^{q^2} \rangle &\leq X_1 \leq \\ &\leq (\dots (P \rtimes \langle a_1 \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_n \rangle \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} (\dots (P \rtimes \langle a_1^{p^2} \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_n^{p^2} \rangle &\leq Y_1 \leq \\ &\leq (\dots (P \rtimes \langle a_1 \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_n \rangle, \end{aligned}$$

де q і p – різні прості числа. Оскільки, очевидно, $M = \langle X_1, Y_1 \rangle$, то $M \trianglelefteq G$.

Нехай тепер підгрупа P абелева і q, p – такі різні прості числа, що

$$(|P|, p) = ([G : C_M(P)], p) = (|P|, q) = ([G : C_M(P)], q) = 1.$$

За означенням УЩН/НН-груп в G існують такі нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи X_2 і Y_2 , що:

$$PM^{p^2} \leq X_1 \leq M \text{ і } PM^{q^2} \leq Y_2 \leq M.$$

Оскільки, очевидно, $M = \langle X_2, Y_2 \rangle$, то $M \trianglelefteq G$ і, значить, всі неперіодичні неабелеві підгрупи групи G нормальні.

Таким чином, в групі G нормальні всі неабелеві підгрупи, тобто вона метагамільтонова. Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind* // Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548–561.
2. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe* //S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – 2. – S. 12–17.
3. **Mann A.** *Groups with dense normal subgroups* // Israel J. Math. – 1968. – 6, № 1. – P. 13–25.
4. **Черников С. Н.** *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. **Семко М. М.** *Будова нільпотентних УЩН[]-груп* // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – С. 27–41.
6. **Семко М. М.** *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[]-груп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 789–798.
7. **Семко М. М.** *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8. – С. 1 148–1 151.
8. **Семко М. М.** *Про будову УЩН[]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1 396–1 403.
9. **Семко М. М.** *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 49–53.
10. **Семко М. М.** *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 43–46.
11. **Семко М. М.** *Про будову УЩН[]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1 250–1 261.
12. **Семко М. М.** *Будова локально ступінчастих УЩН(]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 11. – С. 1 532–1 536.
13. **Семко М. М.** *Будова локально ступінчастих УЩН[]-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 383–388.
14. **Семко М. М.** *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.