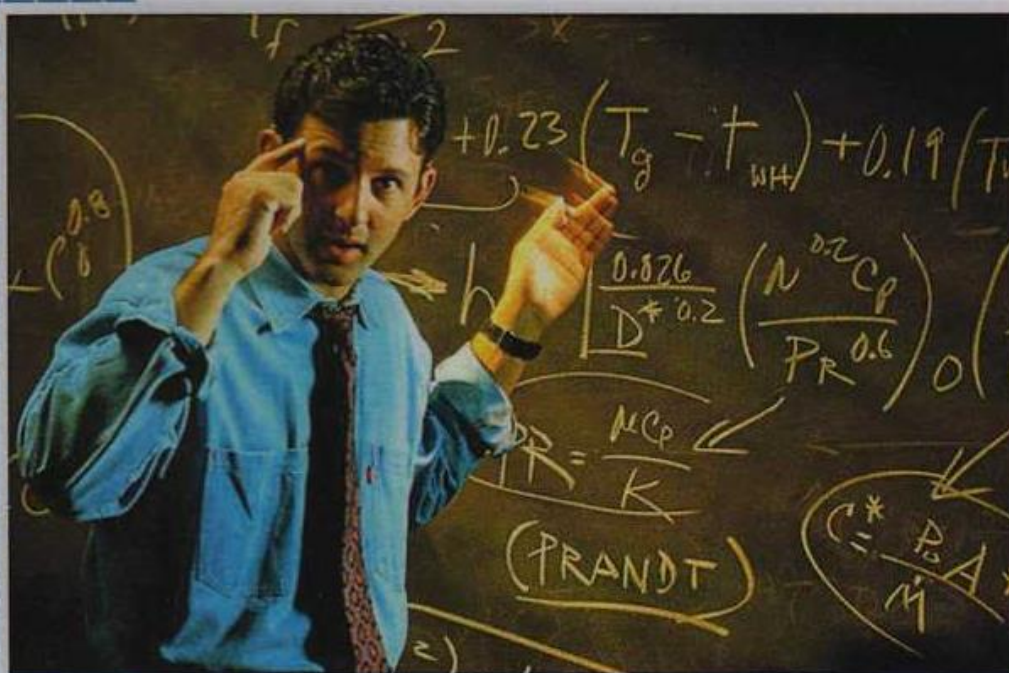


Л. В. Скасків

ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ ТА ОСНОВНІ СТРУКТУРИ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ



STU STATE
TAX
UNIVERSITY

УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

Л. В. Скасків

Теорія чисел та основні структури сучасної математики

Навчальний посібник

Ірпінь
2021

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

С 42

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Університету державної фінансової служби України
(протокол № 13 від 28 жовтня 2021 року)*

Рецензенти:

О. О. Пипка, д-р.фіз-мат.наук, доцент, завідувач кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара;

М. М. Семко, д-р.фіз-мат.наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України;

В. В. Лаговський, канд.екон.наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики Університету державної фіскальної служби України.

Скасків Л. В.

С 42

Теорія чисел та основні структури сучасної математики :
навчальний посібник / Л. В. Скасків. – Ірпінь : Університет ДФС
України, 2021. – 70 с.
ISBN 978-966-337-656-1

Навчальний посібник розроблений відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Теорія чисел та основні структури сучасної математики». У ньому викладені основні базові поняття теорії чисел, наведені приклади розв'язування типових задач алгебри та теорії чисел.

Рекомендований здобувачам вищої освіти другого (магістерського) рівня денної та заочної форм навчання освітньо-професійної програми «Середня освіта: математика».

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-966-337-656-1

© Скасків Л. В., 2021

© Університет ДФС України, 2021

ЗМІСТ

Вступ	4	
Розділ 1. Множини. Алгебраїчні операції.		
Арифметика натуральних і цілих чисел	5	
Тема 1. Множини. Операції над множинами	5	
Тема 2. Алгебраїчні операції	10	
Тема 3. Арифметика натуральних і цілих чисел. Подільність	13	
Питання для самоконтролю	18	
Тести	18	
Розділ 2. Основна теорема арифметики.		
Прості та складені числа	21	
Тема 4. Прості та складені числа	21	
Тема 5. Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел	23	
Тема 6. Основна теорема арифметики. Алгоритм Евкліда	25	
Питання для самоконтролю	32	
Тести	32	
Розділ 3. Числові функції. Системи числення.		
Неперервні дроби	35	
Тема 7. Числові функції	35	
Тема 8. Системи числення	40	
Тема 9. Неперервні дроби	45	
Питання для самоконтролю	48	
Тести	49	
Розділ 4. Основні алгебраїчні структури		52
Тема 10. Елементи теорії груп, кілець, полів	52	
Тема 11. Поле комплексних чисел	58	
Тема 12. Операції над комплексними числами	62	
Питання для самоконтролю	65	
Тести	65	
Список рекомендованих джерел	69	

ВСТУП

Алгебра належить до основних частин математики і разом з теорією множин є базисом для усіх інших розділів математики. Там, де будь-що додаємо чи множимо, присутня алгебра. Жодна з інших математичних дисциплін неможлива без алгебри.

Алгебра знаходить застосування в кожному розділі математики, але особливо значною є її роль у теорії чисел.

Алгебра і теорія чисел мають спільне джерело: вони виникли як науки про розв'язування рівнянь та систем рівнянь з натуральними або додатними раціональними коефіцієнтами та про правила дій над натуральними або дробовими числами.

Навчальний посібник складений відповідно до чинної навчальної програми дисципліни «Теорія чисел та основні структури сучасної математики» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Середня освіта: математика».

Основна мета навчального посібника полягає в тому, щоб сприяти свідомому засвоєнню теорії, розвитку математичного мислення здобувачів вищої освіти, прищепленню їм навичок розв'язування задач.

Навчальний посібник містить дванадцять тем, які об'єднані в чотири розділи. До кожної теми подається теоретичний матеріал, розв'язування типових прикладів, завдання для самостійної роботи; до кожного розділу є питання для самоконтролю і тестові завдання. У кінці подається список рекомендованих джерел.

РОЗДІЛ 1

МНОЖИНИ. АЛГЕБРАЇЧНІ ОПЕРАЦІЇ.

АРИФМЕТИКА НАТУРАЛЬНИХ І ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

Тема 1. Множини. Операції над множинами

План

1. Множини: основні поняття.
2. Операції над множинами.

1. Множини: основні поняття

Поняття множини є одним з фундаментальних понять сучасної математики. **Множина** – це сукупність певних об'єктів.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Твердження, що множина A складається з елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$, записується:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Належність елемента a множині A записується $a \in A$ ($b \notin A$).

Множина може бути скінченною (множина студентів групи) або нескінченною (множина натуральних чисел).

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається $\emptyset$ (множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$).

Універсальною множиною U називається множина, що містить усі елементи з деякою заданою властивістю. Поняття універсальної множини залежить від задачі, яку розглядають, наприклад $U = \{x | x^2 = 4\}$.

Для деяких найважливіших множин вживаються загальноприйняті позначення:

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$[a; b]$ – числовий відрізок;

$(a; b)$ – числовий інтервал.

Якщо A – деяка числова множина, то A_+ – її додатні елементи, A_- – від’ємні. (Назвіть елементи множин $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{N}_-$).

Елементами множини можуть бути інші множини. Наприклад, нехай множина $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ – множина студентів деякої групи, які складали іспит. Цю множину можна позначити по-іншому: $S = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$, де S_2 – множина студентів, які склали іспит на «2», S_3, S_4, S_5 – на «3», «4», «5», відповідно. У цьому випадку S_2, S_3, S_4, S_5 – підмножини множини S .

Множину A називають **підмножиною** множини B тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом і множини B . Позначають $A \subseteq B$. Знак " $\subseteq$ " називають знаком включення.

Якщо A є підмножиною B , але $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і множину A називають власною підмножиною множини B . Знак " $\subset$ " називають знаком строгого включення.

Очевидно, що $A \subseteq A$, $\emptyset \subset A$. Множини A і $\emptyset$ називають невластими підмножинами.

Множина всіх підмножин деякої множини A називається буліаном (Джордж Буль) і позначається $\beta(A) = \{B | B \subset A\}$.

Наприклад, якщо $A = \{a, b, c\}$, то:

$$\beta(A) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}.$$

Зауваження. Якщо множина A має n елементів, то її буліан містить 2^n елементів.

Елементи множини можуть бути рівними і різними. Рівні елементи мають такі властивості:

- 1) $x = x$ – рефлексивність;
- 2) якщо $x = y$, то $y = x$ – симетричність;
- 3) якщо $x = y$ і $y = z$, то $x = z$ – транзитивність.

Множини A і B називаються **рівними**, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ і } x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Наприклад, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N}$, але $\mathbb{Z}_+ \neq \mathbb{Z}$.

Способи задання множин:

1) перелічення всіх елементів (тільки скінченні):

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – одноцифрові непарні числа;

2) опис загальної характеристичної властивості:

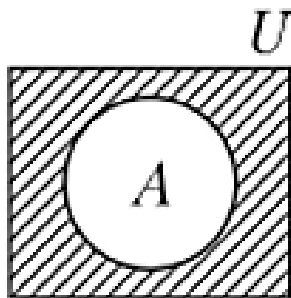
$A = \left\{x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\right\}$ – натуральні числа, кратні 3.

У процесі вивчення множин зручно застосовувати так звані діаграми Ейлера-Венна. На них універсальну множину U схематично зображають у вигляді прямокутника, а різні її підмножини – у вигляді кругів чи інших фігур всередині цього прямокутника.

2. Операції над множинами

Розглядають п'ять основних операцій над множинами. Їх означення дають, припускаючи, що надана деяка універсальна множина U .

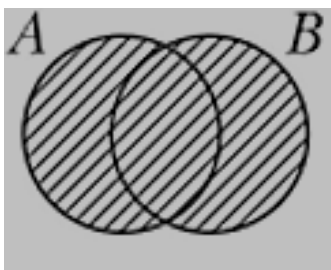
[1] Елементи множини U , які не входять до A , утворюють **доповнення** до A (позначається $\bar{A}$).



1) $\bar{A} = \{x \mid x \notin A, x \in U\};$

2) $\bar{\bar{A}} = A$ – властивість інволюції.

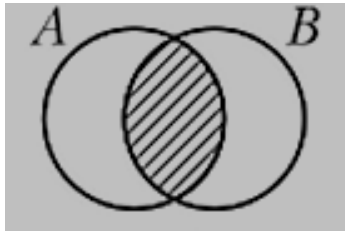
[2] **Об'єднанням** двох множин A і B ($A \cup B$ або $A + B$) називається множина C , яка складається з усіх елементів, які належать хоча б до однієї з цих множин.



1) $C = A \cup B =$
 $\{x \mid x \in A \text{ або } x \in B, x \in U\};$

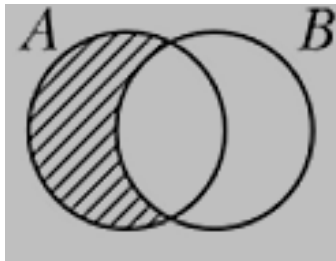
2) однакові елементи враховуються одноразово.

3 Перерізом (перетином) двох множин A і B ($A \cap B$ або $A \cdot B$) називається множина C , яка складається з тих елементів, які належать множині A і множині B одночасно.



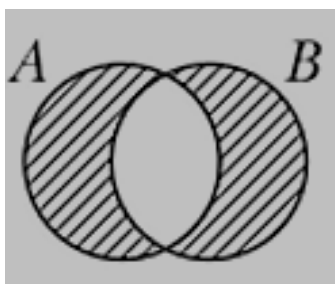
- 1) $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B, x \in U\}$;
- 2) якщо $A \cap B = \emptyset$, то множини A і B не перетинаються.

4 Різницею двох множин A і B ($A \setminus B$) називається множина C , яка складається з тих елементів, які належать множині A і не належать множині B .



$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B, x \in U\}.$$

5 Симетричною різницею двох множин A і B ($A \oplus B$, $A \Delta B$) називається множина C , яка складається з усіх елементів A , які не містяться у B , і усіх елементів B , які не містяться в A .



$$C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Описані операції мають такі властивості:

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ – комутативність.
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – асоціативність.
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – дистрибутивність.
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

5. $A \cup A = A, A \cap A = A$ – ідемпотентність.
6. $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$ – доповнення.
7. $A \cup U = U, A \cap U = A$.
8. $\bar{\emptyset} = U, \bar{U} = \emptyset$.
9. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ – поглинання.
10. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – правило де Моргана.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Задані множини $Z = \{5, 7, 1, 4\}, D = \{3, 2, 1\}, Y = \{1, 5\}$. Яка з множин є підмножиною? Знайти: $Z \cup D; Z \cap D; Z \setminus D; D \setminus Z$.

Розв'язування.

$$Y = \{1, 5\} \in Z = \{5, 7, 1, 4\}.$$

$$Z \cup D = \{5, 7, 1, 4, 3, 2\}; Z \cap D = \{1\}; Z \setminus D = \{5, 7, 4\}; D \setminus Z = \{3, 2\}.$$

Приклад 2. Дано три множини $M = \{7, 2, 3, 5\}; N = \{1, 2, 4, 7, 9\}; K = \{6, 7, 9\}$.

Знайти:

$$X = (M \cap N) \cup (M \cap K) \setminus (N \cap K) \cup (N \setminus K).$$

$$Z = (M \cup N) \cap (M \cup K) \setminus (N \cup K) \cup (N \setminus K).$$

Розв'язок.

- 1) $M \cap N = \{7, 2\}$.
 - 2) $M \cap K = \{7\}$.
 - 3) $N \cap K = \{7, 9\}$.
 - 4) $M \cup K = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.
 - 5) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.
 - 6) $N \cup K = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$.
 - 7) $N \setminus K = \{1, 2, 4\}$.
 - 8) $P = (M \cap N) \cup (M \cap K) = \{7, 2\} \cup \{7\} = \{7, 2\}$.
 - 9) $P \setminus (N \cap K) = \{7, 2\} \setminus \{7, 9\} = \{2\}$.
 - 10) $D = (M \cup N) \cap (M \cup K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{2, 3, 5, 6, 7, 9\} = \{2, 3, 5, 7, 9\}$.
 - 11) $D \setminus (N \cup K) = \{2, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7, 9\} = \{3, 5\}$.
- $$X = (M \cap N) \cup (M \cap K) \setminus (N \cap K) \cup (N \setminus K) = \{1, 2, 4\}.$$
- $$Z = (M \cup N) \cap (M \cup K) \setminus (N \cup K) \cup (N \setminus K) = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Завдання для самоконтролю

Універсальна множина складається з 10 цифр:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Задані множини A, B, C, D .

Знайти множини X і Y і обчислити їх потужність.

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3
$A = \{3, 9, 1, 8, 0\};$	$A = \{8, 4, 3, 7, 5\};$	$A = \{6, 0, 1, 9, 5\};$
$B = \{6, 1, 9\};$	$B = \{4, 6, 9\};$	$B = \{1, 3, 5, 9\};$
$C = \{5, 1, 0\};$	$C = \{7, 9, 1\};$	$C = \{4, 1, 9\};$
$D = \{2, 9, 8\};$	$D = \{4, 8, 2\};$	$D = \{9, 3, 6\};$
$X = (A \cup B) \cap (D \setminus C);$	$X = (A \setminus C) \cup (D \cap B);$	$X = (A \setminus B) \cup (\bar{C} \cap D);$
$Y = (\bar{A} \cap D) \cup (\bar{C} \setminus B)$	$Y = (\bar{D} \cap B) \cup (C \setminus \bar{A})$	$Y = (\bar{A} \cap B) \cup (C \setminus D)$

Тема 2. Алгебраїчні операції

План

1. Відношення на множинах.
2. Основні алгебраїчні операції та їх властивості.

1. Відношення на множинах

Нехай $A = \{1; 2\}, B = \{2; 1\}$ – множини. Оскільки вони містять однакові елементи, то $A = B$. При цьому порядок розміщення їх елементів до уваги не береться.

Проте коли свідчимо про точки $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$, то порядок запису їх координат має принципове значення, A і B – різні точки.

Коли порядок розміщення елементів у множині відіграє важливу роль, то зазначають про впорядковану множину.

Впорядкований набір n -елементів – це n (не обов'язково різних) об'єктів, про які відомо, який з них на якому місці перебуває.

Впорядкована пара позначається $(a; b)$ або $\langle a; b \rangle$.

Впорядковані пари $(a; b)$ і $(c; d)$ вважають рівними тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$.

Нехай надано непорожні, не обов'язково різні множини A і B .

Декартовим (прямим) добутком $(A \times B)$ множини A на множини B називають множину всіх впорядкованих пар $(x; y)$ таких, що $x \in A, y \in B$:

$$A \times B = \{(x; y) | x \in A, y \in B\}.$$

Поняття декартового добутку необхідне для визначення відношень та алгебраїчних операцій.

Розглянемо приклад. Нехай для елементів $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ задане відношення $x < y$. Це відношення встановлене для пар елементів, тому його називають бінарним.

Щоб задати бінарне відношення між елементами множини A і B , потрібно, крім самих множин A і B , вказати множину всіх впорядкованих пар тих елементів, для яких це відношення має місце, тобто вказати деяку підмножину декартового добутку $A \times B$.

Бінарне відношення позначають $\rho: A \rightarrow B$ або $A \xrightarrow{\rho} B$ і часто ще називають відповідністю між множинами A і B .

2. Основні алгебраїчні операції та їх властивості

Розглянемо бінарні відношення на множині A .

1. Бінарне відношення ρ на множині A називається **рефлексивним**, якщо кожний елемент $x \in A$ перебуває у відношенні ρ сам із собою, тобто для будь-якого $x \in A$: $(x; x) \in \rho$.

2. Бінарне відношення ρ на множині A називається **симетричним**, якщо для будь-яких елементів $x, y \in A$ з того, що $(x; y) \in \rho$ випливає $(y; x) \in \rho$.

3. Бінарне відношення ρ на множині A називається **транзитивним**, якщо для будь-яких елементів $x, y, z \in A$ з того, що $(x; y) \in \rho$ і $(y; z) \in \rho$ випливає $(x; z) \in \rho$.

4. Якщо відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне, то воно називається відношенням **еквівалентності** ($\sim$ або $\equiv$).

Бінарне відношення φ , визначене на парі множин A і B , називається **відображенням** множини A в множину B , якщо для кожного елемента $a \in A$ існує один і тільки один елемент $b \in B$ такий, що $(a; b) \in \varphi$.

При цьому елемент b називають образом елемента a у разі відображення φ і записують $b = \varphi(a)$.

Бінарною алгебраїчною операцією на множині A називають будь-яке відображення декартового квадрата в множину A :

$$\rho: A \times A \rightarrow A.$$

Алгебраїчні операції, наприклад $+$, $\times$, в загальному випадку позначають $*$ або $\circ$.

Елемент $e \in A$ називають нейтральним елементом відносно операції $*$, якщо для будь-якого елемента $a \in A$: $a * e = e * a = a$.

Елемент $a' \in A$ називається симетричним елемента $a \in A$, якщо $a * a' = a' * a = e$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Нехай $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4; 5\}$. Тоді:

$$A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5)\}$$

$$B \times A = \{(3; 1); (3; 2); (4; 1); (4; 2); (5; 1); (5; 2)\}$$

$$A \times A = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\} - \text{декартовий квадрат.}$$

Приклад 2. На множині $\mathbb{Z}$ задана операція $+$:

$$1) e = 0, \text{ бо } 2 \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 + 0 = 0 + 2 = 2;$$

$$2) a' = -2, \text{ бо } 2 \in \mathbb{Z}, -2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0 = e.$$

Завдання для самоконтролю

Нехай $A = \{3; 7\}$, $B = \{2; 4; 9\}$. Знайти $A \times B$, $B \times A$ і $B \times B$.

Тема 3. Арифметика натуральних і цілих чисел.

Подільність

План

1. *Принцип математичної індукції.*
2. *Подільність чисел. Ознаки подільності.*

1. Принцип математичної індукції

Відомо, що на множині $\mathbb{N}$, крім дій додавання та множення, визначене відношення лінійного порядку " $\leq$ ". Однією з властивостей відношення порядку є так званий «принцип найменшого числа», який вважається аксіомою: у кожній непорожній підмножині множини $\mathbb{N}$ є найменше число.

Найважливішим наслідком цього принципу є **принцип математичної індукції**.

Нехай A – множина тих натуральних чисел, які мають певну властивість P . Якщо відомо, що:

- а) число 1 має властивість P ;
 - б) із припущення, що натуральне число n має властивість P , випливає, що цю властивість має і число $n + 1$,
- то множина A збігається з множиною $\mathbb{N}$ усіх натуральних чисел.

У курсі шкільної математики цей принцип використовують для доведення певних тверджень.

Доведення методом математичної індукції проводять так. Спочатку твердження перевіряють для $n = 1$. Цю частину доведення називають базою індукції. Якщо при $n = 1$ твердження істине, то переходять до другої частини доведення, яку називають індуктивним кроком або переходом. У цій частині, припускаючи істинність твердження при $n = k$, доводять справедливість твердження для $n = k + 1$.

2. Подільність чисел. Ознаки подільності

Відносно операцій додавання і множення множина $\mathbb{N}$ є замкненою, тобто:

$$x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{N};$$

$$x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \cdot y) \in \mathbb{N}.$$

Але операція віднімання не завжди виконується у множині $\mathbb{N}$, бо, наприклад, $2 - 6 = -4 \notin \mathbb{N}$, тому зручно розглядати множину цілих чисел $\mathbb{Z}$, яка є замкненою відносно віднімання.

Але існує ще одна алгебраїчна операція – ділення. Нехай $a, b \in \mathbb{Z}$. Число a ділиться (націло) на число b , якщо знайдеться таке число $q \in \mathbb{Z}$, що $a = q \cdot b$.

Синоніми:

a – кратне b ($a : b$);

b – дільник a ($b|a$).

Стосовно ділення $\mathbb{Z}$ є незамкненою, бо $-8 \div 4 = -2 \in \mathbb{Z}$, але $-8 \div 3 = -\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Тому існує поняття ділення з остачею.

Теорема про ділення з остачею

Для кожної пари цілих чисел a і b , $b \neq 0$, можна знайти такі цілі числа q і r , що $a = q \cdot b + r$ і $0 \leq r < |b|$.

Число q називають неповною часткою, а r – остачею від ділення.

Зауваження. Остача r – завжди є невід'ємним числом.

Наприклад, $7 \div 3 = 2$ (ост. 1), бо $7 = 3 \cdot 2 + 1$;

$$-5 \div 3 = -2 \text{ (ост. 1), бо } -5 = 3 \cdot (-2) + 1.$$

Властивості подільності цілих чисел:

1) $a : a$ (рефлексивність);

2) якщо $b : a$ і $c : b$, то $c : a$ (транзитивність);

3) якщо $b : a$, то $bc : a$;

4) якщо $b : a$ і $c : a$, то $(b + c) : a$;

5) якщо $b : a$ і $d : c$, то $bd : ac$;

6) 0 ділиться на кожне число, і немає інших чисел з такою властивістю;

7) кожне число ділиться на ± 1 , і немає інших чисел з такою властивістю.

Ознаки подільності цілого числа N на число k :

- 1) $k = 2 \Rightarrow$ остання цифра ділиться на 2 (парна);
- 2) $k = 3 \Rightarrow$ сума цифр ділиться на 3;
- 3) $k = 4 \Rightarrow$ число, складене з останніх двох цифр, ділиться на 4 або дві останні цифри 00;
- 4) $k = 5 \Rightarrow$ остання цифра 5 або 0;
- 5) $k = 9 \Rightarrow$ сума цифр ділиться на 9;
- 6) $k = 10 \Rightarrow$ остання цифра 0.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Довести, що $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

а) база індукції. $n = 1$:

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

б) індуктивний перехід.

Припускаємо $n = k$:

$$S_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Доводимо $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{S_k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Отже, твердження істинне для всіх натуральних n .

Приклад 2. Довести, що для будь-якого натурального n виконується рівність

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Розв'язування. Доведемо її методом математичної індукції:

а) база індукції. Якщо $n = 1$, то $1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Ця формула справедлива при $n = 1$;

б) індуктивний перехід. Припустимо, що формула справедлива при $n = k$, тобто

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6};$$

і доведемо істинність при $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Отже, твердження істинне при $n = 1$, а з його істинності при $n = k$ випливає його істинність при $n = k + 1$. За принципом математичної індукції, припущення істинне при всіх натуральних n .

Приклад 3. Вивести та довести формулу для обчислення суми:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Розв'язування. Помічаємо, що $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{3}{4}$.

Можливо, формула матиме вигляд $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Доведемо її методом математичної індукції:

а) *база індукції.* Істинність рівності, коли $n = 1$, вже встановлено;

б) *індуктивний перехід.* Припустимо, що коли $n = k$, сума

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Доведемо її істинність, якщо $n = k + 1$. Дійсно,

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

За принципом математичної індукції, припущення істинне при всіх натуральних n .

Приклад 4. Обчислити частку q й остачу r від ділення:

$$1) 7 \text{ на } 2: 7 = 2 \left(3 + \frac{1}{2} \right) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow q = 3, r = 1;$$

$$2) -7 \text{ на } -2: -7 = -2 \left(4 - \frac{1}{2} \right) = 4 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow q = 4, r = 1;$$

$$3) -7 \text{ на } 2: -7 = 2 \left(-4 + \frac{1}{2} \right) = -4 \cdot 2 + 1 \Rightarrow q = -4, r = 1;$$

$$4) 7 \text{ на } -2: 7 = -2 \left(-3 - \frac{1}{2} \right) = -3 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow q = -3, r = 1.$$

Приклад 5. Обчислити частку q й остачу r від ділення:

1) 14 на 3: $14 = 3 \left(4 + \frac{2}{3} \right) = 4 \cdot 3 + 2 \Rightarrow q = 4, r = 2;$

2) -14 на -3 : $-14 = -3 \left(5 - \frac{1}{3} \right) = 5 \cdot (-3) + 1 \Rightarrow$
 $q = 5, r = 1;$

3) -14 на 3: $-14 = 3 \left(-5 + \frac{1}{3} \right) = -5 \cdot 3 + 1 \Rightarrow q = -5, r = 1;$

4) 14 на -3 : $14 = -3 \left(-4 - \frac{2}{3} \right) = -4 \cdot (-3) + 2 \Rightarrow$
 $q = -4, r = 2.$

Приклад 6. Обчислити частку q й остачу r від ділення:

1) 187 на 13: $187 = 13 \left(14 + \frac{5}{13} \right) = 14 \cdot 13 + 5 \Rightarrow q = 14, r = 5;$

2) -187 на -13 : $-187 = -13 \left(15 - \frac{8}{13} \right) =$
 $= 15 \cdot (-13) + 8 \Rightarrow q = 15, r = 8;$

3) -187 на 13: $-187 = 13 \left(-15 + \frac{8}{13} \right) = -15 \cdot 13 + 8 \Rightarrow$
 $q = -15, r = 8;$

4) 187 на -13 : $187 = -13 \left(-14 - \frac{5}{13} \right) = -14 \cdot (-13) + 5 \Rightarrow$
 $q = -14, r = 5.$

Приклад 7. Використовуючи метод математичної індукції, довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$(4^{2n-1} + 3^{n+1}) : 13.$$

Розв'язування:

$$n = 1: S_1 = 4^{2 \cdot 1 - 1} + 3^{1+1} = 4 + 9 = 13 : 13$$

$$n = k: S_k = (4^{2k-1} + 3^{k+1}) : 13$$

$$\begin{aligned} n = k + 1: S_{k+1} &= 4^{2(k+1)-1} + 3^{(k+1)+1} = 4^{(2k-1)+2} + 3^{(k+1)+1} \\ &= 4^2 \cdot 4^{2k-1} + 3^1 \cdot 3^{k+1} = 16 \cdot 4^{2k-1} + 3 \cdot 3^{k+1} \\ &= (13 + 3) \cdot 4^{2k-1} + 3 \cdot 3^{k+1} \\ &= 13 \cdot 4^{2k-1} + 3 \cdot 4^{2k-1} + 3 \cdot 3^{k+1} \\ &= \underbrace{13 \cdot 4^{2k-1}}_{:13} + 3 \cdot \left(\underbrace{4^{2k-1} + 3^{k+1}}_{:13} \right) \end{aligned}$$

Отже, виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Завдання для самоконтролю

1. Довести, що:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Вивести та довести формулу для обчислення суми:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

3. Довести, що $3^{3n-1} + 2^{4n-3}$ при будь-якому натуральному n ділиться на 11.

4. Довести, що $11^{2n} - 1$ при будь-якому натуральному n ділиться на 6.

5. Довести, що:

$$(5^{n+3} + 11^{3n+1}) : 17;$$

$$(4^n + 15n - 1) : 9.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке множина?
2. Які операції можна виконувати над множинами?
3. Які відношення на множинах існують?
4. Що таке алгебраїчна операція?
5. У чому полягає принцип математичної індукції?
6. Сформулювати основні властивості подільності чисел.
7. Сформулювати теорему про ділення із залишком.

Тести

1. Множина A – відрізок $[1; 4]$, множина B – відрізок $[2; 6]$. Знайдіть об'єднання множин A і B :

- а) $[1; 6]$;
- б) $[2; 4]$;
- в) $[4; 6]$;
- г) $[1; 2]$.

2. Нехай $A = [-5, 7)$, $B = [6, 8)$. Перерізом цих множин є множина:

- а) $[-5, 6)$;
- б) $[6, 7)$;
- в) $(6, 7)$;
- г) порожня множина.

3. Вкажіть серед поданих множин порожню:

- а) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 180 градусів;
- б) множина кіл, у яких діаметр менший від радіуса;
- в) множина коренів рівняння $x + 1$ дорівнює 1;
- г) множина парних двоцифрових чисел.

4. Якщо натуральне число a ділиться націло на натуральне число b , то число b називають:

- а) кратним;
- б) дільником;
- в) множителем;
- г) НСД.

5. Назвіть найменший дільник будь-якого числа:

- а) 2;
- б) 1;
- в) 0;
- г) саме число.

6. На 5 ділиться число:

- а) 3 231;
- б) 8 125;
- в) 9 287;
- г) 5 042.

7. Яку цифру потрібно вставити, щоб число 1036_54 ділилося на 9:

- а) 7;
- б) 2;
- в) 8;
- г) 1.

8. Скільки дільників має число 15:

- а) 1;
- б) 3;
- в) 2;
- г) 4.

9. Множина, яка не містить жодного елемента, називається:

- а) порожньою;
- б) повною;
- в) безелементною;
- г) нескінченною.

10. Дві множини називаються рівними, якщо вони складаються з:

- а) однакової кількості елементів;
- б) числових елементів;
- в) однакових елементів;
- г) різних елементів.

РОЗДІЛ 2

ПРОСТІ ТА СКЛАДЕНІ ЧИСЛА.

ОСНОВНА ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Тема 4. Прості та складені числа

План

1. Прості та складені числа.
2. Решето Ератосфена.

1. Прості та складені числа

Натуральне число p називається **простим**, якщо воно більше 1 і не має додатних дільників, відмінних від 1 і p .

Наприклад: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17... – прості числа.

Натуральне число p називається **складеним**, якщо воно більше 1 і має хоча б один додатний дільник, відмінний від 1 і p .

Наприклад: 4, 6, 8, 10, 12... – складені числа.

Зауваження.

1. Число 1 не належить ні до простих, ні до складених.
2. Серед простих чисел є тільки одне парне число – 2.

Будь-яке складене число розкладається (причому єдиним способом з точністю до порядку) в добуток простих чисел.

Теорема. Якщо натуральне число n складене, а p – найменший його простий дільник, то $p \leq \sqrt{n}$.

Наслідок. Якщо число n не ділиться на жодне просте число, яке не перевищує $\sqrt{n}$, то n – просте число.

Теорема Евкліда. Множина простих чисел нескінченна.

2. Решето Ератосфена

У багатьох книгах наводяться таблиці простих чисел, що не перевищують число N . Простий метод побудови таких таблиць запропонував ще 200 р. до н.е. грецький математик Ератосфен. Цей метод відомий під назвою «**решето Ератосфена**».

Алгоритм методу

1. Обираємо перше просте число $p_1 = 2$.
2. Викреслюємо всі цілі числа з інтервалу $(2; N)$, кратні 2.
3. Обираємо наступне просте число $p_2 = 3$ і викреслюємо всі цілі числа з інтервалу $(3; N)$, кратні 3.
4. Повторюємо процес з наступними простими числами 5, 7, 11 та ін.
5. Викреслювання можна зупинити, коли p_k перевищить $\sqrt{N}$. Усі кратні числа на той час будуть викреслені, залишаться тільки прості.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Чи є простим число 137?

Розв'язування. $11 < \sqrt{137} < 12$. Розглянемо прості числа 2, 3, 5, 7, 11. Число 137 не ділиться на жодне з них, тому 137 – просте число.

Приклад 2. За допомогою «решета Ератосфена» знайти всі прості числа з проміжку $[10; 20]$.

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{20} < 5$, то викреслюємо кратні 2 і 3:

$\underbrace{10}_2, 11, \underbrace{12}_2, 13, \underbrace{14}_2, \underbrace{15}_3, \underbrace{16}_2, 17, \underbrace{18}_2, 19, \underbrace{20}_2$.

Прості: 11, 13, 17, 19.

Приклад 3. За допомогою «решета Ератосфена» знайти всі прості числа з проміжку $[1230; 1240]$.

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{1240} < 35$, то викреслюємо кратні 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

$\underbrace{1230}_2, 1231, \underbrace{1232}_2, \underbrace{1233}_3, \underbrace{1234}_2, \underbrace{1235}_5, \underbrace{1236}_2, 1237, \underbrace{1238}_2, \underbrace{1239}_3, \underbrace{1240}_2$

Прості: 1231, 1237.

Завдання для самоконтролю

Знайти всі прості числа які, містяться між числами:

- 1) 1 200 і 1 250;
- 2) 2 020 і 2 070;
- 3) 2 202 і 2 262;
- 4) 2 905 і 2 965;
- 5) 1 808 і 1 868.

Тема 5. Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел

План

1. НСД і НСК чисел.

1. НСД і НСК чисел

Будь-яке ціле d_i , яке одночасно ділить числа a і b , має назву **спільного дільника** цих чисел.

Наприклад, якщо $a = 8, b = 12$, то їх спільні дільники $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 4$.

Найбільший з усіх дільників називається **найбільшим спільним дільником** (далі – НСД) і позначається $d = (a; b)$. У нашому прикладі $d = (8; 12) = 4$.

Причому d повинно задовольняти умови:

- 1) d є спільним дільником цих чисел;
- 2) d ділиться на будь-який спільний дільник цих чисел a і b .

Теорема. Для будь-яких цілих чисел a і b існує їх найбільший дільник $(a; b)$.

Зауваження. $(a; b; c) = ((a; b); c) = ((a; c); b) = ((b; c); a)$.

Числа a і b називаються **взаємно простими**, якщо $(a; b) = 1$.

Теорема (критерій взаємної простоти двох чисел). Числа $(a; b)$ взаємно прості тоді і тільки тоді, коли можна підібрати такі цілі числа m і n , що $m \cdot a + n \cdot b = 1$.

Число m називається **найменшим спільним кратним** (далі – НСК) чисел a і b , якщо воно задовольняє умови:

- 1) $m : a$ і $m : b$;
- 2) якщо $n : a$ і $n : b$, то $n : m$.

Позначають $m = [a; b]$.

Теорема. Для натуральних чисел a і b :

$$[a; b] = \frac{a \cdot b}{(a; b)}$$

У курсі шкільної математики НСД і НСК знаходять шляхом розкладання чисел на прості множники.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти (24; 36).

Розв'язування

Дільники 24: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}; дільники 36:
{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.

Спільні дільники: {1, 2, 3, 4, 6, 12}. НСД(24; 36) = 12.

Приклад 2. Знайти (135; 180).

Розв'язування

Дільники 135: {1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135},
дільники 180:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180}.

Спільні дільники: {1, 3, 5, 9, 15, 45}. НСД(135; 180) = 45.

Приклад 3. Знайти [182; 143].

Розв'язування

Знайдемо (182; 143).

Дільники 182: {1, 2, 7, 13, 14, 26, 91, 182}; дільники 143:
{1; 11; 13; 143}.

Спільні: {1; 13}, тому (182; 143) = 13.

Отже, $[182; 143] = \frac{182 \cdot 143}{13} = 14 \cdot 143 = 2\,002$.

Приклад 4. Знайти (126; 84) і [126; 84].

Розв'язування

126		2	84		2
63		3	42		2
21		3	21		3
7		7	7		7
1			1		

(126; 84) = $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ (спільні множники);

[126; 84] = $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 126 \cdot 2 = 252$ (виписуємо множники
одного числа, а з іншого дописуємо ті, яких ще немає).

Приклад 5. Бабуся має трьох онуків. Сергій відвідує бабусю кожні 4 дні, Іван – кожні 5 днів, Петро – кожні 6 днів. Хлопці зустрілися у бабусі 1 січня невисокосного року. Якого числа вони зустрінуться у бабусі наступного року?

Розв'язування

$$\text{НСК}(4, 5, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$$

$$4 = 2 \cdot 2;$$

$$5 = 5 \cdot 1;$$

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Через 60 днів, і це буде друге число.

Завдання для самоконтролю

1. У класі 36 учнів: 16 дівчат і 20 хлопців. Скільки існує можливостей створити групи для чергування так, щоб у всіх групах була однакова кількість дівчат і однакова кількість хлопців? Яке може бути найбільше число таких груп?

2. Яку найбільшу кількість однакових новорічних подарунків можна зробити з 320 горіхів, 280 шоколадок і 200 мандаринок. Скільки горіхів, шоколадок, мандаринок буде в одному подарунку?

Тема 6. Основна теорема арифметики.

Алгоритм Евкліда

План

1. Основна теорема арифметики.

2. Алгоритм Евкліда.

1. Основна теорема арифметики

Розкласти число в добуток простих можна різними способами:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$30 = 3 \cdot (-2) \cdot (-5);$$

$$30 = 5 \cdot (-3) \cdot (-2).$$

Наведені розклади відрізняються лише порядком і знаками множників.

Теорема. Кожне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, причому такий розклад є однозначним з точністю до порядку і знаків множників.

У розкладі натурального числа n у добуток простих усі множники можна взяти додатними. Якщо ще впорядкувати їх за зростанням, то число n можна записати:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

де $p_1, \dots, p_m$ – прості числа і $p_1 < p_2 < \dots < p_m$.

Такий розклад називається **канонічним**.

Твердження. Якщо для a і b відомі їх канонічні розклади:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} ; b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\beta_m},$$

то:

$$\boxed{\text{НСД}(a; b) = p_1^{\min(\alpha_1; \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2; \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_m^{\min(\alpha_m; \beta_m)}}$$

$$\boxed{\text{НСК}(a; b) = p_1^{\max(\alpha_1; \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2; \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_m^{\max(\alpha_m; \beta_m)}}$$

2. Алгоритм Евкліда

Ще древні греки знали метод обчислення НСД двох чисел, який не вимагає розкладу на множники. Він ґрунтується на такий лемі.

Лема. Якщо $a = q \cdot b + r$, то $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(b; r)$.

Нехай a і b натуральні числа і $a > b$.

Розділимо a на b з остачею: $a = q_1 \cdot b + r_1$.

Потім розділимо b на r_1 : $b = q_2 \cdot r_1 + r_2$. Потім r_1 на r_2 тощо.

На якомусь кроці відбудеться ділення націло: $r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k$.

Теорема. Остання ненульова остача r_k є найбільшим спільним дільником a і b .

Такий метод обчислення $\text{НСД}(a; b)$ називається **алгоритмом Евкліда**. Поступове ділення зручно виконувати у стовпчик.

Важливе застосування алгоритм Евкліда має для представлення НСД у вигляді лінійної комбінації чисел a і b .

Теорема. Якщо $d = \text{НСД}(a; b)$, то існують такі цілі числа x і y , що

$$d = a \cdot x + b \cdot y.$$

Рівняння виду $a \cdot x + b \cdot y = c$ називається **лінійним діофантовим рівнянням** з двома змінними.

Теорема. Діофантове рівняння $a \cdot x + b \cdot y = c$ має розв'язки тоді і лише тоді, коли його права частина c ділиться на найбільший спільний дільник d чисел a і b .

Теорема. Якщо лінійне діофантове рівняння $a \cdot x + b \cdot y = c$ має розв'язування $(x_0; y_0)$, то воно має нескінченно багато розв'язувань, які можна знайти за формулами:

$$\boxed{x = x_0 - \frac{b}{d}k};$$

$$\boxed{y = y_0 + \frac{a}{d}k},$$

де $d = \text{НСД}(a; b)$, k – довільне ціле число.

Послідовність розв'язування діофантового рівняння

$$a \cdot x + b \cdot y = c:$$

1) за допомогою алгоритму Евкліда знаходимо $d = \text{НСД}(a; b)$ і перевіряємо, чи $d|c$. Якщо $d \nmid c$, то рівняння розв'язувань не має;

2) якщо $d|c$, то знаходимо лінійне зображення $d = a \cdot m + b \cdot n$ і часткове розв'язування:

$$\boxed{x_0 = m \cdot \frac{c}{d}; y_0 = n \cdot \frac{c}{d}};$$

3) знаходимо загальне розв'язування:

$$\boxed{x = x_0 - \frac{b}{d}k; y = y_0 + \frac{a}{d}k, k \in \mathbb{Z}}.$$

II. Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти канонічний розклад 2100.

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Приклад 2. Знайти НСД і НСК чисел 2 100 і 680.

$$2\,100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\,100 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 17^0;$$

$$680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 17 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 17^1.$$

$$\text{НСД}(2\,100; 680) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 17^0 = 20;$$

$$\text{НСК}(2\,100; 680) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 17^1 = 71\,400.$$

Приклад 3. Знайти НСД (24; 36).

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 24} \\ 24 \\ \hline 24 \\ 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{НСД}(24; 36) = 12.$$

Приклад 4. Знайти НСД (182; 143).

$$\begin{array}{r} 182 \overline{) 143} \\ 143 \\ \hline 143 \\ 117 \\ \hline 39 \\ 26 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{НСД}(182; 143) = 13.$$

Приклад 5. Знайти НСД (2 585; 7 975).

$$\begin{array}{r} 7975 \overline{) 2585} \\ 7755 \\ \hline 2585 \\ 220 \\ \hline 385 \\ 220 \\ \hline 220 \\ 165 \\ \hline 165 \\ 165 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{НСД}(2\,585; 7\,975) = 55.$$

Приклад 6. Знайти лінійне представлення НСД (90; 35).

Розв'язування. За алгоритмом Евкліда знайдемо НСД (90; 35):

$$\begin{array}{r}
 90 \overline{) 35} \\
 \underline{70} \\
 35 \overline{) 20} \\
 \underline{20} \\
 20 \overline{) 15} \\
 \underline{15} \\
 15 \overline{) 5} \\
 \underline{15} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{НСД}(90; 35) = 5; \quad 5 = 90 \cdot x + 35 \cdot y.$$

Процес послідовного ділення можна записати:

$$90 = 35 \cdot 2 + 20$$

$$20 = 90 - 35 \cdot 2$$

$$35 = 20 \cdot 1 + 15$$

$$15 = 35 - 20 \cdot 1$$

$$20 = 15 \cdot 1 + 5$$

$$5 = 20 - 15 \cdot 1$$

$$15 = 5 \cdot 3 + 0$$

$$\text{Отже, } 5 = 20 - 15 \cdot 1 = 20 - (35 - 20 \cdot 1) = 90 - 35 \cdot 2 - (-35) + 90 - 35 \cdot 2 = 90 \cdot 2 + 35 \cdot (-5) \Rightarrow x = 2, y = -5.$$

Приклад 7. Знайти загальне розв'язування рівняння:

1) $15x - 39y = 55$.

$\text{НСД}(15; 39) = 3$, але $3 \nmid 55$, тому рівняння розв'язувань не має;

2) $5x + 7y = 2$.

$\text{НСД}(5; 7) = 1$; $1 \mid 2$, тому розв'язування є.

Лінійне представлення:

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 5} \\
 \underline{5} \\
 5 \overline{) 2} \\
 \underline{2} \\
 5 \overline{) 4} \\
 \underline{4} \\
 2 \overline{) 1} \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}$$

Послідовне ділення:

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$2 = 7 - 5 \cdot 1$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Отже, $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2 = 5 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2)$,

$$m = 3, n = -2.$$

Часткове розв'язування:

$$x_0 = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6; y_0 = -2 \cdot \frac{2}{1} = -4.$$

Загальне розв'язування:

$$x = 6 - \frac{7}{1}k = 6 - 7k; y = -4 + \frac{5}{1}k = -4 + 5k;$$

$$3) 187x - 143y = 77.$$

НСД(187; 143) = 11; 11|77, тому розв'язування є.

Лінійне представлення:

$$\begin{array}{r|l} 187 & 143 \\ 143 & 1 \\ \hline 143 & 44 \\ 132 & 3 \\ \hline 44 & 11 \\ 44 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Послідовне ділення:

$$187 = 143 \cdot 1 + 44$$

$$44 = 187 - 143 \cdot 1$$

$$143 = 44 \cdot 3 + 11$$

$$11 = 143 - 44 \cdot 3$$

$$44 = 11 \cdot 4 + 0$$

Отже,

$$11 = 143 - 44 \cdot 3 = 143 - (187 - 143 \cdot 1) \cdot 3 = 143 - 187 \cdot 3 + 143 \cdot 3 = 187 \cdot (-3) + (-143) \cdot (-4),$$

$$m = -3, n = -4.$$

Часткове розв'язування:

$$x_0 = -3 \cdot \frac{77}{11} = -21; y_0 = -4 \cdot \frac{77}{11} = -28.$$

Загальне розв'язування:

$$x = -21 - \frac{-143}{11}k = -21 + 13k; y = -28 + \frac{187}{11}k = -28 + 17k.$$

Приклад 8. Знайти всі натуральні розв'язування рівняння $5x + 7y = 116$.

$\text{НСД}(5; 7) = 1$; $1|116$, тому розв'язування є.

Лінійне представлення:

$$1 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2), m = 3, n = -2.$$

Часткове розв'язування:

$$x_0 = 3 \cdot \frac{116}{1} = 348; y_0 = -2 \cdot \frac{116}{1} = -232.$$

Загальне розв'язування:

$$x = 348 - \frac{7}{1}k = 348 - 7k; y = -232 + \frac{5}{1}k = -232 + 5k.$$

Щоб розв'язування були натуральними, повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} 348 - 7k > 0 \\ -232 + 5k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{348}{7} \approx 49,7 \\ k > \frac{232}{5} = 46,4 \end{cases} \Rightarrow 46,4 < k < 49,7 \Rightarrow$$

$$k = 47; 48; 49.$$

$$\text{При } k = 47: \begin{cases} x = 348 - 7 \cdot 47 = 19 \\ y = -232 + 5 \cdot 47 = 3. \end{cases}$$

$$\text{При } k = 48: \begin{cases} x = 348 - 7 \cdot 48 = 12 \\ y = -232 + 5 \cdot 48 = 8. \end{cases}$$

$$\text{При } k = 49: \begin{cases} x = 348 - 7 \cdot 49 = 5 \\ y = -232 + 5 \cdot 49 = 13. \end{cases}$$

Отже, натуральні розв'язування: $(19; 3)$; $(12; 8)$; $(5; 13)$.

Завдання для самоконтролю

1. Використовуючи канонічні розклади, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел a і b , якщо:

$$a = 5940, b = 3234;$$

$$a = 1960, b = 4550;$$

$$a = 7605, b = 728;$$

$$a = 10800, b = 9100;$$

$$a = 8064, b = 6480.$$

2. За допомогою алгоритму Евкліда знайти:

а) найбільший спільний дільник чисел a і b ;

б) лінійне представлення (a, b) ;

в) найменше спільне кратне a і b .

$$a = 6120, b = -504;$$

$$a = -2442, b = 2370;$$

$$a = -6321, b = 4013;$$

$$a = -4030, b = 2315;$$

$$a = -7973, b = 3344.$$

Питання для самоконтролю

1. Дати визначення простого числа, складеного числа, неповної частки, залишку.
2. У чому полягає різниця між взаємно простими і попарно простими числами?
3. Дати означення НСД (a, b).
4. Дати визначення НСК $[a, b]$. Який існує зв'язок між (a, b) та $[a, b]$?
5. Сформулювати алгоритм Евкліда для знаходження (a, b).

Тести

1. Знайти НСД (18; 24):

- а) 72;
- б) 12;
- в) 24;
- г) 6.

2. Було 156 цукерок "Корівка", 312 – "Ромашка", 390 – "Білочка". Яку найбільшу кількість подарунків можна скласти з цих цукерок, щоб скрізь була однакова кількість цукерок кожного виду:

- а) 60;
- б) 78;
- в) 39;
- г) 156.

3. Дано розклади на множники двох чисел: $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ та $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$. Знайти їх НСД:

- а) 11;
- б) 3;
- в) 33;
- г) 22.

4. Знайти НСД (24; 36):

- а) 24;
- б) 36;
- в) 12;
- г) 72.

5. Знайти НСК (18; 24):

- а) 72;
- б) 48;
- в) 18;
- г) 6.

6. Обрати пару взаємно простих чисел:

- а) 12 і 14;
- б) 14 і 25;
- в) 33 і 44;
- г) 25 і 60.

7. Обрати правильне твердження:

- а) 2 – складне число;
- б) 2 – просте число;
- в) 4 – просте число;
- г) 1 – просте число.

8. Розкласти на прості множники число 45:

- а) $3 \cdot 15$;
- б) $5 \cdot 9$;
- в) $3 \cdot 3 \cdot 5$;
- г) $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

9. У ящику менше 70 яблук. Відомо, що їх можна поділити порівну між 2, 3 і 5 дітьми, але не можна поділити між 4 дітьми. Скільки яблук у ящику:

- а) 90;
- б) 30;
- в) 60;
- г) 40.

10. Що дозволяє обчислити алгоритм Евкліда:

- а) середнє арифметичне двох чисел;
- б) похідну;
- в) частку від ділення двох чисел;
- г) НСД чисел.

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ. НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ

Тема 7. Числові функції

План

1. Функції $[x], \{x\}$.
2. Мультиплікативні функції.

1. Функції $[x], \{x\}$

Для кожного дійсного числа x через $[x]$ позначається найбільше ціле число, яке не перевищує x . $[x]$ називається **цілою частиною** числа x . $[x]$ – це єдине ціле число з проміжку $(x - 1; x]$.

Наприклад, $[5] = 5$, $[1,6] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-2,75] = -3$.

Різниця $x - [x] = \{x\}$ називається **дробовою частиною** числа x і задовольняє нерівність $0 \leq \{x\} < 1$.

Наприклад:

$$\{-3\} = -3 - [-3] = -3 - (-3) = 0;$$

$$\{7,26\} = 7,26 - [7,26] = 7,26 - 7 = 0,26;$$

$$\{-1,6\} = -1,6 - [-1,6] = -1,6 - (-2) = 0,4.$$

Ціла та дробова частини числа використовуються для визначення степеня α простого числа p , з яким це число входить до числа $n!$

Цей степінь α знаходять за формулою:

$$\alpha = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right].$$

Обчислення зручно проводити у вигляді:

$$\begin{array}{r|l} n & p \\ \hline r_1 & q_1 \quad p \\ & r_2 \quad q_2 \quad p \\ & & r_3 \quad q_3 \quad \dots \end{array}$$

Тоді: $\alpha = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$

Ділення робимо, доки не отримаємо частку, меншу p .
Канонічний розклад числа $n!$ знаходять за формулою:

$$n! = \prod_{p-\text{просте}} p^{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right]}.$$

2. Мультиплікативні функції

Функція $f(a)$ називається **мультиплікативною**, якщо для неї виконуються умови:

- 1) $f(a)$ визначена для всіх $a = 0, 1, 2, \dots$ і хоча б для одного a_0 : $f(a_0) = 0$;
- 2) для будь-яких a_1, a_2 таких, що $\text{НСД}(a_1, a_2) = 1$, виконується:

$$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2).$$

За допомогою мультиплікативних функцій виводяться формули для знаходження:

- 1) кількості всіх натуральних дільників числа n ;
- 2) суми всіх натуральних дільників числа n ;
- 3) кількості натуральних чисел, які менші числа n і взаємно прості з n .

Теорема. Якщо канонічний запис числа n має вигляд $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то кількість натуральних дільників числа n обчислюється за формулою:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1), \tau - \text{"тау"}.$$

Теорема. Якщо канонічний запис числа n має вигляд $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то сума всіх натуральних дільників числа n обчислюється за формулою:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}, \sigma - \text{"сігма"}.$$

Числа, для яких $\sigma(n) = 2n$, мають назву «досконалі числа».

Функція Ейлера $\varphi(n)$ – це функція, що визначає для довільного цілого додатного числа n кількість чисел з проміжку $[0; n - 1]$, взаємно простих з числом n .

Розглянемо канонічний розклад числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Для довільного цілого числа функція Ейлера має вигляд:

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}),$$

зокрема:

1) якщо $n = p$ – просте число, то $\varphi(p) = p - 1$;

2) якщо $n = p^\alpha$ – степені простого числа, то $\varphi(p) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. З яким степенем число $p = 2$ входить до $11!$?

$$\alpha = \left[\frac{11}{2} \right] + \left[\frac{11}{4} \right] + \left[\frac{11}{8} \right] = [5,5] + [2,75] + [1,375] = 5 + 2 + 1 = 8.$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} 11! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 2^1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2^1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot 2^1 \cdot 5 \cdot 11 = 2^8 \cdot \dots \\ &\Rightarrow \alpha = 8 \end{aligned}$$

Приклад 2. На який найвищий степінь 7 ділиться число $900!$?

900	7		
7	128	7	
20	7	18	7
14	58	14	2
60	56	4	
56	2		
4			

$$\alpha = 128 + 18 + 2 = 148. \text{ Отже, } 900! = 7^{148} \cdot \dots$$

Приклад 3. Знайти канонічний розклад числа $20!$

Показник числа 2:

$$\left[\frac{20}{2} \right] + \left[\frac{20}{4} \right] + \left[\frac{20}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18.$$

Показник числа 3:

$$\left[\frac{20}{3} \right] + \left[\frac{20}{9} \right] = 6 + 2 = 8.$$

Показник числа 5:

$$\left[\frac{20}{5} \right] = 4.$$

Показник числа 7:

$$\left[\frac{20}{7} \right] = 2.$$

Показник чисел 11, 13, 17, 19:

$$\left[\frac{20}{11} \right] = \left[\frac{20}{13} \right] = \left[\frac{20}{17} \right] = \left[\frac{20}{19} \right] = 1.$$

Отже,

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Приклад 4. Знайти канонічний розклад числа 15!

У канонічний розклад числа 15! входять степені чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13.

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{) 2} \\
 14 \overline{) 7} \quad 2 \\
 1 \overline{) 6} \quad 3 \quad 2 \\
 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 \quad \quad 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 3} \\
 15 \overline{) 5} \quad 3 \\
 0 \quad 3 \quad 1 \\
 \quad 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 5} \\
 15 \overline{) 3} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 7} \\
 14 \overline{) 2} \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 11} \\
 11 \overline{) 1} \\
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 13} \\
 13 \overline{) 1} \\
 2
 \end{array}$$

$$\alpha(2) = 7 + 3 + 1 = 11, \alpha(3) = 5 + 1 = 6, \alpha(5) = 3, \alpha(7) = 2, \alpha(11) = 1, \alpha(13) = 1.$$

Отже,

$$15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Приклад 5. Знайти кількість натуральних дільників числа 60.

Оскільки $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, то:

$$\tau(60) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

Приклад 6. Знайти суму натуральних дільників числа 360.

Оскільки $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, то:

$$\sigma(360) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1\,170.$$

Приклад 7. Чи є досконалим число 8 128?

Канонічний розклад: $8\,128 = 2^6 \cdot 127$. Сума дільників:

$$\begin{aligned}
 \sigma(8\,128) &= \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{127^2 - 1}{127 - 1} = \frac{127 \cdot (127 - 1) \cdot (127 + 1)}{126} = \\
 &= 127 \cdot 128 = 2 \cdot 2^6 \cdot 127 = 2 \cdot 8128 = 2n.
 \end{aligned}$$

Отже, число 8 128 – досконале.

Приклад 8. Знайти значення функції Ейлера для чисел 28, 101, 225:

$$\begin{aligned}\varphi(28) &= \varphi(2^2 \cdot 7) = (2^2 - 2^1)(7^1 - 7^0) = 2 \cdot 6 = 12; \\ \varphi(101) &= 101 - 1 = 100 \text{ (101 – просте число);} \\ \varphi(225) &= \varphi(3^2 \cdot 5^2) = (3^2 - 3^1)(5^2 - 5^0) = 6 \cdot 20 = 120.\end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю

1. В якому степені числа a і b входять до числа $N = n!$?

1.	$a = 3, b = 5, N = 337!$	6.	$a = 3, b = 5, N = 931!$
2.	$a = 2, b = 7, N = 234!$	7.	$a = 2, b = 7, N = 491!$
3.	$a = 2, b = 11, N = 381!$	8.	$a = 3, b = 11, N = 834!$
4.	$a = 3, b = 11, N = 534!$	9.	$a = 2, b = 11, N = 745!$
5.	$a = 5, b = 7, N = 625!$	10.	$a = 5, b = 11, N = 652!$

2. Для числа a обчислити три мультиплікативні функції:

- ✓ кількість дільників;
- ✓ суму дільників;
- ✓ функцію Ейлера.

1.	$a = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 17$	6.	$a = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 61$
2.	$a = 5^4 \cdot 7^2 \cdot 19$	7.	$a = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 79$
3.	$a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 31$	8.	$a = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 41$
4.	$a = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 7^2 \cdot 59$	9.	$a = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 97$
5.	$a = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 43$	10.	$a = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 11^2 \cdot 41$

Тема 8. Системи числення

План

1. *Позиційні та непозиційні системи числення.*
2. *Арифметичні дії в позиційних системах числення.*

1. Позиційні та непозиційні системи числення

Для запису натуральних чисел використовуються різні системи числення, які поділяють на позиційні та непозиційні. У непозиційних системах значення кожного знаку не залежать від його місця в записі числа.

На сьогодні деяке застосування зберегла тільки одна непозиційна система – римська. У цій системі використовують знаки:

I – одиниця;
 V – п'ять;
 X – десять;
 L – п'ятдесят;
 C – сто;
 D – п'ятсот;
 M – тисяча.

Правила запису чисел у римській системі числення:

1) якщо знак, який означає менше число, стоїть після знака, що означає більше число, то виконується додавання:

$$\begin{aligned} XV &= 10 + 5 = 15; \\ CLV &= 100 + 50 + 5 = 155; \\ MCCV &= 1\,000 + 100 + 100 + 5 = 1\,205; \end{aligned}$$

2) якщо знак, який означає менше число, стоїть перед знаком, що означає більше число, то виконується віднімання:

$$\begin{aligned} IV &= -1 + 5 = 4; \\ XL &= -10 + 50 = 40; \\ MCDXXIX &= 1000 - 100 + 500 + 10 + 10 - 1 + 10 = 1429. \end{aligned}$$

У позиційних системах числення значення символів залежить від їх місця (позиції) в записі числа.

Щоб побудувати позиційну систему числення, зафіксуємо натуральне число $m > 1$ – основу системи. Візьмемо довільне натуральне число n і почнемо ділити його на m з остачею, доки частка не стане рівною 0. У кінцевому результаті число n можна подати у вигляді:

$$n = r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \dots + r_1 m + r_0.$$

Ця рівність символічно записується $n = \overline{r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0}$ і називається зображенням числа n у позиційній системі числення з основою m (в m -ковій системі).

Теорема. Нехай натуральне число $m > 1$ фіксоване. Тоді кожне натуральне число n єдиним способом зображується в позиційній системі числення з основою m .

2. Арифметичні дії в позиційних системах

У будь-якій системі арифметичні дії (" $+$ ", " $-$ ", " $\times$ ", " $\div$ ") виконуються аналогічно до 10-кової системи.

Для виконання операцій в системі з основою m потрібно знати таблиці " $+$ ", " $\times$ " у цій системі для однозначних чисел.

Наприклад, для 5-кової системи:

" + "	0	1	2	3	4	" × "	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	10	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	10	11	2	0	2	4	11	13
3	3	4	10	11	12	3	0	3	11	14	22
4	4	10	11	12	13	4	0	4	13	22	31

Перехід від однієї системи числення до іншої можна здійснювати безпосередньо діленням на нову основу числення.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Записати в 7-ковій системі число 25148.

$$\begin{array}{r|l}
 25148 & 7 \\
 \hline
 21 & 3592 \quad 7 \\
 \hline
 41 & 35 \quad 513 \quad 7 \\
 \hline
 35 & 9 \quad 49 \quad 73 \quad 7 \\
 \hline
 64 & 7 \quad 23 \quad 7 \quad 10 \quad 7 \\
 \hline
 63 & 22 \quad 21 \quad \underline{3} \quad 7 \quad 1 \quad 7 \\
 \hline
 18 & 21 \quad \underline{2} \quad \quad \underline{3} \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 14 & \underline{1} \quad \quad \quad \quad \underline{1} \\
 \hline
 \underline{4} &
 \end{array}$$

Отже, $25148 = 133214_7$

Приклад 2. Записати число 46 в 2-ковій системі.

$$\begin{array}{r|l}
 46 & 2 \\
 \hline
 4 & 23 \quad 2 \\
 \hline
 6 & 2 \quad 11 \quad 2 \\
 \hline
 6 & 3 \quad 10 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 \underline{0} & 2 \quad \underline{1} \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 & \underline{1} \quad \quad \underline{1} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\
 & \quad \quad \quad \underline{0} \quad 0 \quad 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \underline{1}
 \end{array}$$

Отже, $46 = 101110_2$.

Перевіримо, перевівши в 10-кову систему:

$$\begin{aligned}
 101110_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\
 &= 32 + 8 + 4 + 2 = 46.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Записати число 19 510 в 12-ковій системі.

$$\begin{array}{r|l}
 19510 & 12 \\
 \hline
 12 & 1625 \quad 12 \\
 \hline
 75 & 12 \quad 135 \quad 12 \\
 \hline
 72 & 42 \quad 12 \quad 11 \quad 12 \\
 \hline
 31 & 36 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 24 & 65 \quad 12 \quad \underline{11} \\
 \hline
 70 & 60 \quad \underline{3} \\
 \hline
 60 & \underline{5} \\
 \hline
 \underline{10} &
 \end{array}$$

Для остач 10 і 11 вводять нове позначення (10) і (11).

Тому $19510 = (11)35(10)_{12}$

Приклад 4. Записати число 32014_5 у 8-ковій системі.

Переводимо в 10-кову систему:

$$32014_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 1875 + 250 + 5 + 4 = 2134.$$

Переводимо у 8-кову систему:

2134	8				
16	266	8			
53	24	33	8		
48	26	32	4	8	
54	24	<u>1</u>	0	0	
48	<u>2</u>		<u>4</u>		
<u>6</u>					

Отже, $32014_5 = 2134 = 4126_8$

Приклад 5. Виконати дії: $342_5 + 23_5$; $213_5 \times 3_5$; $3123_5 - 2414_5$; $2332_5 \div 3_5$

$\begin{array}{r} + 342_5 \\ 23_5 \\ \hline 420_5 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 213_5 \\ 3_5 \\ \hline 1144_5 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 3123_5 \\ 2414_5 \\ \hline 204_5 \end{array}$
--	---	---

2332 ₅	3 ₅
22	424 ₅
13	
11	
22	
22	
0	

Приклад 6. Записати число 4132_5 в системі числення з основою 4.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
 4132_5 & 4 & & & \\
 \hline
 4 & 1020 & 4 & & \\
 \hline
 13 & 4 & 113 & 4 & \\
 \hline
 13 & 12 & 4 & 13 & 4 \\
 \hline
 2 & 4 & 23 & 13 & \underline{2} \\
 \hline
 0 & 30 & 22 & \underline{0} & \\
 \hline
 \underline{2} & 22 & \underline{1} & & \\
 & \underline{3} & & &
 \end{array}$$

Отже, $4132_5 = 20132_4$

Завдання для самоконтролю

1. Виконати переведення чисел з одних систем числення в інші:

- 1) $23567,23(10) = ?(2), ?(8)$
 $0100101101,0110(2) = ?(10), ?(8)$
 $3567,23(8) = ?(10), ?(2)$
- 2) $33467,13(10) = ?(2), ?(8)$
 $1111101101,0111(2) = ?(10), ?(8)$
 $3307,26(8) = ?(10), ?(2)$
- 3) $2497,003(10) = ?(2), ?(8)$
 $1001011,01(2) = ?(10), ?(8)$
 $37477,03(8) = ?(10), ?(2)$
- 4) $1567,1091(10) = ?(2), ?(8)$
 $10101010101,10101(2) = ?(10), ?(8)$
 $1564,23565(8) = ?(10), ?(2)$
- 5) $15758,781(10) = ?(2), ?(8)$
 $0101001000,1111(2) = ?(10), ?(8)$
 $12356,4777(8) = ?(10), ?(2)$

2. Виконати додавання чисел:

- а) $1\ 001\ 010_2 + 1\ 101\ 001_2$;
- б) $1543_6 + 42_6$.

3. Виконати віднімання чисел:

- а) $10\ 101\ 011_2 - 110\ 111_2$;
- б) $2304_6 - 425_6$.

4. Виконати множення чисел:

а) $1\ 011\ 111_2 \cdot 101_2$;

б) $4203_5 \cdot 34_5$.

5. Виконати ділення чисел:

а) $111\ 100\ 011_2 : 10\ 101_2$;

б) $1\ 141\ 043_5 : 23_5$.

Тема 9. Неперервні дроби

План

1. Скінченні ланцюгові дроби.

2. Перетворення звичайних дробів у неперервні.

1. Скінченні ланцюгові дроби

Раціональні числа можна зображати у вигляді звичайних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, або у вигляді періодичних дробів.

Розглянемо ще один спосіб зображення раціональних чисел у вигляді так званих неперервних, або ланцюгових, дробів.

У разі знаходження НСД($a; b$) за алгоритмом Евкліда отримують рівності:

$$a = b \cdot q_0 + r_1;$$

$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2;$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3;$$

... ..

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n.$$

Перепишемо ці рівності у вигляді:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b};$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1};$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2};$$

... ..

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n.$$

Кожна з цих рівностей описує просту процедуру – виділення цілої частини з неправильного дробу.

Використовуючи ці рівності, можна виразити число $\frac{a}{b}$ через числа $q_0, q_1, \dots, q_n$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \dots \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}\end{aligned}$$

Останній вираз називається **скінченним ланцюговим дробом**. Ціле число q_0 і натуральні числа $q_1, \dots, q_n$ називають неповними частками.

З метою скорочення запису ланцюговий дріб символічно записують у вигляді:

$$[q_0; q_1, \dots, q_n].$$

2. Перетворення звичайних дробів у неперервні

Теорема. Кожне раціональне число можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу, причому таке зображення єдине.

З кожним ланцюговим дробом $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ пов'язаний набір чисел $[q_0]$, $[q_0; q_1]$, $[q_0; q_1, q_2]$... Їх можна записати у вигляді звичайних дробів:

$$\begin{aligned}[q_0] &= q_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}; \\ [q_0; q_1] &= q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1}; \\ [q_0; q_1, q_2] &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{(q_0 q_1 + 1)q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_2}{Q_2} \dots\end{aligned}$$

Дріб $\frac{P_k}{Q_k}$ називається k -тим раціональним вкороченням або k -тим підхідним дробом.

Досить простий метод обчислення раціональних вкорочень дає наступна теорема.

Теорема. Чисельники і знаменники раціональних вкорочень ланцюгового дробу задовольняють такі рекурентні співвідношення:

$$P_0 = q_0; \quad P_1 = q_1 \cdot P_0 + 1; \quad P_k = q_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2};$$

$$Q_0 = 1; \quad Q_1 = q_1; \quad Q_k = q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Результати обчислень зручно записувати в таблицю:

k	—	—	0	1	...	n
q_k	—	—	q_0	q_1	...	q_n
P_k	0	1	q_0	$q_1 \cdot P_0 + 1$	...	$q_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	1	0	1	q_1	...	$q_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Результати обчислень займають два нижніх рядки таблиці, причому два перших стовпчики відіграють допоміжну роль і заповнюються завжди однаково. Решта клітинок заповнюються зліва направо і щоразу використовується вміст двох клітинок зліва від цієї і значення неповної частки, що стоїть над цією клітинкою.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Розкласти у неперервний дріб $\frac{151}{13}$ і знайти всі підхідні дроби.

За алгоритмом Евкліда:

$$\begin{array}{r}
 151 \overline{) 13} \\
 \underline{13} \\
 21 \\
 13 \\
 \underline{8} \\
 8 \\
 \underline{5} \\
 5 \\
 \underline{3} \\
 3 \\
 \underline{2} \\
 2 \\
 \underline{1} \\
 2 \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}$$

Отже, $\frac{151}{13} = [11; 1, 1, 1, 1, 2]$.

Для знаходження підхідних дробів складемо таблицю:

k	—	—	0	1	2	3	4	5
q_k	—	—	11	1	1	1	1	2
P_k	0	1	11	12	23	35	58	151
Q_k	1	0	1	1	2	3	5	13

Підхідні дроби:

$$\frac{11}{1}, \frac{12}{1}, \frac{23}{2}, \frac{35}{3}, \frac{58}{5}.$$

Приклад 2. Записати ланцюговий дріб $[0; 4, 2, 4, 1, 1, 6]$ у вигляді звичайного дробу.

Заповнимо таблицю:

k	—	—	0	1	2	3	4	5	6
q_k	—	—	0	4	2	4	1	1	6
P_k	0	1	0	1	2	9	11	20	131
Q_k	1	0	1	4	9	40	49	89	583

Отже, $[0; 4, 2, 4, 1, 1, 6] = \frac{131}{583}.$

Завдання для самоконтролю

1. Записати число $\frac{3653}{3107}$ у вигляді ланцюгового дробу і знайти всі його раціональні вкорочення.
2. За цими ланцюговими дробами знайти відповідні їм звичайні нескоротні дроби: а) $[1; 1; 2; 3; 4]$;
б) $[2; 5; 3; 2; 1; 4; 2; 3]$;
в) $[1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3]$.

Питання для самоконтролю

1. Дати означення функцій $[x]$ і $\{x\}$.
2. Основні мультиплікативні функції.
3. Що таке система числення?
4. Які є види систем числення?

5. Які основні правила виконання дій у різних системах числення?
6. Дати означення неперервного дробу.
7. Форми запису неперервного дробу.
8. Алгоритм представлення числа у вигляді неперервного дробу.

Тести

1. Система числення, яка має найбільше застосування в інформатиці та програмуванні:

- а) вісімкова;
- б) п'ятіркова;
- в) десяткова;
- г) двійкова.

2. Щоб перевести число з десяткової системи числення в будь-яку іншу, потрібно:

- а) це число помножити на нову основу числення;
- б) до цього числа додати нову основу числення;
- в) це число поділити на нову основу числення;
- г) від цього числа відняти нову основу числення.

3. Перевести число $23_{(4)}$ в десяткову систему числення:

- а) 5;
- б) 11;
- в) 9;
- г) 6.

4. Щоб перевести число в десяткову систему числення, потрібно:

- а) це число поділити на основу числення;
- б) це число помножити на основу числення;
- в) від цього числа відняти основу числення;
- г) до цього числа додати основу числення.

5. Перевести число $96_{(10)}$ у двійкову систему числення:

- а) $1110100_{(2)}$;
- б) $1100000_{(2)}$;
- в) $1010000_{(2)}$;
- г) $101010_{(2)}$.

6. У позиційній системі числення:

а) значення кожного знаку в числі залежить від значень сусідніх знаків;

б) значення кожного знаку в числі залежить від позиції, яку займає знак у записі числа;

в) значення кожного знаку в числі залежить від значення суми сусідніх знаків;

г) значення кожного знаку в числі залежить від значення числа.

7. Кількість одиниць у двійковому записі числа 309:

- а) 4;
- б) 6;
- в) 5;
- г) 3.

8. Кількість значущих нулів у двійковому записі числа 154:

- а) 5;
- б) 6;
- в) 7;
- г) 4.

9. Ціла частина числа $-4,81$ дорівнює:

- а) -5 ;
- б) 5;
- в) -4 ;
- г) 4.

10. Дробова частина числа $-2,3$ дорівнює:

- а) 0,7;
- б) $-0,7$;
- в) $-0,3$;
- г) 0,3.

11. Розкласти у неперервний дріб $151/13$:

- а) $[1;1,1,1,2]$;
- б) $[11;2,1,1]$;
- в) $[11;1,1,2]$;
- г) $[11;1,1,1,1,2]$.

12. У записі $[q_0; q_1, q_2]$ числа q_n називаються:

- а) ціла частина;
- б) частка;
- в) неповна частка;
- г) остача.

13. Виберіть правильне твердження:

- а) кожне раціональне число можна зобразити у вигляді кількох ланцюгових дробів;
- б) кожне раціональне число можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу, причому таке зображення єдине;
- в) існують раціональні числа, які не можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу;
- г) кожне ірраціональне число можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу.

14. Розкласти в ланцюговий дріб $\frac{163}{159}$:

- а) $[1;39,1,3]$;
- б) $[1;9,1,3]$;
- в) $[1;3,9,1,3]$;
- г) $[39;1,1,3]$.

15. Розкласти в ланцюговий дріб $\frac{188}{65}$:

- а) $[2;1,8,3,2]$;
- б) $[3;2,1,3]$;
- в) $[1;2,1,8]$;
- г) $[2;4,2,1]$.

РОЗДІЛ 4

ОСНОВНІ АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

Тема 10. Елементи теорії груп, кілець, полів

План

1. *Поняття групи.*
2. *Кільце, поле.*

1. Поняття групи

Впорядкована пара $\langle G; * \rangle$, де G – непорожня множина, називається **групою**, якщо виконуються такі умови:

- 1) " $*$ " – бінарна алгебраїчна операція, задана на множині G ;
- 2) операція " $*$ " асоціативна на G , тобто для будь-яких елементів a, b, c із G справедливо: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- 3) в G існує нейтральний відносно $*$ елемент e , тобто такий, що $a * e = e * a = a$ для всіх $a \in G$;
- 4) для будь-якого елемента $a \in G$ існує симетричний до нього елемент a' , тобто такий, що $a' * a = a * a' = e$.

Ці умови називають аксіомами групи. Для позначення групової операції замість знака " $*$ " використовують досить часто більш звичні знаки: " $+$ " і " $\cdot$ ". Якщо беруть знак " $+$ ", то алгебраїчну операцію називають додаванням, групу відносно цієї операції – адитивною, нейтральний елемент – нульовим або просто нулем, симетричний протилежним елементом, і таку форму запису називають адитивною. Якщо використовують знак " $\cdot$ ", то операцію називають множенням, групу відносно цієї операції – мультиплікативною, нейтральний елемент – одиничним або просто одиницею, симетричний – оберненим елементом, і таку форму запису називають мультиплікативною.

Група $\langle G; * \rangle$ називається комутативною або **абелевою**, якщо комутативною є операція " $*$ ", тобто якщо для будь-яких елементів a, b справедливо: $a * b = b * a$.

Найпростіші властивості групи:

- 1) для будь-яких елементів $a, b \in G$ справедливо:
 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;
- 2) в будь-якій групі G нейтральний елемент єдиний;
- 3) у групі G для будь-якого елемента a із G існує єдиний симетричний елемент.

Непорожня підмножина H групи G називається **підгрупою** цієї групи, якщо вона є групою відносно операції, заданої в G , тобто якщо $\langle G; * \rangle$ – група, $\emptyset \neq H \subseteq G$ і $\langle H; * \rangle$ – група.

Підгрупа H групи G , відмінна від G і від $\{e\}$, називається **власною підгрупою** групи G . Якщо H є підгрупою групи G , то пишуть: $H \leq G$. Якщо $H \leq G$ і $H \neq G$, пишуть $H < G$. Якщо H не є підгрупою групи G , записують $H \not\leq G$.

Теорема (критерій підгрупи). Нехай $\langle G; \cdot \rangle$ – група. Для того щоб непорожня підмножина H групи G була підгрупою цієї групи, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

- 1) якщо $a, b \in H$, то $ab \in H$;
- 2) якщо $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.

2. Кільце, поле

Впорядкована трійка $\langle K; +, \cdot \rangle$, де K – непорожня множина, називається **кільцем**, якщо виконуються умови:

- 1) $+$ – бінарна алгебраїчна операція, задана на K ;
- 2) операція $+$ асоціативна на K , тобто для будь-яких елементів $a, b, c \in K$ справедливо: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) в K існує нульовий елемент 0 , тобто такий, що для будь-якого $a \in K$ справедливо: $a + 0 = 0 + a = a$;
- 4) для кожного елемента $a \in K$ існує протилежний до нього елемент $-a \in K$, тобто такий, що $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
- 5) операція $+$ комутативна на K , тобто для будь-яких $a, b \in K$ справедливо: $a + b = b + a$;
- 6) $\cdot$ – бінарна алгебраїчна операція, задана на K ;
- 7) операція $\cdot$ асоціативна на K , тобто для будь-яких елементів a, b і c із K справедливо: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

8) операція " $\cdot$ " дистрибутивна ліворуч і праворуч відносно операцій " $+$ " на K , тобто для будь-яких елементів a, b, c із K справедливо:

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c; \\(b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a.\end{aligned}$$

Ці умови називають аксіомами кільця.

Упорядкована трійка $\langle K; +, \cdot \rangle$, де K – непорожня множина, називається **кільцем**, якщо $\langle K; + \rangle$ – абелева група, а для операції " $\cdot$ " виконуються умови 6) – 8) означення кільця.

Кільце $\langle K; +, \cdot \rangle$ називається **комутативним**, якщо комутативною є операція " $\cdot$ ", тобто якщо для будь-яких елементів a, b із K справедливо: $a \cdot b = b \cdot a$. Кільце $\langle K; +, \cdot \rangle$ називають **кільцем з одиницею**, якщо в K існує одиничний елемент e , відмінний від нульового.

Найпростіші властивості довільного кільця:

- 1) нульовий елемент єдиний;
- 2) протилежний до кожного елемента кільця єдиний;
- 3) якщо одиничний елемент у кільці існує, то він єдиний;
- 4) якщо обернений елемент до цього існує, то він єдиний.

Непорожня підмножина K_1 кільця K називається **підкільцем** цього кільця, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих у K , K_1 сама є кільцем, тобто якщо $\langle K; +, \cdot \rangle$ – кільце, $\emptyset \neq K_1 \subseteq K$ і $\langle K_1; +, \cdot \rangle$ – кільце.

Будь-яке підкільце K_1 кільця K , відмінне від самого кільця K і від нульового підкільця, називається власним підкільцем цього кільця.

Теорема (критерій підкільця). Нехай $\langle K; +, \cdot \rangle$ – кільце. Для того щоб непорожня підмножина K_1 кільця K була підкільцем цього кільця, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

- 1) якщо $a, b \in K_1$, то $a + b \in K_1$;
- 2) якщо $a \in K_1$, то $-a \in K_1$;
- 3) якщо $a, b \in K_1$, то $ab \in K_1$.

Впорядкована трійка $\langle P; +, \cdot \rangle$, де P – множина, що містить не менше двох елементів, називається **полем**, якщо виконуються такі умови:

- 1) " $+$ " – бінарна алгебраїчна операція, задана на множині P ;

2) операція $+$ асоціативна на P , тобто для будь-яких трьох елементів a, b і c із P справедливо:

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

3) в P існує нульовий елемент, тобто такий елемент 0 , що для будь-якого a із P справедливо: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) для кожного елемента a із P в P існує протилежний до нього елемент $-a$, тобто такий, що $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5) операція $+$ – комутативна на P , тобто для будь-яких a, b із P справедливо: $a + b = b + a$;

6) $\cdot$ – бінарна алгебраїчна операція, задана на P ;

7) операція $\cdot$ асоціативна на P , тобто для будь-яких елементів a, b і c із P справедливо: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

8) операція $\cdot$ є дистрибутивною відносно операції $+$ на P , тобто для будь-яких трьох елементів a, b і c із P справедливо:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$$

9) операція $\cdot$ є комутативною на P , тобто для будь-яких a, b і c із P справедливо: $a \cdot b = b \cdot a$;

10) в P існує одиничний елемент 1 , тобто такий елемент, що для будь-якого елемента a із P справедливо: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

11) для кожного ненульового елемента a із P існує в P обернений до нього елемент a^{-1} , тобто такий, що $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Ці умови означення поля називаються аксіомами поля.

Найпростіші властивості поля:

1) нульовий елемент єдиний;

2) протилежний до кожного елемента єдиний;

3) одиничний елемент єдиний;

4) обернений до кожного ненульового елемента єдиний.

Підмножина P_1 поля P називається підполем цього поля, якщо відносно операцій, заданих у P , вона сама є полем.

Будь-яке підполе поля P , відмінне від самого поля, називається **власним підполем** цього поля.

Теорема (критерій підполя). Нехай $\langle P; +, \cdot \rangle$ – поле. Для того щоб підмножина P_1 поля P , яка містить не менше двох елементів,

була підполем поля P , необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

- 1) якщо $a, b \in P_1$, то $a + b \in P_1$;
- 2) якщо $a \in P_1$, то $-a \in P_1$;
- 3) якщо $a, b \in P_1$, то $ab \in P_1$;
- 4) якщо $a \in P_1, a \neq 0$, то $a^{-1} \in P_1$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1

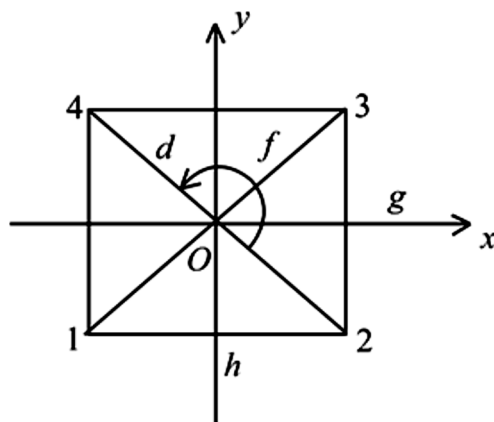
Показати, що множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ з операцією додавання є групою.

Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на множині $\mathbb{Z}$. Відомо, що ця операція є асоціативною: $(a + b) + c = a + (b + c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Роль одиничного елемента буде відігравати число 0, оскільки $0 + a = a + 0 = a$ для довільного $a \in \mathbb{Z}$. Оберненим елементом до елемента $a \in \mathbb{Z}$ буде $-a \in \mathbb{Z}$, оскільки $a + (-a) = (-a) + a = 0$ для довільного $a \in \mathbb{Z}$. Отже, множина $\mathbb{Z}$ з операцією додавання є групою.

Приклад 2

Знайти групу симетрій квадрата.

Розглянемо квадрат на площині, вершини якого занумеровані проти годинникової стрілки числами 1, 2, 3, 4 і нехай O – центр квадрата.



Позначимо через e, a, b, c повороти квадрата навколо точки O , відповідно, на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ проти руху годинникової стрілки.

Якщо повернути квадрат навколо центра O на 90° , то вершина 1 перейде у вершину 2, вершина 2 – у вершину 3, 3 – у 4, 4 – в 1. У результаті квадрат перейде сам у себе. Це перетворення квадрата можна задати як відображення вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ у себе, яке зазвичай записують у вигляді таблиці з двох рядків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

де у верхньому рядку виписані всі вершини, а у нижньому – їх образи. Множина G всіх поворотів заданого квадрата складається з чотирьох елементів:

$$G = \{e, a, b, c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рухи площини, які переводять задану геометричну фігуру в себе, називають симетріями цієї фігури. Так, e, a, b, c є симетріями квадрата. Крім цих симетрій, квадрат має й інші симетрії, а саме симетрії d і f відносно діагоналей квадрата, а також симетрії h і g відносно прямих, які проходять через центр квадрата паралельно сторонам. Множина $S = \{e, a, b, c, d, f, h, g\}$ є прикладом групи, яку називають групою симетрій квадрата.

Завдання для самоконтролю

1. З'ясувати, чи утворює групу кожна із заданих множин стосовно вказаної операції над елементами:

- а) натуральні числа стосовно додавання;
- б) парні числа стосовно додавання;
- в) непарні цілі числа стосовно додавання;
- г) цілі числа стосовно множення.

2. Записати групу симетрій геометричних фігур:

- а) правильного трикутника;
- б) ромба.

Тема 11. Поле комплексних чисел

План

1. *Поняття комплексного числа.*
2. *Форми запису комплексних чисел.*

1. Поняття комплексного числа

Комплексним числом називають вираз виду $a + bi$, де a та b – дійсні числа, i – уявна одиниця, яка визначається рівністю $i^2 = -1$. Комплексні числа часто позначають однією літерою: $z = a + bi$. Символічно її позначають так:

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z.$$

Будь-яке число можна розглядати як комплексне число, в якого уявна частина дорівнює 0: $a = a + 0 \cdot i$.

Комплексне число $z = yi$, в якому $\operatorname{Re} z = 0$ називають суто уявним числом.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 + b_2i$ називають рівними тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$, тобто

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

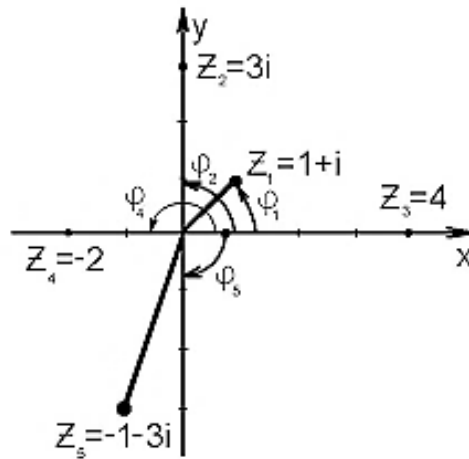
Число $a - bi$ називають **спряженим** до комплексного числа $z = a + bi$ і позначають $\bar{z} = a - bi$.

2. Форми запису комплексних чисел

Виберемо на площині прямокутника декартову систему координат. Якщо кожному комплексному числу $z = x + yi$ поставити у відповідність точку (x, y) площини xOy , то між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини буде встановлено взаємно однозначну відповідність. Дійсні числа при цьому зображуються точками осі Ox , а суто уявні числа – точки осі Oy . Тому вісь Ox називають дійсною, а вісь Oy – уявною. Числу $z = 0$ відповідає точка $O(0; 0)$.

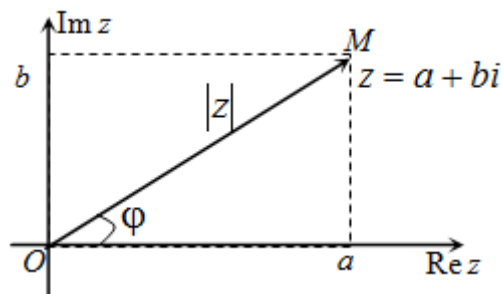
Наприклад, зобразимо на комплексній площині числа:

$$z_1 = 1 + i, z_2 = 3i, z_3 = 4, z_4 = -2, z_5 = -1 - 3i.$$



Комплексне число $z = x + yi$ можна також зображати вектором, початок якого міститься в точці $(0; 0)$, а кінець — у точці $(x; y)$. Такий вектор називають радіус-вектором точки $(x; y)$. Довжину радіус-вектора називають модулем комплексного числа і позначають $|z|$ або r .

Кут φ , який утворює радіус-вектор точки z з додатним напрямком осі Ox , називають аргументом комплексного числа і позначають $Arg z$: $\varphi = Arg z$.



$$\begin{aligned} \text{При цьому } x &= r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \\ z = x + yi &= r \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i, \\ z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Це так звана **тригонометрична форма** комплексного числа. Кожне комплексне число має модуль, причому $0 \leq |z| < +\infty$, $|z| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $z = 0$. Аргумент числа $z = 0$ не визначений, а для всіх інших комплексних чисел аргумент визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданку виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Основним значенням аргументу вважається те значення кута φ , яке дозволяє нерівності $-\pi < \varphi < \pi$. Це значення позначають через $arg z$.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Для обчислення $|z|$ та $\arg z$ комплексного числа $z = x + yi$ користуються такими формулами:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(x + yi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \text{ якщо } x < 0; y \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, \text{ якщо } x < 0; y < 0. \end{cases}$$

$$\arg(yi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ якщо } y < 0 \end{cases}$$

$$\arg 0 = \text{невизначений}.$$

Показникова форма комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Представити комплексні числа в тригонометричній формі:

1) $z = 2 + 2i$:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

2) $z = -1 - \sqrt{3}i$:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3},$$

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

3) $z = 5i$:

$$|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5, \varphi = \arg z = \frac{\pi}{2},$$

$$z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

4) $z = -3i$:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3, \varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2},$$

$$z = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

5) $z = 4$:

$$|z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \varphi = \arg z = \arctg \frac{0}{4} = 0,$$

$$z = 4(\cos 0 + i \cdot \sin 0).$$

6) $z = -16$:

$$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16, \varphi = \arg z = \arctg \frac{0}{-16} + \pi = \pi,$$

$$z = 16(\cos \pi + i \cdot \sin \pi).$$

Приклад 2. Представити число $z = -1 + i$ в показниковій формі:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi = \arg z = \arctg \frac{1}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 - 6 \cdot x + 18 = 0$;

2) $x^2 + 4 \cdot x + 5 = 0$;

3) $5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$;

4) $x^2 + 9 = 0$;

5) $x^2 - 6 \cdot x + 25 = 0$;

6) $x^2 + 10x + 41 = 0$.

2. Представити комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній та показникові формах: $z_0 = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}}$.

3. Представити комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній та показникові формах: $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$.

Тема 12. Операції над комплексними числами

План

1. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
2. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі.

1. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання та множення комплексних чисел визначають за такими формулами:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Наприклад, виконаємо дії:

- 1) $(2 + i) + (4 - 3i) = (2 + 4) + (1 - 3)i = 6 - 2i;$
- 2) $3i + (2 - i) = (0 + 2) + (3 - 1)i = 2 + 2i;$
- 3) $(-4 + 2i) \cdot (7 + 3i) = -4 \cdot 7 + 2 \cdot 7i - 4 \cdot 3i + 2 \cdot 3i^2 =$
 $= -28 + 14i - 12i - 6 = -34 + 2i.$

Сума та добуток прямих чисел завжди є дійсним числом. Дійсно, для будь-якого числа $z = a + bi$:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a;$$
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 + (ab - ab)i = a^2 + b^2.$$

Різницею чисел z_1 та z_2 називають число:

$$z = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Наприклад, $(7 - 2i) - (5 + i) = (7 - 5) + (-2 - 1)i = 2 - 3i.$

Часткою двох комплексних чисел z_1 та z_2 ($z_2 \neq 0$) називають комплексне число:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Наприклад, обчислимо вирази:

- 1) $\frac{2-i}{3+5i} = \frac{(2-i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 3i - 2 \cdot 5i + 5i^2}{3^2 - (5i)^2} = \frac{1-13i}{34} = \frac{1}{34} - \frac{13}{34}i;$
- 2) $\frac{1}{i-2} = \frac{1}{-2+i} = \frac{1 \cdot (-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-2-i}{4-i^2} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$

2. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Теорема. Нехай комплексні числа z_1 та z_2 записані у тригонометричній формі:

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \text{ та } z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2).$$

Тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Степінь комплексного числа обчислюють за **формулою Муавра**:

$$(|z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi))^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

Коренем n -го степеня із комплексного числа z називають комплексне число w , яке у разі піднесення до степеня n дає z , тобто:

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z.$$

Теорема. Існує рівно n значень кореня n -го степеня із комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$. Ці значення визначаються формулою:

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

II. Розв'язування типових прикладів

Приклад. Дано числа $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. Записати їх у тригонометричній формі та виконати дії: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^{20} ; $\sqrt[3]{z_1}$.

Тригонометрична форма:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{12} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4})}{2(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{12} \right); \end{aligned}$$

$$z_1^{20} = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} \cdot \left(\cos \frac{20 \cdot 3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{20 \cdot 3\pi}{4} \right) = \\ = 1024 \cdot (\cos 15\pi + i \cdot \sin 15\pi) = 1024 \cdot (-1 + 0i) = -1024;$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2.$$

Звідси:

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ w_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ w_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Завдання для самоконтролю

1. Виконати дії:

- 1) $(3+i) + (-3-8i)$;
- 2) $(5-4i) + (7+4i)$;
- 3) $(-6+2i) + (-6-2i)$;
- 4) $(0,2+0,1i) + (0,8-1,1i)$;
- 5) $(2-3i) + (5+6i) + (-3-4i)$;
- 6) $(7+i) - (9+2i)$;
- 7) $(-2-5i) - (2+5i)$;
- 8) $(1-i) - (7-3i) - (2+i) + (6-2i)$.

2. Виконати дії:

- 1) $(5-3i)2i$;
- 2) $(3+4i)(3-4i)$;
- 3) $(5+3i)(2-5i)$;
- 4) $(-2-i)(1+i)$;
- 5) $(0,2-0,3i)(0,5+0,4i)$.

3. Виконати дії:

- 1) $\frac{1-i}{1+i}$;
- 2) $\frac{3-2i}{1+3i}$;

$$3) \frac{\sqrt{5} + i}{\sqrt{5} - 2i} ;$$

$$4) \frac{(1 - 2i) \cdot (2 + i)}{3 - 2i} ;$$

$$5) \frac{2 + 3i}{(4 + i) \cdot (2 - 2i)} ;$$

$$6) \frac{(3 + 2i) \cdot (2 - i)}{(2 + 3i) \cdot (1 + i)} ;$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке група?
2. Які є види груп?
3. Що таке кільце, підкільце?
4. Які типи кілець існують?
5. Що таке поле?
6. Дати означення комплексного числа.
7. Які є форми комплексних чисел?
8. Які дії можна виконувати над комплексними числами?
9. За якими формулами виконуються дії в алгебраїчній та тригонометричній формі?

Тести

- 1. Яка множина є групою відносно операції множення:**
 - а) множина цілих чисел;
 - б) множина додатніх раціональних чисел;
 - в) множина парних цілих чисел;
 - г) множина невід'ємних чисел.

- 2. Яка множина не є кільцем відносно операцій додавання і множення:**
 - а) множина парних цілих чисел;
 - б) множина натуральних чисел;
 - в) множина раціональних чисел;
 - г) множина дійсних чисел.

3. Яка множина є полем відносно операцій додавання і множення:

- а) множина цілих чисел;
- б) множина раціональних чисел;
- в) множина парних цілих чисел;
- г) множина натуральних чисел.

4. Яка множина не є кільцем:

- а) множина парних цілих чисел відносно додавання і множення;
- б) множина, що складається з числа 0;
- в) множина, яка складається з чисел 0 і 1;
- г) множина цілих чисел відносно додавання і множення.

5. Яка множина є кільцем:

- а) множина цілих чисел відносно множення і ділення;
- б) множина парних чисел відносно додавання і ділення;
- в) множина натуральних чисел відносно віднімання і множення;
- г) множина раціональних чисел відносно додавання і множення.

6. Комплексне число складається з:

- а) дійсної та раціональної частин;
- б) раціональної та уявної частин;
- в) цілої та дробової частин;
- г) дійсної та уявної частин.

7. Як називається число $z = 12i$:

- а) комплексним;
- б) дійсним;
- в) суто уявним;
- г) спряженим.

8. Яку назву мають комплексні числа $5 + 7i$ та $5 - 7i$:

- а) рівні;
- б) спряжені;
- в) додатні;
- г) протилежні.

9. Комплексні числа $-2 + 3i$ та $2 - 3i$ називаються:

- а) спряжені;
- б) протилежні;
- в) рівні;
- г) невід'ємні.

10. Сума $(3 + 2i) + (-1 - 5i) + (4 - 5i) + (6 - 3i)$ дорівнює:

- а) $12 + 11i$;
- б) $12 - 11i$;
- в) 0 ;
- г) $-12 - 11i$.

11. Різницею чисел $3 + 5i$ та $10 - 6i$ є:

- а) $-7 - 11i$;
- б) $-7 + 11i$;
- в) $7 + 11i$;
- г) $11i$.

12. Геометричним зображенням комплексного числа є:

- а) відрізок;
- б) пряма;
- в) радіус-вектор;
- г) промінь.

13. Форма комплексного числа $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ називається:

- а) алгебраїчною;
- б) показниковою;
- в) логарифмічною;
- г) тригонометричною.

14. Для того щоб помножити два комплексні числа в тригонометричній формі, необхідно:

- а) модулі перемножити, а аргументи додати;
- б) модулі розділити, а аргументи відняти;
- в) модулі розділити, а аргументи додати;
- г) модулі перемножити, а аргументи відняти.

15. Корінь четвертого степеня з 1 має:

- а) 2 значення;
- б) 8 значень;
- в) 4 значення;
- г) безліч значень.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Artemovych O. D. Groups with many hypercentral subgroups / O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Buletinul Academiei de Științe a Moldovei. Matematica. 2008. Number 2(57).
2. Semko N. N. Leibniz algebras, having a dense family of ideals / N. N. Semko, L. V. Skaskiv, O. A. Yarovaya // Carpathian Mathematical Publications. 2020.
3. Semko N. N. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension / N. N. Semko, L. V. Skaskiv, O. A. Yarovaya // Algebra and Discrete Mathematics. 2020.
4. Безущак О. О. Елементи теорії чисел: навчальний посібник / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкин. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2003.
5. Гаврилків В. М. Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник / В. М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 148 с.
6. Курдаченко Л. А. Вибрані розділи алгебри та теорії чисел / Л. А. Курдаченко, В. В. Кириченко, М. М. Семко. – К.: Інститут математики НАН України, 2005. – 208 с.
7. Пилипів В. М. Класичні основи теорії чисел: навчально-методичний посібник / В. М. Пилипів, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. – 68 с.
8. Руденко І. Б. Вища та прикладна математика: навч. посіб. / І. Б. Руденко, О. Б. Чернобай. 2017.

Навчальне видання

Скасків Лілія Василівна

Теорія чисел та основні структури сучасної математики

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск

А. В. Лавренюк

Відповідальний редактор

І. Є. Врублевська

Редактор

М. М. Грабарчук

Форматування та

комп'ютерна верстка

Д. П. Завальницька

Здано до друку 30.12.2021. Формат 60×84/14

Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman»

Ум. друк. арк. 4.1

Наклад 300 прим. Замовлення № 1006

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром

Університету ДФС України

08205, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область,

Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до державного реєстру видавців, виготовлювачів і

розповсюджувачів видавничої продукції

Серія ДК № 5104 від 20.05.2016