МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

Методика вивчення елементів теорії ймовірностей у загальноосвітній школі

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, СОМ-22-1 групи,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Скасківа Тараса Васильовича _____

Науковий керівник _____ Семко М.М., д.ф-м.н., професор

Керівник освітньо-професійної програми _____ Семко М.М., д.ф-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
кібернетики та прикладної математики
протокол від «15» 01 2023 № 7

Завідувач кафедри _____ Лаговський В.В., к.е.н., доцент

Ірпінь – 2023

Реєстрація № 1 12.01.2024 Чернобай О.Б.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 15.01.2024
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 80 6.02.2024
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії: Правильний М.В.
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії:
(підпис) Семко М.М.
(ініціали, прізвище)
(підпис) Чернобай О.Б.
(ініціали, прізвище)
(підпис) Спасів І.В.
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	20		
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	10		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	40		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	10		
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	5		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	20		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	40		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	80		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
80	B	4	6.02.2024	Чабанівський В.В. Чабанівський О.Б. Семко М.М. Скасків Н.В. Ярова О.А.

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

ВСТУП

Програма шкільного курсу передбачає ознайомлення з темою «Елементи теорії множин. Комбінаторика». Зміст його має сприяти розвитку комбінаторного мислення, підвищенню інтересу учнів до математики, допомагає задовольнити пізнавальні інтереси школярів та вибрати в подальшому напрям профілю навчання у старшій школі.

Як зазначається у Концепції 11-річної школи України, гуманістичні цінності освіти зумовлюють зміну авторитарно-дисциплінарної моделі навчання на особистісно-орієнтовану. Особистісний підхід до навчання, зокрема, реалізується за допомогою спеціальних курсів за вибором. Створюється можливість гнучкої варіативності змісту математичної. освіти згідно з інтересами, нахилами, здібностями учнів та їх орієнтації на майбутню професію.[4, 97с.]

Комбінаторика довгий час входила до обов'язкової програми з математики, а пізніше була рекомендована для вивчення на факультативних заняттях. Проте існує багато проблем теорії інформації, складання та декодування шифрів, виробництва, транспортування, розміщення підприємств, вивчення складу різних речовин, тобто проблем усіх галузей людської діяльності, які мають комбінаторний характер. Це зумовлює актуальну потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності, динамічності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та її підтвердження, тобто сформованості комбінаторного мислення.

Комбінаторика набула свого другого народження завдяки виникненню ЕОМ. З'явилася можливість розв'язувати значно ширше коло комбінаторних задач методом перебору, що реалізується на ЕОМ. З цим матеріалом тісно пов'язані задачі оптимізації комбінаторного типу, які розвивають мислення учнів, спонукають до творчої діяльності, викликають зацікавленість математикою та інформатикою. Пошук з поверненням, метод гілок і границь, евристичний пошук — найпростіші методи розв'язування таких задач. [8, 136с.]

Згідно з Державним стандартом базової загальної освіти в Україні, у тому

числі й математики, у якому визначені цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя, традиційні змістові лінії доповнено змістовою лінією «Елементи теорії ймовірності. Комбінаторика», визначено необхідний мінімум для продовження освіти навчання з цієї теми та вимоги до його засвоєння. Програмою з математики для загальноосвітніх середніх закладів вивчення комбінаторики віднесено до 11 класу. [10, 32с.]

В основній школі ці питання розглядаються тільки в класах з поглибленим вивченням математики. Проте існує велика кількість шкіл (і в цьому специфіка системи освіти України) з одним класом універсального профілю (переважно це сільські школи), де немає можливості формувати в основній школі окремі класи з поглибленим навчанням математики. Даний курс може бути використаний для проведення індивідуальної чи групової роботи у таких класах.

Курс розрахований на 17 год. протягом одного півріччя для учнів 7-8 класів, 10год. в 9 класі та 10 год в 11 класі. Важливою складовою організації навчального процесу є самостійні роботи: індивідуальне вивчення обраної теми, написання рефератів, виступи на семінарах з доповідями.

Комбінаторика з її прикладним застосуваннями зацікавлює учнів, переконує їх у реальності і корисності вивчення цієї теми.

Проблемою методики викладання теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності» в учнів на уроках математики займалися багато вчених. Найбільш повно та детально розглянули ці поняття: Бродський Я.С., Павлов О.Л, Вилугіна Л.В., Грищенко В., Слєпкань З.І., Божко В., Ващенко Л, Панішева О., Чашечникова О., Варущик Н., Овчинникова Т., Трунова О.

Об’єктом дослідження є процес викладання математики в школі.

Предмет - методика викладання теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності».

Мета - аналіз літератури, дослідження актуальності вивчення даної теми в школі, значення її в житті учня після закінчення школи, виявлення проблем, які можуть виникнути під час вивчення теми і шляхи їх усунення, розробити методику її викладання.

Гіпотеза дослідження ґрунтується на припущенні, що ефективність засвоєння теми учнями залежить від методики її викладання, а також від організації та змісту навчально-виховного процесу уроків математики.

Для перевірки гіпотези дослідження та реалізації мети поставлено такі **завдання:**

- провести аналіз літератури з даної теми;
- обговорити з вчителями основні проблеми, які виникають в учнів при вивченні теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності»;

Методологічну та теоретичну основу дослідження становлять: теорія наукового пізнання; системний, комплексний і діяльнісний підходи до навчання. Дослідження ґрунтується на основних положеннях наступних документів: Закон України «Про Освіту», Державна національна програма «Освіта (Україна XXI століття)», Державні освітні стандарти, Національна доктрина розвитку України у XXI столітті.

Для перевірки висунутої гіпотези й вирішення поставлених завдань була розроблена програма дослідження, яка включила такі **методи дослідження:**

- **теоретичні методи:** аналіз, зіставлення, узагальнення даних дослідження на основі вивчення філософської, психологічної, педагогічної, методологічної літератури, навчальних програм, підручників зматематики.
- **емпіричні методи:** вивчення, узагальнення та впровадження передового педагогічного досвіду вчителів математики; спостереження, бесіди з вчителями та учнями; вивчення результатів діяльності школярів.

Практичне значення буде полягати в розробці і впровадженні в практику школи рекомендацій щодо вивчення теми: «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності» для того, щоб допомогти учню впоратись з великим обсягом зовсім нової для нього інформації, сприяти глибокому засвоєнню початків теорії ймовірностей та комбінаторики, розвинути власні творчі здібності особистості та її індивідуальність, продуктивне мислення і творчу активність, формувати навчальні вміння, навички, зважено діяти у складних ситуаціях.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИКО- МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Роль і місце теми в шкільному курсі математики профільної школи.

Сьогодні в Україні активно ведеться робота з реформування шкільної освіти. У Державному стандарті базової та повної середньої освіти в Україні, зокрема для освітньої галузі «Математика», визначено цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя і потребам особистості. Темами «Елементи теорії множин. Комбінаторика», «Початки теорії ймовірностей та елементи статистики» доповнено традиційні змістові лінії. Це є реальним кроком до створення умов для розвитку одного із спеціальних і соціально важливих типів мислення — комбінаторного, необхідного сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення та нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві. [4, 84с.]

Актуальність елементів комбінаторики для шкільного курсу математики визначено математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм, підручників. Значно збільшилась увага до комбінаторики на сторінках методичних видань, відбувається становлення методичного досвіду формування комбінаторних уявлень, починаючи з початкової школи Згідно з концепцією математичної освіти 11-річної школи в 5 класі передбачено розв'язування комбінаторних задач. В 11 класі за чинною програмою для загальноосвітніх навчальних закладів темі «Комбінаторика» приділяється 10 годин. Учні мають ознайомитися з поняттям множини, поняттями перестановки, розміщення, комбінації, навчитися розрізняти види сполук і розв'язувати нескладні комбінаторні задачі. У класах із поглибленим вивченням математики комбінаторику включено в програми з 8 по 11 клас.

Провідною метою вивчення комбінаторики є формування комбінаторного мислення як важливого компонента мислення сучасної людини. Розвиток комбінаторного мислення відбувається в процесі активної розумової діяльності учнів у напрямі пошуку різних способів перелічування об'єктів дослідження.

Основними його характеристиками є: організація цілеспрямованого перебору певним чином обмеженого кола можливостей; універсальність ; (незалежність від конкретного математичного матеріалу; гнучкість - зміна внутрішнього плану дій як у процесі пошуку і розв'язування задачі, так і в процесі самого розв'язування). Комбінаторне мислення спирається на критерії вибіркового пошуку, дає змогу вирішувати складні, невизначені проблемні ситуації; допомагає перебирати різноманітні стратегії та обирати найкращий напрям розв'язування проблеми.

Психологічно обумовлений поділ вивчення комбінаторики.

Психологічно обумовленим є поділ вивчення комбінаторики на три етапи.

I. Побудова та використання різних наочних комбінаторних моделей відповідно до змісту задачі (1-4 класи).

II. Введення основних понять комбінаторики, вивчення правил додавання і множення (5-9 класи).

III. Вивчення основних формул комбінаторики та застосування їх до розв'язування задач різних рівнів складності (11 клас, 8-9 класи з поглибленим вивченням математики).

Тематичне планування для 11 класу

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми

в 11 класах рівня стандарту.

№ з\п	**Тема навчального заняття**	**К-сть годин**
1.	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2.	Перестановки, розміщення, комбінації.	1
3.	Ймовірність події.	1
4.	Випадкова подія. Відносна частота події.	1
5.	Обчислення імовірності події за допомогою формул комбінаторики.	1

6.	Розв’язування задач.	1
7.	Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана,середнє значення.	1
8.	Графічне подання інформації про вибірку.	1
9.	Розв’язування задач.	1
10.	Контрольна робота .	1

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми в 11 класах академічного рівня.

№ з\п	**Тема навчального заняття**	**К-сть годин**
1	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2	Комбінаторні правила суми та добутку (Перестановки, розміщення, комбінації)	1
3	Перестановки, розміщення, комбінації. Самостійна робота.	1
4	Випадкова подія. Відносна частота події.	1
5	Ймовірність події.	1
6	Ймовірність події.	1
7	Використання комбінаторних схем для обчислення ймовірності.	1
8	Розв'язування задач на обчислення ймовірностей. Самостійна робота.	1
9	Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана,середнє значення.	1
10	Графічне подання інформації про вибірку.	1
11	Узагальнення знань, умінь і навичок.	1
12	Контрольна робота.	1

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми
в 11 класах з поглибленим вивченням математики.

№ з\п	Тема навчального заняття	К-сть годин
1	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2	Перестановки, розміщення, комбінації.	1
3	Перестановки, розміщення, комбінації.	1
4	Випадкова подія та випадковий досвід. Відносна частота події.	1
5	Частота та ймовірність випадкової події.	1
6	Частота та ймовірність випадкової події.	1
7	Частота та ймовірність випадкової події.	1
8	Частота та ймовірність випадкової події.	1
9	Класичне означення ймовірності.	1
10	Класичне означення ймовірності.	1
11	Використання комбінаторних схем для обчислення ймовірності.	1
12	Розв’язування задач на обчислення ймовірностей.	1
13	Операції з випадковими подіями.	1
14	Операції з випадковими подіями.	1
15	Операції з випадковими подіями.	1
16	Операції з випадковими подіями.	1
17	Геометрична ймовірність.	1
18	Геометрична ймовірність.	1
19	Графічне подання інформації про вибірку.	1
20	Поняття про статистику. Генеральна сукупність і вибірка. Вибіркові характеристики.	1
21	Статистичний аналіз даних.	1

22	Статистичний аналіз даних.	1
23	Статистичний аналіз даних.	1
24	Розв’язування типових вправ.	1
25	Контрольна робота.	1

1.2. Пропедевтика вивчення даних тем в учнів основної школи

Методику пропедевтичної діяльності учнів слід будувати з урахуванням психологічних особливостей дітей даного віку і спрямовувати на розвиток їх мислення. Основні методичні орієнтири навчання учнів початкової школи комбінаторної діяльності полягають у такому:

- провідною метою є не навчання учнів розв'язуванню задач певного типу, а формування комбінаторного мислення;
- необхідно постійно варіювати умови здійснення комбінаторних міркувань;
- методика навчання розв'язуванню комбінаторних задач повинна будуватися з урахуванням того, що дітям притаманна своя, поки ще не досконала логіка міркувань, не можна відкидати її, нав'язувати «дорослі» способи розв’язування задач;
- у процесі навчання розглядаються різні можливості здійснення перебору при розв'язуванні комбінаторних задач, в учня є вибір шляхів і засобів розв'язування задачі, він може діяти в даній ситуації згідно зі своїми особливостями;
- у навчанні розв'язуванню комбінаторних задач зберігається етапність, основний напрям роботи - це перехід учнів від здійснення випадкового перебору варіантів до проведення системного, спочатку без застосування засобів його організації, потім за їх допомогою. [10, 27с.]

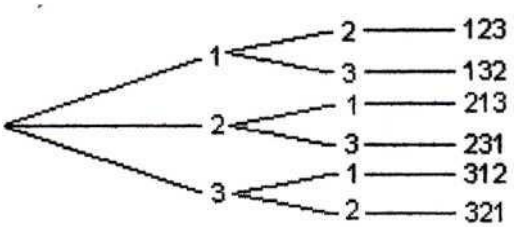
Пропедевтика елементів комбінаторики. З метою пропедевтики вивчення елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей і вступу до статистики відповідний матеріал можна включати в курс математики, починаючи з 5 класу.

Розглянемо конкретні приклади.

Під час вивчення теми «Натуральні числа» (5 клас) можна запропонувати учням для розв'язування деякі комбінаторні задачі на перестановки та розміщення й обчислення їх кількості без використання відповідних термінів і формул. Розв'язуючи такі задачі, потрібно звернути увагу на утворення різних перестановок і розміщень із заданої кількості елементів, навчити підраховувати їх кількість без використання готових формул. У цьому разі зручно застосовувати графи.

Задача 1. Запишіть усі трицифрові числа, які можна утворити за допомогою цифр 1, 2, 3, не повторюючи їх у записі числа. Скільки таких чисел утворилось

Розв'язання. Побудуємо таку схему (граф).



Побудову схеми (графа) слід супроводжувати такими поясненнями:

1) на першому місці ми можемо записати будь-яку із трьох заданих цифр;

2) на другому місці ми можемо записати тільки одну з двох цифр, що залишилися після того, як ми записали першу цифру;

3) на третьому місці записуємо ту цифру, що залишилася після запису перших двох. За допомогою такої схеми (графа) ми записали всі можливі числа і тепер легко підрахувати, що їх 6.

Задача 2. Скільки трицифрових (чотирицифрових) чисел можна записати за допомогою цифр 3, 4, 5 (6), не повторюючи цифри в записі числа? Дати відповідь, не виписуючи всі ці числа.

Розв'язання. На перше місце можна записати будь-яку із заданих цифр, тобто є три (чотири) різні можливості. На друге місце можна записати вже будь-

яку з цифр, що залишилися, тобто є дві (три) можливості. Кожна перша цифра може комбінуватися з будь-якою цифрою, що міститься на другому місці. Тому загальна кількість різних способів запису двох цифр 3•2 = 6 (4•3 = 12). Далі зрозуміло, що на третє місце можна записати вже тільки одну цифру (одну з двох цифр), що залишились, тому для трьох цифр кількість способів 3•2•1 = 6 (4•3•2 = 24). Аналогічно для останньої, четвертої цифри, є тільки один спосіб зайняти місце в записі числа і загальна кількість таких чисел становитиме 4•3•2•1 = 24.

Задача 3. Як зміниться відповідь до задачі 2, якщо цифру 3 замінити на цифру 0? Відповідь пояснити.

Відповідь. Оскільки число не може починатися з цифри 0, то загальна кількість утворених чисел буде 2•2• 1=4 (3•3•2• 1 = 18).

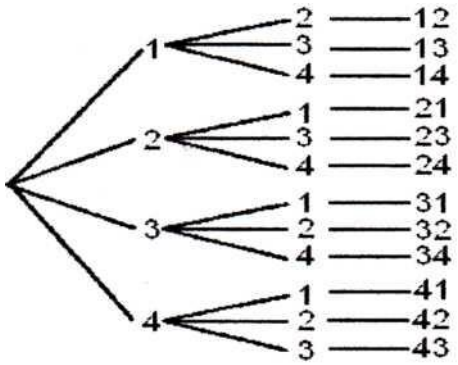
Після розв'язування цих або подібних задач можна зробити деякі узагальнення. Зокрема, ознайомити учнів з комбінаторним правилом множення, яке можна сформулювати так.

Якщо деякий об'єкт А можна вибрати т способами, а після цього інший об'єкт В можна вибрати п способами, то пари А і В можна вибрати т • п способами.

Потім ввести поняття перестановки і формулу для обчислення їх кількості.

Задача 4. Скільки двоцифрових чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, не повторюючи їх у записі числа?

Розв'язання. І спосіб. Знову використаємо граф. Побудову графа супроводжуємо поясненнями, аналогічними поясненням у задачі 1.



ІІ спосіб. Підрахунок кількості таких чисел можна виконати в інший спосіб. На перше місце можна записати будь-яку з чотирьох цифр — усього

маємо чотири можливості.

На друге місце - будь-яку з трьох цифр, що залишилися, отже, маємо три можливості.

Будь-яка цифра, що міститься на першому місці, може комбінуватися з будь-якою цифрою на другому місці. Тому загальна кількість різних способів становить 4•3 =12. Якщо учнів вже ознайомили з комбінаторним правилом множення, можна відразу зробити висновок про кількість чисел за сформульованим правилом. [5, 36с.]

Задача 5. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 4, 7, не повторюючи цифри в записі числа? Як зміниться відповідь, якщо замість цифри 7 взяти цифру 0?

Розв'язання. 1) міркуючи як у задачі 4, отримаємо, що загальна кількість чисел 4•3•2 = 24;

2) якщо одна з цифр 0, то на перше місце можна записати тільки одну з трьох цифр, і тоді загальна кількість чисел 3•3•2 = 18.

Після розв'язання задач 4 і 5 знову можна зробити деякі узагальнення. Потрібно звернути увагу учнів, що, на відміну від задач 1 —3, в задачах 4 і 5 у записі чисел цифр було менше, ніж пропонувалося в умові задачі, але в усіх задачах істотним був порядок запису цифр. Після цього можна ввести поняття розміщення зn по m елементів і записати формулу для обчислення кількості розміщень

$$A_n^m = n(n-1)\bullet\ldots\bullet(n-m+1).$$

Для того щоб в учнів не сформувалася думка, що такі задачі можна розглядати тільки з числами, потрібно розглянути інші задачі.

Задача 6. Вінні-Пух, П'ятачок і Сова збиралися на день народження до Вислючка Іа і почали вирішувати, в якому порядку вони вручатимуть подарунки. Скільки можливих варіантів у них є?

Відповідь. 6.

Задача 7. Мама Коза пішла за молоком, а семеро козенят почали гратися в «потяг». Проте відразу засперечалися, в якому порядку їм «їхати». Тоді вони

вирішили перепробувати всі можливі випадки. Цікаво, скільки часу вони витратять, якщо кожний новий «потяг» буде «їздити» хоча б одну хвилину? Відповідь. 84год.

Потреба пропедевтики вивчення початків теорії ймовірностей в основній школі не викликає сумніву. У 5-6 класах є можливість готувати учнів до ознайомлення з класичним означенням імовірності, теоремами про додавання і множення ймовірностей. На перших етапах навчання достатньо пояснити учням поняття випадкової події як такої, що може відбутися або не відбутися під час деякого випробування, а ймовірність події розглядати саме як можливість, шанс. Причому, звертаючись до життєвого досвіду проведення й участі у різноманітних іграх і жеребкуваннях, можна говорити про більш або менш можливі події, неможливі та вірогідні події. Так, після вивчення у 5 класі звичайних дробів можна один урок присвятити темі «Звичайні дроби та підрахунок шансів на успіх», на якому ознайомити учнів з поняттям події та її ймовірності під час розв’язування задач на підрахунок шансів на виграш.

Задача 1. Підкинемо гральний кубик. Ти виграєш, якщо на верхній грані кубика випаде 6 очок. Який у тебе шанс виграти з одного підкидання?

Розв'язання. Під час підкидання кубика на верхній грані може випасти або 1, або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок. Тобто існує 6 різних можливостей появи певного числа очок. Виграшною є тільки одна з шести. Отже, шанс на виграш становить 1 до 6. Це можна записати так: 1:6 або 1/6. При цьому кажуть, що шанс виграти дорівнює 1/6. [5, 37с.]

Задача 2. На столі лежать два червоних і три жовтих яблука. Миколка навмання, не дивлячись, бере одне яблуко. Наталка й Іринка загадали; якщо Миколка візьме червоне яблуко, то виграє Наталка, якщо жовте - Іринка. У кого з дівчат більше шансів на виграш? Чому?

Розв'язання. Миколка може взяти будь-яке одне з п'яти яблук, тобто має всього п'ять різних можливостей взяти яблуко. У двох з них взяте яблуко може бути червоним, а в трьох - жовтим. Отже, у Наталки шанс виграти дорівнює 2/5, а у Іринки - 3/5.

В обох задачах ішлося про деяку подію. У кожному випадку відбувалося певне випробування — підкидався гральний кубик, навмання бралося яблуко. Кожне з випробувань мало деяку кількість наслідків, результатів випробування, а подія, яка розглядалася («випало 6 очок», «Миколка взяв червоне яблуко», «Миколка взяв жовте яблуко»), могла відбутися, а могла і не відбутися.

У такому разі кажуть, що подію, яка може відбутися або не відбутися під час деякого випробування, називають випадковою.

Крім того, ставилося завдання оцінити можливість настання тієї чи іншої події. Французький математик Б. Паскаль, який одним із перших почав досліджувати подібні задачі, назвав чисельну оцінку можливості того, що певна подія відбудеться, імовірністю.

Події, як правило, позначають великими латинськими буквами *A, B, C* тощо.

Імовірність події позначають буквами *P* або *p.* Отже, в задачі 1 імовірність події «випало б очок» дорівнює 1/6, або $p = 1/6$.

У задачі 2 подія *A* — «Миколка взяв червоне яблуко» і $P(A) = 2/5$, подія В — «Миколка взяв жовте яблуко» і $P(B) = 3/5$.

Можемо зробити висновок, що ймовірність деякої події можна записати дробом, знаменник якого - кількість усіх можливих наслідків деякого випробування (досліду), а чисельник - кількість наслідків, які сприяють здійсненню цієї події.

Якщо *A* - деяка подія, то

$$P(A) = \frac{\text{Кількість наслідків випробування, які сприяють події } A}{\text{Кількість усіх наслідків випробування}}$$

Зрозуміло, що під час проведення того самого випробування одні з подій більш можливі (мають більшу ймовірність), інші - менш можливі (мають меншу ймовірність). Так, у задачі 2 подія «Миколка взяв червоне яблуко» менш можлива, ніж подія «Миколка взяв жовте яблуко». Крім того, існують події, які завжди відбудуться внаслідок випробування, а є такі, що ніколи не відбудуться. Наприклад, під час підкидання грального кубика подія «випало більше ніж 6 очок» жодного разу відбутися не може, а подія «випало число від 1 до 6» завжди

відбудеться.

Таку подію, яка обов'язково відбудеться внаслідок проведення деякого випробування, називають ***вірогідною.***

Подію, яка ніколи не відбудеться внаслідок проведення деякого випробування, називають ***неможливою.***

Отже, подія «випало більше ніж 6 очок» є неможливою, подія «випало число від 1 до 6» є вірогідною.

Задача 3. Визначити для кожного випробування, які з наведених подій є випадковими, вірогідними, неможливими:

а) підкидають гральний кубик і фіксують кількість очок, що випали на верхній грані:

подія А — «випало число 3»;

подія *В* — «випало число, менше ніж 7»;

подія С — «випало парне число»;

подія I) — «випало число, що ділиться на 7»;

подія *Е* — «випало число, менше ніж 5»;

б) у мішечку 3 жовтих, 4 синіх і 5 зелених кульок. Навмання виймають одну кульку:

подія А — «витягнуто зелену кульку»; подія В — «витягнуто синю кульку»; подія С — «витягнуто білу кульку»; подія 2) — «витягнуто кольорову кульку»; подія *Е* — «витягнуто жовту або синю кульку».

Відповідь: а) події *А, С, Е* — випадкові, *В* — вірогідна, D— неможлива; б) події *А, В, Е* — випадкові, D — вірогідна, С — неможлива.

Задача 4. Обчислити ймовірності подій, зазначених у задачі 3.

Розв'язання: а) у цьому випробуванні всього 6 усіх можливих наслідків.

Події *А* — «випало число 3» — сприяє тільки один наслідок випробування, отже, *Р(А) = 1/6*;

події *В* — «випало число, менше ніж 7» — сприяють усі 6 наслідків випробування, отже, *Р(В) =6/6=1;*

події С — «випало парне число» — сприяють три наслідки: випало або

число 2, або число 4, або число 6, отже, *P(C)* = 3/6=1/2;

для події D — «випало число, що ділиться на 7» — немає жодного наслідку, який би сприяв тому, щоб вона відбулася, отже, *P(D)* - 0/6 = 0;

події *E* — «випало число, менше ніж 5» — сприяє чотири наслідки: випало або число 1, або число 2, або число 3, або число 4, отже, *P(E)* = 4/6=2/3;

б) у цьому випробуванні є всього 3 + 4 + 5 = 12 усіх можливих наслідків.

Події *A* — «витягнуто зелену кульку» — сприяє 5 наслідків випробування, отже, Р(А) =5/12;

події *B* — «витягнуто синю кульку» — сприяє 4 наслідки, отже, *P(B)*= 4/12=1/3;

для події С — «витягнуто білу кульку» — немає жодного наслідку, який би сприяв тому, щоб вона відбулася, отже, *P(C) =0/12 = 0;*

події О — «витягнуто кольорову кульку» — сприяють усі 12 наслідків випробування, отже, Р(Б) = 12/12= 1;

події *E* — «витягнуто жовту або синю кульку» — сприяють 3 + 4 = 7 наслідків, отже, *P(E) = 7/12.*

Після розв'язування задачі 4 можна зробити такі висновки.

Оскільки вірогідній події сприяють усі наслідки випробування, то її ймовірність дорівнює 1.

Для неможливої події немає жодного наслідку, який би сприяв її появі, отже, ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Імовірність будь-якої випадкової події завжди більша за 0 і менша за 1. Наведені приклади не тільки готують учнів до сприйняття класичного означення ймовірності, а й показують одне з можливих застосувань поняття звичайного дробу.

Вивчаючи у 6 класі дії над звичайними дробами можна розглянути задачі на додавання та множення ймовірностей.

Задача 5. У ящику є 3 жовтих, 4 червоних і 5 зелених кульок. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута з ящика кулька буде жовтого або червоного кольору.

Перш ніж розв'язувати цю задачу, слід повторити деякі відомості, з якими учнів ознайомлювали у 5 класі. Це може відбуватися, наприклад, так.

Учитель: У чому полягає випробування, про яке йдеться у задачі?

Учень: Навмання витягують кульку з ящика.

Учитель: Скільки всього кульок у ящику?

Учень: 12.

Учитель: Отже, можна витягнути будь-яку з 12 кульок. Тобто є 12 різних наслідків цього випробування. При цьому, наприклад, може відбутися подія «витягнуто жовту кульку». Як оцінити можливість (імовірність) здійснення такої події? Давайте пригадаємо, як ми робили це у 5 класі (бажано, щоб до уроку був підготовлений плакат, який учитель може використати під час бесіди).

А — подія, *Р(А)* — ймовірність події *А:*

$P(A) = m/n$,

де *n* — кількість усіх наслідків випробування;

m — кількість наслідків випробування, які сприяють події *А***.**

Позначимо подію «витягнуто жовту кульку» літерою *Ж***.** Скільки наслідків випробування сприяє тому, щоб подія *Ж* відбулася? Учень: 3 наслідки. Учитель: Тоді чому дорівнює *Р(Ж*)?

Учень: Р(Ж) = 3/12 =1/4.

Аналогічно учні обчислюють імовірність появи червоної, зеленої кульок. *Розв'язання.* Випробування полягає у витягуванні однієї кульки з ящика. Нехай подія *А* — «витягнуто жовту або червону кульку». Оскільки все одно яку кульку, жовту або червону, витягнуто і при цьому кулька не може бути водночас жовтою і червоною, то кількість наслідків випробування, що сприяють появі жовтої або червоної кульки, становить 3 + 4 = 7. Кількість усіх можливих наслідків випробування 12, Тоді *Р(А) = 7/12.*

Далі пропонуємо учням записати ймовірність події *А* у такому вигляді:

$$P(А) = P(Ж \text{ або } Ч) = 7/12=(3+4)/12 =3/12+4/12=1/4+1/3 = P(Ж) + P(Ч),$$

тобто $P(Ж \text{ або } Ч) = P(Ж) + P(Ч)$.

Отже, для обчислення ймовірності події «витягнуто жовту або червону

кульку» можна обчислити ймовірності подій «витягнуто жовту кульку» і «витягнуто червону кульку», а потім їх додати.

Тут використано одне з основних правил обчислення ймовірностей — правило додавання ймовірностей.

Якщо дві події, які не можуть відбутися одночасно, то ймовірність того, що відбудеться одна з двох подій (все одно яка), дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Після узагальнення слід повернутися до задачі 5 і знайти ймовірність того, що навмання витягнута з ящика кулька буде жовтою або зеленою, червоною або зеленою.

Задача 6. В одній коробці є 4 синіх і 5 червоних олівців, а у другій **— 3** синіх і 7 червоних олівців. Навмання з кожної коробки виймають по одному олівцю. Чому дорівнює ймовірність того, що обидва вийняті олівці будуть синіми?

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що з кожної коробки виймають по одному олівцю. Нехай подія A — «обидва олівці сині». Визначимо кількість усіх можливих наслідків цього випробування і кількість наслідків, що сприяють події A. З першої коробки один олівець можна вийняти 4 + 5 = 9 різними способами. З другої коробки — 3 + **7=**10 різними способами. Кожний із 9 способів витягування олівця з першої коробки можна поєднати з кожним із 10 способів витягування олівця з другої коробки, тобто є 9•10 = 90 способів вийняти по одному олівцю з двох коробок. Отже, n = 90. Синій олівець з першої коробки можна вийняти 4 способами, з другої коробки — 3 способами, тобто є 4 •3 = 12 способів вийняти два синіх олівці. Отже, m = 12. Тоді P(A)=12/90=2/15.

Можна розглянути інше розв'язання. Нехай подія С, — «з першої коробки вийнято синій олівець», подія C_2 — «з другої коробки вийнято синій олівець». Причому подія С, не залежить від того, відбудеться чи ні подія C_2, а подія C_2 не залежить від того, відбудеться чи ні подія C_1. У такому випадку кажуть, що ЦІ події незалежні. Обчислимо ймовірності цих подій: $P(C_1) = 4/9$ і $P(C_2) = 3/10$. Далі пропонуємо учням записати ймовірність події A у такому вигляді: $P(A)$ =$P(C_1$ і $C_2) = 12/90=(4•3)/(9/10)=4/9•3/10= P(C_1)•P(C_2)$, тобто $P(C_1$ і $C_2) = P(C_1)•P(C_2)$.

Отже, для обчислення ймовірності події «обидва олівці сині» можна обчислити ймовірність подій «з першої коробки вийнято синій олівець» і «з другої коробки вийнято синій олівець», а потім їх перемножити.

Під час розв'язування було використане ще одне правило обчислення ймовірностей — правило множення. Його можна сформулювати так.

Нехай маємо дві події, здійснення кожної з яких не залежить одна від одної. Імовірність того, що дві незалежні події відбудуться одночасно, дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Після узагальнення слід повернутися до задачі 6 і знайти ймовірність того, що навмання витягнуті по одному олівці будуть червоними. Якщо поставити вимогу знайти ймовірність того, що два олівці будуть різних кольорів, то під час розв'язування можна продемонструвати використання обох правил. Проте це завдання набагато складніше від попередніх.

1.3. Методичні особливості вивчення теми

Заради чого необхідно викладати теорію ймовірностей? На перший погляд здається, що точну відповідь на це питання можна дати лише в тому випадку, якщо відомо, в якій формі і на якому рівні здійснюється викладання теорії ймовірностей. Тим паче, деякі загальні твердження на цю тему можливо висловити без яких би там не було уточнюючих припущень. Мається на увазі головні цілі викладання теорії ймовірностей. Саме їх, на мою думку, повинен ставити перед собою кожний, хто викладає будь-який розділ теорії ймовірностей, хоча наголоси, зрозуміло, можуть варіюватися залежно від типу навчального закладу. Отже, я вважаю, що при виборі головних цілей будь-якого курсу теорії ймовірностей належить керуватися такими мотивами:

А) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів.

Б) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що її висновки знаходять застосування у повсякденному житті, науці, техніці тощо.

В) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона має важливе,

ні з чим незрівнянне значення для математичної освіти.

Прокоментуємо коротко ці аргументи.

А) Ознайомлення з основними поняттями теорії ймовірностей необхідне для того, щоб ми могли пізнавати оточуючий світ і створювати одну з науково обгрунтованих картин цього світу. Викладання будь-якого розділу математики благодатно позначається на розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює їм навички ясного логічного мислення, що оперує чітко визначеними поняттями. Все сказане про викладання будь-якого розділу математики в повному обсязі стосується і викладання теорії ймовірностей, але навчання «законам випадку» грає дещо більшу роль і виходить за межі звичайного. Слухаючи курс теорії ймовірностей, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли необхідно мати справу з невизначеністю (а такі випадки виникають на практиці).

Вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер учнів, наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, що знаходяться на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка би біда не гранилась з ними, вони схильні приписувати її чиємусь злому наміру, навіть якщо подібні твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким поняттям, як випадковість. Викладання теорії ймовірностей може принести безперечну користь, оскільки дозволяє остаточно порвати з пережитками магічного мислення кам'яного століття. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш доброзичливими і толерантними до оточуючих, і, отже, легше вписуються в життя суспільства.

Б) У повсякденному житті нам постійно доводиться зустрічатися з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень. Гарним прикладом застосування теорії ймовірностей у повсякденному житті може слугувати вибір найбільш доцільної форми страхування. При плануванні сімейного бюджету або

подорожі за кордон часто доводиться оцінювати витрати, які, у певній мірі, мають випадковий характер. Ці приклади показують, що ознайомлення на тому чи іншому рівні із законами випадку необхідні кожному.

Застосування теорії ймовірностей у науці, техніці, економіці тощо набуває раз у раз зростаючого значення. Саме тому у все більшого числа людей в процесі роботи виникає необхідність у вивченні теорії ймовірностей. Зрозуміло, обсяг курсу теорії ймовірностей залежить від типу навчального закладу. Але не треба забувати и про Інше: сучасна освічена людина, незалежно від професії і роду діяльності, повинна мати принаймні загальне уявлення про те, що таке атомна енергія, радіоактивність, генетика і т. ін. Перелік необхідних знань включає в себе і ознайомлення, нехай навіть суто поверхове, з найпростішими поняттями теорії ймовірностей. Нині, коли прогноз погоди містить повідомлення про ймовірність дощу завтра, кожен повинен знати, що власне це означає.

В) Вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між дійсністю і математикою, математичних моделей дійсності. Якщо в курсі математики теорія ймовірностей обминається повною мовчанкою, то в учнів складається невірне уявлення про істинний характер математики та її застосування. Люди, не знайомі з теорією ймовірностей, поділяють помилкову думку, нібито математичні методи можна застосовувати лише в тих випадках, коли йдеться про прості й точні залежності між величинами, які можна точно виміряти і обчислити. Нерідко можна почути і твердження, наче математичні методи непридатні для вивчення і опису тих або інших явищ, через те що ті «дуже складні». Подібний забобон живе в свідомості людей, які не вивчали ні математику, ні, тим паче, теорію ймовірностей. Саме ті, хто дотримується цих докорінно невірних поглядів, до недавнього часу перешкоджали (принаймні, у деяких країнах) застосуванню математичних методів в економіці, соціології, біології, психології та інших галузях науки. Не можна не згадати й про думку тих, хто вважає, що викладання теорії ймовірностей не виходить за межі програм з математики в учбових закладах середнього або нижчого рівня. Ця думка узгоджується з іншими сучасними тенденціями у викладанні математики, що

легко пояснити: її поділяють ті, хто викладає теорію ймовірностей і своєю діяльністю реалізує нові тенденції. Цілком очевидно, що викладання теорії ймовірностей спрощується, якщо учні заздалегідь ознайомлені з теорією множин або теорією булевих алгебр. З іншого боку, вивчення теорії ймовірностей дає чудову нагоду для більш ґрунтовного і глибокого ознайомлення як з теорією множин, так і з теорією булевих алгебр.

В основній масовій школі рекомендується розглянути питання «Розв'язування комбінаторних задач. Правила додавання і множення». Система комбінаторних вправ і задач для 5-7 класів відповідає тим самим умовам, що і в початковій школі, але отримує подальший розвиток: підвищується сюжетна різноманітність задач; множини складаються з більшої кількості елементів; використовуються наочні засоби організації перебору; використовуються комбінаторні правила додавання і множення.

На цьому етапі не ставиться мета введення формул і означень. Шлях до ознайомлення учнів з ідеями комбінаторики відбувається не стільки шляхом розширення теоретичного матеріалу, скільки добором задач таким чином, щоб у них для формування комбінаторних понять і правил використовувався навчальний матеріал поточних тем програми. При цьому задачі, які розв'язують з метою формування комбінаторних знань та вмінь, з одного боку, допомагають засвоєнню певної теми програми, яку вивчають, з іншого боку — ознайомлюють учнів з окремими проявами тих комбінаторних ідей, до систематичного вивчення яких учні дійдуть пізніше.

Включення до арифметичного, геометричного та алгебраїчного матеріалу математики 5-7 класів комбінаторних задач дає змогу активізувати розумову діяльність учнів. Для цих задач особливе значення має не отримання відповіді, а процес її знаходження, процес переробки вхідної інформації на вихідну. На першому місці стоїть пошук розв'язування, його реалізація і пізнавальні висновки з опрацьованої теми. В цілому процес роботи над комбінаторною задачею має явно виражений дослідницький характер, містить елементи творчості.[4, 247с.]

Сьогодні дидактики, психологи, методисти і вчителі-практики спрямовують свої зусилля на пошук шляхів максимальної активізації пізнавальної діяльності учнів і ефективного управління нею. У зв'язку з цим виникає проблема означення функції задач у навчанні, місця, ролі і цільового призначення окремих видів задачі і кожної конкретної задачі. Основні функції задач у навчанні: ***навчальна, виховна, розвивальна і контролююча.***

Навчальна функція задач спрямована на формування у школярів системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах їх засвоєння.

Виховна функція задач спрямована на формування у школярів наукового світогляду, пізнавального інтересу, навичок пізнавальної праці, екологічного, естетичного, економічного, правового, патріотичного виховання та інших позитивних властивостей і якостей особистості.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення, зокрема, логічного, просторових уявлень та уяви, на формування розумових дій і прийомів розумової діяльності, розумової активності, пізнавальної самостійності, творчості, алгоритмічної та інформаційної культури, пам’яті, уваги тощо.

Контролююча функція задач спрямована на встановлення рівнів навченості, здібності до самостійної діяльності, рівня математичного розвитку і сформованості пізнавальних інтересів.

Жодна з названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель повинен виділяти провідну функцію і при належній цільовій установці домагатися її реалізації перш за все. Кожна з основних функцій важлива в загальній системі навчання, але за останні роки особливо підкреслюється роль розвивальної функції задач, якій повинні підпорядковуватися всі інші функції. Не випадково видатні вчені Е. Резерфорд, Н. Бор, А. Ейнштейн, П, Л. Капиця, Б, М. Кедров та інші зазначали, що задача повинна не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються.

Озброєння учнів методами та способами розв'язання задач, навчання їх

самостійному пошуку розв'язань задач — одна з важливих проблем шкільної математичної освіти. Методи та способи розв'язування визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями, вміннями, засобами, які є у розпорядженні учнів на даному етапі навчання. У дослідженні психологів, дидактів і методистів за останні роки Переконливо показано, що уміння школярів розв'язувати задачі не знаходиться в пропорційній залежності від кількості розв'язаних задач. Учень може розв'язати велику кількість задач, проте якщо у нього не сформований загальний підхід до задачі, її аналізу, пошуку плану розв'язання, самостійно розв'язувати задачі він не навчиться.

Школа не може підготувати учнів до розв'язання всіх задач, з якими їм доведеться зустрічатися в майбутній практичній діяльності. Разом з тим, розв'язуючи конкретні задачі, важливо навчати школярів загальних прийомів мислення і діяльності, загальних способів підходу до будь-якої задачі, вміння шукати розв'язання в будь-якій новій ситуації.

1.4. Аналіз практики викладання теми в школі

Школа відіграє в процесі становлення особистості позитивну роль тільки тоді, коли весь процес, навчання і виховання спрямований на розвиток творчого потенціалу учня, його творчого мислення, формування творчої особистості.

Аналіз досліджень з даної проблеми свідчить, що неможливо переоцінити ту роль, яку відіграє в цьому навчання математики. При цьому математичні знання є не тільки продуктом пізнавальної діяльності, а й змістовою складовою цієї діяльності (М. П. Барболін), у ході якої й відбувається становлення творчої особистості учня; навчальний матеріал можна розглядати як потужний засіб розвитку творчого мислення.

Загальними цілями вивчення елементів теорії ймовірностей та комбінаторики є навчити учнів орієнтуватися в умовах, що мають ймовірнісний характер, та вміти застосовувати отримані знання для оцінювання реальності появи різноманітних подій навколишнього світу. Вивчення даної теми є ефективним лише за умови, що вчитель спирається на існуючу базу

математичних знань учнів, їх життєвий досвід, сформованість абстрактного мислення, здатність до узагальнень.

Аналіз досвіду викладання цієї теми в загальноосвітній школі свідчить про те, що не менш важливою є доцільна організація навчальної діяльності учнів, спрямованої при вивченні початків теорії ймовірностей на розвиток в учнів компонентів творчого мислення, формування умінь будувати математичні моделі реальних процесів. У ході роботи з учнями підтверджено ефективність використання такої схеми: усвідомлення проблеми, формулювання математичною мовою → аналіз проблеми, інтуїтивне передбачення гіпотези → пошук шляхів розв'язування, відбір або пошук необхідної інформації → розв'язування проблеми одним чи кількома способами, обґрунтований вибір з них найбільш раціонального і зручного в конкретних умовах → узагальнення і систематизація набутого в процесі розв'язування досвіду; розповсюдження знайденого алгоритму (способу, методу) на розв’язування задач певного типу.

Деякі зауваження щодо вивчення теми.

На підготовчому етапі до розв'язування задач корисно пропонувати учням наводити приклади подій вірогідних, неможливих, випадкових; протилежних подій; виявляти, в чому полягає подія, що протилежна даній і т.ін. та обґрунтовувати свої відповіді.

Для свідомої роботи розв'язування задач доцільно привчити учнів після аналізу умови та вимоги задачі встановлювати, про яку саме подію йдеться; робити висновок, чи є ця подія вірогідною, неможливою чи випадковою, що суттєво може раціоналізувати подальший процес розв’язування. Якщо в тексті задачі йдеться про декілька подій, виявляти, чи є вони сумісними (несумісними), залежними (незалежними); чи утворюють вони повну групу подій.

На другому етапі встановлюється взаємозв'язок «задача-формула», що також вимагає обґрунтування, і будується відповідна математична модель. Не зайвою є перевірка реальності отриманих результатів.

Звичайно, формулювання текстів задач можуть бути «більш прозорими» і «менш прозорими». В «більш прозорих» формулюваннях текстів задач нерідко

вже визначено, якими саме є розглядувані події (наприклад, табл. 1).

Таблиця 1

«Більш прозоре» формулювання	«Менш прозоре» формулювання
Події А і В є протилежними. Ймовірність події А дорівнює 0,34. Знайти ймовірність події В	Ймовірність виграти в лотерею дорівнює 0,34. Знайти ймовірність не виграти

«Більш прозорі» формулювання вже надають «підказку» щодо подальшого розв'язування, тому доцільно використовувати їх у класах нематематичного профілю на етапі первинного закріплення знань. Ефективнішим для підтримки зацікавленості учнів у вивченні теми, формування свідомих знань, розвитку логічного мислення учнів є використання «менш прозорих» формулювань текстів задач, задач з практичним змістом, кожна з яких є певною «розповіддю» про подію.

На мій погляд, з метою підвищення ефективності навчання учнів, з метою розвитку в них компонентів творчого мислення, доцільно пропонувати їм порівнювати розв'язування задач зі схожими, на перший погляд, умовами. Наведу приклади.

Задача1. Від школи у спартакіаді беруть участь команди футболістів, баскетболістів, дзюдоїстів. Ймовірність посісти 1-ше місце для команди футболістів 0,3; Для команди баскетболістів — 0,6; дзюдоїстів — 0,1. Знайти ймовірність того, що:

а) 1-ше місце посядуть команда футболістів і команда баскетболістів;

б) 1 -ше місце посяде тільки одна з команд — або футболістів, або баскетболістів.

Задача 2. На 1-ше місце у змаганнях з футболу претендують три команди — команди шкіл *A, B, C.* Ймовірність посісти 1-ше місце для команди футболістів школи *A* — 0,3; для команди футболістів школи *B* — 0,6; для

команди футболістів школи С — 0,1. За умовами змагань відразу дві команди не можуть посісти 1-ше місце. Знайти ймовірність того, що:

а) 1 -ше місце посядуть і команда футболістів школи *А***,** і команда футболістів школи *В;*

б) 1 -ше місце посяде одна з футбольних команд — або школи *А,* або школи *В.*

Розв'язання задачі 1

Подія А — 1-ше місце посяде команда футболістів. *Р(А)* =0,3.

Подія В — 1-ше місце посяде команда баскетболістів. *Р(В)*= 0,6.

Подія С — 1-ше місце посяде команда дзюдоїстів. *Р(С)*= 0,1**.**

Події *А, В, С є* незалежними; поява однієї з них не виключає можливості появи іншої і не залежить від появи іншої.

а) Можна застосувати формулу добутку незалежних подій:

Р(К)= Р(А) • Р(В) = 0,3 • 0,6.

б) Встановлюємо відповідність: «або» знак → «+», «і» → знак « • ».

За умовою 1-ше місце може посісти тільки одна з команд — або команда футболістів (тоді команда баскетболістів не посяде 1-го місця), або команда баскетболістів (тоді команда футболістів не посяде 1-го місця). Переформулюємо: 1-ше місце посяде команда футболістів ***і*** команда баскетболістів не посяде 1-го місця [0,3 • (1 - 0,6)], або [+] 1-ше місце посяде команда баскетболістів і команда футболістів не посяде 1-го місця [(1- 0,3) • 0,6]. Тобто: *Р(М)* = 0,3 • (1- 0,6) + (1- 0,3) • 0,6 = 0,3•0,4+ 0,7•0,6.

Розв'язання задачі 2

Подія А — 1 -ше місце посяде команда школи *А. Р(А)* = 0,3.

Подія В — 1 -ше місце посяде команда школи *В. Р(В)*=0,6.

Подія С— 1-ше місце посяде команда школи С. *Р(С)*=0,1.

Події *А, В, С є* несумісними (тому що за умовами змагань 1-ше місце може посісти тільки одна з команд); з цих трьох подій одна обов'язково відбудеться. Події *А, В* і С утворюють повну групу подій.

а) Події *А* і *В* є несумісними, тому подія *К,* яка полягає в одночасній

появі

цих двох подій, є неможливою. $P(K)=0$.

б) Події *A і B є* несумісними, тому можна застосувати формулу ймовірності суми двох несумісних подій:$P(M)=P(A)+P(B)= 0,3 + 0,6= 0,9$. Або, знаючи, що події *A, B* і С утворюють повну групу подій, можна скористатися формулою: $P(A)+ P(B) +P(C) = 1$, звідки $P(A)+P(B) = 1 - P(C) = 1 - 0,1 = 0,9$. Отже, учні більш свідомо застосовуватимуть теоретичні знання до розв'язування задач.

РОЗДІЛ 2 .
МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «КОМБІНАТОРИКА. ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

2.1 Методика навчання комбінаторики. Мета вивчення теми. Методика формування основних понять, доведення теорем. Розв'язування комбінаторних задач з урахуванням вікових особливостей учнів

У загальноосвітній школі вивчають сполуки без повторень. Програмою з математики для 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів елементи комбінаторики передбачено вивчати упродовж 10 год в 11 класі.

Мета вивчення теми

Метою вивчення теми є ввести поняття множини та її елементів, ознайомити учнів з видами множини й операціями над ними; навчити виконувати зазначені операції; ввести означення впорядкованої множини, перестановки, розміщення та комбінації; довести формули для обчислення кількості кожного виду сполук; навчити розрізняти види сполук і розв'язувати комбінаторні задачі.

Після вивчення теми учні мають дістати уявлення про множину та її елементи, порожню множину, способи задання множин, підмножину даної множини; знати означення операцій над множинами, доповнення множини, впорядкованої множини, перестановки, розміщення і комбінації та формули для обчислення їх кількості; уміти задавати множини, утворювати підмножини даної множини, знаходити результати операцій над множинами, доповнення множини, розрізняти види сполук і знаходити їх кількість за відповідними формулами, розв'язувати нескладні комбінаторні задачі.[1, 51с.]

Методика формування основних понять У методиці навчання математики та в навчально-методичній літературі існують різні підходи до вивчення різних видів сполук залежно від їх трактування, послідовності запровадження і доведення формул.

У підручнику А. П. Кисельова спочатку вводиться означення сполук. ***Означення 1.*** Різні групи, складені з будь-яких предметів, що відрізняються одна

від одної або порядком цих предметів, або самими предметами, називають взагалі сполуками.

Після цього вводиться, спочатку описово на прикладі, а потім на рівні означення поняття розміщень як сполук, що відрізняються одна від одної або предметами *ab* і *ac,* або порядком предметів, наприклад *ab* і *ba,* якщо кількість предметів у них та сама.

Означення в загальному вигляді формулюють так.

Означення 2. Розміщеннями з *n* елементів по *m* називають такі сполуки, з яких кожна містить *m* елементів, узятих із даних *n* елементів, і відрізняються одна від одної або елементами, або порядком елементів.

Поняття перестановок запроваджується через поняття розміщення як окремий випадок розміщення, коли розміщення з *n* елементів узято по ***n.*** Отже, різняться вони тільки порядком елементів.

Такі розміщення називають перестановками. Спеціально означення не формулюють.

Поняття комбінації також розглядається за допомогою поняття розміщень.

Означення 3. Якщо з усіх розміщень, що можна скласти з *n* елементів по *m,* вибрати тільки ті, які відрізняються одне від одного принаймні одним елементом, то матимемо сполуки, що називають комбінаціями.

Далі наводять приклади комбінацій для чотирьох елементів *a, b, c, d,* взятих по три елементи. Спеціально визначення комбінацій також не формулюють.

Поняттю комбінацій передує вивчення поняття підмножини. Розглядається приклад множини *A = {x;y;z},* утворюються всі підмножини множини *A* з одного, двох, трьох елементів. Потім вводиться таке поняття (означення) кількості комбінацій.

Означення 4. Кількість підмножин, що складаються з *m* елементів, які містяться в множині А з п елементів, називають кількістю комбінацій з *n* по *m* і позначають C_n^m.

Для введення поняття розміщення спочатку розв'язують таку задачу: скількома способами можна скласти денний розклад занять з п'яти різних уроків,

якщо в класі вивчають десять різних предметів?

Означення формулюють так.

Означення 5. Будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини M, яка містить m елементів, де $m>n$, називають розміщенням з m елементів по n.

Одразу потрібно роз'яснити характеристичні ознаки розміщень: 1) предмети і місце різні; 2) $0 < n < m$; 3) усі я місць зайняті; 4) порядок елементів важливий.

Перш ніж вводити поняття комбінації також слід розв'язати таку задачу: скількома способами можна призначити чотирьох вартових з тридцяти солдат?

Очевидно, що в цій задачі будь-які групи вартових можуть відрізнятися лише складом солдат у них. Порядок у групі неістотний. Тут маємо справу з різними підмножинами з чотирьох елементів заданої множини, яка складається з 30 елементів.

Далі формулюють означення.

Означення 6. Будь-яку підмножину з n елементів заданої множини M, яка містить m елементів, називають комбінацією з m елементів по n, а кількість їх позначають C_n^m.

Характеристичні ознаки комбінацій такі: 1) предмети різні; 2) $0 < n < m$; 3) порядок вибору елементів не має значення.

Доведення основних формул.

Підхід до доведення формул комбінаторики певною мірою залежить від послідовності вивчення окремих видів сполук і попереднього ознайомлення учнів з методами доведень, зокрема з методом математичної індукції. На цей час учні мають уміти застосовувати метод математичної індукції, який розглядався під час вивчення теми «Похідна». За умов роботи за підручником Шкіль М.І., Слєпкань З.І. метод математичної індукції вводять раніше (під час вивчення похідної функції $y = x^n$).

У цьому підручнику формула кількості перестановок запроваджується в такий спосіб: спочатку за допомогою індуктивних міркувань на конкретних

прикладах обчислення P_1 ,P_2 ,P_3 і P_4 учнів підводять до висновку, що

$$P_n = 1•2•3•…•(n-1)n=n!$$

Після цього формулу доводять методом математичної індукції.

За підручником перестановки вивчають після розміщень, отже, формулу P_m отримують з формули $\boldsymbol{A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}}$ методом безпосередньої підстановки в ліву частину $к=m$ з урахуванням того, що за означенням 0!=1 і перестановка безповторень з m елементів — це те саме, що й розміщення з n елементів по m елементів.

Формулу кількості розміщень вивчають після перестановок, і на прикладі вже розв'язаної задачі про складання розкладу на день з десяти предметів по п'ять предметів A_{10}^1=10, отримують у результаті індуктивних міркувань:

$$A_{10}^1=10,\ A_{10}^2=10•9,\ A_{10}^4=10•9•8•\ 7,\ A_{10}^5=10=10•9•8•7•6,$$

$$A_n^m=10 =n(n-1)(n-2)•…•(n-(m-1))=n(n-1)(n-2)•…•(n-m+1).$$

Далі правильність формули доводять методом математичної індукції.

Розв'язування комбінаторних задач

Традиційно розв'язування простіших комбінаторних задач зводиться до визначення виду сполуки, про яку йдеться в задачі, і застосування відповідної формули для обчислення кількості цих сполук. Тут основна трудність, що виникає в учнів, — саме визначення виду сполуки.

Тому перед розв'язуванням задач на обчислення кількості різних видів сполук доцільно запропонувати учням таку систему запитань, що сприятиме правильному визначенню виду сполуки, про яку йдеться в умові задачі.

Задача 1. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що жодна цифра в записі числа не повторюється?

Розв'язання. Для числа істотним є порядок запису цифр. При цьому всі задані цифри входять до запису числа. Отже, маємо справу з перестановками з п'яти елементів. їх кількість P_5 =5! = 120.

Задача 2. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за

допомогою цифр 1, 2, 3,4, 5 за умови, що жодна цифра в записі числа не повторюється?

Розв'язання. Тут також істотним є порядок запису цифр, але при цьому не всі цифри, а тільки які-небудь три з п'яти входять до запису числа. Отже, маємо справу з розміщеннями з п'яти елементів по три елементи. їх кількість A =5•4•3 = 60.[15]

Задача 3. З п'яти учнів трьох необхідно відправити на чергування до їдальні. Скількома способами можна вибрати трьох чергових?

Розв'язання. У виборі учнів для чергування порядок вибору є неістотним, адже однаково в якому порядку вчитель викличе чергових: «Петренко, Сидоренко й Іваненко» або «Сидоренко, Петренко й Іваненко». Це та сама трійка чергових. При цьому в кожному виборі задіяні три з п'ятьох учнів.

Отже, маємо справу з комбінаціями трьох елементів із п'яти. їх кількість

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \bullet 2!} = 10$$

Проте такий підхід має істотний недолік. Учні, прочитавши умову задачі, намагаються «впізнати» сполуку, записати «потрібну» формулу і вже автоматично виконують обчислення. При цьому вони не прагнуть до кінця зрозуміти сюжет, про який Ідеться у задачі, спробувати його змоделювати.

Щоб уникнути цього, на початку слід розв'язати кілька задач на застосування комбінаторних правил додавання та множення:

якщо для деякого об'єкта A існує m способів вибору, а для іншого об'єкта B - n способів, то вибрати A або B можна $m + n$ способами;

якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а після цього інший об'єкт B можна вибрати n способами, то пари A і B можна вибрати mn способами.

Задача 4. Ідучи на тренування, спортсмен одягає або майку, або футболку. Скільки він має варіантів вибору майки чи футболки, якщо його мама випрала три майки і чотири футболки?

Розв'язання. За правилом додавання 3 + 4 = 7. Проілюструвати це можна

так. Припустимо, що у шафі на одній поличці лежать три майки, а на другій - чотири футболки. Довільно з будь-якої полички беремо тільки одну річ. З першої полички взяти одну річ можна трьома різними способами, а з другої - чотирма способами, тоді взяти одну будь-яку річ можна 3 + 4 = 7 різними способами. [1, 95с.]

Задача 5. Цех із виготовлення капелюхів розпочав випуск трьох нових моделей, для яких було закуплено фетр чотирьох кольорів. Скільки видів різних капелюхів може виготовити цех?

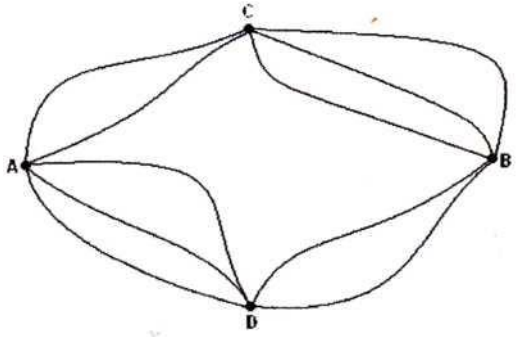
Розв'язання. Для кожної з трьох моделей можна використати кожний з чотирьох кольорів. За правилом множення кількість різних видів капелюхів становитиме 3•4 = 12.

Для ілюстрації можна скласти таку таблицю:

Модель	Колір			
	1	**2**	**3**	4
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**
2	**(2,1)**	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	**(3,1)**	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Задача 6. Прямого сполучення із селищами *A* і *B* немає. Турист може потрапити з А до В або через селище *C*, або через селище О. З *A* до *C* ведуть два різні шляхи, а з *A* до *E*)— три. З С до *B* можна потрапити трьома різними дорогами, а з *D* до *B* — двома. Скільки турист має різних варіантів вибору шляху від *A* до *B*?

Розв 'язання. Доцільно зробити графічну ілюстрацію:



Якщо йти з *A* до *B* через C, то шлях можна обрати 2•3 = 6 способами. Якщо йти з *A* до *B* через *D*, то для вибору шляху є 3•2 = 6 способів. Тоді різних варіантів вибору шляху 6 + 6=12.

Зауваження. Якщо зробити графічну ілюстрацію, то можна, не використовуючи жодного правила, визначити кількість варіантів вибору шляху просто проводячи олівцем по лініях.

Розв'язуючи складніші комбінаторні задачі, бажано, за можливості, розглянути різні способи їх розв'язування. Зрозуміло, що за браком часу це не завжди вдається зробити. Тому потрібно, готуючись до уроку, не обмежуватися тільки одним способом розв'язування задачі для того, щоб на уроці організувати роботу з пошуку раціональнішого способу розв'язування. При цьому як домашнє завдання можна запропонувати учням відшукати інші способи розв'язування розглянутих на уроці задач.[5, 38с.]

Задача 7. У шаховому гуртку п'ять хлопців і три дівчини. Для зустрічі з гросмейстером прийшло три запрошення. Скількома способами можна розподілити запрошення так, щоб на зустріч потрапила хоча б одна дівчина?

Розв'язання. ***I спосіб.*** Вимога «хоча б одна дівчина» означає, що їх може бути одна, дві або три. Тоді запитання переформулюємо так: «Скількома способами можна вибрати трьох осіб з п'яти хлопців і трьох дівчат, щоб серед них було або одна дівчина, або дві дівчини, або три дівчини?»

Одну дівчину з трьох можна вибрати трьома способами і залишається вибрати ще двох хлопців з п'яти. Це можна зробити $\boldsymbol{C_5^2}$способами. Отже, всього маємо $3\boldsymbol{C_5^2}$ способів. Дві дівчини з трьох можна вибрати $\boldsymbol{C_3^2}$ способами і одного хлопця — п'ятьма способами. Усього $5\boldsymbol{C_3^2}$способів. Три дівчини можна вибрати тільки одним способом. Тоді загальна кількість способів становитиме $3\boldsymbol{C_5^2}+5\boldsymbol{C_3^2}+1=46$.

II спосіб. Троє осіб з усіх членів гуртка можна вибрати $\boldsymbol{C_8^3}$способами.

Тільки троє хлопців можна вибрати $\boldsymbol{C_5^3}$ способами. В усіх інших варіантах будуть присутні дівчата. Отже, таких способів

$$C_8^3 - C_5^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} - \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 56\text{-}10 = 46.$$

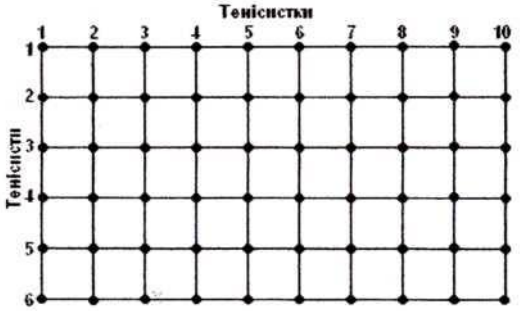
Зауваження. Під час розв'язування другим способом фактично було використано поняття доповнення множини, що є аналогом поняття протилежної події. У разі розв'язування задачі на обчислення ймовірностей ця задача може бути сформульована так: «У шаховому гуртку п'ять хлопців і три дівчини. Для зустрічі з гросмейстером прийшло три запрошення. Чому дорівнює ймовірність того, що на зустріч потрапить хоча б одна дівчинка?»[1, 59с.]

Задача 8. З десяти тенісисток і шести тенісистів складають чотири змішані пари. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. I спосіб. Чотири змішані пари — це вісім осіб: чотири тенісистки і чотири тенісисти. Чотири тенісистки з десяти можна вибрати C_{10}^4способами. Чотири тенісисти із шести можна вибрати C_6^4способами. Тоді вісім осіб для утворення чотирьох пар можна вибрати $C_{10}^4 \cdot C_6^4$ способами. Полічимо, скількома способами можна з восьми осіб утворити чотири змішані пари: одного чотири способи; другого тенісиста можна поставити у пару вже з будь-якою з трьох тенісисток, усього три способи; третього — з двох тенісисток, усього два способи; для четвертого залишається тільки один спосіб стати у пару. Отже, всього 4•3•2•1 = 4! способів утворення чотирьох пар з восьми осіб. Усіх способів утворити чотири змішані пари

$$C_{10}^4 \cdot C_6^4 \cdot 4! = \frac{10!\cdot 6!\cdot 4!}{4!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 2!} = 756000.$$

II спосіб. Усіх змішаних пар з десяти тенісисток і шести тенісистів можна утворити 10•6 = 60. Проілюструємо це такою схемою-сіткою (вузли сітки — це пари):



Отже, щоб вибрати чотири пари, потрібно, наприклад, взяти будь-які чотири стовпчики, а потім із кожного стовпчика взяти по одній парі з різних рядків.

Чотири стовпчики з десяти можна вибрати $\boldsymbol{C_{10}^4}$ способами. Після цього першу пару можна вибрати з будь-яких шести рядків, усього шість способів; другу — з п'яти рядків, усього п'ять способів; третю — з чотирьох рядків і четверту — з трьох рядків. Усього чотири пари можна вибрати $\boldsymbol{C_{10}^4}$ •6 •5 • 4

3 способами: $\boldsymbol{C_{10}^4}$•6•5•4•3 =$\frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{4!\cdot 2!}}$ •6•5•4 = 75600.

Такий самий результат отримаємо, якщо в наведених міркуваннях стовпчики замінити на рядки, а рядки — на стовпчики. Загальна кількість

способів вибору становитиме:

$$\boldsymbol{C_{10}^4}\text{•6•5•4•3} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{4!\cdot 2!}}\text{ •6•5•4 = 75600.}$$

Програма з математики для загальноосвітніх шкіл не передбачає вивчення сполук з повтореннями елементів, проте за допомогою комбінаторних правил додавання і множення можна розв'язати нескладні комбінаторні задачі на знаходження кількості сполук, в яких можливі повторення елементів.

Задача 9. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2,3,4,5, якщо цифри можуть повторюватися в записі числа?

Розв'язання. На перше місце можна записати будь-яку з п'яти цифр — всього п'ять варіантів. Оскільки цифри можуть повторюватися, то на друге місце можна також записати будь-яку з п'яти цифр — знову п'ять варіантів. Отже, на перші два місця дві будь-які цифри можна записати $5 \cdot 5 = 5^2$ способами. На третє місце також можна записати будь-яку з п'яти цифр. Тоді всіх можливих трицифрових чисел буде $5^2 \cdot 5 = 5^3 = 125$.[16]

Задача 10. Скільки різних натуральних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри у записі чисел можуть повторюватися і цифр у записі має бути не більше ніж 5?

Розв'язання. Числа можуть бути одно-, два-, три-, чотири- або п'ятицифрові. Одноцифрових чисел можна записати п'ять. Двоцифрових —5•5 =

5^2, трицифрових —5^3**,** чотирицифрових —5^4 і п'ятицифрових — 5^5. Усього різних чисел 5 + 5^2+5^3+5^4+5^5. Це сума п'яти перших членів геометричної прогресії, перший член якої b_1 =5, а знаменник q= 5. За формулою суми *n* перших членів геометричної прогресії $\boldsymbol{S = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{5(5^5-1)}{5-1}}$= 3905 . Отже, всіх чисел 3905.

2.2 Методика навчання початків теорії ймовірності. Мета вивчення теми. Методика формування основних понять, вивчення теорем. Особливості розв'язування задач

Метою вивчення теми є введення основних понять теорії ймовірностей, поняття про теорію ймовірностей як науку, доведення теорем додавання та множення ймовірностей, теореми про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій, введення поняття про класичну ймовірність і закону великих чисел; навчання учнів обчислюванню ймовірностей випадкових подій. При цьому учні мають:

- отримати уявлення про випробування та випадкові події; повну-групу подій; попарно несумісні, рівноможливі (рівноймовірні), елементарні події; схему Бернуллі;
- знати означення вірогідної та неможливої подій; класичне означення ймовірності; теорему додавання ймовірностей несумісних подій; означення протилежної події; теорему множення незалежних подій; теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій; означення взаємно незалежних випробувань; статистичне означення ймовірності; закон великих чисел;
- уміти обчислювати за класичним означенням ймовірність події; використовувати теореми додавання та множення для обчислення ймовірностей подій; знаходити у найпростіших випадках імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій.

В 11 класі основною метою вивчення теми «Початая теорії ймовірностей» є сформувати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей і

виробити вміння застосовувати їх до розв’язування простих задач.

Після вивчення теми учні мають:

- отримати уявлення про стохастичний експеримент, елементарну подію та простір елементарних подій; випадкову подію як деяку підмножину множини елементарних подій та розуміти зміст висловлення «подія відбулася»; еквівалентність подій, неможливу подію, несумісні події; дискретний і неперервний розподіли статистичних імовірностей на просторі елементарних подій; центр розподілу та величину розсіювання статистичних імовірностей; умовні статистичні ймовірності; можливість передбачення усередненого результату великої серії випробувань; математичне сподівання та дисперсію;
- знати означення суми, добутку, різниці двох подій, протилежної події; основні властивості статистичних імовірностей; правила обчислення статистичної ймовірності суми і добутку кількох подій; формулу повної ймовірності;
- уміти давати геометричну інтерпретацію операцій над подіями (за аналогією з операціями над множинами); обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій; застосовувати правила обчислення суми і добутку ймовірностей кількох подій та формулу повної ймовірності до розв’язування простих задач.

Для гуманітарних класів тему «Елементи теорії ймовірностей» включено до додаткової частини програми, за якою передбачено розглянути предмет теорії ймовірностей; основні поняття; подію та її статистичну ймовірність; статистичну ймовірність суми і добутку подій.

У сучасній літературі є різні погляди на зміст і структуру навчального матеріалу теми «Початки теорії ймовірностей». Найбільше суперечок виникає стосовно того, як означати ймовірність події. Слід зауважити, що в різних посібниках, підручниках, методичних рекомендаціях для вчителів і учнів сьогодні чітко виявляються два підходи до означення ймовірності події: класичний і статистичний.

У свій час А. М. Колмогоров, даючи рекомендації вчителям щодо

викладання факультативу з теорії ймовірностей, зазначав, що є розумним почати безпосередньо з комбінаторних підрахунків кількості випадків, які сприяють тій чи іншій події. Такі задачі можуть бути цікавими за змістом. Вони є гарною психологічною підготовкою до самого введення поняття ймовірності. Далі він зауважував, що досить часто замість «класичного» означення ймовірності доводиться використовувати «статистичне». Проте на перших кроках ознайомлення з теорією ймовірностей розумно поставитися з довірою до «класичного» означення. З погляду чистої математики тут немає ніякої «нестрогості».

Поділяючи думку А. М. Колмогорова і використовуючи досвід вивчення початків теорії ймовірностей на факультативних заняттях, вважаємо за доцільне дотримуватися класичного підходу до введення поняття ймовірності. Адже вивчення числових множин і дій над різними числами починається і продовжується до 8 класу лише над точними значеннями чисел і тільки у 8 класі запроваджуються наближені значення чисел і величин. У курсі геометрії також спочатку вивчають абстрактні ідеальні фігури. Аналогічно поняття статистичної та геометричної ймовірностей сприймаються легше, якщо учні вже ознайомлені з класичним означенням імовірності та навчаються обчислювати її під час розв’язування різних задач, зокрема прикладних.

Методика формування основних понять

Перші два уроки в 11 класі доцільно присвятити формуванню основних понять теорії ймовірностей: стохастичний експеримент (дослід, випробування), подія (явище), випадкова подія, масові випадкові події, сумісні події, однаково можливі події, вірогідні, неможливі події, елементарні події, класичне означення ймовірності.

На наступних уроках розглядають статистичне означення ймовірності і закон великих чисел, геометричне означення ймовірності, поняття про умовну ймовірність, доводять теореми додавання і множення ймовірностей, означають незалежні події та незалежні випробування, вводять схему Бернуллі.

До первісних понять теорії ймовірностей належать поняття «стохастичний

експеримент» і «подія». На першому уроці на конкретних прикладах потрібно ввести поняття випадкової події та масових випадкових подій і переконати учнів, що для масових випадкових подій існують закономірності, які вивчає теорія ймовірностей. Слід звернути увагу учнів на те, що характерною особливістю математики, яку вони вивчали до цього часу, була визначеність даних І здебільшого однозначність результатів, отриманих під час розв'язування задач. Наприклад, числове значення об'єму куба *V* цілком визначається довжиною ребра. Проте у житті, науці, техніці доводиться мати справу з подіями реального світу, які залежать від невідомих або таких обставин, що не піддаються обліку. Наприклад, не можна передбачити, скільки зернин достигне в колосі, що проросте з висіяної зернини, скільки грибів виросте на тій ділянці лісу, де вони росли в минулому році, скільки випускників загальноосвітніх шкіл України складуть вступні іспити до вищих навчальних закладів.

Такі події отримали назву випадкових, а теорія ймовірностей їх вивчає.

Теорію ймовірностей цікавлять лише масові випадкові події, тобто однорідні події, які відбуваються за певних умов і можуть бути відтворені необмежену кількість разів.

Практика вивчення теорії ймовірностей на факультативних заняттях доводить, що надзвичайно важливо навести учням конкретні приклади, які підтверджують існування закономірностей масових випадкових подій. У підручнику Шкіля М.І. "Алгебра і початки аналізу" наведено таблиці наслідків 10 000 підкидань монети, розподіл шроту на дошці Гальтона. Досвід показує, що найпереконливішим для учнів є дослід із записками, який описано у підручнику і який доцільно провести у класі.

Учні самі дійдуть висновку, що існування закономірностей масових подій і вміння передбачати результати дослідів, у яких наявні елементи випадковості, є надзвичайно важливими для науки і практики.

Узагальнюючи розглянуті приклади, доцільно ввести поняття стохастичного експерименту, яке використовується в теорії ймовірностей.

Експеримент (дослід, випробування) називають *стохастичним,* якщо за

виконання певної сукупності умов його можна повторювати необмежену кількість разів і результати якого наперед не можна передбачити.

Події — це лише можливі результати стохастичного експерименту. Подію називають *випадковою,* якщо за виконання певної сукупності умов (у результаті стохастичного експерименту) вона може відбутися або не відбутися.

На наступному уроці, ілюструючи конкретними прикладами, доцільно ввести поняття повної групи подій, попарно несумісних і сумісних, однаково можливих, вірогідної та неможливої подій.

Центральним поняттям є поняття ймовірності події як числової характеристики (міри) можливості появи випадкової події.

Спочатку доцільно ввести класичне означення ймовірності, тобто ймовірності для елементарних подій. Вони утворюють повну групу несумісних однаково можливих (рівноможливих) подій.

На прикладі конкретного досліду (в підручнику наведено приклад з калькуляторами, але на уроці можна навести інший приклад, використати гральний кубик або монетку) вводиться класичне означення ймовірності. Так, А. М. Колмогоров на прикладі підкидання двох гральних кубиків і фіксацій суми очок на верхніх гранях описує поняття рівноможливих випадків і поняття ймовірності: ймовірністю називають відношення сприятливих випадків до загальної кількості рівноможливих. При цьому він зауважує, що математика не дає відповіді на запитання, які випадки можна вважати рівноможливими. У разі кидання кубиків фізично істотні умови падіння кубика будь-якою з шести граней доверху здаються однаковими. Крім того, природно вважати, що різні комбінації верхніх граней двох кубиків також однаково правдоподібні. Досвід підтверджує ці припущення. Математична теорія ймовірностей займається тільки обчисленням ймовірностей різних подій за певних припущень у задачах, що нас цікавлять, припущенням є те, які випадки потрібно вважати рівно-можливими.

Отже, слід звернути увагу, що коли в дослідах визначають ймовірність події за класичним означенням, то умови вважають ідеальними — гральний кубик має бути ідеальної форми (центр ваги збігається з геометричним центром),

монета виготовлена з однакового за щільністю металу тощо.

Доцільно у зв'язку з вивченням класичного означення ймовірності роз'яснити учням широко вживані в практиці та побуті поняття «практично неможливої» і «практично вірогідної» подій, тобто подій, імовірність яких близька відповідно до 0 і до 1. Адже зробити висновок про те, відбудеться подія чи ні, можна лише з урахуванням умов, за яких подія відбувається чи ні. Справді, якщо ймовірність запізнення потягу дорівнює 0,01, то цю подію (запізнення потягу) можна вважати практично неможливою. Проте якщо ймовірність того, що під час стрибка парашутиста парашут не розкриється, дорівнює 0,01, то цю подію вважати практично неможливою не можна.

Перш ніж вводити статистичне означення ймовірності, доцільно звернути увагу учнів на те, що класичне означення ймовірності має обмежене застосування, причому за теоретично ідеальних умов. Для випробувань (дослідів), що фактично відбуваються на практиці, не має змоги розрізнити однаково можливі події. У таких випадках використовують статистичне означення ймовірності. Попередньо потрібно розглянути поняття статистичної частоти події як відношення , де n - загальна кількість випробувань; m - кількість появ події, що нас цікавить. Наприклад, n - загальна кількість пострілів, які виконує стрілець; m - кількість влучень у ціль.

Після наведення інших прикладів доцільно ввести статистичне означення ймовірності події.

Означення 1. Імовірністю події називають невідоме число p, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події A зі зростанням кількості випробувань.

Позначивши статистичну частоту символом $P_N\{A\}$, ($P_N\{A\} = \frac{m_N}{N}$),

природно записати наближену рівність $P_N\{A\} \approx P(A)$, де $P(A)$ -ймовірність події A.

Ця наближена рівність відображує важливу закономірність масових випадкових подій. Вона багаторазово перевірялася експериментально і підтверджувалася практичною діяльністю.

Методика вивчення теорем

Чинною програмою і підручником Шкіля М.І. передбачено вивчення таких тверджень (теорем):

1) теорема додавання ймовірностей несумісних подій,і два наслідки з неї;

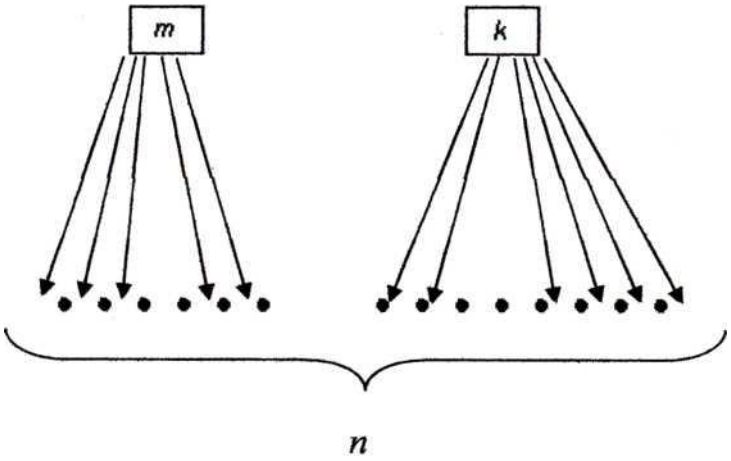
2) теорема множення ймовірностей і наслідок з неї;

3) теорема множення ймовірностей для незалежних подій;

4) теорема про ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій;

5) теорема про ймовірність здійснення принаймні однієї з не залежних подій;

6) формула Бернуллі (розглядається без доведення).



Теореми додавання та множення ймовірностей вводяться для класичного означення ймовірності події. Перш ніж вивчати кожну з цих теорем, розглядають відповідно поняття суми і добутку двох подій. Цей матеріал не зумовлює труднощів в учнів, якщо попередньо під час вивчення елементів теорії множин їх ознайомлювали з поняттями об'єднання І перерізу двох множин. Поняття суми і добутку двох подій аналогічне цим поняттям.

Теорему додавання ймовірностей суми двох несумісних подій учні сприймають без особливих труднощів, якщо проілюструвати її доведення таким рисунком.

У цьому випадку *n* — кількість усіх елементарних подій деякого випробування; *m* — кількість подій, які сприяють події *А; к* — кількість подій,

які сприяють події *B.* Тоді $P(A) = \frac{m}{n}, P(B) = \frac{k}{n}$.Оскільки події $A + B$ сприяє $m + к$ подій, $P(A) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}$, тобто $P(A+ B) = P(A)+P(B)$.

Слід наголосити, що теорема поширюється на суму будь-якої скінченної кількості попарно несумісних подій.

Під час вивчення теореми множення можливі два методичних підходи.

1. Теорему множення формулюють тільки для незалежних подій і доводять з використанням геометричної ілюстрації. Цей підхід було здійснено в першому виданні підручника.

2. Його реалізовано в останньому виданні підручника Шкіля М.І. Такий підхід виправдано тим, що в практиці незалежні події трапляються значно рідше, ніж ті, для обчислення ймовірності яких крім сукупності умов, що відповідають випробуванню, слід розглядати ще й інші додаткові умови. Наприклад, така задача.[1]

Задача. У коробці є 4 червоних і 5 синіх олівців. Навмання один за одним витягують два олівці. Знайти ймовірність того, що другий олівець буде синім.

Розв ’язання. Нехай подія *A* — «перший олівець червоний», подія *B* — «другий олівець синій». Зрозуміло, що коли подія *A* відбулася, то $P(B) = \frac{5}{8}$, а якщо ні, то $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ тобто ймовірність події *B* можна обчислити за умови,

відбулася чи ні подія *A.*

Таку ймовірність називають умовною і позначають $P_A(B)$ — умовна ймовірність події *B,* якщо відбулася подія *A.* Аналогічно $P_B(A)$ — умовна ймовірність події *A* за умови, що відбулася подія *B.* Визначити умовну ймовірність можна за формулою

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Аналогічно

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Після введення поняття умовної ймовірності доцільно розв'язати задачу на обчислення ймовірності деякої події *B* за умови, що відбулася подія *A,*

використовуючи спочатку класичне означення ймовірності, а потім — формулу (1). Отримані однакові відповіді означають, що формулу (1) можна прийняти за означення умовної ймовірності або довести за класичним означенням ймовірності.

З формули (1) безпосередньо випливає теорема.

Теорема 1. Імовірність одночасної появи двох подій (імовірність добутку двох сумісних подій) дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, яка обчислена за припущення, що перша подія вже відбулася. Тобто

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \qquad (2)$$

Ця теорема поширюється і на випадок одночасної появи кількох, подій

$$P(A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n) = P(A_1)PA_1(A_2)\boldsymbol{P_{A_1A_2}}(A_3) \bullet \ldots \bullet \boldsymbol{P_{A_1A_2 \bullet \ldots \bullet A_{n-1}}}(\boldsymbol{A_n}).$$

Після введення означення незалежних подій формулюють теорему про ймовірність добутку двох незалежних подій, яку легко дістати із загальної теореми множення ймовірностей двох подій. Оскільки для незалежних подій

$$P_A(B) = P(B), \text{ то}$$

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (3)$$

Рівність (3) інколи приймають за означення двох незалежних подій.

Означення 2. Дві події називають незалежними, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.

Після введення означень попарно незалежних подій і незалежних у сукупності подій теорема множення ймовірностей двох незалежних подій поширюється на ймовірність одночасної появи кількох подій, незалежних у сукупності.

Теорема множення ймовірностей подій дає можливість сформулювати важливу для практики розв’язування задач теорему про ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій. Перш ніж формулювати теорему, потрібно нагадати учням, що означає «поява хоча б однієї з двох сумісних подій» (відбудеться або перша подія, або друга, або обидві відбудуться одночасно. Інакше кажучи, якщо A і B деякі події, то їх сума $A + B$ визначає появу хоча б

однієї з них).

Теорема 2. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх одночасної появи (їх добутку):

$$P(A + B) = P(A) + P(B)-P(AB).$$

Теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій учні легко отримають із загальної теореми множення ймовірностей незалежних у сукупності подій і другого наслідку з теореми про ймовірність суми двох несумісних подій *(P(A) = 1-P(A))*.

Вивчення всіх теорем і наслідків з них потрібно проілюструвати розв'язуванням задач на їх застосування.

Навчальний матеріал щодо незалежних випробувань і схеми Бернуллі доцільно розглядати після введення відносної події *A*. Важливо підкреслити, що у різних незалежних випробуваннях подія *A* може мати або різні ймовірності, або одну й ту саму ймовірність. Останнє відбувається, якщо незалежні повторні випробування проводяться за однієї й тієї самої сукупності умов. Формулу Бернуллі розглядають тільки для таких незалежних випробувань, в яких подія *A* має одну й ту саму ймовірність. Формулу Бернуллі дають учням без доведення.

Особливості розв'язування задач.

Зрозуміло, що вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язуванням відповідних задач.

Під час і після вивчення основних понять теорії ймовірностей доцільно запропонувати учням такі задачі.

Задача 1. Яке з наведених випробувань буде стохастичним експериментом, а яке — ні? Відповідь пояснити.

а) охолодження води за нормального тиску до 0° С і фіксація її стану;

б) витягування однієї карти з повної колоди і фіксація зображення на ній;

в) розкручування колеса «Поле чудес» і фіксація сектора, на якому зупиняється стрілка;

г) змішування сульфату натрію і хлориду барію та фіксація наявності

осаду;

д) поява кульки з лототрону лото «Забава» і фіксація зображеного на ній номера;

Теорема 2. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх одночасної появи (їх добутку):

$$P(A + B) = P(A) + P(B)-P(AB).$$

Теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій учні легко отримають із загальної теореми множення ймовірностей незалежних у сукупності подій і другого наслідку з теореми про ймовірність суми двох несумісних подій $(P(A) = 1-P(A))$.

Вивчення всіх теорем і наслідків з них потрібно проілюструвати розв'язуванням задач на їх застосування.

Навчальний матеріал щодо незалежних випробувань і схеми Бернуллі доцільно розглядати після введення відносної події *A.* Важливо підкреслити, що у різних незалежних випробуваннях подія *A* може мати або різні ймовірності, або одну й ту саму ймовірність. Останнє відбувається, якщо незалежні повторні випробування проводяться за однієї й тієї самої сукупності умов. Формулу Бернуллі розглядають тільки для таких незалежних випробувань, в яких подія *A* має одну й ту саму ймовірність. Формулу Бернуллі дають учням без доведення.

Особливості розв'язування задач.

Зрозуміло, що вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язуванням відповідних задач.

Під час і після вивчення основних понять теорії ймовірностей доцільно запропонувати учням такі задачі.

Задача 1. Яке з наведених випробувань буде стохастичним експериментом, а яке — ні? Відповідь пояснити.

а) охолодження води за нормального тиску до 0° С і фіксація її стану;

б) витягування однієї карти з повної колоди і фіксація зображення на

ній;

в) розкручування колеса «Поле чудес» і фіксація сектора, на якому зупиня- ється стрілка;

г) змішування сульфату натрію і хлориду барію та фіксація наявності осаду;

д) поява кульки з лототрону лото «Забава» і фіксація зображеного на ній номера;

є) змочування зрізу картоплі розчином йоду і фіксація зміни кольору поверхні картоплі.

Відповіді: а) ні; з фізики відомо, що під час охолодження води за нормального тиску до 0° С вона перетворюється на лід; б) так; наперед не можна передбачити, яку саме карту витягаєш з колоди; в) так; г) ні; з хімії відомо, що при змішуванні сульфату натрію і хлориду барію завжди випадає осад; д) так; є) ні.

Задача 2. Гральний кубик підкидають один раз. Зазначити всі наслідки випробування, якщо нас цікавить:

а) число, що випало на верхній грані кубика;

б) парність числа, що випало на верхній грані кубика;

в) складеність числа, що випало на верхній грані кубика;

г) кратність числа, що випало на верхній грані кубика;

д) поява на верхній грані кубика числа, не більшого за 4; є) поява на верхній грані кубика числа, не меншого за 1.

Відповіді. Наслідки випробування запишемо у вигляді множини:

а) {1, 2, 3, 4, 5, 6}; б) {парне, непарне}; в) {1, {2, 3, 5>, {4, 6» або {1, просте, складене}; г) {{3, 6), {1,2, 4, 5}} або {ділиться на 3, не ділиться на 3}; д) {{1,2,3,4}, {5,6}} або {рівне або менше за 4, більше за 4}; є) {1,2,3,4, 5, 6}.

Задача 3. На 10 жетонах вибито числа від 1 до 10. Навмання виймають один жетон. В яких відповідях зазначені всі можливі наслідки випробування?

а) {1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10};

б) {парне; непарне};

в) {просте; 4,6,8,9,10};

г) {парне; 1,3,5};

д) {кратне 3; не ділиться на 3};

є) {не більше за 3; не менше за 4}.

Відповіді: а) так; б) так; в) ні, не враховано наслідок «витягнуто число 1»; г) ні; не враховано наслідки «витягнуто число 7» і «витягнуто число 9»; д) так; є) так.

Задача 4. Указати кількість наслідків такого експерименту:

а) з мішечка для гри в лото виймають одну бочечку з номером;

б) навмання витягують одну кісточку доміно з повного набору;

в) з нового відривного календаря на 2004 рік навмання вириває листок;

г) картки з написаними на них буквами П, О, Д, І, Я перемішують, навмання розкладають у ряд і фіксують слово, що утворилося;

д) з 30 учнів класу навмання обирають чотирьох для чергування в їдальні;

е) з 10 карток, на яких записано цифри, навмання одна за одною виймають три картки і фіксують отримане число;

є) картки з написаними на них буквами Е, Л, Е, М, Е, Н, Т перемішують, навмання розкладають у ряд і фіксують слово, що утворилося.

Відповіді**:** а)90; б)28; в)365; г) P_5= 5! = 120; д) $C_{30}^4 = \frac{30!}{4!\bullet 26!}$= 27405;

е)A_{10}^3 =10•9•8 = 720; є)$\frac{7!}{3!}$ = 4 •5 •6 •7 = 840.

Зауваження. Під час розв'язування завдань г) — є) виникає потреба повторити основні комбінаторні сполуки і формули для обчислення їх кількості. Розв'язуючи завдання с), можна зробити такі пояснення: сім букв можна у певному порядку розкласти в ряд 7! способами, але при цьому однакових варіантів розміщення букв буде стільки, скільки разів три букви Е можна

поміняти місцями, тобто 3! Варіантів.

Задача 5. Які з подій є випадковими, вірогідними, неможливими:

а) випадання на верхній грані грального кубика числа більшого за 6;

б) випадання на верхній грані грального кубика числа не більшого за 6;

в) випадання на верхніх гранях двох гральних кубиків у сумі 13 очок;

г) навмання вирваний листок із нового календаря містить число, не більше за 31;

д) влучення або промах при одному пострілі;

е) виграш за одним білетом лотереї;

є) витягування з коробки кольорової кулі, якщо в ній є 3 синіх і 5 червоних куль;

ж) витягування з коробки жовтої кулі, якщо в ній є 3 синіх і 5 червоних куль?

Відповіді. Події, описані в пунктах а), в), ж) — неможливі; б), г), д), е) — вірогідні; є) випадкова.

Під час розв’язування задач на обчислення ймовірності події за класичним означенням буде доцільним спочатку запропонувати задачі на визначення загальної кількості наслідків деякого випробування та кількості наслідків цього випробування, які сприяють появі події, що розглядається.

Задача 6. Зазначити загальну кількість елементарних подій випробування та кількість елементарних подій, які сприяють тому, щоб деяка подія відбулася:

а) випробування — вибір довільного натурального двоцифрового числа; подія *A* — «навмання взяте натуральне двоцифрове число ділиться на 5»;

б) випробування — підкидання грального кубика; подія *B* — «поява на верх ній грані грального кубика не менше ніж 5 очок»;

в) випробування — вибір довільної букви з розрізної абетки; подія C — «навмання взятою буквою означається один голосний звук»;

г) випробування — витягування довільної карти з гральної колоди; подія D —«навмання витягнута карта містить зображення людини»;

д) випробування — підкидання монети двічі; подія *E* — «хоча б один

раз випало зображення герба»;

є) випробування — перемішування карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 і розкладання їх у ряд; подія *A* — «утворилося парне число»; подія *B* — «утворилося число, кратне 5»; подія *C* — «утворилося число, кратне 3»; подія D — «утворилося число, кратне 9»;

ж) випробування — з карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 навмання вибирають три і розкладають у ряд; подія *A* — «утворилося непарне число»; подія *B* — «утворилося число, кратне 5»; подія C — «утворилося число, кратне 3»; подія B — «утворилося число, кратне 9».

з) у класі навчаються 17 дівчат і 13 юнаків; випробування — на чергування у їдальні навмання вибирають чотирьох учнів; подія *A* — чергуватимуть тільки юнаки; подія *B* — чергуватимуть тільки дівчата; подія C — чергуватимуть два юнаки та дві дівчини; подія D — чергуватимуть не більше НІЖ дві дівчини.

В і д п о в і д і: а) 90 і 1 В; б) 6 і 2; в) 33 і 6 (це букви *а, о, у, и, і, є*); г) можливі такі випадки: 36 і 12, або 52 і 12, або 54 і 14 (це залежить від того, яку колоду використовують і чи має вона джокер); д) 4 і 3; є) усього $P5 = 5! = 120$ елементарних подій. Події *A* сприяє поява числа, яке закінчується парною цифрою. Таких чисел можна утворити $2 \bullet P_4 = 2 \bullet 4! = 48$. Отже, події *A* сприяє 48 елементарних подій. Події*B* сприяє поява числа, яке закінчується цифрою **5.**Таких чисел можна утворити $P_4 = 4! = 24$. Отже, події *B* сприяє 24 елементарні події. Події C сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 3. Очевидно, що $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, тобто будь-яке утворене число буде кратне 3. Отже, події C сприяють усі елементарні події цього випробування. Події *D* сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Очевидно, що жодне утворене число не буде кратне 9. Отже, для події D кількість елементарних подій, що їй сприяють, дорівнює 0; є) усього $\boldsymbol{A_5^3} = 5 \bullet 4 \bullet 3 = 60$ елементарних подій. Події *A* сприяє поява числа, яке закінчується непарною цифрою. Таких чисел можна утворити $3 \bullet \boldsymbol{A_5^3} = 3 \bullet 4 \bullet \mathbf{3} = 36$. Отже, події *A* сприяє 36 елементарних подій. Події *B* сприяє поява числа, яке закінчується цифрою 5. Таких чисел можна утворити $\boldsymbol{A_4^2} = 4 \bullet 3 = 12$.

Отже, події *B* сприяє 12 елементарних подій. Події С сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 3 .Із заданих цифр виберемо такі всі трійки, сума яких ділить на 3: 1, 2, 3, або 1, 3, 5, або 2, 3, 4, або 3, 4, 5. З кожної такої трійки цифр можна утворити P_3-*3! = 6* чисел; усього чисел, які діляться на 3, буде *4*• P_3 =4•6 = 24. Отже, події С сприяє 24 елементарні події. Події D сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Для утворення таких чисел можна використати трійки цифр 1, 3, 5 або 2, 3, 4. Отже, для події О кількість елементарних подій, що їй сприяють, дорівнює 2 • P_3 = 2 • 6 = 12; ж) усього $C_{30}^{4} = \frac{30!}{4!\bullet 26!}$= 27405 елементарних подій. Оскільки юнаків — 13 і чотирьох із них можна вибрати C_{17}^{4} способами, то події *A* сприяє $C_{13}^{4} = \frac{13!}{4!\bullet 9!}$= 715 елементарних подій. Оскільки дівчат — 17 і чотирьох із них можна вибрати C_{17}^{4} способами, то події *B* сприяє $C_{17}^{4} = \frac{17!}{4!\bullet 3!}$ = 2380 елементарних подій. Двох юнаків із 13 можна вибрати C_{13}^{2} способами, двох дівчат із 17 — C_{17}^{2} способами. Використовуючи комбінаторне правило множення, отримаємо $C_{13}^{2}\bullet C_{17}^{2}$ варіантів вибору двох юнаків і двох дівчат для чергування. Отже,події С сприяє $C_{13}^{2}\bullet C_{17}^{2} = \frac{13!}{2!\bullet 11!} \bullet \frac{17!}{2!\bullet 15!}$= 10608 елементарних подій. Для того щоб відбулася подія D, у групі чергових може не бути дівчат зовсім, або бути одна дівчина, або бути дві дівчини. Тобто події *D* сприяє $C_{13}^{4} + 17 \bullet C_{13}^{3} + C_{13}^{2} \bullet C_{17}^{2}$ =715+17• $\frac{13!}{3!\bullet 10!}$ +10608 = 16185 елементарних подій.

Результати розв’язування задачі 6 можна використати для обчислення ймовірностей зазначених у ній подій за класичним означенням. Потім розв'язати запропоновані далі задачі (зокрема, задачі 7 — 10 можна розв’язувати усно). Під час розв’язування задач на обчислення ймовірності події за класичним означенням можна надати учням таке правило-орієнтир:

1) визначити, про яке випробування йдеться у задачі;

2) чітко сформулювати подію, ймовірність якої потрібно обчислити і позначити її *(A);*

3) обчислити загальну кількість рівноможливих наслідків (я) цього випробування;

4) обчислити кількість наслідків (ти), які сприяють розглядуваній події;

5) обчислити ймовірність події за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$.[15, 128с.]

6) **Задача 7.** На донорський пункт прийшли 12 осіб, із яких 5 мають першу групу крові, 3 — другу, а інші — третю. Яка ймовірність того, що перша людина, яка здала кров, має третю групу крові?

7) Відповідь. 1/3.

8) **Задача 8.** Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилено на 27 кубиків. Визначити ймовірність того, що вийнятий навмання кубик має дві пофарбовані грані.

9) Відповідь. 1/3.

10) **Задача 9.** З цифр 0, 1, 2, 3, 4 складають трицифрові числа, цифри яких не повторюються. Яка ймовірність того, що навмання взяте число:

11) а) дорівнює 241;

12) б) буде кратним 5;

13) в) буде парним;

14) г) буде непарним?

15) *Розв'язання.* Оскільки першою цифрою числа не може бути цифра 0, то всього трицифрових чисел можна утворити 4 • 4 • 3 = 48. Тому всіх елементарних подій буде 48. Тоді

16) а) появі числа 241 сприяє тільки одна елементарна подія. Отже, p = 1/48;

17) б) із утворених чисел кратними 5 будуть ті, що закінчуються цифрою 0. Таких чисел 12, тому події «число кратне 5» сприяє 12 елементарних подій. Отже,p=12/48=1/4;

18) в) із утворених чисел парними будуть ті, що закінчуються цифрами 0, 2 або 4. Чисел, які закінчуються цифрою 0, є 12; цифрою 2 або 4 — по 9. Тоді події «число парне» сприяє 12 + 9 + 9 = 30 елементарних подій. Отже, *p* — 30/48=5/8;

19) г) оскільки всі утворені числа є парними або непарними, то непарних чисел буде 48 - 30 = 18, тому події «число непарне» сприяє 18

елементарних подій. Отже ,p=18/48=3/8.

Задача 10. У класі 16 юнаків і 14 дівчат. Для прибирання актової зали до святкового вечора потрібно відправити шість учнів. Учнів вибирають навмання за номером у журнальному списку. Чому дорівнює ймовірність того, що залу будуть прибирати:

а) тільки юнаки;

б) тільки дівчата;

в) дві дівчини й чотири юнаки;

г) три дівчини і три юнаки?

Розв'язання. Усього шість учнів із 30 можна вибрати C_{36}^{6}способами, тому всього є C_{30}^{6} елементарних подій. Розмірковуючи далі, матимемо:

а) шість юнаків із 16 можна вибрати C_{16}^{6}способами. Тому події *A* «прибиратимуть тільки юнаки» сприяє C_{16}^{6}елементарних подій; $P(A)=\frac{C_{16}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

б) шість дівчат із 14 можна вибрати C_{14}^{6} способами. Тому події *B* «прибиратимуть тільки дівчата» сприяє C_{14}^{6} елементарних подій; $P(B) = \frac{C_{14}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

в) дві дівчини із 14 можна вибрати C_{14}^{2} способами, чотирьох хлопців із 16 можна вибрати C_{16}^{6} способами. Використовуючи комбінаторне правило множення, отримаємо, що всього варіантів утворити групу з двох дівчат і чотирьох юнаків $C_{14}^{2} \cdot C_{16}^{6}$. Тому події *C* «прибиратимуть дві дівчини й чотири юнаки» сприяють $C_{14}^{2} \cdot C_{16}^{6}$. елементарних подій; $P(C) =\frac{C_{14}^{2} \cdot C_{16}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

г) міркуючи аналогічно розв'язуванню завдання в), визначимо, що події Б «прибиратимуть три дівчини і три юнаки» сприяють елементарних подій; $P(D) =\frac{C_{14}^{3} \cdot C_{16}^{3}}{C_{30}^{6}}$;

Після введення статистичної частоти, статистичного та геометричного означень імовірності доцільно запропонувати учням розв'язати такі задачі.[12, 135с.]

Задача 11. У результаті 20 підкидань грального кубика отримали таку по-

слідовність випадань чисел: 6, 4, 3, 3, 2, 6, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 6, 6, 1, 4, 4. Знайти абсолютну і статистичну частоту появи:

а) кожного числа;

б) парного числа;

в) непарного числа;

г) числа не більшого за 3; більшого за 3;

д) числа не більшого за 6; є) числа, кратного 7.

Розв 'язання. Для зручності складемо таку таблицю (її називають частотною таблицею):

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадань	3	3	4	4	2	4

Тоді матимемо:

а) $P_N\{1\}=\frac{3}{20}$; $P_N\{2\}=\frac{3}{20}$; $P_N\{3\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; $P_N\{4\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; $P_N\{5\}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$; $P_N\{6\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$;

б) для знаходження статистичної частоти появи парного числа можна додати абсолютні частоти випадання чисел 2, 4 і 6. Тоді P_N {або 2, або 4, або 6} $=\frac{\mathbf{3+4+4}}{\mathbf{20}}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{20}}$.

З іншого боку очевидно, що статистичну частоту появи парного числа можна обчислити, додавши статистичні частоти появи відповідно чисел 2, 4 і 6.

Тоді P_N {або 2, або 4, або 6} = $P_N\{2\}+ P_N\{4\}+ P_N\{6\}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{20}}$.

в) якщо парні числа випадали 11 разів, то непарні 20-11 = 9 разів. Отже,

$$P_N \text{ {або 1, або 3, або 5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}};$$

г) $P_N\{a < 3\} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{20}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; $P_N\{a > 3\} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{20}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ де а - число, що випало;

д) число, не більше за 6, випадає в кожному випробуванні. Отже,

$$P_N\{a \leq 6\} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{20}} = \mathbf{1};$$

є) число, кратне 7, жодного разу не може випасти. Абсолютна частота такої події дорівнює 0. Отже, $P_N\{a: \mathbf{7}\} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{20}} = 0$.[15]

Задача 12. Відомості про кількість учнів у 30 класах школи такі:

28	30	26	32	28	31
26	32	32	28	26	30
32	30	28	28	30	31
32	26	26	28	30	32
31	31	30	28	26	30

Знайти статистичну частоту, що у навмання вибраному класі навчається:

а) 30 учнів;

б) менше за 30 учнів;

в) більше за 30 учнів;

г) не менше за 30 учнів;

д) не більше за 32 учні;

е) не менше за 26 учнів;

є) більше за 32 учні.

Розв 'язання. Складемо таблицю:

Кількість учнів у класі	26	28	30	31	32
Кількість класів	6	7	7	4	6

Нехай *n* — кількість учнів у класі. Тоді матимемо:

а) $P_N\{n=30\} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{30}}$; б) $P_N\{n<30\} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{30}}$;

в) $P_N\{n>30\} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{30}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$; г) $P_N\{n\geq 30\} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{30}}$;

д) $P_N\{n\leq 30\} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{30}} = \mathbf{1}$; *е)* $P_N\{n\geq 26\} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{30}} = \mathbf{1}$;

є) $P_N\{n\geq 32\} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{30}} = 0$.

Задача 13. Із двох дійсних чисел, сума квадратів яких не більша за 100,

навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не меншою за 49?

Розв 'язання. Нехай x та *y* — задані числа, що задовольняють нерівність $x^2 + y^2 \leq 100$. Подія *A* полягає у тому, що взяті навмання два числа задовольнятимуть нерівність $x^2 + y^2 \geq 49$, тобто події *A* сприятимуть усі пари чисел, які є розв'язками системи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 100} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 \geq 49} \end{cases}$$

Зобразимо ці розв'язки у системі координат (рис. 15.5).

Отже, події *A* сприяють усі точки заштрихованого на рисунку кільця. Для обчислення ймовірності події *A* потрібно знайти відношення площі кільця до площі більшого круга: $P(A) = \frac{\boldsymbol{100\pi - 49\pi}}{\boldsymbol{100\pi}} = 0{,}51$.

На особливу увагу заслуговують задачі, в процесі розв’язування яких використовуються і теорема додавання, і теорема множення. Перш ніж безпосередньо розв'язувати такі задачі, з учнями потрібно відпрацювати вміння подавати подію, ймовірність якої обчислюють і яка не є елементарною, у вигляді суми або добутку (суми і добутку) інших подій, або визначати подію, протилежну заданій. Також слід навчити учнів розрізняти сумісні, несумісні та незалежні події. Ці уміння набуваються в процесі розв’язування таких задач.

Задача 14. З коробки, в якій є олівці червоного, чорного і синього кольорів, навмання виймають один олівець. Події A_1, A_2 і A_3 відповідно означають появу червоного, чорного і синього олівців. Що означає подія:

а) A_1+A_2; б) A_1+A_3 в) A_2+A_3 ?

Відповідь: а) вийнято червоний або чорний олівець; б) вийнято червоний або синій олівець; в) вийнято чорний або синій олівець.

Задача 15. Стрілець виконує два постріли по мішені. Події відповідно означають влучення під час першого і другого пострілів. Записати формулою подію, яка полягає в тому, що:

а) у мішень влучено два рази; б) у мішень влучено.

Розв’язання: а) подія «у мішень влучено два рази» означає, що одночасно

відбулися подія A_1 іподія A_2, тобто виконується добуток подій $A_1 \cdot A_2$;

б) подія «у мішень влучено» означає, що відбулася подія A_1, або подія A_2,або обидві ці події. Тобто справджується сума подій $A_1 + A_2$.

Задача 16. Які пари подій несумісні:

а) навмання вибране натуральне число від 1 до 100 включно ділиться на 10; ділиться на 11;

б) виграш у лотерею за першим білетом; за другим білетом;

в) виграш; програш у шаховій партії;

г) навмання вибране натуральне число від 1 до 25 включно є парним; кратним 3?

Відповідь. Несумісні події не можуть відбутися одночасно. Отже, події а) і в) несумісні; події б) і г) сумісні.

Задача 17. Подія A означає появу шести очок на верхній грані грального кубика. Що означає подія A ?

Відповідь. A — це подія, протилежна події A. Подію A можна описати по-різному: не випало 6 очок; випало 1, 2, 3, 4, 5 очок.

Задача 18. Подія A полягає в тому, що хоча б одна з наявних 15 електричних лампочок нестандартна. Що означає подія A?

Відповідь. Усі лампочки — стандартні.

Задача 19. Які пари подій протилежні:

а) контрольна з математики написана на 11 балів; контрольна з математики написана на 8 балів;

б) хоча б одна куля під час двох пострілів влучила у ціль; жодна з двох куль під час двох пострілів не влучила у ціль?

Відповідь. Події у пункті б.

Задача 20. Із учнів 11 класу, які складають екзамен з математики, навмання вибирають одного. Нехай подія A полягає в тому, що вибраному учню вже виповнилося 17 років, подія B — вибраний учень відмінно навчається, С — вибраний учень є дівчиною. Описати подію:

а)ABC; 6)ABC; в)ABC; г)ABC.

Відповідь: а) вибрано 17-річну дівчину, яка відмінно навчається; б) вибрано дівчину, яка відмінно навчається і якій ще немає 17 років; в) вибрано 17-річного юнака, який відмінно навчається; г) вибрано дівчину, яка не є відмінницею і якій ще немає 17 років.

Задача 21. Із 20 деталей є п’ять бракованих. Навмання одну за одною беруть дві деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть бракованими?

Розв 'язання. Нехай подія *A* — «перша витягнута деталь бракована», подія *B* «друга витягнута деталь бракована». Тоді подія С — «обидві витягнуті деталі браковані» — є добутком подій *A і B, P(A)* = $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Імовірність події *B* умовна. Якщо подія *A* відбулася, то $P_A(B) = \frac{4}{19}$.Отже,

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}.$$

Зауваження. Цю задачу можна спочатку запропонувати учням розв’язати за допомогою класичного означення імовірності. Міркування будуть такими: витягування двох деталей одна за одною можна розглядати як одночасне витягування двох деталей (наприклад, одну деталь правою, а другу лівою руками). Дві деталі з 20 можна вибрати C_{20}^2=190 способами. Дві браковані деталі з 5 можна вибрати C_5^2=10 способами, тобто події С — «обидві витягнуті деталі браковані» — з усіх 190 наслідків випробування сприяє 10.

Отже, $P(C) = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

Задача 22. Нехай $P(AB) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Знайти *P(A + B).*

Розв ’язання. P{A) = 1 – *P(A)* = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.Оскільки $P(AB) \neq 0$ то події *A* і *B* сумісні, і P(A + B) = P(A) + P(B)-P(AB)= $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

Задача 23. Консервний завод відправляє продукцію у скляних банках до магазинів міста спочатку залізницею, а потім — автотранспортом. Імовірність того, що банки розіб’ються під час перевезення залізницею, дорівнює 0,002, автотранспортом — у 5 разів більша. Якими можуть бути втрати під час перевезення, якщо завод відвантажив продукції на 60 000 грн?

Розв'язання. Нехай подія *A* — «банка розбилася під час перевезення залізницею», *P(A)* = 0,002; подія *B* — «банка розбилася під час перевезення автотранспортом» , *P* (*B*) = 5 • 0,002 = 0,01. Втрати будуть, якщо відбувається подія С — «хоча б одна з банок розбилася». Обчислимо ймовірність події С. Для цього розглянемо подію С — «жодна з банок не розбилася», *C* = *AB* . Тоді

P(C) = 1 – P(C) = 1 – *P(AB)* = 1 – *P(A)* • *P(B)* = 1 – (1 – *P(A))*(1 – *P(B))* = 1 – 0,998 • 0,99 = 0,01198.

Отже, ймовірність втрат дорівнює 0,01198, а самі втрати можуть становити 60 000-0,01198=718,8 грн.

Задача 24. У біатлоніста є шість патронів. На вогневому рубежі він має влучити у чотири круги. Яка імовірність того, що завдання буде виконано, якщо ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,7?

Розв 'язання. Нехай подія А — «влучення у круг». Умову задачі можна перефразувати так: «Знайти ймовірність того, що в шести незалежних випробуваннях подія А відбудеться 4 рази, якщо в кожному випробуванні її ймовірність р = 0,7». Тоді за формулою Бернуллі

$$P_{4,6} = C_6^4 \bullet (0,7)^4 \bullet (1-0,7)^2 = 0,324135.$$

Задача 25. Виконують п'ять незалежних пострілів у ціль. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 2/3. Яка ймовірність того, що буде не менше ніж три влучення?

Розв'язання. Подія «Буде не менше ніж три влучення» означає, що буде 3,4 або всі 5 влучень:

$$\boldsymbol{P_5(m \geq 3) = C_5^3(2/3)^3 \bullet (1/3)^2 + C_5^4(2/3)^4 \bullet 1/3 + (2/3)^5}$$

$$\boldsymbol{= \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}.}$$

ВИСНОВКИ

Необхідність вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики у шкільному курсі математики була усвідомлена у вітчизняній освіті ще понад 100 років тому. У більшості розвинених країн ця необхідність реалізована вже давно. Наприклад, французькі школи з 1956 р. почали включати в програми з математики елементи статистики. Теорію ймовірностей і статистику в школах Японії вивчають з 1958 р.

Чим викликана необхідність поповнення змісту шкільної математичної освіти ймовірнісно-статистичною змістовою лінією?

Ця лінія насамперед має загальнокультурну, загальноосвітню значущість. Вона відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів. Зокрема, вона покликана розвинути такі спеціальні типи мислення, як імовірнісно-статистичний і комбінаторний, які необхідні сучасній людині як для соціального, так і для професійного становлення. Вивчення будь-якого розділу математики сприяє розумовому розвитку учнів, прищеплює їм навички логічного мислення. Вивчаючи ймовірність і статистику, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення до тих випадків, коли доводиться мати справу з невизначеністю. Нова змістова лінія покликана сформувати розуміння детермінованості і випадковості, допомогти усвідомити, що багато законів природи і суспільства мають ймовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описуються ймовірнісними моделями. Вивчення ймовірності, за словами А. Реньї , «сприятливо позначається і на характері учнів, наприклад розвиває сміливість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна просто віднести до випадковості і, отже, потерпівши невдачу, аж ніяк не слід відмовлятися від боротьби за досягнення наміченої мети». Змістова лінія, що розглядається, допомагає навчитися правильно сприймати інформацію, яка лавиною обрушується на людину.

Що стосується комбінаторики, то, за словами відомого голландського математика і педагога Г. Фройденталя , вона є скелетом елементарної теорії ймовірностей. Грубі помилки у простих задачах комбінаторики зустрічаються

навіть у студентів. Чому це відбувається? Адже власне математика, яка потрібна для розв'язання таких комбінаторних задач, є досить простою. Річ у тім, що своєчасно учні не набули відповідних умінь. У математиці є такі поняття, такі вміння, які формуються протягом тривалого терміну навчання (поняття множини, числа, вміння розв'язувати рівняння, нерівності, текстові задачі тощо). До таких самих умінь належать і вміння розв'язувати комбінаторні задачі. Ці вміння слід формувати поступово, повільно нарощуючи складність задач, використовуючи методи, які відповідають віку дитини. При цьому не слід обмежуватися виділенням якоїсь кількості годин у старших класах, а досягти неперервності у вивченні комбінаторики!

При вивченні традиційної математики мислення учнів утискується в тісні межі системи з двома наслідками «так» і «ні», чи «істина» і «хибність», чи «можливо» і «неможливо». Ця система не може відобразити різноманіття навколишнього світу. Але людину цікавить уся розмаїтість світу, усе, що знаходиться між двома відзначеними крайностями. Тому розширюється жорстка математична модель до надзвичайно гнучкої, яка значно збільшує можливості застосування математичних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авраменко М. І. Уроки алгебри і поч. аналізу в 10 і 11 кл. Посібник для вчителя / М. І. Авраменко - К.: 1989. - 318с.
2. Асеев Г. Г. Теорія ймовірностей та мат. статика. : Навч. посібник. М-во к-ри і мистецтв України / Г.Г. Асеев - Х.: ХДАК, 2006, - 89с.
3. Барко В. І. Як визначити творчі здібності дитини /В. І. Барко, А. М. Тютюнников - К.: Україна, 1991. - 78с.
4. Барковський В.В. Теорія ймов. та мат. статика /В. В. Барковський - К.: Центр навч. л-ри, 2009. - 422с.
5. Бартенев Ф. А. Нестандартні задачі з алгебри. Квант, 1982. - с. 36-38.
6. Бевз Г.П. Виховання учнів математикою /Г.П. Бевз - Х.: Основа, 2004 - 93с.
7. Бродський Я. Статистика, ймовірність, комбінаторика: 7-9кл. /Я. Бродський, О. Павлов. - К.: Шк. світ, 2007. - 128с.
8. Бузанкина Н. Е. Система развиваючих задач - Педагогика, 1980. - с. 136-142.
9. Бучір М.К. Посібник з теорії ймов. та мат. статики.: Навч. посібник для студ. /М.К. Бучір - Т.: Підручникиі посібники, 1998. - 176с.
10. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика /Н. Я. Виленкин. - 1976 - 48с.
11. Гайштут А. Г. Математика в логических рассуждениях /А. Г. Гайштут - К.: 1985. - 192с.
12. Груденов Я.И. Вдосконалення роботи учителя математики - 1990 - 223с.
13. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов - 8-е изд., стер. /В. Е. Гмурман - Высш. шк., 2002. – 220с.
14. Груденов Я.И. Вдосконалення роботи учителя математики - 2000 - 223с.
15. Єжов І. І. Елементи комбінаторики /І. І. Єжов, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко - К.: Вища школа, 1972. - 243с.
16. Ивлев Б. М. Дидактичні материіали з алгебри для 11 кл. /Б.М. Ивлев - 2006. - 190с.
17. Кибзун А.И. Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами /А. И. Кибзун, И.Р. Горяинова - К.: Освіта,

2009. - 170с.

18. Крайчук О. В. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики: Навчальний посібник /О.В. Крайчук, Г.К. Мошковська, О.П. Соколовська. – Рівне: ТОВ фірма «Прінт Хауз», 2004. - 128с.
19. Кремер Н. Ш. Теорія ймовірностей і математична статистика /Н. Ш. Кремер - ЮНИТ-ДАНА, 2010. - 159с.
20. Пасічник І. Д. Мислительна діяльність учнів на уроках математики /І. Д. Пасічник, Я. А. Пасічник - Львів, 1992. - 146с.
21. Реньи А. В.Трилогия о математике /А. В. Реньи - 1980. - 129с.
22. Рябчинська В. Д. Дидакт. матеріали з алгебри і поч. аналізу для 10-11 кл.: Посібник для вчителя /В. Д. Рябчинська - К.: Освіта, 2007.- 159с.
23. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання матем. /З. І. Слєпкань - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 240с.
24. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. - 2-ге вид., допов. і перобл. /З. І. Слєпкань - К.: Вища шк., 2008. - 206с.
25. Федченко Л. Я. Методика организации обобщения й систематизации знаний и умений при обучении учащихся математике /Л. Я. Федченко - К.: НПУ им. М. П. Драгоманова, 1998. - 200 с.
26. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи /Л.М. Фридман, Е. Н. Турецкий - 1989. - 48 с.
27. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. Психологии /Л. М. Фридман - 1983. - 160с.
28. Шкіль М.І. Алгебра та початки аналізу: Підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара - К.: Освіта, 2001. - 146с.