

**М.М. Семко, М.М. Пискун,
В. І. Панченко, В.В. Лаговський**

**Економіко-математичне
моделювання.
Математичне програмування.**

УДК 519.86

ББК 22.12

Е 45

*Затверджено Вченою радою Національного університету ДПС України.
Протокол № 4 від 22 листопада 2007 р.*

Рецензенти:

Кузенний М.Ф., доктор фізико-математичних наук, професор (Інститут математики НАН України).

Кучменко С.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент (Національний університет ДПС України).

Семко М.М., Пискун М.М., Панченко В.І., Лаговський В.В.

Е 45 Економіко-математичне моделювання. Математичне програмування: навчальний посібник. – Ірпінь: Національний університет ДПС України, 2008. – 240 с.

ISBN 978-966-337-139-9

У навчальному посібнику викладено теорію лінійного програмування, описано підходи до розв'язування таких задач. Розглянуто транспортну задачу лінійного програмування, а також задачі дробово-лінійного, нелінійного, динамічного програмування. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розглядом великої кількості практичних задач. До глав посібника вміщено задачі для самостійного розв'язування.

Рекомендовано студентам економічних спеціальностей денної і заочної форм навчання.

УДК 519.86

ББК 22.12

© Семко М.М., Пискун М.М.,
Панченко В.І., Лаговський В.В., 2008

© Національний університет
ДПС України, 2008

ISBN 978-966-337-139-9

ПЕРЕДМОВА

У реальних економічних умовах завжди існує множина можливих варіантів розв'язку будь-яких виробничих задач, починаючи з вибору і закінчуючи способом перевезення готової продукції. На практиці кожного разу необхідно розглядати велику кількість різних варіантів розв'язку однієї і тієї самої задачі, відкидаючи один і приймаючи інший. Природно, що різні варіанти вимагають неоднакових витрати і дають різні економічні ефекти. У зв'язку з цим у даних умовах виникає задача на знаходження найбільш ефективного варіанта дій.

Найбільш ефективний варіант дій називають оптимальним, пошуком якого займається спеціальна дисципліна – оптимальне планування.

Пошук оптимального плану це, як правило, складна задача, тому її неможливо розв'язати без широкого застосування економіко-математичних методів. Сучасні математичні методи дозволяють відшукати оптимальний план без прямого порівняння усіх можливих варіантів.

До таких економіко-математичних методів відносять і методи математичного програмування.

Пропонований посібник складено за програмою „Математичне програмування” для студентів економічних спеціальностей у вищих навчальних закладах освіти на основі досвіду викладання у Національному університеті державної податкової служби України.

У посібнику подано теоретичні основи методів, які застосовуються у математичному програмуванні. Значну увагу приділено розгляду задач лінійного програмування, описано графічний і симплексний методи їх розв'язання. Для розв'язування транспортної задачі застосовано метод потенціалів.

Глава 8 присвячена задачам нелінійного програмування. Розглянуто градієнтний та графічний методи, метод множників Лагранжа розв'язування цих задач.

Задачі динамічного програмування описано в главі 9 на прикладах знаходження розв'язків практичних задач розподілу ресурсів та заміни обладнання.

Поряд із відомостями теоретичного характеру в посібнику виконано велику кількість прикладів і задач, мета яких осмислення основних понять і математичних методів. У кінці кожної глави наведено задачі для самостійного розв'язування. Задачі підібрано і складено таким чином, щоб можна було використати для перевірки глибини засвоєння студентом вивченого матеріалу.

У кінці посібника вміщено список літератури.

ГЛАВА 1. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У реальних економічних умовах завжди існує множина можливих варіантів розв'язку будь-яких виробничих задач, починаючи з вибору і закінчуючи способом перевезення готової продукції. На практиці необхідно розглядати велику кількість різних варіантів розв'язку однієї і тієї самої задачі, відкидаючи один і приймаючи інший. Природно, що варіанти вимагають неоднакові витрати і дають різні економічні ефекти. У зв'язку з цим в даних умовах виникає задача на знаходження найбільш ефективного варіанта дій.

Найбільш ефективний варіант дій називають оптимальним, пошуком якого займається спеціальна дисципліна – оптимальне планування.

Пошук оптимального плану це, як правило, складна задача, тому її неможливо розв'язати без широкого застосування економіко-математичних методів. Сучасні математичні методи дозволяють відшукати оптимальний план без прямого порівняння усіх можливих варіантів. До таких економіко-математичних методів відносять і методи математичного програмування.

Математичне програмування – розділ прикладної математики, який вивчає задачі пошуку екстремуму функції при певних обмеженнях і розробляє методи їх розв'язування.

Умовно задачі математичного програмування можна розбити на задачі:

- лінійного та нелінійного програмування (залежно від вигляду невідомих математичної моделі задачі);
- динамічного і статичного програмування (з урахуванням чи без урахування часу);
- детермінованого та стохастичного програмування (залежно від характеру вихідних параметрів моделі задачі).

Якщо невідомі до складу економіко-математичної моделі задачі входять лише у першому степені, то ми матимемо задачу лінійного програмування (далі – ЗЛП).

Початком розвитку лінійного програмування вважається 1949 рік, коли американський математик Дж. Данціг опублікував обчислювальний алгоритм для розв'язування задач лінійного програмування. З того часу фактично почалося феноменальне зростання інтересу до теорії і практики лінійного програмування. І вже досить швидко були одержані фундаментальні результати в лінійному програмуванні, які сьогодні стали класичними. Водночас дослідження у галузі лінійного програмування продовжуються. Упродовж останніх років з'явився ряд нових цікавих результатів, зокрема методи лінійного програмування Хачіяна і Кармаркара, аналіз Боргвардта швидкості збіжності симплекс-методу в середньому тощо.

У подальшому ми більш детально зупинимось на методах розв'язування задач лінійного програмування. Що ж таке задача лінійного програмування?

Звернемося спочатку до конкретних прикладів економічних задач лінійного програмування і побудови їх математичної моделі.

Приклад 1.1. Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва)

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види сировини S_1, S_2, S_3, S_4 . Запаси сировини, кількість одиниць сировини кожного виду, які витрачають на виготовлення одиниці продукції, занесено в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

Види сировини	Запаси сировини	Кількість одиниць сировини, які витрачаються на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	22	2	1
S_2	25	1	4
S_3	6	3	0
S_4	17	0	2

Прибуток, який одержується від реалізації одиниці продукції P_1 і P_2 , відповідно становить 50 і 60 грн.

Треба скласти такий план випуску продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальний.

Тепер складемо математичну модель цієї економічної задачі.

Нехай x_1 – кількість одиниць продукції виду P_1 , яку необхідно виготовити, а x_2 – кількість одиниць продукції виду P_2 . Як видно із таблиці 1.1, для їх виготовлення треба $(2x_1 + x_2)$ одиниць сировини виду S_1 , $(x_1 + 4x_2)$ одиниць сировини виду S_2 , $(3x_1)$ одиниць сировини виду S_3 і $(2x_2)$ одиниць сировини виду S_4 . Оскільки використання сировини видів S_1, S_2, S_3 і S_4 не повинно перевищувати запасів, то зв'язок між використанням сировини і її запасами виражається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 + 4x_2 \leq 25, \\ 3x_1 \leq 6, \\ 2x_2 \leq 17. \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{За змістом задачі змінні } x_1 \geq 0 \text{ і } x_2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Загальний прибуток $F(x)$ складе $50x_1$ гривень від реалізації продукції P_1 і $60x_2$ гривень від реалізації продукції P_2 , тобто:

$$F(x) = 50x_1 + 60x_2. \quad (1.3)$$

Таким чином, економіко-математична модель даної задачі така: знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, який задовольняє системі нерівностей (1.1), умови (1.2) і при якому функція (1.3) приймає максимальне значення.

Ми розглянули дану задачу для двох видів продукції і чотирьох видів сировини. Її легко узагальнити на випадок випуску n видів продукції з використанням m видів сировини.

Позначимо через x_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) – кількість одиниць продукції P_j , запланованої для випуску; b_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) – запаси сировини S_i , a_{ij} – кількість одиниць сировини виду S_i , які витрачаються на виготовлення одиниці продукції P_j (числа a_{ij} називаються технологічними коефіцієнтами); c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції P_j .

денному раціоні. Беручи до уваги значення, подані в таблиці, і умову, що денний раціон задовольняє потрібну поживність тільки у випадку, якщо кількість одиниць поживних речовин не менша передбаченої, одержуємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \quad (1.7)$$

Якщо корм B_1 не використовується у раціоні, то $x_1 = 0$, якщо використовується, то $x_1 > 0$. Аналогічно для x_2 . Тобто величини x_1 і x_2 повинні задовольняти умови: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$. (1.8)

Мета даної задачі – домогтися мінімальних витрат на денний раціон, тому загальну вартість раціону можна виразити функцією:

$$F(x) = 4x_1 + 6x_2. \quad (1.9)$$

Задача є багатоваріантною, x_1 та x_2 можуть приймати нескінченну множину значень. Із цієї множини значень потрібно вибрати такі x_1 і x_2 , при яких функція $F(x)$ приймає мінімальне значення.

Таким чином, треба знайти мінімум функції $F(x) = 4x_1 + 6x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Щоб записати задачу складання раціону в загальному вигляді, позначимо:

x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – кількість одиниць кормів n -го виду; b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) – необхідний мінімум вмісту в раціоні поживної речовини S_i ; a_{ij} – кількість одиниць поживної речовини S_i в одиниці кормів B_j ; c_j – вартість одиниці кормів j -го виду.

Тоді економіко-математична модель задачі набуде вигляду: знайти такий раціон $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє систему нерівностей:

(1.10)

(1.11)

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i + \dots c_n x_n \quad (1.12)$$

Приклад 1.3 (задача про раціональний розкрій матеріалів)

Складемо економіко-математичну модель цієї задачі. Нехай m – кількість різних заготовок; P_i – план випуску заготовок i -го виду ($i = 1, 2, \dots, m$); N – кількість різних способів розкрою матеріалу стандартного розміру; p_{ij} – кількість одиниць заготовок i -го виду, одержаних за допомогою j -го способу розкрою; c_j – відходи при j -му способі розкрою ($j = 1, 2, \dots, n$).

За невідому x_j ($j=1,2,\dots,n$) беремо кількість вихідного матеріалу, яку потрібно розрізати j -м способом; через $F(x)$ позначимо загальну кількість відходів.

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n.$$

Усі моделі задач складаються із двох частин: у першій записують рівняння або нерівності, що мають задовольняти реальні умови задачі, у другій у вигляді функції – кінцевий ефект. Першу частину математичної моделі задачі називають системою обмежень, другу – цільовою функцією або оптимізуючою формою.

Системи обмежень можуть мати різну структуру: складатися з рівнянь, нерівностей одного знака, різних знаків або одночасно рівнянь і нерівностей. Цільова функція оптимізується на екстремум (тобто максимум або мінімум).

Оскільки система обмежень має різну структуру, виникає потреба у створенні методів, які б дали змогу зводити будь-яку математичну модель до конкретної задачі, для якої існують методи пошуку найкращих розв'язків.

Розглянуті вище приклади задач лінійного програмування дозволяють сформулювати загальну задачу лінійного програмування.

Дано систему m лінійних рівнянь і нерівностей з n невідомими.

[illegible]

і лінійну функцію $F(x)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$. (1.15)

Потрібно знайти такий розв'язок системи

$X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, де $x_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, n$), при якому лінійна функція (1.15) приймає оптимальне (тобто *max* чи *min*) значення.

За умови, що всі змінні невід'ємні ($x_j \geq 0$, $j=1, 2, \dots, n$), система обмежень (1.14) складається лише із нерівностей, то така задача лінійного програмування називається стандартною (симетричною), якщо система обмежень складається лише з одних рівнянь, то задача ЛПІ називається канонічною (основною). Так, у наведених вище прикладах задач ЛПІ задачі 1 і 2 є стандартними, задача 3 – канонічною.

Особливістю стандартної форми запису є те, що, коли задача ЛПІ на знаходження *max*, то усі основні обмеження є нерівностями із знаком $\leq$, якщо на знаходження *min*, то із знаком $\geq$. Крім того, як у першому, так і в другому випадках на усі невідомі накладається умова невід'ємності. Особливістю канонічної форми є те, що усі основні обмеження є рівняннями, а на всі невідомі також накладається умова невід'ємності.

Необхідність існування різних форм запису пов'язана з тим, що існують різні методи розв'язування задач ЛПІ, і для кожного із них задача повинна бути подана у певній формі.

Задані вище три форми запису є еквівалентними, оскільки за допомогою певних перетворень можна перейти від однієї форми запису до іншої.

1. При необхідності задачу мінімізації можна замінити задачею максимізації і навпаки.

Нехай $\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, тоді

$$\min(-F) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

Наприклад, $\max F = 3x_1 + 2x_2 - x_3$, тоді

$$\min(-F) = -3x_1 - 2x_2 + x_3.$$

Нехай $\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, тоді

$$\max(-F) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

Наприклад, $\min F = -x_1 + 2x_2 - x_3$, тоді

$$\max(-F) = x_1 - 2x_2 + x_3.$$

2. Нерівність типу $\leq$ можна перетворити у нерівність $\geq$ шляхом множення обох частин на -1 , а саме:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i.$$

Наприклад, $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 5 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq -5$.

3. Будь-яку нерівність можна подати у вигляді рівняння, а саме:

а) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$;

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i, \text{ де } x_{n+1} \geq 0.$$

б) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$;

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i, \text{ де } x_{n+1} \geq 0.$$

Наприклад, $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$;

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5, \text{ де } x_4 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4;$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \text{ де } x_4 \geq 0.$$

4. Будь-яке рівняння виду:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,$$

можна подати у вигляді системи двох нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{cases}$$

Наприклад: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4. \end{cases}$

5. Будь-яку невідому, яка може бути як додатною, так і від'ємною, можна подати у вигляді різниці 2-х невід'ємних невідомих, тобто:

$$x_j = x_j'' - x_j', \text{ де } x_j'' \geq 0, x_j' \geq 0.$$

Система лінійних обмежень та її геометрична інтерпретація

Для геометричної інтерпретації візьмемо задачу лінійного програмування, записану в стандартній формі. Для наочності розглянемо найпростіший випадок, коли в системі обмежень і в цільовій функції є лише дві невідомі x_1 і x_2 . Результати, як правило,

З рис. 1.1 випливає, що над прямою $x_2 > \frac{b_1}{a_{i2}} - \frac{a_{i1}}{a_{i2}} x_1$, під прямою $x_2 < \frac{b_1}{a_{i2}} - \frac{a_{i1}}{a_{i2}} x_1$, у припущенні, що $a_{i2} > 0$. Тоді над прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_1$, під прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_1$.

Отже, геометричним способом нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_1$ буде півплощина, границею якої є пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_1$. Твердження доведено. Побудовану півплощину називають півплощиною розв'язків нерівності, а межу – граничною прямою.

Зрозуміло, що кожна нерівність буде мати свою півплощину розв'язків і свою граничну пряму.

Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (1.16), називають многокутником розв'язків.

Многокутник розв'язків завжди є опуклою множиною.

Тому задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де функція $F(x)$ набуває найменшого (найбільшого) значення.

Областю допустимих розв'язків задачі ЛП може бути опуклий многокутник (рис. 1.2, а), необмежена опукла многокутна область (рис. 1.2, б), відрізок (рис. 1.2, в), промінь (рис. 1.2, г), одна точка (рис. 1.2, д) або порожня множина (рис. 1.2, е).

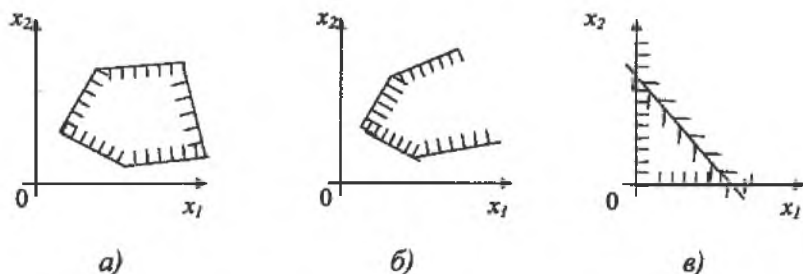
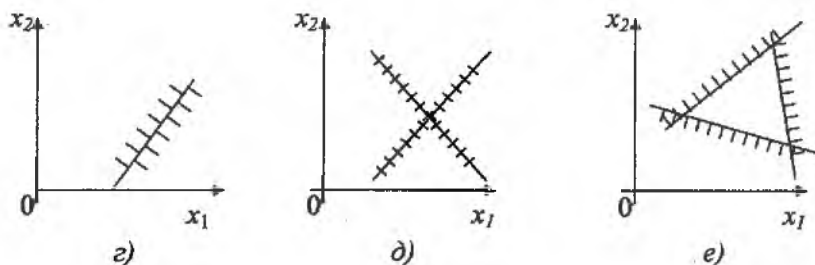


Рис. 1.2



Продовження рис. 1.2

Цільова функція F являє собою на площині x_1, x_2 сім'ю паралельних прямих, які називають лініями рівня і кожній із яких відповідає певне значення F . Перпендикулярний до цих прямих вектор $\vec{p} = (c_1; c_2)$ вказує напрям найшвидшого зростання функції F , і задача ЛП полягає у наступному: необхідно знайти точку допустимої області, через яку проходить пряма сім'ї F , яка відповідає найбільшому значенню функції.

При розв'язуванні задачі лінійного програмування графічним способом можуть виникнути такі випадки: задача має єдиний розв'язок (рис. 1.3, а); задача має нескінченну множину розв'язків (рис. 1.3, б); функція F не має екстремального значення (рис. 1.3, в).

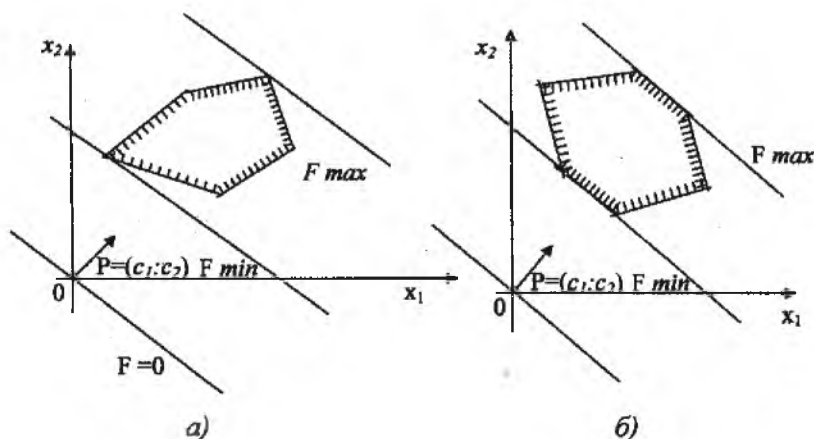
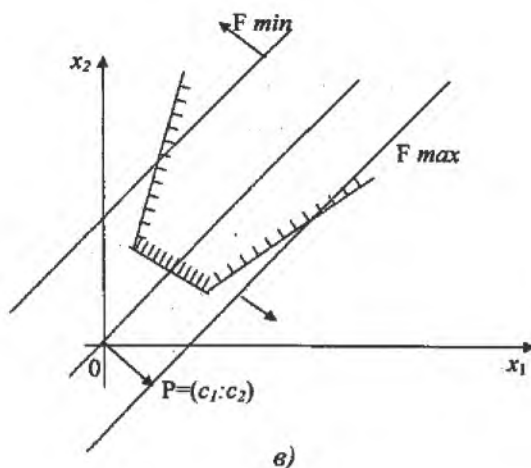


Рис. 1.3



Продовження рис. 1.3

Розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом можна проводити за такою схемою:

1) записати рівняння граничних прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ і побудувати їх на площині x_1Ox_2 ;

2) визначити півплощини, які відповідають вихідним обмеженням – нерівностям. Для цього треба взяти довільну точку, яка лежить по той чи інший бік прямої, і її координати підставити в ліву частину обмеження – нерівності. Якщо координати точки задовольняють його, то шуканою буде півплощина, яка містить дану точку, якщо координати точки не задовольняють його, то шуканою буде півплощина, якій дана точка не належить;

3) виділяють область допустимих розв'язків задачі як спільну частину $m+2$ півплощин, де m півплощин відповідають вихідним обмеженням – нерівностям, а 2 півплощини – умовам невід'ємності невідомих x_1 і x_2 ($x_1 \geq 0$ – права координатна півплощина, $x_2 \geq 0$ – верхня координатна півплощина);

4) будуємо вектор $\vec{p} = (c_1, c_2)$ і перпендикулярно до нього одну із прямих сімейства прямих F , наприклад $F=0$;

5) визначаємо екстремальну точку многокутника розв'язків шляхом паралельного переміщення допоміжної прямої $F = 0$ у напрямку вектора $\vec{P}$. Це буде найбільш віддалена крайня точка, в якій пряма F зустрічається з областю допустимих розв'язків задачі. Ця точка відповідатиме максимуму функції. Якщо треба знайти точку, якій відповідає мінімальне значення функції F , то допоміжну пряму переміщують у напрямку вектора $\vec{P}$ до перетину з першою точкою області допустимих розв'язків;

6) обчислюють координати оптимальної точки і значення функції F .

Приклад 1.4. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\max F(x) = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

графічним способом.

Розв'язання

Запишемо рівняння граничних прямих і побудуємо їх в площині x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6; \\ x_1 + 4x_2 &= 4; \\ 2x_1 - x_2 &= 0; \\ x_1 &= 0; x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо многокутник розв'язків ABCD. Будуємо вектор $\vec{P} = (2; 3)$.

Перпендикулярно вектору $\vec{P}$ проводимо пряму $F = 0$, тобто $2x_1 + 3x_2 = 0$.

Паралельним переміщенням прямої $F = 0$ знаходимо крайню точку B, в якій функція $F(x)$ досягає максимуму. Координати точки B визначаємо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 6, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4; \end{cases}$$

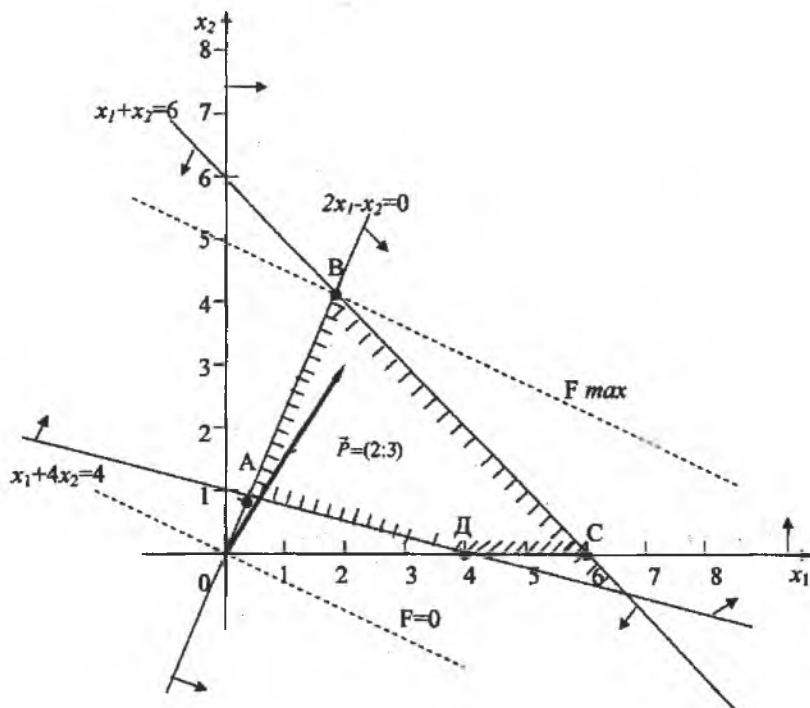


Рис. 1.4

Отже, точка $B(2; 4)$

$$F_{\max} = F(2; 4) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16.$$

Відповідь: $F_{\max} = 16$.

Приклад 1.5. Цех випускає два види виробів на трьох дільницях. У таблиці 1.3 подано час (у годинах), потрібний для виготовлення кожного з цих двох видів виробів на кожній з дільниць, та можливий час роботи дільниці (у годинах).

Таблиця 1.3

Дільниці	Вироби		Можливий час роботи дільниці (у годинах)
	B_1	B_2	
D_1	3	6	30
D_2	0	4	16
D_3	2	0	12

Цеху нараховують прибуток: 3 гривні від реалізації одного виробу виду B_1 і 4 гривні від реалізації одного виробу виду B_2 .

Потрібно скласти такий план випуску кожного із видів виробів, щоб мати максимальний прибуток від їх реалізації.

Розв'язання

Складемо спочатку математичну модель даної задачі. Нехай x_1 – число виробів виду B_1 , а x_2 – число виробів виду B_2 .

На дільниці D_1 витрачають $3x_1$ годин на виготовлення виробів виду B_1 і $6x_2$ годин на вироби виду B_2 , разом $(3x_1+6x_2)$ год., але не більше 30 годин, тобто $3x_1+6x_2 \leq 30$.

На дільниці D_2 витрачають 0 годин на вироби виду B_1 і $4x_2$ годин на вироби виду B_2 , тобто $4x_2 \leq 16$.

На дільниці D_3 витрачають $2x_1$ годин на виготовлення виробів виду B_1 і 0 годин на виготовлення виробів виду B_2 , тобто

$$2x_1 \leq 12.$$

Від реалізації x_1 виробів виду B_1 цеху нараховується $3x_1$ гривень прибутку і від реалізації x_2 виробів виду B_2 – $4x_2$ гривень прибутку. Загальний прибуток цеху становить $(3x_1 + 4x_2)$ гривень.

За умовою задачі $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Таким чином, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F(x) = 3x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо її графічним способом.

Для побудови області допустимих розв'язків даної задачі побудуємо на площині $x_1 O x_2$ граничні прямі:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 30, \\ 4x_2 &= 16, \\ 2x_1 &= 12, \\ x_1 &= 0, x_2 &= 0. \end{aligned}$$

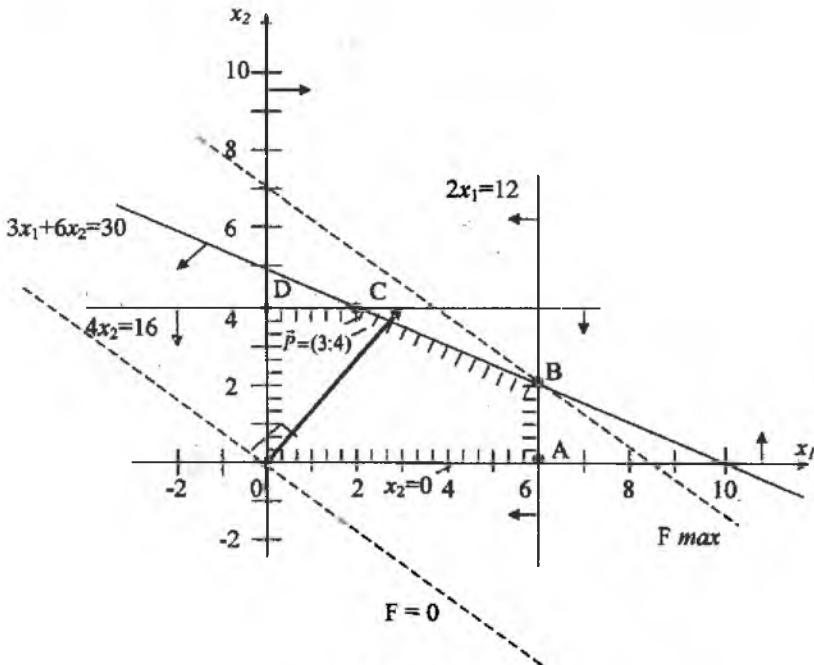


Рис. 1.5

Далі будемо вектор $\vec{P} = (3; 4)$. Початок вектора $\vec{P}$ на початку координат, а кінець у точці $(3; 4)$. Проводимо лінію рівня $F = 0$, перпендикулярно вектора $\vec{P}$.

Рухаючись за лініями рівня у напрямку вектора $\vec{P}$, переконаємося, що F_{max} знаходиться у точці B. Знаходимо координати точки B, як точки перетину прямих $3x_1 + 6x_2 = 30$ і $2x_1 = 12$.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 30, \\ 2x_1 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 6 + 6x_2 = 30, \\ x_1 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_2 = 12, \\ x_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 = 6. \end{cases}$$

Отже, $B(6; 2)$. Тоді:

$$F_{\max} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 18 + 8 = 26.$$

Відповідь. Найбільший прибуток цеху від реалізації виробів виду B_1 і виду B_2 становить 26 грн.

Приклад 1.6. Графічним способом розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\min(\max) F(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Будуємо многокутник розв'язків, який складається із перетину чотирьох півплощин розв'язків нерівностей $x_1 + 2x_2 \geq 4$, $2x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Проведемо на площині $x_1 O x_2$ граничні прямі цих півплощин

$$x_1 + 2x_2 = 4, \quad x_2 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 = 0.$$

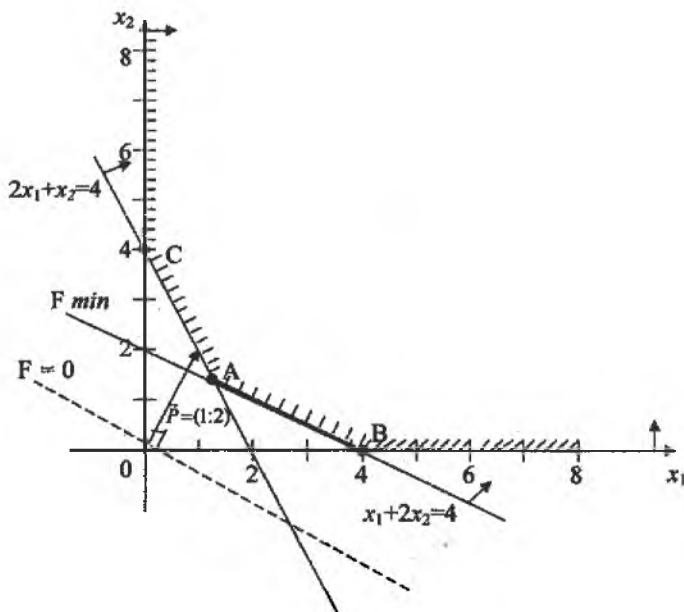


Рис. 1.6

Усі півплощини розв'язків напрямлені від початку системи координат. Многокутник розв'язків (рис. 1.6) необмежений.

2. Будуємо вектор $\vec{P}$ і проводимо лінії рівня. Вектор $\vec{P} = (1; 2)$.

3. Оскільки многокутник розв'язків необмежений, то вектор $\vec{P}$ вказує на те, що $F \max$ не існує. $F \min$ знаходиться на відрізку AB . Точка B має координати $(4; 0)$, тому

$$F \min = 4 + 2 \cdot 0 = 4.$$

Це саме значення $F \min$ ми дістанемо, якщо у цільову функцію підставимо координати точки A .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ -2x_1 - 4x_2 = -8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 = -4, \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3}, \\ x_1 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

$$F \min = \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Приклад 1.7. Мале підприємство спеціалізується на виробництві збірних книжкових полиць двох видів – Π_1 і Π_2 . Полиці обох моделей обробляють на верстатах B_1 і B_2 . Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці кожного виду подано у таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

Верстати	Тривалість обробки однієї полиці, за видами (у хвилинах)	
	Π_1	Π_2
B_1	30	15
B_2	12	26

Час роботи верстатів B_1 і B_2 становить відповідно 40 та 36 год на тиждень. Прибуток підприємства від реалізації однієї полиці виду Π_1 дорівнює 50 грн, а виду Π_2 – 30 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці виду Π_1 ніколи не перевищує попиту на вид Π_2 більш як на 30 одиниць, а попит на полиці Π_2 не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних видів, що дають малому підприємству максимум прибутку.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1 – кількість полиць виду Π_1 , які виготовляються підприємством за тиждень, а x_2 – кількість полиць виду Π_2 .

Загальний прибуток, який одержить підприємство від реалізації всіх полиць, виражається функцією $F(x) = 50x_1 + 30x_2$.

Обмеження математичної моделі враховують час роботи верстатів B_1 та B_2 для обробки продукції і попит на полиці різних видів.

Обмеження на час роботи верстатів мають вигляд:

для верстата B_1 – $30x_1 + 15x_2 \leq 2\,400$ хв;

для верстата B_2 – $12x_1 + 26x_2 \leq 2\,160$ хв.

Обмеження на попит мають такий вигляд:

$$x_1 - x_2 \leq 30 \text{ і } x_2 \leq 80.$$

Математична модель даної задачі записується так:

$$\max F(x) = 50x_1 + 30x_2;$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400, \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160, \\ x_1 - x_2 \leq 30, \\ x_2 \leq 80, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо одержану задачу лінійного програмування графічним методом. Побудуємо спочатку багатокутник допустимих розв'язків задачі. Для цього знаки нерівностей системи обмежень замінимо знаками рівностей:

$$30x_1 + 15x_2 = 2400,$$

$$12x_1 + 26x_2 = 2160,$$

$$x_1 - x_2 = 30,$$

$$x_2 = 80,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Зобразимо на координатній площині x_1Ox_2 прямі, що відповідають утвореним рівнянням, і визначимо півплощини, які задовольняють кожну нерівність, позначивши її напрямком стрілочкою (рис. 1.7).

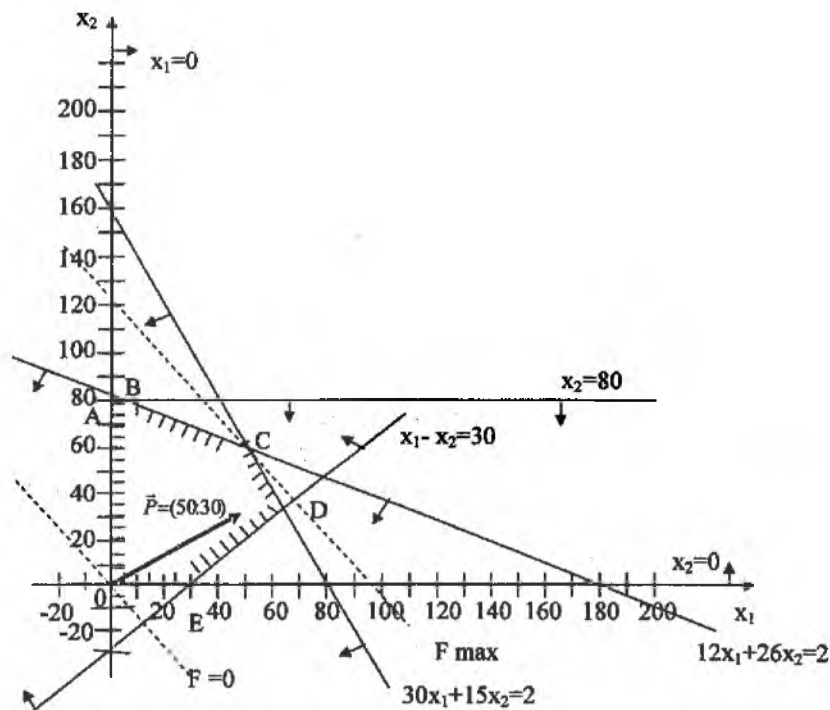


Рис. 1.7

Многокутник ОАВСДЕ – область допустимих розв'язків задачі.

Далі будемо вектор $\vec{p}=(50;30)$. Перпендикулярно до нього пряму $F=0$. У напрямку вектора $\vec{p}$ знаходимо останню спільну точку цієї прямої і многокутника допустимих розв'язків, це є точка С.

Знаходимо координати точки С, як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 12x_1 + 26x_2 = 2160, \\ 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 6x_1 + 13x_2 = 1080, \\ 2x_1 + x_2 = 160; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 13x_2 = 1080, \\ -6x_1 - 3x_2 = -480; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_2 = 600, \\ 2x_1 + x_2 = 160; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 60, \\ x_1 = 50. \end{cases}$$

Точка C(50; 60)

$$\max F(x) = \max F(50; 60) = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 2\,500 + 1\,800 = 4\,300 \text{ грн.}$$

Таким чином, мале підприємство має щотижня виготовляти 50 полиць першого виду і 60 одиниць другого виду, тоді від реалізації виготовленої продукції воно одержить максимальний прибуток у 4 300 грн. При цьому тижневий фонд роботи верстатів B₁ і B₂ буде використано повністю.

Приклад 1.8. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

$$\min(\max) F(x) = -9x_1 - 6x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -19, \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -25, \\ 4x_1 + x_2 \leq 41, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Для знаходження області допустимих розв'язків задачі будемо на координатній площині x_1, x_2 граничні прямі, які відповідають обмеженням – нерівностям. Знаходимо півплощини, в яких виконуються дані нерівності. Для цього досить взяти довільну точку, через яку не проходить відповідна гранична пряма, і переконатися, чи задовольняють координати цієї точки нерівність. Якщо задовольняють, то дана нерівність виконується на півплощині, яка містить пробну точку. У протилежному випадку береться півплощина, яка не містить пробної точки. Для нашої задачі областю допустимих розв'язків є многокутник ABCDEF (рис. 1.8).

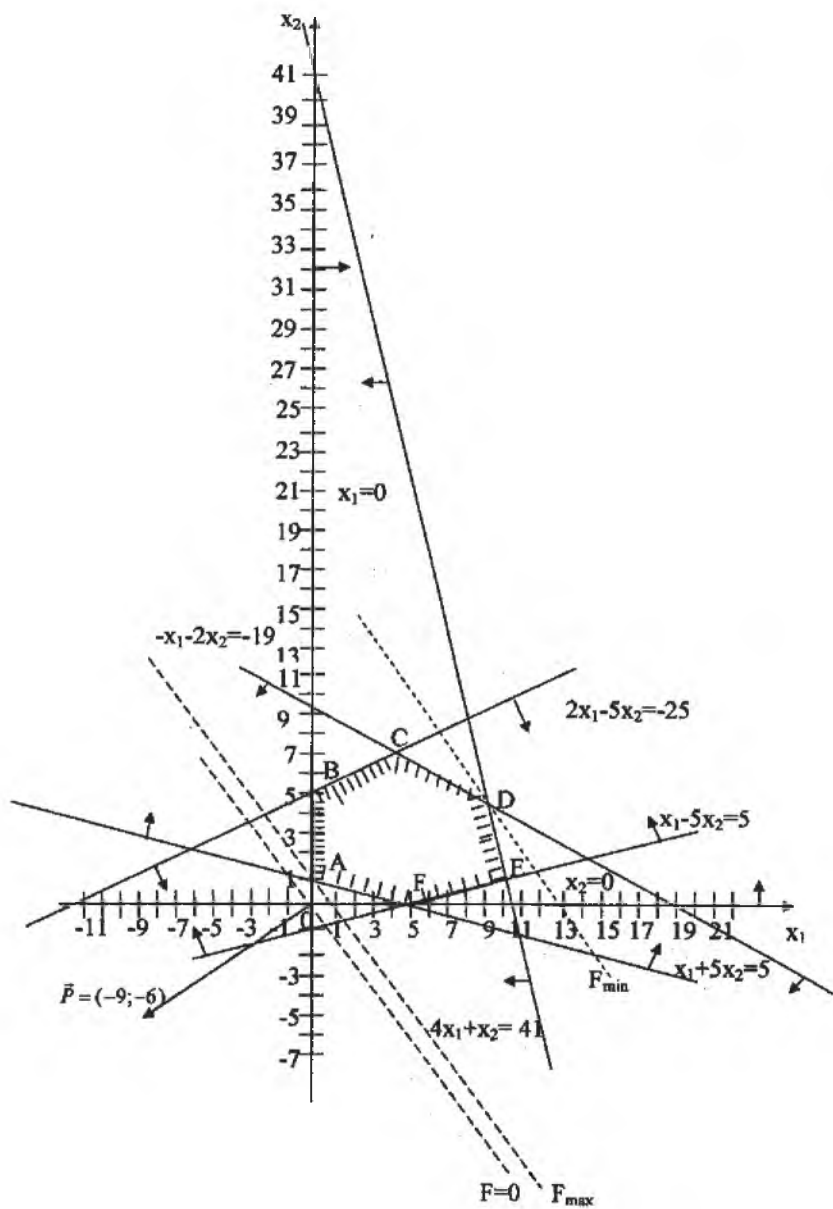


Рис 1.8

Будуємо вектор $\vec{P} = (-9; -6)$. Перпендикулярно до вектора $\vec{P}$ проводимо пряму $F = 0$. Знаходимо найвіддаленішу точку Д многокутника допустимих розв'язків, яка відповідає мінімуму функції, і найближчу точку А, яка відповідає максимуму.

Координати точки Д знаходимо із системи:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = -19, \\ 4x_1 + x_2 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -76, \\ 4x_1 + x_2 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x_2 = -35, \\ 4x_1 + x_2 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ x_1 = 9 \end{cases}$$

$$D(9; 5)$$

$$\min F(x) = \min F(9; 5) = -9 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = -81 - 30 = -111.$$

$$A(0; 1)$$

$$\max F(x) = \max F(0; 1) = -9 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6.$$

Завдання для самостійної роботи

Записати задачі ЛП у канонічному виді:

1.1. $\min Z = -x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 3x_5$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ -5x_1 + x_2 + x_5 \geq 8 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

1.2. $\max Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

1.3. $\min Z = x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

$$1.4. \max Z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \\ x_2, x_5 - \text{любого знака.} \end{cases}$$

Записати задачі ЛП у симетричній формі. Знайти всі базисні розв'язки системи нерівностей:

$$1.5. \max Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

$$1.6. \min Z = -x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 12 \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 18 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

$$1.7. \min Z = 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

Привести задачі лінійного програмування до канонічної форми запису

$$1.8. \max Z = 2x_1 + x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.9. $\min Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.10. $\max Z = 4x_1 - x_2 + 3x_3;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \leq 16 \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

1.11. $\min Z = 8x_1 + x_2 + 4x_3;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ 3x_1 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Привести задачі лінійного програмування до симетричної форми запису:

$\max Z = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9;$

$\max Z = 2x_1 + x_2 + 8x_3;$

1.12.
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 5). \end{cases}$$

1.13.
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4). \end{cases}$$

Привести задачі лінійного програмування до симетричної та канонічної форми запису:

$$1.14. \begin{cases} \max(2x_1 + x_2 + x_3), \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16, \\ 4x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} \min(x_1 - 3x_2 + 2x_3), \\ 2x_1 - x_3 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} \max(4x_1 - x_2 + 3x_3), \\ 4x_1 + x_2 \leq 16, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} \min(8x_1 + x_2 + 4x_3), \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 - x_3 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} \max(3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5), \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 - x_5 \geq 10, \\ 2x_2 + 2x_4 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} \max(-2x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4), \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 20, \\ 2x_1 + 14x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 4, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} \max(20x_1 + 4x_2 + 10x_3), \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq -2, \\ 2x_1 + 14x_2 - x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \geq -4, \\ 5x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} \min(2x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} \max(2x_1 + 6x_2 + 7x_3), \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} \max(3x_1 + 4x_2), \\ 1 \leq 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} \min(6x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 12x_4), \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} \max(x_1 + \frac{3}{2}x_2), \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} \min(x_1 - 10x_2), \\ x_1 - 0,5x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} \max(-x_1 + x_2), \\ 2x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} \min(-x_1 + x_2), \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ 1 \leq x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} \max(5x_1 + 4x_2 + 6x_3), \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} \min(3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4), \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$1.31. \begin{cases} \max(2x_1 + 3x_2 + 2x_3), \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + 4x_3 \geq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 1.32. \begin{cases} \min(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4), \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 5, \\ 3 \leq 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 13, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases} & 1.33. \begin{cases} \min(x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4), \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_3 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{array}$$

Розв'язати графічним методом задачі лінійного програмування:

$$\begin{array}{ll}
 1.34. \text{ а) } \begin{cases} \min Z = 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} \max Z = 16x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 - 5x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 16 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1.35. \text{ а) } \begin{cases} \max Z = 6x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} \min Z = 6x_1 + 10x_2 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 60 \\ 8x_1 + 16x_2 - x_3 - x_5 = 108 \\ 8x_1 + 18x_2 - x_4 - x_5 = 120 \\ x_j \geq 0; (j = \overline{1,5}). \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1.36. \text{ а) } \begin{cases} \max Z = 2,5x_1 + 3x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2. \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} \min Z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ x_2 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0; (j = \overline{1,6}). \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1.37. \text{ а) } \begin{cases} \min Z = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 37 \\ 5x_1 + x_2 \leq 49 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} \max Z = 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_j \geq 0; (j = \overline{1,5}). \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1.38. \text{ а) } \left\{ \begin{array}{l} \min Z = 2x_1 - 6x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{array} \right. & \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \max Z = -x_1 + x_3 + 7x_4 + 7x_5 \\ x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 55 \\ x_2 + 12x_4 + 11x_5 = 132 \\ x_1 + 3x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{array} \right. \\
 \\
 1.39. \text{ а) } \left\{ \begin{array}{l} \max Z = 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{array} \right. & \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \min Z = 3x_3 + x_6 \\ x_1 + x_2 - x_5 + 2x_6 = 20 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 50 \\ -x_2 + x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 = 72 \\ x_j \geq 0; (j = \overline{1,6}). \end{array} \right.
 \end{array}$$

1.40. Фірма випускає продукцію двох видів Π_1 і Π_2 , на виготовлення якої витрачається чотири види сировини A_1, A_2, A_3, A_4 . Витрати сировини на одиницю продукції подані в таблиці:

Вид сировини	Π_1	Π_2	Запас сировини
A_1	2	3	19
A_2	2	1	13
A_3	0	3	15
A_4	3	0	18
Дохід від реалізації одиниці продукції (у.г.о.)	7	5	

Знайти такий план випуску продукції, при якому фірма отримає найбільший прибуток. Розв'язати графічно.

1.41. Фірма займається виготовленням столів і тумбочок. Відомо, що від виробництва стола фірма отримає прибуток 100 у.г.о., а тумбочки – 35 у.г.о. Як фірмі необхідно організувати виробництво столів і тумбочок, якщо на виробництво стола витрачається $0,1 \text{ м}^3$ сосни і $0,5 \text{ м}^3$ липи, а на виробництво тумбочки – $0,04 \text{ м}^3$ сосни і $0,15 \text{ м}^3$ липи. Фірма має 100 м^3 сосни та 130 м^3 липи.

1.42. На виготовлення одного стола потрібно $0,15 \text{ м}^2$ деревини, а однієї шафи – $0,2 \text{ м}^2$ деревини, причому дохід, отриманий

від реалізації одного стола, дорівнює 100 у.г.о. (умовних грошових одиниць), а однієї шафи – 160 у.г.о. Скільки столів і шаф необхідно виготовити із 600 м³ деревини, щоб забезпечити найбільший дохід від їх реалізації?

1.43. Дільниця цеху випускає вироби двох видів. На один виріб I виду витрачається 5 кг міді та 1 кг алюмінію, а на виріб II виду 3 кг міді та 2 кг алюмінію. Від реалізації одного виробу I виду дільниці нараховується прибуток – 2 грн, а від реалізації одного виробу II виду – 3 грн. Скільки виробів кожного виду повинна випустити дільниця, щоб отримати найбільшу суму прибутку, якщо дільниця має 45 кг міді та 16 кг алюмінію?

Знайти найбільше та найменше значення функції, використовуючи графічний метод у задачах:

$$1.44. \begin{cases} z = 3x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.45. \begin{cases} z = x_1 + 4x_2 + 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.46. \begin{cases} z = -2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.47. \begin{cases} z = 2x_1 - 4x_2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.48. \begin{cases} z = -2x_1 + 3x_2 + 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.49. \begin{cases} z = 5x_1 - x_2 \\ 5x_1 - 3x_2 \geq 32 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.50. \begin{cases} z = -2x_1 - 5x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 120 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 60 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.52. \begin{cases} z = 5 - 4x_1 + 3x_2 \\ 7x_1 + 12x_2 \geq 49 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.54. \begin{cases} z = 2x_1 + 4x_2 + 15 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.56. \begin{cases} 1z = 5x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$1.58. \begin{cases} z = 3x_1 + 4x_2 + 8 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.51. \begin{cases} z = -3x_1 + 6x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 25 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$1.53. \begin{cases} z = -4x_1 - 2x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 80 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.55. \begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 43 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.57. \begin{cases} z = 6x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.59. \begin{cases} z = 2x_1 + 3x_2 + 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.60. \begin{cases} z = 2x_1 + 4x_2 + 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.62. \begin{cases} z = 4x_1 + 3x_2 + 20 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.64. \begin{cases} z = 3x_1 + 6x_2 + 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 1 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.66. \begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 + 16 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.68. \begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 + 18 \\ x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.61. \begin{cases} z = 5x_1 + 6x_2 - 27 \\ 8x_1 + 7x_2 \geq 56 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 34 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.63. \begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 - 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.65. \begin{cases} z = 7x_1 + 3x_2 + 20 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.67. \begin{cases} z = 7x_1 + 3x_2 + 20 \\ 6x_1 - 5x_2 \leq 30 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.69. \begin{cases} z = -2x_1 + 3x_2 + 12 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & z = 4x_1 - 5x_2 \\
 1.70. \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_1 - 1 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & z = x_1 - 8x_2 \\
 1.71. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

ГЛАВА 2. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Нагадаємо, що, розв'язуючи сумісну систему m лінійних рівнянь з n невідомими, у випадку, коли вона має нескінченну множину розв'язків, одержуємо загальний розв'язок, виражаючи базисні невідомі через вільні. Якщо в загальному розв'язку вільним невідомим надати значення рівні нулю, то одержимо базисний розв'язок. Невід'ємний базисний розв'язок називається опорним розв'язком або опорним планом.

Зауважимо, що система m лінійних рівнянь з n невідомими може мати кілька базисних розв'язків, залежно від того, які невідомі вибрано за базисні. Тому опорних розв'язків також може бути кілька.

Ідея симплексного методу розв'язування ЗЛП полягає в переході від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб значення цільової функції оптимізувалося (зростало або спадало залежно від мети оптимізації вихідної задачі). При цьому змінні величини, які переходять із базисних у вільні, обираються так, щоб зберігалася умова невід'ємності задачі. Крім того, на кожному кроці в базисі змінюється лише одна базисна і одна вільна невідомі.

Вперше симплексний метод був запропонований американським вченим Дж. Данцигом у 1949 році. Цей метод, який дозволяє розв'язати будь-яку задачу лінійного програмування, універсальний. Сьогодні він більше використовується для комп'ютерних розрахунків, але нескладні приклади ЗЛП з використанням симплексного методу можна розв'язувати, використовуючи ручку.

Для реалізації симплексного методу треба добре засвоїти три основні елементи:

- спосіб визначення будь-якого початкового допустимого (опорного) базисного розв'язку задачі;
- правило переходу до кращого розв'язку;
- критерії перевірки оптимальності знайденого розв'язку.

одичного базису. Вільні невідомі x_1 і x_3 , базисні – x_2 , x_4 . Вільні невідомі прирівнюємо до нуля. Тоді не вироджений початковий опорний розв'язок матиме вигляд:

$$X_0 = (0; 3; 0; 2); F(X_0) = 0.$$

Другий випадок. Нехай система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ b_i \geq 0. \end{cases}$$

Спочатку дану задачу ЛП приводимо до канонічного вигляду, додаючи до лівої частини обмежень системи по додатковій невід'ємній невідомій.

Одержимо систему обмежень:

[illegible]

яка еквівалентна вихідній і має переважаючий вигляд. Звідси одержуємо початковий опорний розв'язок :

$$X_0 = \left(\underbrace{0; 0; \dots; 0}_r; \theta_1; \theta_2; \dots; \theta_m \right), F(X_0) = 0.$$

У цільову функцію додаткові невідомі вводяться із коефіцієнтами, рівними нулю. Тобто, $c_{n+i} = 0 (i = \overline{1, m})$.

Приклад 2.2. Знайти початковий опорний план задачі:

$$\max F(x) = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \leq 9, \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \leq 21, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Розв'язання

Приведемо дану задачу до канонічного вигляду, додаючи до лівих частин обмежень системи відповідно невід’ємні невідомі x_4, x_5, x_6 . Ці невідомі введемо теж до цільової функції з коефіцієнтами, рівними нулю.

Одержимо:

$$\max F(x) = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 + x_4 = 9, \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 + x_5 = 21, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,6}).$$

Система обмежень має переважачий вигляд. Початковий опорний розв'язок:

$$X_0 = (0; 0; 0; 9; 21; 4), F(X_0) = 0.$$

Третій випадок. Нехай система обмежень має вигляд:

[illegible]

Перейдемо до канонічного вигляду шляхом введення допоміжних змінних $x_{n+i} \geq 0 (i = \overline{1, m})$:

[illegible]

Тепер система обмежень немає переважаючого вигляду. У цьому випадку вводять штучний базис шляхом переходу до М-задачі:

Розглянемо правила роботи із симплексними таблицями. Покажемо розв'язування ЗЛП симплексним методом на конкретному прикладі.

Приклад 2.4. Розв'язати симплексним методом задачу:

$$\max F(x) = 3x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,4}).$$

Дана задача вже зведена до канонічної задачі переважаючого вигляду. Її початковий опорний розв'язок $X_0 = (0; 0; 12; 4)$. Позначимо лінійну форму $F = x_0$ і запишемо її у вигляді рівняння:

$$x_0 = 3x_1 + 2x_2;$$

$$x_0 - 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

За канонічною формою заповнюємо таблицю 2.1.

Таблиця 2.1

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Базисний опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	0	-3	-2	0	0
I	1	x_3	12	2	3	1	0
	2	x_4	4	2	-1	0	1

1. Заповнюємо базисні стовпчики: на перетині однойменних рядків і стовпців ставимо 1, а в усіх інших клітинках будуть стояти нулі.

2. В інших рядках виписуємо коефіцієнти, що стоять при відповідних невідомих. Нульовий рядок відповідає оптимізуючій формі і він служить для визначення степеня оптимальності опорного розв'язку.

Критерії оптимальності за симплекс-таблицями

Якщо форма максимізується (мінімізується) і в нульовому рядку відсутні від'ємні (додатні) числа, то опорний розв'язок є оптимальним.

Коефіцієнт нульового рядка можна інтерпретувати як приріст функції x_0 при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатний, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємний – якщо коефіцієнт додатний.

У нашому випадку в нульовому рядку є два від'ємні числа (-3) і (-2). Беремо найменше (-3). Стовпчик " x_1 " буде ключовим. Для вибору ключового елемента складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика „базисний опорний розв'язок”) до відповідних додатних чисел ключового стовпчика:

$$1) 12 : 2 = 6; 2) 4 : 2 = 2.$$

Друге відношення менше, тому число „2” другого рядка буде ключовим елементом. Ключовий елемент у таблиці позначаємо квадратом і переходимо до другої ітерації (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	6	0	-7/2	0	3/2
II	1	x_3	8	0	4	1	-1
	2	x_1	2	1	-1/2	0	1/2

Заповнюємо цю таблицю, використовуючи метод Жордана-Гаусса.

1. Замість базисної невідомої x_4 вводимо нову базисну невідому x_1 (невідому ключового стовпчика).

2. Для заповнення рядка 2 таблиці 2.2, ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для таблиці 2.2 будемо називати провідним.

3. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса, виключаючи x_1 послідовно з рядків 0 і 1. Для цього досить спочатку рядок 2 таблиці 2.2 помножити на 3 і додати до 0-го рядка таблиці 2.1, а потім рядок 2 таблиці 2.2 помножити на (-2) і додати до 1-го рядка таблиці 2.1.

Після заповнення таблиці 2.2 перевіряємо її опорний розв'язок на оптимальність. Бачимо, що треба перейти до наступного опорного розв'язку, оскільки у нульовому рядку стовпчика x_2 є від'ємне число $-7/2$. Відношення $8:4=2$ (у другому рядку відношення не складається, бо коефіцієнт $(-1/2)$ від'ємний вказує, що за ключовий елемент потрібно взяти число 4. Переходимо до третьої ітерації. У таблиці 2.3 замість базисної невідомої x_3 тепер буде нова базисна x_2 , провідним буде рядок 1. З таблицею 2.3 виконуємо ті самі операції, що й з таблицею 2.2.

Таблиця 2.3

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	13	0	0	7/8	5/8
III	1	x_2	2	0	1	1/4	-1/4
	2	x_1	3	1	0	1/8	3/8

У нульовому рядку таблиці 2.3 вже немає від'ємних чисел, тому опорний розв'язок цієї таблиці оптимальний. Випишуємо його із стовпчика „опорний розв'язок”:

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$F_{\max} = 13.$$

Приклад 2.5. Підприємство випускає продукцію трьох видів (P_1, P_2, P_3). Рівень випуску її лімітується обмеженістю ресурсів, які є у розпорядженні підприємства, – сировини, робочої сили, технологічного обладнання двох типів. Вихідні дані подано в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Види ресурсів	Обсяги ресурсів	Норми витрат на одиницю продукції кожного виду		
		P_1	P_2	P_3
Сировина (кг)	24	5	7	4
Робоча сила (осіб)	80	10	5	20
Обладнання I гр. (од.)	10	5	2	1
Обладнання II гр. (од.)	6	2	1	1
Вартість одиниці продукції (у гривнях)		18	12	8

Визначити рівень випуску продукції за видами, при якому досягаються максимум її загальної вартості.

Розв'язання

Складаємо математичну модель даної задачі. Шуканий випуск продукції Π_1 позначимо через x_1 , продукції Π_2 – через x_2 , продукції Π_3 – через x_3 .

Система нерівностей, що відображає обмеження на наявні обсяги ресурсів по кожному виду, записується так:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 24, \\ 10x_1 + 5x_2 + 20x_3 \leq 80, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6. \end{cases}$$

Загальна вартість продукції становитиме:

$$F(x) = 18x_1 + 12x_2 + 8x_3.$$

Змінні x_1, x_2, x_3 не можуть приймати від'ємні значення, оскільки випуск продукції не може бути від'ємним. Звідси:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Таким чином, маємо наступну задачу лінійного програмування:

$$\max F(x) = 18x_1 + 12x_2 + 8x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 24, \\ 10x_1 + 5x_2 + 20x_3 \leq 80, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,3}).$$

Зведемо її до канонічної форми, ввівши для цього в систему обмежень чотири невід'ємні допоміжні невідомі x_4, x_5, x_6, x_7 . У результаті одержимо канонічну ЗЛП переважаючого виду:

$$\max F(x) = 18x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 24, \\ 10x_1 + 5x_2 + 20x_3 + x_5 = 80, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,7}).$$

Її початковий опорний розв'язок :

$$X_0 = (0; 0; 0; 24; 80; 10; 6).$$

Позначимо $F = x_0$. Запишемо лінійну форму у вигляді рівняння:

$$x_0 - 18x_1 - 12x_2 - 8x_3 = 0.$$

Далі працюємо із симплекс-таблицями (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	x_0	0	-18	-12	-8	0	0	0	0
	1	x_4	24	5	7	4	1	0	0	0
I	2	x_5	80	10	5	20	0	1	0	0
	3	x_6	10	5	2	1	0	0	1	0
	4	x_7	6	2	1	1	0	0	0	1
	0	x_0	36	0	-24/5	-22/5	0	0	18/5	0
	1	x_4	14	0	5	3	1	0	-1	0
II	2	x_5	60	0	1	18	0	1	-2	0
	3	x_1	2	1	2/5	1/5	0	0	1/5	0
	4	x_7	2	0	1/5	3/5	0	0	-2/5	1
	0	x_0	1236/25	0	0	-38/25	24/25	0	66/25	0
	1	x_2	14/5	0	1	3/5	1/5	0	-1/5	0
III	2	x_5	286/5	0	0	87/5	-1/5	1	-9/5	0
	3	x_1	22/25	1	0	-1/25	-2/25	0	7/25	0
	4	x_7	36/25	0	0	12/25	-1/25	0	-9/25	1
	0	x_0	54	0	0	0	5/6	0	3/2	19/6
	1	x_2	1	0	1	0	1/4	0	1/4	-5/4
IV	2	x_5	5	0	0	0	5/4	1	81/100	-145/4
	3	x_1	1	1	0	0	-1/12	0	1/4	1/12
	4	x_3	3	0	0	1	-1/12	0	-9/12	25/12

У нульовому рядку таблиці IV вже немає від'ємних чисел, тому опорний розв'язок цієї таблиці оптимальний. Випишемо його із стовпчика „опорний розв'язок”:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 5, x_6 = 0, x_7 = 0$$

$$F_{\max} = 54.$$

Отже, при обсягу випуску підприємством продукції виду Π_1 – 1 од. ($x_1 = 1$), виду Π_2 – 1 од. ($x_2 = 1$), виду Π_3 – 3 од. ($x_3 = 3$) її загальна вартість максимальна і становить 54 грн. При цьому сировина, технологічне обладнання I і II груп використовуються повністю, а робоча сила на 5 осіб недовикористовується ($x_5 = 5$).

Приклад 2.6. Розв'язати ЗЛП симплексним методом:

$$\max F(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Зведемо спочатку дану задачу до канонічної форми:

$$\max F(x) = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, 3, 4).$$

Утворена система обмежень має невід'ємний одиничний базис, тому початковий допустимий (опорний) розв'язок має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 6; 4).$$

$$\text{Позначимо } F = x_0 = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4.$$

$$\text{Утворимо рівняння: } x_0 - x_1 - 2x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 = 0.$$

Далі працюємо із симплекс-таблицями.

Таблиця 2.6

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	0	-1	-2	0	0
I	1	x_3	6	2	4	1	0
	2	x_4	4	1	4	0	1
	0	x_0	2	-1/2	0	0	1/2
II	1	x_3	2	1	0	1	-1
	2	x_2	1	1/4	1	0	1/4
	0	x_0	3	0	0	1/2	0
III	1	x_1	2	1	0	1	-1
	2	x_2	1/2	0	1	-1/4	1/2

В останній таблиці в нульовому рядку від'ємні значення відсутні. Це означає, що знайдений розв'язок оптимальний.

Отже, $X_1 = (2; \frac{1}{2}; 0; 0)$, $F_{\max} = 3$.

Виникає питання, знайдений оптимальний розв'язок – єдиний, чи існують інші оптимальні розв'язки.

Відповідь на це питання також можна дати, використовуючи останню симплексну таблицю. Якщо в нульовому рядку проти вільних невідомих відсутні нульові значення, то знайдений оптимальний розв'язок єдиний, якщо ж хоча б одна вільна невідома в нульовому рядку має значення нуль, то дана задача має безліч оптимальних розв'язків.

У розглянутому вище прикладі задача має безліч оптимальних розв'язків, оскільки в нульовому рядку таблиці III проти невідомої x_4 стоїть нуль. Таким чином, знайдений розв'язок

$X_1(2; \frac{1}{2}; 0; 0)$ є одним із них.

Знайдемо ще один оптимальний опорний розв'язок, для цього в базис введемо змінну x_4 , оскільки вона має нуль у нульовому рядку (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	3	0	0	1/2	0
IV	1	x_1	3	1	2	1/2	0
	2	x_4	1	0	2	-1/2	1

Таким чином, $X_2 = (3; 0; 0; 1)$, $F_{\max} = 3$ є ще одним оптимальним розв'язком даної задачі.

Графічно розв'язок задачі прикладу 2.6 подано на рис. 2.1.

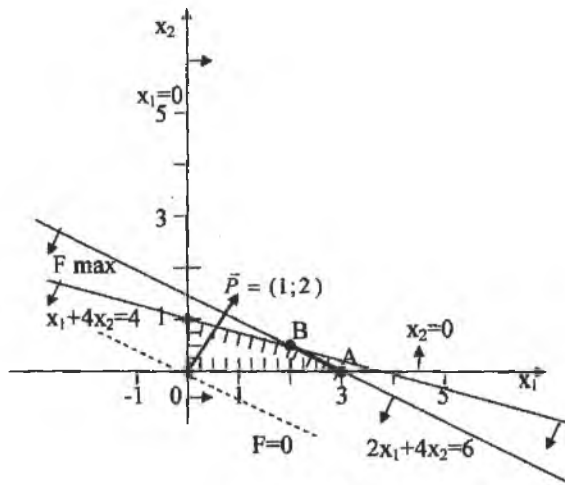


Рис. 2.1

Оптимальним розв'язком є множина точок відрізка АВ.

Приклад 2.7. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\max F(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Зведемо дану задачу до канонічного виду:

$$\max F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1;4}).$$

Таблиця 2.8

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	0	-2	-3	0	0
I	1	x_3	12	-3	4	1	0
	2	x_4	3	2	-3	0	1
	0	x_0	9	-17/4	0	3/4	0
II	1	x_2	3	-3/4	1	1/4	0
	2	x_4	12	-1/2	0	3/4	1

Задача на пошук максимуму. Опорний розв'язок $(0; 3; 0; 12)$ не оптимальний, оскільки в нульовому рядку є від'ємне значення $-17/4$. Треба в базисні невідомі перевести невідому x_1 , але усі елементи стовпчика невідомої x_1 не додатні, тому симплексні відношення знайти неможливо. Отже, цільова функція є необмеженою, тобто $F_{\max} = \infty$.

Графічно розв'язок цієї задачі подано на рис. 2.2.

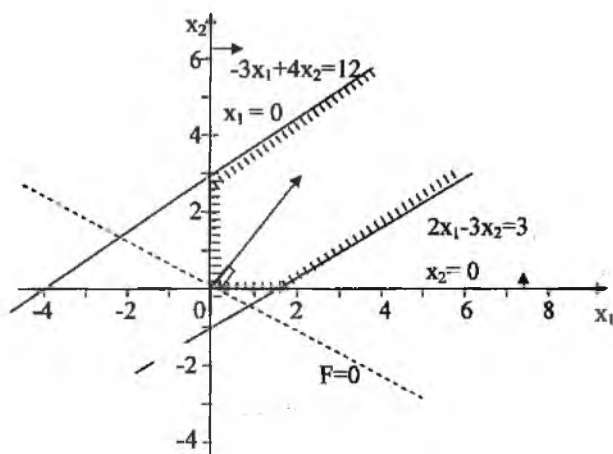


Рис. 2.2

Метод штучного базису. М-задача

Вище було детально розглянуто розв'язування ЗЛП симплексним методом у випадку, коли побудований початковий базисний (опорний) розв'язок є допустимим, тобто не містить від'ємних значень. Але досить часто доводиться мати справу із задачами лінійного програмування, для яких початковий базисний розв'язок не є допустимим (містить хоча б одне від'ємне значення). Тоді більш зручно, розв'язуючи задачу симплексним методом, користуватись методом штучного базису, переходячи до так званої М-задачі.

Суть методу штучного базису

У кожне рівняння, яке дає від'ємну компоненту в базисному розв'язку, вводимо свою нову невід'ємну штучну невідому $w_1, w_2, \dots, w_m$, яка має той же знак, що і вільний член у правій частині рівняння. У базисний (опорний) розв'язок включаємо в число основних всі штучні невідомі і ті додаткові невідомі, які визначають невід'ємні складові базисного розв'язку. Складаємо нову лінійну функцію $Z = F \pm M(w_1 + w_2 + \dots + w_m)$, де M – довільне велике число. Якщо задача на знаходження максимуму, то перед M ставимо знак „-“, а якщо на знаходження мінімуму, то знак „+“.

Між оптимальними розв'язками вихідної задачі і М-задачі існує певний зв'язок. Сформулюємо його у вигляді теореми.

Теорема 2.1. Якщо в оптимальному розв'язку М-задачі усі штучні невідомі $w_1, w_2, \dots, w_m$ дорівнюють нулю, то відповідні значення решти невідомих дадуть оптимальний розв'язок вихідної задачі (тобто $Z=F$, якщо $w_1=w_2=\dots=w_m=0$).

Якщо маємо оптимальний розв'язок М-задачі, в якому хоча б одна із штучних невідомих відмінна від нуля, то система обмежень вихідної задачі несумісна (тобто вихідна задача не має розв'язку).

Приклад 2.8. Знайти початковий опорний розв'язок задачі:

$$\min F(x) = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3, \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Розв'язання

Ввівши додаткові невідомі x_5, x_6, x_7 , перейдемо до задачі, записаної у канонічній формі:

$$\min F(x) = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7;$$

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 = 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_7 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1;7}).$$

Система має три основних обмеження, тому повинно бути три базисні невідомі. Початковий базисний (опорний) розв'язок $X_0 = (0; 0; 0; 0; 3; -2; -1)$ не є допустимим, оскільки має від'ємні значення.

Тому перейдемо до М-задачі, вводючи штучні невідомі w_1 і w_2 .

$$\min F(x) = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + Mw_1 + Mw_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 + w_1 = 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_7 + w_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1;7}), w_i \geq 0, (i = \overline{1;2}).$$

Початковий опорний розв'язок даної задачі має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 0; 0; 3; 0; 0; 2; 1).$$

Приклад 2.9. Розв'язати задачу лінійного програмування, використовуючи симплексні таблиці.

$$\max F(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq -1, \\ x_1 - x_2 \geq -3, \\ x_1 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Зведемо дану задачу до канонічної форми:

$$\max F(x) = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1;5}).$$

$X_1 = (0; 0; -1; 3; 3)$ – недопустимий базисний розв'язок з одним від'ємним значенням, тому в перше рівняння системи обмежень введемо штучну невідому w_1 з тим же знаком, який має вільний член:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - w_1 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

або

$$\max F(x) = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mw_1$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + w_1 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1;5}), w_1 \geq 0.$$

Початковий опорний розв'язок даної задачі має вигляд:
 $X_0 = (0; 0; 0; 3; 3; 1).$

Побудуємо початкову симплексну таблицю (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі БН	Коефіцієнти при даних базисних невідомих у цільовій функції C_6	Опорний розв'язок X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1
					1	2	0	0	0	-M
	1	w_1	-M	1	-1	1	-1	0	0	1
I	2	x_4	0	3	-1	1	0	1	0	0
	3	x_3	0	3	1	0	0	0	1	0
$F_j - C_j$				0	-1	-2	0	0	0	0
				-M	M	-M	M	0	0	0

У випадку М-задачі рядок оцінок $F_j - C_j$ розбивається на два рядки: у верхній рядок записують вільні члени виразів

$F_0 = C_6 \cdot X_0$ і $F_j - C_j = C_6 \cdot X_j - C_j$, а у нижній – доданки, що містять М,

де C_6 – коефіцієнти при даних базисних невідомих у цільовій функції;

X_0 – значення даних базисних невідомих в опорному розв'язку;

C_j – коефіцієнти при невідомих цільової функції;

X_j – коефіцієнти j-го невідомого рівнянь системи обмежень.

Наприклад, для стовпчика X_0 матимемо

$$F_0 = C_6 X_0 = -M \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = -M.$$

Отже, у верхню клітинку записуємо 0, а у нижню -M;

для стовпчика x_1 : $F_1 - C_1 = -M \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 1 = M - 1$,

у верхню клітинку записуємо -1, а у нижню М;

для стовпчика x_2 : $F_2 - C_2 = -M \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 2 = -M - 2$,

у верхню клітинку записуємо -2, у нижню -М; і так далі.

Для стовпчика w_1 будемо мати

$F_6 - C_6 = -M \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - (-M) = -M + M = 0$, у верхню і нижню клітинку записуємо 0.

Оскільки маємо задачу на знаходження максимуму цільової функції, то спочатку позбуваються від'ємних оцінок у нижньому рядку $F_j - C_j$ (табл. 2.9).

Стовпчик " x_2 " – ключовий, елемент 1 цього стовпчика у першому рядку – провідний. Вільна невідома x_2 переходить у базисну, а базисна невідома w_1 – у вільну. Останій рядок показує, що опорний розв'язок (0; 1; 0; 2; 3) є допустимим базисним розв'язком, але він не є оптимальним, оскільки у верхньому рядку оцінок є від'ємні числа. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок вихідної задачі, треба позбутися від'ємних значень у верхньому рядку оцінок (табл. 2.10).

Таблиця 2.10

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі БН	Коефіцієнти при даних базисних невідомих у цільовій функції C_b	Опорний розв'язок X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1
					1	2	0	0	0	-M
	1	x_2	2	1	-1	1	-1	0	0	1
II	2	x_4	0	2	0	0	1	1	0	-1
	3	x_5	0	3	1	0	0	0	1	0
$F_j - C_j$				2	-3	0	-2	0	0	2
				0	0	0	0	0	0	M

Стовпчик „ x_1 „ – ключовий, елемент 1 цього стовпчика у третьому рядку провідний, рядок 3 – провідний. Вільна невідома x_1 переходить у базисну, а базисна невідома x_5 переходить у вільну. Одержаний опорний розв'язок (3; 4; 0; 2; 0) не є оптимальним, оскільки у верхньому рядку оцінок є від'ємне значення (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі БН	Коефіцієнти при даних базисних невідомих у цільовій функції C_6	Опорний розв'язок X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1
					1	2	0	0	0	-M
	1	x_2	2	4	0	1	-1	0	1	1
III	2	x_4	0	2	0	0	1	1	0	-1
	3	x_1	1	3	1	0	0	0	1	0
$F_j - C_j$				11	0	0	-2	0	3	2
				0	0	0	0	0	0	M

Стовпчик „ x_3 „ – ключовий, елемент 1 цього стовпчика у другому рядку є провідним, рядок 2 – провідний. Вільна невідома x_3 переходить у базисну, а базисна невідома x_4 – у вільну. Переходимо до наступної ітерації (табл. 2.12).

Таблиця 2.12

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі БН	Коефіцієнти при даних базисних невідомих у цільовій функції C_6	Опорний розв'язок X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1
					1	2	0	0	0	-M
	1	x_2	2	6	0	1	0	1	1	0
IV	2	x_3	0	2	0	0	1	1	0	-1
	3	x_1	1	3	1	0	0	0	1	0
$F_j - C_j$				15	0	0	0	2	3	0
				0	0	0	0	0	0	M

Таким чином, оптимальний розв'язок вихідної задачі має вигляд:

$$X = (3; 6; 2; 0; 0),$$

$$F_{\max} = 15.$$

Приклад 2.10. Маємо два види харчових продуктів Π_1 і Π_2 , що містять поживні речовини (вітаміни) B_1, B_2, B_3 . Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду продуктів і необхідний мінімум поживних речовин наведені в таблиці (табл. 2.13).

Таблиця 2.13

Поживні речовини (вітаміни)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин у 1 кг продукту	
		Π_1	Π_2
B_1	9	3	1
B_2	8	1	2
B_3	12	1	6

Вартість 1 кг продуктів Π_1 і Π_2 відповідно дорівнює 4 і 6 гривень.

Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальну вартість, у якому вміст кожного виду поживних речовин був би не менший встановленої межі.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1 і x_2 – кількість харчових продуктів Π_1 і Π_2 , які входять у денний раціон. Тоді цей раціон включатиме $(3x_1 + x_2)$ одиниць поживних речовин B_1 , $(x_1 + 2x_2)$ одиниць поживних речовин B_2 і $(x_1 + 6x_2)$ одиниць поживних речовин B_3 . Оскільки вміст поживних речовин B_1, B_2, B_3 у раціоні повинен бути не менше відповідно 9, 8 та 12 одиниць, то одержуємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Крім того, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Загальна вартість раціону становитиме (у гривнях):

$$F(x) = 4x_1 + 6x_2.$$

Отже, математична модель задачі полягає в тому, щоб скласти денний раціон $X = (x_1; x_2)$, який задовольняє утворену систему обмежень, умови невід'ємності невідомих x_1 і x_2 , при якому функція $F(x)$ приймає мінімальне значення, тобто:

$$\min F(x) = 4x_1 + 6x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Зведемо дану задачу ЛП до канонічної форми:

$$\min F(x) = 4x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ x_1 + 6x_2 - x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1;5}).$$

Базисний розв'язок $X_1 = (0; 0; -9; -8; -12)$ не є допустимим опорним розв'язком. Тому, вводячи штучні невід'ємні невідомі w_1, w_2, w_3 , перейдемо до М-задачі:

$$\min F(x) = 4x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + Mw_1 + Mw_2 + Mw_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + w_1 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + w_2 = 8, \\ x_1 + 6x_2 - x_5 + w_3 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1;5}), w_i \geq 0 (i = \overline{1;3}).$$

Її початковий опорний розв'язок має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 9; 8; 12).$$

Далі працюємо із симплексними таблицями (табл. 2.14).

Таблиця 2.14

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі БН	Коефіцієнти при да-них ба-зисних невідомих у цільовій функції C_B	Опорний розв'язок X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	w_3
					4	6	0	0	0	М	М	М
	1	w_1	М	9	3	1	-1	0	0	1	0	0
I	2	w_2	М	8	1	2	0	-1	0	0	1	0
	3	w_3	М	12	1	6	0	0	-1	0	0	1
$F_j - C_j$				0	-4	-6	0	0	0	0	0	0
				29М	5М	9М	-М	-М	-М	0	0	0
	1	w_1	М	7	17/6	0	-1	0	1/6	1	0	-1/6
II	2	w_2	М	4	4/6	0	0	-1	2/6	0	1	2/6
	3	x_2	6	2	1/6	1	0	0	-1/6	0	0	1/6
$F_j - C_j$				8	-3	0	0	0	-1	0	0	1
				11М	21/6М	0	-М	-М	3/6М	0	0	-9/6М
	1	x_1	4	42/17	1	0	-6/17	0	1/17	6/17	0	-1/17
III	2	w_2	М	40/17	0	0	4/17	-1	5/17	-4/17	1	-5/17
	3	x_2	6	27/17	0	1	1/17	0	-3/17	-1/17	0	3/17
$F_j - C_j$				330/17	0	0	-18/7	0	-4/17	18/17	0	14/17
				40/17М	0	0	4/17М	-М	5/17М	-21/7М	0	-22/17М
	1	x_1	4	2	1	0	-2/5	1/5	0	2/5	-1/5	0
IV	2	x_5	0	8	0	0	4/5	-17/5	1	-4/5	17/5	-1
	3	x_2	6	3	0	1	1/5	-3/5	0	-1/5	3/5	0
$F_j - C_j$				26	0	0	-2/5	-14/5	0	2/5	14/5	0
				0	0	0	0	0	0	-М	-М	-М

Після того, як позбулися додатних чисел у нижньому рядку оцінок, переходимо до верхнього рядка оцінок, тепер треба позбутися додатних чисел.

Зауваження: звертати увагу потрібно лише на ті числа, які стоять над нулями нижнього рядка.

У таблиці IV над нулями нижнього рядка стоять не додатні числа, тому знайдений опорний розв'язок – оптимальний. Відповідь: $X=(2; 3; 0; 0; 8)$, $F_{\min} = 26$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати, використовуючи симплекс-метод розв'язку ЗЛП (якщо це треба привести до канонічного вигляду):

2.1. $\max(2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4);$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2.2. $\max(6x_2 + x_3);$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.3. $\max(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5);$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2.4. $\max(3x_1 + x_2);$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.5. $\min(x_1 + x_2 + x_3);$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2.6. $\min(2x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6);$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_6 = 100, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

2.7. $\max(6x_1 + x_3);$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2.8. $\max(-x_1 - x_2 + 2x_3);$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2.9. $\max(x_1 + 3x_2 - 5x_4);$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

2.10. $\min(3x_1 + 2x_3 - 6x_6);$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Розв'язати задачі методом штучного базису:

$$2.11. f = x_1 + 4x_2 + x_3 \text{ (min);} \quad 2.12. f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \text{ (min);}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4). \end{cases}$$

$$2.13. f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \text{ (max);} \quad 2.14. f = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \text{ (min);}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$2.15. \min(-2x_1 - x_2 + 3x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.16. \min(-x_1 + 5x_2 - x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.17. \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 1, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.18. \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5);$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.19. \min(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.20. \min(2x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6);$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_6 = 100, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 = 200, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150, \\ x_j \geq 1, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.21. \max(6x_1 + x_3);$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 23, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.22. \max(-x_1 - x_2 + 2x_3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.23. \max(x_1 + 3x_2 - 5x_4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.25. \max(2x_1 + 3x_2 - x_4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.27. \min(-x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.29. \max(x_2 - x_5);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.31. \min(x_1 - 3x_2 + 2x_3);$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.24. \max(3x_1 + x_2 - 6x_6);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.26. \max(8x_2 + 7x_4 + x_6);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.28. \min(x_2 - 3x_3 - 2x_5);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.30. \max(x_1 + 2x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.32. \max(3x_1 + 5x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.33. \max(2x_1 + 3x_2);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 + 4x_2 + x_6 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.34. \min(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.35. \min(2x_2 - x_3 - 3x_5);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 - 6x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$2.36. \min(-x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_5 + x_6 = 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$$2.37. \max(x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.38. \max(x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.39. \max(x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.40. \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.41. \max(x_1 + 2x_2 - x_3);$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.42. \max(5x_1 + 2x_2 - x_3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.43. \min(x_1 + 4x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} \min(x_1 + 4x_2 + x_3), \\ 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.45. \max(3x_1 + 5x_2 + 4x_3);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.47. \max(x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 15x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 23, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.49. \max(-x_1 + x_2 - x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.51. \min(x_1 + 3x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.44. \min(2x_1 + x_2 - x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.46. \min(12x_1 + 27x_2 + 6x_3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.48. \min(-x_1 - x_2 + 4x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.50. \min(2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.52. \min(x_1 + 3x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 23, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.53. \max(8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.55. \min(15x_1 + 33x_2);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 8x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$2.57. \max(2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.59. \max(3x_1 + 5x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$2.61. \max(x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.63. \min(2x_1 + 3x_2);$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq -5, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$2.54. \max(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$2.56. \min(2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.58. \max(6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.60. \max(x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$2.62. \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$2.64. \max(3x_1 - x_2 + x_3);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$2.65. \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

$$2.67. \max(x_1 + 2x_2 - x_3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$2.69. \max(2x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$2.66. \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$2.68. \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$2.70. \max(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

ГЛАВА 3. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Кожну задачу лінійного програмування можна поставити відповідно до іншої задачі, яку називають двоїстою або спряженою щодо першої.

Двоїсті задачі мають такі властивості:

1. В одній задачі ЛП шукають максимум лінійної функції, в іншій – мінімум.

2. Коефіцієнти при змінних у лінійній функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень іншої.

3. Кожна із задач задана у стандартній формі, причому в задачі на максимум всі обмеження – нерівності виду „ $\leq$ ”, а в задачі на мінімум всі обмеження – нерівності виду „ $\geq$ ”.

4. Матриці коефіцієнтів при невідомих в основних системах обмежень обох задачах є транспонованими відносно одна до одної:

$$\text{для першої задачі } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{для другої задачі } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5. Кількість нерівностей у системі обмежень однієї задачі співпадає з кількістю невідомих в іншій задачі.

6. Якщо на невідому прямої задачі накладено умову невід'ємності, то відповідне обмеження двоїстої задачі записується як обмеження-нерівність, якщо ж ні, то як обмеження-рівняння.

7. Якщо яке-небудь обмеження прямої задачі записане як рівняння, то на відповідну невідому двоїстої задачі умова невід'ємності не накладається.

Дві задачі лінійного програмування, що мають вище перераховані властивості, називаються симетричними взаємно двоїстими або взаємно спряженими задачами. У подальшому для спрощення будемо називати їх двоїстими задачами.

Прикладом взаємно двоїстих можуть бути задачі M і m :

Задача М:

$$\max F(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, \dots, n).$$

Задача m:

$$\min Z(y) = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m,$$

[illegible]

$$y_i \geq 0 \ (i=1,2,\dots,m).$$

Першу задачу лінійного програмування (задачу М) називають вихідною, другу (задачу m) – двоїстою до вихідної.

Очевидно, що двоїста задача до двоїстої буде вихідною.

Двоїсту задачу будують за такими правилами:

1. Перевіряємо, чи задовольняє вихідна задача таким вимогам:

– в усіх обмеженнях вільні члени розміщені у правій частині нерівності (рівності), а члени з невідомими – у лівій;

– усі обмеження-нерівності вихідної задачі мають бути записані так, щоб знаки нерівностей були спрямовані в один і той же бік, для цього досить окремі нерівності помножити на (-1) ;

— знаки нерівностей системи обмежень пов'язуються із оптимізацією лінійної функції так: якщо максимум, то $\leq$; якщо мінімум, то $\geq$.

II. Систему обмежень двоїстої задачі будують за схемою:

– кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ у двоїстій задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню-нерівності, має бути невід’ємною, а обмеженню-рівнянню – може мати будь-який знак;

– кожній невідомій $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ вихідної задачі відповідає обмеження двоїстої. Ці обмеження будуються так: множать коефіцієнти a_{ij} , які стоять при x_j , на відповідні двоїсті невідомі y_i , результати множення додають і ставлять у ліву частину обмежень, а в праву – коефіцієнт при x_j в оптимізуючій формі c_j ;

– в усіх обмеженнях двоїстої задачі ставлять один і той же знак нерівності, який протилежний знакам нерівностей системи обмежень вихідної задачі.

III. Оптимізуюча форма двоїстої задачі має задовольняти таким вимогам:

– лінійна функція Z двоїстої задачі оптимізується у протилежному значенні ($F(\max)$, то $Z(\min)$) і навпаки;

– коефіцієнти при двоїстих невідомих y_i у формі Z є відповідними вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 форми F переноситься без змін у форму Z .

IV. Записуються умови невід’ємності для двоїстої невідомої y_i .

Приклад 3.1. Скласти задачу, двоїсту до задачі ЛП. Знайти максимум функції $F(x) = 5x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки лінійна функція максимізується, а третя нерівність системи обмежень має знак „ $\geq$ ”, то, помноживши ліву і праву частини цієї нерівності на (-1) , перейдемо до системи обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 2x_1 - 3x_2 \leq 3, & y_1 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3, & y_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -1, & y_3 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & y_4 \end{array} \right.$$

Тепер вихідна задача задовольняє усім вимогам, викладеним у пункті І.

Поставимо, відповідно до кожного обмеження системи вихідної задачі, двоїсту невідому $y_i (i=1, 2, 3, 4)$. Перемножуючи коефіцієнти $a_{ij} (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2)$, які стоять при $x_j (j=1, 2)$, на відповідні двоїсті невідомі $y_i (i=1, 2, 3, 4)$ і додаючи результати множення, записуємо у ліву частину системи обмежень двоїстої задачі. Права частина цієї системи складатиметься із коефіцієнтів c_j при невідомих x_j лінійної функції F вихідної задачі. Тоді двоїста задача до вихідної матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 - y_3 + 2y_4 \geq 5, \\ -3y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_4 \geq 3, \\ y_i \geq 0 \ (i=1, 2, 3, 4), \\ \min Z(y) = 3y_1 + 3y_2 - y_3 + 5y_4. \end{cases}$$

Приклад 3.2. Побудувати двоїсту задачу для такої задачі ЛПТ:

$$\max F(x) = -x_1 + 2x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 7, \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Оскільки задача на $\max$, то в системі обмежень замінимо знаки нерівностей $\geq$ на знаки $\leq$, помноживши першу і четверту нерівності на (-1) . Отримаємо:

$$\max F(x) = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ -2x_1 - x_2 \leq -7, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для полегшення складання двоїстої задачі краще користуватися розширеною матрицею B , в яку поряд з коефіцієнтами при невідомих системи обмежень вихідної задачі запишемо вільні члени і коефіцієнти при невідомих лінійної функції, виділивши для цього додатковий стовпець і рядок.

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -7 \\ \hline -1 & 2 & F \end{array} \right)$$

Далі матрицю B транспонуємо:

$$B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 & 2 \\ \hline -1 & 24 & 2 & -7 & Z \end{array} \right)$$

Використовуючи транспоновану матрицю B^T , складаємо задачу, двоїсту вихідній:

$$\min Z(y) = -y_1 + 24y_2 + 2y_3 - 7y_4$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + 3y_3 - 2y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - 2y_3 - y_4 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Розв'язки вихідної і двоїстої задачі лінійного програмування, звичайно, можна знайти за допомогою відомих нам уже методів: графічним або симплексним. Виникає питання, а чи не можна за розв'язками вихідної задачі знайти розв'язки двоїстої і навпаки. Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач встановлюється за допомогою теорем двоїстості.

Розглянемо спочатку допоміжне твердження, яке має назву основної нерівності теорії двоїстості.

Для будь-якої пари допустимих розв'язків

$X=(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ і $Y=(y_1, y_2, \dots, y_b, \dots, y_m)$ взаємодвоїстих задач виконується нерівність $F(X) \leq Z(Y)$

Доведення

Помноживши нерівність системи обмежень вихідної задачі

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ відповідно на двоїсті змінні

$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$ і додавши ліві і праві частини одержаних нерів-

ностей, будемо мати
$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (3.1)$$

Аналогічно, перетворивши систему обмежень двоїстої зада-

чі $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ шляхом множення лівої і

правої частини нерівності на $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ і почленно додавши обидві частини нерівностей, одержимо:

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (3.2)$$

Оскільки ліві частини нерівностей (3.1) і (3.2) мають один і

той же вигляд $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i$, то згідно з властивостями транзитивності нерівностей маємо:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

або $F(X) \leq Z(Y)$.

Твердження доведено.

Тепер можна сформулювати достатню ознаку оптимальності (критерій оптимальності Канторовича) і основні теореми двоїстості.

Теорема 3.1 (достатня ознака оптимальності). Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – допустимі розв’язки взаємно двоїстих задач, для яких виконується рівність $F(X) = Z(Y)$, то X – оптимальний розв’язок вихідної задачі, а Y – оптимальний розв’язок двоїстої задачі.

Доведення

Нехай X_1 – будь-який допустимий розв’язок вихідної задачі. Тоді згідно з основною нерівністю теорії двоїстості маємо:

$$F(X_1) \leq Z(Y).$$

Оскільки X_1 – будь-який допустимий розв’язок задачі, то

$$F(X_1) \leq F(X),$$

тобто X – оптимальний розв’язок вихідної задачі. Аналогічно доводиться, що Y – оптимальний розв’язок двоїстої задачі.

Крім достатньої ознаки оптимальності взаємно двоїстих задач, існують і інші важливі співвідношення між їх розв’язками. Знову ж таки виникають питання, чи завжди для кожної пари взаємно двоїстих задач існують одночасно оптимальні розв’язки; чи можлива ситуація, коли одна із задач має оптимальний розв’язок, а друга ні.

Відповідь на ці питання дає наступна теорема.

Теорема 3.2 (основна теорема двоїстості). Якщо одна із взаємно двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то його має і друга, причому оптимальні значення їх лінійних функцій рівні, тобто:

$$F_{\max} = Z_{\min} \text{ або } F(X) = Z(Y). \quad (3.3)$$

Якщо ж лінійна функція однієї із двоїстих задач не обмежена, то умови другої задачі несумісні (приймаємо без доведення).

Тісний зв’язок між двома взаємно двоїстими задачами проявляється не тільки в рівності оптимальних розв’язків їх лінійних функцій, про що стверджується в основній теоремі двоїстості. Існує також відповідність між початковими невідомими однієї із двоїстих задач і додатковими невідомими іншої задачі. Зобразимо цю відповідність у вигляді таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Невідомі вихідної задачі										
Початкові					Додаткові					
x_1	x_2		x_j		x_n	x_{n+1}	x_{n+2}		x_{n+i}	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+j}		y_{m+n}	y_1	y_2		y_i	y_m
Додаткові					Початкові					
Невідомі двоїстої задачі										

Теорема 3.3. Додатним (ненульовим) компонентам оптимального розв'язку однієї із взаємно двоїстих задач відповідають нульові компоненти оптимального розв'язку другої задачі, тобто для будь-яких $i = 1, 2, \dots, m$ і $j = 1, 2, \dots, n$: якщо $x_j > 0$, то $y_{m+j} = 0$; якщо $x_{n+i} > 0$, то $y_i = 0$, і аналогічно, якщо $y_i > 0$, то $x_{n+i} = 0$; якщо $y_{m+j} > 0$, то $x_j = 0$. (Без доведення.)

Із теорем 3.2 і 3.3 випливає, що якщо розв'язати одну із взаємно двоїстих задач, тобто знайти її оптимальний розв'язок і оптимум лінійної функції, то можна записати оптимальний розв'язок і оптимум лінійної функції другої задачі.

Оскільки доведення вказаних теорем не наводиться, то переконаємося у їх справедливості на відповідних прикладах.

Приклад 3.3. Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування:

$$\max F(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти оптимум і оптимальний розв'язок двоїстої задачі, використовуючи теореми двоїстості.

Розв'язання

Зведемо спочатку вихідну задачу до канонічної форми:

$$\max F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21, \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

Дана задача має переважачий вигляд. Її допустимий опорний розв'язок $X_0 = (0; 0; 18; 16; 5; 21)$. Позначимо лінійну форму $F(x) = x_0$ і запишемо її у вигляді рівняння:

$$x_0 = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$$x_0 - 2x_1 - 3x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 = 0.$$

За канонічною формою заповнюємо таблицю 3.2.

Таблиця 3.2

№ ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	x_0	0	-2	-3	0	0	0	0
	1	x_3	18	1	3	1	0	0	0
I	2	x_4	16	2	1	0	1	0	0
	3	x_5	5	0	1	0	0	1	0
	4	x_6	21	3	0	0	0	0	1
	0	x_0	15	-2	0	0	0	3	0
	1	x_3	3	1	0	1	0	-3	0
II	2	x_4	11	2	0	0	1	-1	0
	3	x_2	5	0	1	0	0	1	0
	4	x_6	21	3	0	0	0	0	1
	0	x_0	21	0	0	2	0	-3	0
	1	x_1	3	1	0	1	0	-3	0
III	2	x_4	5	0	0	-2	1	5	0
	3	x_2	5	0	1	0	0	1	0
	4	x_6	12	0	0	-3	0	9	1
	0	x_0	24	0	0	4/5	3/5	0	0
	1	x_1	6	1	0	-1/5	3/5	0	0
IV	2	x_3	1	0	0	-2/5	1/5	1	0
	3	x_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0
	4	x_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1

Критерії оптимальності виконано. Оптимальний опорний розв'язок:

$$X = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$$

$$\max F(x) = 24.$$

Складемо тепер для вихідної задачі двоїсту:

$$\min Z(y) = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i=1, 2, 3, 4)$$

Згідно з таблицею 3.1 встановимо відповідність між невідомими вихідної задачі та двоїстої їй:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4

Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють за абсолютною величиною коефіцієнтам при відповідних невідомих лінійної функції, яку можна подати у вигляді:

$$F(x) = 24 - 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6,$$

тобто $Y = (\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; 0; 0)$.

Компоненти оптимального розв'язку вихідної задачі $X = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$ дорівнюють коефіцієнтам відповідних невідомих лінійної функції $Z(y)$ двоїстої задачі, яку можна подати у вигляді: $Z(y) = 24 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6$.

Таким чином, оптимальний опорний розв'язок двоїстої задачі $Y = (\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; 0; 0)$, $\min Z(y) = 24$.

Завдання для самостійної роботи

Побудувати двоїсту задачу до задач:

3.1. $f = x_1 + 1,5 x_2$ (max);

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.2. $f = x_1 - 10x_2$ (min);

$$\begin{cases} x_1 - 0,5x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \leq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.3. $f = -x_1 + x_2$ (min);

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.4. $f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ (max);

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.5. $f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ (max);

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.6. $f = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$ (min);

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.7. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$ (max);

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_3 = 7 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

3.8. $f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$ (min);

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 13 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

3.9. $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ (min);

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \geq 3 \\ x_1 - x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.10. $f = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$ (max);

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$3.11. f = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \text{ (max)}; \quad 3.12. f = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \text{ (min)};$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_j \geq 0 (j=1,2,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,4) \end{cases}$$

$$3.13. f = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \text{ (min)}; \quad 3.14. f = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 \text{ (max)};$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_3 \geq 5 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 14 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,5) \end{cases}$$

$$3.15. f = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \text{ (max)};$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_j \geq 0 (j=1,2,3) \end{cases}$$

$$3.16. f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \text{ (max)};$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_j \geq 0 (j=1,2,3) \end{cases}$$

$$3.17. f = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \text{ (min)};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 6 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,4) \end{cases}$$

$$3.18. f = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \text{ (min)};$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,4) \end{cases}$$

$$3.19. f = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \text{ (max)}; \quad 3.20. \max F(X) = -7x_1 + 3x_2 - 4x_3;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + x_4 = 11 \\ 4x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \geq -1, \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1,3 \end{cases}$$

$$3.21. \min F(X) = 2x_1 + 7x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 2, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 - 2x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.23. \max F(X) = x_1 - 2x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 23, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.25. \max F(X) = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 7, \\ 2x_1 - 5x_3 \geq -1, \\ 2x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.22. \min F(X) = x_1 + x_2 + 4x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.24. \min F(X) = 3x_1 - 2x_2 - x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.26. \min F(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.27. \max F(X) = -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -8, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 \leq 7, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 \leq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.28. \min F(X) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 7x_5;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 \leq 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$3.29. \max F(X) = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5; \quad 3.30. \min F(X) = 2x_1 + 4x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 \leq 1, \\ 5x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 3, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 242, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.31. \max F(X) = -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4; \quad 3.32. \max F(X) = 7x_1 - 3x_2 + 5x_3;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -7, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.33. \min F(X) = -4x_1 + 6x_2 - 8x_3;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 16, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Використовуючи графічний метод, знайти оптимальне рішення пари двоїстих задач:

$$3.34. f = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4 \text{ (min);}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

$$3.35. f = -3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \text{ (max);}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

$$3.36. f = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \text{ (max)}; \quad 3.37. f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \text{ (max)};$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_j = 0 (j = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

$$3.38. f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \text{ (max)};$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 5) \end{cases}$$

$$3.39. f = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \text{ (min)};$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -8 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 5) \end{cases}$$

$$3.40. \max f = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$3.41. \max f = x_1 + x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 10 \leq 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.42. \max f = 2x_1 + 5x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$3.43. \min f = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.44. \max f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2; \quad 3.45. \max f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу. Знайти розв'язки прямої та двоїстої задач:

$$3.46. \begin{cases} \max(x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4), \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 15x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 23, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$3.47. \begin{cases} \min(-x_1 - x_2 + 4x_3), \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$3.48. \begin{cases} \max(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4), \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.49. \begin{cases} \min(2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4), \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.50. \begin{cases} \min(x_1 + 3x_2 + x_3), \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.51. \begin{cases} \min(2x_1 + 2x_2 + 5x_3), \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 23, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.52. \begin{cases} \max(8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4), \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.53. \begin{cases} \max(x_1 + x_2 + x_3), \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$3.54. \begin{cases} \min(15x_1 + 33x_2), \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 8x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$3.55. \begin{cases} \min(2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4), \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.56. \begin{cases} \max(2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4), \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.57. \begin{cases} \max(6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4), \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.58. \begin{cases} \max(3x_1 + 5x_2), \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.59. \begin{cases} \max(x_1 + x_2), \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.60. \begin{cases} \max(x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4), \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.61. \begin{cases} \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.62. \begin{cases} \min(2x_1 + 3x_2), \\ -x_1 + x_2 \geq -5, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.63. \begin{cases} \max(3x_1 - x_2 + x_3), \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.64. \begin{cases} \max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$3.65. \begin{cases} \max(x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4), \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.66. \begin{cases} \max(x_1 + 2x_2 - x_3), \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.67. \begin{cases} \max(2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4), \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$3.68. \max F(X) = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

ГЛАВА 4. ПІСЛЯОПТИМІЗАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі називають оптимальними (двоїстими) оцінками вихідної задачі або об'єктивно обумовленими оцінками. У літературі можна зустріти ще назву цих оцінок як приховані прибутки, маргінальні оцінки тощо.

Оптимальні значення невідомих двоїстої задачі лінійного програмування як об'єктивно обумовлені оцінки дають можливість зіставити витрати на випуск продукції і прибуток від її реалізації. Крім того, завдяки тісному зв'язку між розв'язками пари двоїстих задач характер зміни функції $F(x)$, яка оптимізується, можна визначити за допомогою компонент оптимального розв'язку двоїстої задачі. Вони дозволяють оцінити вплив правих частин системи обмежень вихідної задачі на оптимальні значення лінійної функції $F(x)$, тобто за допомогою оптимальних оцінок y_i ($i = \overline{1; m}$) можна дати відповідь на питання, як „реагує” $F(x)$ на зміну ресурсів b_i .

Післяоптимізаційний аналіз – одна із важливих сторін лінійного програмування, тому що часто на практиці економічна інформація, яка становить більшу частину параметрів задач лінійного програмування, до кінця не відома, а відомі лише межі, в яких значення параметрів можуть змінюватися. Тому є важливим аналіз поведінки оптимального розв'язку в межах зміни параметрів задачі. Зазвичай досліджують вплив зміни коефіцієнтів лінійної функції c_j ($j = \overline{1; n}$) і значень правої частини системи обмежень b_i .

Використання оцінок у післяоптимізаційному аналізі покажемо на прикладі задачі визначення оптимального асортименту випуску продукції.

Приклад 4.1. Підприємство випускає чотири види продукції P_1, P_2, P_3, P_4 . Для цього використовується три види сировини S_1, S_2, S_3 . Загальний обсяг сировини кожного виду, норми витрат

сировини на одиницю продукції, ціна, за якою реалізується одиниця продукції кожного виду, подані в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Сировина	Продукція				Обсяги сировини	П ₅
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄		
S ₁	2	1	0,5	4	2 400	a ₁₅ =2
S ₂	1	5	3	0	1 200	a ₂₅ =4
S ₃	3	0	6	1	3 000	a ₃₅ =3
Ціна реалізації одиниці продукції (у грн)	75	30	60	120	-	180

1. Визначити оптимальний план випуску продукції, який дає максимум прибутку від її реалізації.

2. Скласти модель двоїстої задачі. Використовуючи відповідність між невідомими вихідної і двоїстої задач, записати оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Дати змістовний економічний аналіз основних і додаткових невідомих вихідної і двоїстої задач.

3. Побудувати матрицю коефіцієнтів взаємозаміни сировини. Дати економічну інтерпретацію її елементів.

4. Оцінити рентабельність нової продукції П₅ і її ціну, характеристики якої подані в табл.4.1.

Розв'язання

1. Складемо математичну модель задачі.

Нехай $X=(x_1; x_2; x_3; x_4)$ – план випуску продукції відповідно П₁, П₂, П₃ і П₄. $F(x)$ – прибуток від реалізації випущеної продукції. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$\max F(x)=75x_1+30x_2+60x_3+120x_4;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 \leq 2400, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1200, \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 \leq 3000, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1;4}).$$

Розв'яжемо цю задачу симплексним методом. Перейдемо до канонічної форми запису задачі:

$$\max F(x)=75x_1+30x_2+60x_3+120x_4;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 + x_5 = 2400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 1200 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 + x_7 = 3000, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1;7}). \end{cases}$$

Початковий опорний розв'язок:

$X_0 = (0; 0; 0; 0; 2\,400; 1\,200; 3\,000)$ є допустимим, $F(x_0) = 0$.

Розв'язання задачі симплексним методом подано в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний зв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	x_0	0	-75	-30	-60	-120	0	0	0
I	1	x_5	2 400	2	1	0,5	4	1	0	0
	2	x_6	1 200	1	5	3	0	0	1	0
	3	x_7	3 000	3	0	6	1	0	0	1
	0	x_0	72 000	-15	0	-45	0	30	0	0
II	1	x_4	600	1/2	1/4	1/8	1	1/4	0	0
	2	x_6	1 200	1	5	3	0	0	1	0
	3	x_7	2 400	5/2	-1/4	47/8	0	-1/4	0	1
	0	x_0	90 000	0	75	0	0	30	15	0
III	1	x_4	550	11/24	1/24	0	1	1/4	-1/24	0
	2	x_3	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
	3	x_7	50	13/24	241/24	0	0	-1/4	-47/24	1

Оскільки в таблиці III в нульовому рядку відсутні від'ємні значення, то знайдений опорний розв'язок оптимальний:

$$X = (0; 0; 400; 550; 0; 0; 50),$$

$$\max F(X) = 90\,000.$$

Основні невідомі $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=400$, $x_4=550$ вказують на те, що продукцію виду Π_1 і Π_2 випускати не доцільно, продукції виду Π_3 потрібно випускати 400 одиниць, а виду Π_4 – 550 одиниць.

При цьому, оскільки $x_5=0$, $x_6=0$, сировина S_1 і S_2 використовується повністю, а сировини S_3 залишається 50 одиниць ($x_7=50$). Чи єдиний одержаний оптимальний розв'язок? Ні, оскільки в таблиці III в нульовому рядку проти невідомої x_1 стоїть нуль. Вводячи в базис невідому x_1 , одержимо новий оптимальний розв'язок із тим самим значенням цільової функції.

2. Складемо для вихідної задачі модель двоїстої, яка матиме вигляд:

$$\min Z(y) = 2\,400y_1 + 1\,200y_2 + 3\,000y_3;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 75 \\ y_1 + 5y_2 \geq 30, \\ 0,5y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq 60, \\ 4y_1 + y_3 \geq 120, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1;3}).$$

Її розв'язок випишемо із таблиці III таблиці 4.2, використовуючи відповідність невідомих:

Невідомі вихідної задачі						
Основні				Додаткові		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3
Додаткові				Основні		
Невідомі двоїстої задачі						

Маємо: $Y = (30; 15; 0; 0; 75; 0; 0)$,

$$\min Z(Y) = 90\,000.$$

Двоїсті невідомі вказують на міру дефіцитності сировини, вони чисельно дорівнюють зміні цільової функції при зміні відповідної сировини на одиницю. Тому збільшення сировини S_1 на одиницю приводить до збільшення обсягів реалізації на $y_1 = 30$; другої – на $y_2 = 15$. Третя сировина в надлишку, тому її збільшення ні до чого не приведе, тобто значення цільової функції залишається без зміни ($y_3 = 0$).

Додаткові двоїсті невідомі є мірою збитковості продукції, яку відповідно до оптимального розв'язку недоцільно випускати. Тому $y_5 = 75$ вказує на те, що вартість сировини, яка витрачається на виготовлення одиниці продукції Π_2 (в оптимальних оцінках) перевищує вартість одиниці цієї продукції (30 грн) на $y = 75$. Дійсно:

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_3 + a_{32}y_3 + 0 \cdot y_4 = 1 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 105, \\ 105 - 30 = 75.$$

Згідно з таблицею III:

$$y_1 = \frac{1}{4} \cdot 120 + 0 \cdot 60 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 = 30,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{3} \cdot 60 + \left(-\frac{47}{24}\right) \cdot 0 = 15,$$

$$y_3 = 0 \cdot 120 + 0 \cdot 60 + 1 \cdot 0 = 0.$$

З економічної точки зору, наприклад, для $y_1=30$, це означає: при збільшенні сировини S_1 на одиницю виробництво продукції Π_1 зросте на $\frac{1}{4}$ і складе 550,25 одиниць, виробництво продукції Π_2 не зміниться, залишок надлишкової сировини скоротиться на 0,25. Внаслідок значення цільової функції зміниться на:

$$550,25 \cdot 120 - 550 \cdot 120 = 30.$$

Аналогічно для сировини S_2 :

$$\left(550 - \frac{1}{24}\right) \cdot 120 + \left(400 + \frac{1}{3}\right) \cdot 60 + \left(50 - \frac{47}{24}\right) \cdot 0 - 90000 = 15.$$

3. Коефіцієнти взаємозаміни показують, скільки одиниць сировини i треба додатково мати, щоб компенсувати зменшення сировини k на одиницю, тобто, щоб значення цільової функції не змінилося, коефіцієнт взаємозаміни $\eta_{ik} = \frac{y_k}{y_i}$.

Побудуємо матрицю взаємозаміни (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

$\begin{matrix} K \\ i \end{matrix}$	$S_1(y_1=30)$	$S_2(y_2=15)$	$S_3(y_3=0)$
$S_1(y_1=30)$	1	1/2	0
$S_2(y_2=15)$	2	1	0
$S_3(y_3=0)$	∞	∞	1

Наприклад, $\eta_{21}=2$ означає, що зменшення сировини S_1 на одиницю можна компенсувати двома одиницями сировини S_2 ; $\eta_{31}=\infty$ означає, що зменшення сировини S_1 на одиницю ніяким збільшенням сировини S_3 компенсувати не можна; $\eta_{13}=0$ означає, якщо сировини S_3 є надлишок, то її зменшення на одиницю нічим компенсувати не потрібно.

4. Оцінимо ефективність виробництва продукції P_5 з характеристиками, наведеними в таблиці 4.1.

Вартість сировини, яка витратиться на виготовлення одиниці продукції P_5 , становитиме:

$$a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 0 = 120 \text{ (грн.)}$$

Дохід же від реалізації кожної одиниці продукції P_5 дорівнює 180 (грн). Тому виробляти цю продукцію доцільно. Продукція P_5 буде рентабельною при встановленні на неї ціни не менше 120 грн.

Завдання для самостійної роботи

4.1. Підприємство може випускати n видів продукції P_j ($j = \overline{1, n}$). Для цього використовується m видів ресурсів. Загальний обсяг ресурсів b_i ($i = \overline{1, m}$) і норми їх затрат на одиницю продукції j -го виду (a_{ij}) наведені в таблиці 4.4. Там же наведені ціни реалізації C_j одиниці кожної продукції.

1. Використовуючи симплексний метод, визначити оптимальний асортимент продукції, що випускається, який дасть підприємству максимальний прибуток.

2. Скласти модель двоїстої задачі. Із симплексної таблиці прямої задачі, використовуючи відповідність між змінними прямої і двоїстої задачі, записати оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Дати економічний аналіз основних і додаткових змінних обох задач.

Таблиця 4.4

Параметри задачі	Номер варіанта										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_1	75	90	80	300	200	40	60	10	25	50	200
C_2	30	60	30	350	250	30	30	70	10	100	250
C_3	60	40	20	600	500	60	70	120	20	150	125
C_4	120	70	10	650	400	70	35	130	40	400	100
b_1	2 400	1 800	3 000	1 280	10 000	2800	1 000	1 600	12 000	17 000	7 400
b_2	1 200	2 100	700	2 200	2 600	800	300	1 100	6 000	350	5 200
b_3	3 000	8 000	3 400	8 000	3 700	2 500	650	1 000	15 000	15 000	20 000
a_{11}	2	1	2	4	25	4	20	20	20	3	15
a_{12}	1	0	1	4	25	2	10	10	10	1	20
a_{13}	0,5	2	1	4	20	2	60	10	5	1	25

Продовження таблиці

a_{14}	4	1	3	4	15	2	10	10	40	2	25
a_{21}	1	0	1	6	4	2	5	6	10	1	6
a_{22}	5	1	0	3	10	0	30	5	50	2	4
a_{23}	3	3	2	4	4	2	40	4	30	0	10
a_{24}	0	2	1	3	6	2	15	33	0	1	4
a_{31}	3	4	1	16	8	2	60	4	30	0	10
a_{32}	0	2	2	24	7	4	40	6	0	1	4
a_{33}	6	0	1	40	4	2	10	10	60	2	7
a_{34}	1	4	8	52	10	0	40	13	10	1	8

4.2. Необхідно скласти раціон харчування, який включає в себе продукти трьох видів P_1, P_2, P_3 у кількостях відповідно не менше ніж a_1, a_2, a_3 одиниць. Для складання раціону можуть бути використані три види сировини M_1, M_2, M_3 , які містять вказані речовини в різних співвідношеннях. Покупна ціна кожного виду сировини також різна. Вміст харчових речовин у сировині, готового продукту і ціни на кожний вид сировини наведені в таблиці 4.5.

1. За допомогою симплексного методу необхідно визначити такий набір сировини, який забезпечить необхідну місткість харчових речовин у продукті, сумарна вартість якого при цьому була б найменшою.

2. Скласти модель двоїстої задачі. Використовуючи відповідність між змінними прямої і двоїстої задач та симплексну таблицю для прямої задачі, записати оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Дати повний економічний аналіз основних і додаткових змінних прямої і двоїстої задач.

Таблиця 4.5

Харчовий продукт	Сировина			Мінімальна місткість речовини в продукті
	M_1	M_2	M_3	
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3
Ціна за одиницю продукції	C_1	C_2	C_3	

Продовження таблиці

Параметри задачі	Номер варіанта										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_1	62	93	70	78	95	90	95	90	85	60	35
a_2	30	45	40	45	70	50	80	60	70	45	20
a_3	44	70	50	60	80	65	90	75	80	58	28
a_{11}	4	6	7	8	12	9	13	11	11	10	12
a_{12}	4	5	5	6	9	7	10	8	12	11	7
a_{13}	6	8	8	9	6	8	7	9	8	9	8
a_{21}	6	8	8	9	11	10	12	10	10	8	9
a_{22}	1	2	2	3	6	4	7	5	9	6	5
a_{23}	2	3	3	4	7	5	8	6	7	9	7
a_{31}	4	7	9	6	9	7	7	8	8	9	6
a_{32}	6	9	8	11	9	12	10	13	10	9	8
a_{33}	4	6	8	6	9	7	8	8	9	5	4
C_1	8	12	9	10	8	8	9	7	8	5	9
C_2	5	7	6	7	7	9	5	6	6	9	8
C_3	6	9	7	8	11	11	12	10	10	4	7

ГЛАВА 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ, II ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Важливим частинним випадком задач лінійного програмування є так звана транспортна задача.

Нехай в m пунктах $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ зберігається однорідний вантаж відповідно в кількості $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$ одиниць. Його треба поставити в n задані пункти призначення $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$, причому в кожний із них потрібно завезти відповідно $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_n$ одиниць цього вантажу. Вартість перевезення одиниці вантажу із пункту A_i в пункт B_j становить c_{ij} .

Треба знайти такий план перевезень, щоб його сумарна вартість була б найменшою.

Умову задачі зручно записувати у вигляді матриці перевезень (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Пункти	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Запас
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреба	v_1	v_2	...	v_j	...	v_n	Σ

Транспортні задачі діляться на дві групи. Транспортні задачі, у яких загальний запас однорідного вантажу в усіх пунктах зберігання дорівнює сумарній кількості потреб усіх споживачів (пунктів призначення), тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (5.1)$$

називаються закритими або з правильним балансом.

В усіх інших випадках транспортна задача називається відкритою або з неправильним балансом.

Спочатку більш детально зупинимось на транспортній задачі закритого типу. Складемо її економіко-математичну модель. Нехай x_{ij} – кількість вантажу, що перевозиться із пункту A_i в пункт B_j . Зобразимо це у вигляді таблиці 5.2.

Таблица 5.2

Пункти	B_1	B_2	...	B_i	...	B_n	Запас
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1i}	...	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2i}	...	x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ii}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mi}	...	x_{mn}	a_m
Потреба	θ_1	θ_2	...	θ_i	...	θ_n	Σ

Поставка всього вантажу із пункту A_1 в усі пункти призначення B_j виражається рівнянням:

$$x_{j1} + x_{j2} + \dots + x_{ji} + \dots + x_{jn} = a_j.$$

Аналогічно поставка всього вантажу із пункту A_i в пункти призначення B_j виражається рівнянням:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{im} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Таким чином, щоб запаси кожного із m пунктів збереження вантажу були реалізовані, потрібно, щоб невідомі x_{ij} задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1j} + \dots + x_{1n} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2j} + \dots + x_{2n} &= a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} &= a_i, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mj} + \dots + x_{mn} &= a_m; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (5.3)$$

Аналогічно, щоб попит кожного із споживачів був задоволений, подібні рівняння утворюємо для кожного стовпця матриці перевезень. Матимемо:

(5.4)

(5.5)

Очевидно, що обсяги вантажу, який перевозиться, не повинні бути від'ємними, тому:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n).$$

Загальна вартість перевезень має вигляд:

(5.6)

Отже, математичне формулювання транспортної задачі в загальному вигляді буде таким: на множині невід’ємних (допустимих) розв’язків системи обмежень (5.2) і (5.4) знайти такий розв’язок $X=(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$, при якому досягається мінімум лінійної функції (5.6).

Мовою символів це записується так:

(5.7)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n).$$

Особливостями економіко-математичної моделі транспортної задачі порівняно з моделями ЗЛП є:

1) система обмежень є системою рівнянь (тобто транспортна задача задана в канонічній формі);

2) коефіцієнти при невідомих системи обмежень дорівнюють одиниці або нулю;

3) кожна невідома входить у систему обмежень двічі: один раз – у систему (5.2) і один раз – у систему (5.4);

4) кількість невідомих x_{ij} , які входять у цільову функцію $F(x)$ і в систему обмежень (5.2), (5.4), дорівнює добутку $m \cdot n$, тобто числу клітин таблиці 5.1;

5) система обмежень (5.2), (5.4) є системою із $m+n$ рівнянь із $m \cdot n$ невідомими.

Транспортна задача, як задача лінійного програмування, може бути розв'язана симплексним методом. Але специфічна форма системи обмежень даної задачі дозволяє суттєво спростити симплексний метод. Модифікація симплексного методу щодо транспортної задачі називається розподільним методом. Розв'язок задачі вказаним методом здійснюється крок за кроком і кожному кроку відповідає розподіл невідомих на базисні (основні) і вільні (неосновні).

Число τ базисних (основних) невідомих транспортної задачі дорівнює рангу системи лінійних рівнянь, що становлять систему обмежень.

Теорема 5.1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначається за формулою:

$$\tau = m + n - 1, \quad (5.8)$$

де m – кількість пунктів відправлення (зберігання), а n – кількість пунктів призначення (споживачів).

Подібно до того, як це було в симплексному методі, в розподільному методі розв'язання транспортної задачі будемо переходити від одного базисного розподілу поставок до іншого в сторону не зростання цільової функції включно до оптимального розв'язку. Для початку такого руху треба скласти вихідний базисний розподіл поставок – так званий опорний план.

Методи пошуку опорних планів транспортної задачі

Метод „північно-західного кута”, або діагональний метод. Згідно з цим методом заповнюють клітинки матриці перевезень,

починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси. Детальніше розглянемо це на конкретному прикладі.

Приклад 5.1. Знайти методом „північно-західного кута” початковий опорний план транспортної задачі, заданої таблицею 5.3.

Таблиця 5.3

Пункти	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	2	4	3	30
A_2	1	6	2	50
A_3	4	5	1	40
Потреба	20	40	60	120

Починаємо з північно-західного кута (табл. 5.4), тобто першою заповнюємо клітинку x_{11} числом 20 як $\min(30; 20)$. Тоді споживач B_1 свої потреби задовольнив і внаслідок x_{21} і x_{31} дорівнюють нулю (у таблиці ці клітинки залишаються не займаними). Перший стовпчик виключається із розгляду.

Продовжуємо із північно-західного кута, тобто:

$x_{12} = \min(30 - 20; 40) = \min(10; 40) = 10$. Заповнюємо клітинку x_{12} числом 10. Тоді запаси вантажу в пункті A_1 реалізовані і $x_{13} = 0$ (залишається не займаною). При цьому перший рядок виключається із розгляду.

Продовжуємо знову із північно-західного кута

$x_{22} = \min(50; 40 - 10) = \min(50; 30) = 30$. Заповнюємо клітинку x_{22} числом 30. Тоді потреби пункту B_2 повністю забезпечені і клітинка $x_{32} = 0$ (вільна). Стовпчик B_2 виключаємо із розгляду.

Далі заповнюємо клітинку x_{23} , яка знаходиться у північно-західному куті:

$x_{23} = \min(50 - 30; 60) = \min(20; 60) = 20$. Заповнюємо дану клітинку числом 20. Запаси пункту A_2 вичерпані, другий рядок виключаємо із розгляду.

Заповнюємо останню клітинку x_{33} числом 40, як $\min(40; 60 - 20) = 40$ (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Пункти	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	² 20	⁴ 10	³	30
A_2	¹	⁶ 30	² 20	50
A_3	⁴	⁵	¹ 40	40
Потреба	20	40	60	120

Після виконання всіх дій одержуємо початковий опорний план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Загальна вартість перевезень при цьому опорному плані становитиме:

$$F(X_0) = 2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 340.$$

Кількість базисних клітинок дорівнює:

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5.$$

Отже, знайдений початковий опорний план не вироджений.

Зауваження. Число базисних клітин завжди має дорівнювати рангу транспортної задачі, тобто $(m+n-1)$. Але при знаходженні початкового опорного плану і в подальшому можливі випадки виродження, коли в результаті обчислення значення x_{ij} одержуємо, що потреби в пункті B_j задоволені, а запаси в пункті A_i – реалізовані. Тоді одночасно із розгляду виключаються рядок і стовпчик. У цьому випадку рекомендується поставити в одну із клітинок виключеного рядка або стовпчика (краще в клітинку з найменшою вартістю) так званий базисний нуль. Клітинка з нулем вважається базисною (у ній записується 0), а загальне число базисних клітинок залишається рівним $(m+n-1)$.

Приклад 5.2. Методом північно-західного кута знайти початковий опорний план перевезень у транспортній задачі, що задана матрицею перевезень (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Пункти	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас
A_1	¹ 30	² 20	³	⁵	50
A_2	⁴	¹ 0	¹ 40	²	40
A_3	¹	²	⁵ 10	¹⁰ 50	60
Потреба	30	20	50	50	150

Починаємо заповнення таблиці з північно-західного кута:

$x_{11} = \min(50; 30) = 30$, $x_{21} = x_{31} = 0$ (не заповнюється). Виключається перший стовпчик.

Далі знову продовжуємо з північно-західного кута:

$x_{12} = \min(50 - 30; 20) = \min(20; 20) = 20$. Записуємо в клітинку x_{12} число 20. Маємо випадок виродження, оскільки із розгляду виключаються одночасно перший рядок і другий стовпчик:

$$x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{32} = 0.$$

Базисний нуль поставимо в клітинку x_{22} з найменшою вартістю, що дорівнює $\min(3; 5; 1; 2) = 1$. Інші клітинки вільні.

Продовжуємо з північно-західного кута: $x_{23} = \min(40; 50) = 40$. Записуємо в цю клітинку число 40, клітинка x_{24} залишається вільною. Із розгляду виключаємо другий рядок.

Продовжуємо далі із північно-західного кута: $x_{33} = \min(60; 50 - 40) = \min(60; 10) = 10$. Записуємо в цю клітинку 10.

$$x_{34} = \min(60 - 10; 50) = \min(50; 50) = 50.$$

Таким чином, початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 50 = 660.$$

Число базисних клітинок з урахуванням базисного нуля дорівнює $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Метод найменшої вартості. Одержаний методом північно-західного кута початковий опорний план перевезень не залежить від їх вартості, а тому в загальному він далекий від найкращого.

У методі найменшої вартості враховуються затрати на перевезення. Унаслідок цього відповідний початковий опорний план, як правило, дозволяє забезпечити сумарну вартість, а тому він буде більш близьким до оптимального.

Цим методом послідовно заповнюються клітинки з найменшою вартістю перевезень. Якщо маємо декілька клітинок із найменшою вартістю, то із них береться будь-яка.

Приклад 5.3. Знайти методом найменшої вартості початковий опорний план транспортної задачі, яка задана матрицею перевезень (табл. 5.6).

Таблиця 5.6

Пункти	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	²	⁴ 30	⁵	30
A_2	¹ 20	⁶ 10	² 20	50
A_3	⁴	⁵	¹ 40	40
Потреба	20	40	60	120

Заповнюємо клітинку з найменшою вартістю, що дорівнює 1:

$$x_{21} = \min(50; 20) = 20.$$

Тоді потреба пункту B_1 забезпечена і клітинки x_{11} та x_{31} не заповнюються, а перший стовпчик виключається із розгляду.

Із клітинок, що залишилися, знаходимо клітинку із найменшою вартістю і заповнюємо її:

$$x_{33} = \min(40; 60) = 40,$$

тоді клітинки x_{31} і x_{32} не заповнюються, а третій рядок виключається із розгляду.

Знову серед клітинок, які залишилися, беремо клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її:

$$x_{23} = \min(50; 60 - 40) = \min(50; 20) = 20$$

Потреби в пункті B_3 забезпечені. Клітинка x_{13} не заповнюється, а третій стовпчик виключається із розгляду.

Із двох клітинок, які залишилися, заповнюємо клітинку з найменшою вартістю:

$$x_{12} = \min(30; 40) = 30.$$

Виключаємо із розгляду перший рядок (запаси в пункті A_1 реалізовані):

$$x_{22} = \min(50-40; 40-30) = \min(10; 10) = 10.$$

Таким чином, маємо початковий опорний план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 \\ 20 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0) = 4 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 280.$$

Зауважимо, що одержана загальна вартість перевезень менша ніж та, яку ми одержали методом північно-західного кута (див. приклад 5.1; $F(X_0) = 340$).

Кількість базисних клітинок $m+n-1=3+3-1=5$.

Отже, одержаний початковий опорний план не вироджений.

Відшукання початкового опорного плану перевезень не ставить за мету отримати оптимальний розв'язок. Для цього існують такі етапи розв'язування задачі, які мають за мету перехід до нових планів перевезень, поки не буде знайдений їх оптимальний план.

Метод потенціалів відшукання оптимального розв'язку транспортної задачі. Метод забезпечує покращення початкового плану перевезень. При цьому відбувається перехід від одного плану перевезень до іншого доти, доки зменшення загальної вартості перевезень стає неможливим.

Перш ніж викласти суть методу потенціалів, введемо деякі поняття.

Циклом у матриці будемо називати замкнену ланану з вершинами в клітинках матриці і ланками, що лежать вздовж рядків і стовпців. У кожній вершині зустрічаються дві ланки, причому одна з них розміщується по рядку, а друга – по стовпцю. Число вершин циклу парне. Циклом може бути ламана, яка самоперетинається, але точки її самоперетину не можуть бути вершинами циклу.

Можливі цикли схематично зображено на рис. 5.1.

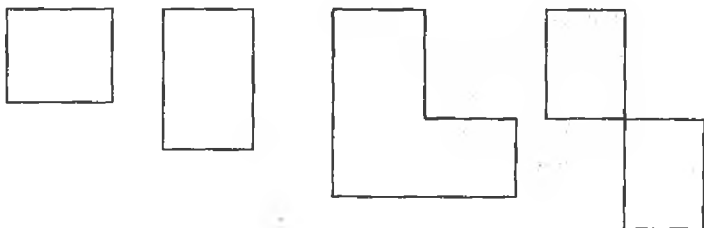


Рис. 5.1

Вершини одного й того самого відрізка циклу називають сусідніми.

Цикл сусіднім вершинам, якому поставлено у відповідність знаки „+” і „-”, називається означеним.

Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а решта – в базисних, називають циклом перерахунку. Вільній клітинці приписують знак „+”, сусідні з нею вершини мають протилежні знаки.

Зсувом у циклі перерахунку на додатне число θ будемо називати таку операцію, при якій до значень x_{ij} , що стоять у клітинках помічених знаком „+” додається число θ , а які стоять у клітинках помічених знаком „-” віднімається це число θ .

Прийmemo без доведення такі теореми:

Теорема 5.2. Зсув за означенням циклом у матриці перевезень перетворює один розв’язок системи обмежень транспортної задачі на інший розв’язок цієї задачі.

Теорема 5.3. Для будь-якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

Зауваження. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці лишаються без змін.

У вироджених задачах нерідко зсув треба виконувати на число нуль, яке не змінює базисних значень невідомих. Тоді цей нуль переводять у вільну клітинку циклу перерахунку, залишивши попередню вільною.

Послідовність дій при розв'язуванні транспортної задачі методом потенціалів можна викласти у вигляді такої схеми.

1. Знайти початковий опорний план перевезень методом найменшої вартості або методом північно-західного кута.

2. Для кожної базисної (заповненої) клітинки скласти рівняння:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij},$$

де α_i – потенціали пунктів відправлення, $i = \overline{1; m}$, а β_j – потенціали пунктів призначення, $j = \overline{1; n}$.

Оскільки ці рівняння утворюють систему $(m+n-1)$ рівнянь із $(m+n)$ невідомими (вона має нескінченну множину розв'язків), то для визначеності потрібно прийняти $\alpha_1 = 0$. Тоді всі решта потенціалів визначаються однозначно.

3. Для кожної вільної (не заповненої) клітинки обчислити відносні оцінки за формулою:

$$S_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j).$$

4. Проаналізувати відносні оцінки:

а) якщо всі відносні оцінки невід'ємні, тобто $S_{ij} \geq 0$, то задача розв'язана, і потрібно виписати одержаний оптимальний план перевезень із останньої таблиці та підрахувати його вартість;

б) якщо серед оцінок S_{ij} є від'ємні, то вибрати серед них найменшу.

5. Для вільної клітинки $(i; j)$ з вибраною найменшою від'ємною оцінкою S_{ij} побудувати означений цикл. Усі його вершини, крім розміщеної в клітинці $(i; j)$, повинні знаходитися у базисних клітинках. Вільна клітинка береться із знаком „+”.

6. Виконати зсув по одержаному, згідно з пунктом 5, циклу на величину θ , яка дорівнює найменшому із чисел, що знаходяться у від'ємних вершинах. При цьому значення, що стоять у додатних вершинах, збільшуються на величину θ , а значення, що стоять у від'ємних вершинах, зменшуються на величину θ .

Якщо найменше значення θ досягається у декількох від'ємних вершинах циклу, то при зсуві потрібно поставити базисний нуль в усіх таких вершинах, крім однієї. Тоді кількість базисних клітинок збережеться і буде дорівнювати $(m+n-1)$.

Елементи матриці, які не входять до циклу, залишаються без змін.

Перейти до пункту 2.

Зауваження. При розв'язуванні задач може виникнути ситуація, в якій $\theta=0$. Тоді при зсуві вільна клітинка стає базисною (в неї заноситься базисний нуль).

Приклад 5.4. Методом потенціалів розв'язати транспортну задачу, наведену в прикладі 5.3 (див. табл. 5.6).

Початковий опорний план перевезень даної задачі знайдений методом найменшої вартості (табл. 5.7).

Таблиця 5.7

Пункти	B_1	B_2	B_3	Запаси		
A_1	² 30	⁴ 30	³	30	0	α_1
A_2	¹ 20	⁶ 10	² 20	50	2	α_2
A_3	⁴	⁵	¹ 40	40	1	α_3
Потреба	20	40	60	120		
	-1	4	0			
	β_1	β_2	β_3			

Знайдемо потенціали, складаючи для кожної базисної (заповненої) клітинки рівняння $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$.

$$\alpha_1 + \beta_2 = 4,$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 6,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 2,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

Нехай $\alpha_1=0$, тоді із першого рівняння маємо: $0 + \beta_2=4$, $\beta_2=4$. Підставляючи $\beta_2=4$ у третє рівняння, одержимо $\alpha_2+4=6$, $\alpha_2=2$. Із другого рівняння знаходимо β_1 : $2 + \beta_1=1$, $\beta_1=-1$. Підставивши значення α_2 у четверте рівняння, знаходимо β_3 : $2 + \beta_3=2$, $\beta_3=0$. Таким чином, із п'ятого рівняння маємо: $\alpha_3+0=1$, $\alpha_3=1$.

Для кожної вільної (не заповненої) клітинки обчислюємо відносні оцінки $S_{ij}=C_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$.

$$S_{11}=C_{11}-(\alpha_1+\beta_1)=2-(0+(-1))=3,$$

$$S_{13}=C_{13}-(\alpha_1+\beta_3)=3-(0+0)=3,$$

$$S_{31}=C_{31}-(\alpha_3+\beta_1)=4-(1+(-1))=4,$$

$$S_{32}=C_{32}-(\alpha_3+\beta_2)=5-(1+4)=0.$$

Оскільки серед відносних оцінок S_{ij} відсутні від'ємні оцінки, то побудований план перевезень є оптимальний.

Випишуємо його із таблиці 5.7.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 \\ 20 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

За оптимальним планом перевезень перший споживач одержує 20 одиниць вантажу із другого пункту відправлення, другий – 30 одиниць із першого пункту відправлення та 10 одиниць із другого, а третій – 20 одиниць із другого пункту відправлення та 40 одиниць із третього. При цьому загальна вартість перевезень усього вантажу є найменшою і становить:

$$F(X) = 4 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 280 \text{ ум. од.}$$

Самостійно пропонується перевірити на оптимальність початковий опорний план цієї задачі, знайдений методом північно-західного кута (табл. 5.5), та покращити його методом потенціалів.

Приклад 5.5. Три фермерські господарства A_1, A_2, A_3 щоденно поставляють у місто відповідно 50, 60 і 40 центнерів молока для забезпечення торгових точок B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Вартість перевезення 1 ц молока і потреба торгових точок у молоці вказані у таблиці 5.8.

Таблиця 5.8

Фермерські господарства	Вартість перевезення 1 ц молока торговим точкам, ум. од.					Запас молока, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	60
A_3	6	8	4	9	7	40
Потреба у молоці, ц	30	20	55	20	25	150

Визначити оптимальний план постачання молока в кожную торгову точку для задоволення потреб, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель даної задачі. Нехай x_{ij} – кількість центнерів молока, що перевозиться з i -го господарства до j -ої торгової точки ($i=\overline{1;3}$; $j=\overline{1;5}$). Оскільки транспортна задача за умовою є закритою $\left(\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j = 150 \right)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min F(x) = 7 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{12} + 8 \cdot x_{13} + 10 \cdot x_{14} + 12 \cdot x_{15} + 9 \cdot x_{21} + 5 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 6 \cdot x_{25} + 6 \cdot x_{31} + 8 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 9 \cdot x_{34} + 7 \cdot x_{35}.$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25, \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1;3}; j=\overline{1;5}) \end{cases}$$

Методом найменшої вартості знаходимо початковий план постачання молока в торгові точки (табл. 5.9).

Таблиця 5.9

$a_i \backslash b_j$	30	20	55	20	25	
50	⁷ 30	⁶	⁸ 15	¹⁰	¹² 5	0
60	⁹	⁵ 20	⁷	⁴ 20	⁶ 20	-6
40	⁶	⁸	⁴ 40	⁹	⁷	-4
	7	11	8	10	12	
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	

Починаємо заповнювати з клітинки з найменшою вартістю. Нехай це буде клітинка (x_{24}) : $\min (60; 20) = 20$. Ставимо у цю

клітинку число 20. Четвертий стовпчик із розгляду виключаємо. Наступна клітинка з найменшою вартістю (x_{33}), $\min(40; 55)=40$. Заповнюємо вказану клітинку числом 40. Запаси молока третього господарства повністю реалізовані, тому третій рядок у подальшому не розглядаємо. Далі заповнюємо числом 20 ($\min(60; 20)=20$) клітинку (x_{22}) і другий стовпчик виключаємо із розгляду, оскільки потреба у молоці другої торгової точки повністю задоволена. Чергова клітинка з найменшою вартістю – клітинка (x_{25}). Так як $\min(60-40; 25)=\min(20; 25)=20$, то цю клітинку заповнюємо числом 20. Другий рядок виключаємо із розгляду, тому що всі запаси молока другого господарства повністю реалізовані. У клітинку (x_{11}) ставимо $\min(50; 30)=30$ – число 30, у клітинку (x_{13}): $\min(50-30; 55-40)=\min(20; 15)=15$ – число 15, а у клітинку (x_{15}): $\min(50-45; 25-20)=5$.

Таким чином, початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 15 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0)=7 \cdot 30 + 8 \cdot 15 + 12 \cdot 5 + 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 40 = 850.$$

$$\text{Ранг матриці } \tau = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7.$$

$$\text{Базисних клітинок } m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7.$$

Отже, знайдений початковий опорний план не вироджений.

Перевіримо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Запишемо, використовуючи базисні клітинки, рівняння для обчислення потенціалів.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 7, \\ \alpha_1 + \beta_3 &= 8, \\ \alpha_1 + \beta_5 &= 12, \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 5, \\ \alpha_2 + \beta_4 &= 4, \\ \alpha_2 + \beta_5 &= 6, \\ \alpha_3 + \beta_3 &= 4. \end{aligned}$$

Маємо сім рівнянь і вісім невідомих. Для визначеності покладемо $\alpha_1 = 0$. Тоді із перших трьох рівнянь: $\beta_1 = 7$, $\beta_3 = 8$, $\beta_5 = 12$. Із

передостаннього рівняння: $\alpha_2=6-\beta_3=6-12=-6$. Підставляючи значення α_2 у четверте і п'яте рівняння, знаходимо β_2 і β_4 :

$$\beta_2=5-\alpha_2=5-(-6)=11,$$

$$\beta_4=4-\alpha_2=4-(-6)=10.$$

Із останнього рівняння: $\alpha_3=4-\beta_3=4-8=-4$.

Для кожної вільної клітинки обчислюємо відносні оцінки:

$$S_{ij}=C_{ij}-(\alpha_i+\beta_j).$$

$$S_{12}=C_{12}-(\alpha_1+\beta_2)=6-(0+11)=-5,$$

$$S_{14}=C_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=10-(0+10)=0,$$

$$S_{21}=C_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=9-(-6+7)=8,$$

$$S_{23}=C_{23}-(\alpha_2+\beta_3)=7-(-6+8)=5,$$

$$S_{31}=C_{31}-(\alpha_3+\beta_1)=6-(-4+7)=3,$$

$$S_{32}=C_{32}-(\alpha_3+\beta_2)=8-(-4+11)=1,$$

$$S_{34}=C_{34}-(\alpha_3+\beta_4)=9-(-4+10)=3,$$

$$S_{35}=C_{35}-(\alpha_3+\beta_5)=7-(-4+12)=-1.$$

Серед відносних оцінок маємо дві від'ємні: $S_{12}=-5$ та $S_{35}=-1$. Тому початковий опорний план є неоптимальним.

Візьмемо за правило надавати поставку насамперед в ту клітинку, яка має найменшу від'ємну оцінку (навіть якщо вона і не є самою вигідною). Такою клітинкою є клітинка S_{12} , а тому будемо для неї означений цикл (табл. 5.9). Усі його вершини, крім даної, знаходяться у базисних клітинках. У клітинку S_{12} ставимо знак „+”, тоді в клітинці S_{15} буде знак „-”, в клітинці S_{25} знак „+” і в клітинці S_{22} знак „-”.

Знаходимо число $\theta=\min(5; 20)=5$, яке дорівнює найменшому із чисел, що стоять в клітинках, помічених знаком „-”.

Виконуємо зсув по циклу на число $\theta=5$: числа, що стоять у клітинках, помічених знаком „+”, збільшуються на 5, а числа, що стоять у клітинках, помічених знаком „-”, зменшуються на 5 (табл. 5.10).

Елементи матриці, які не входять до циклу, залишаються без змін.

Таблиця 5.10

$b_j \backslash a_i$	30	20	55	20	25		
50	⁷ 30	⁶ 5	⁸ 15	¹⁰	¹²	0	α_1
60	⁹	⁵ 15	⁷	⁴ 20	⁶ 25	-1	α_2
40	⁶	⁸	⁴ 40	⁹	⁷	-4	α_3
	7	11	8	5	7		
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		

Одержали новий не вироджений опорний план (ранг матриці дорівнює 7, базисних клітинок – 7).

Знаходимо потенціали, складаючи рівняння $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$. Для базисних клітинок маємо:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \beta_1 &= 7, \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 6, \\ \alpha_1 + \beta_3 &= 8, \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 5, \\ \alpha_2 + \beta_4 &= 4, \\ \alpha_2 + \beta_5 &= 6, \\ \alpha_3 + \beta_3 &= 4.\end{aligned}$$

Нехай $\alpha_1=0$, тоді $\beta_1=7$, $\beta_2=6$, $\beta_3=8$; $\alpha_2=5$ - $\beta_2=5-6=-1$;
 $\beta_4=4$ - $\alpha_2=4-(-1)=5$; $\beta_5=6$ - $\alpha_2=6-(-1)=7$; $\alpha_3=4$ - $\beta_3=4-8=-4$.

Для кожної вільної клітинки обчислюємо відносні оцінки S_{ij} .

$$\begin{aligned}S_{14} &= C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 10 - (0 + 5) = 5, \\ S_{15} &= C_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = 12 - (0 + 7) = 5, \\ S_{21} &= C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 9 - (-1 + 7) = 3, \\ S_{23} &= C_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 7 - (-1 + 8) = 0, \\ S_{31} &= C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 6 - (-4 + 7) = 3, \\ S_{32} &= C_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 8 - (-4 + 6) = 6, \\ S_{34} &= C_{34} - (\alpha_3 + \beta_4) = 9 - (-4 + 5) = 8, \\ S_{35} &= C_{35} - (\alpha_3 + \beta_5) = 7 - (-4 + 7) = 4.\end{aligned}$$

Оскільки всі $S_{ij} \geq 0$, задача розв'язана.

Оптимальний план постачання молока від фермерських господарств торговим точкам має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 20 & 25 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Загальна вартість перевезення:

$$\min F(X) = 7 \cdot 30 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 15 + 5 \cdot 15 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 25 + 4 \cdot 40 + 825 \text{ (у. о.)}.$$

Оскільки серед відносних оцінок вільних клітинок є нульова ($S_{23}=0$), то одержаний оптимальний план перевезень не єдиний.

Приклад 5.6. Знайти оптимальний план перевезення бензину із трьох бензосховищ A_1, A_2, A_3 , у яких зберігається відповідно 300, 150 і 200 т бензину. Вказаний бензин призначено для п'яти АЗС: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Потреба кожної АЗС в бензині, вартість перевезення 1 т бензину від кожного сховища до кожної АЗС, подані в таблиці 5.11.

Таблиця 5.11

Бензосховища	Вартість перевезення 1т бензину до АЗС, в у. о.					Запас бензину, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	7	1	5	2	300
A_2	6	2	4	1	3	150
A_3	5	6	7	4	8	200
Потреба у бензині, т	80	170	150	180	70	650

Розв'язання

Нехай x_{ij} – кількість тонн бензину, яку треба перевезти з i -го, $i = \overline{1,3}$ бензосховища на j -ту ($j = \overline{1,5}$) АЗС. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min F(x) = 4x_{11} + 7x_{12} + x_{13} + 5x_{14} + 2x_{15} + 6x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + x_{24} + 3x_{25} + 5x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} + 8x_{35},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 180, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 70, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}).$$

Початковий опорний план перевезень знайдемо, наприклад, за методом найменшої вартості (табл. 5.12).

Таблиця 5.12

$b_j \backslash a_i$	80	170	150	180	70	
300	80		150		70	0
150				150	0	1
200		170		30		4
	4	2	1	0	2	
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	

α_1

α_2

α_3

Заповнюємо клітинку $x_{13} : \min(300; 150)=150$. Проставляємо число 150. Потреба третьої АЗС задоволена. Третій стовпець виключаємо із розгляду. Наступна клітинка $x_{24} : \min(150; 180)=150$. Записуємо в клітинку число 150. Запаси бензину другого сховища вичерпані, тому другий рядок виключається із розгляду. Далі заповнюємо клітинку $x_{15} : \min(300-150; 70)=\min(150; 70)=70$. У клітинку записуємо число 70 і, оскільки потреба п'ятої АЗС задоволена, п'ятий стовпець вибуває із розгляду. Наступною заповнюється клітинка $x_{11} : \min(300-220; 80)=\min(80; 80)=80$. Проставляємо в цю клітинку число 80. Із розгляду виключаються одночасно перший рядок і перший стовпець, що приводить до виродженості опорного плану перевезень. Закінчуючи заповнюємо клітинки x_{34} та x_{32} :

$$x_{34} : \min(200; 180-150)=\min(200; 30)=30.$$

Ставимо число 30.

$$x_{32} : \min(200-30; 170)=\min(170; 170)=170.$$

Проставляємо у клітинку 170.

Обчислюємо ранг матриці:

$$\tau=m+n-1=3+5-1=7.$$

Кількість базисних (заповнених) клітинок повинна дорівнювати 7. В одержаному початковому опорному плані їх 6, тому цей

план вироджений. В одну із вільних клітинок вписуємо базисний нуль (як правило, це клітинка з найменшою вартістю), але так, щоб виконувалася умова ациклічності опорного плану. Найменшу вартість із вільних клітинок має клітинка x_{22} , але якщо до неї записати число 0, то утвориться замкнений цикл, що не допускається, тому базисний нуль впишемо у клітинку x_{25} . Тепер одержаний початковий опорний план не вироджений. Методом потенціалів перевіримо його на оптимальність.

Використовуючи базисні клітинки, складаємо рівняння для обчислення потенціалів (табл. 5.12).

$$\alpha_1 + \beta_1 = 4,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_5 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 1,$$

$$\alpha_2 + \beta_5 = 3,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 6,$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 4.$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 4$, $\beta_3 = 1$, $\beta_5 = 2$; $\alpha_2 = 3 - \beta_5 = 3 - 2 = 1$;
 $\beta_4 = 1 - \alpha_2 = 1 - 1 = 0$; $\alpha_3 = 4 - \beta_4 = 4 - 0 = 4$; $\beta_2 = 6 - \alpha_3 = 6 - 4 = 2$.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} :

$$S_{12} = C_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 7 - (0 + 2) = 5,$$

$$S_{14} = C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 5 - (0 + 0) = 5,$$

$$S_{21} = C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 6 - (1 + 4) = 1,$$

$$S_{22} = C_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 2 - (1 + 2) = -1,$$

$$S_{23} = C_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 4 - (1 + 1) = 2,$$

$$S_{31} = C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 5 - (4 + 4) = -3,$$

$$S_{33} = C_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 7 - (4 + 1) = 2,$$

$$S_{35} = C_{35} - (\alpha_3 + \beta_5) = 8 - (4 + 2) = 2.$$

Отже, початковий опорний план не є оптимальним, серед відносних оцінок є дві від'ємні: $S_{22} = -1$; $S_{31} = -3$.

Беремо клітинку S_{31} з найменшим від'ємним числом і будемо для неї означений цикл перерахунку. У клітинку S_{31} ставимо знак „+”. У таблиці 5.12 означений цикл для клітинки S_{31} виділено штриховою лінією.

У клітинках, помічених знаком „-”, найменша кількість вантажу $\min(80; 0; 30) = 0$, тобто число 0 треба помістити в клітинку

$S_{31}, x_{31}=0$. Одержуємо новий план перевезення, хоча значення цільової функції і не змінюється (табл. 5.13).

Таблиця 5.13

$a_i \backslash b_j$	80	170	150	180	70	
300	⁴ 80	⁷	¹ 150	⁵	² 70	0 α_1
150	⁶	² 	⁴	¹ 150 	³	-2 α_2
200	⁵ 0	⁶ 	⁷	⁴ 30 	⁸	1 α_3
	4 β_1	5 β_2	1 β_3	3 β_4	2 β_5	

Одержаний план, як і попередній, вироджений. Для обчислення потенціалів складаємо систему рівнянь:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 4,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_5 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 1,$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 5,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 6,$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 4.$$

Нехай $\alpha_1=0$, тоді $\beta_1=4, \beta_3=1, \beta_5=2; \alpha_3=5-\beta_1=5-4=1; \beta_2=6-\alpha_3=6-1=5; \beta_4=4-\alpha_3=4-1=3; \alpha_2=1-\beta_4=1-3=-2$.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок.

$$S_{12}=C_{12}-(\alpha_1+\beta_2)=7-(0+5)=2,$$

$$S_{14}=C_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=5-(0+3)=2,$$

$$S_{21}=C_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=6-(-2+4)=4,$$

$$S_{22}=C_{22}-(\alpha_2+\beta_2)=2-(-2+5)=-1,$$

$$S_{23}=C_{23}-(\alpha_2+\beta_3)=4-(-2+1)=5,$$

$$S_{25}=C_{25}-(\alpha_2+\beta_5)=3-(-2+2)=3,$$

$$S_{33}=C_{33}-(\alpha_3+\beta_3)=7-(1+1)=5,$$

$$S_{35}=C_{35}-(\alpha_3+\beta_5)=8-(1+2)=5.$$

Маємо одну від'ємну оцінку: $S_{22}=-1$, тому і цей план перевезень не є оптимальним.

Для клітинки S_{22} будемо означений цикл перерахунку. Дану клітинку помічаємо знаком „+”. У таблиці 5.13 цей означений цикл виділено штриховою лінією. У клітинках, помічених знаком „-”, найменша кількість вантажу $\min(150; 170)=150$, тобто виконуємо зсув на число $\theta=150$. Значення клітинок, помічених знаком „+”, збільшуватимуться на число 150, а значення клітинок, помічених знаком „-”, зменшуватимуться на число 150. Після виконання зсуву одержуємо новий план перевезень (табл. 5.14).

Таблиця 5.14

$b_j \backslash a_i$	80	170	150	180	70		
300	⁴ 80	⁷	¹ 150	⁵	² 70	0	α_1
150	⁶	² 150	⁴	¹	³	-3	α_2
200	⁵ 0	⁶ 20	⁷	⁴ 180	⁸	1	α_3
	4	5	1	3	2		
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		

Обчислюємо потенціали α_i і β_j із рівнянь:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 4,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_5 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 2,$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 5,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 6,$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 4$$

Нехай $\alpha_1=0$, тоді $\beta_1=4$, $\beta_3=1$, $\beta_5=2$; $\alpha_3=5-\beta_1=5-4=1$;
 $\beta_2=6-\alpha_3=6-1=5$; $\beta_4=4-\alpha_3=4-1=3$; $\alpha_2=2-\beta_2=2-5=-3$.

Знаходимо відносні оцінки вільних клітинок:

$$S_{12}=C_{12}-(\alpha_1+\beta_2)=7-(0+5)=2,$$

$$S_{14}=C_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=5-(0+3)=2,$$

$$S_{21}=C_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=6-(-3+4)=5,$$

$$S_{23}=C_{23}-(\alpha_2+\beta_3)=4-(-3+1)=6,$$

$$S_{24}=C_{24}-(\alpha_2+\beta_4)=1-(-3+3)=1,$$

$$S_{25}=C_{25}-(\alpha_2+\beta_5)=3-(-3+2)=4,$$

$$S_{33}=C_{33}-(\alpha_3+\beta_3)=7-(1+1)=5,$$

$$S_{35}=C_{35}-(\alpha_3+\beta_5)=8-(1+2)=5.$$

Усі оцінки вільних клітинок додатні, тому поданий в таблиці 5.14 план перевезень – оптимальний. Крім того, оскільки серед відносних оцінок вільних клітинок немає нульових, то він і єдиний.

$$\text{Отже, } X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 150 & 0 & 70 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 180 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\min F(X) = 4 \cdot 80 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 70 + 2 \cdot 150 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 180 = 1\,750 \text{ (у. о.)}.$$

Відкрита модель транспортної задачі

Транспортні задачі відкритого типу, або з неправильним балансом, розв'язуються шляхом зведення їх до транспортних задач закритого типу. Далі використовується метод потенціалів. Оптимальний план перевезень нової задачі містить оптимальний план перевезень вихідної задачі.

Можливі два випадки:

Перший випадок. Загальні запаси вантажу у пунктах відправлення більші загальних потреб пунктів призначення, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

У цьому випадку треба:

– ввести фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j;$$

– вартість перевезення одиниці вантажу для фіктивного споживача вважається рівною нулю.

Другий випадок. Загальні запаси вантажу у пунктах відправлення менші загальних потреб пунктів призначення, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j.$$

У цьому випадку треба:

– вести фіктивного умовного постачальника A_{m+1} із запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i;$$

– вартість перевезення одиниці вантажу для фіктивного поставачальника вважається рівною нулю.

Приклад 5.7. Чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4 одержують овочі із трьох господарств A_1, A_2, A_3 агропромислового об'єднання, які щоденно можуть поставляти відповідно 10, 12, 18 т. Доби́ва потреба магазинів становить 9, 10, 12, 15 т.

Відома матриця вартості перевезення 1т овочів від господарства до магазинів:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 20 & 22 \\ 24 & 18 & 19 & 21 \\ 23 & 16 & 17 & 20 \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}).$$

Скласти план завезення овочів у магазини, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_{ij} – кількість тонн овочів, які перевозять з i -го господарства до j -го магазину ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$). Тоді математична модель заданої задачі має вигляд:

$$\min F(x) = 15x_{11} + 17x_{12} + 20x_{13} + 22x_{14} + 24x_{21} + 18x_{22} + 19x_{23} + 21x_{24} + 23x_{31} + 16x_{32} + 17x_{33} + 20x_{34}.$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 12, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 18, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 9, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 10, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 12, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 15, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Запис „ $\leq$ ” у чотирьох других обмеженнях задачі пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 40, \sum_{j=1}^4 b_j = 46.$$

У такій ситуації, коли попит більший за пропозицію, частина овочів буде недопоставленою в магазини.

Щоб визначити оптимальний план завезення овочів для цієї задачі, зведемо спочатку її до закритого типу. Це виконується шляхом введення фіктивного умовного господарства A_4 із можливою поставкою овочів у магазини $a_4=46-40=6$ (т). Вартість перевезення овочів від умовного господарства до магазинів дорівнює нулю.

Будуємо початковий опорний план задачі, використовуючи, наприклад, метод найменшої вартості (табл. 5.15).

Таблиця 5.15

$b_j \backslash a_i$	9	10	12	15	
10	15 9	17 $\oplus$	20 -----	22 ----- $\ominus$	0 α_1
12	24	18 -----	19 -----	21 ----- $\oplus$	-1 α_2
18	23	16 $\ominus$	17 ----- $\oplus$	20 -----	-3 α_3
6	0	0	0	0 6	-22 α_4
	15 β_1	19 β_2	20 β_3	22 β_4	

Початковий опорний план не вироджений. Перевіряємо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Складаємо рівняння для обчислення потенціалів, використовуючи базисні клітинки.

$$\alpha_1 + \beta_1 = 15,$$

$$\alpha_1 + \beta_4 = 22,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 19,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 21,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 16,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 17,$$

$$\alpha_4 + \beta_4 = 0.$$

Нехай $\alpha_1=0$, тоді $\beta_1=15$, $\beta_4=22$;

$$\alpha_2=21-\beta_4=21-22=-1; \beta_3=19-\alpha_2=19-(-1)=20;$$

$$\alpha_3=17-\beta_3=17-20=-3; \beta_2=16-\alpha_3=16-(-3)=19;$$

$$\alpha_4=0-\beta_4=0-22=-22.$$

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок:

$$S_{12}=C_{12}-(\alpha_1+\beta_2)=17-(0+19)=-2,$$

$$S_{13}=C_{13}-(\alpha_1+\beta_3)=20-(0+20)=0,$$

$$S_{21}=C_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=24-(-1+15)=10,$$

$$S_{22}=C_{22}-(\alpha_2+\beta_2)=18-(-1+19)=0,$$

$$S_{31}=C_{31}-(\alpha_3+\beta_1)=23-(-3+15)=11,$$

$$S_{34}=C_{34}-(\alpha_3+\beta_4)=20-(-3+22)=1,$$

$$S_{41}=C_{41}-(\alpha_4+\beta_1)=0-(-22+15)=7,$$

$$S_{42}=C_{42}-(\alpha_4+\beta_2)=0-(-22+19)=3,$$

$$S_{43}=C_{43}-(\alpha_4+\beta_3)=0-(-22+20)=2.$$

Серед відносних оцінок вільних клітинок є від'ємна ($S_{12}=-2$), тому опорний план перевезень, поданий у таблиці 5.15, не є оптимальним.

Для клітинки S_{12} будемо означений цикл перерахунку. Клітинку S_{12} помічаємо знаком „+”. У таблиці 5.15 цикл перерахунку позначений штриховою лінією. Зсув по циклу виконуємо на величину $\theta = \min(1; 4; 10) = 1$. Значення x_{ij} в клітинках, помічених знаком „+”, збільшуються на 1, а в клітинках, помічених знаком „-”, зменшуються на 1 (табл. 5.16).

Таблиця 5.16

$b_j \backslash a_i$	9	10	12	15	
10	15 9	17 1	20	22	0 α_1
12	24	18 $\oplus$	19 3 $\ominus$	21 9	1 α_2
18	23	16 $\ominus$	17 9 $\oplus$	20	-1 α_3
6	0	0	0	0 6	-20 α_4
	15	17	18	20	
	β_1	β_2	β_3	β_4	

Одержаний опорний план не вироджений.

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів. Обчислимо їх:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 15,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 17,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 19,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 21,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 16,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 17,$$

$$\alpha_4 + \beta_4 = 0.$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 15$, $\beta_2 = 17$; $\alpha_3 = 16 - \beta_2 = 16 - 17 = -1$;

$$\beta_3 = 17 - \alpha_3 = 17 - (-1) = 18; \alpha_2 = 19 - \beta_3 = 19 - 18 = 1;$$

$$\beta_4 = 21 - \alpha_2 = 21 - 1 = 20; \alpha_4 = 0 - \beta_4 = 0 - 20 = -20.$$

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок:

$$S_{13} = C_{13} - (\alpha_1 + \beta_3) = 20 - (0 + 18) = 2,$$

$$S_{14} = C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 22 - (0 + 20) = 2,$$

$$S_{21} = C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 24 - (1 + 15) = 8,$$

$$S_{22} = C_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 18 - (1 + 17) = 0,$$

$$S_{31} = C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 23 - (-1 + 15) = 9,$$

$$S_{34} = C_{34} - (\alpha_3 + \beta_4) = 20 - (-1 + 20) = 1,$$

$$S_{41} = C_{41} - (\alpha_4 + \beta_1) = 0 - (-20 + 15) = 5,$$

$$S_{42} = C_{42} - (\alpha_4 + \beta_2) = 0 - (-20 + 17) = 3,$$

$$S_{43} = C_{43} - (\alpha_4 + \beta_3) = 0 - (-20 + 18) = 2.$$

Усі відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок невід'ємні, тому опорний план перевезень (табл. 5.16) є оптимальним.

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\min F(X) = 15 \cdot 9 + 1 \cdot 17 + 19 \cdot 3 + 21 \cdot 9 + 16 \cdot 9 + 17 \cdot 9 = 695 \text{ (у. о.)}.$$

Згідно з оптимальним планом потреба першого, другого і третього магазинів задовольняється повністю, а четвертого із-за дефіциту овочів лише частково. У цьому разі загальна вартість усіх перевезень буде найменшою і становитиме 695 у. о.

Крім того, розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, оскільки серед відносних оцінок вільних клітинок є нульова, це $S_{22} = 0$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, досить заповнити зазначену клітинку S_{22} , тобто побудувати означений цикл перерахунку для цієї клітинки. У таблиці 5.16 він показаний штриховою лінією. Зсув виконуємо на число $\theta = \min(3; 9) = 3$. Значення чисел x_{ij} у клітинках, помічених знаком „+”, збільшуємо на 3, а помічених знаком „-” зменшується на 3. Маємо ще один оптимальний план поставки овочів у магазини від господарств агропромислового об'єднання (табл. 5.17).

Таблиця 5.17

$a_i \backslash b_j$	9	10	12	15	
10	15	17	20	22	0
12	9	1			1
18	24	18	19	21	9
6	23	16	17	20	-1
	0	0	0	0	-20
	15	17	18	20	
	β_1	β_2	β_3	β_4	
					α_1
					α_2
					α_3
					α_4

Перевіримо його на оптимальність методом потенціалів. Складемо рівняння для їх обчислення:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 15,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 17,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 18,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 21,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 16,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 17,$$

$$\alpha_4 + \beta_4 = 0.$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 15$, $\beta_2 = 17$; $\alpha_2 = 18 - \beta_2 = 18 - 17 = 1$; $\alpha_3 = 16 - \beta_2 = 16 - 17 = -1$; $\beta_4 = 21 - \alpha_2 = 21 - 1 = 20$; $\beta_3 = 17 - \alpha_3 = 17 - (-1) = 18$; $\alpha_4 = 0 - \beta_4 = 0 - 20 = -20$.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок:

$$S_{13} = C_{13} - (\alpha_1 + \beta_3) = 20 - (0 + 18) = 2,$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 22 - (0 + 20) = 2, \\
S_{21} &= C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 24 - (1 + 15) = 8, \\
S_{23} &= C_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 19 - (1 + 18) = 0, \\
S_{31} &= C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 23 - (-1 + 15) = 9, \\
S_{34} &= C_{34} - (\alpha_3 + \beta_4) = 20 - (-1 + 20) = 1, \\
S_{41} &= C_{41} - (\alpha_4 + \beta_1) = 0 - (-20 + 15) = 5, \\
S_{42} &= C_{42} - (\alpha_4 + \beta_2) = 0 - (-20 + 17) = 3, \\
S_{43} &= C_{43} - (\alpha_4 + \beta_3) = 0 - (-20 + 18) = 2.
\end{aligned}$$

Усі відносні оцінки S_{ij} невід'ємні, тому наведений у таблиці 5.17 план перевезень – оптимальний.

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\min F(X) = 15 \cdot 9 + 1 \cdot 17 + 18 \cdot 3 + 21 \cdot 9 + 16 \cdot 6 + 17 \cdot 12 = 695 \text{ (у. о.)}.$$

Приклад 5.8. Розв'язати транспортну задачу відкритого типу, вихідні дані якої подано у таблиці 5.18.

Таблиця 5.18

Постачальники	Споживачі				Запас вантажу
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	8	160
A_2	5	5	6	3	80
A_3	6	10	3	3	90
Потреба	65	55	135	65	330
					320

Розв'язання

За умовою $\sum_{i=1}^3 a_i = 330$ одиниць, $\sum_{j=1}^4 b_j = 320$ одиниць, тобто

$\sum_{i=1}^3 a_i > \sum_{j=1}^4 b_j$. Введемо фіктивного умовного споживача B_5 , потре-

ба якого $b_5 = \sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j = 330 - 320 = 10$ (одиниць).

Вартість перевезення одиниці вантажу від постачальників до фіктивного споживача покладемо рівною нулю.

У результаті маємо транспортну задачу закритого типу (табл. 5.19).

Таблиця 5.19

$a_i \backslash b_j$	65	55	135	65	10	
160	³ 65	⁵ 55	⁷ 40	⁸ 0	⁰ 0	α_1
80	⁵	⁵	⁶ 80	³	⁰	α_2
90	⁶	¹⁰	³ 15	³ 65	⁰ 10	α_3
	3	5	7	7	4	
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	

Початковий опорний план знайдемо, наприклад, за методом північно-західного кута. Починаємо з клітинки x_{11} : $\min(160; 65) = 65$. Проставляємо в цю клітинку число 65. Перший стовпчик виключаємо із розгляду. Знову починаємо з північно-західного кута. Заповнюємо клітинку x_{12} :

$$\min(160-65; 55) = \min(95; 55) = 55.$$

Записуємо у клітинку x_{12} число 55 і другий стовпчик виключаємо із розгляду. Продовжуємо заповнення клітинок, рухаючись від північно-західного кута. Наступною буде клітинка x_{13} :

$$\min(160-120; 135) = \min(40; 135) = 40.$$

У клітинку x_{13} заносимо число 40 і перший рядок виключаємо із розгляду.

Наступна клітинка, що знаходиться в північно-західному куті, x_{23} :

$$\min(80; 135-40) = \min(80; 95) = 80.$$

У вказану клітинку x_{23} записуємо число 80, а другий рядок виключаємо із розгляду.

Далі заповнюємо клітинку x_{33} :

$$\min(90; 135-120) = \min(90; 15) = 15.$$

Заносимо у цю клітинку число 15 і виключаємо із розгляду третій стовпчик.

Рухаючись вздовж третього рядка, заповнюємо клітинки x_{34} і x_{35} :

$$x_{34}: \min(90-15; 65) = \min(75; 65) = 65;$$

$$x_{34} : \min (90-80; 10) = \min (10; 10)=10.$$

У клітинки x_{34} і x_{35} відповідно заносимо числа 65 і 10.

Одержали початковий опорний план не вироджений. Для перевірки його на оптимальність знайдемо потенціали:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 3,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 5,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 7,$$

$$\alpha_2 + \beta_4 = 6,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 3,$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 3,$$

$$\alpha_3 + \beta_5 = 0.$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 7$; $\alpha_2 + 6 - \beta_3 = 6 - 7 = -1$; $\alpha_3 = 3 - \beta_3 = 3 - 7 = -4$; $\beta_4 = 3 - \alpha_3 = 3 - (-4) = 7$; $\beta_5 = 0 - \alpha_3 = 0 - (-4) = 4$.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітинок:

$$S_{14} = C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 8 - (0 + 7) = 1,$$

$$S_{15} = C_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = 0 - (0 + 4) = -4,$$

$$S_{21} = C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 5 - (-1 + 3) = 3,$$

$$S_{22} = C_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 5 - (-1 + 5) = 1,$$

$$S_{24} = C_{24} - (\alpha_2 + \beta_4) = 3 - (-1 + 7) = -3,$$

$$S_{25} = C_{25} - (\alpha_2 + \beta_5) = 0 - (-1 + 4) = -3,$$

$$S_{31} = C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 6 - (-4 + 3) = 7,$$

$$S_{32} = C_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 10 - (-4 + 5) = 9.$$

Оскільки серед відносних оцінок S_{ij} є від'ємні, то знайдений початковий опорний план не є оптимальним.

Беремо клітинку S_{15} з найменшим від'ємним числом і будемо для неї означений цикл перерахунку. У таблиці 5.19 він відмічений штриховою лінією. Зсув виконуємо на число:

$\theta = \min (40; 10) = 10$. Значення x_{ij} , що стоять у вершинах циклу помічених знаком „+”, збільшуються на число 10, а помічених знаком „-” — зменшуються на число 10 (табл. 5.20).

Таблиця 5.20

$a_i \backslash b_j$	65	55	135	65	10	
160	⁹ 65	⁵ 55	⁷ 30	⁸	⁰ 10	α_1 0
80	⁵	⁵	⁶ 80 $\ominus$	³ $\oplus$	⁰	α_2 -1
90	⁶	¹⁰	³ 25	³ 65 $\oplus$	⁰	α_3 -4
			$\oplus$	$\ominus$		
	3	5	7	7	0	
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	

Одержаний план перевезень не вироджений.

Перевіримо його на оптимальність методом потенціалів. Запишемо рівняння для їх знаходження:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 3,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 5,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 7,$$

$$\alpha_1 + \beta_5 = 0,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 6,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 3,$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 3.$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 7$, $\beta_5 = 0$; $\alpha_2 = 6 - \beta_3 = 6 - 7 = -1$; $\alpha_3 = 3 - \beta_3 = 3 - 7 = -4$; $\beta_4 = 3 - \alpha_3 = 3 - (-4) = 7$.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітин:

$$S_{14} = C_{14} - (\alpha_1 + \beta_4) = 8 - (0 + 7) = 1,$$

$$S_{21} = C_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 5 - (-1 + 3) = 3,$$

$$S_{22} = C_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 5 - (-1 + 5) = 1,$$

$$S_{24} = C_{24} - (\alpha_2 + \beta_4) = 3 - (-1 + 7) = -3,$$

$$S_{25} = C_{25} - (\alpha_2 + \beta_5) = 0 - (-1 + 0) = 1,$$

$$S_{31} = C_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 6 - (-4 + 3) = 7,$$

$$S_{32} = C_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 10 - (-4 + 5) = 9,$$

$$S_{35} = C_{35} - (\alpha_3 + \beta_5) = 0 - (-4 + 0) = 4.$$

Поданий у таблиці 5.20 план перевезень не є оптимальним, так як $S_{24} = -3$. Для вказаної клітинки будемо означений цикл перерахунку. У таблиці 5.20 він позначений штриховою лінією. Зсув виконуємо на число $\theta = \min(80; 65) = 65$. Значення x_{ij} , які стоять у клітинках, помічених знаком „+”, збільшуються на 65, а помічених знаком „-” – зменшуються на 65 (табл. 5.21).

Таблиця 5.21

$a_i \backslash b_j$	65	55	135	65	10		
160	³ 65	⁵ 55	⁷ 30	⁸	⁰ 10	0	α_1
80	⁵	⁵	⁶ 15	³ 65	⁰	-1	α_2
90	⁶	¹⁰	³ 90	³	⁰	-4	α_3
	3	5	7	4	0		
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		

Одержаний план перевезень не вироджений. Перевіримо його на оптимальність. Значення потенціалів подані у таблиці 5.21.

Знаходимо відносні оцінки S_{ij} вільних клітин:

$$S_{14}=C_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=8-(0+4)=-4,$$

$$S_{21}=C_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=5-(-1+3)=3,$$

$$S_{22}=C_{22}-(\alpha_2+\beta_2)=5-(-1+5)=1,$$

$$S_{25}=C_{25}-(\alpha_2+\beta_5)=0-(-1+0)=1,$$

$$S_{31}=C_{31}-(\alpha_3+\beta_1)=6-(-4+3)=7,$$

$$S_{32}=C_{32}-(\alpha_3+\beta_2)=10-(-4+5)=9,$$

$$S_{34}=C_{34}-(\alpha_3+\beta_4)=3-(-4+4)=3,$$

$$S_{35}=C_{35}-(\alpha_3+\beta_5)=0-(-4+0)=4.$$

Задача розв'язана, план перевезень, поданий у таблиці 5.21, оптимальний, оскільки всі відносні оцінки $S_{ij} > 0$. Крім того, оптимальний план єдиний, бо відсутні нульові відносні оцінки.

Таким чином,
$$X = \begin{pmatrix} 65 & 55 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 65 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\min F(X)=3 \cdot 65+5 \cdot 55+7 \cdot 30+6 \cdot 15+3 \cdot 65+3 \cdot 90=1\,235 \text{ (у. о.)}.$$

Завдання для самостійної роботи

5.1. Скласти план перевезень кам'яного вугілля з трьох пунктів відправлення у чотири пункти призначення. План повинен забезпечувати мінімальні транспортні витрати. Добова продуктивність шахт, потреба пунктів споживання і вартість перевезення 1 т вугілля подані в табл. 5.22.

Таблиця 5.22

Виробник (шахта)	Вартість перевезення 1 т вугілля споживачам, грн				Продуктив- ність шахт, тис. т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Потреби замов- ників, тис. т	75	80	60	85	300

5.2. Господарства A_1, A_2, A_3 виділяють відповідно 40; 50; 30 ц молока для щоденного постачання пунктів B_1, B_2, B_3, B_4 . Вартість перевезення 1 ц молока і потреба пунктів у молоці подані в табл. 5.23.

Таблиця 5.23

Радгосп	Вартість перевезення 1 ц молока споживачам, грн				Кількість молока, призначена для вивозу, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Потреби замовників, ц	20	40	30	30	120

Організувати постачання так, щоб споживачі забезпечувалися молоком, а транспортні витрати були мінімальними.

5.3. У чотирьох сховищах A_1, A_2, A_3 є відповідно 40; 50; 60; 30 т палива. Вимагається спланувати перевезення палива до трьох споживачів B_1, B_2, B_3 , попит яких відповідно рівний 60; 80; 40 т, так щоб витрати на транспортування були мінімальними. Вартість перевезень 1 т вказана в табл. 5.24.

Таблиця 5.24

Сховище	Вартість перевезення 1 т палива споживачам, грн			Запаси палива, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
Потреба в паливі, т	60	80	40	180

5.4. У фермерському господарстві вимагається виконати такі види робіт: культивуацію пару; підйом пару; культивуацію просапних; сінокосіння.

Робота виконується за допомогою тракторів ДТ-75 (10 машин), “Беларусь” (8 машин), Т-25 (5 машин). Сезонна норма вироблення залежно від марки трактора становить: для трактора ДТ-75 – 4 000 га; для трактора Т-25 – 750 га; для трактора “Беларусь” – 2 400 га. Вимагається розподілити роботи між тракторами так, щоб вони були виконані з мінімальною собівартістю. Усі числові дані приведені в табл. 5.25. При підйомі пари і культивуації просапних трактор Т-25 не використовується.

Таблиця 5.25

Вид роботи	Собівартість 1 га, грн			Обсяг робіт, га
	ДТ-75	„Беларусь”	Т-25	
Культивуація	4,5	4,2	5	1 200
Підйом пару	3	3,5		4 000
Культивуація просапних	4,5	4		350
Сінокосіння	3,5	3	4,2	1 600

5.5. Знайти оптимальний розподіл трьох видів механізмів у кількості 45, 30, 50 одиниць, призначених для чотирьох ділянок робіт. Потреби в механізмах становлять 20, 40, 45, 20 одиниць при такій матриці продуктивності кожного механізму на відповідній ділянці роботи:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Нульовий елемент означає, що даний механізм на певній ділянці роботи не може бути використаний.

5.6. З чотирьох складів необхідно вивезти картоплю до п'яти торгових точок. Вимагається закріпити постачальників за торговими точками так, щоб загальна сума витрат на перевезення була мінімальною. Числові дані задачі надані в табл. 5.26.

Таблиця 5.26

Склад (постачальник)	Вартість перевезення 1 т вантажу споживачам, грн					Обсяг виво- зу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	2	3	6	1	50
A_2	5	3	4	2	6	160
A_3	3	4	7	3	2	70
A_4	2	6	5	4	3	100
Обсяг вивозу, т	80	100	90	50	60	380

5.7. Товари з чотирьох баз поставляються в чотири магазини. Потреби I, II, III, IV магазинів у товарах відповідно рівні 30; 80; 60; 50 тис. од. Запаси товарів на базах становлять 40; 60; 40; 80 тис. од. Витрати на перевезення 1 тис. од. товару (грн) зображені матрицею витрат:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 4,5 & 3 & 2 & 1,2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3,5 & 2,6 & 1,3 & 1,4 \\ 3,2 & 4,1 & 2,5 & 5,8 \end{bmatrix}$$

Запланувати необхідно перевезення так, щоб повністю задовольнити потреби магазинів, а витрати на перевезення звести до мінімуму.

5.8. Продукцію трьох заводів ($a_1 = 40$ тис. од., $a_2 = 50$ тис. од., $a_3 = 30$ тис. од.) необхідно доставити чотирьом споживачам, попит яких рівний: $b_1 = 20$ тис. од., $b_2 = 50$ тис. од., $b_3 = 45$ тис. од., $b_4 = 30$ тис. од. Відома матриця транспортних витрат на доставку 1 тис. од. з i -го заводу j -му споживачу:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 6,5 & 4,3 & 5,1 & 4 \\ 3,0 & 7,4 & 3,5 & 6,3 \\ 4,3 & 5,7 & 6,5 & 3,8 \end{bmatrix}$$

Визначити оптимальний план прикріплення споживачів до заводів, що мінімізує сумарні транспортні витрати.

5.9. Знайти оптимальний план перевезень за даними задачі 5.8 при додатковій умові обов'язкового повного задоволення попиту другого споживача (його попит $b_2 = 50$ тис. од.).

5.10. Зібраний урожай зерна чотирьох господарств районного виробничого об'єднання повинен бути перевезений на три елеватори — елеватор B_1 потужністю 90 тис. т, елеватор B_2 потужністю 70 тис. т, елеватор B_3 потужністю 50 тис. т. Всі числові дані задачі приведені в табл. 5.27.

Таблиця 5.27

Господарство	Затрати на перевезення 1 т зерна на елеватори, грн			Запас зерна, тис. т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10,5	22,0	17,4	50
A_2	27,3	12,5	23,7	60
A_3	13,7	18,6	15,3	70
A_4	18,1	14,4	11,5	40

Визначити план доставки зерна на елеватори, що мінімізує транспортні витрати.

5.11. На чотири будівельні майданчики (B_1, B_2, B_3, B_4) з трьох заводів надходить цегла. Дані про продуктивність заводів за день, витрати на виробництво цегли і транспортні витрати приведені в табл. 5.28.

Потреба в цеглі будівельного майданчика B_1 становить 50 тис. шт. B_2 – 45 тис. шт., B_3 – 40 тис. шт., B_4 – 35 тис. шт.

Таблиця 5.28

Завод	Транспортні витрати на 1 тис. шт. по будівельних майданчиках, грн				Продуктивність заводів за день, тис. шт.	Витрати на виробництво 1 тис. шт. цегли, грн
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10,2	9,8	8,5	14,3	60	18
A_2	13,7	16,4	10,7	8,7	70	15
A_3	10,5	12,0	11,5	9,6	30	20

Визначити оптимальний план закріплення будівельних майданчиків за цегельними заводами за умови, що потрібну кількість цегли (10 тис. штук у день) можна забезпечити за рахунок: а) збільшення продуктивності заводу A_2 (витрати на виробництво 1 тис. штук зростуть на 12 грн); б) збільшення продуктивності заводу A_3 (витрати на виробництво 1 тис. штук зростуть на 22 грн).

5.12. Розподілити сільськогосподарські роботи залежно від марки трактора так, щоб загальні витрати на їх виконання були мінімальними. Дані задачі приведені в табл. 5.29.

Таблиця 5.29

Вид роботи	Собівартість 1 га робіт на тракторі, грн				Обсяг робіт, га
	ДТ-75 (5 шт.)	“Білорусь” (6 шт.)	Т-25 (4 шт.)	КПД-35 (3 шт.)	
Культивація	2,0	2,8	3,5	1,3	2 000
Оранка	1,5	2,5	—	4,0	2 500
Сівба	2,0	1,2	—	1,5	900
Сезонна норма, га	2000	1800	600	900	5 400 > 5 300

5.13. Визначити за правилом північно-західного кута і мінімального елемента опорні розв'язки та відповідні значення цільових функцій для транспортних задач.

а)

ai \ bk	25	10	13
18	4	1	5
10	2	3	6
20	5	7	4

б)

ai \ bk	30	40	20
20	7	5	3
40	4	6	1
30	3	2	4

в)

ai \ bk	20	25	30	25
40	4	2	5	7
30	6	0	3	1
30	5	4	2	6

г)

ai \ bk	20	30	20	20
20	4	1	5	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

д)

ai \ bk	60	40	40	30	30
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

є)

$\begin{array}{c} bk \\ \swarrow \\ ai \end{array}$	50	40	10	15	25	30
70	6	3	1	5	7	4
50	8	4	2	4	3	6
20	3	5	5	6	2	4
30	5	1	1	3	6	2

Знайти оптимальні розв'язки таких транспортних задач:

5.14

6	7	3	5	100
1	2	5	6	150
8	10	20	1	50
75	80	60	85	$\begin{array}{c} a_i \\ \swarrow \\ b_i \end{array}$

5.15

8	1	9	7	110
4	6	2	12	190
3	5	8	9	90
80	60	170	80	$\begin{array}{c} a_i \\ \swarrow \\ b_i \end{array}$

5.16

7	5	3	20
4	6	1	40
3	2	4	30
30	40	20	$\begin{array}{c} a_i \\ \swarrow \\ b_i \end{array}$

5.17

4	1	5	18
2	3	6	10
5	7	4	20
25	10	13	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.18

7	8	5	3	11
2	4	5	9	11
6	3	1	2	8
5	9	9	7	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.19

4	2	5	7	40
6	0	3	1	30
5	4	2	6	30
20	25	30	25	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.20

4	2	3	1	80
6	3	5	6	140
3	2	6	3	70
80	50	50	70	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.21

9	7	5	3	175
1	2	4	6	125
8	10	12	1	140
180	110	60	40	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.22

0	0	8	40
3	5	1	60
4	2	4	50
70	30	20	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.23

5	6	8	50
1	3	5	25
15	10	20	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.24

4	3	9	2	185
5	9	7	4	165
90	120	110	130	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.25

4	5	1	10
2	3	4	8
1	2	4	12
6	14	20	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.26

2	4	2	100
5	5	6	70
4	7	3	60
6	8	1	20
110	80	60	$\begin{array}{c} a_i \\ b_j \end{array}$

5.27

5	2	0	7	3	60
6	1	4	2	8	40
7	4	3	6	1	70
3	5	6	4	2	30
60	40	40	30	30	$\begin{array}{c} a_i \\ b_j \end{array}$

5.28

5	6	4	140
3	9	1	80
2	4	8	80
1	3	7	100
140	90	170	$\begin{array}{c} a_i \\ b_j \end{array}$

5.29

7	4	15	9	120
11	2	7	3	80
4	5	12	8	100
85	65	90	60	$\begin{array}{c} a_i \\ b_j \end{array}$

5.30

4	1	5	3	20
2	6	4	7	30
5	3	6	4	40
20	30	20	20	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.31

5	6	4	2	50
3	2	4	1	30
2	3	6	5	20
40	20	10	30	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.32

18	10	5	23
0	0	4	18
3	5	2	29
15	28	20	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

5.33

6	5	4	70
8	3	2	40
7	4	6	50
5	2	8	20
30	40	30	$\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}$

ГЛАВА 6. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

У попередніх лекціях ми мали справу із задачами лінійного програмування, невідомі яких в оптимальному розв'язку набували як цілих, так і дробових значень. Існує широкий клас ЗЛП, у математичних моделях яких одна або кілька невідомих повинні набувати лише цілих значень. Прикладом таких задач можуть бути задачі, в яких йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських товариствах, транспортна задача, так звана задача про комівояжера тощо. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька невідомих. Такі задачі називають частково цілочисловими.

У загальному задача цілочислового лінійного програмування має вигляд:

$$\max(\min) F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (6.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (6.3)$$

$$x_j - \text{цілі числа} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.4)$$

Очевидно, що задача цілочислового програмування складніша, ніж задача лінійного програмування, оскільки вона включає додаткову умову (6.4). Тому оптимальне значення в задачі (6.1)–(6.4) не більше, ніж у відповідній задачі без умови цілочисловості. Якщо оптимальний розв'язок вихідної задачі виражається у цілих числах, то цей розв'язок буде одночасно і розв'язком задачі цілочислового програмування. У протилежному разі шуканий розв'язок треба знаходити іншими методами.

Для знаходження оптимальних розв'язків задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового „звуження” області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимального розв’язку починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисельності невідомих. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисельність невідомих, многокутник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки невідомі оптимального розв’язку не набудуть цілочислового значення. До методів відтинання належить метод Гоморі.

Комбінаторні методи знаходження цілочислових оптимальних розв’язків базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв’язків, а решта враховується одним із спеціальних методів. Найпоширенішим серед комбінаторних методів є метод віток і меж.

Метод Гоморі

Нагадаємо спочатку поняття цілої і дробової частини числа.

Цілою частиною числа a називають найбільше ціле число, що менше або дорівнює йому. Цілу частину числа позначають символом $[a]$.

Наприклад, $[5\frac{1}{3}]=5$; $[2]=2$; $[-1,5]=-2$.

Дробовою частиною числа a називають різницю між числом a і його цілою частиною. Символічно дробову частину числа позначають $\{a\}$.

Наприклад, $\{5\frac{1}{3}\}=5\frac{1}{3}-5=\frac{1}{3}$;

$\{-1,5\}=-1,5-(-2)=0,5$.

Дробова частина числа завжди невід’ємна, тобто $\{a\}\geq 0$, причому $\{a\}=0$, тоді коли a – ціле число.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (6.1 – 6.4). Знайти її оптимальний розв’язок можна методом Гоморі, суть якого полягає в такому:

1. Знаходять оптимальний розв'язок задачі, наприклад, симплексним методом, без урахування умови цілочисловості невідомих (6.4).

Якщо серед значень невідомих із одержаного розв'язку немає дробових, то цей розв'язок є оптимальним розв'язком задачі цілочислового програмування (6.1 – 6.4).

2. Якщо ж у вищезазначеному розв'язку серед значень невідомих є дробові, то вибираємо із них число з максимальною дробовою частиною. На базі цієї невідомої (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будемо додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}. \quad (6.5)$$

В обмеження (6.5) вводимо додаткову невідому:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j - x_{n+1} = \{b_i\}, \quad (6.6)$$

де $x_{n+1} \geq 0$.

Рівність (6.6) множимо на -1 і одержуємо:

$$\sum_{j=1}^n -\{a_{ij}\} x_j + x_{n+1} = -\{b_i\}. \quad (6.7)$$

3. Додаткове обмеження (6.7) приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить оптимальний розв'язок задачі з дробовими значеннями, при цьому невідома x_{n+1} буде базисною. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він знову містить дробові значення, то процес повторюють, повертаючись до пункту 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Приклад 6.1. Мале підприємство випускає два види продукції P_1 і P_2 . Її випуск обмежений наявністю сировини та кількістю робочого часу. Для виготовлення одиниці продукції P_1 треба 2 одиниці сировини, а для одиниці продукції P_2 – 5 одиниць сировини.

Підприємство може одержати від своїх поставщиків не більше 1 600 одиниць сировини. Крім того, на виготовлення одиниці продукції першого виду затрачається 10 хв. робочого часу, а на виготовлення одиниці продукції другого виду – 12 хв. робочого часу. Кількість робочого часу, необхідна для випуску запланованої продукції, не перевищує 100 год. Скільки одиниць продукції кожного виду треба випустити малому підприємству, щоб одержати максимальний прибуток, якщо одиниця продукції виду P_1 приносить дохід 20 ум. од., а виду P_2 – 40 ум. од.?

Розв'язання

Нехай x_1 і x_2 – кількість одиниць продукції відповідно до виду P_1 і P_2 . Тоді математична модель задачі має вид:

$$\begin{aligned} \max F(x) &= 20x_1 + 40x_2; \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 1600; \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 100, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \text{ і } x_2 - \text{цілі.} \end{aligned}$$

Розв'язуємо задачу симплексним методом, нехтуючи умовою цілочисловості.

Помноживши обидві частини другого обмеження-нерівності на 30, перейдемо до цілих коефіцієнтів. Одержимо задачу $\max F(x) = 20x_1 + 40x_2$;

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 1600; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 3000, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

Зведемо її до канонічного виду:

$$\begin{aligned} \max F(x) &= 20x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4; \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1600; \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 3000, \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

Процес розв'язку останньої задачі відтворено у таблицях 6.1–6.3.

Таблиця 6.1

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	0	-20	-40	0	0
I	1	x_3	1600	2	$\frac{5}{2}$	1	0
	2	x_4	3000	5	6	0	1

Таблиця 6.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	12800	-4	0	8	0
II	1	x_2	320	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0
	2	x_4	1080	$\frac{13}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	1

Таблиця 6.3

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	x_0	$14\,461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$
III	1	x_2	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{13}$
	2	x_1	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$

Оскільки в нульовому рядку відсутні від'ємні числа, то розв'язок:

$$X = \left(415\frac{5}{13}; 153\frac{11}{13}; 0; 0\right)$$

є оптимальним розв'язком задачі без урахування умови цілочисловості невідомих. Але цей розв'язок не може бути оптимальним для вихідної задачі, так як базисні невідомі не цілі, а дробові числа, що не задовольняє умову задачі.

Керуючись методом Гоморі, вибираємо серед значень базисних невідомих опорного розв'язку (табл. 6.3) число з найбільшою дробовою частиною, тобто:

$$\max\left\{\left\{415\frac{5}{13}\right\}, \left\{153\frac{11}{13}\right\}\right\} = \frac{11}{13} = \{x_2\}.$$

Для першого рядка табл. 6.3 побудуємо додаткове обмеження виду (6.5):

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \left\{\frac{5}{13}\right\}x_3 + \left\{-\frac{2}{13}\right\}x_4 \geq \left\{153\frac{11}{13}\right\}.$$

Оскільки $\left\{\frac{5}{13}\right\} = \frac{5}{13}$, $\left\{-\frac{2}{13}\right\} = -\frac{2}{13}$, $\left[-\frac{2}{13}\right] = -\frac{2}{13} - (-1) = -\frac{2}{13} + 1 = \frac{11}{13}$, $\left\{153\frac{11}{13}\right\} = \frac{11}{13}$, то додаткове обмеження набирає вигляду:

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 \geq \frac{11}{13}.$$

Зведемо його до канонічної форми:

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 - x_5 = \frac{11}{13}.$$

Помножимо одержану рівність на (-1) :

$$-\frac{5}{13}x_3 - \frac{11}{13}x_4 + x_5 = -\frac{11}{13}.$$

Приєднаємо здобуте обмеження до таблиці 6.3, маємо таблицю 6.4.

Таблиця 6.4

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	x_0	$14461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$	0
IV	1	x_2	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0
	2	x_1	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	0
	3	x_5	$-\frac{11}{13}$	0	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{11}{13}$	1

Розширену задачу розв'язують, починаючи з таблиці 6.4. Так як у стовпчику „опорний розв'язок” цієї таблиці є від'ємне число, то виконуємо такі операції:

– вибираємо рядок, що містить від'ємне число у стовпчику „опорний розв'язок”, і беремо з нього будь-яке від'ємне число. Взятє число визначає ключовий стовпець;

– для чисел з однаковими знаками записують симплексні відношення;

– найменше симплексне відношення визначає ключовий рядок. На перетині ключового рядка і стовпця знаходиться ключовий елемент;

– зі знайденим ключовим елементом виконують симплексні перетворення.

Застосовуючи вищенаведену схему, виконаємо симплексні перетворення таблиці 6.4, наприклад, з ключовим елементом $-\frac{11}{13}$. Стовпець з невідомою x_4 буде ключовим. Для чисел із однаковими знаками складаємо симплексні відношення: $415 \frac{5}{13} : \frac{5}{13} = 1\ 080$;
 $-\frac{11}{13} : \left(-\frac{11}{13}\right) = 1$.

Отже, третій рядок буде ключовим. Тоді ключовим елементом буде число $-\frac{11}{13}$. Замість невідомої x_5 у базисні переводимо невідому x_4 . Матимемо таблицю 6.5.

Таблиця 6.5

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	x_0	14 460	0	0	$\frac{60}{11}$	0	$\frac{20}{11}$
V	1	x_2	154	0	1	$\frac{5}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$
	2	x_1	415	1	0	$-\frac{7}{11}$	0	$\frac{5}{11}$
	3	x_4	1	0	0	$\frac{5}{11}$	1	$-\frac{13}{11}$

У нульовому рядку таблиці 6.5 відсутні від'ємні числа, тому маємо оптимальний розв'язок розширеної задачі.

Тоді оптимальний розв'язок вихідної задачі має вигляд:

$$X = (415; 154),$$

$$\max F(X) = 14\ 460.$$

Приклад 6.2. Знайти цілочисловий оптимальний розв'язок задачі:

$$\max F(x) = x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 35, \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі, } j = \overline{1, 4}.$$

Розв'язання

Зведемо дану задачу до канонічного виду:

$$\max F(x) = x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 35, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Базисні невідомі x_2 і x_5 , вільні невідомі x_1, x_3, x_4 .

У цільовій функції виразимо базисну невідому x_2 через вільні, використавши перше рівняння системи обмежень:

$$x_2 = 35 - 3x_1 - 8x_3 - x_4,$$

$$F(x) = x_1 - 4(35 - 3x_1 - 8x_3 - x_4) - 2x_3 + 3x_4 =$$

$$x_1 - 140 + 12x_1 + 32x_3 + 4x_4 - 2x_3 + 3x_4 = -140 + 13x_1 + 30x_3 + 7x_4.$$

Тоді задача набуває вигляду:

$$\max F(x) = -140 + 13x_1 + 30x_3 + 7x_4,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 35, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Розв'язуємо останню задачу, використовуючи симплексний метод.

Дана задача вже зведена до канонічної задачі переважачого вигляду. Її початковий опорний розв'язок $X_0 = (0; 35; 0; 0; 6)$.

Позначимо лінійну форму $F(x) = x_0$ і запишемо її у вигляді рівняння:

$$x_0 = -140 + 13x_1 + 30x_3 + 7x_4$$

$$\text{або } x_0 - 13x_1 - 30x_3 - 7x_4 = -140.$$

Процес розв'язку задачі відтворено у таблиці 6.6.

Таблиця 6.6

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	x_0	-140	-13	0	-30	-7	0
I	1	x_2	35	3	1	8	1	0
	2	x_5	6	1	0	1	1	1
	0	x_0	$\frac{35}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{4}$	0	$\frac{13}{4}$	0
II	1	x_3	$\frac{35}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0
	2	x_5	$\frac{13}{8}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	1
	0	x_0	$-\frac{19}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{23}{7}$	0	0	$\frac{26}{7}$
III	1	x_3	$\frac{29}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$
	2	x_4	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{8}{7}$

У нульовому рядку третьої ітерації таблиці 6.6 відсутні від'ємні числа, тому розв'язок $X^* = (0; 0; \frac{29}{7}; \frac{13}{7}; 0)$ є оптимальним розв'язком задачі без урахування умов цілочисловості невідомих. Але цей розв'язок не може бути оптимальним для вихідної задачі, оскільки базисні невідомі – дробові числа.

Для знаходження цілочислового розв'язку застосуємо метод Гоморі.

Серед базисних невідомих опорного розв'язку (табл. 6.6, ітерація III) беремо число з найбільшою дробовою частиною, тобто:

$$\max \left\{ \left\{ 4\frac{1}{7} \right\}, \left\{ 1\frac{6}{7} \right\} \right\} = \frac{6}{7} = \{x_4\}.$$

Для другого рядка таблиці 6.6 ітерації III будуюмо додаткове обмеження і зводимо його до канонічної форми:

$$\left\{ \frac{5}{7} \right\} x_1 + \left\{ -\frac{1}{7} \right\} x_2 + \{0\} x_3 + \{1\} x_4 + \left\{ 1\frac{1}{7} \right\} x_5 \geq \left\{ 1\frac{6}{7} \right\}.$$

$$\frac{5}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 \geq \frac{6}{7},$$

$$\frac{5}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 - x_6 = \frac{6}{7},$$

$$-\frac{5}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_6 = -\frac{6}{7}.$$

Приєднаємо одержане обмеження до третьої ітерації таблиці 6.6, отримаємо таблицю 6.7.

Таблиця 6.7

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	x_0	$\frac{19}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{23}{7}$	0	0	$\frac{26}{7}$	0
IV	1	x_3	$\frac{29}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	0
	2	x_4	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{8}{7}$	0
	3	x_6	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	1
	0	x_0	$-\frac{17}{5}$	0	$\frac{13}{5}$	0	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{4}{5}$
V	1	x_3	$\frac{19}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
	2	x_4	1	0	-1	0	1	1	1
	3	x_1	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$

Беремо третій рядок, який містить від'ємне число у стовпчику „опорний розв'язок”. Візьмемо із цього рядка від'ємне число, наприклад $\frac{5}{7}$, тоді стовпчик невідомої „ x_1 ” буде ключовим.

Для чисел з однаковими знаками цього стовпчика і стовпчика „опорний розв'язок” складаємо симплексні відношення:

$$\frac{29}{7} : \frac{2}{7} = \frac{29}{7} \cdot \frac{7}{2} = 14 \frac{1}{2};$$

$$\frac{13}{7} : \frac{5}{7} = \frac{13}{7} \cdot \frac{7}{5} = 2 \frac{3}{5};$$

$$-\frac{6}{7} : (-\frac{5}{7}) = \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1 \frac{1}{5}.$$

Число $-\frac{5}{7}$ буде ключовим елементом, а третій рядок – ключовим рядком. Замість невідомої x_6 у базисні переводимо невідому x_1 . Переходимо до п'ятої ітерації (табл. 6.7).

Після проведених перетворень одержуємо оптимальний розв'язок нової задачі, але він, як і в таблиці 6.6, не цілочисловий.

Переходимо до наступного кроку. Зважаючи на метод Гоморі, знову серед базисних невідомих опорного розв'язку (ітерація V) вибираємо число з найбільшою дробовою частиною:

$$\max\left\{\left\{3\frac{4}{5}\right\}, \{1\}, \left\{1\frac{1}{5}\right\}\right\} = \frac{4}{5} = \{x_3\}.$$

Для першого рядка таблиці 6.7 ітерації V будемо додаткове обмеження і зводимо його до канонічної форми:

$$\{0\}x_1 + \left\{-\frac{1}{5}\right\}x_2 + \{1\}x_3 + \{0\}x_4 + \left\{-\frac{1}{5}\right\}x_5 + \left\{\frac{2}{5}\right\}x_6 \geq \left\{3\frac{4}{5}\right\},$$

$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_6 \geq \frac{4}{5},$$

$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_6 - x_7 = \frac{4}{5},$$

$$-\frac{4}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_6 + x_7 = -\frac{4}{5}.$$

Приєднуємо це обмеження до таблиці 6.7 ітерації V і переходимо до таблиці 6.8.

Таблиця 6.8

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	x_0	$-\frac{17}{5}$	0	$\frac{13}{5}$	0	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
	1	x_3	$\frac{19}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
VI	2	x_4	1	0	-1	0	1	1	1	0
	3	x_1	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0
	4	x_7	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1

Продовження таблиці

	0	x_0	-6	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
VII	1	x_3	4	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
	2	x_4	2	0	0	0	1	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$
	3	x_1	0	1	0	0	0	-1	-2	$\frac{6}{4}$
	4	x_2	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$
	0	x_0	$-\frac{16}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{17}{6}$
	1	x_3	$\frac{10}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
VIII	2	x_6	$1\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{5}{6}$
	3	x_1	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$
	4	x_2	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{6}$

Після симплексних перетворень одержали ще один неціло-числовий оптимальний розв'язок нової задачі. Використовуючи метод Гоморі, переходимо до наступного кроку.

З таблиці 6.8 ітерації VIII маємо:

$$\max \left\{ \left\{ 3\frac{1}{3} \right\}, \left\{ 1\frac{1}{3} \right\}, \left\{ 2\frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3} \right\} \right\} = \frac{2}{3} = \{x_1\}.$$

Для третього рядка виписуємо додаткове обмеження:

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \{0\}x_3 + \left\{1\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{1\frac{2}{3}\right\}x_5 + \{0\}x_6 + \left\{-\frac{1}{6}\right\}x_7 \geq \left\{2\frac{2}{3}\right\},$$

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{5}{6}x_7 \geq \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{5}{6}x_7 - x_8 = \frac{2}{3},$$

$$-\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{5}{6}x_7 + x_8 = -\frac{2}{3}.$$

Приєднуємо одержане додаткове обмеження до ітерації VIII таблиці 6.8. Маємо таблицю 6.9.

Таблиця 6.9

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	x_0	$\frac{16}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{17}{6}$	0
	1	x_3	$\frac{10}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0
IX	2	x_6	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{5}{6}$	0
	3	x_1	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0
	4	x_2	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{6}$	0
	5	x_8	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{5}{6}$	1
	0	x_0	-6	0	0	0	0	1	0	2	1
	1	x_3	4	0	0	1	0	0	0	1	-1
X	2	x_6	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{5}{2}$	2
	3	x_1	0	1	0	0	0	-1	0	$-\frac{7}{2}$	4
	4	x_2	1	0	1	0	0	1	0	0	-1
	5	x_4	2	0	0	0	1	2	0	$\frac{5}{2}$	-3

Знайдений розв'язок є оптимальним цілочисловим розв'язком розширеної задачі.

Таким чином цілочисловий оптимальний розв'язок вихідної задачі має вигляд:

$$X=(0;1;4;2),$$

$$\max F(X)=-6.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати методом Гоморі такі задачі:

6.1. $\max Z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 \leq 44 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

6.2. $\max Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

6.3. $\max Z = 7x_1 - 9x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

6.4. $\max Z = x_1 - 7x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

6.5. $\max Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

6.6. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 4x_1 - x_2 \leq 15 \\ x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

Знайти повністю цілочисельне рішення задач 6.7–6.10, супроводжуючи (де це можливо) рішення графічною ілюстрацією (всі $x_j \geq 0$):

6.7. $\max f = 2x_1 + 3x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \leq 5. \end{cases}$$

6.8. $\max f = x_1 + x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 10 \leq 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0. \end{cases}$$

6.9. $\max f = 2x_1 + 5x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

6.10. $\min f = 2x_1 + 3x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3. \end{cases}$$

6.11. Цех випускає три види виробів (А, Б, В), причому змінний плановий випуск становить 9 од. А; 7 од. Б; 6 од. В. Змінні ресурси такі: 51 од. виробничого устаткування; 48 од. сировини і 67 од. електроенергії, витрата яких на один виріб дана в табл. 6.10:

Прибуток від реалізації виробу А рівний 4 грн, Б – 5 грн, В – 1 грн. Визначити, скільки треба випускати виробів кожного виду, щоб одержати максимальний прибуток від виробів, що випускаються понад план.

Таблиця 6.10

Ресурси	Виріб		
	А	Б	В
Устаткування	3	2	0
Сировина	1	4	0
Електроенергія	3	3	1

6.12. На придбання устаткування по сортуванню зерна керівництво господарства виділяє 34 тис. грн. Устаткування повинно бути розміщено на площі, що не перевищує 60 м². Господарство може замовити устаткування двох видів: менш потужні машини типу А вартістю 3 тис. грн, що вимагають виробничу площу 3 м² (з урахуванням проходів) і забезпечують продуктивність за зміну 2 т зерна, і більш потужні машини типу Б вартістю 4 тис. грн, які займають площу 5 м² і забезпечують за зміну 3 т сортового зерна. Потрібно розрахувати оптимальний варіант придбання устаткування з урахуванням того, що господарство може купити не більше восьми машин типу Б, забезпечуючих при даних обмежувальних умовах максимум загальної продуктивності.

6.13. Підприємство може виготовляти чотири види виробів (I–IV), на виробництво яких затрачуються три види ресурсів. Дохід від реалізації виробу I становить 2 тис. грн, виробу II – 4 тис. грн, виробів III і IV – по 1 тис. грн. Витрати на одиницю продукції приводяться в табл. 6.11.

Таблиця 6.11

Ресурси	Витрати ресурсів на виріб, од.				Запас ресурсів од.
	I	II	III	IV	
S_1	1	2	0	1	4
S_2	2	1	0	0	3
S_3	0	1	4	1	3

Потрібно визначити: 1) оптимальний план виробництва виробів, при якому підприємство одержало б максимальний дохід; 2) найдефіцитніший ресурс.

6.14. Підприємство має в своєму розпорядженні три види сировини: виду А – 11 одиниць; виду Б – 11 одиниць; виду В – 13 одиниць, і виготовляє три види виробів. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю виробу першого виду становлять відповідно 3, 2, 0; другого виду – 1, 4, 0 і третього виду – 3, 3, 1. Дохід від реалізації однієї одиниці виробу першого виду рівний 3 грн, другого виду – 4 грн, третього виду – 2 грн. Скласти план виробництва трьох видів виробів, при якому дохід підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним, а вироби були б цілими числами. Встановити також найдефіцитніший вид сировини.

6.15. Розв'язати частково цілочисельні задачі:

а) $\max f = x_1 + 2x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4; \\ x_2 \leq 1. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 - \text{ціле число.} \end{cases}$$

б) $\max f = 6x_1 + 3x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 1; \\ x_1 + 3x_2 \geq 1; \\ x_1 + x_2 \leq 2\frac{1}{2}; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 - \text{ціле число.} \end{cases}$$

$$в) \min f = x_1 + 3x_2 + x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10; \\ x_1 + x_3 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0; \\ x_1, \quad x_3 - \text{цілі числа.} \end{cases}$$

$$д) \max f = x_1 + \frac{1}{4}x_2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3\frac{1}{2}; \\ 3x_1 + 10x_2 + x_4 = 15; \\ x_1, \quad x_2 - \text{цілі числа.} \end{cases}$$

$$з) \min f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4\frac{1}{2}; \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 12; \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \\ x_1 - \text{ціле число.} \end{cases}$$

$$е) \min f = x_1 + x_2 + x_3;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5\frac{1}{2}; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = -\frac{1}{2}; \\ x_1 - \text{ціле число} \end{cases}$$

Розв'язати такі задачі:

$$6.16. \max(2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 3,5, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.18. \max(x_1 - x_2 + x_3 - x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1/3, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.20. \max(x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.17. \max(2x_1 + 2x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.19. \max(x_1);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.21. \max(6x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 \leq 17, \\ 3x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.22. \max(8x_1 + 6x_2);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8/9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.24. \max(x_2);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9,5, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.26. \max(x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.28. \max(x_1);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 11,5, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 36, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.30. \max(2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.23. \max(x_1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9,5, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.25. \max(x_1 + 2x_2);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8/3, \\ x_1 + x_2 \geq 4/3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.27. \max(x_1);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.29. \max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1,5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.31. \max(-5x_1 + 10x_2);$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3/2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.32. \max\left(\frac{1}{4}x_1 + x_2\right);$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 7/4, \\ x_1 + \frac{3}{10}x_2 + x_4 = 3/2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.34. \max(x_1 + x_2);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8,5, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.33. \max(x_1 - x_2);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$6.35. \max(x_1);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2,5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

ГЛАВА 7. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розв'язуванні задач із економічним змістом часто за критерій оптимальності доводиться брати показники рентабельності виробництва, продуктивності праці тощо. Математично такі задачі записують у вигляді дробово-лінійних функцій.

Нехай задано дробово-лінійну функцію:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j}{d_0 + \sum_{j=1}^n d_j x_j}, \quad (7.1)$$

де $c_j, d_j (j=\overline{1, n})$ – деякі сталі числа.

На невідомі функції $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ накладено лінійні обмеження:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Тоді економіко-математичну модель загальної задачі дробово-лінійного програмування записують так:

$$F(x) = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j}{d_0 + \sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max(\min), \quad (7.2)$$

$$\text{за умов } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}, \quad (7.3)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (7.4)$$

Система обмежень (7.3) задачі дробово-лінійного програмування, крім лінійних рівнянь, може містити і лінійні нерівності.

Для початку зупинимося на задачі дробово-лінійного програмування для двох невідомих:

$$F(x) = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \max(\min), \quad (7.5)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (7.6)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (7.7)$$

Покажемо, як можна цю задачу розв'язати графічним методом.

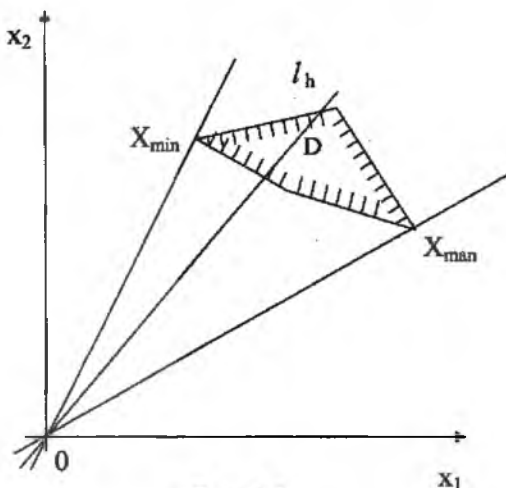


Рис. 7.1

Припустимо, що система нерівностей (7.6), (7.7) має розв'язок (сумісна) і визначає на площині деяку не порожню багатокутну область допустимих розв'язків D (мал. 7.1). Припустимо також, що знаменник $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$, якщо $(x_1; x_2) \in D$. Виберемо довільну точку $(x'_1; x'_2)$ із області D та обчислимо значення функції F у цій точці, тобто $F(x'_1; x'_2) = h$.

$$\text{Розглянемо рівняння: } \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = h. \quad (7.8)$$

Виразимо у ньому, наприклад, x_2 через x_1 . Одержимо:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h(d_1x_1 + d_2x_2),$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 = hd_1x_1 + hd_2x_2,$$

$$c_2x_2 - hd_2x_2 = hd_1x_1 - c_1x_1,$$

$$(c_2 - hd_2)x_2 = x_1(hd_1 - c_1),$$

$$x_2 = \frac{hd_1 - c_1}{c_2 - hd_2} x_1 \quad (c_2 - hd_2 \neq 0).$$

Позначимо $\frac{hd_1 - c_1}{c_2 - hd_2} = k$, тоді:

$$x_2 = kx_1.$$

Із останнього запису можемо зробити висновок, що це рівняння, а отже, і рівняння (7.8) на площині визначає пряму, яка проходить через початок координат. На рисунку 7.1 ця пряма позначена l_h .

Функція $F(x)$ набуває однакового значення h в усіх точках множини $l_h \setminus \{(0;0)\}$, яка є множиною h -рівня функції $F(x)$. Вважатимемо, що кутовий коефіцієнт $k = \frac{hd_1 - c_1}{c_2 - hd_2}$ прямої l_h є функцією змінної h . Знайдемо похідну $\frac{dk}{dh}$:

$$\frac{dk}{dh} = \frac{d_1(c_2 - hd_2) + d_2(hd_1 - c_1)}{(c_2 - hd_2)^2} = \frac{c_2d_1 - hd_1d_2 + hd_1d_2 - c_1d_2}{(c_2 - hd_2)^2} = \frac{c_2d_1 - c_1d_2}{(c_2 - hd_2)^2}.$$

Якщо $c_2d_1 - c_1d_2 \neq 0$, то $\frac{dk}{dh} = \frac{c_2d_1 - c_1d_2}{(c_2 - hd_2)^2} \neq 0$ і зберігає однаковий знак, який не залежить від h . Тому, якщо збільшувати h , пряма l_h повертається в одному і тому самому напрямку навколо початку координат.

Нехай функція $F(x)$ набуває в області D найменшого $h_{\min}$ і найбільшого $h_{\max}$ значень, які одночасно є найменшим і найбільшим значенням параметра h , для яких прямі l_h з многокутником D мають спільні точки. На рис. 7.1 таких точок дві: $X_{\min}$ – найменшого і $X_{\max}$ – найбільшого значень функції $F(x)$ на D .

Виходячи із вищезазначеного, задачу дробово-лінійного програмування (7.5 – 7.7) можна розв'язувати графічним методом за таким алгоритмом:

1. Побудувати многокутну область D допустимих розв'язків системи нерівностей (7.6), (7.7).
2. Побудувати найменший кут із вершиною в початку координат, який містить область D .

3. Знайти точки області D , які розташовані на сторонах кута: ті точки, які лежать на одній стороні кута, визначатимуть розв'язок задачі на мінімум, а на іншій стороні – розв'язок задачі на максимум.

Розглянемо можливі випадки існування розв'язків задачі.

I-ий випадок. Нехай область допустимих розв'язків множина D – обмежена. Тоді розв'язок задачі (7.5 – 7.7) завжди існує і може бути єдиний (рис. 7.2) або задача матиме нескінченну множину розв'язків (рис. 7.3).

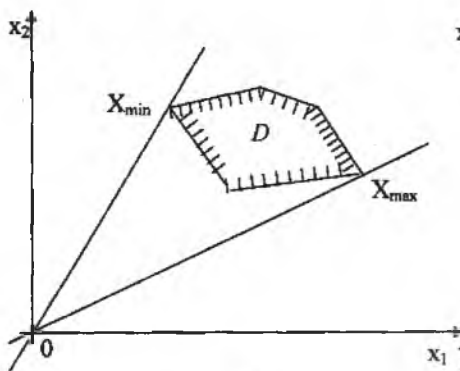


Рис. 7.2

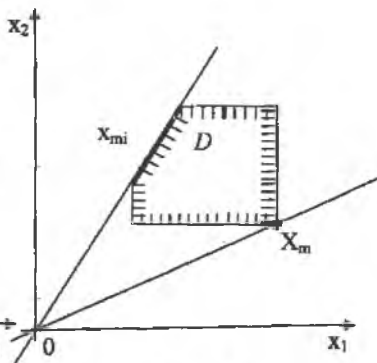


Рис. 7.3

II-ий випадок. Нехай множина D – необмежена. На рис. 7.4 найменше і найбільше значення функції існують і досягаються в кутових точках області D : $X_{\min}$ і $X_{\max}$.

На рис. 7.5 найбільше значення досягається в кутовій точці $X_{\max}$, а найменше значення функції не досягається в скінченній точці, бо пряма $l_{\min}$ паралельна променеві, що лежить на границі області D .

На рисунку 7.6 маємо випадок, коли найменше і найбільше значення функції в області D не досягаються.

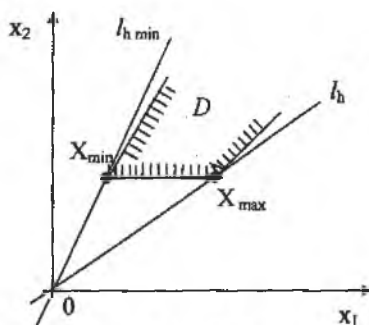


Рис. 7.4

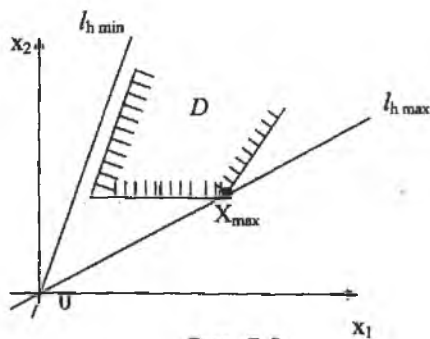


Рис. 7.5

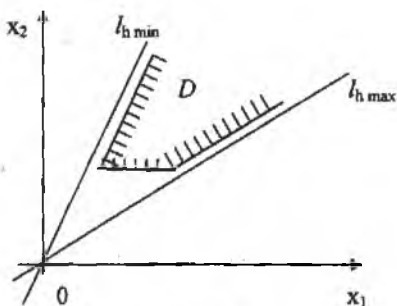


Рис. 7.6

Приклад 7.1. Графічним методом розв'язати задачу.

$$F(x) = \frac{2x_1 - 3x_2}{x_1 + 4x_2} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 34, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Розв'язання

Будуємо многокутну область допустимих розв'язків задачі, задану системою нерівностей і умовами $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

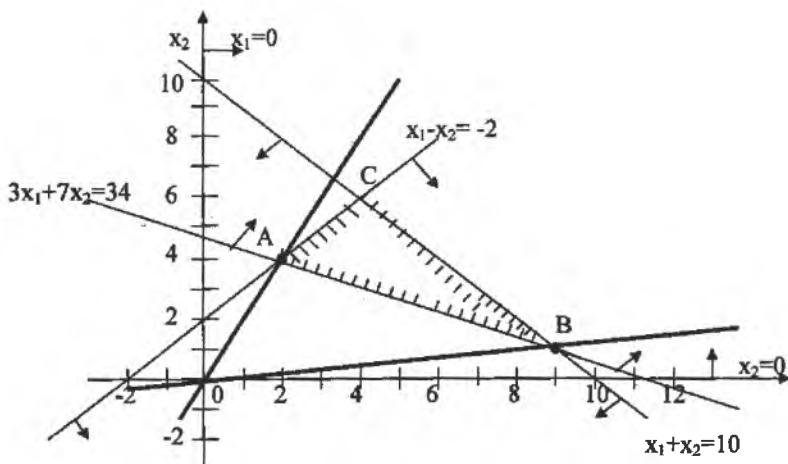


Рис. 7.7

На рисунку 7.7 зображено трикутник ABC, який відповідає системі нерівностей і умовам $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Функція $F(x)$ визначена в кожній точці цього трикутника, а сам він розташований у куті AOB. Тому одна із точок A або B є розв'язком задачі. Знаходимо координати вказаних точок.

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ 3x_1 + 7x_2 = 34, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 = -14, \\ 3x_1 + 7x_2 = 34, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 20, \\ x_1 - x_2 = -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

$$A(2;4)$$

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 = 34, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = -30, \\ 3x_1 + 7x_2 = 34, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 = 10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1, \\ x_1 = 9. \end{cases}$$

$$B(9;1)$$

$$\text{Обчислюємо: } F(A)=F(2;4)=\frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{2 + 4 \cdot 4} = -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9};$$

$$F(B)=F(9;1)=\frac{2 \cdot 9 - 3 \cdot 1}{9 + 4 \cdot 1} = \frac{15}{13}.$$

Таким чином, оптимальний розв'язок $X=(9; 1)$, $\max F(X)=\frac{15}{13}$.

Приклад 7.2. На виготовлення двох видів продукції Π_1 і Π_2 підприємство витрачає ресурси: сировину, енергію та робочу силу. Запаси сировини й енергії становлять 46 і 32 одиниці, а резерви робочої сили не менші ніж 24 одиниці. У таблиці 7.1 задано норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Загальні витрати підприємства на виготовлення одиниці продукції виду Π_1 і Π_2 становлять відповідно 8 і 5 одиниць.

Таблиця 7.1

Ресурси	Види продукції	
	Π_1	Π_2
Сировина	10	3
Енергія	2	4
Робоча сила	5	2

Скласти такий план виробництва, за якого собівартість продукції буде найменшою.

Розв'язання

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 кількість одиниць продукції виду Π_1 , а через x_2 кількість одиниць продукції виду Π_2 . Тоді загальні витрати на їх виробництво становлять $(8x_1 + 5x_2)$, а собівартість одного виробу становить:

$$F(x) = \frac{8x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2}.$$

Згідно з даними таблиці сировини витрачається $(10x_1 + 3x_2)$ одиниць, енергії $(2x_1 + 4x_2)$ одиниць, робочої сили $(5x_1 + 2x_2)$. Беручи до уваги запаси сировини й енергії, а також резерви робочої сили, одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \leq 46, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 24. \end{cases}$$

На невідомі x_1 і x_2 накладаємо умову невід'ємності.

Звідси маємо таку математичну модель задачі дробово-лінійного програмування:

$$F(x) = \frac{8x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \leq 46, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 24, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Побудуємо багатокутну область допустимих розв'язків задачі. Запишемо рівняння граничних прямих, за якими ці прямі зобразимо на площині x_1Ox_2 (рис. 7.8):

$$10x_1 + 3x_2 = 46,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 32,$$

$$5x_1 + 2x_2 = 24,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

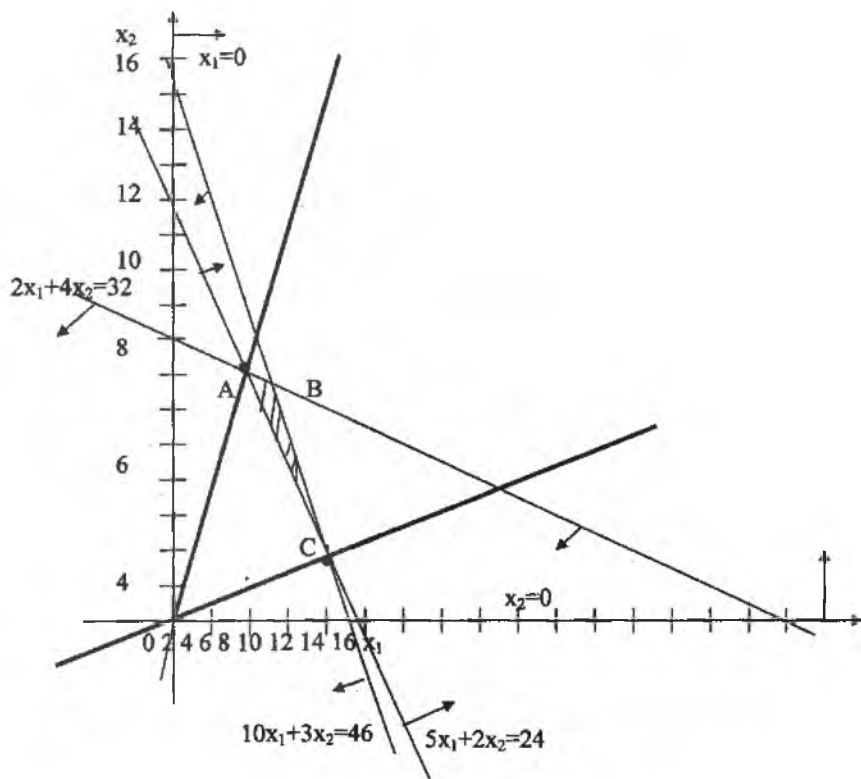


Рис. 7.8

На рис. 7.8 маємо трикутник ABC, який є областю допустимих розв'язків задачі і, який відповідає її системі обмежень. Цільова функція $F(x)$ визначена в кожній точці цієї області, а сама область розташована у куті AOC.

Одна із точок A або C є розв'язком задачі.

Знаходимо координати цих точок:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 32, \\ 5x_1 + 2x_2 = 24, \end{cases} & 2) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 24, \\ 10x_1 + 3x_2 = 46, \end{cases} \\
 \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 32, \\ -10x_1 - 4x_2 = -48, \end{cases} & \begin{cases} -10x_1 - 4x_2 = -48, \\ 10x_1 + 3x_2 = 46, \end{cases} \\
 \begin{cases} -8x_1 = -16, \\ 2x_1 + 4x_2 = 32, \end{cases} & \begin{cases} -x_2 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 = 24, \end{cases} \\
 \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 7 \end{cases} & \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 = 4 \end{cases} \\
 A(2;7) & C(4;2)
 \end{array}$$

$$\text{Обчислюємо: } F(A) = \frac{8 \cdot 2 + 5 \cdot 7}{2 + 7} = \frac{51}{9} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3},$$

$$F(C) = \frac{8 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{4 + 2} = \frac{42}{6} = 7.$$

Отже, оптимальним розв'язком задачі є:

$$X=(2;7), \min F(X)=F(2;7)=5\frac{2}{3}.$$

Щоб собівартість продукції була найменшою, підприємству треба випускати 2 одиниці продукції виду Π_1 і 7 одиниць продукції виду Π_2 .

Задачу дробово-лінійного програмування можна розв'язати шляхом зведення до задачі лінійного програмування.

Нехай дано задачу:

$$F(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Позначимо $\sum_{j=1}^n d_j x_j = \frac{1}{y_0}$ і зробимо заміну змінних:

$$y_0 x_j = y_j, \quad x_j = \frac{y_j}{y_0} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.9)$$

Виконаємо тотожні перетворення, пов'язані із введенням нових змінних:

$$a) \quad F(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\frac{1}{y_0}} = y_0 \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n c_j y_0 x_j = \sum_{j=1}^n c_j y_j = Z(y);$$

$$б) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{y_0} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i \right) \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = y_0 b_i \right) \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \right), \quad (i = \overline{1, m});$$

$$в) \quad \sum_{j=1}^n d_j x_j = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \left(y_0 \sum_{j=1}^n d_j x_j = 1 \right) \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n d_j y_0 x_j = 1 \right) \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1 \right).$$

Тепер запишемо вихідну задачу дробово-лінійного програмування за допомогою нових змінних як задачу лінійного програмування:

$$\max(\min) Z(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j,$$

$$\text{за умов } \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1,$$

$$y_0 \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Одержану задачу лінійного програмування можна розв'язати, наприклад, симплексним методом. Знайшовши її розв'язок, за

допомогою співвідношень (7.9) знайдемо також розв'язок вихідної задачі дробово-лінійного програмування.

Приклад 7.3. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

$$F(x) = \frac{2x_1 + 2x_2 - 3x_3}{3x_1 + x_2 + 2x_3} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \\ x_1 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'язання

Позначимо $3x_1 + x_2 + 2x_3 = \frac{1}{y_o}$ і введемо нові змінні $y_j = y_o x_j$,

$$x_j = \frac{y_j}{y_o}, j = \overline{1,3}. \quad (7.10)$$

Виконавши підстановку і зробивши тотожні перетворення, перейдемо до математичної моделі задачі лінійного програмування:

$$a) F(x) = \frac{2x_1 + 2x_2 - 3x_3}{\frac{1}{y_o}} = y_o(2x_1 + 2x_2 - 3x_3) =$$

$$= 2y_o x_1 + 2y_o x_2 - 3y_o x_3 = 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 = Z(y);$$

$$б) -2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, x_j = \frac{y_j}{y_o}, \text{ тоді}$$

$$-2 \frac{y_1}{y_o} - \frac{y_2}{y_o} + 2 \frac{y_3}{y_o} \leq 2,$$

$$-2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2y_o,$$

$$-2y_o - 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 0.$$

Аналогічно перетворивши друге і третє обмеження, одержимо:

$$y_o + 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 0,$$

$$-3y_o + y_1 + y_3 = 0;$$

$$e) \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = \frac{1}{y_0},$$

$$3y_0x_1 + y_0x_2 + 2y_0x_3 = 1,$$

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 = 1.$$

Таким чином, математична модель задачі лінійного програмування матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \min Z(y) &= 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ \begin{cases} -2y_0 - 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 0, \\ y_0 + 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 0, \\ -3y_0 + y_1 + y_3 = 0, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \end{cases} \\ y_0 \geq 0, y_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Зведемо дану задачу до канонічного виду і перейдемо до М-задачі:

$$\min Z(y) = 0 \cdot y_0 + 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + M\omega_1 + M\omega_2;$$

$$\begin{cases} -2y_0 - 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 0, \\ -y_0 - 2y_1 - y_2 + y_3 + y_5 = 0, \\ -3y_0 + y_1 + y_3 + \omega_1 = 0, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + \omega_2 = 1, \\ y_0 \geq 0, y_j \geq 0, j = \overline{1,5}, \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0. \end{cases}$$

Початковий опорний розв'язок має вигляд:

$$Y_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1).$$

Хід розв'язання цієї задачі симплексним методом наведено в таблиці 7.2.

З неї отримуємо розв'язок:

$$Y = \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 0; \frac{2}{7} \right), Z(Y) = -\frac{4}{7}.$$

Таблиця 7.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі (БН)	Коефіцієнти базисних невідомих у цільовій функції (C _б)	Опорний розв'язок (У)	0	2	2	-3	0	0	М	М
					y ₀	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	a ₁	a ₂
	1	y ₄	0	0	-2	-2	-1	2	1	0	0	0
I	2	y ₅	0	0	-1	-2	-1	1	0	1	0	0
	3	a ₁	М	0	-3	1	0	1	0	0	1	0
	4	a ₂	М	1	0	3	1	2	0	0	0	1
Z _j - C _j				0	0	-2	-2	3	0	0	0	0
				М	-3М	4М	М	3М	0	0	0	0
	1	y ₄	0	0	-8	0	-1	4	1	0	2	0
II	2	y ₅	0	0	-7	0	-1	3	0	1	2	0
	3	y ₁	2	0	-3	1	0	1	0	0	1	0
	4	a ₂	М	1	9	0	1	-1	0	0	-3	1
Z _j - C _j				0	-6	0	-2	5	0	0	2	0
				М	9М	0	М	-М	0	0	-4М	0
	1	y ₄	0	8/9	0	0	-1/9	28/9	1	0	-6/9	8/9
III	2	y ₅	0	7/9	0	0	-2/9	20/9	0	1	-3/9	7/9
	3	y ₁	2	3/9	0	1	3/9	6/9	0	0	0	3/9
	4	y ₀	0	1/9	1	0	1/9	-1/9	0	0	-3/9	1/9
Z _j - C _j				6/9	0	0	-12/9	39/9	0	0	0	6/9
				0	0	0	0	0	0	0	-М	-М
	1	y ₃	-3	2/7	0	0	-1/28	1	9/28	0	-6/28	8/28
IV	2	y ₅	0	1/7	0	0	-1/7	0	-5/7	1	1/7	1/7
	3	y ₁	2	1/7	0	1	5/14	0	-3/14	0	1/7	1/7
	4	y ₀	0	1/7	1	0	3/28	0	1/28	0	-5/14	1/7
Z _j - C _j				-4/7	0	0	-33/28	0	-39/28	0	26/28	-16/28
				0	0	0	0	0	0	0	-М	-М

Використовуючи співвідношення (7.10), знайдемо розв'язок вихідної задачі:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{1}{\frac{1}{7}} = 1,$$

$$x_2 = \frac{y_2}{y_0} = \frac{0}{\frac{1}{7}} = 0,$$

$$x_3 = \frac{y_3}{y_0} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{7}} = 2$$

Таким чином, $X=(1; 0; 2)$,

$$\min F(X) = -\frac{4}{7}.$$

Приклад 7.4. Розв'язати графічно задачу дробово-лінійного програмування:

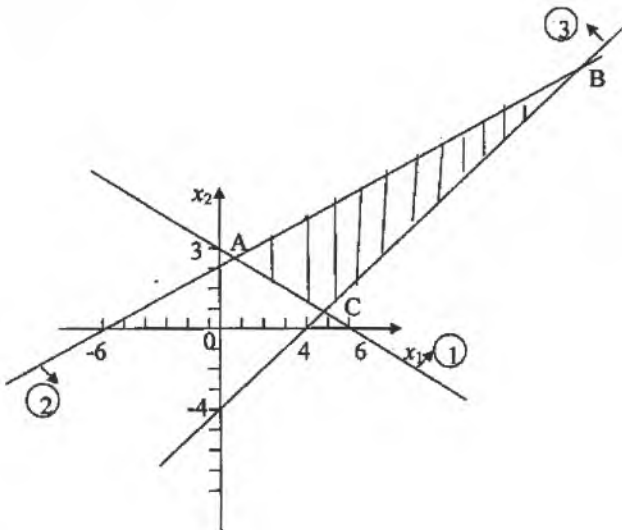
$$\max Z = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Побудуємо на площині область допустимих розв'язків задачі – трикутник ABC .



Цільова функція задачі являє собою пряму, яка обертається навколо початку системи координат залежно від змінюваних параметрів x_1, x_2 так, що точки A і C будуть точками максимуму і мінімуму функції. Виразимо x_2 із цільової функції:

$$x_2 = x_1 \frac{5-2Z}{Z+2}.$$

Кутовий коефіцієнт цільової функції:

$$R_z = \frac{5-2Z}{Z+2}.$$

Розглянемо похідну:

$$\frac{dR_z}{dZ} = \left(\frac{5-2Z}{Z+2} \right)' = \frac{(5-2Z)'(Z+2) - (Z+2)'(5-2Z)}{(Z+2)^2} = -\frac{9}{(Z+2)^2}.$$

Оскільки при будь-якому значенні Z вона від'ємна, то функція R_z є спадною (із зростанням Z кутовий коефіцієнт R_z зменшується), а графік цільової функції обертатиметься навколо початку координат за годинниковою стрілкою. Отже, точка C є точкою максимуму, а точка A – мінімуму досліджуваної задачі.

Знайдемо координати цих точок.

$$\text{Точка } A: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12; \\ -x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24.$$

$$\text{Звідси } x_1 = \frac{6}{7}; \quad x_2 = \frac{24}{7}.$$

Точка A має координати $(6/7; 24/7)$.

$$\text{Точка } C: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12; \\ 2x_1 - x_2 = 8; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 24 = -36;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8.$$

$$\text{Звідси } x_1 = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2}; \quad x_2 = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Точка C має координати $\left(\frac{9}{2}; 1\right)$.

Знайдемо значення цільової функції в цих точках:

$$Z_A = \frac{5 \cdot \frac{6}{7} - 2 \cdot \frac{24}{7}}{2 \cdot \frac{6}{7} + \frac{24}{7}} = -\frac{1}{2}; \quad Z_C = \frac{5 \cdot \frac{9}{2} - 2 \cdot 1}{2 \cdot \frac{9}{2} + 1} = \frac{41}{20}.$$

Результати ($Z_C > Z_A$) підтверджують, що оптимуми знайдено правильно: максимум досягається в точці C , а мінімум – у точці A .

Завдання для самостійної роботи

$$7.1. \max(\min)Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.2. \max(\min)Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \leq 12; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + x_2 \geq 10; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.3. \max(\min)Z = \frac{5x_1 - 3x_2}{x_1 + 3x_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ -x_1 + 6x_2 \leq 18; \\ x_1 - 3x_2 \leq 3; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.4. \max(\min)Z = \frac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2; \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ 3x_1 - x_2 \leq 12; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.5. \max(\min)Z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.6. \max(\min)Z = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.7. \max(\min)Z = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - x_2 \leq 10; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.8. \max(\min)Z = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5; \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.9. \max(\min)Z = \frac{2x_1 - x_2 - 3}{x_1 + 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5; \\ 2x_1 - x_2 \geq 1; \\ x_1 - 3x_2 \leq 1; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$7.10. \max(\min)Z = \frac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4; \\ 3x_1 - x_2 \leq 6; \\ x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом:

$$7.11. \max Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$7.12. \max Z = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$7.13. \max Z = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 12; \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 12; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 1; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$7.14. \min Z = \frac{2x_1 - 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20; \\ 3x_1 - x_2 \geq 10; \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 11; \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 35; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$7.15. \max Z = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$7.16. \max Z = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$7.17. \max Z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7; \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$7.18. \max Z = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 8; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

ГЛАВА 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Із методів математичного програмування найбільш складними вважаються методи нелінійного програмування.

Для задач лінійного програмування завжди можна знайти оптимальний розв'язок симплексним методом, який є універсальним. При цьому немає проблем з доведенням існування цього розв'язку, оскільки в результаті розв'язування задачі симплексним методом завжди маємо один із варіантів відповіді: а) знайдено розв'язок; б) задача розв'язку не має; в) цільова функція необмежена, тому задача розв'язку також не має.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі.

Задачі нелінійного програмування на практиці виникають доволі часто, наприклад, коли затрати зростають не пропорційно кількості закуплених або вироблених товарів (ефект "оптовості"). Такі показники, як прибуток, собівартість, капітальні затрати на виробництво та інші нелінійно залежать від обсягу виробництва, витрат ресурсів.

У загальному задачі нелінійного програмування записують так: треба знайти значення n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють m рівнянням і нерівностям:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \{\leq, =, \geq\} b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (8.1)$$

і максимізують (мінімізують) функцію

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.2)$$

Припускається, що вид функцій φ_i відомий, а b_i – задані дійсні числа. Величини m і n між собою не пов'язані, тому m може бути більшим, меншим або рівним n . У кожному із обмежень (8.1) зберігається тільки один із знаків $\leq, =, \geq$. Зазвичай деякі або всі невідомі задовольняють умову невід'ємності.

Наведемо деякі приклади таких економічних задач.

Приклад 8.1. Знайти план виробництва продукції, який забезпечив би максимальну рентабельність, якщо відомо d_i – затрати виробничих фондів, необхідних для виготовлення однієї одиниці продукції $P_i (i = \overline{1, n})$, c_i – вартість одиниці продукції, a_{ji} – норми витрат ресурсів, b_j – обсяг ресурсів ($j = \overline{1, m}$). Математична модель такої задачі має вигляд:

$$\max Z = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n d_i \cdot x_i}$$

$$\begin{cases} a_{ji}x_i \leq b_j; & j = \overline{1, m} \\ x_i \geq 0; & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Приклад 8.2. Дано функцію споживача $Z = x_1 \cdot x_2$, де: x_1, x_2 – це деякі блага; p_1, p_2 – ціна цих благ; I – дохід споживача. Тоді можна поставити задачу на знаходження таких значень x_1 і x_2 , що дають максимум функції $Z = x_1 \cdot x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 \leq I, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 8.3. Підприємство випускає два види продукції P_1 і P_2 . На їх виготовлення використовується три типи сировини S_1, S_2 і S_3 . Запаси сировини на підприємстві, планові норми їх витрачання $a_{ij} (i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 2})$, планова собівартість C_j і оптові ціни подані у таблиці 8.1 (усі дані з розрахунку на 1 тис. штук виробів).

Таблиця 8.1

Тип сировини	Запаси сировини	Норми затрат	
		P_1	P_2
S_1	100	10	20
S_2	120	20	10
S_3	150	20	20
Собівартість		5	10
Ціна		7	13

Із-за наявності браку в процесі виробництва витрачання сировини залежить від обсягу x_j , виготовлення виробів і в першому наближенні виражається лінійною функцією $a_{ij} + x_j$, собівартість продукції – функцією $C_j + 0,1 x_j$.

Вироби можуть випускатися в будь-яких співвідношеннях, оскільки їх реалізація повністю забезпечена. Треба скласти такий план випуску продукції, який забезпечував би одержання максимального прибутку.

Розв'язання

Нехай планується виготовити x_1 і x_2 одиниць виробів виду P_1 і P_2 (за одиницю виробу візьмемо 1 тис. штук).

Затрати сировини S_1 на одиницю виробу виду P_1 і P_2 відповідно становлять $(10 + x_1)$ і $(20 + x_2)$. Тоді разом на виготовлення x_1 одиниць виробів виду P_1 та x_2 одиниць виробів виду P_2 буде затрачено сировини S_1 : $(10 + x_1) x_1 + (20 + x_2) x_2$. За умовою задачі:

$$(10 + x_1) x_1 + (20 + x_2) x_2 \leq 100,$$

$$10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 100.$$

Аналогічно одержуємо обмеження для сировини S_2 та S_3 :

$$20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 \leq 120,$$

$$20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 150.$$

Внаслідок реалізації одиниці виробу виду P_1 підприємство одержить прибуток $7 - (5 + 0,1 x_1)$ ум. од., одиниці виробу виду P_2 – прибуток $13 - (10 + 0,1 x_2)$ ум. од. Загальний прибуток підприємства F становитиме:

$$F(x) = (7 - (5 + 0,1 x_1)) x_1 + (13 - (10 + 0,1 x_2)) x_2$$

$$\text{або } F(x) = 2x_1 - 0,1 x_1^2 + 3x_2 - 0,1 x_2^2.$$

Таким чином, треба знайти такий план $X = (x_1, x_2)$ випуску продукції, при якому

$$F(x) = 2x_1 - 0,1 x_1^2 + 3x_2 - 0,1 x_2^2 \rightarrow \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} 10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 100, \\ 20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 \leq 120, \\ 20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

У цільовій функції і обмеженнях невідомі містяться в степенях, вищих ніж перший. Це є характерною ознакою того, що маємо задачу нелінійного програмування.

Область допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування може бути неопуклою множиною, якщо серед функцій φ , в (8.1) є нелінійні функції.

Гرادієнтні методи

Градiєнтні методи можна застосовувати при розрахунку будь-яких задач нелінійного програмування. Але вони приводять лише до локального екстремуму. Тому градієнтні методи більш ефективні при розв'язку задач опуклого програмування, в яких будь-який локальний екстремум є одночасно і глобальним.

Функція $F(x)$, що задана на опуклій множині X , називається опуклою, якщо для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in X$ і будь-якого $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ справедливою є нерівність $F(x) \leq \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2)$, де $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$.

Функція $F(x)$ називається строго опуклою, якщо справедливою є нерівність $F(x) < \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2)$, де $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$.

Для опуклої функції необхідною і достатньою умовою оптимальності точки x_0 є рівність нулю градієнта функції в цій точці.

Якщо наперед відомо, що функція $F(x)$ має в області допустимих розв'язків єдиний екстремум, то його пошук слід здійснювати таким чином.

В області допустимих розв'язків візьмемо довільну точку x_1 і за допомогою градієнта визначимо напрямку, в якому функція $F(x)$ зростає (або спадає) з найбільшою швидкістю. Зробивши невеликий "крок" у знайденому напрямку, необхідно перейти в нову точку x_2 . Потім знову визначити найкращий напрямку для переходу в наступну точку x_3 і т. д. Отже, потрібно побудувати послідовність точок $x_1, x_2, x_3, \dots$ таким чином, щоб вона збігалася до точки екстремуму x_0 .

Величина "кроку" із точки x_1 у напрямку градієнта $\text{grad } F(x)$ визначається значенням параметра λ у рівнянні прямої

$\bar{x} = \bar{x}_1 + \text{grad } F(\bar{x}_1) \lambda$, що проходить через точку $\bar{x}_1$ паралельно градієнту. Значення λ можна вибрати виходячи із конкретних умов задачі або виходячи із таких міркувань: переміщення по прямій у нову точку $\bar{x}_2$ супроводжується зміною функції $F(x)$ на величину $\Delta F(\bar{x})$, яка залежить від вибраного значення λ . Значення λ^* , при якому приріст $\Delta F(\bar{x})$ досягає найбільшої величини, можна визначити, використовуючи необхідну ознаку екстремуму $\Delta F(x): \frac{d\Delta F(\bar{x})}{d\lambda} = \text{grad}F(\bar{x}_2) \cdot \text{grad}F(\bar{x}_1) = 0$.

Градiєнтні методи дають точний розв'язок за нескінченну кількість кроків, і лише в деяких випадках — за скінченну.

Приклад 8.4.

$$\min Z = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Візьмемо в області допустимих розв'язків довільну точку, наприклад, $\bar{x}_1 = (1,5; 3)$. Оскільки задача на пошук мінімуму, то знаходимо антиградієнт — $\text{grad}Z = (6 - 2x_1; 4 - 2x_2)$, у точці $\bar{x}_1$ — $\text{grad}Z = (3; -2)$. Оскільки $-\text{grad}Z = (x_1) \neq 0$, то $\bar{x}_1$ є точкою екстремуму. Перемістимось із точки $\bar{x}_1$ вздовж антиградієнта по прямій в нову точку $\bar{x}_2$. Для визначення координати точки $\bar{x}_2 = (1,5 + 3\lambda; 3 - 2\lambda)$ потрібно вибрати значення параметра λ . Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Z}{d\lambda} &= (-\text{grad}(\bar{x}_2))(-\text{grad}Z(\bar{x}_1)) = (6 - 2(1,5 + 3\lambda)); 4 - 2(3 - 2\lambda)) \times (3; -2) = \\ &= 13 - 26\lambda = 0, \text{ звідси } \lambda = 0,5. \text{ Оскільки } \frac{d^2\Delta Z}{d\lambda^2} = -26 < 0, \text{ то при } \lambda = 0,5 \end{aligned}$$

зміна ΔZ значення функції Z досягає найбільшої величини. При цьому отримуємо точку $\bar{x}_2 = (1,5 + 3 \cdot 0,5; 3 - 2 \cdot 0,5) = (3; 2)$, яка належить області допустимих розв'язків.

У точці x_2 антиградієнт – $\text{grad}Z = (6 - 2 \cdot 3; 4 - 2 \cdot 2) = (0; 0)$. Таким чином, ніяким переміщенням із точки x_2 функцію Z зменшити не можна. x_2 – шукана точка.

Відповідь: $x_{\min} = (3; 2)$, $Z_{\min} = 5$.

Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

З геометричної точки зору, задача нелінійного програмування зводиться до знаходження в опуклій області D , що визначається системою обмежень задачі, точки, через яку проходить гіперповерхня $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, найвищого рівня (у задачі на максимум) або найнижчого рівня (у задачі на мінімум). Зокрема, якщо цільовою є нелінійна опукла функція, а обмеження функції лінійні, то областю D допустимих розв'язків задачі буде або опуклий багатокутник, або опукла необмежена багатокутна область. При цьому цільова функція свій оптимум, навіть якщо він єдиний, може приймати як на границі, так і всередині багатокутника допустимих розв'язків.

Задачу нелінійного програмування графічно можна розв'язувати за такою схемою:

1. Знайти область D допустимих розв'язків задачі, яка визначається системою обмежень, якщо D – порожня множина, то задача розв'язку не має.

2. Побудувати гіперповерхню $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$ для деякого значення h .

3. Змінюючи значення h , знайти гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня, яка мала хоча б одну спільну точку з областю D . Якщо виявиться, що функція F не обмежена зверху (знизу) на множини D , то відповідна задача на максимум (мінімум) не має розв'язку.

4. Якщо розв'язок задачі існує, то кожна точка $X \in D$, яка належить гіперповерхні найвищого (найнижчого) рівня, є оптимальною, а відповідне значення функції $F(X)$ – є оптимальним.

Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування є особливо зручним для випадку двох невідомих, оскільки множину обмежень тоді можна зобразити на площині.

Приклад 8.5. Знайти $\max (\min) F(x) = x_1 + 3x_2$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \geq 9, \\ x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \leq 36, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Розв'язання

Цільова функція $F(x) = x_1 + 3x_2$ визначає в тривимірному просторі площину. Її можна задати на координатній площині x_1, x_2 проєкціями ліній рівня $F = \text{const}$. Це буде сім'я паралельних прямих, перпендикулярних до вектора $\vec{p} = (1; 3)$ (рис. 8.1).

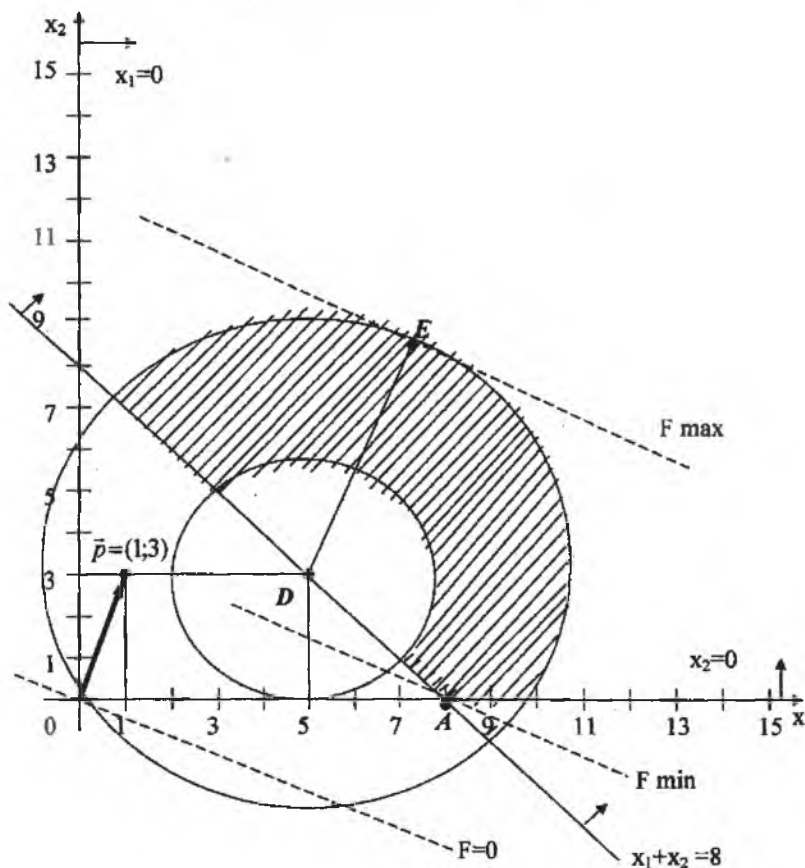


Рис. 8.1

Перш ніж зобразити на площині x_1 О x_2 множину допустимих розв'язків задачі, перетворимо нерівності, виділивши повні квадрати відносно невідомих x_1 і x_2 :

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \geq 9,$$

$$x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot 5 + 25 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot 3 + 9 \geq 9,$$

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \geq 9.$$

$$\text{Аналогічно } (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36.$$

Рівняння $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9$ та $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ задають на площині кола з центром у точці D (5; 3) і радіусами, відповідно рівними 3 і 6.

Рівняння $x_1 + x_2 = 8$ визначає на площині пряму.

Таким чином, областю допустимих розв'язків задачі є множина точок (на рис. 8.1 вона заштрихована), обмежена двома концентричними колами $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9$, $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$, прямими $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

Враховуючи вектор $\vec{p}$, який є градієнтом цільової функції $F(x)$, знаходимо, що лінії рівня $F \min$ і $F \max$ мають спільні точки з областю допустимих розв'язків – точки A і E (рис. 8.1), тобто функція $F(x)$ у точках A і E досягає відповідно мінімуму і максимуму в допустимій області.

Координати точки A знаходяться безпосередньо за малюнком: A(8; 0). Тому $F \min = F(A) = 8 + 3 \cdot 0 = 8$.

Для визначення координат точки E розв'язуємо систему рівнянь, які визначають на площині коло і пряму DE, що перпендикулярна до дотичної F max.

Знайдемо рівняння прямої DE, скориставшись канонічним рівнянням прямої на площині. Матимемо:

$$\frac{x_1 - 5}{1} = \frac{x_2 - 3}{3} \text{ або}$$

$$3x_1 - 15 = x_2 - 3,$$

$$3x_1 - x_2 - 12 = 0.$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36, \\ 3x_1 - x_2 - 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3x_1 - 12 \\ (x_1 - 5)^2 + (3x_1 - 15)^2 = 36. \end{cases}$$

$$x_1^2 - 10x_1 + 25 + 9x_1^2 - 90x_1 + 225 - 36 = 0,$$

$$10x_1^2 - 100x_1 + 214 = 0,$$

$$5x_1^2 - 50x_1 + 107 = 0,$$

$$D = 2500 - 2140 = 360$$

$$x_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{360}}{10} = \frac{50 \pm 10\sqrt{3,6}}{10} = 5 \pm \sqrt{3,6}.$$

Враховуючи невід'ємність x_1 і x_2 , одержуємо $x_1 = 5 + \sqrt{3,6}$,

$$\text{тоді } x_2 = 3 \cdot (5 + \sqrt{3,6}) - 12 = 3 + 3\sqrt{3,6}.$$

Отже, точка E $(5 + \sqrt{3,6}; 3 + 3\sqrt{3,6})$.

$$F \max = F(E) = 5 + \sqrt{3,6} + 3(3 + 3\sqrt{3,6}) = 5 + \sqrt{3,6} + 9 + 9\sqrt{3,6} =$$

$$14 + 10\sqrt{3,6} = 14 + 6\sqrt{10}.$$

Таким чином, $F \max = 14 + 6\sqrt{10}$, $F \min = 8$.

Приклад 8.6. Розв'язати графічним методом задачу:

$$\max (\min) F(x) = 2(x_1 - 3)^2 + 5(x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \leq -3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 31, \\ x_1 - 4x_2 \geq -27, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 63, \\ -4x_1 - x_2 \geq -63, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Областю допустимих розв'язків задачі є многокутник ABCDE (рис.8.2), який обмежений відрізками прямих: $x_1 - 6x_2 = -3$, $3x_1 + 2x_2 = 31$, $x_1 - 4x_2 = -27$, $2x_1 + 5x_2 = 63$, $-4x_1 - x_2 = -63$, $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

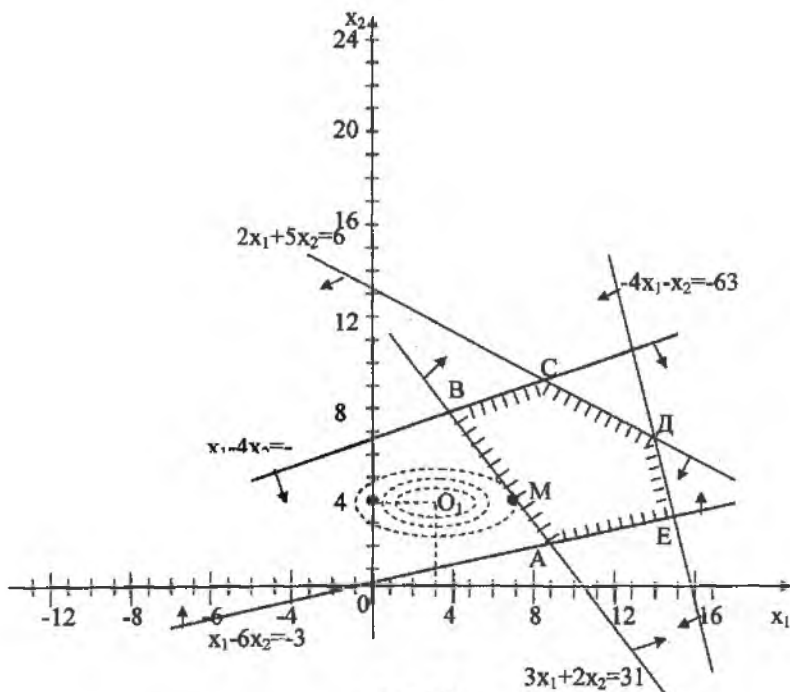


Рис 8.2

Для $h > 0$ рівняння $F=h$ визначає в площині x_1 О x_2 еліпс $2(x_1 - 3)^2 + 5(x_2 - 4)^2 = h$, у кожній точці якого функція $F(x)$ набуває однакового значення h ; центр еліпса знаходиться в точці $O_1(3; 4)$, а півосі дорівнюють $\sqrt{\frac{h}{2}}$ і $\sqrt{\frac{h}{5}}$. Зі зростанням h еліпс розширюється і значення цільової функції $F(x)$ збільшуються.

Очевидно, що серед еліпсів, які перетинають область допустимих розв'язків, знайдуться такі, що дають мінімум і максимум функції $F(x)$.

Знайдемо $h_{\min}$. Для цього визначимо, в яких точках еліпс дотикається многокутника ABCDE. З рис. 8.2 видно, що ця точка лежить на відрізку АВ прямої $3x_1 + 2x_2 = 31$. Знайдемо, для якого значення h еліпс дотикається до прямої $3x_1 + 2x_2 = 31$. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 3)^2 + 5(x_2 - 4)^2 = h, \\ 3x_1 + 2x_2 = 31. \end{cases}$$

Маємо систему рівнянь з параметром h . Знайдемо розв'язок утвореної системи рівнянь, вимагаючи, щоб він був єдиний. Із другого рівняння визначимо:

$$x_2 = \frac{31}{2} - \frac{3}{2}x_1$$

і, підставивши його в перше, отримаємо квадратне рівняння з параметром h відносно x_1 :

$$2(x_1 - 3)^2 + 5\left(\left(\frac{31}{2} - \frac{3}{2}x_1\right) - 4\right)^2 = h,$$

$$2(x_1^2 - 6x_1 + 9) + 5\left(\frac{529}{4} - \frac{69}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_1^2\right) = h,$$

$$2x_1^2 - 12x_1 + 18 + \frac{2645}{4} - \frac{345}{2}x_1 + \frac{45}{4}x_1^2 - h = 0,$$

$$8x_1^2 - 48x_1 + 72 + 2645 - 690x_1 + 45x_1^2 - 4h = 0,$$

$$53x_1^2 - 738x_1 + 2717 - 4h = 0.$$

Оскільки еліпс дотикається до прямої в одній точці, то одержане рівняння має один розв'язок, тобто два однакові корені. У цьому випадку дискримінант рівняння дорівнює нулю.

$$D = (-738)^2 - 4 \cdot 53 \cdot (2717 - 4h) = 0,$$

$$544644 - 576004 + 848h = 0,$$

$$-31360 + 848h = 0,$$

$$-31360 = -848h,$$

$$h = \frac{31360}{848} = \frac{1960}{53},$$

$$53x_1^2 - 738x_1 + 2717 - \frac{7840}{53} = 0,$$

$$2809x_1^2 - 39114x_1 + 136161 = 0,$$

$$x_1 = \frac{39114}{2 \cdot 2809} \approx 6,96,$$

$$x_2 = \frac{31}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{39114}{2 \cdot 2809} = \frac{31}{2} - \frac{117342}{11236} = \frac{56816}{11236} \approx 5,06.$$

Отже, еліпс дотикається до прямої $3x_1 + 2x_2 = 31$ у точці $M(6,96; 5,06)$ і в ній функція $F(x)$ досягає мінімуму.

$$F_{\min} = F(6,96; 5,06) = 36,98.$$

Знайдемо $h_{\max}$. З рис. 8.2 видно, що найменший серед еліпсів, який охоплює багатокутник $ABCDE$, повинен проходити через одну з вершин C , D або E . Для відшукування координат цих вершин розв'язуємо систему рівнянь:

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 63, \\ x_1 - 4x_2 = -27; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 63, \\ -4x_1 - x_2 = -63; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 6x_2 = -3, \\ -4x_1 - x_2 = -63; \end{cases}$
$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 63, \\ -2x_1 + 8x_2 = 54; \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 = 126, \\ -4x_1 - x_2 = -63; \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 - 24x_2 = -12, \\ -4x_1 - x_2 = -63; \end{cases}$
$\begin{cases} 13x_2 = 117, \\ x_1 - 4x_2 = -27; \end{cases}$	$\begin{cases} 9x_2 = 63, \\ -4x_1 - x_2 = -63; \end{cases}$	$\begin{cases} -25x_2 = -75, \\ x_1 - 6x_2 = -3; \end{cases}$
$\begin{cases} x_2 = 9, \\ x_1 = 9; \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 7, \\ x_1 = 14; \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 3, \\ x_1 = 15; \end{cases}$
$C(9;9)$	$D(14;7)$	$E(15;3)$

$$\text{Оскільки } F(C) = F(9;9) = 2(9-3)^2 + 5(9-4)^2 = 147,$$

$$F(D) = F(14; 7) = 2(14-3)^2 + 5(7-4)^2 = 287,$$

$$F(E) = F(15; 3) = 2(15-3)^2 + 5(3-4)^2 = 293,$$

то $E(15; 3)$ – точка, в якій функція досягає максимуму на багатокутнику $ABCDE$.

$$F_{\max} = F(15; 3) = 293.$$

Приклад 8.7. Графічним методом розв'язати таку задачу нелінійного програмування $\max (\min) F(x) = 3 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Областю допустимих розв'язків даної задачі є сектор AOB , який обмежений колом $x_1^2 + x_2^2 = 4$ з центром у початку координат

і радіусом 2 одиниці, прямими $x_1 - 2x_2 = 0$ та $-2x_1 + x_2 = 0$ (на рис. 8.3 він заштрихований).

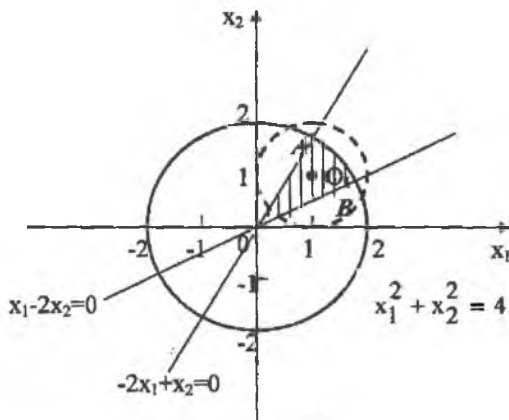


Рис. 8.3

Тепер побудуємо лінію рівня функції $F(x)$ і визначимо напрямки зменшення і збільшення її. Всі лінії рівня мають рівняння виду $F(x) = h$, тобто

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = h - 3.$$

Це рівняння визначає в площині x_1 O x_2 коло з центром у точці $O_1(1; 1)$ і радіусом $R = \sqrt{h - 3}$. Зрозуміло, що у будь-якій точці цієї лінії рівня при переміщенні від центра кола O_1 функція $F(x)$ зростає, а при переміщенні до центра – спадає.

Таким чином, мінімум $F(x)$ досягається в середині області допустимих розв'язків, тобто в точці $O_1(1; 1)$, а максимум $F(x)$ досягається в точці $O(0; 0)$, оскільки найменше із кіл, яке повністю охоплює сектор AOB , проходить через точку O .

$$\text{Звідси: } F_{\min} = F(1; 1) = 3 + (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 3,$$

$$F_{\max} = F(0; 0) = 3 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 5.$$

Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа є одним із способів розв'язування задач на умовний екстремум.

Розглянемо задачу: знайти найбільше (найменше) значення функції

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.3)$$

за умови, що невідомі $x_1, x_2, \dots, x_n$ задовольняють рівняння

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n \quad (8.4)$$

Припустимо, що функції f і φ_i мають неперервні частинні похідні за всіма невідомими. Рівняння (8.4) називають рівняннями зв'язку.

Кажуть, що в точці $X^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$, яка задовольняє рівняння зв'язку, функція $F = f(X)$ має умовний максимум (мінімум), якщо нерівність $f(X^o) \geq f(X)$ ($f(X^o) \leq f(X)$) виконується для всіх точок X , координати яких задовольняють рівняння зв'язку (8.4).

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками умовного екстремуму, а задачу (8.3), (8.4) називають задачею на умовний екстремум.

Легко помітити, що задача на знаходження умовного екстремуму збігається із задачею нелінійного програмування (8.1), (8.2).

Розв'язування задачі на знаходження умовного екстремуму методом множників Лагранжа починається із уведення до розгляду допоміжної функції Лагранжа, яка в області допустимих розв'язків досягає максимуму (мінімуму) для тих же значень невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, що і цільова функція F . Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(X), \quad (8.5)$$

де $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ – множники Лагранжа.

Слід зазначити, що множникам Лагранжа можна надати економічного змісту. Якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – прибуток, що відповідає плану $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а функція $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – затрати i -го ресурсу, які відповідають цьому плану, то λ_i – вартість i -го ресурсу, що характеризує зміну екстремального значення цільової функції залежно від зміни розмірів i -го ресурсу (маргінальна оцінка).

$L(X)$ – функція $n + m$ невідомих $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Знаходження стаціонарних точок функції $L(X)$ зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X)}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L(X)}{\partial \lambda_i} = 0, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (8.6)$$

Легко помітити, що $L'_{\lambda_i}(X) = \varphi_i(X)$, тобто у (8.6) входять рівняння зв'язку. Таким чином, задача знаходження умовного екстремуму функції $F = f(X)$ зводиться до знаходження локального екстремуму функції $L(X)$. Якщо стаціонарна точка знайдена, то питання про існування екстремуму розв'язується за допомогою достатніх умов екстремуму – дослідження знака другого диференціала $d^2L(X)$ у стаціонарній точці за умови, що змінні прирости Δx_j пов'язані співвідношеннями:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.7)$$

які отримані шляхом диференціювання рівнянь зв'язку.

Приклад 8.8. Знайти умовні екстремуми функції

$$F(x) = 6 - 4x_1 - 3x_2, \text{ якщо } x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Розв'язання

Запишемо рівняння зв'язку $x_1^2 + x_2^2 = 1$ у вигляді $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ і складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Знайдемо частинні похідні функції Лагранжа за змінними x_1, x_2 і λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4 + 2\lambda x_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -3 + 2\lambda x_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Система рівнянь для відшукування стаціонарних точок має вигляд:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x_1 = 0, \\ -3 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Із першого і другого рівнянь системи знаходимо відповідно x_1 та x_2 . Підставивши одержані значення у третє рівняння, матимемо значення λ .

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\lambda}, \\ x_2 = \frac{3}{2\lambda}, \\ \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо спочатку λ :

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{16 + 9 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0, \quad \lambda \neq 0$$

$$16 + 9 - 4\lambda^2 = 0,$$

$$25 = 4\lambda^2,$$

$$\lambda^2 = \frac{25}{4},$$

$$\lambda' = \frac{5}{2},$$

$$\lambda'' = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Тоді } x_1' = \frac{2}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_1'' = \frac{2}{-5} = -\frac{4}{5},$$

$$x_2' = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{5}, \quad x_2'' = \frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{3}{5}.$$

Отже, функція Лагранжа має дві стаціонарні точки:

$$X_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right), \text{ якщо } \lambda = \frac{5}{2},$$

$$X_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right), \text{ якщо } \lambda = -\frac{5}{2}.$$

Щоб скласти другий диференціал функції Лагранжа, знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = (-4 + 2\lambda x_1)'_{x_1} = 2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = (-4 + 2\lambda x_1)'_{x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = (-3 + 2\lambda x_2)'_{x_2} = 2\lambda.$$

$$d^2 L = 2\lambda dx_1^2 + 2\lambda dx_2^2 = 2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Якщо $\lambda' = \frac{5}{2}$, $x_1' = \frac{4}{5}$, $x_2' = \frac{3}{5}$, то $d^2 L = 2 \cdot \frac{5}{2} (dx_1^2 + dx_2^2) > 0$.

Отже, у точці $X_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція F має умовний мінімум,

$$F_{\min} = F\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = 6 - \frac{25}{5} = 1.$$

Якщо $\lambda'' = -\frac{5}{2}$, $x_1'' = -\frac{4}{5}$, $x_2'' = -\frac{3}{5}$, то $d^2 L = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) (dx_1^2 + dx_2^2) < 0$

Тому в точці $X_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, функція F має умовний максимум,

$$F_{\max} = F\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 6 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 11.$$

Приклад 8.9. Гірничорудна компанія уклала контракт на добування 600 тис. тонн залізної руди. Для розробки рудних родовищ компанія використовує механізми виду M_1 та M_2 . Якщо x_1 тис. тонн руди видобудуть механізми виду M_1 , то експлуатаційні витрати на ремонт та обслуговування техніки становитимуть $f_1(x_1) = 0,375x_1^2 + x_1$ грн, а якщо x_2 тис. тонн руди видобудуть механізми виду M_2 , то експлуатаційні витрати на їх ремонт та обслуговування становитимуть $f_2(x_2) = 0,25x_2^2 + 26x_2$ грн. Визначити, скільки залізної руди треба видобути механізмами виду M_1 і скільки механізмами виду M_2 , щоб виконати замовлення з найменшими експлуатаційними затратами.

Розв'язання

Нехай x_1 і x_2 – кількості залізної руди (у тис. тонн), які компанія планує видобути механізмами виду M_1 і виду M_2 .

Тоді за умовою задачі: $x_1 + x_2 = 600$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Загальні експлуатаційні затрати на ремонт та обслуговування механізмів становитимуть:

$$F(x_1; x_2) = 0,375x_1^2 + x_1 + 0,25x_2^2 + 26x_2 \text{ (грн).}$$

Оскільки замовлення треба виконати з найменшими експлуатаційними затратами, то математична модель задачі має вигляд:

$$\min F(x_1; x_2) = 0,375x_1^2 + x_1 + 0,25x_2^2 + 26x_2,$$

$$x_1 + x_2 = 600,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Застосуємо до розв'язування даної математичної моделі задачі метод множників Лагранжа.

Запишемо рівняння зв'язку у вигляді $x_1 + x_2 - 600 = 0$ і складемо функцію Лагранжа.

$$L(x_1; x_2; \lambda) = 0,375x_1^2 + x_1 + 0,25x_2^2 + 26x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 600).$$

Знайдемо частинні похідні функції L по змінних x_1, x_2 і λ .

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,75x_1 + 1 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,5x_2 + 26 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 600.$$

Для знаходження стаціонарних точок складемо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,75x_1 + 1 + \lambda = 0, \\ 0,5x_2 + 26 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 - 600 = 0; \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}(-\lambda - 1), \\ x_2 = -52 - 2\lambda, \\ \frac{4}{3}(-\lambda - 1) - 52 - 2\lambda - 600 = 0; \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}(-\lambda - 1), \\ x_2 = -52 - 2\lambda, \\ -4\lambda - 4 - 156 - 6\lambda - 1800 = 0; \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}(-\lambda - 1), \\ x_2 = -52 - 2\lambda, \\ -10\lambda - 1960 = 0; \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 260, \\ x_2 = 340, \\ \lambda = -196 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким чином, маємо стаціонарну точку $X(260; 340)$, якщо $\lambda = -196$.

Далі знаходимо частинні похідні другого порядку функції L і записуємо $d^2 L$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0,75, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0,5, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Тоді $d^2 L = 0,75 dx_1^2 + 0,5 dx_2^2$, $d^2 L > 0$, якщо $dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0$.

Звідси у точці $X(260; 340)$ функція $F(x_1; x_2)$ має мінімум,
 $\min F(x_1; x_2) = 0,375 \cdot 260^2 + 260 + 0,25 \cdot 340^2 + 26 \cdot 340 = 63\,350$.

Отже, механізмами виду M_1 треба видобути 260 тис. тонн руди, а механізмами виду M_2 – 340 тис. тонн руди; тоді експлуатаційні витрати на ремонт і обслуговування цих механізмів будуть мінімальними і становитимуть 63 350 грн.

Приклад 8.10. Методом множників Лагранжа знайти екстремуми функції:

$$F = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 9x_1 + 7$$

$$\text{за обмежень} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 4, \\ x_2 - x_1 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо функцію Лагранжа і знаходимо її частинні похідні за змінними $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$.

$$L(x_1; x_2; x_3; \lambda_1; \lambda_2) = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 9x_1 + 7 + \lambda_1(x_1 + x_3 - 4) + \lambda_2(-x_1 + x_2 + 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10x_1 - 4x_2 + 9 + \lambda_1 - \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 16x_2 - 4x_1 + \lambda_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 12x_3 + \lambda_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_3 - 4, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -x_1 + x_2 + 2.$$

Система рівнянь для знаходження стаціонарних точок має вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 = -9, \\ -4x_1 + 16x_2 + \lambda_2 = 0, \\ 12x_3 + \lambda_1 = 0, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & -4 & 0 & \boxed{1} & -1 & -9 \\ -4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & -4 & 0 & 1 & -1 & -9 \\ -4 & 16 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -10 & 4 & 12 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 12 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ -4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -12 & 12 & 0 & 0 & 9 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 12 & -6 & 1 & 0 & -33 \\ 0 & 16 & 4 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & -12 & 18 & 0 & 0 & 33 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -18 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 57 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -18 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 57/30 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -684/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 204/30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 57/30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63/30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/30 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$x_1=2,1; x_2=0,1; x_3=1,9$, якщо $\lambda_1=-22,8; \lambda_2=6,8$.

Отже, якщо $\lambda_1=-22,8; \lambda_2=6,8$, то маємо стаціонарну точку $X(2,1; 0,1; 1,9)$. Дослідимо її на екстремум.

Для знаходження d^2L запишемо частинні похідні другого порядку функції L .

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 10; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 16; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 12; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = -4; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

$$\text{Тоді } d^2L(X) = 10dx_1^2 + 16dx_2^2 + 12dx_3^2 - 8dx_1dx_2.$$

Диференціюючи рівняння зв'язку (обмеження задачі), знаходимо:

$$\begin{cases} dx_1 + dx_3 = 0, \\ dx_2 - dx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_3 = -dx_1, \\ dx_2 = dx_1. \end{cases}$$

Тому, якщо $dx_1^2 \neq 0$, то із рівнянь зв'язку отримуємо

$$d^2L(X) = 10dx_1^2 + 16dx_1^2 + 12dx_1^2 - 8dx_1^2 = 30dx_1^2 > 0.$$

Таким чином, $X(2,1; 0,1; 1,9)$ – точка умовного мінімуму,

$$F_{\min} = F(2,1; 0,1; 1,9) = 5 \cdot (2,1)^2 + 8 \cdot (0,1)^2 + 6 \cdot (1,9)^2 - 4 \cdot 2,1 \cdot 0,1 + 9 \cdot 2,1 + 7 = \\ = 22,05 + 0,08 + 21,66 - 0,84 + 18,9 + 7 = 68,85.$$

Завдання для самостійної роботи

Графічно розв'язати задачі НЛП:

8.1. $\max (\min) Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

8.2. $\max (\min) Z = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

8.3. $\max (\min) Z = \frac{1}{2} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$

8.4. $\max (\min) Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$8.5. \max(\min)Z = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 8)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язати градієнтним методом задачі нелінійного програмування, починаючи оптимізаційний процес із вказаної точки x_0 і супроводжуючи рішення графічною ілюстрацією:

$$8.6. \min f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2; \quad 8.7. \min f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2;$$

$$x_0 = (1; 3) \quad x_0 = (2; 8)$$

$$8.8. \min f = 4x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20; \quad 8.9. \max f = 10x_1 + 10x_2 - 5x_2^2;$$

$$x_0 = (1; 1) \quad x_0 = (0; 0)$$

$$8.10. \max f = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2;$$

$$x_0 = (2; 3)$$

Розв'язати задачі нелінійного програмування:

$$8.11. \max f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2; \quad 8.12. \max f = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 13;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_0 = (3; 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_0 = (1; 2) \end{cases}$$

$$8.13. \max f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2; \quad 8.14. \max f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_0 = (2; 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ x_0 = (0; 0) \end{cases}$$

Знайти умовні екстремуми функції за даних обмежень:

8.15. $F(x) = -5x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 5x_1 - 9.$

$$x_1 + x_3 = 2; \quad x_3 - x_2 = 5.$$

8.16. $F(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1x_3 - 4x_2 + 5.$

$$x_1 - x_3 = 1; \quad x_2 + x_3 = 2.$$

8.17. $F(x) = -1,5x_1^2 - x_2^2 - x_1 - x_3 - 4 \ln x_1 + 5.$

$$2x_1^2 + x_2^2 = 4; \quad x_1x_3 - x_1 = 4.$$

8.18. $F(x) = 4x_1^2 + 10x_2^2 - 4 \ln x_2 + x_3^2 - \frac{4}{x_2^2} - 8x_2 - 4.$

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 5; \quad 2x_2 + x_2x_3 = 2$$

ГЛАВА 9. ОСНОВИ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Динамічне програмування – це сукупність методів, які становлять математичний апарат для вивчення багатокрокових задач прийняття оптимальних рішень. Термін „багатокрокова задача” характеризує покроковий (поетапний) підхід до її розв’язування. Початок розвитку динамічного програмування відноситься до 50-х років XX сторіччя. Розробка його методів пов’язана з ім’ям американського математика Р. Беллмана.

Якщо моделі лінійного програмування можна використовувати в економіці для прийняття великомасштабних планових рішень у складних ситуаціях, то моделі динамічного програмування використовуються при розв’язуванні задач значно меншого масштабу, наприклад, при розробці принципів календарного планування виробництва і вирівнювання зайнятості за умови коливання попиту на продукцію; при розподілі дефіцитних капіталовкладень між можливими новими напрямками їх використання; при складанні календарних планів поточного і капітального ремонтів складного обладнання та його заміни тощо.

У реально функціонуючих великих економічних системах щотижня треба приймати мікроекономічні рішення. Моделі динамічного програмування саме і цінні тим, що за мінімального втручання людини дозволяють на основі стандартного підходу приймати такі рішення. І якщо кожне окремо взяте рішення малоздійсненне, то в сукупності ці рішення можуть суттєво впливати на прибуток.

Сформулюємо загальну задачу динамічного програмування

Нехай маємо деякий керований процес, наприклад економічний процес розподілу коштів між підприємствами, використання ресурсів протягом ряду років, заміни обладнання, поповнення запасів і т.д. У результаті управління система S переходить із початкового стану s_0 у кінцевий стан s . Припустимо, що управління

можна розбити на n кроків, тобто рішення приймаються послідовно на кожному кроці, а управління, яке переводить систему S із початкового стану в кінцевий, являє собою сукупність n покрокових управлінь.

Позначимо через X_k управління на k -ому кроці ($k = \overline{1, n}$). Змінні X_k задовольняють деяким обмеженням і в цьому розумінні називаються допустимими.

Нехай $X (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – управління, яке переводить систему S зі стану s_0 у стан s . Позначимо s_k стан системи після k -го кроку управління. Отримаємо послідовність станів $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots, s_{n-1}, s_n = s$, яку зобразимо кругами (рис. 9.1)

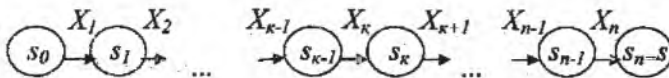


Рис. 9.1

Показник ефективності розглядуваного керованого процесу – цільова функція – залежить від початкового стану і управління:

$$Z = F(s_0, X). \quad (9.1)$$

Зробимо кілька припущень.

1. Стан s_k системи в кінці k -го кроку залежить лише від попереднього стану s_{k-1} і управління на k -ому кроці X_k (і не залежить від станів і управлінь, що передували попереднім). Сформульоване правило записується у вигляді рівнянь:

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (9.2)$$

які називаються рівняннями стану.

2. Цільова функція $Z = F(s_0, X)$ є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності k -го кроку через

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (9.3)$$

тоді

$$Z = \sum_{k=1}^n f_k(s_{k-1}, X_k). \quad (9.4)$$

Задача динамічного програмування (покрокової оптимізації) формулюється так: визначити таке допустиме управління X , що

переводить систему S із стану s_0 у стан s , при якому цільова функція (9.4) приймає найбільше (найменше) значення.

Моделі динамічного програмування мають свої особливості, а саме:

1. Задача оптимізації інтерпретується як n -кроковий процес управління.

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір управління на k -ому кроці залежить від стану системи на цьому кроці, не впливає на попередні кроки (немає оберненого зв'язку).

4. Стан s_k після k -го кроку управління залежить лише від попереднього стану s_{k-1} і управління X_k .

5. На кожному кроці управління X_k залежить від скінченного числа управлінських змінних, а стан s_k – від скінченного числа параметрів.

Слід згадати, що існують різні способи розв'язування подібних задач, які застосовуються залежно від виду функцій, обмежень, розмірності тощо.

Розглянемо обчислювальну схему розв'язування задач динамічного програмування, пов'язану з принципом оптимальності і використання рекурентних співвідношень.

Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 році. Суть його така: яким би не був стан S системи в результаті деякої кількості кроків, на найближчому кроці треба вибирати управління так, щоб воно в сукупності з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до оптимуму на решті кроків, включаючи даний. Беллманом чітко були сформульовані і умови, за яких принцип правильний. Основна вимога – процес управління повинен бути без зворотного зв'язку, тобто управління на даному кроці не повинне впливати на результати попередніх кроків.

Рівняння Беллмана. Замість вихідної задачі динамічного програмування з фіксованою кількістю кроків n і початковим станом s_0 розглянемо послідовність задач, надаючи поступово

$n=1, 2, \dots$ для різних s – однокрокову, двокрокову і т. д., використовуючи принцип оптимальності.

Введемо ряд нових позначень.

На кожному кроці будь-якого стану системи s_{k-1} управління X_k треба вибирати „озираючись”, оскільки цей вибір впливає на наступний стан s_k і подальший процес управління, що залежить від s_k . Це впливає із принципу оптимальності.

Але є один крок, останній, який можна для будь-якого стану s_{n-1} планувати локально-оптимально, виходячи лише із міркувань цього кроку. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок.

Розглянемо n -й крок: s_{n-1} – стан системи на початок n -го кроку, $s_n = s$ – кінцевий стан, X_n – управління на n -ому кроці, а $f_n(s_{n-1}, X_n)$ – цільова функція n -го кроку.

Згідно з принципом оптимальності X_n треба вибирати так, щоб для будь-яких станів: s_{n-1} отримати максимум цільової функції на цьому кроці.

Позначимо через $Z_n^*(s_{n-1})$ максимум цільової функції – показника ефективності n -го кроку за умови, що на початок останнього кроку система S була в довільному стані s_{n-1} , а на останньому кроці управління було оптимальним.

$Z_n^*(s_{n-1})$ називають умовним максимумом цільової функції на n -ому кроці. Зрозуміло, що:

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n) \quad (9.5)$$

Максимізація здійснюється за всіма допустимими управліннями X_n .

Рішення X_n , за якого досягається $Z_n^*(s_{n-1})$, також залежить від стану s_{n-1} і називається умовним оптимальним управлінням на n -ому кроці. Позначатимемо його $X_n^*(s_{n-1})$.

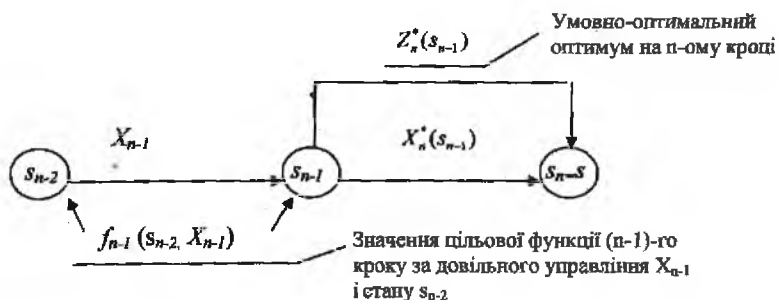


Рис. 9.2

Розв'язавши однокрокову задачу локальної оптимізації, використавши рівняння (9.5), знайдемо для всіх можливих станів s_{n-1} дві функції: $Z_n^*(s_{n-1})$ і $X_n^*(s_{n-1})$.

Розглянемо тепер двокрокову задачу, приєднавши до n -го кроку $(n-1)$ -й крок (рис. 9.2).

Для будь-яких станів s_{n-2} , довільних управлінь X_{n-1} і оптимального управління на n -ому кроці значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}). \quad (9.6)$$

Згідно з принципом оптимальності для будь-яких s_{n-2} рішення треба вибирати так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на останньому n -ому кроці приводило б до максимуму цільової функції на двох останніх кроках. Таким чином, треба знайти максимум виразу (9.6) за всіма допустимими управліннями X_{n-1} . Максимум цієї суми залежить від стану s_{n-2} , позначається через $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ і називається умовним максимумом цільової функції за оптимального управління на двох останніх кроках. Відповідне управління X_{n-1} на $(n-1)$ -ому кроці позначається через $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ і називається умовним оптимальним управлінням на $(n-1)$ -ому кроці:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{ f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}) \} \quad (9.7)$$

Слід звернути увагу на те, що вираз, який стоїть у фігурних дужках (9.7), залежить тільки від s_{n-2} і X_{n-1} , оскільки s_{n-1} можна знайти із рівняння станів (9.2) для $k = n-1$:

$$s_{n-1} = \Phi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1})$$

і підставити замість s_{n-1} у функції $Z_n^*(s_{n-1})$.

У результаті максимізації лише по одній змінній X_{n-1} згідно з рівнянням (9.7) знову одержуємо дві функції:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) \text{ і } X_{n-1}^*(s_{n-2}).$$

Далі розглядається трикрокова задача: до двох останніх кроків приєднується $(n-2)$ -ий і т. д.

Позначимо через $Z_k^*(s_{k-1})$ умовний максимум цільової функції, отриманий за оптимального управління на $n-k+1$ кроках, починаючи з k -го до кінця, за умови, що на початок k -го кроку система перебувала у стані s_{k-1} . Фактично ця функція дорівнює

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{x_k, \dots, x_n\}} \sum_{i=k}^n f_i(s_{i-1}, X_i)$$

Тоді:

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{x_{k+1}, \dots, x_n\}} \sum_{i=k+1}^n f_i(s_{i-1}, X_i)$$

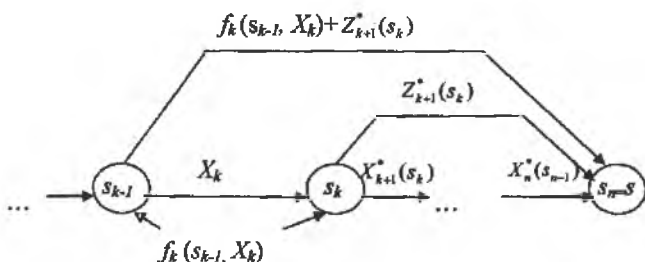


Рис. 9.3

Цільова функція на $n-k$ останніх кроках (рис. 9.3) за довільного управління X_k на k -ому кроці і оптимального управління на наступних $n-k$ кроках дорівнює:

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k).$$

Згідно з принципом оптимальності X_k вибирається із умови максимуму цієї суми, тобто

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\} \quad (9.8)$$

$$k=n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Управління X_k на k -ому кроці, за якого досягається максимум у (9.8), позначається через $X_k^*(s_{k-1})$ і називається умовним оптимальним управлінням на k -ому кроці (у праву частину рівняння (9.8) потрібно замість s_k підставити вираз $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k)$, знайдений із рівнянь стану).

Рівняння (9.8) називають рівняннями Беллмана. Це рекурентне співвідношення, яке дозволяє знайти попередні значення функції, якщо відомі такі. Якщо із (9.5) знайти $Z_n^*(s_{n-1})$, то при $k=n-1$ із (9.8) можна визначити, розв'язавши задачу максимізації для всіх можливих значень s_{n-2} , вирази для $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ і $X_{n-1}^*(s_{n-2})$. Далі, знаючи $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$, знаходимо, використовуючи (9.8) і (9.2), рівняння станів.

Процес розв'язування рівнянь (9.5) і (9.8) називається умовною оптимізацією.

У результаті умовної оптимізації одержуються дві послідовності:

$$Z_n^*(s_{n-1}), Z_{n-1}^*(s_{n-2}), \dots, Z_2^*(s_1), Z_1^*(s_0) -$$

умовні максимуми цільової функції на останньому, на двох останніх, на ... n кроках і

$$X_n^*(s_{n-1}), X_{n-1}^*(s_{n-2}), \dots, X_2^*(s_1), X_1^*(s_0) -$$

умовні оптимальні управління на n -ому, $(n-1)$ -ому, ..., 1-ому кроках.

Використовуючи ці послідовності, можна знайти розв'язок задачі динамічного програмування для даних n і s_0 . Згідно з означенням $Z_1^*(s_0)$ – умовний максимум цільової функції за n кроків за умови, що на початок 1-го кроку система S була в стані s_0 , тобто:

$$Z_{\max} = Z_1^*(s_0). \quad (9.9)$$

Далі слід використати послідовність умовних оптимальних управлінь і рівняння станів (9.2).

Для фіксованого s_0 отримуємо $X_1^* = X_1(s_0)$.

Далі із рівнянь (9.2) знаходимо $s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*)$ і підставляємо цей вираз у послідовність умовних оптимальних управлінь:

$$X_2^* = X_2(s_1^*) \text{ і т. д. по ланцюжку:}$$

$$X_1^* = X_1^*(s_0) \rightarrow s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \Rightarrow X_2^* = X_2^*(s_1^*) \rightarrow s_2^* = \varphi_2(s_1^*, X_2^*) \Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \rightarrow \dots \rightarrow s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*).$$

Отримуємо оптимальний розв'язок задачі динамічного програмування:

$$X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*).$$

(Стрілка $\rightarrow$ означає використання рівнянь стану, стрілка $\Rightarrow$ – послідовності умовних оптимальних управлінь).

Розглянемо запропоновану вище схему на конкретній задачі про розподіл коштів між підприємствами.

Приклад 9.1. Власник планує діяльність чотирьох промислових підприємств (системи) на наступний рік. Початкові кошти: $s_0 = 5$ ум. од. Кожне підприємство може одержати суму, кратну 1 ум. од. Кошти x , вкладені в k -те підприємство ($k=1, 2, 3, 4$), дають у кінці року прибуток $f_k(x)$. Функції $f_k(x)$ задані таблицею (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Прийнято вважати, що:

- прибуток $f_k(x)$ не залежить від вкладення коштів в інші підприємства;

- прибуток від кожного підприємства визначається в однакових умовних одиницях;

- загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від кожного підприємства.

Визначити, яку кількість коштів треба вкласти в кожне підприємство, щоб загальний прибуток був максимальним.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_k – кількість коштів, вкладених у k -те підприємство ($k=1, 2, 3, 4$).

Загальний прибуток дорівнює:

$$Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) = \sum_{k=1}^4 f_k(x_k). \quad (9.10)$$

Невідомі x задовольняють обмеження:

$$\sum_{k=1}^4 x_k = 5, \\ x_k \geq 0, k = \overline{1, 4}. \quad (9.11)$$

Треба знайти невідомі x_1, x_2, x_3, x_4 , що задовольняють систему обмежень (9.11) і перетворюють у максимум функцію (9.10).

Особливості моделі. Обмеження лінійні, але невідомі цілочислові, а функції $f_k(x_k)$ задані таблицею, тому не можна застосувати методи цілочислового лінійного програмування.

Алгоритм розв'язування задачі методом динамічного програмування має такий вигляд: процес вирішення розподілу коштів $s_0 = 5$ можна розглядати як 4-кроковий, номер кроку збігається з номером підприємства; невідомі x_1, x_2, x_3, x_4 – управління відповідно на I, II, III, IV кроках. s – кінцевий стан процесу розподілу коштів – рівний нулю, оскільки всі кошти повинні бути вкладені у виробництво, $s=0$. Схема розподілу подана на рис. 9.4.

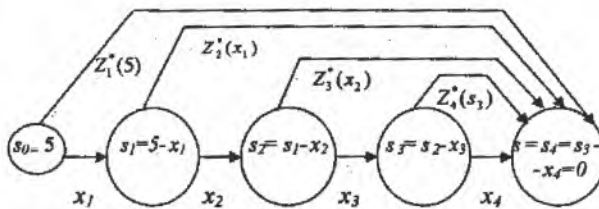


Рис. 9.4

Рівняння станів для даної задачі мають вигляд:

$$s_k = s_{k-1} - x_k, k = 1, 2, 3, 4, \quad (9.12)$$

де s_k – параметр стану – сума коштів, які залишились після k -го кроку, тобто кошти, які треба розподілити між 4- k підприємствами, що залишились.

Введемо до розгляду функцію $Z_k^*(s_{k-1})$ – умовний оптимальний прибуток, отриманий від k -го, $(k+1)$ -го, ..., 4-го підприємств, якщо між ними розподілялися оптимальним чином кошти s_{k-1} ($0 \leq s_{k-1} \leq 5$). Допустимі управління на k -ому кроці задовольняють умову: $0 \leq x_k \leq s_{k-1}$ (або k -ому підприємству нічого не виділяється, $x_k=0$, або не більше того, що маємо до k -го кроку, $x_k \leq s_{k-1}$).

Рівняння (9.5) і (9.8) мають вигляд:

$$k = 4, s_4 = 0 \Rightarrow Z_4^*(s_3) = \max f_4(x_4), \quad (a)$$

$$0 \leq x_4 \leq s_3$$

$$Z_3^*(s_2) = \max \{f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)\}, \quad (б)$$

$$0 \leq x_3 \leq s_2$$

$$Z_2^*(s_1) = \max \{f_2(x_2) + Z_3^*(s_2)\}, \quad (в)$$

$$0 \leq x_2 \leq s_1$$

$$Z_1^*(5) = \max \{f_1(x_1) + Z_2^*(s_1)\}, \quad (г)$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

Послідовно розв'язуємо записані рівняння, здійснюючи умовну оптимізацію (див. рис. 9.4) кожного кроку.

IV крок. У таблиці 9.1 прибутки $f_4(x)$ монотонно зростають, тому всі кошти, які залишилися на початок 4-го кроку, треба вкласти у 4-е підприємство. При цьому для можливих значень $s_3=0, 1, 2, 3, 4, 5$ отримаємо:

$$Z_4^*(s_3) = f_4(s_3) \text{ і } x_4^*(s_3) = s_3.$$

III крок. Робимо всі припущення відносно залишку коштів s_2 на початок 3-го кроку (тобто після вибору x_1 та x_2). s_2 може приймати значення 0,1,2,3,4,5 (наприклад, $s_2=0$, якщо всі кошти вкладені у 1-ше і 2-ге підприємства, $s_2=5$, якщо 1-ше і 2-ге підприємства нічого не отримали, і т. д.). Залежно від цього вибираємо $0 \leq x_3 \leq s_2$, знаходимо $s_3 = s_2 - x_3$ і порівнюємо для різних x_3 при фіксованому s_2 значення суми $f_3(x_3) + Z_4^*(x_3)$. Для кожного s_2 найбільше із цих значень є $Z_3^*(s_2)$ – умовний оптимальний прибуток, одержаний за оптимального розподілу коштів s_2 між 3-ім і 4-им підприємствами. Оптимізація подана в таблиці 9.2 для $k=3$. Для кожного значення s_2 значення $Z_3^*(s_2)$ та $X_3^*(s_2)$ вказані у стовпцях 5 і 6 відповідно.

II крок. Умовна оптимізація, відповідно до рівняння (в), здійснена у табл. 9.2 для $k=2$. Для всіх можливих значень s_1 значення $Z_2^*(s_1)$ та $X_2^*(s_1)$ знаходяться у стовпцях 8 і 9 відповідно; перші доданки у стовпчику 7 – значення $f_2(x_2)$, взяті із табл. 9.1, а другі доданки взяті із стовпчика 5 табл. 9.2 для $s_2 = s_1 - x_2$.

I крок. Умовна оптимізація, відповідно до рівняння (є), здійснена у табл. 9.2 при $k=1$ для $s_0=5$ (на першому кроці умовної оптимізації досить заповнити розділ таблиці, який відповідає $s_0=5$). Розглянемо розв'язання детально: якщо $x_1=0$ то $s_1=5$, прибуток, отриманий від чотирьох підприємств за умови, що $s_1=5$ од. коштів між трьома підприємствами, які залишилися, будуть розподілені оптимально, дорівнює $f_1(0) + Z_2^*(5) = 0 + 19 = 19$ ($Z_2^*(5)$ взято із стовпчика 8 табл. 9.2 для $s_1=5$). Якщо $x_1=1$, то $s_2=4$. Загальний прибуток за умови, що $s_2=4$ од. коштів між трьома підприємствами, які залишилися, будуть розподілені оптимально, дорівнює

$f_1(1) + Z_2^*(4) = 8 + 16 = \underline{24}$ ($f_1(1)$ взято із таблиці 9.1, а $Z_2^*(4)$ – із стовпчика 8 табл. 9.2). Аналогічно, якщо $x_1 = 2$, то $s_2 = 3$ і $f_1(2) + Z_2^*(3) = 10 + 13 = \underline{23}$;

якщо $x_1 = 3$, то $s_2 = 2$ і $f_1(3) + Z_2^*(2) = 11 + 10 = \underline{21}$;

якщо $x_1 = 4$, то $s_2 = 1$ і $f_1(4) + Z_2^*(1) = 12 + 6 = \underline{18}$;

якщо $x_1 = 5$, то $s_2 = 0$ і $f_1(5) + Z_2^*(0) = 18 + 0 = \underline{18}$.

Таблиця 9.2

s_1	x_1^*	s_1^*	k=3			k=2			k=1		
			$f_3(x_3) + Z_3^*(s_3)$	$Z_3(s_3)$	$x_3^*(s_3)$	$f_2(x_2) + Z_2^*(s_2)$	$Z_2(s_2)$	$x_2^*(s_2)$	$f_1(x_1) + Z_1^*(s_1)$	$Z_1(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+1=1 3+0=3	4	0	0+4=4 6+0=6	6	1	0+6=6 8+0=8	8	1
	1	0									
2	0	2	0+6=6			0+7=7			0+10=10		
	1	1	3+4=7	7	1	6+4=10	10	1	8+6=14	14	1
	2	0	4+0=4			9+0=9			10+0=10		
3	0	3	0+8=8			0+9=9			0+13=13		
	1	2	3+6=9			6+7=13			8+10=18		
	2	1	4+4=8	9	1	9+4=13	13	1	10+6=16	18	1
	3	0	7+0=7			11+0=11			11+0=11		
4	0	4	0+13=13			0+13=13			0+16=16		
	1	3	3+8=11			6+9=15			8+13=21		
	2	2	4+6=10	13	0	9+7=16	16	2	10+10=20	21	1
	3	1	7+4=11			11+4=15			11+6=17		
5	4	0	11+0=11			13+0=13			12+0=12		
	0	5	0+16=16			0+18=18			0+19=19		
	1	4	3+13=16			6+13=19			8+16=24		
	2	3	4+8=12			9+9=18			10+13=23		
	3	2	7+6=13	18	5	11+7=18	19	1	11+10=21	24	1
	4	1	11+4=15			13+4=17			12+6=18		
	5	0	18+0=18			15+0=15			18+0=18		

Порівнюючи підкреслені числа, маємо:

$$Z_{\max} = Z_1^*(5) = 24 \text{ ум. од. для } x_1^* = x_1^*(5) = 1.$$

Використовуючи рівняння (9.12), отримаємо $s_1^* = 5 - 1 = 4$, а за табл. 9.2 в стовпчику 9 знаходимо $x_2^* = x_2^*(4) = 2$. Далі знаходимо

$s_2^* = 4 - 2 = 2$, а за табл. 9.2 у стовпчику 6 маємо $x_3^* = x_3^*(2) = 1$. На кінець, $s_3^* = 2 - 1 = 1$ і $x_4^* = x_4^*(1) = 1$, тобто $X^* = (1; 2; 1; 1)$.

Таким чином, максимум загального прибутку дорівнює 24 ум. од. коштів за умови, що 1-ому підприємству виділено 1 ум. од.; 2-ому підприємству – 2 ум. од.; 3-ому підприємству – 1 ум. од.; 4-ому підприємству – 1 ум. од.

Зауваження 1. Розв'язання чотирьохмірної задачі 9.1 на знаходження умовного екстремуму звелось фактично до розв'язання чотирьох одномірних задач: на кожному кроці визначалася одна невідома x .

Зауваження 2. Із розглянутої задачі 9.1 видно, що метод динамічного програмування не залежить від виду і способу завдання функції: $f_i(x)$ були задані таблицею, тому $Z_i^*(s)$ і $X_i^*(s)$ приймали дискретні значення, подані у таблиці 9.2.

Задача про оптимальне розміщення виробничих підприємств

Задача про оптимальне розміщення виробничих підприємств може бути зведена до задачі про оптимальний розподіл обмежених ресурсів згідно з критерієм мінімізації із урахуванням умов цілочисельності, що накладаються на змінні.

Нехай маємо потребу в деякій продукції, що користується попитом на визначеній території. Відомі місця, в яких можна побудувати підприємства, що виготовляють цю продукцію, а також витрати на будівництво та експлуатацію таких виробничих підприємств.

Визначити план розміщення підприємств так, щоб витрати, пов'язані з їх будівництвом та експлуатацією, були мінімальними.

Введемо позначення:

x – кількість розподіленого ресурсу (підприємств), яку можна використовувати n різними способами;

x_i – кількість ресурсу, що використовується за i -м способом;

$q_i(x_i)$ – функція витрат при використанні ресурсу x_i за i -м способом.

Введемо функцію $f_k(x)$ – найменші витрати, які можна за-
тратити при використанні ресурсу x першими k способами.

Математична модель задачі про розміщення виробничих під-
приємств має вигляд:

$$f_n(x) = q_1(x_1) + q_2(x_2) + \dots + q_n(x_n) \rightarrow \min$$

за умов

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Економічний зміст змінних x_i полягає у знаходженні такої
кількості підприємств, які рекомендовані для будівництва в i -му
місці. Вважатимемо, що планується будівництво підприємств од-
накової потужності.

Розглянемо конкретну задачу про оптимальне розміщення
підприємств.

Приклад 9.2. У трьох областях необхідно побудувати п'ять
підприємств із переробки сільськогосподарської продукції одна-
кової потужності. Визначити розміщення підприємств так, щоб
забезпечити мінімальні загальні витрати, пов'язані з їх будівниц-
твом та експлуатацією. Функція витрат $q_i(x)$ (млн грн), що ха-
рактеризує величину витрат на будівництво та експлуатацію залеж-
но від кількості розміщених підприємств в i -області, наведена у
табл. 9.3.

Таблиця 9.3

x	1	2	3	4	5
q_1	8	14	22	29	34
q_2	10	17	18	27	31
q_3	11	16	15	26	31

Розв'язання

Розв'язок задачі знаходимо за три кроки по кількості обла-
стей, у яких планується розмістити підприємства, при цьому ви-
користовуючи рекурентні співвідношення:

для першої області:

$$f_1(x) = \min_{0 \leq x_1 \leq x} q_1(x_1) = q_1(x),$$

для інших областей:

$$f_k(x) = \min_{0 \leq x_k \leq x} \{q_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}$$

Якщо підприємства побудувати тільки в одній області ($k = 1$), то значення $f_1(x)$ при $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ такі:

$$x = 0 \quad f_1(0) = q_1(0) = 0, \quad x_1^0 = 0;$$

$$x = 1 \quad f_1(1) = q_1(1) = 8, \quad x_1^0 = 1;$$

$$x = 2 \quad f_1(2) = q_1(2) = 14, \quad x_1^0 = 2;$$

$$x = 3 \quad f_1(3) = q_1(3) = 22, \quad x_1^0 = 3;$$

$$x = 4 \quad f_1(4) = q_1(4) = 29, \quad x_1^0 = 4;$$

$$x = 5 \quad f_1(5) = q_1(5) = 34, \quad x_1^0 = 5.$$

Отримані результати і знайдені умовно оптимальні розв'язки запишемо у табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Кількість підприємств, що розміщені в одній області	$f_1(x)$	Умовно оптимальні стратегії x_1^0 розміщення підприємств у 1-й області
0	0	
1	8	1
2*	14	2*
3	22	3
4	29	4
5	34	5

Визначимо умовно оптимальні стратегії розміщення підприємств тільки у перших двох областях ($k=2$) за формулою:

$$f_2(x) = \min_{0 \leq x_2 \leq x} \{q_2(x_2) + f_1(x - x_2)\},$$

де $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Обчислимо значення $f_2(x)$, використовуючи дані табл. 9.3 і 9.4 при:

$$x = 0 \quad f_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 0;$$

$$x = 1 \quad f_2(1) = \min_{0 \leq x_2 \leq 1} \begin{Bmatrix} 0 + 8 \\ 10 + 0 \end{Bmatrix} = 8, \quad x_2^0 = 0;$$

$$x = 2 \quad f_2(2) = \min_{0 \leq x_2 \leq 2} \begin{Bmatrix} 0 + 14 \\ 10 + 8 \\ 17 + 0 \end{Bmatrix} = 14, \quad x_2^0 = 0;$$

$$x = 3 \quad f_2(3) = \min_{0 \leq x_2 \leq 3} \begin{Bmatrix} 0 + 22 \\ 10 + 14 \\ 17 + 8 \\ 18 + 0 \end{Bmatrix} = 18, \quad x_2^0 = 3;$$

$$x = 4 \quad f_2(4) = \min_{0 \leq x_2 \leq 4} \begin{Bmatrix} 0 + 29 \\ 10 + 22 \\ 17 + 14 \\ 18 + 8 \\ 27 + 0 \end{Bmatrix} = 26, \quad x_2^0 = 3;$$

$$x = 5 \quad f_2(5) = \min_{0 \leq x_2 \leq 5} \begin{Bmatrix} 0 + 34 \\ 10 + 29 \\ 17 + 22 \\ 18 + 14 \\ 27 + 8 \\ 31 + 0 \end{Bmatrix} = 31, \quad x_2^0 = 5.$$

Результати обчислень і отримані відповідні умовно оптимальні стратегії щодо розміщення підприємств запишемо у табл. 9.5.

Таблиця 9.5

Кількість підприємств, що розміщені в двох областях	$f_2(x)$	Умовно оптимальні стратегії x_2^0 розміщення підприємств у II-й області
0	0	0
1	8	0
2*	14	0*
3	18	3
4	26	3
5	31	5

Знайдемо оптимальну стратегію розміщення п'яти підприємств у трьох областях ($k=3$) за формулою:

$$f_3(x) = \min_{0 \leq x_3 \leq x} \{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\},$$

використовуючи для цього вихідні дані табл. 9.3 і 9.4:

$$f_3(5) = \min_{0 \leq x_3 \leq 5} \begin{Bmatrix} 0+31 \\ 11+26 \\ 16+18 \\ 15+14 \\ 26+8 \\ 31+0 \end{Bmatrix} = 29, \quad x_2^0 = 3.$$

Отже, мінімальні загальні витрати, пов'язані із розміщенням п'яти підприємств у трьох областях, становлять 29 млн грн. Оптимальний план розміщення підприємств визначаємо так: у III області слід побудувати та експлуатувати 3 підприємства, а у I і II областях – 2 підприємства ($5-3=2$). Тоді, як видно із табл. 9.5, у II області об'єктів не будуємо, а з табл. 9.4 у I області будуємо 2 підприємства.

Таким чином, оптимальна стратегія полягає у будівництві двох підприємств I області та трьох підприємств у III області, при цьому мінімальні загальні витрати на будівництво й експлуатацію дорівнюють 29 млн грн.

Завдання для самостійної роботи

9.1.–9.3. До початку планового періоду на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його роботи, а також витрати на утримання і ремонт при різному часі його використання наведено у таблицях 9.6–9.8.

Відомо, що витрати, пов'язані з купівлею і встановленням нового обладнання, ідентичного наявному, становлять p тис. грн, а обладнання, що підлягає заміні, списується. Визначити план заміни обладнання протягом I років, при якому загальний прибуток за даний період часу буде найбільшим.

Таблиця 9.6

Характеристика обладнання	Час t , протягом якого використовується обладнання, роки					
	0	1	2	3	4	5
Річний обсяг виготовлення продукції, тис. грн	30	30	24	21	19	16
Щорічні витрати на утримання і ремонт обладнання, тис. грн	11	12	12	13	13	13

$$p = 14 \text{ тис. грн}$$

Таблиця 9.7

Характеристика обладнання	Час t , протягом якого використовується обладнання, роки						
	0	1	2	3	4	5	6
Річний обсяг виготовлення продукції, тис. грн	24	24	22	21	20	20	19
Щорічні витрати на утримання і ремонт обладнання, тис. грн	15	15	16	16	17	18	18

$$p = 9 \text{ тис. грн}$$

Таблиця 9.8

Характеристика обладнання	Час t , протягом якого використовується обладнання, роки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Річний обсяг виготовлення продукції, тис. грн	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Щорічні витрати на утримання і ремонт обладнання, тис. грн	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

$$P = 10 \text{ тис. грн}$$

9.4. Знайти оптимальний розподіл 4 млн грн між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного обсягу в кожне підприємство, поданий у таблиці 9.9.

Таблиця 9.9

Вкладені кошти, млн грн	Приріст випуску продукції, млн грн		
	Підприємство 1	Підприємство 2	Підприємство 3
0	0	0	0
1	0,33	0,32	0,34
2	0,52	0,50	0,51
3	0,77	0,74	0,81
4	0,91	0,90	0,88

9.5. Торговельне підприємство має 5 автолавок, які мають бути відправлені у вихідний день у 3 населені пункти. Вважається, що товарообіг підприємства залежить лише від кількості й асортименту товарів і визначається кількістю відправлених у той чи інший населений пункт машин. Середнє значення товарообігу в тис. грн у кожному із населених пунктів наведено у таблиці 9.10.

Таблиця 9.10

Кількість автолавок	Товарообіг у населених пунктах, тис. грн		
	Підприємство I	Підприємство II	Підприємство III
1	15	12	18
2	24	20	23
3	30	31	29
4	37	38	36
5	41	42	39

Визначити оптимальну стратегію підприємства у розподілі автолавок у населені пункти за умови максимізації загального товарообігу.

9.6. У табл. 9.11 вказано можливий приріст виготовлення продукції чотирма плодово-консервними заводами області у млн грн при вкладанні інвестицій на їх модернізацію із дискретністю 50 млн грн, причому на один завод можна здійснити тільки одну інвестицію.

Таблиця 9.11

Інвестиції, млн грн	Приріст виготовлення продукції, млн грн			
	Завод 1	Завод 2	Завод 3	Завод 4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Визначити оптимальну стратегію розподілу інвестицій між заводами області, що максимізує загальний приріст виготовлення продукції.

9.7–9.9. У трьох районах міста підприємець планує будівництво чотирьох однакових за площею крамниць “Продукти”. Відомі місця, в яких їх можна побудувати. Витрати $q_i(x)$ (млн грн) на їх будівництво й експлуатацію подано у табл. 9.12–9.14.

Визначити план розміщення крамниць у районах так, щоб забезпечити мінімальні загальні витрати на їх будівництво та експлуатацію.

Таблиця 9.12

X	1	2	3	4
$q_1(x)$	22	35	47	61
$q_2(x)$	20	37	46	58
$q_3(x)$	23	36	50	59

Таблиця 9.13

X	1	2	3	4
$q_1(x)$	10	21	32	45
$q_2(x)$	8	22	30	46
$q_3(x)$	9	20	31	44

Таблиця 9.14

X	1	2	3	4
$q_1(x)$	8	13	21	28
$q_2(x)$	9	14	20	27
$q_3(x)$	7	15	22	30

9.10. У трьох областях необхідно побудувати п'ять підприємств однакової потужності з виготовлення хлібобулочних виробів. Визначити розміщення підприємств так, щоб забезпечити мінімальні загальні витрати на їх будівництво та експлуатацію, якщо значення функції витрат $q_i(x)$ (млн грн) наведено у табл. 9.15.

Таблиця 9.15

X	1	2	3	4	5
$q_1(x)$	11	18	35	51	76
$q_2(x)$	10	19	34	53	75
$q_3(x)$	9	20	36	54	74

ГЛАВА 10. МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Предмет стохастичного програмування

Задачі та моделі, в яких вихідна інформація задана строго однозначно, називають детермінованими. Насправді детерміновані моделі є неадекватними модельованим економічним процесам. Це пояснюється неповнотою, неточністю даних, на основі яких формується модель, оскільки в реальних умовах економічні системи функціонують і розвиваються в умовах невизначеності, які зумовлюють ризикованість рішень, що приймаються. Невизначеність залежно від наявної інформації про досліджуваний процес чи явище може бути різною. У випадку, коли невизначеність щодо параметрів системи (процесу, що притаманний системі, чи явища, що характерне системі) характеризується їх заданим законом розподілу для прийняття рішень, то застосовують методи стохастичного програмування.

Стохастичне програмування – це розділ математичного програмування, предметом вивчення якого є умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов чи їх частина або складові розв'язку чи їх частина є випадковими величинами.

Так, зокрема, у стохастичних задачах їх розв'язок може бути представлений сукупністю керованих змінних $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, які залежать не лише від детермінованих характеристик чи параметрів задачі, а і від ряду випадкових некерованих параметрів $w = (w_1; w_2; \dots; w_k)$. Оскільки стохастичні задачі доводиться розв'язувати при недостатній інформації, то це веде до зниження економічної ефективності отриманих рішень.

Прикладом стохастичної задачі такого типу є задача планування діяльності сільськогосподарського підприємства. Розв'язком, або сукупністю керованих змінних, може виступати площа посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин тощо. У ролі випадкових некерованих параметрів, що значною мірою впливають на результат діяльності сільськогосподарського підприємства, можуть виступати погодні умови,

податки, вартість паливо-мастильних матеріалів, процентна ставка кредиту тощо.

Розрізняють активне та пасивне стохастичне програмування. Пасивне стохастичне програмування – це сукупність прийомів, які дозволяють знаходити найкращі рішення і екстремальні значення цільових функцій в оптимізаційних задачах з випадковими вихідними даними. Активне стохастичне програмування – це сукупність прийомів, які дозволяють розвивати методи вибору рішень в умовах ризику та невизначеності.

У стохастичному програмуванні досліджуються одноетапні, двоетапні та багатоетапні задачі.

Одноетапними називають задачі, в яких послідовність надходження вихідної інформації не має значення при виборі рішення. Воно приймається один раз і надалі не коригується.

Двоетапні стохастичні задачі виникають, наприклад, при плануванні випуску продукції у випадку, коли відсутні дані про попит на неї. У такій ситуації спочатку приймається рішення про обсяг випуску на основі наявної інформації з попереднього досвіду (1-й етап), а після встановлення попиту приймається коригуюче рішення (2-й етап). При цьому попереднє рішення не повинне виключати можливості його корекції на другому етапі. Крім того, попередній і коригуючий плани узгоджують так, щоб забезпечувалися мінімальні середні витрати за два етапи.

У багатоетапних задачах у міру отримання інформації є можливість неодноразово коригувати рішення.

В умовах обмеженої інформації та невизначеності управлінські рішення можуть прийматися або без використання кількісних значень ймовірностей, або з їх використанням.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, чималі труднощі виникають не лише під час розробки методів розв'язування задач, а й під час постановки останніх. Адже в постановці кожної задачі мають бути відображені особливості прийняття рішень в умовах невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її мети та інформації, що є в наявності.

Постановка задач стохастичного програмування і методи їх розв'язування

При постановці задачі стохастичного програмування специфічними моментами є такі.

1. Важливо, яким є вектор-розв'язок задачі X – детермінованим чи випадковим. Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо він випадковий, то $x(w)$ залежить від випадкових параметрів.

2. Істотним є те, як розуміти оптимізацію цільової функції – як абсолютну (для всіх значень $w \in \Omega$) чи як оптимізацію її математичного сподівання, або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або мінімізацію середньоквадратичного відхилення (Ω – простір подій w).

3. Слід з'ясувати, як виконуються обмеження задачі – абсолютно для всіх $w \in \Omega$ чи в середньому або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала.

4. У постановці задач СП слід брати до уваги не лише математичні закономірності, а й економічний зміст та евристичні міркування.

Детермінованість чи стохастичність вектора X визначається сутністю економічних, технологічних або інших процесів, які описуються в задачі стохастичного програмування. Так, для наведеного вище прикладу, зокрема, детермінованою є площа посівів сільськогосподарських культур, а стохастичним – обсяг кредитів, оскільки напевне невідомо, чи будуть вони отримані.

У стохастичному програмуванні важливим є вибір цільової функції, яка визначає ефективність функціонування й розвитку економічної системи. Цільовою функцією можна прийняти:

- максимізацію математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рентабельності тощо);
- мінімізацію дисперсії відповідного економічного показника;
- лінійну комбінацію математичного сподівання та дисперсії економічного показника;
- ймовірність перевищення (або не перевищення) економічним показником певного фіксованого порогу;
- максимізацію математичного сподівання функції корисності;
- тощо.

У стохастичному програмуванні підвищується важливість багатокритеріальної оптимізації.

Обмеження у стохастичних економіко-математичних моделях можуть задаватися різними способами, а отже, відповідні оптимальні плани матимуть різний рівень гарантії їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічні процеси), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попит на вироблену продукцію, податки тощо).

Нехай задано обмеження в загальному вигляді:

$$g_i(X; w) \leq 0 \quad (i = \overline{1; m}).$$

Неможливо, а іноді й недоцільно вимагати, щоб знайдений розв'язок задовольняв задане обмеження за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $w \in \Omega$. З огляду на це можна накласти дещо менш суворі обмеження. Зокрема, замість заданого вище обмеження можна припустити невиконання або виконання умов з певною ймовірністю. Відповідно:

$$\begin{aligned} P\{g_i(X; w) \geq 0\} &\leq \gamma \quad (i = \overline{1; m}) \\ P\{g_i(X; w) \leq 0\} &\geq 1 - \gamma \quad (i = \overline{1; m}). \end{aligned}$$

Аналогічно модифікують і цільову функцію.

Нехай $f(X; w)$ функція, яка виражає ефективність плану при заданих X та w . Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X при випадкових параметрах w можна сформулювати в таких варіантах:

1. Знайти

$$M(f(X; w)) \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{aligned} P\{g_i(X; w) \leq 0\} &\geq 1 - \gamma \quad (i = \overline{1; m}) \\ X &\in X, \quad w \in \Omega \end{aligned}$$

2. Знайти:

$$\xi \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{aligned} P\{f(X; w) \geq \xi, g_i(X; w) \leq 0\} &\geq 1 - \gamma \quad (i = \overline{1; m}), \\ X &\in X, \quad w \in \Omega. \end{aligned}$$

Отже, при постановці задачі варіанта 1 необхідно максимізувати середню очікувану ефективність за умов, що обмеження виконуються з ймовірністю $1-\gamma$. При постановці задачі варіанта 2 додатково вимагається, щоб значення функції ефективності було не меншим за ξ з ймовірністю $1-\gamma$, а значення ξ було максимальним. Зауважимо, що варіант 1 простіший у обчислювальному аспекті.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень на підставі певних спостережень уточнювати стан економічного середовища (природи).

Для економічних систем розробляють стратегічні і тактичні плани. У стратегічних планах ураховують усі можливі значення w , тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища. Тоді рішення приймають щодо траєкторії розвитку системи.

Проте в певний момент часу в результаті спостереження стан економічного середовища стає відомим. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення (розв'язок) $X(w)$ при заданому $w \in \Omega$, розв'язуючи таку задачу.

Знайти:

$$f(X; w) \rightarrow \max$$

за умов

$$g_i(X; w) \leq 0 \quad (i = \overline{1; m})$$

$$X \in X.$$

У загальному випадку спостереження не повністю визначають стан економічного середовища, а тому етапи вибору рішень (розв'язків) можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Тобто відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень.

Послідовність рішень називають N-етапною, якщо в ній слово "рішення" зустрічається N разів.

Отже, процес прийняття рішень розвитку та функціонування економічної системи складається з програмної (стратегічний план) і адаптивної (тактичний план) частин. Можливість плану адаптуватися до постійної зміни умов його реалізації – необхідна умова ефективного розвитку та функціонування економічних систем.

Програмну (стратегічну) та адаптивну (тактичну) частини плану поєднують згідно з такими принципами:

- план-програму обирають так, щоб максимізувати сподівану корисність з урахуванням майбутньої адаптації до кожної ситуації;

- план-адаптація має бути найефективнішим для кожної реалізації економічної ситуації зі збереженням стратегії розвитку системи;

- план-програму (стратегію) можна коригувати з урахуванням можливих майбутніх ситуацій зовнішнього і внутрішнього середовищ.

Якщо в ролі критерію оптимальності використовується максимізація математичного сподівання $M(f(X; w))$, то план задачі називають М-планом. Прикладом М-плану, зокрема, може слугувати план задачі. Якщо в ролі критерію оптимальності використовується мінімізація дисперсії $D(f(X; w))$, то план задачі називають D-планом.

Іноді доцільно за критерій оптимальності приймати різницю:

$$M(f(X; w)) - KD(f(X; w)),$$

де K – відомий параметр.

Можливі й інші варіанти побудови критерію оптимізації.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи – прямі та непрямі.

Прямі методи застосовуються для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X; w)$ і $g_i(X; w)$ ($i = \overline{1, m}$) на базі інформації щодо параметра w .

У непрямих методах стохастичну задачу намагаються звести до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто розглядається детермінований аналог задачі стохастичного програмування.

Приклади стохастичних економічних задач

Приклад 10.1. Нехай потрібно зробити запас з p товарів у кількості $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, на які є випадковий попит

$\omega = (\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n)$. Нестача одиниці j -го товару, де $j = \overline{1, n}$ карається штрафом C_j , а витрати на зберігання одиниці відповідної продукції, яку не вдалося збути, задаються вектором:

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Сформулюйте економіко-математичну модель задачі, прийнявши за критерій оптимальності мінімізацію функції збитків.

Розв'язання

Функція збитків, що відповідає розв'язку x , має вигляд:

$$f(x, \omega) = \sum_{j=1}^n \{C_j \max(0, \omega_j - x_j) + d_j \max(0, x_j - \omega_j)\}$$

Тут $C_j \max(0, \omega_j - x_j)$ – штраф за незадоволення попиту щодо j -го виду продукції; $d_j \max(0, x_j - \omega_j)$ – витрати на зберігання j -ї продукції. Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі необхідно знати функцію розподілу випадкової величини ω . Коли така функція розподілу невідома і знайти її неможливо, вважають, що випадкова величина розподілена рівномірно. При цьому необхідно пам'ятати, що саме таке припущення може призвести до неправильного прийняття рішення.

Приклад 10.2. Будь-які особи можуть тримати своє багатство у вигляді грошей та облігацій. Гроші – це актив, що використовується як засіб обігу, не приносячи процентів. Облігації – цінні папери, що дають певний процент. Логічно, здавалося б, що таким особам вигідно зберігати своє багатство у вигляді облігацій. Проте це не так, оскільки процент і ринкова вартість облігацій наперед точно не відомі, тобто існує невизначеність.

Розв'язання

Нехай S – розмір активу, а x і y – розміри активів, які зберігаються відповідно у формі грошей та облігацій. Вважаємо, що через рік активи, вкладені в облігації, змінюються. За решти однакових умов облігацію, яка приносить більший процент прибутку на ринках цінних паперів, можна збути за більшу суму, ніж облігацію з меншим процентом. Позначимо ξ та η розміри активів, які реалізуються через рік на одиницю активів, збережених відповідно у формі грошей та вкладених в облігації. Значення $\xi = 1$, а η є випадковою величиною. Економіко-математична модель

найбільш пріоритетного розподілу активу на гроші та облігації полягає в максимізації сподіваної корисності:

$$F(x, y) = M(x + \eta y) \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{aligned} x + y &\leq S, \\ x &\geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що коли $M\eta > 1$, то активи потрібно вкладати в облігації та навпаки. Отже, питання щодо розподілу активу між грошми та облігаціями повністю вирішується на користь одного з цих видів заощаджень. Якщо $M\eta = 1$, то однаково, який спосіб заощадження буде використано.

Приклад 10.3. Відомо, що в комерційних банках нараховується більший процент на вкладені суми порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати меншу, але гарантовану суму, або більшу, проте з ризиком втрати внеску. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок до ощадного банку.

Розв'язання

Нехай S – загальна сума грошових коштів певного власника; x – обсяг внеску до ощадного банку, y – до комерційного; a , b – процент нарахування відповідно в ощадному та комерційному банку; $(1-p)$ – імовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку. Джерелом невизначеності є повернення вкладу з комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання дивідендів:

$ax+by$ – за умов успішного функціонування комерційного банку;
 $ax-y$ – у протилежному випадку.

Економіко-математична модель набирає вигляду:

$$F(x, y) = [(1-p)(ax - y) + p(ax + by)] \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{aligned} x + y &\leq S, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Приклад 10.4. Оцінити доцільність страхування, коли особа (клієнт) бажає застрахувати певну частину свого активу і сплачує

для цього певний внесок страховій компанії, а у разі втрати активу одержує від неї страхову винагороду. Визначити частку активу, яку доцільно застрахувати.

Розв'язання

Нехай S – актив (капітал, майно тощо), власником якого є певна особа. Частку, що її бажано застрахувати, позначимо x . Страховий внесок, який сплачується страховій компанії, дорівнює gx , а в разі втрати активу клієнт одержує винагороду qx . Коли відома ймовірність p недоторканості активу клієнта, то економіко-математична модель визначення частки страхового активу набирає вигляду:

$$F(x) = [p(S + gx) + (1 - p)qx] \rightarrow \max, \\ 0 \leq x \leq S.$$

Тут легко врахувати також обсяги дивідендів.

Така модель може бути корисною для страхових компаній у разі визначення доцільних розмірів страхових внесків та страхових винагород, які зацікавили б клієнтів і були вигідними самій компанії.

Приклад 10.5. У буряко-цукровому комплексі мають S коштів, які необхідно розподілити між розширенням сировинної бази і збільшенням потужностей з її переробки. Потрібно так спланувати розподіл коштів, щоб отримати найбільшу кількість цукру. При цьому урожайність цукрових буряків вважається випадковою величиною ξ .

Розв'язання

Нехай q_1 – питомі витрати коштів на вирощування цукрового буряку на одному гектарі; q_2 – питомі приведені витрати на створення одиниці потужності; d – частка виходу цукру з одиниці сировини; x – планова площа під цукровим буряком; y – планова потужність цукрового заводу.

Потрібно максимізувати приріст обсягу виробництва цукру за обмежених коштів. Економіко-математична модель набирає вигляду:

$$\max F(x, y) = dM \min \{\xi x, y\}$$

за умов

$$q_1x + q_2x + y \leq S,$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Приклад 10.6. Фермер має можливість купити три види зерна, щоб готувати з них різні суміші для відгодівлі свиней. Дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби в поживних речовинах відображає таблиця 10.1.

Таблиця 10.1

№ з/п	Зерно	Поживні речовини				Ціна, грн
		Кормових одиниць, ц	Перетравний протеїн, кг	Лізин, кг	Кальцій, кг	
1.	Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	45	45
2.	Кукурудза, ц	1,33	7,3	0,21	40	40
3.	Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
4.	Потреба в поживних речовинах, кг:					
	а) максимальна	106	890	45	12	
	б) мінімальна	95,4	801	41	9	

Потреба в поживних речовинах розподілена рівномірно.

Розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна і задовольняв мінімально допустимі потреби в усіх поживних речовинах з імовірністю $y = 0,9$.

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість (кг) ячменю, кукурудзи та гороху, які необхідно закупити. Критерій оптимальності:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$$

за умов

$$P\{1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a\} \geq 0,9,$$

$$P\{8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b\} \geq 0,9,$$

$$P\{0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c\} \geq 0,9,$$

$$P\{0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d\} \geq 0,9,$$

де a, b, c, d – випадкові рівномірно розподілені величини.
Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами:

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a_1$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b_1,$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c_1,$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 – значення випадкових величин, що задовольняють відповідно умови:

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0,9 \text{ і } P\{b \geq b_1\} \geq 0,9;$$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0,9 \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0,9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1 . Із теорії ймовірностей відомо, що

$$\frac{1}{106 - 95,4} \int_{95,4}^{a_1} d\varphi = 0,9.$$

$$\text{Отже, м } \frac{1}{106} \left(\Phi \left(\frac{a_1}{95,4} \right) \right) = 0,9 \quad \text{або} \quad \frac{1}{106} (a_1 - 94,5)$$

$$a_1 - 95,4 = 9,54, \quad a_1 = 104,94.$$

$$\text{Звідси знаходимо: } b_1 = 881,1; \quad c_1 = 44,6 \text{ і } d_1 = 11,7.$$

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке використовуватиметься для відгодівлі свиней:

$$\text{за умов} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$$

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq 1,0494$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq 0,8811,$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq 0,446,$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq 0,117,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, дістанемо $x_1 = 3,094$; $x_2 = 3,559$; $x_3 = 1,866$. Оптимальні витрати становлять 3 749 грн.

Завдання для самостійної роботи

10.1. Для виготовлення виробів двох видів ($j = 1, 2$) можна використати обладнання двох груп ($i = 1, 2$).

Витрати часу a_{ij} цими групами обладнання на виготовлення продукції є випадковими величинами. Собівартість одного виробу b_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) – також випадкова величина. Нехай щільність розподілу випадкових величин a_{ij} та b_{ij} відома; a_{ij} розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $\bar{a}_{ij}$ та середньоквадратичним відхиленням σ_{ij} а b_{ij} розподілені рівномірно в інтервалі (b_{ij}, γ_{ij}) .

Нехай N_1 і N_2 – плани випуску виробів першого та другого виду (що обумовлюється контрактом): $N_1 = 100$ шт., $N_2 = 200$ шт.

Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск виробів, якщо ризик (імовірність) перевищення фонду часу T у разі виконання контрактів становить не більш як 0,10, а ризик невиконання контракту не перевищує 0,05.

Побудувати математичну модель задачі й розв'язати її для даних, наведених у таблиці 10.2.

Таблиця 10.2

Група обладнання і	Питомі витрати часу, людино-год/шт.				Питома собівартість виробу, грн				Фонд часу і-го обладнання, год.
	j = 1		j = 2		j = 1		j = 2		
	a_{ij}	σ_{ij}	a_{i2}	σ_{i2}	δ_{ij}	γ_{ij}	δ_{ij}	γ_{i2}	
1	0,2	0,2	0,3	0,3	2	4	1	2	50
2	0,1	0,2	0,1	0,2	3	6	2	8	65

10.2. Фірма виробляє товар, попит на який наперед невідомий. Навіть за відомих цін і витрат на виробництво очевидний ризик або неoderжання прибутку, якщо обсяг виробництва менший від попиту або невиправданих витрат у іншому випадку.

Нехай ξ – випадковий попит на продукцію; C – ціна на реалізовану продукцію; g – питомі витрати на її виробництво; x – шуканий обсяг виробництва продукції.

Сформулювати модель балансування попиту та пропозиції з урахуванням можливості часткової адаптації виробництва до попиту.

10.3. Деталі ($j=A, B, C$) можна обробляти на трьох верстатах ($i=1, 2, 3$). Припустимо, що норми витрат часу на обробку j -ї деталі на i -му верстаті випадкові та розподілені згідно з рівномірним законом у інтервалі $[\delta_{ij}, \gamma_{ij}]$ а ціна j -ї деталі C_j – також випадкова величина, що розподілена за нормальним законом із середніми $\bar{C}_j$ та середньоквадратичними відхиленнями σ_j . Значення δ_{ij} і γ_{ij} , $\bar{C}_j$ і σ_j наведено в таблицях 10.3 і 10.4:

Таблиця 10.3

Верстат i	Норма часу на обробку деталі						Плата за 1 год. роботи верстата, тис. грн	Ліміт часу роботи верс- тата, год.
	A		B		C			
	δ_{iA}	γ_{iA}	δ_{iB}	γ_{iB}	δ_{iC}	γ_{iC}		
1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,05	0,1	30	40
2	0,6	1,0	0,1	0,3	0,1	0,4	10	50
3	0,2	0,5	0,2	0,4	0,2	0,0	20	60

Таблиця 10.4

Характеристика	Ціна деталі		
	A	B	C
$\bar{C}_j$	10	16	12
σ_j	5	10	8

Нехай будь-яка деталь може бути виготовлена на будь-якому верстаті.

Визначити оптимальну виробничу програму, яка забезпечує виконання таких умов:

- 1) максимум сподіваної вартості товарної продукції за мінімального ризику;
- 2) максимум сподіваного сумарного прибутку за мінімального ризику;

3) максимум сподіваного прибутку за умови, що кожний верстат виготовляє лише одну деталь, а планом передбачено виробництво всіх трьох деталей;

4) максимум прибутку за умови, що ризик випустити не менш як 120 шт. деталей А буде не більшим за 0,20;

5) ризик того, що деталей А буде випущено не менш як 100 шт., а деталей В не менш як 200 шт., буде не більшим за 0,25;

6) мінімум ризику стосовно того, що буде випущено не менше заданої кількості комплектів, а саме 80, які містять 3 деталі типу А, 2 деталі В та одну деталь С;

7) максимум прибутку, коли ризик того, що деталей А буде випущено не менш як 90 шт., не більший за 0,10, а деталей В не менш ніж 900 шт. – не більший за 0,85.

10.4. Фірма має у своєму розпорядженні певні ресурси сировини, робочої сили та обладнання, які необхідні для виробництва виробів чотирьох видів. Нехай питомі витрати ресурсів є випадковими величинами ξ_i , що розподілені рівномірно на інтервалі $[a_i, b_i]$, а прибуток на одиницю виробу i становить C_i одиниць. Потрібні дані наведено в таблицях 10.5 і 10.6.

Таблиця 10.5

Ресурси	Норма затрат ресурсів на вибір				Обсяг ресурсів
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	
Сировина, кг	2-4	3-6	1-2	2-5	60
Робоча сила, людино.-год	15-25	10-15	15-20	30-50	400
Обладнання, верстато-год	6-12	10-18	6-10	12-20	128

Таблиця 10.6

Вид виробу	1	2	3	4
Прибуток, млн грн	30	25	56	43

Визначити оптимальний асортимент випуску виробів, що забезпечує:

- 1) максимум сподіваного прибутку, за якого ризик реалізованості плану не більший від 0,20;
- 2) максимум сподіваного прибутку, за якого ризик реалізованості плану не більший від 0,10;
- 3) максимум сподіваного прибутку, за якого ризик реалізованості плану не більший від 0,05;
- 4) максимум гарантованого прибутку (ризик $\gamma = 0$).

10.5. Підприємство випускає два види продукції ($k = 1, 2$), щоб j -му ($j = 1, 2$) півріччі задовольнити попит ξ_{jk} , який є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом із середнім $\frac{1}{\lambda_{jk}}$. Продукти можна виготовляти на трьох машинах ($i = 1, 2, 3$) з питомими витратами часу, які також є випадковими рівномірно розподіленими величинами в інтервалах $[t_{ik}, \bar{t}_{ik}]$. Відомі середні питомі витрати на зберігання одиниці продукції S_k , питомі штрафи за дефіцит τ_k , а також сумарний резерв часу T_{ij} , що його має i -та машина в j -му півріччі. Потрібні дані наведено в таблицях 10.7 і 10.8.

Таблиця 10.7

Машина i	Середні витрати часу, год.				Резерв часу у півріччі j , год.	
	t_{i1}	$\bar{t}_{i1}$	t_{i2}	$\bar{t}_{i2}$	I	II
1	1,0	3,0	0,5	1,5	70	90
2	1,5	2,0	2,0	4,0	100	60
3	2,0	6,0	1,0	3,0	120	100

Таблиця 10.8

Продукт k	Середній попит у j -му півріччі		S_k	τ_k
	I	II		
1	20	30	3	40
2	30	40	6	30

Визначити оптимальну виробничу програму, що мінімізує суму очікуваних витрат на зберігання та штрафи в разі дефіциту за обидва півріччя:

1) при мінімальному ризику щодо повного задоволення попиту;

2) якщо ризик дефіциту не може перевищити 0,20;

3) якщо на складі можна зберігати не більш як 50 одиниць продукції, а ризик дефіциту не може перевищити 0,10;

4) зберігати товар немає змоги, але необхідно мінімізувати ризик незадоволеного попиту;

5) зберігати товар немає змоги, а попит слід задовольнити гарантовано.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барвінський А.Ф., Олексів І.Я., Крупка З.І., Бобик І.О., Демків І.І., Квіт Р.І., Кісілевич В.В. Математичне програмування. – Львів: Інтелект – Захід, 2004.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.

4. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2003.

5. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3-х томах. – М.: Мир: т. 1 – 1972, т. 2 – 1973, т. 3 – 1973.

6. Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: Кондор, 2004.

7. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971.

8. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986.

9. Еремия И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976.

10. Ермаков В.И., Бобрик Г.И., Гринцевичюс Р.К., Матвеев В.И., Петров В.А., Рудык Б.М., Сагитов Р.В., Смышля О.К., Шершнева В.Г. Сборник задач по высшей математике для экономистов. – М.: Инфра-М, 2004.

11. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сборник задач. – К.: Вища школа, 1990.

12. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980.

13. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. – М.: Мир, 1966.

14. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2000.

15. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.

16. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Высшая школа, 1994.

17. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра - М, 2001.

18. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2002.

19. Рудык Б.М., Ермаков В.И., Гринцевичюс Р.К., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., Гладких И.М., Сагитов Р.В., Шершнева В.Г. Общий курс высшей математики для экономистов. – М.: Инфра - М, 1999.

20. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Прогресс, 1965.

Зміст

Передмова	3
Глава 1	
Загальна задача лінійного програмування.	
Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування	5
Глава 2	
Чисельне розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом	39
Глава 3	
Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв'язків лінійних оптимізаційних моделей.....	69
Глава 4	
Післяоптимізаційний аналіз розв'язків задач лінійного програмування	86
Глава 5	
Транспортна задача. Постановка транспортної задачі, її економіко-математична модель	94
Глава 6	
Цілочислове лінійне програмування.....	138
Глава 7	
Задачі дробово-лінійного програмування.....	157
Глава 8	
Задачі нелінійного програмування.	
Графічний метод розв'язку задач нелінійного програмування. Метод множників Лагранжа.....	175
Глава 9	
Основи динамічного програмування	197
Глава 10	
Моделі стохастичного програмування	219
Література.....	235

Навчальне видання

**Семко Микола Миколайович,
Пискун Михайло Михайлович,
Панченко Василь Іванович,
Лаговський Володимир Вікторович**

Економіко-математичне моделювання. Математичне програмування

Навчальний посібник

Редактор

І.Є. Бойко

**Форматування та
комп'ютерна верстка**

О.В. Лисенко

**Здано до друку 03.06.2008 р. Формат 60х84/16
Папір офсетний № 1. Гарнітура "Times New Roman".
Ум. друк. арк. 11.8. Друк. арк. 12.5
Наклад 300 прим. Замовлення № 420**

*Підготовлено до друку Видавничо-інформаційним центром
Національного університету ДПС України
08201, вул. К. Маркса, 31, м. Ірпінь, Київська обл., Україна*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 1858 від 30.06.2004 р.*