

**АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ**

М. М. СЕМКО

**БУДОВА ГРУП З УЗАГАЛЬНЕНОЮ
ЩІЛЬНІСТЮ НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Київ 1997

**АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ**

М. М. СЕМКО

**БУДОВА ГРУП З УЗАГАЛЬНЕНОЮ
ЩІЛЬНІСТЮ НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Київ 1997

УДК 519.41/47

Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп /

Семко М. М. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.

Вводиться поняття УЩН[]-групи – такої групи G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$. Описані УЩН[]-групи з виділенням 28 типів нільпотентних недедекіндових та 17 типів ненільпотентних локально ступінчастих груп такого роду.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів і студентів старших курсів університетів.

Бібліогр.: 47 назв.

Відповідальний редактор

доктор фізико-математичних наук,
М. Ф. Кузенний

Рецензенти

доктор фізико-математичних наук,
професор І. В. Протасов
доктор фізико-математичних наук,
професор Л. А. Курдаченко

Затверджено до друку вченою радою

Інституту педагогіки АПН України

ВСТУП

У багатьох роботах (див., наприклад, [1 - 39]) вивчались групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G . Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G , якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. Групи такого роду, де V - властивість нормальності, вивчались, наприклад, у [9 - 39]. У роботах [9 - 14] A завжди була власною немаксимальною підгрупою з B , $A < N < B$, або $A \leq N \leq B$. Зрозуміло, що ці умови при вивченні таких груп необов'язкові (див., наприклад, [17, 19, 26, 28 - 30]).

В даній роботі також вивчаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які є значним узагальненням груп із робіт [9 - 14]. Деякі результати цієї роботи опубліковані і задеклановані в [16, 20, 22, 32, 35 - 37]. Зауважимо, що дана робота є безпосереднім продовженням роботи [39] і тому для зручності посиллок використовується трійна нумерація результатів.

Робота складається з трьох параграфів: 2.1; 2.2; 2.3. В параграфі 2.1 наведено результати, доведення яких можна знайти в роботах [19, 21, 39] і які суттєво використовуються в даній роботі.

Параграф 2.2 присвячений опису нільпотентних УШН[]-груп, тобто груп G , у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$ (теорема 2.2.3). Доведено, що існує 28 типів недедекіндових УШН[]-груп.

У параграфі 2.3 описані ненільпотентні локально ступінчасті УШН[]-групи (теорема 2.3.1). Одержано 17 типів груп такого роду.

2.1. ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ

Доведення результатів цього параграфу можна знайти у роботах автора [19, 21, 39]. Для зручності посилки, нумерація нижченаведених результатів така ж, як і у роботі [39].

Л е м а 1.1.2. Нехай G - довільна група, що має власні немаксимальні підгрупи, які всі породжують власну підгрупу M групи G . Тоді $M \triangleleft G$, для будь-якого примарного елемента x із $G \setminus M$ $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G , $G = \langle g, x \rangle$, де g - будь-який елемент із $G \setminus \langle x \rangle$, $|G/\langle x \rangle| \in \{1, r\}$, r - просте число і виконується тільки одне з тверджень:

- 1) M - 2-максимальна підгрупа з G і G - циклічна група порядку p^{α} , $\alpha > 1$, або $|G| = pq$, p, q - необов'язково різні прості числа;
- 2) $M = \Phi(\langle x \rangle)$, G - періодична група;
- 3) M - максимальна підгрупа циклічної групи G , $|G| = p^{\alpha}q$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, $|M| = p^{\alpha-1}q$;
- 4) M - максимальна підгрупа нециклічної групи G , $G = M \cdot \langle x \rangle$, $M \cap \langle x \rangle = \Phi(\langle x \rangle)$, для будь-якого примарного елемента g із $G \setminus M$ $\langle g \rangle$ - максимальна підгрупа з G , $\mathcal{N}(\langle x \rangle) = \mathcal{N}(\langle g \rangle)$.

Т е о р е м а 1.1.1. Локально ступінчасті групи G , що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p - просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, в яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M і G ізоморфна групі одного з типів:

- 1) G - циклічна група порядку p^{α} , p - просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ - 2-максимальна підгрупа з G ;
- 2) $|G| = pq$, p і q - необов'язково різні прості числа, $M = 1$ - 2-максимальна підгрупа з G ;
- 3) G - група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G ;
- 4) G - циклічна група порядку $p^{\alpha}q$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, M - максимальна підгрупа з G , $|M| = p^{\alpha-1}q$;
- 5) $G = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x, z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$ - максимальна підгрупа з G ;
- 6) $G = R \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r^{\beta} > 2$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, p і q - різні прості числа, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G , $M = R \rtimes \langle x^{q^{\beta}} \rangle$ - максимальна підгрупа з G .

Т в е р д ж е н н я 1.1.1 [10]. Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q - група кватерніонів, D - елементарна абелева 2-група, A - періодична абелева група без інволюцій.

Н а с л і д о к 1.1.7. Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:

1) G - нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи дієдра порядку 8, $G' \leq Z(G)$;

2) $G = U \rtimes X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою, чи групою кватерніонів, $|U| > 1$, $|X| > 1$, $w(X) \leq Z(G)$, $[U, X] \leq w(U)$;

3) $G = \langle \langle a \rangle \times \langle b \rangle \rangle \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, x] = a^2 b^2$, $[b, x] = b^2$;

4) $G = \langle \langle a \rangle \times \langle b \rangle \rangle \langle \langle x \rangle \times \langle y \rangle \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$.

О з н а ч е н н я 1.2.1. Нехай G - група, A та B - її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A; B]$ ($(A; B)$) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $[A; B]$ чи $(A; B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

Проміжком $\{A; B\}$ називається відрізок, інтервал чи півінтервал.

О з н а ч е н н я 1.2.2. Модулем проміжку $/\{A; B\}/$ називається число його елементів.

Л е м а 1.2.1. Для понять, введених в означенні 1.2.1, справедливі твердження:

1) тоді і тільки тоді $/[A; B]/ = 1$, чи $/(A; B)/ = 0$, чи $/[A; B]/ = 0$, коли $A = B$;

2) тоді і тільки тоді $/[A; B]/ = 2$, чи $/(A; B)/ = 1$, чи $/[A; B]/ = 1$, коли A - максимальна підгрупа з B ;

3) тоді і тільки тоді $/[A; B]/ > 2$, чи $/(A; B)/ > 1$, чи $/[A; B]/ > 1$, коли A - власна не максимальна підгрупа з B ;

4) тоді і тільки тоді $/(A; B)/ = 0$, коли $A = B$ або A - максимальна підгрупа з B .

О з н а ч е н н я 1.2.3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A; B]$, де A та B $\mathcal{T}$ -підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

1) при $/[A; B]/ \geq 1$: 1.1) $N \in [A; B]$;

2) при $|[A;B]| > 1$: 2.1) $N \notin (A;B)$; 2.2) $N \notin [A;B]$; 2.3) $N \notin \{A;B\}$;

3) при $|[A;B]| > 2$: 3.1) $N \notin (A;B)$; 3.2) $N \notin [A;B]$; 3.3) $N \notin \{A;B\}$; 3.4) $N \notin [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: N - , $\text{шн}(\tau)$ - , $\text{шн}(\tau)$ - , $\text{шн}(\tau)$ - , $\text{ушн}(\tau)$ - , $\text{ушн}(\tau)$ - , $\text{ушн}(\tau)$ - , $\text{ушн}(\tau)$ -групою.

Якщо τ - властивість бути будь-якою підгрупою групи G , то в позначеннях відповідних класів груп буква τ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як N - , $\text{шн}(\)$ - , $\text{шн}(\)$ - , $\text{шн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ -групи.

Всім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через $K(N)$, $K(\text{шн}(\))$, $K(\text{шн}(\))$, $K(\text{шн}(\))$, $K(\text{ушн}(\))$, $K(\text{ушн}(\))$, $K(\text{ушн}(\))$, $K(\text{ушн}(\))$.

Л е м а 1.2.2. Нехай G - група. Тоді справедливі твердження:

1) група G тоді і тільки тоді N -група, коли вона дедекіндова група;

2) група G тоді і тільки тоді є $\text{шн}(\)$ - , $\text{шн}(\)$ - , $\text{шн}(\)$ -групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ існує нормальна підгрупа N групи G , що відповідно $N \in (A;B)$, $N \in [A;B]$, $N \in \{A;B\}$;

3) група G тоді і тільки тоді є $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ - , $\text{ушн}(\)$ -групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ таких, що A немаксимальна в B , існує нормальна підгрупа N групи G і відповідно $N \in (A;B)$, $N \in [A;B]$, $N \in \{A;B\}$, $N \in [A;B]$;

4) $K(N) \leq K(\text{шн}(\)) \leq K(\text{шн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\))$.

$K(N) \leq K(\text{шн}(\)) \leq K(\text{шн}(\))$,

$K(\text{шн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\))$,

$K(\text{шн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\))$,

$K(N) \leq K(\text{ушн}(\)) \leq K(\text{ушн}(\)) \cap K(\text{ушн}(\))$.

Т е о р е м а 1.2.2. Недедекіндова локально ступінчаста $\text{ушн}(\)$ -група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа U якої може бути лише власною підгрупою одного з типів:

1) U - циклічна підгрупа порядку p^d , $d > 0$, p - довільне просте число, $\Phi(U) = M < G$;

2) U - група порядку pq , p і q - недов'язково різні прості числа, $M = I < G$;

3) U - група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M < G$;

4) U - циклічна підгрупа порядку $p^d q$, $d > 1$, p і q - різні прості числа, $M \leq U$, $M < G$, $|M| = p^{d-1} q$;

5) $U = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|x| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|y| = p$, p - довільне просте число, $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] \leq \langle x^{p^{\Delta-1}} \rangle$, $[U:U'] > 4$, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U' , $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle = M \triangleleft G$;

6) $U = R \rtimes \langle x \rangle$, R - елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $p^\gamma > 2$, $|x| = p^\beta$, p і γ - різні прості числа, $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з U , $U' = R$, $R \times \langle x^p \rangle = M \triangleleft G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Т е о р е м а 1.2.3. Недедекіндові локально ступінчасті УШН[]-групи G мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неединичних прямих множників і є черніківською дисперсивною групою одного з типів:

1) G - скінченна нелінійноабелева група;

2) G - скінченна лінійноабелева не більше ніж біпримарна група;

3) G має центральну квазіциклічну p -підгрупу R , для якої G/R - скінченна дедекіндова група.

Т е о р е м а 1.3.1. Локально ступінчасті УШН[]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P - нормальна в G силовська p -підгрупа порядку $p^\Delta > 2$, $\Delta \in \{1, 2, 3\}$, $G' = P$, Q - ненормальна циклічна силовська q -підгрупа з G порядку q^β , $\beta > 0$, p і q - різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leq Z(P)$, $|P/\Phi(P)| = p^\Delta$, $\Delta \in \{0, 1\}$, $\Delta - \Delta$ - показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ - максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, та вичерпуються групами типів:

1) P - група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;

2) $\exp(P) = |P/\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;

3) P - елементарна абелева, при $\Delta > 1$ $\Delta + \beta < 5$

Т е о р е м а 1.3.2. Метациклічні УШН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 2^\Delta$, $|b| = 2^\beta$, $\Delta \in \{2, 3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\Delta$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \Delta - k < 3$, $\Delta - k \leq k < \Delta$, $\Delta - k \leq \beta$;

5) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^\Delta$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\Delta-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^{\Delta-1}} \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\Delta-2}}$, $p^{\Delta-2} > 2$, $2 < \Delta < \beta$;

6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

8) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 2$, $\beta \in \{3, 4\}$, $b^{-1}ab = a^7$;

10) $G = P \rtimes D$, P - група кватерніонів порядку 8, D - скінченна абелева метациклічна група;

11) $G = P \rtimes D$, P - силовська p -підгрупа G , $|D| = q$, p і q - різні прості числа, P - група одного з наступних типів розглядуваної теореми: 2, $|P'| = 2$; 4, $|P'| = p$; 6, $\beta < 4$;

12) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r - необов'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^q \in Z(G)$;

13) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle z \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $|z| \in \{1, r\}$, r - просте число, $\Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \leq Z(G)$; при $|z| = r$ $b^q \in Z(G)$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

14) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, q і r - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $G / \langle a \rangle = 1$;

15) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle z \rangle) \langle b \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $\langle z, b \rangle$ - група кватерніонів порядку 8, $b^4 ab = a^{-4}$;

16) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $|z| = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, b^q] = [a, z] = 1$, $[b, z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Т е о р е м а 1.3.3. Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УАН[]-групи G мають вигляд $G \cong AX$, де $A = \langle a, b \rangle$ - нормальна в G p -підгрупа, $a \neq 1$, X - q -група, p і q - прості числа та ви-
черпуються групами типів:

1) $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$;

2) $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

3) $G = A \rtimes X$, A - група кватерніонів порядку 8, $|X| = 2$;

4) A - група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $|x| = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;

5) $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

6) $G = A \rtimes X$ - група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, $|A| = p^2$, $|x| \in \{p, p^2\}$;

7) $G = A \rtimes X$ - група Шмідта типу 1 теорема 1.3.1, A - група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3, 9\}$;

8) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle$, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$;

9) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = q^2$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, A - квазіцентральна підгрупа з G ;

10) $G = A \rtimes X$, $/A/ = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ - непарне число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $O_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

11) G - квазіциклічна p -група.

Т е о р е м а 1.3.4. Нехай G - локально ступінчаста УШН[]-група з мінімальною неметациклічною підгрупою O . Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять O .

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою O вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/Q/ = q$, p і q - різні прості числа, $\Phi(P) \rtimes Q$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $p \neq 3$;

2) $G = (R \rtimes P) \rtimes Q$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/Q/ = q$, r , p і q - парно різні прості числа, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $R \rtimes Q$ і $P \rtimes Q$ - ненільпотентні групи Міллера - Морено.

Н а о л і д о к 1.3.10. Метациклічні неметагамільтонові УШН[]-групи G вичерпуються групами таких типів теорема 1.3.2: 4, 9; 12; 15; 16.

Н а о л і д о к 1.3.12. Нехай G - локально ступінчаста УШН[]-група і O - її нільпотентна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді $O \triangleleft G$ і G/O - делекіндова група.

Т е о р е м а 1.4.1. Неделекіндові локально ступінчасті ШН[]-групи G вичерпуються групами таких типів:

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^2$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = O \rtimes Q$, O - неодиначна локально циклічна 2-група, O - група кватерніонів порядку 8;

4) $G = (O \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, O - локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[a, b] = c \in O$, $/c/ = p$, $/a/ = /b/ = p$, $[O, \langle b \rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

8) $G = P \lambda O$, $/P/ \in \{p, p^2\}$, $/O/ = q^2$, p, q - різні прості числа;

Л е м а 2.1.1. Нехай $G = A \times B$ - УШН[]-група і A - її недедекіндова підгрупа. Тоді $/B/ \in \{1, q\}$. Якщо G - локально ступінчаста група і $/B/ = q$, то A - група одного з типів 1-8 теореми 1.4.1.
Т е о р е м а 2.1.2. Локально ступінчасті недедекіндові метабелітонові УШН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) G - недедекіндова УШН[]-група теореми 2.1.1 з [39];

2) G - недедекіндова УШН[]-група наслідку 1.3.6 з [39];

3) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^2 , $/x/ = q^2$, $\beta \in \{1, 2\}$, p і q - різні прості числа, $P \lambda \langle x \rangle$ - не-нільпотентна група Міллера - Морено, $/z/ \in \{1, r\}$;

4) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1, r\}$, $3 \neq r$ - просте число;

5) G - група порядку p^4 з абелевим нецентральною G' типу (p, p) ;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ - непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$;

8) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$ - непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = 1$;

9) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$;

10) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

11) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $/a/ = /x/ = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $/z/ \in \{1, r\}$;

12) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ - непарне просте число, $[a, b] = a$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^{tp} b^p$, $0 \leq t < p$, $a^p = c^{tp} b^{tp}$, $0 \leq t < p$;

13) $G = \langle a \rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2 x^2$;

14) $G = \langle a \rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = /x/ = p^2$,

p - непарне просте число, $[b, x] = a^{fp} b^{tp} x^{ep}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, не-квадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

15) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ - група Шмідта, P - група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

16) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ - група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$;

17) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, $|P| = p^d$, $d \in \{2, 3\}$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $d + \beta < 6$, $P \rtimes \langle x \rangle$ - неінгпотентна група Міллера - Морено, d - показник p за модулем q ;

18) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ - група Фробеніуса, P - елементарна абелева група порядку p^d , $d \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q і r - попарно різні прості числа, d - показник p за модулем q і дорівнює показнику p за модулем r .

Н а с л і д о к 2.1.2. Недедекіндова метабамільтонова УШН[]-група G порядку 2^n , що містить елементарну абелеву підгрупу порядку 8 і не містить підгруп кватерніонів порядку 8, є групою одного з типів:

1) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = 2^d$, $|b| = 2^d$, $|x| = 2$, $d \geq 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{2^{d-\beta}}$;

2) $G = (\langle c \rangle \rtimes \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = 2^d$, $\gamma > 0$, $|a| = 4$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$, $[c, b] = 1$, $[a, b] = c^{2^{d-\beta}}$;

3) $G = (U \rtimes \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $U = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = 2^\Delta$, $\Delta \geq 2$, $|v| = 2$, $|a| = |b| = 2$, $[u, v] = [a, b] = u^{2^{\Delta-1}}$, $[U, \langle b \rangle] = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = 2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^2$;

5) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = p$, $[a, b] = a^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^{2t}$, $0 \leq t < 2$;

6) $G = ((\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| = 2$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

7) $G = ((\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)(\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)) \rtimes \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|z| = 2$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

8) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[b, x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a, b] = x^2$, $[a, x] = b^2 x^2$;

9) $G = ((\langle c \rangle \rtimes \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |c| = |x| = 2$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$.

Н а с л і д о к 2.1.3. Локально ступінчасті неметабамільтонові

УШН[]-групи G , що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп, є групою одного з типів:

1) $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 і Q_2 - групи кватерніонів порядку 8;

2) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|z| = 2$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$.

2.2. БУДОВА НІЛЬПОТЕНТНИХ УШН[]-ГРУП

Лема 2.2.1. Всі УШН[]-групи G , що містять підгрупу дієдра порядку 8, є метагамільтоновими групами.

Доведення. Нехай G - досліджувана група і M - підгрупа дієдра порядку 8. За лемою 1.1.2 $M \triangleleft G$ і всяка підгрупа X із G , що містить M , нормальна в G . Звідси G/M - дедекіндова група і G - розв'язна група з комутантом порядку 2^m , $m > 0$. Якщо $m = 1$, то G - метагамільтонова група, що й треба було довести. Нехай $m > 1$. Тоді G - недедекіндова група. За теоремою 1.2.3 G - черніковська група. Із наслідку 1.3.10 випливає, що метациклічна неметагамільтонова група G не містить підгруп дієдра порядку 8. Тому можна вважати, що G - неметациклічна група. Ясно, що M містить єдину максимальну циклічну підгрупу $\langle u \rangle$ порядку 4. Звідси $\langle u \rangle \triangleleft G$. Нехай $U = C_G(\langle u \rangle)$. Тоді $U \triangleleft G$, G/U - підгрупа із $\text{Aut}(\langle u \rangle)$, $C_M(\langle u \rangle) \neq M$, $[M: \langle u \rangle] = 2$. Оскільки $|\text{Aut}(\langle u \rangle)| = 2$ і $u \notin Z(G)$, то $[G:U] = 2$, $G = UM$ і $U \cap M = \langle u \rangle$. Завдяки наслідку 2.1.3 G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Легко бачити, що $U/\langle u \rangle \cong G/M$ - дедекіндова група і $\langle u \rangle \leq Z(U)$. Звідси підгрупа U є розширенням центральної підгрупи $\langle u \rangle$ за допомогою дедекіндової групи. Ясно, що $U = U_1 \times U_2$ - нільпотентна група, де U_1 - силовська 2-підгрупа з U , U_2 - її холлівське доповнення. Зрозуміло, що $U_1 \triangleleft G$, $U_2 \triangleleft G$, $U_2 M$ - нормальна силовська 2-підгрупа з G і $G = U_1 \times (U_2 M)$. За попереднім, $U_1 = 1$ і тому G - 2-група. Зрозуміло також, що $M = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, $|x| = 2$, $M' = \langle c \rangle = \langle u^2 \rangle$. Припустимо, що U має єдину підгрупу $\langle c \rangle$ порядку 2. Тоді в силу [1, 40] U - локально циклічна чи група кватерніонів. Завдяки теоремі 1.2.3 $|G'| < \infty$. Припустимо, що $|U| = \infty$. Тоді U містить квазіциклічну

2-підгрупу R і $R \leq Z(G)$. Якщо $U = R$, то $|G'| = |M'| = 2$, що не так. Легко бачити, що U не може бути нескінченною групою кватерніонів. Тому $|U| < \infty$. Оскільки $|Z(U)| > 2$, то $U = \langle z \rangle$ і оскільки $G = UM$, $M = \langle u \rangle \lambda \langle x \rangle$, то $G = \langle z \rangle \lambda \langle x \rangle$, що суперечить вибору G .

Припустимо тепер, що U містить d , $|d| = 2$ і $\langle d \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Оскільки $\langle u \rangle \triangleleft G$, $U/\langle u \rangle$ - дедекіндова група і $G/\langle u \rangle = U/\langle u \rangle \times M/\langle u \rangle$, то $G/\langle u \rangle$ - дедекіндова група. Звідси $\langle d \rangle \times \langle c \rangle \triangleleft G$ і тому в G існує підгрупа $\langle d \rangle \times \langle c \rangle \lambda \langle x \rangle$, яка може бути лише групою діедра порядку 8 чи елементарною абелевою групою порядку 8. Якщо $(\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - група діедра, то вона нормальна в G за попереднім. Якщо $(\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - елементарна абелева група порядку 8, то вона нормальна в G в силу теореми 1.3.4. Звідси $M \cap ((\langle d \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle x \rangle) = \langle c \rangle \times \langle x \rangle \triangleleft G$. Нехай $D = C_G(M)$. Тоді $D = C_G(\langle u \rangle) \cap C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$, $D \cap M = \langle c \rangle = Z(M)$, $[M: \langle c \rangle] = 4$ і тому $[G:D] \geq 4$. За попереднім, $[G: C_G(\langle u \rangle)] \leq 2$, $C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle) \triangleleft G$ і $G/C_G(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$ - підгрупа із $\text{Aut}(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$. Відомо [43], що силовська 2-підгрупа із $\text{Aut}(\langle c \rangle \times \langle x \rangle)$ має порядок 2. Звідси $[G:D] = 4$, $G = DM$, $D/\langle c \rangle \cong G/M$ - дедекіндова група, $G' = D'M'[D, M] = D'M'$. Оскільки $m > 1$ і $G/\langle c \rangle = D/\langle c \rangle \times M/\langle c \rangle$, то $D/\langle c \rangle$ - неабелева група. Звідси $D/\langle c \rangle$ містить підгрупу кватерніонів $H/\langle c \rangle$. В силу твердження 1.1.11 з [16] H містить $\langle a \rangle$, $|a| = 4$, $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = 1$ і G містить підгрупу $M \times \langle a \rangle$, у якій в силу леми 2.1.1 M - дедекіндова група, що не так. Одержана суперечність і завершує доведення леми. Лема доведена.

Л е м а 2.2.2. Нільпотентна неметагамільтонова УПН[]-група G , що містить ненормальну підгрупу кватерніонів $Q = \langle x, y \rangle$ порядку 8, є або групою кватерніонів порядку 2^5 , або скінченною неметациклічною 2-групою з комутантом G' порядку 2^m , $m > 1$, яка має нормальну підгрупу $C = Q \times \langle d \rangle$, $|d| = 2$, $\Phi(Q) \times \langle d \rangle \triangleleft G$, $\Phi(Q) \times \langle d \rangle$ містить всі інволюції в G і G/C - дедекіндова група.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Припустимо, що G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G заповольняє умову наслідку 2.1.3 і може бути лише групою типу 1 чи 2 цього наслідку.

Нехай G - група типу 1 наслідку 2.1.3. Тоді $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 і Q_2 - групи кватерніонів порядку 8, $w(G) = w(Q_1) \times w(Q_2) = G' =$

$w(Q) \times \langle d \rangle = G$ (тут і в подальшому $w(G)$ – підгрупа групи G , яка породжена всіма елементами з G , що мають порядком просте число). Звідси $G \triangleleft G$, G/G – абелева група і лема доведена.

Нехай G – група типу 2 наслідку 1.3.10. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. Покажемо, що при $|b| > 4$ G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8. Дійсно, нехай це не так. Тоді $x = a^{i_1} b^{j_1} z^{k_1}$, $y = a^{i_2} b^{j_2} z^{k_2}$. Звідси $|a^{i_1} b^{j_1}| = |a^{i_2} b^{j_2}| = 4$ і тому $Q \leq \Phi(\langle a \rangle \langle b \rangle) = \langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle$. Але $b^2 \in Z(G)$ і, значить, $(\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle) = 1$, що неможливо. Отже, при $|b| > 4$ G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8. Тоді $|b| = 4$ і $\langle a \rangle \langle b \rangle$ – узагальнена група кватерніонів порядку 16. Покладемо $z = d$ і одержимо доведення леми у цьому випадку.

Припустимо тепер, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G – 2-група, у якій за теоремою 1.2.3 $|G'| = 2^m$, $m > 1$. Нехай G – метациклічна група. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.10 і може бути лише групою одного з типів 7 – 9 теореми 1.3.2. Група G кожного з згаданих типів може містити ненормальну групу кватерніонів порядку 8 лише тоді, коли G – група кватерніонів порядку 2^5 . Отже, і у цьому випадку лема доведена.

Припустимо тепер, що G – неметациклічна група. Тоді G містить елементарну абелеву підгрупу порядку 4 [1, 40]. Позначимо через M – мінімальну неметациклічну підгрупу з G . Тоді за наслідком 1.3.12 $M \triangleleft G$ і G/M – делекіндова група. В силу леми 2.2.1 G не містить підгруп діедра порядку 8.

Нехай M – елементарна абелева група порядку 8. Ясно, що G містить підгрупу $D = QM$. Завдяки теоремі 1.2.3 G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 16 і за теоремою 1.2.2 $\Phi(Q) \leq Z(G)$. Звідси $Q \cap M = \Phi(Q) = \langle c \rangle$, $|c| = 2$, $[D:Q] = 4$. Зрозуміло, що $Q < U < D$ і $[U:Q] = [D:U] = 2$. Оскільки M – елементарна абелева група, то $U = QD_1$, де $D_1 = U \cap M$. Але тоді існує $d \in D_1$, $|d| = 2$ і $Q \cap \langle d \rangle = 1$. Звідси $U = Q \times \langle d \rangle$.

Нехай N – максимальна підгрупа з U , що містить елемент d . Тоді $[U:N] = 2$, $|Q \cap N| = 4$. Звідси $N = \langle u \rangle \times \langle d \rangle$, $|u| = 4$, $\langle u \rangle = Q \cap N$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8 (лема 2.2.1), то $[u, d] = 1$. Зрозуміло, що $w(N) = \langle u^2 \rangle \times \langle d \rangle$, при $N \triangleleft G$ $w(N) \triangleleft G$, при $N \not\triangleleft G$ N – група типу 5 теореми 1.2.2, для якої $w(N) \triangleleft G$. Отже, завжди $w(N) \triangleleft G$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle u \rangle \langle u \rangle$. Звідси G містить підгрупу $\langle u \rangle w(N)$, $\langle u \rangle \cap w(N) = \langle u^2 \rangle = \langle c \rangle$, $\langle u \rangle w(N) = \langle u \rangle \times \langle d \rangle$. Як і раніше, $[u, d] = 1$. З цього

впливає, що $[Q, \langle d \rangle] = 1$ і U - мінімальна неметациклічна група типу 3 теореми 1.3.3. Зрозуміло, що $M = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \times \langle f \rangle$. Припустимо, що $[Q, \langle f \rangle] \leq Q$. Тоді як і для d одержимо, що $Q \times \langle f \rangle \triangleleft G$. Але $(Q \times \langle d \rangle) \cap (Q \times \langle f \rangle) = Q \triangleleft G$, що суперечить вибору Q . Отже, $[Q, \langle f \rangle] \not\leq Q$. Звідси Q і Q^f різні підгрупи з U , що складають повний клас спряжених підгруп з D . Зрозуміло, що $U = QQ^f$, $[U:Q] = 2$ і тому $|Q \cap Q^f| = 4$. Звідси $Q \cap Q^f = \langle x \rangle$, $|x| = 4$, $\langle x \rangle \triangleleft D$ і G містить підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle f \rangle$. Як і раніше, $[x, f] = 1$ і $w(\langle x \rangle \times \langle f \rangle) = \langle x^2 \rangle \times \langle f \rangle = \langle c \rangle \times \langle f \rangle \triangleleft G$, $\langle y \rangle \langle c \rangle \times \langle f \rangle = \langle y \rangle \lambda \langle f \rangle$. Звідси знову $[y, f] = 1$ і тому $[Q, \langle f \rangle] = 1$, $[Q, \langle f \rangle] \leq Q$, що неможливо. Отже, M - не може бути елементарною абелевою групою порядку 8 і тому G не містить елементарних абелевих підгруп порядку 8. Оскільки мінімальна неметациклічна група типу 4 теореми 1.3.3 містить підгрупу діедра порядку 8, то M - може бути лише групою типу 3 чи 5 згаданої теореми. Для груп M кожного із згаданих типів $w(M)$ елементарна абелева група порядку 4 і $w(M) \triangleleft G$. Припустимо, що $G \setminus w(G)$ містить f і $|f| = 2$. Тоді G містить підгрупу $w(M) \lambda \langle f \rangle$, яка за попереднім не може бути ні елементарною абелевою групою порядку 8, ні групою діедра порядку 8. Але тоді всі інволюції з G належать $w(M)$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $O = Qw(M)$, $Q \cap w(M) = \langle c \rangle \leq Z(G)$, $[O:O] = 2$ і, як раніше, $O = Q \times \langle d \rangle$ - група типу 3 теореми 1.3.3. За наслідком 1.3.12 $O \triangleleft G$ і G/O - дедекіндова група. Зрозуміло тепер, що для завершення доведення леми необхідно показати, що $|G| < \infty$. Припустимо, що $|G| = \infty$. Тоді за теоремою 1.2.3 G містить центральну квазіциклічну 2-підгрупу $R \triangleleft G/R$ - дедекіндова група.

Припустимо, що $Q \cap R \neq 1$. Тоді $RQ = R \langle x \rangle \langle y \rangle = R \langle x \rangle R \langle y \rangle = (R \times \langle a \rangle)(R \times \langle b \rangle) = (R \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 2$, $[a, b] = c \in R$, $\langle c \rangle = (RQ)^1$. Але тоді G містить підгрупу діедра $\langle c \rangle \times \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, $R \cap Q = 1$ і $G/R = B/R \times (R \times Q)/R$ - гамільтонова група, B/R - елементарна абелева 2-група. Якщо $B = R$, то $G = R \times Q$ і $|G'| = 2$, що неможливо. Отже, $B > R$ і B містить елемент b такий, що $b \notin R$, $b^2 \in R$ і $R \triangleleft R \langle b \rangle \leq B$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $R \langle b \rangle = R \times \langle b \rangle$, $|b| = 2$. Ясно, що $G = B \lambda Q$. За попереднім $\Phi(O) = \langle c \rangle \leq Z(G)$. Але тоді $w(G)$ містить $w(R) \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ - елементарну абелеву групу порядку 8, що неможливо. Отже, $|G| < \infty$. Лема доведена.

Н а с л і д о к 2.2.1. Нільпотентна неметагамільтонова $U\mathcal{CN}[]$ -група G є або групою кватерніонів порядку 32, або скінченною неметациклічною p -групою з комутантом порядку p^m , $m > 1$, що не містить підгруп дієдра 8.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді за теоремою 1.2.3 $|G'| < \infty$ і $|G'|$ ділиться на добуток двох простих чисел.

Припустимо, що G - метациклічна група. Тоді G задовольняє умову наслідку 1.3.10 і може бути лише групою кватерніонів порядку 32. Отже, у цьому випадку наслідок доведено.

Припустимо тепер, що G - неметациклічна група. За лемою 2.2.1 G не містить підгруп дієдра порядку 8. Залишається показати, що G - скінченна група. Якщо G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп, то доводжуване твердження випливає з наслідку 2.1.3. Тому в подальшому будемо вважати, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Якщо G містить ненормальну підгрупу кватерніонів порядку 8, то шукане твердження справедливо завдяки лемі 2.2.2. За вибором G - p -група. Припустимо, що $|G| = \infty$. Тоді за теоремою 1.2.3 G містить центральну квазіциклічну підгрупу R і G/R - дедекіндова група. Нехай G/R - абелева група. Тоді $G/R = B/R \times U/R$ - гамільтонова група, де B/R - елементарна абелева 2-група, U/R - група кватерніонів. Зрозуміло, що $G = BR$, $B \cap U = R$. В силу наслідку 1.1.4 з [16] $U = R \times Q$, де Q - група кватерніонів порядку 8 і тому $G = B \rtimes Q$. Якщо $Q \ntriangleleft G$, то наслідок справедливий в силу лемі 2.2.2. Отже, $Q \triangleleft G$ і тому $G = B \times Q$, що суперечить вибору G . Таким чином, G/R - абелева група, $G' \leq R$, $G' \leq Z(G)$. Тоді $G' = \langle s \rangle < R$, $|G'| = p^m$, $m > 1$. Зрозуміло, що існують такі a та b з G , що $[a, b] = s$ і G містить підгрупу $D = \langle (R \langle a \rangle)(R \langle b \rangle) \rangle = (R \times \langle x \rangle)(R \times \langle y \rangle) = (R \times \langle x \rangle) \rtimes \langle y \rangle$, $D' = \langle s \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[x, y] = s$, $|x| = p^\alpha$, $|y| = p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В силу відомих комутаторних співвідношень [41] $[x^{p^{m-1}}, y] = [x, y^{p^{m-1}}] = s^{p^{m-1}} \neq 1$. Звідси $\alpha \geq m > 1$, $\beta \geq m > 1$. Ясно, що $[x^{p^{m-1}}, y^{p^{m-1}}] = s^{p^{2m-2}} = 1$ і тому в G існує підгрупа $V = \langle s \rangle \times \langle x^{p^{m-1}} \rangle \times \langle y^{p^{m-1}} \rangle$ і $w(V)$ - елементарна абелева група порядку p^3 . Завдяки наслідку 1.3.12 $w(V) < G$ і $G/w(V)$ - дедекіндова група. Оскільки $G/w(V)$ містить квазіциклічну підгрупу, то в силу твердження 1.1.1 $G/w(V)$ - абелева група. Звідси $G' \leq w(V) \cap \langle s \rangle$ і тому $|G'| = p$, що не так. Отже, $|G| < \infty$, що й завершує

доведення наслідку. Наслідок доведений.

Н а с л і д о к 2.2.2. Скінченна УШН[]-група G порядку p^n , p - непарне просте число, яка не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 , є метагамільтоновою групою.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді $|G'| = p^m$, $m \geq 0$. При $m < 2$ G - метагамільтонова група. Нехай $m > 1$. Якщо G - метациклічна група, то за наслідком 1.3.10 G - метагамільтонова група. Нехай далі G - неметациклічна група. Ясно, що $n > m + 1 > 2$. При $n = 4$ G - метагамільтонова група, що й треба було довести. Нехай $n > 4$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) G - мінімальна неметациклічна група; 2) G має власні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою типу 1 чи 2 згаданої теореми. Звідси $n < 5$, що суперечить вибору G . Отже, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. У цьому випадку в силу [42] $G = \langle z \rangle \times \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|z| = p^s$, $s > 1$, $|a| = |b| = p$, $[z, b] \in \langle a \rangle$, $[a, b] = z^{sp^{s-1}}$, $0 < s < p$. При $[z, b] = 1$ $G' = \langle z^{p^{s-1}} \rangle$, $|G'| = p$ і G - метагамільтонова група. Тому в подальшому $[z, b] \neq 1$. При $s = 2$ $|G'| = p^2$ і G - метагамільтонова група. Нехай $s > 2$. Легко бачити, що $z^p \in Z(G)$ і G містить підгрупу $X = \langle z^p a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, у якій $w(X) = \langle z^{p^{s-1}} \rangle \times \langle b \rangle$. Якщо $X < G$, то $w(X) < G$. Якщо $X \not< G$, то X - група типу 5 теореми 1.2.2, за твердженням якої $w(X) < G$. Отже, завжди $w(X) < G$ і тому в G існує підгрупа $\langle z \rangle w(X) = \langle z \rangle \rtimes \langle b \rangle$, що є максимальною в G і не містить $\langle a \rangle$, що неможливо. Таким чином, G - метагамільтонова група. Наслідок доведений.

Л е м а 2.2.3. Нехай G - неметагамільтонова УШН[]-група G порядку p^n , що містить елементарну абелеву підгрупу M порядку p^3 . Тоді $|G'| = p^m$, $m > 1$, $n > 4$, всі елементи порядку p в G належать $M < G$, G/M - дедекіндова група і справедливі наступні твердження:

1) G містить ненормальну підгрупу $X = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|x| = p^4$, $|y| = p$, $\Delta > 1$, $[x, y] = 1 \neq x^{p^{\Delta-1}} \in Z(G)$, $[X, \langle c \rangle] > 1$, $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle < G$, $\langle c \rangle \times \langle y \rangle = w(X) < G$, G не містить неабелевих підгруп порядку p^3 , що є 2-групами, чи мають експоненту p ;

2) для будь-яких елементів u і $v \in G$, $|u| > p$, $|v| = p$, $\langle u, v \rangle =$

$= \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$ маємо, що $w(\langle u, v \rangle) = w(\langle u \rangle) \times \langle v \rangle \triangleleft G$, в G нормальні підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп і комутанти всіх абелевих підгруп;

3) в 2-групі G $G' \leq Z(\Phi(G))$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умову леми. Тоді G – неметациклічна група, $p > 4$, $|G'| = p^m$, $m > 1$. Завдяки лемам 2.2.1 та 2.2.2 G не має підгруп дієдра порядку 8 і всі підгрупи кватерніонів порядку 8 нормальні в G . За наслідком 1.3.12 $M \triangleleft G$ і G/M – дедекіндова група. В неметабільній групі G в силу теореми 1.2.2 існує ненормальна підгрупа $X = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$ – типу 5 згаданої теореми, а тому $|x| = p^A$, $|y| = p$, $A > 1$, $[x, y] = c = x^{p^{A-1}} \in Z(G)$, $[X: \langle c \rangle] > 4$, $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle \triangleleft G$, $\langle c \rangle \times \langle y \rangle = w(X) \triangleleft G$.

Нехай $C = O_p(w(X))$. Тоді $C \triangleleft G$ і $C < G$. Відомо [43], що G/C – підгрупа з $\text{Aut}(w(X)) \cong \text{GL}(2, p)$ і силовська p -підгрупа з $\text{GL}(2, p)$ має порядок p . Звідси $[G:C] = p$. Зрозуміло, що $x \notin C$ і тому $G = C \langle x \rangle = CX$, $C \cap X = \langle x^p \rangle \times \langle y \rangle \triangleleft G$. Покладемо $U = MX$. Зрозуміло, що $U \triangleleft G$ і існує ряд $X < U_1 \leq U$, де $[U_1:X] = p$, $[U:U_1] \leq p$. Оскільки X – метациклічна підгрупа, M – неметациклічна підгрупа, то $M \setminus X$ містить z , $|z| = p$ і без порушення загальності можна вважати, що $U_1 = X \lambda \langle z \rangle$. Завдяки теоремі 1.2.2 $U_1 \triangleleft G$. Покажемо, що будь-який елемент d з G порядку p належить M . Нехай це не так. Припустимо спочатку, що всі елементи порядку p з G належать C . Тоді C містить M , C містить $w(X)M$, $w(X) \leq Z(G)$. За теоремою 1.2.3 G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^4 і тому $w(X) \leq M$. За вибором C містить підгрупу $w(X) \times \langle d \rangle$, $|d| = p$, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G . В G існує підгрупа $X \lambda \langle d \rangle = \langle x \rangle (w(X) \times \langle d \rangle) = U_2$ і за теоремою 1.2.2 $U_2 \triangleleft G$. Ясно, що $U_1 \cap U_2 = X \triangleleft G$, що неможливо. Отже, існує d , $|d| = p$ і $d \in G \setminus C$. Як і раніше, $w(X) \lambda \langle d \rangle$. Оскільки G не містить підгруп дієдра порядку 8, то за теоремою 1.2.2 $w(X) \lambda \langle d \rangle \triangleleft G$. Як і раніше, G містить нормальну підгрупу $U_2 = X \lambda \langle d \rangle = \langle x \rangle (w(X) \lambda \langle d \rangle)$. Оскільки $z \in C$, а $d \notin C$, то $U_1 \cap U_2 = X \triangleleft G$, що неможливо. Отже, всі елементи порядку p з G належать M . Звідси G не містить абелевих підгруп порядку p^3 і експоненти p , $M = w(X) \times \langle z \rangle$, $U_1 = U$. Зрозуміло, що $X \triangleleft U$, $\Phi(X) = \langle x^p \rangle$ і тому $\langle x^p \rangle \triangleleft U$. При $A = 2$ $\langle x^p \rangle = \langle c \rangle \triangleleft G$. Нехай $A > 2$. Покладемо $U_3 = \langle x^p \rangle \lambda \langle z \rangle$. Оскільки G , а тому і U_3 , не містить підгруп дієдра порядку 8, то в силу [40] $w(U_3) = \langle z \rangle \times \langle c \rangle$. При $U_3 \triangleleft G$ $w(U_3) \triangleleft G$.

При $U_3 \ntriangleleft G$ за теоремою 1.2.2 $w(U_3) \triangleleft G$. В G існує підгрупа $\langle x \rangle w(U_3) = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, яка максимальна і тому нормальна в $U = (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle) \lambda \langle y \rangle$. Звідси $\Phi(U) = \langle x^p \rangle$ і, значить, $\langle x^p \rangle \triangleleft G$. Якщо g елемент з G і $\langle g \rangle \triangleleft G$, то $\Phi(\langle g \rangle) \triangleleft G$. Нехай $\langle g \rangle \ntriangleleft G$. Покладемо $U_4 = \langle g \rangle M$. Якщо $|g| = p$, то $\Phi(\langle g \rangle) \triangleleft G$. Нехай $|g| > p$. Тоді U_4 містить $Y = \langle g \rangle \lambda \langle f \rangle$, де $f \in M$, $|f| = p$, $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle$. При $Y \triangleleft G$ $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle \triangleleft G$. При $Y \ntriangleleft G$ можна вважати, що $Y = X$ і за попереднім, $\langle g^p \rangle \triangleleft G$. Отже, завжди $\Phi(\langle g \rangle) \triangleleft G$.

Нехай H - неабелева підгрупа з G . Якщо $H \triangleleft G$, то $H' \triangleleft G$. Якщо $H \ntriangleleft G$, то можна вважати, що $H = X$ і тоді $H' \triangleleft G$.

Нехай $H = \langle u, v \rangle = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $|u| > p$, $|v| = p$. Оскільки G не містить підгруп дієдра порядку 8, то в силу [40] $w(H) = w(\langle u \rangle) \times \langle v \rangle$. При $H \triangleleft G$ $w(H) \triangleleft G$, при $H \ntriangleleft G$ $w(H)$ нормальна в G завдяки теоремі 1.2.2. Отже, твердження 2 розглядуваної леми доведене повністю.

Відомо [40], що в скінченній 2-групі G $\Phi(G) = \langle g^2 \rangle$ для всіх g з G і $G' \leq \Phi(G)$. За попереднім, $\langle g^2 \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $C_G(\langle g^2 \rangle) \triangleleft G$ і $G/C_G(\langle g^2 \rangle)$ - підгрупа з абелевої групи $\text{Aut}\langle g^2 \rangle$. Звідси $C_G(\langle g^2 \rangle)$ містить G' , а тому $G' \leq Z(\Phi(G))$. Твердження 3 леми доведене повністю.

Для завершення доведення леми залишається показати, що має місце твердження 1. Для цього з урахуванням попереднього потрібно показати, що G не містить підгруп кватерніонів порядку 8.

Нехай G містить підгрупу кватерніонів $Q = \langle x, y \rangle$ порядку 8. Тоді за попереднім, $Q \triangleleft G$. Покладемо $U = OM = Q \lambda D$, де $M = \langle c \rangle \times D$, $\langle c \rangle = M \cap Q = \Phi(Q) \leq Z(G)$, D - елементарна абелева група порядку 4. Позначимо через U_1 - максимальну підгрупу з U , що містить D . Тоді $U_1 = \langle x \rangle \lambda D$ і за теоремою 1.2.2 $U_1 \triangleleft G$. Звідси $U_1 \cap Q = \langle x \rangle \triangleleft G$. Оскільки G не містить підгруп дієдра порядку 8, то $U_1 = 1$. Зрозуміло, що $D = \langle d_1 \rangle \times \langle d_2 \rangle$, $|d_i| = 2$, $i \in \{1, 2\}$. В G існують підгрупи $X_i = \langle x \rangle \times \langle d_i \rangle$, $w(X_i) = \langle x^2 \rangle \times \langle d_i \rangle$. За твердженням 2 розглядуваної леми $w(X_i) \triangleleft G$ і тому в G існують підгрупи $Y_i = \langle y \rangle w(X_i) = \langle y \rangle \lambda \langle d_i \rangle$. В силу того, що G не містить підгруп дієдра порядку 8 $Y_i = 1$. Отже, $U = Q \times D$. Завдяки теоремі 1.2.2 $\langle y \rangle \lambda D \triangleleft G$. Ясно, що $Q \cap (\langle y \rangle \lambda D) = \langle y \rangle \triangleleft G$. Покладемо $A = C_G(Q)$. Легко бачити, що $A = C_G(\langle x \rangle) \cap C_G(\langle y \rangle)$ і оскільки $\langle x \rangle \triangleleft G$, $\langle y \rangle \triangleleft G$, то $C_G(\langle x \rangle) \triangleleft G$, $C_G(\langle y \rangle) \triangleleft G$. Відомо [43], що $G/C_G(\langle x \rangle)$ підгрупа з $\text{Aut}\langle x \rangle$, $G/C_G(\langle y \rangle)$ підгрупа з $\text{Aut}\langle y \rangle$ і $|\text{Aut}\langle x \rangle| = |\text{Aut}\langle y \rangle| = 2$. Ос-

кільки $x, y \notin Z(G)$, то $[G:G_G(\langle x \rangle)] = [G:G_G(\langle y \rangle)] = 2$. Звідси $[G:A] \leq 4$. Зрозуміло, що $Q \cap A = \Phi(Q) = Z(Q)$, $[Q:Z(Q)] = 4$ і G містить підгрупу $V = QA$. Очевидно, що $[V:A] = [Q:\Phi(Q)] = 4$ і тому $V = Q$. Ясно, що $G' = Q'A'[Q,A] = Q'A' > Q'$ і тому $|A'| > 2$. Зрозуміло, що $G/\langle c \rangle = Q/\langle c \rangle \times A/\langle c \rangle$ і $Q/\langle c \rangle$ містить власні немаксимальні підгрупи. За лемою 1.2.5 $A/\langle c \rangle = H/\langle c \rangle \times B/\langle c \rangle$ - гамільтонова група, у якої $H/\langle c \rangle$ - група кватерніонів порядку 8, $B/\langle c \rangle$ - елементарна абелева 2-група. Ясно, що $A = HB$, $H \cap B = \langle c \rangle$, $H \triangleleft G$, $B \triangleleft G$ і A містить підгрупу $M = \langle c \rangle \times D$ (лема 1.2.5 з [39]).

Покажемо, що G містить $Q_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ - групу кватерніонів порядку 8 і $Q_1 \cap Q = 1$. Якщо $H = \langle c \rangle \times Q_1$, то це очевидно. Нехай підгрупа $\langle c \rangle$ недоповнюється в H . Тоді в силу твердження 1.1.11 з [16] $H = \langle x_1 \rangle \ltimes \langle y_1 \rangle$, $|x_1| = |y_1| = 4$, $[x_1, y_1] = x_1^2$, $c = x_1^2 y_1^2$. Покладемо $z_1 = x y_1$ і $Q_1 = \langle x_1, z_1 \rangle$. Зрозуміло, що $|x_1| = |z_1| = 4$, $x_1^2 = z_1^2 = [x_1, z_1]$, Q_1 - група кватерніонів порядку 8, $Q \cap Q_1 = 1$. Отже, G містить підгрупу $Q_1 \times Q$, яка містить ненормальну підгрупу кватерніонів $Q = \langle x x_1, y z_1 \rangle$ порядку 8, що неможливо. Таким чином, G не містить підгруп кватерніонів порядку 8. Лема доведена.

Н а с л і д о к 2.2.3. Нехай G - неметагамільтонова УШН[]-група, що містить нормальну елементарну абелеву підгрупу M порядку 8 і G/M - група кватерніонів порядку 8. Тоді $G = \langle \langle a \rangle \langle b \rangle \rangle \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $\langle \langle a \rangle \langle b \rangle \rangle = \langle x \rangle = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b, x] = 1$, $[a, x] \in \langle a^4 \rangle$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умову наслідку. Тоді G - скінченна 2-група з комутантом G' порядку 2^m , $m > 1$.

Нехай G розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Тоді G задовольняє умову наслідку 2.1.3 і може бути лише групою типу 2 згаданого наслідку 1, значить, у цьому випадку наслідок доведений.

Нехай тепер G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. За лемою 2.2.3 всі інволюції з G належать M . За умовою $G/M = \langle Mx_1, Mx_2 \rangle$ - група кватерніонів порядку 8. Звідси $|x_i| = 8$, $(i \in \{1, 2\})$, $M \cap \langle x_i \rangle = \langle x_i^4 \rangle$, $(Mx_1)^2 = (Mx_2)^2 = Md$, де $d = [x_1, x_2]$, $|d| = 4$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle x_i^2 \rangle \triangleleft G$, $x_i^4 \in Z(G)$. Нехай $y \in M$ і $|y| = 2$. Покажемо, що $\langle y, x_i^4 \rangle \triangleleft G$. Дісно, при $y \in \langle x_i \rangle$ маємо $\langle y \rangle = \langle x_i^4 \rangle = \langle y, x_i^4 \rangle \triangleleft G$. Нехай $y \notin \langle x_i \rangle$. Тоді $N_i = \langle y, x_i^4 \rangle =$

$= \langle y \rangle \times \langle x_1^4 \rangle$. За лемою 2.2.3 в G існує підгрупа $X_i = N_i \langle x_1^2 \rangle$ і G не містить підгруп дієдра порядку 8. Звідси $X_i = \langle x_1^2 \rangle \lambda \langle y \rangle$ і $X_i^2 = 1$, $w(X_i) = N_i$. Якщо $X_i \triangleleft G$, то $N_i \triangleleft G$. Якщо $X_i \not\triangleleft G$, то X_i - група типу 5 теореми 1.2.2 і знову, за цією теоремою $N_i \triangleleft G$. В силу [40] $\langle x_i \rangle N_i$ - абелева група чи група Міллера - Морено, тобто $[x_i, y] \in \langle x_1^4 \rangle$. Покладемо $D = M \langle d \rangle$. За попереднім, $[M, \langle x_1^2 \rangle] = 1$. Звідси $D' = 1$. Припустимо, що $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = 1$. Тоді $M = \langle y \rangle \times \langle x_1^4 \rangle \times \langle x_2^4 \rangle$. Але тоді група кватерніонів G/M порядку 8 містить дві різні інволюції Mx_1^2 і Mx_2^2 , що неможливо. Звідси $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle = \langle x_2^2 \rangle$ і тому $D = \langle y \rangle \times \langle z \rangle \times \langle d \rangle$, $/y/ = /z/ = 2$, $w(\langle d \rangle) = \langle x_1^4 \rangle$. Покладемо $Z_i = M \langle x_i \rangle$. Тоді $Z_i = D \langle x_i \rangle = \langle x_i \rangle \lambda Y$, де $Y = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $[\langle x_1^2 \rangle, Y] = 1$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle x_1^2 \rangle \triangleleft G$, а за попереднім, для будь-якого елемента u з Y $\langle x_1^4 \rangle \times \langle u \rangle \triangleleft G$. Звідси $\langle x_1^2 \rangle \times \langle u \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що Y містить елемент u такий, що $d \in \langle x_1^2 \rangle \times \langle u \rangle \triangleleft G$, $/u/ = 2$. Оскільки за попереднім $\langle x_1^2 \rangle \triangleleft G$, в нормальній абелевій підгрупі $\langle x_i \rangle \times \langle y \rangle$ тільки дві циклічні підгрупи порядку 4 (це підгрупи $\langle x_1^2 \rangle$ та $\langle d \rangle$), то $\langle d \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $\langle d \rangle = \langle [x_1, x_2] \rangle = G'$. Без порушення загальності можна вважати, що $d \in \langle y \rangle \times \langle x_1^2 \rangle \leq \langle x_1 \rangle \lambda \langle y \rangle$. Зрозуміло, що $\langle d \rangle \langle x_1^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle \times \langle y \rangle \leq \Phi(G)$. В скінченній 2-групі $\Phi(G)$ породжується квадратами елементів з G [40] і тому можливі випадки: 1) $\langle x_1^2 \rangle \times \langle y \rangle = \langle x_1^2, u^2 \rangle$, де $u \in G$, $/u^2/ = 4$; 2) $\langle x_1^2 \rangle \times \langle y \rangle = \langle x_1^2, u^2 \rangle$, де $u \in G$, $/u^2/ = 2$.

Випадок 1. У цьому випадку $\langle u^2 \rangle = \langle d \rangle$. Заміняючи x_1 на u без порушення загальності можна вважати, що $G' = \langle d \rangle = \langle x_1^2 \rangle$. В G існує підгрупа $A = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$. Покладемо $x_1 = a$, $x_2 = b$. Тоді $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/a \cap b/ = 2$, $b^4 a b = a^2$, $g \in \{3, -1\}$. Зрозуміло, що $/A/ = 2^5$, $/G/ = 2^6$. Ясно, що A - метациклічна група. Оскільки M - неметациклічна група, то $M \setminus A$ містить x , $/x/ = 2$ і $G = A \lambda \langle x \rangle$. При $g = 3$ $A = \langle f \rangle \langle b \rangle$, де $f = ab^2$ і $b^4 f b = f^{-1}$. Тому завжди можна вважати, що $b^4 a b = a^4$. За попереднім, $[b, x] \in \langle b^4 \rangle$. Покладемо $z = a^2 b^2$. Тоді $/z/ = 2$, $[b, z] = b^4$. Якщо $[x, b] \neq 1$, то покладемо $x_1 = zx$ і одержимо, що $[b, x_1] = 1$ і $G = A \lambda \langle x_1 \rangle$. Отже, завжди $[b, x] = 1$. Знову за попереднім, $[a, x] \in \langle a^4 \rangle$ і G - група з наслідку. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку $\langle x_1 \rangle \cap \langle u \rangle = 1$ і G містить підгрупу $B = \langle x_1^2 \rangle \times \langle u \rangle$, $u \in \Phi(G)$. Ясно, що $B \cap M = \langle x_1^4 \rangle \times \langle y \rangle$, де $\langle y \rangle = \langle u^2 \rangle$. Тому G/M містить дві різні інволюції Mx_1^2 і Mu , що

неможливо. Випадок 2 неможливий. Наслідок доведений.

Н а с л і д о к 2.2.4. Неметациклічна неметагамільтонова УШН[]-група G порядку p^n має нормальну елементарну абелеву підгрупу N порядку p^2 , p - просте число.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Якщо G містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3 , то твердження наслідку випливає з твердження 1 леми 2.2.3. Нехай G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3 . Оскільки G - неметагамільтонова група, то вона містить ненормальну неабелеву підгрупу X , яка може бути лише групою типу 3 чи 5 теореми 1.2.2. Якщо X - група типу 5 згаданої теореми, то шуканою нормальною підгрупою буде $w(X)$. Нехай X - група типу 3 теореми 1.2.2. Тоді X - ненормальна в G підгрупа кватерніонів порядку 8 і G - неметациклічна група, що задовольняє умову леми 2.2.2, за твердженням якої G містить нормальну елементарну абелеву підгрупу порядку 4. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 2.2.1. Всі УШН[]-групи G порядку p^n з комутантом G' типу (p, p) , який містить всі елементи порядку p з G , p - довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a, b \rangle \triangleleft G$, $|a| = p^4$, $|b| = p^6$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $|x| > p$ та вичерпуються групами типів:

1) $G = U \rtimes X$, X - група кватерніонів порядку 8, U - циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[U, X] \leq w(U)$; при $U' = 1$ $[U, X] = w(U)$;

2) $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

3) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$, $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

4) $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

5) $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Зрозуміло, що G - скінченна p -група, у якій всі абелеві підгрупи

метациклічні. Звідси при $p > 2$ в силу [42] та умовою G' містить всі елементи порядку p з G випливає, що $G = UX$ має загальний вигляд групи з теореми 1 є групою типу 4 цієї теореми. Отже, в подальшому будемо вважати, що $p = 2$.

Припустимо спочатку, що $G' \leq Z(G)$. Тоді за наслідком 1.1.7 G - група одного з типів 1 - 3 розглядуваної теореми.

Нехай тепер $G' \not\leq Z(G)$. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, де $\langle c \rangle = \langle d \rangle = 2$, $c \in Z(G)$, $d \notin Z(G)$ і $G' = w(G)$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $[G:C] = 2$, $G' \leq Z(G) \leq C \triangleleft G$. Звідси $G = C\langle u \rangle$, $C \cap \langle u \rangle = \langle u^2 \rangle$, $\langle u \rangle = 2^4$, $\Delta > 1$. Зрозуміло, що G не містить підгрупи діедра порядку 8. Нехай $v \in G \setminus w(G)$. Тоді $\langle v \rangle = 2$, $w(\langle v \rangle) \leq w(G)$. Ясно, що $w(G)\langle v \rangle = V \triangleleft G$, $\Phi(V) \triangleleft G$.

Припустимо, що $\langle c \rangle \cap \langle v \rangle = 1$. Тоді $w(V) = w(G) = \langle c \rangle \times w(V)$ і $V = \langle c \rangle \times \langle v \rangle$. Але тоді $\Phi(V) = \langle v^2 \rangle$ і $w(\langle v \rangle) \leq Z(G)$. Звідси $w(G) = G' \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, $w(\langle v \rangle) = \langle c \rangle$, $V = \langle v \rangle \lambda \langle d \rangle$, $w(\langle u \rangle) = w(\langle v \rangle) = \langle c \rangle$ і будь-яка циклічна підгрупа з G порядку 4 містить c . Нехай $D = w(G)\langle u \rangle$. Тоді $D = \langle u \rangle \lambda \langle d \rangle$. Оскільки $d \notin Z(G)$, то $[u, d] = c$. За попереднім, $\Delta > 2$. Зрозуміло, що G - неметациклічна група і тому $D < G$. Ясно, що $|G| > 2^{\Delta+1}$, $\Delta + 1 > 3$, $\exp(G) \geq 2^4$, $\exp(C) \geq 2^{\Delta-1} \geq 4$. Можливі випадки: 1) $C/\langle d \rangle$ - циклічна група; 2) $C/\langle d \rangle$ - нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $C/\langle d \rangle = \langle v\langle d \rangle \rangle$ і тому за попереднім, $C = \langle d \rangle \langle v \rangle = \langle d \rangle \times \langle v \rangle$. Ясно, що $\langle v \rangle = 2^j$, $j > 1$. При $j = 2$ $C = \langle u^2 \rangle \times \langle d \rangle$ і G - метациклічна група, що не так. Звідси, $j > 2$. Зрозуміло, що $u^2 \in Z(G)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[u, v] = d$. Оскільки $[v, d] = 1$, то за відомим результатом [40] $[v^2, u] = [u, v]^2 = d^{-2} = 1$. Звідси $v^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $G = D\langle v \rangle$, $D' = \langle c \rangle$, $Z(D) = \langle u^2 \rangle \leq Z(G)$, $D \cap \langle v \rangle = \langle f \rangle = \langle v \rangle \cap \langle u \rangle \leq Z(D) \cap \langle v^2 \rangle$. З співвідношення $t \in Z(G)$ випливає, що $\langle f \rangle = \langle v^2 \rangle \cap \langle u^2 \rangle$. Ясно, що $X_1 = 1$, де $X_1 = \langle v^2 \rangle \langle u \rangle$, $X_2 = \langle v \rangle \langle u^2 \rangle$, і $i \in \{1, 2\}$. Якщо X_i - нециклічна група, то вона містить x_i , $\langle x_i \rangle = 2$, $\langle x_i \rangle \cap w(G) = 1$, що неможливо. Отже, X_i - циклічна група. Тоді $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. Ясно, що існує непарне i , для якого $u^{2^i} v^2 = 1$. Покладемо $z = u^i v$. Тоді $z^2 = (u^i v)(u^i v) = u^{2i} v^2 (v^{-1} u v)^i = v^2 u^{2i} (u d)^i = v^2 u^{2i} d^i c^{-\frac{1}{2}(i-1)} = v^2 u^{2i} h$, де $h = d^i c^{-\frac{1}{2}(i-1)} \neq 1$. Ясно, що $h \in G'$ і $\langle h \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Звідси $\langle z \rangle = 4$, що суперечить попередньому. Випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Припустимо, що $C/\langle d \rangle$ - містить елементарну абелеву

підгрупу $H/\langle d \rangle$ порядку 4. Тоді $H/\langle d \rangle = \langle \langle d \rangle x_1 \rangle \times \langle \langle d \rangle x_2 \rangle$. При $|x_i| = 2$ одержимо, що в G є інволюції, що належать $w(G)$ ($i \in \{1, 2\}$). Суперечність. Нехай, наприклад, $|x_1| = 4$. Тоді $\langle x_1^2 \rangle = \langle d \rangle$, що суперечить попередньому. Отже, в $G/\langle d \rangle$ тільки одна інволюція. В силу теореми 12.5.1 з [40] $G/\langle d \rangle$ - група кватерніонів порядку 8. Нехай $\langle d \rangle$ недоповнюється в G . Тоді в силу твердження 1.1.11 з [16] $G = \langle x_1 \rangle \ltimes \langle x_2 \rangle$, $|x_1| = |x_2| = 4$, $[x_1, x_2] = x_1^2$. За попереднім, $x_1^2 = c = x_2^2$, що неможливо. Отже, $G = \langle d \rangle \times Q$, де Q - група кватерніонів порядку 8. Ясно, що $\exp(G) = 4$, $\Delta = 3$ і $|u^2| = 4$. Покладемо $u = a$, $d = b$, $D = U$. Тоді $|a| = 8$, $|b| = 2$, $[a, b] = c = a^4$. Нехай $v = x$. Тоді $[x, b] = 1$. Зрозуміло, що $|U| = 16$, $x^2 = c$ і $x \notin U$. Звідси $G = U\langle x \rangle$. Оскільки $G' \not\subseteq \langle c \rangle$, то $[a, x] \notin \langle c \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, x] = b$. Покладемо $X = \langle x \rangle$ і одержимо, що G - група типу 5 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 5 теореми. Тоді $|G| = p^n$, $n > 3$, p - просте число, G' - група типу (p, p) . Залишається показати, що G - УШН[]-група і всі елементи порядку p з G належать G' . За наслідком 1.1.7 в групі G кожного з типів 1 - 3 теореми G' містить всі інволюції і $G' \leq Z(G)$. В силу [42] всі елементи порядку 3 групи G типу 4 належать G' .

Покажемо, що і в групі G типу 5 теореми всі інволюції належать G' . Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить d , $|d| = 2$ і $\langle d \rangle \cap G' = 1$. Легко бачити, що $G' = w(U) = \langle a^4 \rangle \times \langle b \rangle$, $a^4 = x^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $d = a^i b^j x^k$. Оскільки $d \notin G'$, то $d \notin w(U)$. Звідси k - непарне число. Припустимо, що i - парне число. Тоді $d \in Q \ltimes \langle b \rangle$, де $Q = \langle x, a^2 \rangle$ - група кватерніонів порядку 8 і $w(U) = w(Q) \times \langle b \rangle$, що неможливо. Отже, i - непарне число. Звідси $d^2 = (a^i b^j x^k)(a^i b^j x^k) = a^i b^j a^i x^k [x^k, a^i] b^j x^k = a^i b^j a^i [x^k, a^i] b^j x^{2k} = a^i b^j a^i d b^j x^{2k} = a^i b^j a^i b^j x^{2k} d_1$, де $d_1 = [x^k, a^i]$ і d_1 не належить циклічній підгрупі $\langle a \rangle$. Покладемо $x^{2k} d_1 = d_2$. Зрозуміло, що $\langle d_2 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$ і $d^2 = (a^i b^j)^2 d_2 = a^{2i} b^{2j} [a, b]^{-i j} d_2 = a^{2i} d_3$, де $d_3 = [a, b]^{-i j} d_2 = a^{-4 i j} d_2$ і $\langle d_3 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Звідси $|d_3| \leq 2$. Але тоді при непарному i $|a^{2i}| = 4$. Таким чином, $a^{2i} d_3 \neq 1$ і тому $d^2 \neq 1$, що неможливо. Отже, і в групі G типу 5 всі інволюції належать G' .

Покажемо, що G - УШН[]-група. В теоремі 1.4.1 встановлено, що група G кожного з типів 2 - 4 є навіть УШН[]-групою і тому УШН[]-

групою. Отже, залишається показати, що група G типу 4 чи 5 є $UHN[]$ -групою.

Нехай $|[A;B]| > 2$. Покажемо, що $[A;B] \cap N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$ чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і одержимо, що G — $UHN[]$ -група. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $A \neq 1$, $B \neq 1$ і B — власна немаксимальна підгрупа в G . Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle f \rangle$, $f \in \{1, 2\}$. Нехай $w(U) = \langle c \rangle$ в групі G типу 4, а в групі G типу 5 $\langle c \rangle = \langle a^4 \rangle$. Тоді $|c| = 2$ і $c \in Z(G)$. Припустимо, що $\langle c \rangle \cap B = 1$. В групі G типу 4 $[G:B] \geq |U|$ для груп G розглядуваних типів $[G:U] \leq 8$. Звідси $|B| = 8$, G — група типу 4 теореми 1 B — група кватерніонів порядку 8. Тоді $|A| = 2$ і, значить, $A \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, $c \in B$. В групі G типу 5 $|G| = 32$, $|B| = 8$, $|A| = 2$, $\langle c \rangle \cap A = 1$ і тому $\langle c \rangle \times A = G' \leq B$, що неможливо. Достатність для груп G типу 5 теореми доведена.

Нехай G — група типу 4 теореми. Зрозуміло, що $G' = w(G) = w(U) \times w(X) \leq Z(G)$. Звідси для будь-якого елемента g з G $g^2 \in Z(G)$ і, значить, B — нециклічна група. Оскільки $B \neq G'$, то в B тільки одна інволюція, і тому в силу теореми 12.5.1 з [40] B — група кватерніонів. Тоді $|A| = 2$ і, значить, $A \leq Z(G)$, що неможливо. Достатність для груп G типу 4 доведена. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 2.2.4. Неметагамільтонові $UHN[]$ -групи G порядку p^n , що мають підгрупу M типу (p, p, p) , $G' \leq M$, p — довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \triangleleft G$, $|a| = p^{2\alpha}$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $|X| > 1$ та вичерпуються групами типів:

1) $G = U \rtimes X$, $X = \langle x \rangle$, $|x| = p$, $\beta > 2$, $[a, b] = a^p$, $[b, x] = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$;

2) $X = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|b| = |z| = 3$, $|a| = |x| = 9$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = [a, b] = 1$, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.2.3 G містить ненормальну неабелеву підгрупу $X = \langle x \rangle \rtimes \langle u \rangle$, $|x| = p^4$, $\Delta > 1$, $|u| = p$, $[x, u] = x^{p^{\Delta-1}} = c \in Z(G)$, $|X : \langle c \rangle| > 4$, $w(X) = N \triangleleft G$, підгрупи Фаттіні всіх циклічних та неабелевих підгруп в G нормальні в G , всі елементи порядку p з G належать M і G не містить неабелевих підгруп порядку 8 та неабелевих підгруп порядку p^4 і експоненти p . Нехай $C \neq C_G(N)$. Тоді $C \triangleleft G = CX = C \langle x \rangle$,

$O \cap X = \langle x^p \rangle \times \langle y \rangle$, $C \cap \langle x \rangle = \langle x^p \rangle$, $[G:C] = p$. Зрозуміло, що $N \leq Z(G)$, $w(G) = N \times \langle z \rangle = M$, $|z| = p$. Оскільки $X \not\leq G$, то $[G:X] > p$ і $M < G$. Нехай $u \in C \setminus M$. Тоді $|u| = p^2$ і за попереднім, $p > 4$, $w(\langle u \rangle) \leq Z(G)$. Нехай $N \cap \langle u \rangle = 1$. Тоді за лемою 2.2.3 $w(\langle u \rangle \times \langle x \rangle) = \langle u \rangle \times w(\langle u \rangle) \triangleleft G$, $X \cap (\langle u \rangle \times w(\langle u \rangle)) = \langle u \rangle \triangleleft X$, що неможливо. Отже, $N \cap \langle u \rangle = N \cap \Phi(\langle u \rangle) = w(\langle u \rangle) \leq Z(G)$. Оскільки $M \not\leq Z(G)$, то $w(\langle u \rangle) = \langle c \rangle$. Зрозуміло, що підгрупа C містить $V = \langle u \rangle M = \langle \langle u \rangle \times \langle y \rangle \rangle \lambda \langle z \rangle$. Звідси $[u, z] \in N = \langle c \rangle \times \langle y \rangle \leq Z(G)$.

Покажемо, що $[u, z] \in \langle c \rangle$. Нехай $[u, z] \notin \langle c \rangle$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[u, z] = u$. Легко бачити, що $V' = \langle y \rangle$. За теоремою 1.2.2 $V \triangleleft G$ і тому $\langle y \rangle \triangleleft G$, $y \in Z(G)$, що не так. Отже, $[u, z] \in \langle c \rangle$. Тепер для будь-якого елемента $f \in M \setminus \langle c \rangle$ G містить підгрупу $\langle u \rangle \lambda \langle f \rangle$, $|f| = p$, у якій за попереднім, $w(\langle u \rangle \lambda \langle f \rangle) = \langle c \rangle \times \langle f \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що $M/\langle c \rangle$ центральна підгрупа з $G/\langle c \rangle$, яка містить комутант $G/\langle c \rangle$. Оскільки G - неметабільтова група, то $|G'| \in \{p^2, p^3\}$.

Покажемо, що $|G'| = p^2$. Якщо G - 2-породжена група, то 2-породженою буде і $G/\langle c \rangle$. Але тоді з умови $G'/\langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$ випливає, що $|(G/\langle c \rangle)'| \leq p$ і тому $|G'| = p^2$. Нехай далі G не породжується двома елементами. Покажемо, що $C/\langle y \rangle$ не містить підгрупи кватерніонів $H/\langle y \rangle$ порядку 8. Дійсно, нехай це не так, тобто $H/\langle y \rangle$ - група кватерніонів порядку 8. Оскільки G не містить групи кватерніонів порядку 8, то $\langle y \rangle$ недоповнюється в H . В силу твердження 1.1.11 з [16] $H = \langle x_1 \rangle \lambda \langle y_1 \rangle$, $|x_1| = |y_1| = 4$, $x_1 \in C \setminus M$, $y_1 \in C \setminus M$. За попереднім, $x_1^2 = y_1^2$, що неможливо. Отже, $C/\langle y \rangle$ не містить підгрупи кватерніонів порядку 8.

Нехай $C/\langle y \rangle$ містить підгрупу $H/\langle y \rangle = \langle \langle y \rangle x_1 \rangle \lambda \langle \langle y \rangle y_1 \rangle$, де $|x_1| > p$, $\langle y \rangle y_1 \neq 1$. Тоді за попереднім, $\langle y \rangle \cap \langle x_1 \rangle = 1$ і $\langle y \rangle \cap \langle y_1 \rangle = 1$. Звідси $H = (\langle y \rangle \times \langle x_1 \rangle) \lambda \langle y_1 \rangle$ і $w(H) = M = \langle y \rangle \times w(\langle x_1 \rangle) \times w(\langle y_1 \rangle)$. Оскільки $|x_1| > p$, то за попереднім $w(\langle x_1 \rangle) = \langle c \rangle$. Ясно, що $w(\langle y_1 \rangle) \cap \langle c \rangle = 1$ і за попереднім $|y_1| = p$. Припустимо, що $|G'| = p^3$. Тоді $G' = M$. Нехай $C/\langle y \rangle$ - метациклічна група. Очевидно, $C/\langle y \rangle$ містить підгрупу $M/\langle y \rangle$ типу (p, p) і елемент $\langle y \rangle u$, $\langle y \rangle u \neq 1$. Тоді $|C/\langle y \rangle| > p^2$ і, значить, $C/\langle y \rangle = H/\langle y \rangle$. Оскільки $M = w(H) = w(C) \leq \Phi(G)$, то G - 2-породжена група, що неможливо. Отже, $C/\langle y \rangle$ - неметациклічна група. Звідси $C/\langle y \rangle$ містить мінімальну неметациклічну підгрупу $F/\langle y \rangle$, яка може бути групою одного з типів 1 - 5 теорема 1.3.3. Зрозуміло, що F - немета-

циклічна група, яка містить мінімальну неметациклічну підгрупу D тих же типів теореми 1.3.3. За теоремою 1.3.4 $D \triangleleft G$ і $F \triangleleft G$. При $D' = \langle u \rangle$ чи $F' = \langle u \rangle$ маємо $u \in Z(G)$, що неможливо.

Припустимо, що $\exp(F/\langle u \rangle) = p$, тобто $F/\langle u \rangle$ - група типу 1 теореми 1.3.3. Тоді за попереднім для будь-якого $h \in F \setminus \langle u \rangle$ $\langle h \rangle \cap \langle u \rangle = 1$ і $|h| = p$. Звідси $\exp(F) = p$, $|F| = p^4$, що неможливо. Отже, $\exp(F/\langle u \rangle) > p$. За попереднім, $F/\langle u \rangle$ не може бути ні групою типу 3 чи 4 теореми 1.3.3 ($F/\langle u \rangle$ не містить груп кватерніонів порядку 8).

Припустимо, що $F/\langle u \rangle$ - група типу 5 теореми 1.3.3. Тоді $F/\langle u \rangle$ містить $H/\langle u \rangle$, де $H/\langle u \rangle = \langle \langle u \rangle x_1 \rangle \times \langle \langle u \rangle u_1 \rangle$ - група типу (4,4), що за попереднім неможливо.

Нехай, нарешті, $F/\langle u \rangle$ - група типу 2 теореми 1.3.3. Тоді $p = 3$ і D - група типу 2 теореми 1.3.3, $|D| = 3^4$, $|F| = 3^5$. За теоремою 1.3.4 G/D - абелева 3-група. Звідси $M \leq w(D) = D'$ і $|D'| = 9$, що неможливо. Отже, завжди $|G'| = p^2$. Звідси $M \setminus G'$ містить d , $|d| = p$. В силу теореми 0.2.1 з [44] $G = K \ltimes \langle v \rangle$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v \rangle) = M$, $w(K) = G'$, $G' = K' [K, \langle v \rangle] \triangleleft K$ і $\exp(K) > p$. Можливі випадки: 1) K - метациклічна група; 2) K - неметациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $K = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|K'| \in \{1, p\}$. За попереднім, K неізоморфна групі кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що K - абелева група чи група Міллера - Морено. Звідси без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Покажемо, що $\alpha = 2$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді за попереднім $\langle a^p \rangle \triangleleft G$ і в G існує підгрупа $\langle a^p \rangle \ltimes \langle v \rangle$. При $|v| > p$ за теоремою 1.2.2 $\langle a^p \rangle \ltimes \langle v \rangle \triangleleft G$. При $|v| = p$ за теоремою 1.2.2 $w(\langle a \rangle) \times \langle v \rangle \triangleleft G$. Тому завжди $\langle a^p \rangle \ltimes \langle v \rangle \triangleleft G$ і $[v, b] \in (\langle a^p \rangle \ltimes \langle v \rangle) \cap G' = \langle c \rangle$. Ясно, що $[a, v] \in (\langle a^p \rangle \ltimes \langle v \rangle) \cap G' = \langle c \rangle$ і, значить, $G' = \langle c \rangle$, що неможливо. Отже, $\alpha < 3$. При $K' \neq 1$ $\alpha > 1$ і тому $\alpha = 2$. При $K' = 1$ без порушення загальності можна вважати, що $\alpha \geq \beta > 0$. Оскільки $\exp(K) > p$, то $\alpha \neq 2$. Звідси $\beta \in \{1, 2\}$. Можливі випадки: 1.1) $K' = 1$; 1.2) $K' \neq 1$.

Випадок 1.1. Нехай $\beta = 2$. Тоді $G' = w(K) \leq Z(G)$, $v^p \in Z(G)$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v \rangle) = M \not\leq Z(G)$. Звідси $|v| = p$ і тому $G = KX$, $[G:K] = p$, $[X:(K \cap X)] = p$, $K \cap \langle u \rangle = 1$. Ясно, що $(K \cap X) \triangleleft G$. За попереднім, $w(X) \triangleleft G$. Звідси $X = (K \cap X)w(X) \triangleleft G$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$.

При $|v| = p$ $|G| = p^4$ і G - метабільтова група, що не

так. Тому $\langle v \rangle > p$. Якщо $[b, v] = 1$, то $b \in Z(G)$. Якщо $\langle v \rangle > p^2$, то в G існує підгрупа $X_1 = \langle b \rangle \times \langle v \rangle$. Завдяки лемі 2.2.3 $w(X_1) = \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle) \triangleleft G$. Ясно, що $K \cap w(X_1) = \langle b \rangle \triangleleft G$ і тому $b \in Z(G)$. Отже, завжди $b \in Z(G)$ і $M = \langle a^p \rangle \times \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle) \leq Z(G)$, що неможливо. Звідси $\langle v \rangle = p^2$, $[b, v] \neq 1$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle \lambda \langle v \rangle$, комутант якої $\langle [b, v] \rangle \leq Z(G)$. Тому $[b, v] = a^{\beta p}$, $0 < \beta < p$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, v] = b$. Звідси $G = \langle a, v \rangle$, $\langle G \rangle = p^5$, $\langle X \rangle = p^3$, $\langle x \rangle = p^2$. Якщо $KX = G$, то як і раніше при $\beta = 2$ $X \triangleleft G$, що не так. Отже, $KX < G$. Тоді $KX = K \times \langle v \rangle$ - абелева група, що не знову так. Випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $[a, b] = a^p$. Нехай $\beta = 1$. Як і у випадку 1.1 $\langle v \rangle = p^2$. При $KX = G$ одержимо $G = K \lambda \langle x \rangle$, $\langle K \cap X \rangle = p$, $\langle K \cap X \rangle \triangleleft X = \langle x \rangle \times \langle K \cap X \rangle$ - абелева група, що не так. Отже, $KX < G$, $KX = X_2 = K \times \langle v \rangle$. Зрозуміло, що $p > 2$, $w(K) = w(X) = G'$ і тому $X \triangleleft G$, що неможливо. Таким чином, $\beta > 1$ і тому $w(K) = G' = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leq Z(G)$. Оскільки $M = w(K) \times w(\langle v \rangle) \not\leq Z(G)$, то $w(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$ і $\langle v \rangle = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $v = u$, $G = KX$ і $K \cap X = \langle x \rangle$. Ясно, що $\langle x \rangle \not\leq K$. Звідси $\langle a \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, $\Phi(K) \leq Z(K)$. Тому $x \notin \Phi(K)$. Але тоді $K = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $x = b$ і $[b, u] = b^{p^{\beta-1}}$. Оскільки $w(X) = w(\langle b \rangle) \times \langle u \rangle \triangleleft G$, то $[a, u] \in w(\langle b \rangle)$. Ясно, що $[X : w(\langle b \rangle)] > 4$.

Припустимо, що $[a, u] = 1$. Тоді G містить підгрупу $\langle a \rangle \times \langle u \rangle$. За лемою 2.2.3 $\langle a^p \rangle \times \langle u \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $(\langle a^p \rangle \times \langle u \rangle) \cap \langle b \rangle = 1$. Звідси $[b, u] = 1$, що неможливо. Отже, $[a, u] \neq 1$. З цього випливає, що $[a, u] = [b, u]^i$, де i - некрратне p . Покладемо $b_1 = a^{-i} b$. Тоді $[b_1, u] = 1$, $\langle b_1 \rangle = \langle b \rangle = p^2$, $\langle b_1 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Тому без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a \rangle \lambda \langle b_1 \rangle$. При $\beta = 2$ в силу теореми 2.5.2 з [16] G - метабільна група, що не так. Звідси $\beta > 2$, $w(\langle b_1 \rangle) = w(\langle b \rangle) = \langle [a, u] \rangle$. Покладемо $b = b_1$, $x = u$ і одержимо $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - група типу 1 розглядуваної теореми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку K містить мінімальну неметабільну підгрупу D , яка може бути групою одного з типів 1 - 5 теореми 1.3.3. За попереднім, D не може бути групою жодного з типів 1, 3, 4 згаданої теореми.

Нехай D - група типу 5 теореми 1.3.3. Тоді $w(K) = G' = D' =$

$\neq w(D) \leq Z(D)$, $p = 2$, G^1 - група типу $(2,2)$, для якого $g \in G$ $g^2 \in Z(G)$, D містить елементи d_1 і d_2 такі, що $/d_1/ = /d_2/ = 4$, $D^1 = \langle d_1^2 \rangle \times \langle d_2^2 \rangle \leq Z(G)$. Як і раніше, $/v/ = 2$. Зрозуміло, що K задовольняє умову теореми 2.2.1 і може бути лише групою типу 2 чи 3 згаданої теореми. Тоді $\exp(K) = 4$. Очевидно, що $G = KX$, $y \notin K$ і тому $X = (K \cap X) \lambda \langle y \rangle$. Легко бачити, що $X^1 \leq K \cap X$ і $(K \cap X)/X^1$ - циклічна група. Звідси і $K \cap X$ - циклічна група. Оскільки $\exp(K) = 4$, то $/K \cap X/ = 4$ і тому $/X/ = 8$, що неможливо, оскільки G не містить підгруп дієдра порядку 8. Отже, D - може бути лише групою типу 2 теореми 1.3.3. Звідси $D^1 = G^1 = K^1 = w(K) = w(D) \not\leq Z(D)$. Ясно, що K задовольняє умову теореми 2.2.1 і може бути лише групою типу 4 згаданої теореми, тобто $D = K = U\langle u \rangle$, де $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /u/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a, u] = b$, $[b, u] = a^3 = u^6$, $w(K) = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$, $w(G) = M = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle)$, $b \notin Z(K)$. При $/v/ > 9$ в G існує підгрупа $\langle v^3 \rangle \lambda \langle b \rangle$. Завдяки лемі 1.2.3 $w(\langle v^3 \rangle \lambda \langle b \rangle) = w(\langle v \rangle) \times \langle b \rangle \triangleleft G$. Звідси $\langle b \rangle \triangleleft G$, що неможливо. Отже, $/v/ \in \{3, 9\}$. Зрозуміло, що $\exp(G) = 9$.

Нехай $A = O_G(G^1)$. Тоді $A \triangleleft G$, $[G, A] = 3$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle v^3 \rangle \times \langle f \rangle$, $f \neq 1$. Припустимо, що $/v/ = 9$. Тоді $/f/ = 9$. Як і раніше для G одержимо, що $w(\langle a \rangle) = w(\langle f \rangle)$, $[a, f] \in Z(A)$. Ясно, що знайдеться таке i , некротне 3, що $/a^i f/ = 3$ і $a^i f \notin M$, що неможливо. Отже, $/v/ = 3$. Без порушення загальності можна вважати, що $v = u$. Легко бачити, що $[b, u] = 1$ і $A = U \lambda \langle u \rangle$. За попереднім, $\langle a^3 \rangle \times \langle u \rangle = \langle u^3 \rangle \times \langle u \rangle \triangleleft G$. Звідси в G існують підгрупи $\langle a \rangle \lambda \langle u \rangle$ і $\langle u \rangle \lambda \langle u \rangle$ і тому $[a, u] \in \langle a^3 \rangle$, $[u, u] \in \langle u^3 \rangle$. Якщо $[u, u] = 1$, то покладемо $y = z$. Припустимо, що $[u, u] \neq 1$. Тоді $[u, b] = u^6$, $[u, u] = u^{6i}$, i - некротне 3. Покладемо $z = b^{-i} u$. Тоді $/z/ = 9$, $G = K \lambda \langle z \rangle$, $[u, z] = 1$. Перепозначимо u на x , $\langle x \rangle \times \langle z \rangle$ на X і одержимо, що $G = UX$ - група типу 2 теореми. Випадок 2 розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = UX$ - група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^n$, $U = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle \triangleleft G$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^2$, $p > 0$, $G^1 = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leq M = G^1 \times \langle u \rangle \triangleleft G$, де група G типу 1 $u = x$, а в групах G типу 2 $u = z$ і M - група типу (p, p, p) . Група G типу 1 містить ненормальну неабелеву підгрупу $\langle ab \rangle \lambda \langle u \rangle$, а група G типу 2 містить ненормальну неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle bu \rangle$. Звідси і за означенням метатамільтонових груп G - метатамільтонівна група.

Нехай $|[A;B]| > 2$. Покажемо, що $[A;B] \in N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$ чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $A \neq 1$, B - власна неаксимальна підгрупа з G , $G' \cap B = \langle c \rangle$, $|c| \in \{1, p\}$, $|B| > p^2$.

Припустимо, що $|c| = 1$. Тоді з умови $G' = w(U) \cup \langle c \rangle = 1$. Оскільки $[G:U] \leq p^3$ і $|B| > p^2$, то одержали суперечність. Отже, $|c| = p$. Легко бачити, що для будь-якого $g \in G$ $g^p \in Z(G)$. З цього випливає, що B - нециклічна група. Легко показати, що $M = w(G)$. Звідси G не містить підгруп дієдра порядку 8 та неабелевих підгруп порядку p^3 та експоненти p .

Нехай B - група кватерніонів порядку 8. Тоді $A = \Phi(B)$ і G - група типу 1, $A = B' \leq G = w(U) \leq Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що не так. Звідси $w(B)$ - група типу (p, p) , $|B'| \leq p$. При $p = 2$ G - група типу 1 теорема, всі інволюції з B належать $w(B)$. За наслідком 1.1.7 B - метациклічна група. При $p > 2$ за результатом з [42, 45] неметациклічна група B містить або підгрупу порядку p^3 і експоненти p , що в нашому випадку неможливо, або підгрупу типу 2 теорема 1.3.3 і $G' \not\leq Z(G)$. Зрозуміло, що G - група типу 2 леми, $|G| = 3^6$, $|B| = 3^4$ і тому $B \triangleleft G$, що не так. Отже, завжди B - метациклічна група. Легко бачити, що $B = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $|u| = p^4$, $w(\langle u \rangle) = \langle c \rangle$ і B - група типу 5 теорема 1.1.1. Звідси $U \cap \langle v \rangle = 1$. Для груп G кожного з типів леми $|v| = p$, $A \leq N = \langle u^p \rangle \times \langle v \rangle$. Звідси $\Delta > 1$.

Нехай G - група типу 2 леми. Тоді $\langle c \rangle = \langle a^3 \rangle$, $|u| = 9$, для будь-якого $f \in M$ $\langle c \rangle \langle f \rangle \triangleleft G$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle = N \triangleleft G$, що й треба було довести.

Нехай G - група типу 1 леми. Тоді $G = U \lambda \langle v \rangle = UB$ і без порушення загальності можна вважати, що $U \cap B = \langle u \rangle$. При $|u| > p^2$ $w(\langle u \rangle) = w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$. Але $[U, \langle v \rangle] = \langle c \rangle$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle \triangleleft G$ і тому $N \triangleleft G$, що й треба було довести.

Нехай, нарешті, $|u| = p^2$. Тоді $u = a^i b^j$. Оскільки $p > 2$ і $G' \leq Z(G)$, то $|b^j| \leq p^2$. Зрозуміло, що $|a^i| \leq p^2$. Якщо $(i, p) = 1$, то $u^p = a^{ip} b^{jp} \notin \langle b \rangle$. Звідси $\langle u \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Оскільки $[u, v] = [a^i b^j, v] = [a, v]^i = b^{ip^{i-1}}$, то $B = (\langle b^{p^{i-1}} \rangle \times \langle v \rangle) \lambda \langle u \rangle$ - неметациклічна група, що не так. При $(i, p) \neq 1$ $|b^j| = p^2$. Але тоді $u^p = (a^i b^j)^p = a^{ip} b^{jp} = b^{jp} \neq 1$ і $\langle u \rangle$ містить $w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$, $w(B) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle \triangleleft G$.

Покажемо, що $u \in Z(G)$. Дійсно, $\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leq Z(G)$, тому $a^i \in Z(G)$. Оскільки $|b^j| = p^2$, $p > 2$, то $(i, p) \neq 1$. Тоді $b^j \in Z(G)$.

і тому $u \in Z(G)$. Звідси $B = \langle u \rangle w(B) \triangleleft G$, що суперечить вибору B . Отже, завжди $[A; B] \ni N \triangleleft G$, тобто G - УШН[]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.2.2. Неметагамільтонові УШН[]-групи G порядку p^n , що мають підгрупи типу (p, p, p) , p - довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a \rangle \langle b \rangle \triangleleft G$, $/a/ \in \{p^2, p^3\}$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 0$, $X \neq 1$ та вичерпуються групами типів:

- 1) $G = U \rtimes X$, $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = p$, $/a/ = p^2$, $\beta > 2$, $[a, b] = a^p$, $[b, x] = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$;
- 2) $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $/b/ = /z/ = 3$, $/a/ = /x/ = 9$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$;
- 3) $G = U \rtimes X$, $X = \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = /x/ = 2$, $b^4 a b = a^{-1}$, $[b, x] = 1$, $[a, x] \in \langle a^4 \rangle$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. За лемою 2.2.3 всі елементи порядку p належать $M \triangleleft G$, де M - підгрупа типу (p, p, p) в G і G/M - дедекіндова група. Можливі випадки: 1) $G' \leq M$; 2) $G' \not\leq M$.

Випадок 1. У цьому випадку завдяки лемі 2.2.4 G - група типу 1 чи 2 розглядуваної теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $G/M = H/M \times D/M$ - гамільтонова група, де H/M - група кватерніонів порядку 8, D/M - елементарна абелева 2-група. Звідси $G = HD$, $H \cap D = M$, $H \triangleleft G$, $D \triangleleft G$. Зрозуміло, що H - скінченна неабелева 2-група, яка містить нормальну підгрупу типу $(2, 2, 2)$ і яка за теоремою 1.2.1 є УШН[]-групою.

Покажемо, що H - неметагамільтонова група. Дійсно, $/H'| = 2^m$, $m > 0$. Оскільки всі інволюції $z \in G$, а тому і $z \in H$, належать M і G/M - неабелева група, то H' - неелементарна абелева група і тому $m > 1$. Припустимо, що H - метагамільтонова група. Тоді за теоремою 2.1.2 H може бути метациклічною групою типу 2 згаданої теореми, що неможливо. Отже, H - неметагамільтонова група. За наслідком 2.2.3 $H = \langle a \rangle \langle b \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = /x/ = 2$, $b^4 a b = a^{-1}$, $[b, x] = 1$, $[a, x] \in \langle a^4 \rangle$. $M = N \rtimes \langle x \rangle$, $N = \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $\langle c \rangle = \langle a^4 \rangle \in Z(N)$, $a^2 b^2 = d \notin Z(N)$, $/d/ = 2$, $N = w(\langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle)$, $[b, d] = c$. Завдяки лемі 2.2.3 $N \triangleleft G$.

Покажемо, що $H = G$, тобто $D = M$. Нехай це не так. Тоді D/M містить неединичний елемент u . Оскільки всі інволюції $z \in G$ належать M

і D/M – елементарна абелева група, то $u^2 \in M$, $|u| = 4$. За лемою 2.2.3 $\langle u^2 \rangle \triangleleft G$ і тому $u^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $H' = \langle a^2 \rangle \triangleleft \triangleleft G$, $\langle c \rangle = w(\langle a^2 \rangle) \leq Z(G)$.

Нехай $\langle c \rangle = \langle u^2 \rangle$. Тоді G містить підгрупу $Q = \langle a^2, u \rangle$, $|Q| = 8$. Оскільки $G/M = H/M \times D/M$, $|a^2 M| = 2$ і $|uM| = 2$, то $Q \cap M \neq \langle c \rangle$ і σ – єдина інволюція з Q . Звідси в силу теореми 12.5.1 з [40] Q – група кватерніонів, що суперечить лемі 2.2.3. Отже, $\langle a \rangle \cap \langle u \rangle = 1$. Оскільки $u^2 \in Z(G)$, $N \not\leq Z(G)$, то $N \cap \langle u \rangle = 1$. Завдяки лемі 2.2.3 $\langle b^2 \rangle \triangleleft G$, $|b^2| = 4$, і тому за тією ж лемою в G існують нормальні підгрупи $\langle b^2 \rangle \lambda \langle u \rangle$ і $\langle b \rangle \langle u \rangle$. Звідси $(\langle a \rangle \langle b \rangle) \cap (\langle b \rangle \langle u \rangle) = \langle b \rangle \triangleleft \triangleleft N$, що неможливо. Отже, $N = G$ – група типу 3 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = UX$ – група одного з типів 1 – 3 розглядуваної теореми. Тоді $|G| = p^n$. Для груп G кожного з типів 1, 2 достатність доведена в лемі 2.2.4. Нехай G – група типу 3 теореми. Тоді $p = 2$, $n = 6$, $G' = \langle a^2 \rangle$, G містить підгрупу $M = \langle a^4 \rangle \times \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, де $d = a^2 b^2$, $\langle b \rangle \not\leq G$. Оскільки $[b, x] = 1$ і $[d, b] = [a^2, b] = a^4 = b^4$, то в G існує неабелева ненормальна підгрупа $\langle b \rangle \lambda \langle dx \rangle$. Звідси G – неметабільтова група. Покажемо тепер, що G – УШН[]-група, тобто для $|[A; B]| > 2$ $[A; B] \in N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$ чи $B \triangleleft G$, то покладемо відповідно $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\leq G$, $B \not\leq G$, $A \neq 1$, $|B| > 4$, B – власна немаксимальна підгрупа з G , $\langle a \rangle \cap B \leq \langle c \rangle = \langle a^4 \rangle$. Зауважимо, що $\exp(G) = 8$. Нехай $Z = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. Очевидно, що $Z \triangleleft G$ і G/Z – гамільтонова група. Звідси $Z \not\leq B$. Зрозуміло, що $\langle a \rangle$ неподовнюється в G , $[G; \langle a \rangle] = 8$, $|B| \geq 8$. Отже, $\langle a \rangle \cap B = 1$ і тому $\langle a \rangle \cap B = \langle c \rangle$.

Припустимо, що B – циклічна група. Тоді $|B| = 8$, $|A| = 2$ і легко бачити, що $\langle c \rangle = A$, що неможливо. Отже, B – нециклічна група. За попереднім, $d \notin B$. Покажемо, що $c \in w(B)$ – група типу (2, 2). Нехай це не так. При $|w(B)| = 2$ B – група кватерніонів. Якщо $|B| = 8$, то $\langle c \rangle = A \leq Z(G)$, що неможливо. Оскільки $B/\langle c \rangle$ підгрупа в $G/\langle a \rangle$ і $G/\langle a \rangle$ – абелева група, то $|B| \neq 16$, B містить більше ніж одну інволюцію.

Нехай $f \in G \setminus M$ і $|f| = 2$. Тоді G містить підгрупу $M_1 = M \lambda \langle f \rangle$, M_1/Z – група типу (2, 2), що не містить $a^2 Z$, $|a^2 Z| = 2$. Зрозуміло, що $G = \langle M, U \cap M = Z, U = \langle a \rangle \langle b \rangle, M = Z \times \langle x \rangle, G/Z = U/Z \times M/Z$, де U/Z – група кватерніонів порядку 8, що містить елемент $a^2 Z$.

$M/Z = \langle xZ \rangle$, $w(G/Z) = \langle Za^2 \rangle \times \langle xZ \rangle$ – група типу $(2,2)$, що не містить елемент Z . Суперечність. Отже, всі інволюції з G належать M і тому $w(B) = B \cap M$ – група типу $(2,2)$. Зрозуміло, що $\exp(B) > 2$. Легко бачити, що для будь-якого елемента $g \in G$ $\langle g^2 \rangle \triangleleft G$ і $M/\langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$. Звідси $w(B) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle$, $|v| = 2$ і $w(B) \triangleleft G$. Якщо A – елементарна абелева група, то $A \leq w(B) = N \triangleleft G$, що й треба було повести. Тому в подальшому будемо вважати, що $|A| > 2$. Тоді $|B| = 16$, $B' \leq \langle c \rangle$, в B три інволюції. За наслідком 1.1.7 B – метациклічна абелева група чи група Міллера – Морено, що не містить підгруп кватерніонів порядку 8. Тоді $B = \langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle$, де $\langle a_1 \rangle \cap \langle a \rangle$ містить $\langle c \rangle$. Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle B$ і тому $U = \langle a \rangle (U \cap B)$, $\langle b_1 \rangle \cap U = 1$. Звідси $|b_1| = 2$ і $|a_1| = 8$. За попереднім, $\langle a_1^2 \rangle \triangleleft G$, $\langle a_1^2 \rangle \times \langle b_1 \rangle = \langle a_1^2 \rangle w(B) = N \triangleleft G$. Зрозуміло, що B – група типу 5 теореми 1.1.1, для якої $A \leq N$. Отже, і в цьому випадку G – УШН[]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Л е м а 2.2.5. Нехай G – 2-група порядку 2^4 з трьома інволюціями, яка містить таку центральну інволюцію c таку, що $G/\langle c \rangle$ – група типу $(2,2,2)$. Тоді $G = Q \times D$, де Q – група кватерніонів порядку 8, $|D| = 2$.

Доведення леми випливає з наслідку 1.1.7.

Н а с л і д о к 2.2.5. Нехай G – УШН[]-група порядку 2^n з трьома інволюціями, яка містить підгрупу кватерніонів $Q \leq \langle u, v \rangle$ порядку 8. Тоді G містить підгрупу $C = Q \times \langle d \rangle \cong Q^2$, $|d| = 2$, $\Phi(Q) = \langle c \rangle \leq Z(G)$, $|c| = 2$; при циклічності G' $G/\langle c \rangle$ не містить підгруп кватерніонів.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді $w(G) = N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \triangleleft G$, $|c| = |d| = 2$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $C = QN$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q \cap N = \Phi(Q) = \langle c \rangle$ і тоді $C = Q \rtimes \langle d \rangle$. За теоремою 1.2.2 $C \triangleleft G$. Зрозуміло, що $C' = Q' = \langle c \rangle$. Звідси $c \in Z(G)$. Завдяки лемі 2.2.5 $C = Q \times \langle d \rangle$.

Нехай $G' \leq N$. Тоді при циклічності G' одержимо, що $G' = \langle c \rangle$ і $G/\langle c \rangle$ – абелева група. Отже, в цьому випадку наслідок повведений.

Нехай $G' \not\leq N$. Зрозуміло, що $G/\langle c \rangle$ – неабелева група, що містить підгрупу $C/\langle c \rangle$ типу $(2,2,2)$. Припустимо, що $G/\langle c \rangle$ – гаміль-

тонова група. Тоді в силу твердження 1.1.1 $G/\langle c \rangle$ містить підгрупу кватерніонів $H/\langle c \rangle$ порядку 8 і $G'/\langle c \rangle = (H/\langle c \rangle)'$. Якщо $\langle c \rangle$ доповнюється в H , то $H = \langle c \rangle \times Q_4$, де Q_4 - група кватерніонів порядку 8, $w(H) = w(Q_4) \times \langle c \rangle = N$ і тому $G' \leq N$, що не так. Нехай $\langle c \rangle$ не доповнюється в H . Тоді завдяки твердженню 1.1.1f з [16] $H = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $b^4ab = a^{-1}$, $c = a^2b^2$. Звідси $\langle c \rangle H' = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \times \langle c \rangle = N \geq G'$, що знову не так. Таким чином, $G/\langle c \rangle$ - недедекіндова група. За теоремою 1.2.3 $G/\langle c \rangle$ не містить підгруп типу $(2,2,2,2)$. Припустимо, що $(G/\langle c \rangle)' = 2$. Зрозуміло, що $C/\langle c \rangle$ підгрупа типу $(2,2,2)$ з $G/\langle c \rangle$. Якщо $G'/\langle c \rangle \not\leq C/\langle c \rangle$, то $G/\langle c \rangle$ містить підгрупу $G'/\langle c \rangle \times C/\langle c \rangle$ типу $(2,2,2,2)$, що неможливо в силу теореми 1.2.3. Звідси $G' \leq C$.

Нехай $|G'/\langle c \rangle| > 2$. Припустимо, що $G/\langle c \rangle$ - метабільтова група. Тоді $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути скінченною 2-групою одного з типів 7 - 13 згаданої теореми. В групі $G/\langle c \rangle$ кожного із згаданих типів $G/\langle c \rangle$ - центральна в $G/\langle c \rangle$ елементарна абелева група, яка міститься в будь-якій підгрупі $G/\langle c \rangle$ типу $(2,2,2)$. Звідси $G'/\langle c \rangle \leq C/\langle c \rangle$ і тому $G' \leq C$.

Нехай $G/\langle c \rangle$ - неметабільтова група. Тоді $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову теореми 2.2.2 і може бути групою типу 1 чи 3 згаданої теореми. В групі $G/\langle c \rangle$ типу 1 згаданої теореми $G'/\langle c \rangle$ - центральна елементарна абелева підгрупа з $G/\langle c \rangle$. Тому, як і раніше, $G' \leq C$. Нехай $G/\langle c \rangle$ - група типу 3 теореми 2.2.2. Тоді $G/\langle c \rangle$ має циклічний комутант порядку 4, $G/\langle c \rangle = (\langle \langle c \rangle a \rangle \langle \langle c \rangle b \rangle) \ltimes \langle \langle c \rangle x \rangle$, $|c \rangle a| = |c \rangle b| = 8$, $|c \rangle x| = 2$, $(\langle c \rangle b)^{-1}(\langle c \rangle a)(\langle c \rangle b) = (\langle c \rangle a)^{-1}$ і $C/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle a^4 \rangle \times \langle \langle c \rangle a^2b^2 \rangle \times \langle \langle c \rangle x \rangle$. Звідси $C = \langle c, a^4, a^2b^2, x \rangle$.

Припустимо, що $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Тоді $N = \langle c \rangle \times \langle a^4 \rangle$. Оскільки N містить всі інволюції з G , то $x^2 = c = (a^2b^2)^2$. Зрозуміло, що $G' = \langle c \rangle \times \langle a^2 \rangle \leq \langle c \rangle \times \langle a \rangle \triangleleft G$. Звідси $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ і тому $a^4 \in Z(G)$. В G існує підгрупа $\langle a^2 \rangle \ltimes \langle x \rangle$ і $[a^2, x] \in \langle c \rangle$. Звідси $[a^2, x] = 1$. Оскільки $\langle \langle c \rangle a^4 \rangle = \langle \langle c \rangle b^4 \rangle$, то $\langle c \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Із умови $[c \rangle x, c \rangle b] = 1$ випливає, що $[x, b] \in \langle c \rangle$. В G існує підгрупа $\langle x \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|b| = 8$. Завдяки теоремі 1.2.2 $\langle x \rangle \ltimes \langle b \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що $[a, b] \in \langle c \rangle \times \langle a^2 \rangle \cap (\langle x \rangle \ltimes \langle b \rangle) = N$. Звідси $G' \leq N$, що суперечить вибору G' . Отже, $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$. Звідси $a^8 = b^8 = c$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle b^4 \rangle$. В G існує підгрупа $X = \langle a \rangle \ltimes \langle x \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle x \rangle \leq \langle c \rangle$, $[a, x] \in \langle a^4 \rangle$. Зрозуміло, що $[X, \langle a \rangle] = 2$ і за теоремою 12.5.1 з [40] без порушення загальності можна вважати, що $X = \langle a \rangle \ltimes \langle x \rangle$,

$/x/ = 2$, $[a, x] \in \langle c \rangle = \langle a^2 \rangle$. Звідси $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$. Ясно, що $d^2 \in Z(X)$ і тому $a^4 \in Z(G)$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $Y = \langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle$. Знову $\langle a^2 \rangle$ максимальна підгрупа з Y . В силу теореми 12.5.1 з [40] $Y = \langle a^2 \rangle \rtimes \langle z \rangle$, де $/z/ = 2$. Звідси G містить більше трьох інволюцій. Суперечність. Отже, $G/\langle c \rangle$ не може бути групою типу 3 теореми 2.2.2. Таким чином, завжди $G' \leq C$.

Нехай G' - циклічна група. Тоді $C > G'$. Покажемо, що $G/\langle c \rangle$ не містить груп кватерніонів порядку 8. Нехай це не так. Тоді $G/\langle c \rangle$ містить групу кватерніонів $H/\langle c \rangle$ порядку 8. Як і раніше, при доповнювальності $\langle c \rangle$ в H і недоповнювальності $\langle c \rangle$ в H одержимо, що $H'\langle c \rangle$ - група типу $(2, 2)$, що належить циклічній групі G' . Суперечність. Отже, при циклічності G' наслідок доведений повністю.

Нехай G' - нециклічна група. За попереднім, $G' \leq C$. Покажемо, що $G' < C$. Нехай це не так. Тоді $C/\langle c \rangle = (G/\langle c \rangle)'$. Завдяки теоремі 2.2.2 $G/\langle c \rangle$ не може бути неметабільною групою і тому $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову теореми 2.1.2, за твердженням якої $C/\langle c \rangle$ належить $Z(G/\langle c \rangle)$. Звідси $\langle u \rangle \triangleleft G$, $\langle v \rangle \triangleleft G$ і, значить, $Q \triangleleft G$ і $Q \leq \Phi(G)$. Ясно, що $C_G(Q) = C_G(\langle u \rangle) \cap C_G(\langle v \rangle)$, $[G: C_G(Q)] = 4$, $|Q \cap C_G(Q)| = 2$. Звідси $G = O C_G(Q)$ і тому $Q \not\leq \Phi(Q)$, що не так. Отже, $G' < C$. Наслідок доведений.

Лема 2.2.6. Нехай G - УШН[]-група з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку 8 і G' - циклічна група порядку більше 2. Тоді G має вигляд $G = U \rtimes \langle x \rangle$, $U = \langle a, b \rangle$, $/a/ = 2^4$, $a \in \{2, 3\}$, $/b/ = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^2 = b^2$, $/x/ \in \{2, 4\}$, $[a, x] \in \langle a^{2^{4-1}} \rangle$ та є групою одного з типів:

- 1) $G = U \rtimes \langle x \rangle$, $/x/ = 2$, $a = 3$;
- 2) $a = 2$, $/x/ = 4$, $[b, x] = a$, $[a, x] = a^2$.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 2.2.5 G містить підгрупу $C = Q \rtimes \langle d \rangle \triangleleft G$, де Q - група кватерніонів порядку 8, $/d/ = 2$, $\Phi(Q) = \langle c \rangle \leq Z(G)$. $C > G'$ і $G/\langle c \rangle$ не містить підгруп кватерніонів. Якщо $G/\langle c \rangle$ - неабелева група, то в силу твердження 1.1.1 $G/\langle c \rangle$ - негамільтонова група з комутантом порядку 2, який міститься в підгрупі $C/\langle c \rangle$ типу $(2, 2)$. Тому $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову наслідку 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 1 - 3 цього наслідку.

Нехай $G/\langle c \rangle$ - група типу 1 наслідку 2.1.2. Тоді $G/\langle c \rangle =$

$= U/\langle c \rangle \times \langle \langle c \rangle x \rangle$, $/\langle c \rangle x/ = 2$, $U/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle a \rangle \lambda \langle \langle c \rangle b \rangle$, $/\langle c \rangle a/ = 2^{\beta}$, $\Delta > 1$, $/\langle c \rangle b/ = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $\langle \langle c \rangle a^{2^{\Delta-1}} \rangle = \langle \langle c \rangle [a, b] \rangle$. Оскільки G' - циклічна група, то $c \in \langle a \rangle$, $/a/ = 2^{\Delta}$, $\Delta = \Delta + 1 > 2$, $\langle a \rangle \triangleleft G$, $U = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \leq \langle a^{2^{\Delta-1}} \rangle$, $G = U \langle x \rangle$, $U \cap \langle x \rangle = U \cap \langle x^2 \rangle = \langle a \rangle \cap \langle x^2 \rangle \leq \langle c \rangle$. Зрозуміло, що в G існує підгрупа $A = \langle a \rangle \langle x \rangle$, $[a, x] \in \langle w(\langle a \rangle) \rangle = \langle c \rangle$. В силу теореми 12.5.1 з [40] без порушення загальності можна вважати, що $A = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $/x/ = 2$. Ясно, що $w(G) = w(A) = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$. Звідси U містить тільки одну інволюцію. В силу теореми 12.5.1 з [40] $b^2 = c$, $b^4 ab = a^{-1}$. Оскільки $/G'/\langle c \rangle/ = 2$ і $U' = \langle a^2 \rangle$, то $/a/ = 8$, $Q = \langle a^2, b \rangle$. В силу наслідку 2.2.5 $Qw(G) = G = Q \times \langle x \rangle$. Звідси $[Q, \langle x \rangle] = 1$. Зрозуміло, що $[a, x] \in \langle c \rangle$. Нехай $[a, x] = c$. Тоді G містить підгрупу дієдра $\langle ab \rangle \lambda \langle x \rangle$ порядку 8, що неможливо (в групі дієдра 5 інволюцій). Отже, $[a, x] = 1$ і G - група типу 1 розглядуваної леми.

Нехай $G/\langle c \rangle$ - група типу 2 наслідку 2.1.2. Тоді $G/\langle c \rangle = (\langle \langle c \rangle a \rangle \times \langle \langle c \rangle b \rangle) \lambda \langle \langle c \rangle x \rangle$, $/\langle \langle c \rangle a \rangle/ = 2^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $/\langle \langle c \rangle b \rangle/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $/\langle \langle c \rangle x \rangle/ = 4$, $\langle c \rangle a \in Z(G/\langle c \rangle)$, $\langle c \rangle [b, x] = \langle c \rangle a^{2^{\beta-1}}$. Оскільки G' - циклічна група, то $c \in \langle a \rangle$, $/a/ = 2^{\Delta}$, $\Delta = \gamma + 1$, $\Delta > 1$, $\langle a \rangle \triangleleft G$. Ясно, що в G існують підгрупи $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $X = \langle a \rangle \langle x \rangle$, $A \cap X = \langle a \rangle$, $w(\langle a \rangle) = \langle c \rangle$, $[G:A] = 4$, $x^4 \in \langle c \rangle$. Підгрупа $X_1 = \langle x^2 \rangle G'$ містить $N = \langle c \rangle \times \langle x_1 \rangle$, де $/x_1/ = 2$, $x_1 \notin A$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^{2^{\Delta-2}} \rangle$. Оскільки $[a, b] \in \langle c \rangle$, в G тільки три інволюції і $x_1 \notin A$, то в A тільки одна інволюція c . В силу теореми 12.5.1 з [40] A - група кватерніонів порядку 8. Звідси $b^2 = c = a^2$. Ясно, що $G' = \langle a \rangle$, $[a, x] \in \langle a^2 \rangle$, $[b, x] = a$, $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle \leq \langle c \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle a^2 \rangle$. Якщо $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, то покладемо $U = A$ і одержимо, що $G = U \lambda \langle x \rangle$.

Покажемо, що $[a, x] = a^2$. Дійсно, нехай це не так. Ясно, що $[a, x^2] = 1$, $[x^2, b] = [x, b][[x, b], x][x, b] = a^{-1} a^{-1} = a^{-2} = a^2 = b^2$. Звідси G містить підгрупу дієдра $\langle b \rangle \lambda \langle x^2 \rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, $[x^2, b] = 1$, $[a, x] = a^2$ і тому G - група типу 2 розглядуваної леми. Нехай $\langle b \rangle \cap \langle x \rangle \neq 1$. Тоді $x^4 = c$. Зрозуміло, що $[b, x^2] = [x^2, b]^{-1} = ([x, b][[x, b], x][x, b])^{-1} = (a^{-1} a^{-1} x a^{-1}) = a^{-2} c^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \notin Z(G)$. Покладемо $y = bx$. Тоді $y^2 = bxbx = bx^2(x^4bx) = bx^2ba = b^2x^2(x^2b^4x^2b)a = b^2x^2c^{\frac{1}{2}}a = c^{\frac{1}{2}}x^2a$. Оскільки $[a, x] \in \langle c \rangle$, то $[x^2, a] = 1$. Зрозуміло, що $y^2 \neq 1$. Але $y^4 = 1$. Звідси $/y/ = 4$ і $\langle y \rangle \cap A = 1$. Покладемо $U = A$, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ і одержимо, що G - група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай, нарешті, $G/\langle c \rangle$ - група типу 3 наслідку 2.1.2. По-

кажемо, що це неможливо. Дійсно, нехай не так. Тоді $G/\langle c \rangle \cong (U/\langle c \rangle \times \langle \langle c \rangle a \rangle) \rtimes \langle \langle c \rangle b \rangle$, де $U/\langle c \rangle \cong \langle \langle c \rangle u \rangle \rtimes \langle \langle c \rangle v \rangle$, $/\langle \langle c \rangle u \rangle/ = 2^4$, $\Delta > 2$, $/\langle \langle c \rangle v \rangle/ = / \langle \langle c \rangle a \rangle/ = / \langle \langle c \rangle b \rangle/ = 2$, $\langle c \rangle u^{2^{4-\Delta}} = [\langle c \rangle u, \langle c \rangle v] = [\langle c \rangle a, \langle c \rangle b] = \langle c \rangle [u, v] = \langle c \rangle [a, b]$, $[U/\langle c \rangle, \langle \langle c \rangle b \rangle] = 1$. Зрозуміло, що $G' \leq \langle u \rangle$, $/u/ = 2^4$, $\Delta = \Delta + 1 > 3$ і $G' \leq \langle u^4 \rangle$. Ясно, що $U = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $[U: \langle u \rangle] = 2$. В силу теореми [2.5.1] з [40] без порушення загальності можна вважати, що $U = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $/v/ = 2$. Ясно також, що $N = \langle c \rangle \times \langle v \rangle \leq U$. В G існує підгрупа $A = \langle u \rangle$. $\langle a \rangle$, для якої, як і для підгрупи U , маємо $A = \langle u \rangle \rtimes \langle a \rangle$, $/a/ = 2$ і $a \notin U$. Звідси $a \notin N$, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок неможливий. Лема доведена.

Лема 2.2.7. Нехай G - УШН[]-група порядку 2^m з трьома інволюціями, що містить підгрупу кватерніонів порядку 8. Тоді $/G'/ \in \{2, 4\}$ або $G = U \rtimes \langle a \rangle$, $U = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \triangleleft G$, $/a/ = /b/ = 8$, $/x/ = 4$, $U \cap \langle a \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^4 a b = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^2$.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді G містить підгрупу кватерніонів $Q = \langle u, v \rangle$ порядку 8. Якщо $/G'/ = 2$, то лема доведена. Нехай $/G'/ = 2^m$, $m > 1$. Якщо G' - циклічна група, то G задовольняє умову лемми 2.2.6, за твердженням якої $/G'/ = 4$. Тому далі G' - нециклічна група. За наслідком 2.2.5 $G > C > G'$, де $C = Q \times \langle d \rangle$, $/d/ = 2$, $w(Q) = \phi(Q) = Q' = \langle c \rangle \leq Z(G)$, $/o/ = 2$, $w(G) = w(C) = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. Якщо G' - елементарна абелева група, то $/G'/ = 4$ і лема доведена. Нехай G' - неелементарна абелева група і $m > 2$. Оскільки $/O/ = 16$ і $C > G'$, то $/G'/ = 8$. Відомо [46], що група кватерніонів не може бути комутантом 2-групи, тому $G'' \neq 1$ і $G' = \langle u \rangle \times \langle d \rangle$, $/u/ = 4$. Припустимо, що $\langle u \rangle \triangleleft G$. Якщо $\langle v \rangle \triangleleft G$, то, як і в лемі 2.2.6, $G = OQ_G(Q)$, $u \in \phi(G)$, що неможливо. Звідси або $\langle u \rangle \ntriangleleft G$, або $\langle v \rangle \ntriangleleft G$. Тому $O/\langle c \rangle$ - нецентральна підгрупа типу $(2, 2, 2)$ в $G/\langle c \rangle$ і $G'/\langle c \rangle$ - група типу $(2, 2)$. Припустимо, що $G/\langle c \rangle$ - метабільтова група. Тоді $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 7, 9 - її згаданої теореми. Тому $G'/\langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$. Звідси $\langle u \rangle \triangleleft G$.

Нехай $G/\langle c \rangle$ - неметабільтова група. Тоді $G/\langle c \rangle$ задовольняє умову теореми 2.2.2 і може бути лише групою типу 1 цієї теореми, у якій $G'/\langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$. Тому $\langle u \rangle \triangleleft G$. Отже, завжди $\langle u \rangle \triangleleft G$ і $\langle u \rangle/\langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$. Зрозуміло, що $G'/\langle c \rangle = \langle u \rangle/\langle c \rangle \times \langle \langle c \rangle d \rangle$ і

$\langle c \rangle d \in Z(G/\langle c \rangle)$. Звідси $G'/\langle c \rangle$ центральна в $G/\langle c \rangle$ підгрупа типу (2,2). Як згадувалось раніше, група $G/\langle c \rangle$ - група одного з типів 7, 9 - II теорему 2.1.2 або група типу I теорему 2.2.2. Група $G/\langle c \rangle$ кожного з згаданих типів містить метациклічну підгрупу $U/\langle c \rangle$, для якої $w(U/\langle c \rangle) = G'/\langle c \rangle$. За попереднім, $\langle v \rangle/\langle c \rangle \not\leq Z(G/\langle c \rangle)$ і тому $v \notin U$.

Нехай $X = UQ$. Зрозуміло, що $U \cap Q = \langle u \rangle$, $[X:U] = 2$. Очевидно, що в групі $G/\langle c \rangle$ кожного з типів IO, II теорему 2.1.2 всі інволюції центральні і тому $G/\langle c \rangle$ може бути лише групою типу 7, 9 теорему 2.1.2 і групою типу I теорему 2.2.2. Для груп $G/\langle c \rangle$ згаданих типів $[G/\langle c \rangle:U/\langle c \rangle] = 2$. Звідси $[G:U] = 2$ і, значить, $X = G$. Для груп $G/\langle c \rangle$ згаданих типів $U/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle a \rangle \rtimes \langle \langle c \rangle b \rangle$, $|\langle c \rangle a| = 4$, $[\langle c \rangle a, \langle c \rangle b] = \langle c \rangle a^2 = \langle c \rangle [a, b]$, $|\langle c \rangle b| = 2^{\gamma}$, $\gamma \geq 1$. Зрозуміло, що $w(U/\langle c \rangle) = \langle \langle c \rangle a^2 \rangle \rtimes \langle \langle c \rangle b^{2^{\gamma-1}} \rangle \leq \Phi(U/\langle c \rangle) \leq \Phi(G/\langle c \rangle)$. Ясно, що $U = \langle \langle c \rangle a \rangle \langle \langle c \rangle b \rangle$, $|a| \in \{4, 8\}$, $|b| \in \{2^{\gamma}, 2^{\gamma+1}\}$, $G' = \langle u \rangle \rtimes \langle d \rangle \leq \Phi(U)$. Можливі випадки: 1) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$; 2) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $|a| = 8$, $U = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \leq \langle a^4 \rangle = \langle c \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle u \rangle \leq \langle c \rangle$. Оскільки $G'/\langle c \rangle = w(U/\langle c \rangle) \leq Z(G/\langle c \rangle)$, то $\langle a^2 \rangle/\langle c \rangle \leq G'/\langle c \rangle$. Тому без порушення загальності можна вважати, $u = a^2$. Ясно, що U містить підгрупу $A = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$ і A містить G' . Звідси G містить підгрупу $V = A \langle v \rangle$, $v \notin A$, $v^2 = c = a^4$. За попереднім, $[u, v] = c$, $[v, d] = 1$, $[a^2, v] = c$. Покладемо $|b| = 2^{\beta}$. Тоді $\beta \in \{\gamma, \gamma+1\}$, $\beta \geq 1$. Для груп $G/\langle c \rangle$ кожного з розглядуваних типів $[\langle c \rangle a, \langle c \rangle b] = \langle c \rangle b^{2^{\beta-1}}$. Можливі випадки: 1.1) підгрупа $\langle a \rangle$ доповнюється в U ; 1.2) підгрупа $\langle a \rangle$ недоповнюється в U .

Випадок 1.1. У цьому випадку $[a, v] \in \langle c \rangle$ і $\langle b^{2^{\beta-1}} \rangle = N$ і $|[a, v]| \leq 2$, $\beta = \gamma$. За лемою 2.2.3 $w(\langle b \rangle) \leq Z(G)$ і тому $N \leq Z(G)$. Звідси $[a, d] = 1$ і $[a, v] \in Z(V)$. Але тоді $[a^2, v] = [a, v]^2 = 1$, що не так. Випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $\beta = \gamma+1 > 2$, $c = b^{2^{\beta-1}}$, $d = a^2$. $b^{2^{\beta-2}}$. Легко бачити, що $U/\langle c \rangle$ - група одного з типів 7, 9 теорему 2.1.2, для якої $\langle c \rangle [a, b] = \langle c \rangle b^2$. Оскільки підгрупа $\langle a \rangle$ недоповнюється в U , то $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle c \rangle = \langle v^2 \rangle$ і оскільки $G'/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle a^2 \rangle \rtimes \langle \langle c \rangle b^2 \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$, то $\langle b^2 \rangle \triangleleft G$ і $|\langle c \rangle b^2| = 2$. Звідси $\beta = 3$. В силу теорему 1.2.2 з [16] в нерозщиплювальній метациклічній підгрупі U/U' > 2 . Звідси $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. Але тоді $b^2 ab = a^{-1}$. Зрозуміло, що $\langle b^2 \rangle$ недоповнюється в $\langle b^2 \rangle \langle v \rangle$. Отже, $\langle b^2 \rangle \langle v \rangle$ - група кватерніонів порядку 8. Оскільки $c \in \langle b^2 \rangle \triangleleft G$ і $\langle c \rangle [a, v] =$

$= \langle c \rangle b^2$, то $\langle [a, v] \rangle = \langle b^2 \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, v] = b^2$. Зрозуміло, що $U/\langle c \rangle$ - неабелева група і тому $G/\langle c \rangle$ - група типу 9 теореми 2.1.2, у якій $\langle c \rangle [b, v] = \langle c \rangle a^2 b^{2t}$, де $t \in \{0, 1\}$.

Покажемо, що $t = 1$. Дійсно, нехай це не так, тобто $t = 0$. Тоді з умови $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ випливає, що $\langle [b, v] \rangle = \langle a^2 \rangle$, тобто $[b, v] = a^{2i}$, i - непарне число. Покладемо $b_1 = ab$. Тоді $U = \langle a \rangle \langle b_1 \rangle$, $|b_1| = 8$, $[b_1, v] = b^2 a^{2i}$, $|[b_1, v]| = 2$. Замінивши b на b_1 одержимо, що $[b, v] = a^2 b^2$. Тому можна вважати, що $t = 1$. Покладемо $v = x$ і одержимо, що $G = \langle U, x \rangle$ - група з леми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $\langle a \rangle \cap Q = \langle a \rangle \cap \langle c \rangle = 1$, $|a| = 4$, $\langle b \rangle \cap \cap \langle a \rangle = 1 = \langle a \rangle \cap \langle u \rangle$. Як і раніше, для груп $G/\langle c \rangle$ кожного з розглядуваних типів $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $\langle c \rangle [a, v] = \langle c \rangle b^{2^{\beta-2}} Z(G/\langle c \rangle)$, $\Phi(U) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$, $u \in \Phi(U)$, $\exp \Phi(U) > 2$. Звідси $\beta > 2$, а значить, $w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$. Тому $\langle b^{2^{\beta-2}} \rangle \triangleleft G$, $[a, v] = b^{2^{\beta-2}}$. Зрозуміло, що $G' = \langle a^2 \rangle \times \langle b^{2^{\beta-2}} \rangle = \langle a^2 \rangle \times \langle u \rangle$. Таким чином, в G існує підгрупа $\langle b \rangle \lambda \langle a^2 \rangle \triangleleft G$ і $\Phi(\langle b \rangle \lambda \langle a^2 \rangle) = \langle b^2 \rangle$ і тому $\langle b^2 \rangle \triangleleft G$. В G існує підгрупа $\langle b^2 \rangle \langle v \rangle$, у якій $\langle b^2 \rangle$ недоповнюється. Але тоді $\langle b^{2^{\beta-2}} \rangle \langle v \rangle$ - група кватерніонів порядку 8.

Припустимо, що $\beta > 3$. Тоді $\langle b^2 \rangle \langle v \rangle$ - група кватерніонів порядку більше 8, яка завдяки теоремі 1.2.2 нормальна в G . Але тоді в G існує підгрупа $\langle b \rangle \langle v \rangle$, в якій підгрупа $\langle b \rangle$ недоповнюється. В силу [40] $\langle b \rangle \langle v \rangle$ - група кватерніонів порядку більше 16 з комутатором $\langle b^2 \rangle$, $|b^2| > 4$, що неможливо. Отже, $\beta = 3$ і тому $G/\langle c \rangle$ не може бути групою типу 1 теореми 2.2.2.

Можна вважати, що $a^2 = d$. Ясно, що G містить підгрупу $B = \langle b^2 \rangle \lambda \langle a \rangle$. Покажемо, що $G' = \langle d \rangle \times \langle b^2 \rangle \leq Z(U)$. За теоремою 1.2.2 $B \triangleleft G$. Ясно, що $w(B) = w(G) = w(U) = N$. Покажемо, що $N \leq Z(G)$. Для цього досить показати, що $d \in Z(U)$. Якщо $[a, b^2] \neq 1$, то $[a, b^2] = c \in Z(G)$ і $\langle dc \rangle$ характеристична підгрупа з B . Звідси $dc \in \in Z(G)$ і тому $d \in Z(G)$, $N \leq Z(G)$. Нехай $[a, b^2] = 1$. Тоді $b^2 \in \in Z(U)$ і $[a, b] \in N$. Оскільки $[N, \langle a \rangle] = 1$, то $[a, b]^2 = [a^2, b] = 1$ і, значить, $a^2 = d \in Z(U)$. Отже, $N \leq Z(G)$. Оскільки $[a, b] \in N \leq \leq Z(U)$, то знову $[a, b^2] = [a, b]^2 = 1$. Звідси $b^2 \in Z(U)$ і, значить, $G' \leq Z(U)$. Ясно, що тепер $[a, u] = 1$. За попереднім, $[a, v] = b^2$. За комутаторними співвідношеннями [40] $[a^2, v] = 1 = [a, v]^2 = b^4 \neq 1$, що неможливо. Отже, випадок 2 неможливий. Всі випадки розглянуті. Лема доведена.

Н а с л і д о к 2.2.6. Група G вказаного в лемі 2.2.7 типу має точно три інволюції.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді $G = U\langle x \rangle$, $U = \langle a \rangle \langle b \rangle \triangleleft G$, $[G:U] = 2$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $U \cap \langle x \rangle = \langle a^4 \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle c \rangle \triangleleft Z(G)$, $b^{-4}ab = a^{-4}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$. Зрозуміло, що $w(U) = N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle \triangleleft G$, $d = a^2b^2$, $|d| = 2$, $[d, x] = 1$, $[a^2, x] = [b^2, x] = c$. Якщо всі інволюції з G належать U , то $w(G) = N$ і наслідок доведений. Нехай $G \setminus U$ містить y і $|y| = 2$. Тоді $G = U \rtimes \langle x \rangle$. Легко бачити, що всі підгрупи порядку 4 з U нормальні, але нецентральні підгрупи G одного з типів: $\langle a^2 \rangle$, $\langle b^2 \rangle$, N і належать підгрупі $G' = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$. Всі циклічні підгрупи порядку 8 з U вичерпуються такими підгрупами: $\langle a \rangle$, $\langle ab \rangle$, $\langle b \rangle$. Оскільки $b^2 \notin Z(G)$ і $b^2 \in Z(U)$, то $[b^2, y] = c$. Ясно, що $y = ux^i$, $u \in U$. Оскільки $x^2 \in U$, $b^2 \in Z(U)$ і $[b^2, y] \neq 1$, то i - непарне число і навіть $i = 1$. Зрозуміло, що $y^2 = uxix = uxixu = ux^2uv = cu^2v = 1$, де $v = [u, x]$. При $|u| \leq 2$ $v = u^2 = 1$ і тому $c = 1$, що неможливо. Нехай $|u| = 4$. Тоді $u^2 = c$, $y^2 = v$. За попереднім, $\langle u \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle b^2 \rangle\}$, $[a^2, x] = [b^2, x] = c$ і знову $y^2 = c \neq 1$, що не так. Отже, $|u| = 8$. Але тоді $|u^2| = 4$. Оскільки $|c| = 2$ і $|y| = 2$, то $c = u^2v = u^4$. Звідси $v = u^2 \in \langle u \rangle$. За попереднім, $\langle u \rangle \in \{\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle ab \rangle\}$. Оскільки $[a, x] = b^2 \notin \langle a \rangle$ і $[b, x] = d \notin \langle b \rangle$, то $\langle u \rangle = \langle ab \rangle$. Але $[ab, x] = [a, x][b, x] = b^2d = a^2b^4 = a^6 \notin \langle ab \rangle$, що суперечить умові $v \in \langle u \rangle$. Одержані суперечності для всіх можливих порядків u показують, що всі інволюції з G належать $N = w(G)$, що й треба було довести. Наслідок доведений.

Л е м а 2.2.8. Неметагамільтонова $UHN[]$ -група G порядку 2^4 з трьома інволюціями, що не містить підгрупи кватерніонів порядку 8, є метациклічною групою.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді за умовою вона містить неабелеву підгрупу $X = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ типу 5 теорем 1.2.2 $|x| = 2^A$, $A \geq 2$, $|y| = 2$, $[x, y] = x^{2^{A-1}}$, $w(X) = w(G) = w(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$ - нецентральна в G підгрупа типу $(2, 2)$, $\langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle \triangleleft G$. Покажемо, що G - метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить мінімальну неметациклічну підгрупу U , що задовольняє умову теорем 1.3.3 і може бути групою одного з типів 4 - 6 згада-

ної теореми. Легко бачити, що G - може бути лише групою типу 5 теорема 1.3.3. Група G згаданого типу має підгрупу $H = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $[a, b] = a^2$, $\langle a^2 b^2 \rangle$ - характеристична підгрупа з H . За теоремою 1.2.2 $H \triangleleft G$, $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $\langle a^2 b^2 \rangle \triangleleft G$, $w(G) = w(H) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \times \langle a^2 b^2 \rangle \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, G - метациклічна група. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.2.3. Нільпотентні недедекіндові УШН[]-групи G висчерпуються групами типів:

1) $G = (\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $/u/ = p^A$, $A > 1$, $/v/ = p^Y$, $Y > 0$, $/z/ \in \{1, r\}$, p і r - прості числа, $[u, v] = u^{p^{A-1}}$;

2) $G = C \times O \times \langle z \rangle$, C - локально циклічна 2-група, $/C/ \leq 2$, O - група кватерніонів порядку 8, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, O - локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[u, v] = c \in C$, $/c/ = p$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v \rangle] = 1$, $/z/ \in \{1, r\}$, p і r - прості числа, $/C/ \cdot /u/ \cdot /v/ \neq 32$; при $/z/ = r$ $/u/ = /v/ = p$;

4) $G = ((\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/u/ = p^A$, $A > 1$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u, v] = [a, b] = u^{p^{A-1}}$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

5) $G = CF$, C - локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C, F] = 1$, $O \cap F = \langle c \rangle$, $F = (((\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/u/ = /v/ = /c/ = /a/ = /b/ = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

6) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

8) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^A$, $/b/ = p^\beta$, $A > 2$, $\beta > 1$, $p^A > 6$, $b^{-1}ab = a^{p^{A-2}}$;

9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $/a/ = p^A$, $/b/ = p^\beta$, $/d/ = p^{A-1}$, $\beta > A > 2$, $p^A > 6$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{p^{A-2}}$;

10) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \lambda \langle z \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 1$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $/z/ \in \{1, r\}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^4 \rangle$; при $/z/ = r$ $\beta \in \{2, 3\}$; при $\beta = 2$ $[a, z] = 1$;

11) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$;

12) G - група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p, p) , p - непарне просте число;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ - непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ - неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $t = s = 1$;

15) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^2$, $/x/ = p$ - непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{t-1}}$, $[b, x] = 1$;

16) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ - неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $s = 1$;

17) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

18) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, y] = a^2 b^2$, $[a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число;

19) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ - непарне просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^{\mathcal{E}} b^p$, $0 \leq \mathcal{E} < p$, $a^p = c^{1+\mathcal{E}t} b^{tp}$, $0 \leq t < p$, всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

20) $G = \langle a \rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2 x^2$;

21) $G = \langle a \rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = /x/ = p$, p - непарне просте число, $[b, x] = a^{sp} b^{tp} x^{\ell p}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq \ell < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $1^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

22) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

23) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{3, 4\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

24) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 16$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

25) $G = (\langle a, b \rangle) \lambda \langle x \rangle$; $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $\langle a, b \rangle$ - група кватерніонів, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a$;

26) $G = U \lambda X$, U - циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, X - група кватерніонів порядку 8, $[U, X] \leq w(U)$; при $U^1 = 1$ $[U, X] = w(U)$;

27) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $/a/ = 8$, $/x/ = 4$, $/b/ = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

28) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a \rangle \langle b \rangle) \cap \langle x \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Розглянемо два можливі випадки: 1) G - метабамільтонова група; 2) G - неметабамільтонова група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути лише групою одного з типів 1, 2, 4 - 14 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 1 теореми 2.1.2. Тоді, очевидно, G - група одного з типів 3 - 7 теореми 2.1.1, а тому G - група одного з типів 1 - 5 розглядуваної теореми (теорема 2.1.1 з [39]).

Нехай G - група типу 2 теореми 2.1.2. Тоді G - нільпотентна метациклічна група з комутантом $|G'| > p$, що задовольняє умову наслідку 1.3.9, за твердженням якого G - група одного з типів 6 - 10 розглядуваної теореми (наслідок 1.3.9 з [39]).

В групах G кожного з типів 4 - 14 теореми 2.1.2 G' - група типу (p, p) , чи типу (p, p, p) і G - група одного з типів 11 - 21 розглядуваної теореми. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. Очевидно, що G - неабелева група з комутантом непростого порядку.

Нехай G - метациклічна група. Тоді вона задовольняє умову наслідку 1.3.10 і є нільпотентною групою одного з типів цього наслідку. Легко бачити, що G - група одного з типів 22 - 24 розглядуваної теореми.

Нехай G - неметациклічна група. Оскільки G - нільпотентна неметабамільтонова неметациклічна УШН[]-група, то за наслідком 2.1.3 $|G| = p^m$, $m > 4$, $|G'| = p^m$, $m > 1$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп типу (p, p, p, p) . Завдяки наслідку 2.2.2 при $p > 2$ G містить підгрупу типу (p, p, p) .

Нехай G містить підгрупи типу (p, p, p) . Тоді G задовольняє умову теореми 2.2.2 і G - група одного з типів 1 - 3 згаданої теореми, і тому G - група одного з типів 15, 11, 10 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G не містить підгруп типу (p, p, p) . За попереднім $p = 2$. В силу леми 2.2.1 G не містить підгруп дієдра порядку 8. Оскільки G - неметациклічна група, то в G точно три інволюції. Завдяки лемі 2.2.8 G містить підгрупу кватерніонів порядку 8. В силу леми 2.2.7 G - група типу 28 розглядуваної теореми, або $|G'| < 8$. Зро-

зуміло, що тоді $|G'| = 4$.

Нехай G' - циклічна група. Тоді G задовольняє умову леми 2.2.6 і може бути групою одного з типів 1, 2 згаданої леми, і тому G - група типу 10 чи 25 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай, нарешті, G' - група типу (2,2). Ясно, що всі інволюції з G належать G' і G задовольняє умову теореми 2.2.1 і G - група одного з типів 1 - 5 згаданої теореми. Група G кожного з типів 2 - 4 теореми 2.2.1 є групою одного з типів 10, 11, 4 теореми 2.1.2 відповідно, які є метабільтоновими групами, що розглянуті раніше. Група G кожного з типів 1, 5 теореми 2.2.1 є групами типів 26, 27 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 28 розглядуваної теореми. Очевидно, що G - нільпотентна недедекіндова група. Покажемо, що G - УШН[]-група. Для груп G кожного з типів 1 - 9 це доведено в теоремі 2.1.2. В групах G типу 10 при $r = 2$ і в групах G типу 11 при $r = 3$ це доведено в теоремі 2.1.2. В групах G кожного з типів 12 - 14, 15 при $\beta = 2$ та 16 - 21 достатність доведена в тій же теоремі 2.1.2. Для груп G кожного з типів 22 - 24 достатність доведена в наслідку 1.3.10. Для груп G типу 26 чи 27 достатність доведена в теоремі 2.2.1. Для груп G типу 10 при $|z| = 2$, груп G типу 11 при $|z| = 3$, груп G типу 15 при $\beta > 2$ достатність доведена в теоремі 2.2.2. Тому залишається довести достатність для груп G кожного з типів 25, 28.

Нехай G - група одного з типів 25, 28 теореми. Покажемо, що для $|[A;B]| > 2$ $[A;B] \ni N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$ чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $A \neq 1$, B - власна немаксимальна підгрупа з G , $B \not\triangleleft G'$, $|G| \in \{2^5, 2^6\}$. Звідси $|B| \in \{2^3, 2^4\}$.

Нехай G - група типу 25 теореми. Тоді $|G| = 2^5$, $|B| = 8$, $|A| = 2$. Покладемо $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, де $c \in Z(G)$, $\langle c \rangle = \langle a^2 \rangle \triangleleft \langle a \rangle = G'$, $d = x^2$. Покажемо, що $d \in Z(G)$. Оскільки $\langle a \rangle \triangleleft G$, то x індукує на $\langle a \rangle$ автоморфізм порядку 1 чи 2. Звідси $[a, x^2] = [a, d] = 1$. Ясно, що $[x^2, b] = [x, b][[x, b], x][x, b] = a^{-1} [a^{-1}, x] a^{-1} = a^{-1} c a^{-1} = a^{-2} c = 1$. Отже, $d \in Z(G)$.

Покажемо, що всі інволюції з G належать N . Нехай це не так. Тоді $G \setminus N$ містить y , $|y| = 2$ і $G = \langle \langle a, b \rangle \times \langle d \rangle \rangle \rtimes \langle y \rangle$. Ясно, що $G / \langle a, b \rangle = \langle \langle a, b \rangle d \rangle \rtimes \langle \langle a, b \rangle y \rangle$ - нециклічна група, що неможливо. Отже, N містить всі інволюції з G . Оскільки $A \not\triangleleft Z(G)$, то $|A| > 2$,

що неможливо. Отримана суперечність $\bar{A}$ доводить достатність для груп G типу 25 теореми.

Нехай G - група типу 28 теореми. Нехай $B \leq U$. Тоді $|B| = 8$. При циклічності B $A = \langle a^4 \rangle \leq Z(G)$, що неможливо. При нециклічності B маємо $B = \langle a^2 \rangle \times \langle a^2 b^2 \rangle = G'$, що не так. Отже, $B \not\leq U$. Тоді $G = UB$. Покладемо $U \cap B = X$. Ясно, що $[B:X] = 2$ і $X \triangleleft B$, $|X| > 2$. За попереднім, $c = a^4 \in X$. Зрозуміло, що $\langle c \rangle \neq A$. Нехай $|A| = 2$. Тоді в силу наслідку 2.2.6 $\langle c \rangle \times A = N = w(G) \triangleleft G$ і N - шукана підгрупа. Отже, в подальшому будемо вважати, що $|A| > 2$. Тоді $|B| = 16$, $|A| = 4$ і A - циклічна група. Ясно, що $|X| = 8$.

Нехай $X = \langle u \rangle$. Зауважимо, що жодна з підгруп $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle ab \rangle$ ненормальна в G . Звідси $\langle u \rangle \not\leq U$ і тому $\langle u \rangle \in \{ \langle b \rangle, \langle ab \rangle \}$. Оскільки всі інволюції з G належать U (наслідок 2.2.6), то $\langle u \rangle$ недоповнюється в B . В силу [40] $B = \langle u, v \rangle$ - група кватерніонів порядку 16, $|v| = 4$, $v^4 uv = u^{-1}$. Очевидно, що $v = hx^i$, де $h \in U$. Оскільки $\langle b^2 \rangle = \langle (ab)^2 \rangle \leq Z(U)$, $b^2 \notin Z(G)$, то, очевидно, $i = 1$. З співвідношення для групи G випливає, що $\langle b \rangle, \langle v \rangle \cap \langle ab \rangle, \langle v \rangle$ містить d_1 , $|d_1| = 2$, $\langle c \rangle \cap \langle d_1 \rangle = 1$, що неможливо. Звідси X - нециклічна група. Зауважимо, що U не містить підгрупи кватерніонів порядку 8 і $\exp(G) = 8$. Звідси X - не є групою кватерніонів порядку 8 і B - нециклічна група, яка в силу [40] не може бути групою кватерніонів порядку 16. Отже, B містить $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. Звідси X - нециклічна підгрупа порядку 8 в U і тому $X = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle = G'$, $B \triangleleft G$, що неможливо. Достатність для груп G типу 28 доведена. Теорема повністю доведена.

Н а с л і д о к 2.2.7. Комутант G' нільпотентної $U\text{ШН}[p]$ -групи G є елементарною абелевою групою порядку не більше ніж p^5 , або 2-групою типу (4), чи (4,2), чи (8), при цьому G' - група типу (4,2), коли G - група типу 28 теореми 2.2.3.

Наслідок випливає з теореми 3.2.3.

2.3. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕНІЛЬПОТЕНТНИХ УШН[]-ГРУП

Л е м а 2.3.1. Скінченні ненільпотентні УШН[]-групи G , що містять ненадрозв'язні групи Шмідта, вичерпуються групами типів:

1) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, $p \nmid q$ - різні прості числа, $q > 2$, 2 - показник p за модулем q , $p \neq 3$, $\Phi(P) \rtimes Q$ - ненільпотентна група Міллера - Морено;

2) $G = (P \times R) \rtimes Q$, $|P| = p^2$, $|R| = r$, $|Q| = q$, $p, q \nmid r$ - попарно різні прості числа, $q > 2$, $p \neq 3$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, 2 - показник p за модулем q , $P \rtimes Q$ і $R \rtimes Q$ - ненільпотентні групи Міллера - Морено;

3) $G = P \rtimes Q$, P - елементарна абелева група порядку $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $Q = \langle x \rangle$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$, $p \nmid q$ - різні прості числа, α - показник p за модулем q , $q > 2$, $C_Q(P) = \langle x^{\gamma} \rangle$, $\gamma \in \{1, 2\}$, $\gamma \leq \beta$, $P \rtimes \langle x^{\gamma} \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $\alpha + \beta - \gamma < 4$;

4) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^{α} , $p > 5$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, $p, q \nmid r$ - попарно різні прості числа, $q > 2$, $r > 2$, α - показник p за модулем q , α - показник p за модулем r , $P \rtimes \langle x^q \rangle$ та $P \rtimes \langle x^r \rangle$ - ненільпотентні групи Міллера - Морено;

5) $G = (P \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^2 , $|x| = q$, $|z| = r$, $p, q \nmid r$ - прості числа, $p \neq q$, $p \neq 3$, 2 - показник p за модулем q , $q > 2$, $P \rtimes \langle x \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено;

6) $G = P \rtimes Q$ - група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = |P'| = p > 3$, $|Q| = q$, $p \nmid q$ - різні прості числа, $q > 2$, 2 - показник p за модулем q ;

7) $G = P \rtimes Q$ - група Шмідта, P - група кватерніонів порядку 8, $Q = \langle x \rangle$, $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, $|P| = p^2$, $|x| = qr$, $p, q \nmid r$ - попарно різні прості числа, $p > 3$, $q > 2$, $P \rtimes \langle x^2 \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $P \rtimes \langle x^q \rangle$ - ненільпотентна надрозв'язна мінімальна метациклічна група.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. За умовою леми 3 містить ненадрозв'язну групу Шмідта $M = P \rtimes Q$, яка може бути лише групою одного з типів 1 - 8 теореми 1.3.1. Тоді $|P| =$

$= p^d$, $\Delta \in \{2, 3\}$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^A$, $\Delta \in \{1, 2\}$, p і q - різні прості числа. Зрозуміло, що M - метациклічна група. Якщо $M = G$, то G - група одного з типів 7, 6, 3 розглядуваної леми відповідно.

Нехай $M < G$. Тоді при $M \not\trianglelefteq G$ M та G задовольняють умову теореми 1.3.4 і G - група одного з типів 1, 2 розглядуваної леми.

Нехай $M \triangleleft G$. Тоді за лемою Фраттіні [41] $G = MU = PU$, $P \triangleleft G$, $U = N_G(Q)$, $U \cap P = \Phi(P)$, $\Phi(P) \leq Z(M)$. Зрозуміло, що $U \not\trianglelefteq G$. Тому U - група одного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2. Очевидно, що $\Phi(P) \times \times Q < U$. Можливі випадки: 1) U - нільпотентна група; 2) U - нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку U - підгрупа типу 2 чи 6 теореми 1.2.2. Нехай спочатку U - група типу 2 згаданої теореми. Тоді $|U|$ - добуток двох різних простих чисел. Звідси $\Phi(P) = 1$, $P \cap U = 1$. Тому $U = Q \rtimes \langle u \rangle$ - нільпотентна група Міллера - Морено порядку qr , $|Q| = q$, $|u| = r$, $q \equiv 1 \pmod{r}$, $U' = Q$. Ясно, що M - нільпотентна група Міллера - Морено, Δ - показник p за модулем q , $q > 2$. При $\Delta = 2$ $p \neq 3$. Нехай $V = P \rtimes \langle u \rangle$. Зрозуміло, що $C_G(P) = 1$. Якщо $C_U(P)$ містить $\langle u \rangle$, то $\langle u \rangle \triangleleft U$, що неможливо. Отже, $C_U(P) = C_U(P) = 1$. При $\Delta = 3$ за теоремою 1.3.4 $G/P \cong U$ - дедекіндова група, що не так. Таким чином, $\Delta = 2$. Ясно, що U підгрупа з $\text{Aut} P$. За теоремою 1.2.3 G - дисперсивна група і тому при $r = p$ одержимо, що $P \rtimes \langle u \rangle$ - силовська нормальна p -підгрупа з G . Але тоді $\langle u \rangle \triangleleft U$, що не так. Отже, $r \neq p$, V - нільпотентна група і $V \not\trianglelefteq G$. За теоремою 1.2.2 V - група лише типу 6 цієї теореми і V - мінімальна метациклічна група типу 6 теореми 1.3.3. Звідси V та G задовольняють умову теореми 1.3.4 і G - група одного з типів 1, 2 згаданої теореми. Але тоді $M \leq G'$ - нільпотентна група, що неможливо. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 1.2.2.

Нехай U - група типу 6 теореми 1.2.2. Тоді $U = R \rtimes \langle u \rangle$ - нільпотентна група Міллера - Морено, $|R| = r^A$, $|u| = t^A$, $\Delta > 0$, r і t - різні прості числа, $R \rtimes \langle u \rangle \triangleleft G$. Звідси $R \triangleleft G$, $\langle u \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $\langle u \rangle \not\trianglelefteq U$. Покладемо $V = P \langle u \rangle$. Якщо $V \triangleleft G$, то $V \cap U = \Phi(P) \langle u \rangle \triangleleft U$, $V \cap U = U$ і $G = V$. Звідси $\Phi(P) = R$, $|R| = r \neq t$, $G = P \rtimes \langle u \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{t}$, $p > 2$, $u^t \in Z(G)$. Оскільки $Q \leq U$, $P \rtimes Q$ - група Шмідта і $u^t \in Z(G)$, то $Q = \langle u \rangle$ і $M = G$, що не так. Звідси $V \not\trianglelefteq G$. При $t = p$ $r = q$, R - ненормальна в G силовська q -підгрупа і оскільки G - дисперсивна група, то V нормальна силовська p -підгрупа з G , що неможливо. Отже, $p \neq t$ і V - група типу 6

теореми 1.2.2. Зрозуміло, що $V < G$. Тоді $R \not\leq P$. Звідси $r \neq p$, G' містить ненільпотентну підгрупу $P \not\leq R$. Тепер знову V та G задовольняють умову теореми 1.3.4, за твердженням якої G' - нільпотентна група, що не так. Таким чином, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Оскільки M - ненадрозв'язна група Шмідта, то показник p за модулем q більше 1. Тому $Q \leq U$ - не 2-група. Нехай U - непримарна група. Звідси U може бути лише підгрупою типу 2 чи 4 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle u \rangle \times \langle z \rangle$, $\langle u \rangle$ - q -група, $|z| = r$, q і r - різні прості числа, $u^q \in Z(G)$. Зрозуміло, що $M = P \times \langle u \rangle$, $Q = \langle u \rangle$. Якщо $z \in \Phi(P)$, то $G = M$, що не так. Отже, $\langle z \rangle \cap P = \Phi(P) = 1$ і P - елементарна абелева група.

Припустимо, що $r = p$. Тоді $P \times \langle z \rangle$ - ненормальна в G силовська p -підгрупа, комутант якої власна підгрупа з P і нормальна в G . Оскільки P - мінімальна нормальна підгрупа з M , то $[P, \langle z \rangle] = 1$. Тому в G існує підгрупа $P \times \langle u^q \rangle \times \langle z \rangle$. За теоремою 1.2.3 недекейндова група G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох неодиничних прямих множників. Звідси $d = 2$, $|u| = q$ і G - група типу 5 розглядуваної леми. При $p \neq r$ $G = P \times U$, $\Phi(P) = 1$. Якщо $u^q \neq 1$, то U - група типу 5 теореми 1.2.2, $\langle u^q \rangle \times \langle z \rangle < G$ і G містить підгрупу $P \times \langle u^q \rangle \times \langle z \rangle$, для якої, як і раніше, $|u| = q$, що не так. Отже, $|u| = q$ і тому $|U| = qr$. Якщо $[P, \langle z \rangle] = 1$, то в G існує підгрупа $P \times \langle z \rangle$, у якої P - група типу (p, p) і тому G - група типу 5 розглядуваної леми. Нехай $[P, \langle z \rangle] \neq 1$. Покладемо $V = P \times \langle z \rangle$. Тоді V - ненільпотентна підгрупа з G . Якщо V - підгрупа Міллера - Морено, то покладемо $U = \langle x \rangle$ і одержимо, що $|x| = qr$ і G - група типу 4 розглядуваної леми. Нехай V - не є підгрупою Міллера - Морено. Тоді V містить власну підгрупу Міллера - Морено $S = P_1 \times \langle u \rangle$, $|P_1| \in \{p, p^2\}$, $P_1 < P$.

Нехай спочатку $d = 2$. Тоді $|P_1| = p$, $p \equiv 1 \pmod{r}$. За теоремою Машке [41] $P = P_1 \times P_2$, $|P_2| = p$, $P_2 < V$. Якщо $[P_2, \langle z \rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V) < G$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, $P_2 \times \langle u \rangle$ - група Міллера - Морено, V - мінімальна неметациклічна група типу 8 теореми 1.3.3 і тому G - група типу 8 розглядуваної леми.

Нехай $d = 3$. При $|P_1| = p^2$ знову за теоремою Машке [41] $P = P_1 \times P_2$, $P_2 < V$, $|P_2| = p$, 2 - показник p за модулем r і тому $P_2 \times \langle z \rangle$ - нільпотентна група. Звідси $P_2 = Z(V)$ і знову $P_2 < G$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, $|P_1| = p$, $p \equiv 1 \pmod{r}$ і в G існує підгрупа $P_2 \times \langle u \rangle$, де $P_2 \cap P_1 = P$, $P_2 < G$. Знову якщо $[P_2,$

$\langle z \rangle = 1$, то $P_2 = Z(V)$, що неможливо. Тоді $[P_2, \langle u \rangle] \neq 1$. Як і раніше, $P_2 \wedge \langle z \rangle$ містить підгрупу Міллера - Морено $P_3 \wedge \langle u \rangle$, $P_3 \leq P_2$, $|P_3| = p$ і $|[\langle z \rangle; (P_3 \times P_1) \wedge \langle u \rangle]| > 2$. За означенням УІНІ[]-груп $[\langle z \rangle; (P_3 \times P_1) \wedge \langle u \rangle] \ni N \triangleleft G$. Завдяки лемі Фраттіні [41] $V = ND = (P_3 \times P_1) \wedge D$, де $D = N_V(\langle z \rangle)$. Оскільки $P_3 \times P_1 < P$, то $D = \langle z \rangle \times \langle u \rangle$, $|u| = p$, $\langle u \rangle = Z(V)$, $\langle u \rangle \triangleleft G$, що неможливо. Отже, при $\ell = 3$ маємо суперечність. Випадок, коли U - непримарна група розглянуто повністю.

Нехай тепер U - примарна група. Оскільки G - ненільпотентна група, то U - силовська q -підгрупа з $G = P \wedge U$, $\Phi(P) = 1$, $|U| > |Q|$, $C_U(P) \triangleleft G$. Оскільки ℓ -показник p за модулем q , то $q > 2$ і U - група одного з типів 1, 2, 5 теорема 1.2.2.

Нехай U - група типу 1 теорема 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$ і $Q < \langle x \rangle$. Звідси $\beta > 1$. Зрозуміло, що $C_U(P) = \Phi(\Phi(U)) = \langle x^{q^2} \rangle$. Звідси $Q = \langle x^{q^2} \rangle$, $\beta < 4$, $C_V(P) = \langle x^{q^j} \rangle$, $j \leq \beta$. При $j = \beta$ $\ell + \beta - j < 4$ і G - група типу 3 розглядуваної лєми.

Нехай $\beta > j$. Тоді в недедекіндовій групі G існує підгрупа $P \times \langle x^{q^j} \rangle$. Завдяки теоремі 1.2.3 $\ell = 2$, $\ell + \beta - j < 4$ і G - група типу 3 розглядуваної лєми.

Нехай U - група типу 2 теорема 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = |z| = q$. Ясно, що $Q \leq U$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle x \rangle$. Покладемо $V = P \wedge \langle z \rangle$. Ясно, що P і U - нециклічні елементарні абелеві підгрупи з G . В силу [47] G не є групою Фробеніуса. Тому можна вважати, що $V = P \wedge \langle z \rangle$ не є групою Фробеніуса і $V \triangleleft G$. Ясно, що $C_U(P) = 1$ і тому V - ненільпотентна група. Оскільки V не є групою Фробеніуса, то існує $u \in P$, $|u| = p$, $[u, z] = 1$. Тоді $u \in Z(V) \triangleleft G$ і $Z(V) < P$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, U - не може бути групою типу 2 теорема 1.2.2.

Нехай U - група типу 5 теорема 1.2.2. Тоді G містить підгрупу $P \times D$, де D - група типу (q, q) . Оскільки P містить підгрупу типу (p, p) , то за теоремою 1.2.3 одержимо нільпотентність групи G , що не так і, значить, U - не може бути групою типу 5 теорема 1.2.2. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 8 розглядуваної лєми. Зрозуміло, що G - скінченна ненільпотентна група. Покажемо, що G - УІНІ[] група. Для груп G кожного з типів 1, 2 це встановлено в теоремі 1.3.4. Група G кожного з типів 3 - 8 має вигляд $G = P \wedge G'$, $G' = P$, $|P| \in \{p^2, p^3\}$, $C^1 = 1$ і G - група одного з типів

1 - 3 теореми 2.2.1 з [16] і тому G - метабільтова група. Звідси завдяки теоремі 2.1.2 G - УШН[]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2.3.2. Скінченні нелінійні метабільтові УШН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r - не обов'язково різні непарні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q - просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r - прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

3) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = qr$, q і r - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ - група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \ltimes (\langle x \rangle \ltimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ - просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 1.3.2 і може бути нелінійною групою одного з типів 1 - 16 згаданої теореми. Легко бачити, що G - група лише одного з типів 12 - 16 теореми 1.3.2 і тому G - група одного з типів 1 - 5 леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 1.3.2. Лема доведена.

Л е м а 2.3.3. Скінченні нелінійні мінімальні неметабільтові групи G , у яких всі підгрупи Шмідта надрозв'язні, вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ - непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ - непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ - квазіцентральна підгрупа в G ;

3) $G = \langle a \rangle \ltimes (\langle x \rangle \ltimes \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ - непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді вона задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише нелінійною групою одного з типів 8 - 10 цієї теореми. Звідси G - група одного з типів 1 - 3 розглядуваної леми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 1.3.3. Лема доведена.

Л е м а 2.3.4. Скінченні нелінійні УШН[]-групи G , що містять власні нелінійні мінімальні неметациклічні підгрупи і в G надрозв'язні всі підгрупи Шмідта, вичерпуються ненадрозв'язними групами Фробеніуса типу $G = (\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, де $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = qr$, q і r - необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $(\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$ та $(\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle x^r \rangle$ - нелінійні мінімальні неметациклічні групи.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді G містить власну нелінійну мінімальну неметациклічну підгрупу C , у якій, як і в G , всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Зрозуміло, що C - задовольняє умову леми 2.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1 - 3 згаданої леми. Звідси $C = P \ltimes Q$, де $P = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $/a/ = p$, $/b/ \in \{1, p\}$, p - непарне просте число, Q - октєвська q -підгрупа з C , q - просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, Q] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, Q] = \langle b \rangle$, $N_C(Q) = Q$. За теоремою 1.3.4 $C \triangleleft G$. Завдяки лемі Фраттіні [41] $G = CU = P \ltimes U$, де $U = N_G(Q)$, $Q < U$, $Q \not\triangleleft U$, $U \not\triangleleft G$ і U - підгрупа одного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2, яка не містить власних абелевих підгруп. Тому $Q' = 1$. Але тоді C - група лише одного з типів 1, 2 леми 2.3.3 і $Q = \langle y \rangle$, $/y/ = q^b$, $b > 0$, $/b/ = p$.

Припустимо, що G - надрозв'язна група. Тоді, без порушення загальності можна вважати, що G містить нелінійну підгрупу $V = \langle a \rangle \ltimes U$. Зрозуміло, що $G' = P$. Якщо $V \triangleleft G$, то G/V - абелева група і тому $V \geq G'$, що не так. Отже, $V \not\triangleleft G$. Звідси V - група одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2. Оскільки $(\langle a \rangle \ltimes \langle y \rangle) < V$, то V - лише група типу 6 згаданої теореми. Тому $V = \langle a \rangle \ltimes \langle x \rangle$, $/x/ = q^d$, $d >$

> 0 , $\langle x \rangle \geq \langle y \rangle$. Нехай $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Тоді $C = G$, що неможливо. Звідси $y \in \langle x^q \rangle$. Ясно, що $0 \nmid G$. Із надрозв'язності групи G випливає, що $\langle a \rangle \triangleleft G$, $\langle b \rangle \triangleleft G$ і в G існують ненільпотентні ненормальні підгрупи $\langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $\langle b \rangle \lambda \langle x \rangle$, які, очевидно, лише групи типу 6 теореми 1.2.2. Але тоді $[a, x^q] = [a, y] = [b, x^q] = [b, y] = 1$, що неможливо. Отже, G - надрозв'язна група.

Оскільки всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то за теоремою 1.2.2 U - метациклічна група. Нехай $S = C_{t^k}(P)$. Покажемо, що $|S| \in \{1, t\}$, t - просте число. Дійсно, в протилежному випадку за лемою 1.2.5 G містить підгрупу $P \times S$ і P - квазіцентральна підгрупа з G . Звідси G - надрозв'язна група, що не так. Отже, $|S| \in \{1, t\}$. Оскільки в підгрупі U типу 5 теореми 1.2.2 U містить нормальну в G неединичну підгрупу простого порядку і ця підгрупа належить S , то U - група одного з типів 1 - 4, 6 теореми 1.2.2.

Нехай U - підгрупа типу 6 теореми 1.2.2. Тоді $U = R \lambda \langle x \rangle$, $R \times \langle x^q \rangle \triangleleft G$. Звідси за попереднім $|R \times \langle x^q \rangle| = t$ і, значить, $|R| = t = r$, $|x| = q$. Отже, $G = (P \times R) \lambda \langle x \rangle$. За умовою $P \lambda \langle x \rangle$ містить тільки надрозв'язні групи Шмідта. Тому, без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle b \rangle$ і G - надрозв'язна група, що суперечить вибору G . Отже, U - група одного з типів 1 - 4 теореми 1.2.2.

Нехай U - підгрупа типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| = r$ і $\langle x^q \rangle \times \langle z \rangle \triangleleft G$. За попереднім, $|x^q| = 1$ і $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$ - надрозв'язна група, що суперечить вибору G . Отже, U не може бути групою типу 4 теореми 1.2.2.

Легко бачити, що G - надрозв'язна група, якщо U - група типу 3 теореми 1.2.2.

Нехай U - підгрупа типу 2 теореми 1.2.2. Якщо U - примарна група і U не є групою типу 1 теореми 1.2.2, то $|y| = |z| = q$. В силу [47] без порушення загальності можна вважати, що $[P, \langle z \rangle] \neq P$. Звідси $P \lambda \langle z \rangle$ має неединичний центр, що належить P . Можна вважати, що $[a, z] = 1$. Але тоді $\langle a \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle a \rangle$ - надрозв'язна група. Звідси і G - надрозв'язна група, що не так. Нехай тепер U - неабелева група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle y \rangle \lambda \langle z \rangle$, $|y| = q$, $|z| = r$, $[\langle y \rangle, \langle z \rangle] = \langle y \rangle$. Покладемо $V = P \lambda \langle z \rangle$. Зрозуміло, що $V \ntriangleleft G$, $\langle z \rangle \ntriangleleft U$, $C_U(P) = 1$. Оскільки G - дисперсивна група (теорема 1.2.3), то V - непримарна група і тому $r \neq q$. Звідси V - ненільпотентна група. Оскільки $|P| = p^2$ і $V \ntriangleleft G$, то V - підгрупа типу 6

теорема 1.2.2. Але тоді V - ненадрозв'язна група Шмідта, що неможливо за умовою леми. Таким чином, $U^1 = 1$, тобто $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $\langle y \rangle = q$, $\langle z \rangle = r$, q і r - різні прості числа.

Нехай $V = P \lambda \langle z \rangle$ - примарна група, тобто $p = r$. Якщо $V^1 \neq 1$, то $V^1 = \langle c \rangle \leq P$, $\langle c \rangle = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle c \rangle$ - надрозв'язна група. Звідси і G - надрозв'язна група, що неможливо. Отже, $V^1 = 1$. Але тоді $G = (P \lambda \langle y \rangle) \times \langle z \rangle$ - надрозв'язна група, що не так. Звідси $p \neq r$ і $V^1 \neq 1$. Оскільки підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то $P \lambda \langle z \rangle$ - надрозв'язна група.

Нехай V не є групою Фробеніуса. Тоді [47] $o \in P$, $\langle o \rangle = p$, $\langle c, z \rangle = 1$ і $\langle c \rangle = Z(V)$. Звідси $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle c \rangle$ - надрозв'язна група. Тому і G - надрозв'язна група, що не так. Отже, V - група Фробеніуса. Зрозуміло, що $U = \langle x \rangle$, $\langle x \rangle = qr$ і тому $C = P \lambda \langle x^2 \rangle$, $P \lambda \langle x^2 \rangle = P \lambda \langle z \rangle = V$ - невідлупотентна група Фробеніуса, у якій всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тому V - група типу 1 леми 1.3.3 і G - група з розглядуваної леми.

Нехай U - примарна циклічна підгрупа типу 2 теорема 1.2.2 або підгрупа типу 1 цієї теорема. Тоді $U = \langle x \rangle$, $\langle x \rangle = q^f$, $\beta > 0$, $x^{q^\beta} \in Z(G)$, $y \in \langle x \rangle$. Якщо $\langle y \rangle = \langle x \rangle$, то $G = G$, що не так. Отже, $y \in \langle x^{q^\beta} \rangle$ і тому $\beta > 1$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $[(\langle a \rangle; (\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle))]/ > 2$. За означеннями УШН[]-груп $[(\langle a \rangle; (\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle))]/ \in N \triangleleft G$ і $N \cap P = \langle a \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ - надрозв'язна група і тому G - надрозв'язна група, що не так. Отже, $\beta = 2$ і G - група з леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - група з розглядуваної леми. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$ - ненадрозв'язна група, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ - силовська p -підгрупа з G . Звідси P - мінімальна нормальна підгрупа з G . Оскільки $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{f}$ і силовські підгрупи з G абелеві, то всяка підгрупа Шмідта з G надрозв'язна. Покажемо, що G - УШН[]-група, тобто для $[A; B]/ > 2$ $[A; B] \in N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$ чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $A \neq 1$, $G^1 \not\triangleleft B$. Оскільки $|G|$ є добуток чотирьох простих чисел, то $|B|$ є добуток трьох простих чисел. Звідси $|B| = pqr$. Отже, $G = PB$, $P \cap B = P_1 \triangleleft G$, $|P_1| = p$, що суперечить мінімальності P в G . Отже, G - УШН[]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2.3.5. Нехай G - скінченна невідлупотентна УШН[]-група.

у якій всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тоді всі силовські підгрупи з G метациклічні.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Припустимо, що G містить мінімальну неметациклічну p -підгрупу C . Тоді C - підгрупа одного з типів 1 - 5 теореми 1.3.3. Завдяки теоремі 1.3.4 $C \triangleleft G$ і G/C - дедекіндова група. Звідси $G = P \rtimes D$, P - силовська p -підгрупа з G , D - її холловське дедекіндове p' -доповнення. Оскільки G - нелінійна група, то $D \not\triangleleft G$. Звідси D містить q -елемент x такий, що $[P, \langle x \rangle] \neq 1$, $p \neq q$ - просте число і $[P, \langle x^q \rangle] = 1$. Покладемо $V = P \rtimes \langle x \rangle$. Ясно, що V - нелінійна група і V містить підгрупу Шмідта $S = R \rtimes \langle d \rangle$, де $R = P \cap S$, $\langle d \rangle$ - ненормальна силовська q -підгрупа з S . Оскільки S - надрозв'язна група Шмідта, то $|R| = p$ і $p \equiv 1 \pmod{q}$. Ясно, що $\langle d \rangle$ належить деякій силовській q -підгрупі з V , яка опражена з $\langle x \rangle$ і $x^q \in Z(V)$. Звідси $\langle d \rangle$ - силовська q -підгрупа з V . Тому в подальшому без порушення загальності можна вважати, що $x = d$. Зрозуміло, що C - група одного з типів 1, 2 теореми 1.3.3. Оскільки G/C - дедекіндова група, то $R \leq C$.

Нехай спочатку C - група типу 1 теореми 1.3.3 і $C' = 1$. Ясно, що $p > 2$. За теоремою Малке [41] $C = R \rtimes Y$, де $[Y, \langle x \rangle] \leq Y$, Y - група типу (p, p) . Покажемо, що $Y = \langle u \rangle \rtimes \langle z \rangle$, де $[\langle u \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle u \rangle$, $[\langle z \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle z \rangle$. Якщо $[Y, \langle x \rangle] = 1$, то доводжуване твердження очевидне. Нехай $[Y, \langle x \rangle] \neq 1$. Тоді, як і раніше, в $Y \rtimes \langle x \rangle$ існує підгрупа Шмідта $S_1 = R_1 \rtimes \langle x \rangle$, $|R_1| = p$, $Y = R_1 \rtimes R_2$, $[R_2, \langle x \rangle] \leq R_2$, $|R_2| = p$. Покладемо $R_1 = \langle u \rangle$, $R_2 = \langle z \rangle$ і будемо мати доводжуване твердження. Тепер ясно, що в G існують підгрупи $(R \rtimes \langle u \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $(R \rtimes \langle z \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $Y \rtimes \langle x \rangle$, які не можуть бути підгрупами жодного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2 і тому вони нормальні в G . Зрозуміло, що перетин згаданих підгруп співпадає з $\langle x \rangle$ і тому $\langle x \rangle \triangleleft G$, що не так. Отже, $C' \neq 1$. Тоді $C = (\langle c \rangle \rtimes \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|C| = |a| = |b| = p$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$. Зрозуміло, що $C' = \langle c \rangle \triangleleft G$. Покажемо, що C містить підгрупу $Y = \langle c \rangle \rtimes \langle u \rangle$, де $|Y| = p$, $[\langle u \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle u \rangle$. Дійсно, оскільки $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $C \triangleleft G$, то в $G/\langle c \rangle$ існує підгрупа $C/\langle c \rangle \rtimes \langle x \rangle$. Якщо згадана підгрупа нелінійна, то існує підгрупа $Y/\langle c \rangle$ така, що $[Y/\langle c \rangle, \langle x \rangle] \leq Y/\langle c \rangle$ і $|Y/\langle c \rangle| = p$. Звідси $|Y| = p^2$. $[Y, \langle x \rangle] \leq Y$. За теоремою Малке [41] $Y = \langle c \rangle \rtimes \langle u \rangle$, де $[\langle u \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle u \rangle$. Нехай $C/\langle c \rangle \rtimes \langle x \rangle$ - нелінійна група. Тоді, як

і раніше, вона містить підгрупу Шмідта $Y/\langle c \rangle \lambda \langle x \langle c \rangle \rangle$ і $Y/\langle c \rangle =$
 $= p$. Звідси $Y/\langle c \rangle = p^2$, $[Y, \langle x \rangle] \leq Y$. Знову за теоремою Машке [41]
 $Y = \langle c \rangle \times \langle u \rangle$, $[\langle u \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle u \rangle$. Не порушуючи загальності можна
 вважати, що $u = a$. В G існує підгрупа $V_1 = Y \lambda \langle x \rangle$. Ясно, що V_1
 не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теорему 1.2.2 і тому
 $V_1 \triangleleft G$. За теоремою Машке [41] $C/\langle c \rangle = Y/\langle c \rangle \times Z/\langle c \rangle$, $[Z/\langle c \rangle,$
 $\langle x \langle c \rangle \rangle] \leq Z/\langle c \rangle$. Як і раніше, $[Z, \langle x \rangle] \leq Z$, $Z = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $[\langle b \rangle,$
 $\langle x \rangle] \leq \langle b \rangle$. В G існує підгрупа $V_2 = Z \lambda \langle x \rangle$. Як і для V_1 , можна
 показати, що $V_2 \triangleleft G$. Ясно, що $V_1 \cap V_2 = V_3 = \langle c \rangle \lambda \langle x \rangle \triangleleft G$. По-
 кладемо $N = C \lambda \langle x \rangle$. Оскільки $S \leq N$, то N - ненільпотентна група.
 За лемою Фраттіні [41] $N = V_3 U$, де $U = \langle x \rangle \times C_1 = N_N(\langle x \rangle)$, $C_1 =$
 $C \cap U$, $C_1 \triangleleft C$. Звідси $\langle c \rangle \cap C_1 = 1$, $C = \langle c \rangle \times C_1$, що неможливо. От-
 же, C - не може бути групою типу 1 теорему 1.3.3.

Нехай C - група типу 2 теорему 1.3.3. Тоді $C = A \langle u \rangle$, де $A =$
 $= \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |u| = 9$, $|b| = 3$, $[a, u] = b$, $[b, u] = a^3 = u^6$,
 $w(C) = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle = C' \triangleleft G$, $\langle a^3 \rangle = Z(C) \triangleleft G$. Завдяки теоремі Машке
 [41] можна вважати, що $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle b \rangle$. Ясно, що A - єдина абелева
 максимальна підгрупа з C . Звідси $A \triangleleft G$. За теоремою Машке [41]
 без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle a \rangle$.

Припустимо, що $[a, x] \neq 1$. Тоді G містить ненільпотентну підгру-
 пу $N_1 = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$. За теоремою 1.2.2 $N_1 \triangleleft G$. Звідси $C \cap N_1 = \langle a \rangle \triangleleft$
 $\triangleleft C$, що неможливо. Отже, $[a, x] = 1$. Не порушуючи загальності можна
 вважати, що $R = \langle b \rangle$. Покладемо $a^3 = o$ і $N = C \lambda \langle x \rangle$. Тоді $\langle c \rangle \triangleleft$
 $\triangleleft N$, N - ненільпотентна група, $\Phi(C) = w(C) \leq A$, $A/\Phi(C) \triangleleft N/\Phi(C)$.
 За теоремою Машке [41] $C/\Phi(C) = A/\Phi(C) \times Y/\Phi(C)$, де $Y/\Phi(C) = 3$,
 $[Y/\Phi(C), \langle x \Phi(C) \rangle] \leq Y/\Phi(C)$. Звідси $[Y, \langle x \rangle] \leq Y$. В N існує підгрупа
 $N_1 = Y \lambda \langle x \rangle$. Ясно, що $[C, Y] = 3$ і всі підгрупи з C метациклічні,
 $|Y| = 27$, $\Phi(C) = \langle b \rangle \times \langle c \rangle \leq Y$, $o \in Z(N_1)$, $Y/\langle c \rangle$ - абелева група.
 Звідси $Y' \leq \langle c \rangle$. В підгрупі C всі максимальні підгрупи, окрім A ,
 неабелеві. Тому $Y = \langle u \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|y| = 9$, $y^3 = c$. За теоремою Машке
 [41] $Y/\langle c \rangle = \langle b \langle c \rangle \rangle \times Z/\langle c \rangle$, де $[Z/\langle c \rangle, \langle x \langle c \rangle \rangle] \leq Z/\langle c \rangle$. Звідси $Y =$
 $= Z \lambda \langle b \rangle$, $[Z, \langle x \rangle] \leq Z$. Оскільки Y - метациклічна група, то $Z =$
 $= \langle z \rangle$, $|z| = 9$, $z^3 = c$. Оскільки $[c, x] = 1$, то за відомим резуль-
 татом [40] $[z, x] = 1$. Очевидно, що $C = A \langle z \rangle$. Знову в силу відомо-
 го результату [40] $[a, x] = [z, x] = 1$. Звідси випливає, що $[C,$
 $\langle x \rangle] = 1$, що не так. Отже, G - не може містити примарних мінімаль-
 них неметациклічних підгруп і тому всі силовські підгрупи з G ме-
 тациклічні. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.3.1. Ненільпотентні локально ступінчасті уні[]-групи G є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами типів:

I) Метагамільтоні групи:

i) Метациклічні:

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $/z/ \in \{1, r\}$, q і r - прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/b/ = qr$, q і r - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) Мінімальні неметациклічні ненадрозв'язні групи Шмідта:

3) $G = P \lambda \langle x \rangle$ - група Шмідта, P - група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3, 9\}$;

4) $G = P \lambda \langle x \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, P - група типу (p, p) , $/x/ \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 - показник p за модулем q , p і q - різні прості числа;

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

5) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^4 , $\mathcal{L} \in \{2, 3\}$, $/x/ = qr$, p , q , r - попарно різні прості числа, $\mathcal{L}$ - показник p за модулем q , $\mathcal{L}$ - показник p за модулем r , $P \lambda \langle x^q \rangle$ та $P \lambda \langle x^r \rangle$ - групи Міллера - Морено;

6) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^4 , $\mathcal{L} \in \{2, 3\}$, $/x/ = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $\mathcal{L}$ - показник p за модулем q , p і q - різні прості числа, $P \lambda \langle x^q \rangle$ - група Міллера - Морено, $\mathcal{L} + \beta < 6$;

7) $G = P \lambda \langle x \rangle$ - група Шмідта, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = p$, $/x/ = q$, p і q - різні прості числа;

8) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \lambda \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $/a/ \neq /b/ = p$, $/x/ = q$, $/z/ = r$, p , q , r - прості числа, $p \neq q$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - група Міллера - Морено, 2 - показник p за модулем q , $p \neq 3$, $q > 2$;

II) Неметагамільтонові групи:

i) Метациклічні:

9) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = pr$, p і r - необов'язково різні прості числа, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 0$, q - просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ -

група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

i1) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $/z/ = q$ - просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = 1$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

ii) Надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи:

i2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

i3) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ - квазіцентральна підгрупа з G ;

i4) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ - непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

i5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, p - просте число, $p \neq 3$, $/x/ = q$ - просте число, 2 - показник p за модулем q , $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морано;

i6) $G = (R \times P) \lambda \langle x \rangle$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, p, q і r - попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, 2 - показник p за модулем q , $q > 2$, $R \lambda \langle x \rangle$ і $P \lambda \langle x \rangle$ - ненільпотентні групи Міллера - Морано;

i7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - ненадрозв'язна група Фробеніуса, $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = qr$, q і r - не обов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x^q \rangle$ та $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x^r \rangle$ - мінімальні неметациклічні групи.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Якщо G - метациклічна група, то вона задовольняє умову леми 2.3.2 і є групою одного з типів 1 - 5 згаданої леми, а тому G - група одного з типів 9, 1, 2, 10, 11 розглядуваної теореми. Тому в подальшому будемо вважати, що G - неметациклічна група. Оскільки G - ненільпотентна група, то вона містить підгрупи Шмідта. Можливі випадки: 1) G містить ненадрозв'язну підгрупу Шмідта; 2) всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 - 8 згаданої леми. Тоді G

група одного з типів 15, 16, 3 - 8 розглядуваної теореми відповідно. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G задовольняє умову леми 2.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1 - 3 згаданої леми. Тому G - група одного з типів 12 - 14 розглядуваної теореми.

Нехай G містить власні неметациклічні підгрупи. За лемою 5 мінімальні неметациклічні підгрупи з G не можуть бути нільпотентними групами і тому G задовольняє умову леми 2.3.4. Звідси G - група типу 17 розглядуваної леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 17 теореми. Зрозуміло, що G - ненільпотентна локально ступінчаста і навіть скінченна дисперсивна група. Покажемо, що G - УШН[]-група. Дійсно, для метациклічних груп це встановлено в лемі 2.3.2, для груп G , що мають ненадрозв'язні групи Шмідта в лемі 2.3.1, для груп G типів 12 - 14 це встановлено в лемі 2.3.3, а для груп G типу 17 - в лемі 2.3.4. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 2.3.1. Комутант G' ненільпотентної локально ступінчастої УШН[]-групи G не більше ніж біпримарна група, а його порядок є добутком не більше ніж чотирьох простих чисел.

Комутант G' групи G може бути неабелевою групою, коли він співпадає з підгрупою кватерніонів порядку 8, чи неабелевою підгрупою порядку p^3 і експонента p ; при цьому G - метатамільтонова група.

Доведення безпосередньо випливає з розглядуваних типів груп теореми 2.3.1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. - М.: Наука. - 1980. - 384 с.
2. Best E. and Taussky O. A class of groups // Proc. PJA. - XLVII, sect A. - 1942. - P. 55-62.
3. Абрамовский И.Н., Каргаполов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи матем. наук. - 1958. - XIII, вып. 3(81). - С. 242-243.
4. Robinson D. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1964. - 60. - P. 21-38.
5. Пылаев В.В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1976. - с. 111-139.
6. Курдаченко Л.А., Горещий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, №1. - С. 42-46.
7. Горещий В.Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 127-138.
8. Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субинвариантных подгрупп // Укр. мат. журн. - 1981. - 33, №3. - С. 407-410.
9. Mann A. Groups with dense normal subgroups. - Israel J. Math. - 1968. - v. 6, №1. - с. 13-25.
10. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные не-nilпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. - Киев, 1980. - 17 с. - Деп. в ВНИИТИ, № 19-25-80.
11. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XIX Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. - С. 57-58.
12. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные не-nilпотентные группы со

- строого щільної системою інваріантних підгруп //VI Всесоюз. симп. по теорії груп: Тез. докл.- Київ:Наукова думка, 1978.- С.49-50.
13. Кузенний Н.Ф., Пилаєв В.В. Конечні нільпотентні групи со строго щільної системою інваріантних підгруп ранга 1 і 2 // XУ Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск:Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С.84-85.
14. Пилаєв В.В., Кузенний Н.Ф. Конечні нільпотентні групи с строго щільної системою інваріантних підгруп ранга 3 //XУ Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С. 126.
15. Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова деяких груп, близьких до метациклічних.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1995.-25 с.- Деп. ДНТБ України, N2508 - Ук95.
16. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 232 с.
17. Семко М.М., Кузенний М.Ф. Групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 61 с.
18. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Про групи, близькі до метациклічних //Укр. мат. журн.- 1996.- 48, N6.- С.782 - 790.
19. Семко М.М. Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп - К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 67 с.- Деп. в ДНТБ України 12.03.96, N743 - Ук96.
20. Семко М.М. Будова локально ступінчастих ненільпотентних груп в узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 24 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2326 - Ук96.
21. Семко М.М. Про будову груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 41 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2340 - Ук96.
22. Семко М.М. Будова нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 55 с.- Деп. в ДНТБ України 12.12.96, N2370 - Ук96.
23. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Будова $U_{n,n}[]$ -груп з комутантом простого порядку//Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ, 1996.- С.249.
24. Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова $U_{n,n}[]$ -груп //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18

- трав. 1996 р. - Київ, 1996. - С.390.
- 25.Семко М.М. Будова деяких $UHN[]$ -груп з нециклічним помутантом //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р. - Київ, 1996. - С.389.
- 26.Семко М.М. Будова локально ступінчастих $UHN[]$ -груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. - Вип.12. - С. 181 - 186.
- 27.Семко М.М. Про будову $UHN[]$ -груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. - Вип. 13. - С. 196 - 203.
- 28.Семко М.М. Про будову $UHN()$ -груп. - К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997. - 31 с. - Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N295 - Ук97.
- 29.Семко М.М. Про будову локально ступінчастих $UHN()$ -груп. - К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997. - 27 с. - Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N297 - Ук97.
- 30.Семко М.М. Про будову локально ступінчастих $UHN[]$ -груп. - К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997. - 17 с. - Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N296 - Ук97.
- 31.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова локально ступінчастих метабільтонових $UHN[]$ -груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. - Вип. 14. - С. 211 - 219.
- 32.Семко М.М. Будова нільпотентних $UHN[]$ -груп //Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук.пр. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. - С. 37 - 41.
- 33.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова нільпотентних $UHN()$ -груп //Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук.пр. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. - С. 20 - 26.
- 34.Кузенний М.Ф., Семко М.М. Будова нільпотентних недеакіндових $UHN()$ -груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім.акад. М.Кравчука, Київ, 15 - 17 трав. 1997 р. - Київ, 1997. - С. 231.
- 35.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Про будову ненільпотентних $UHN[]$ -груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 15 - 17 трав. 1997 р. - Київ, 1997. - С. 347.
- 36.Семко М.М. Будова нільпотентних недеакіндових $UHN[]$ -груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім.акад. М.Кравчука, Київ, 15 - 17 трав. 1997 р. - Київ, 1997. - С. 347.

- Київ, 15 - 17 трав. 1997 р.- Київ, 1997.- С. 346.
37. Семко М.М. Будова локально ступінчастих ненільпотентних УШН[]-груп // Укр. мат. журн.- 1997.- 49, №6.- С.789 - 798.
38. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Будова сепараторно ледекіндових груп // Укр. мат. журн.- 1996.- 48, №10.- С.1342 - 1351.
39. Семко М.М. Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1997.- 90 с.
40. Холл М. Теория групп.- М.:Изд-во иностр. лит., 1962.-468 с.
41. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп:3-е изд.-М.: Наука, 1982.- 288 с.
42. Blackburn N. Generalization of certain elementary theorems on p -groups // Proc. London Math. Soc.- 1961.- II, N 41.- P.1-22.
43. Курош А.Г. Теория групп.- М.:Наука, 1967.- 648 с.
44. Левищенко С.С., Кузенний Н.Ф. Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997.- 230 с.
45. Huppert B. Endliche Gruppen I.- Berlin - Heidelberg - New-York: Springer - Verlag, 1967. - 793 p.
46. Махнев А.А. О конечных метабильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та.- 1976.- 10.- С.60-76.
47. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы.- М.: Наука, 1967.- 111 с.

З М І С Т

ВСТУП	3
2.1. ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ	5
2.2. БУДОВА НЕІЗПОТЕНТНИХ УШН[]-ГРУП	12
2.3. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕІЗПОТЕНТНИХ УШН[]- ГРУП	46
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	59

Наукове видання

СЕМКО МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ

**БУДОВА ГРУП З УЗАГАЛЬНЕНОЮ
ЩІЛЬНІСТЮ НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Підп. до друку 06.97. Формат . Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 3/2
Ум. фарбо-відб. 3,2 Обл.-вид. арк. 3/5 Тираж 1000 пр. Зам. / 2 7

Віддруковано в Інституті математики НАН України
232601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3