

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ
ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ**

**СЕМКО М.М.
ПИСКУН М.М.
СКАСКІВ Л.В.**

**ПРО ГРУПИ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ
НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИМИ
ПІДГРУПАМИ**

Ірпінь – 2007

УДК 519.41/47

Про групи з узагальненими наближено нормальними підгрупами /Семко М.М., Пискун М.М., Скасків Л.В. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 41с.

Робота присвячена дослідженню анти PC -груп, які мають зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними та локально скінченними факторами. Конкретніше. Підгрупа H групи G називається наближено нормальною в G , якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні H^G . Підгрупа H групи G називається майже поліциклічно наближеною до нормальної (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Групу G будемо називати анти PC -групою, якщо у G усі підгрупи, за винятком майже поліциклічних, будуть майже поліциклічно наближені до нормальних.

Для фахівців у галузі алгебри та студентів математичного фаху.

Бібліогр.: 73 назв.

Рецензенти:

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор

Л.А. Курдаченко (Дніпропетровський національний університет);

доктор фізико-математичних наук, професор

М.Ф. Кузенний (Інститут математики НАН України)

Всі права належать авторам. Будь-яке використання цього видання або його частин (фрагментів), такі як копіювання, тиражування, розповсюдження і т.п. можливе тільки при наявності попередньої письмової згоди авторів.

All rights belong to the authors. No part of this issue may be reproduced by any mechanical, photographic or electronic process or the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted or otherwise copied for public or private use without written permission of the authors.

Затверджено до друку вченою радою
Національного університету державної податкової служби України

ISBN 966-02-058938-1

© М.М. Семко,
М.М. Пискун,
Л.В. Скасків, 2007

Наукове видання

Микола Миколайович Семко
Михайло Михайлович Пискун
Лілія Василівна Скасків

**ПРО ГРУПИ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ
НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИМИ
ПІДГРУПАМИ**

Підписано до друку 23.04.2007. Формат 60 × 90/16. Папір друк. Офсет. друк.
Умовн. друк. арк. 1,9. Тираж 300 прим. Зам. 97.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
01004, м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З М І С Т

Перелік термінів та умовних позначень. Попередні результати 3

ВСТУП 6

1.1. Властивості підгруп, майже поліциклічно наближених до
нормальних.....10

1.2. Будова деяких класів анти *PC*-груп 25

Цитована література 36

Перелік термінів та умовних позначень. Попередні теоретичні відомості

H^G – нормальне замкнення підгрупи H у групі G , тобто нормальна підгрупа, породжена H у групі G .

$\zeta(G)$ – центр групи G .

$\zeta_\alpha(G)$ – член верхнього центрального ряду групи G , що має порядковий номер α .

$\gamma_\alpha(G)$ – член нижнього центрального ряду групи G , що має порядковий номер α .

$[G, G]$ – комутант групи G .

$\text{Aut}(G)$ – група автоморфізмів групи G .

$C_H(M) = \{ x \in H \mid xa = ax \text{ для будь-якого елемента } a \in M \}$ – централізатор підмножини M у підгрупі H . Якщо H – нормальна підгрупа групи G , L – підгрупа, що містить H , то через $C_G(L/H)$ позначимо повний прообраз в G підгрупи $C_{G/H}(L/H)$.

Для довільного елемента $g \in G$ позначимо через g^G клас всіх елементів, які спряжені з g , тобто $g^G = \{ x^{-1}gx \mid x \in G \}$.

$FC(G) = \{ g \in G \mid \text{клас } g^G \text{ – скінченний} \}$.

Очевидно, $FC(G)$ – характеристична підгрупа групи G , її називають FC -центром групи G . Якщо $G = FC(G)$, то G називають FC -групою.

Група G називається черніковською групою, коли вона містить у собі нормальну підгрупу скінченного індексу H , що розкладається у прямий добуток скінченної множини квазіциклічних груп.

Будемо говорити, що група G задовольняє умову максимальності (відповідно мінімальності), якщо G не має нескінченних зростаючих (відповідно спадаючих) ланцюжків підгруп.

Група називається резидуально скінченною, якщо для кожного її елемента існує (нормальна) підгрупа скінченного індексу, що не містить цього елемента.

Група G називається F -досконалою, якщо вона не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. F -досконалі групи у деякому розумінні є антиподами резидуально скінченних груп. У кожній групі G підгрупа, породжена усіма її F -досконалими підгрупами, буде F -досконалою, її називають F -досконалою частиною групи G .

Нехай A – абелева група, p – просте число, P – силовська p -підгрупа A . Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\Omega_n(P) = \{ x \in P \mid x^p \leq p^n \}$. Очевидно, $\Omega_n(P)$ – характеристична підгрупа A . Маємо $\Omega_1(P) \leq \Omega_2(P) \leq \dots \leq \Omega_n(P) \leq \Omega_{n+1}(P) \leq \dots$ і $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(P)$.

Група називається локально скінченною, якщо кожна її скінченна підмножина породжує скінченну підгрупу.

Група називається обмеженою, якщо порядки її елементів обмежені у сукупності.

Через $P(G)$ будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи G .

Будемо говорити, що G – скінченна над центром група, якщо її центр має в G скінченний індекс.

1. Теорема [1]. Нехай G – група, центр якої має скінченний індекс c . Тоді комутант $[G, G]$ також скінченний, більш того $[G, G]^c = \langle 1 \rangle$.

2. Теорема. Нехай G – FC-група.

(1) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є періодичною [2].

(2) Комутант $[G, G]$ також періодичний. Зокрема, множина T всіх елементів, що мають скінченні порядки, є (характеристичною) підгрупою і G/T – абелева група без скруту [3].

(3) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є резидуально скінченною. Зокрема, центр групи G містить у собі кожну F -досконалу підгрупу.

3. Теорема [4, теорема 4.3]. Якщо кожна абелева підгрупа локально розв’язної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.

4. Теорема [5]. Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.

5. Теорема. (1) Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи G є A_3 -групою, то G буде розв'язною A_3 -групою [6].

(2) Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи групи G будуть мінімаксними, то G буде розв'язною мінімаксною групою [7, 8].

6. Теорема (див., наприклад, [9, теорема 2.5]). Нехай G – поліциклічна група. Тоді G є ізоморфною до підгрупи $GL(n, \mathbf{Z})$ для деякого натурального числа n . Навпаки, кожна розв'язна підгрупа $GL(n, \mathbf{Z})$ буде пол циклічною.

7. Теорема (див., наприклад, [9, лема 2.3]). Нехай G – група, H – її підгрупа, що має скінченний індекс k . Якщо H є ізоморфною до підгрупи $GL(n, F)$ для деякого натурального числа n , то G буде ізоморфною до підгрупи $GL(nk, F)$.

8. Теорема (теорема Цассенхауза, див., наприклад, [9, теорема 3.7]). Нехай F – поле. Існує така функція $f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, що ступінь розв'язності кожної розв'язної підгрупи $GL(n, F)$ не перевищує $f(n)$. Зокрема, кожна локально розв'язна підгрупа $GL(n, F)$ є розв'язною.

9. Теорема (альтернатива Тітса, див., наприклад, [9, наслідок 10.17]). Нехай F – поле, G – підгрупа $GL(n, F)$. Якщо група G не містить у собі вільної нециклічної підгрупи, то G містить у собі таку нормальну розв'язну підгрупу S , що G/S буде локально скінченною. Більш того, якщо $\text{char}(F) = 0$, то G/S буде скінченною.

10. Теорема (теорема Ф. Холла, див., наприклад, [10, наслідок до лем 5.35]). Нехай R – нетерове кільце, G – майже поліциклічна група. Тоді групове кільце RG буде нетеровим.

Вступ

Нормальні підгрупи групи та їх узагальнення мають досить вагомий вплив на структуру групи. Чим більшою буде система таких підгруп, тим цей вплив буде більш вирішальним. Образно кажучи, чим більше має група узагальнено нормальних підгруп, тим її будова стає більш прозорою. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то абелеві групи з такою властивістю (гамільтонові групи) мають дуже просту будову, як показують результати робіт [11, 12].

Однією з цікавих ділянок цієї тематики було вивчення груп, у яких кожна підгрупа, що не є нормальною, буде абелевою. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Їх вивчення почалося в роботах М.Ф. Сесекіна та Г.М. Ромаліса [13 – 15]. Скінченні метагамільтонові групи вивчалися в роботах В.Т. Нагребецького [16] та О.О. Махньова [17]. Повний опис метагамільтонових груп було отримано у серії робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [18 – 28]. Узагальненню гамільтонових і метагамільтонових груп присвячено багато робіт різних авторів. Зокрема, А. Манн [29] узагальнював названі групи завдяки дослідженню скінченних груп з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Група G називається групою з умовою щільності нормальності для всіх підгруп, якщо для будь-якої пари підгруп A та B із G таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$. Результати цієї роботи були узагальнені в багатьох роботах різних авторів, зокрема, у роботах [30 – 49].

В процесі розвитку теорії груп виникло досить багато типів підгруп, в тому чи іншому сенсі близьких до нормальних. Перші узагальнення зводились до простих послаблень означення і привели до появи таких типів підгруп як субнормальні, підгрупи, що не збігаються зі своїм нормалізатором (за їх допомогою характеризуються скінченні нільпотентні групи), підгрупи, які переставні з кожною циклічною підгрупою групи (вони грають велику

роль в скінченних надрозв'язних та розв'язних групах). Ці досить давні узагальнення виникли спочатку в теорії скінченних груп і потім почали розглядатись і в нескінченних групах. Слід відмітити, що нескінченність групи досить часто приводить до якісних відмінностей. Наприклад, скінченна група, всі підгрупи якої субнормальні, буде нільпотентною. Проте, на відміну від скінченних груп, існують нескінченні групи з одиничним центром, всі підгрупи яких субнормальні [50 – 54]. В теорії нескінченних груп природно виникають свої специфічні узагальнення нормальних підгруп. Одні з перших таких цікавих узагальнень розглянув Б. Нейман у своїй роботі [55], що вже стала класичною. Зокрема, він почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінченну множину спряжених. Оскільки кожна така підгрупа має нормалізатор скінченного індексу, такі підгрупи почали пізніше називати майже нормальними. У своїй роботі [55] Б. Нейман охарактеризував групи, всі підгрупи яких майже нормальні, як групи, що мають центр скінченного індексу. Такі групи пізніше стали називати скінченними над центром. Пізніше І.І. Єрьомін у роботі [56] показав, що групи, всі абелеві підгрупи яких майже нормальні, також будуть скінченними над центром. У статті [57] І.І. Єрьомін почав розглядати групи, в яких усі нескінченні підгрупи майже нормальні. Локально майже розв'язні групи з цією властивістю були описані значно пізніше у роботі М.М. Семка, С.С. Левіщенко та Л.А. Курдаченка [58]. З цієї роботи починається систематичне вивчення груп, в яких система $L_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи G «дуже велика» чи система $L_{non-an}(G)$ всіх підгруп, що не є майже нормальними, «дуже мала». Так у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького розглядалися групи, у яких система всіх майже нормальних підгруп є щільною [59], результати цієї роботи були пізніше узагальнені в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [30, 31]. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [60] були розглянуті групи, у яких (впорядковані за включенням) системи $L_{an}(G)$ та $L_{non-an}(G)$ задовольняють умову максимальності, а в роботі Л.А. Курдаченка та В.В.

Пилаєва [61] були розглянуті групи, у яких система $L_{non-an}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Подальший цікавий розвиток цієї тематики продовжився у роботах [62, 63] М.М. Семка та С.М. Кучменко, де розглядались групи, у яких система $L_{non-an}(G)$ складається з підгруп того чи іншого скінченного рангу.

Інший тип підгруп, які також почав розглядати Б. Нейман у статті [55], це підгрупи, що мають скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Такі підгрупи будемо називати далі наближено нормальними. Систематичне вивчення впливу системи наближено нормальних підгруп на будову групи розпочато досить недавно. Л.А. Курдаченко, М.Ф. Кузенний та М.М. Семко у роботі [30] вивчали групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [64] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $L_{non-nn}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи G задовольняє умову мінімальності, а у роботі А. Галоппо [65] були розглянуті групи, у яких система $L_{non-nn}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [66] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [67], де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп. Суттєвий внесок у цю проблематику був здійснений у роботах [68 – 70], де були вивчені досить широкі класи груп, у яких система $L_{non-nn}(G)$ складається з груп того чи іншого скінченного рангу.

У даній роботі вводиться до розгляду наступне узагальнення наближено нормальних підгруп.

Нехай X – клас груп. Будемо говорити, що група G має X -класи спряжених елементів або, що $G \in XC$ -групою, якщо фактор-група $G/C_G(g^G)$ належить до класу X для кожного елемента g групи G . Тут через g^G позначається клас усіх елементів, які спряжені з елементом g , тобто підмножина $\{g^x = x^{-1} g x \mid x \in G\}$.

Якщо $X = I$ – це клас усіх одиничних груп, то клас усіх IC – груп співпадає з класом A усіх абелевих груп. Тому, при належному виборі класу X , клас XC – груп можна розглядати як природне узагальнення класу абелевих груп.

Наприклад, якщо $X = F$ – це клас усіх скінченних груп, то клас усіх FC -груп – це точно клас усіх *FC-груп або груп зі скінченними класами спряжених елементів*. Цей клас є досить вдалим розширенням як класу усіх абелевих груп, так і класу усіх скінченних груп, який наслідуює багато хороших властивостей цих двох класів. Тому теорія FC -груп є однією з найбільш розвинених серед теорій нескінченних груп.

Природними розширеннями класу скінченних груп є клас C усіх черніковських груп та клас P усіх майже поліциклічних груп. Тому якщо $X = C$, то клас усіх CC -груп – це точнісінько клас усіх *груп з черніковськими класами спряжених елементів*, який був введений у розгляд Я.Д. Половицьким [71]. Цей клас не є таким вивченим, як клас FC -груп, але теорія цих груп розвивається досить інтенсивно та має вже багато цікавих та важливих результатів. Якщо ж $X = P$, то приходимо до класу PC -груп або до класу усіх *груп з майже поліциклічними класами спряженості*. Вивчення цього класу тільки починається [72, 73]. Ми розглянемо підклас класу PC -груп, який виникає з наступного розширення поняття наближено нормальних підгруп.

Підгрупа H групи G називається *майже поліциклічно наближеною до нормальної* (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Як видно з цього означення, ці підгрупи будуть природним узагальненням наближено нормальних підгруп. Якщо $G \in PC$ - групою, то для кожного елемента $g \in G$ підгрупа $H_g = \langle g \rangle^G$ буде майже поліциклічною. Звідси випливає, що і для кожної майже поліциклічної підгрупи F групи G її нормальне замкнення F^G буде майже поліциклічною підгрупою. Інакше кажучи, кожна майже поліциклічна підгрупа F групи G є майже поліциклічно наближена до

нормальні. Більш того, ця властивість є характеристичною для PC -груп. Тому природно виникає питання про те, а якою ж буде протилежна ситуація. Точніше кажучи, що можна сказати про будову групи G , у якій усі підгрупи, за винятком майже поліциклічних, будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. Такі групи будемо називати *анти PC -групами*. Вивченню цих груп присвячена дана робота.

1. Властивості підгруп, майже поліциклічно наближених до нормальних

1.1. Означення. Підгрупа H групи G називається *майже поліциклічно наближеною до нормальної* (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною.

1.2. Лема. Нехай G – група. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що є майже поліциклічно наближені до нормальних. Тоді і їх перетин $H \cap K$ буде підгрупою, майже поліциклічно наближеною до нормальної.

Доведення. Дійсно, за означенням підгрупа H (відповідно K) містить у собі таку нормальну в H^G (відповідно в K^G) підгрупу U (відповідно V), що H^G/U (відповідно K^G/V) буде майже поліциклічною. Підгрупа $H^G \cap K^G \cap U = K^G \cap U$ буде нормальною в $H^G \cap K^G$, і відповідно, $H^G \cap K^G \cap V = H^G \cap V$ є нормальною в $H^G \cap K^G$. З рівності

$$U \cap V = H^G \cap U \cap V \cap K^G = (K^G \cap U) \cap (H^G \cap V)$$

отримаємо, що підгрупа $U \cap V$ нормальна в $H^G \cap K^G$. Мають місце наступні співвідношення

$$(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U) = (H^G \cap K^G)/(H^G \cap K^G \cap U) \cong (H^G \cap K^G)U/U \leq H^G/U$$

та

$$(K^G \cap U)/(U \cap V) = (K^G \cap U)/(K^G \cap U \cap V) \cong (K^G \cap U)V/V \leq K^G/V,$$

які свідчать про те, що обидві фактор-групи $(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U)$ та $(K^G \cap U)/(U \cap V)$ будуть майже поліциклічними. Звідси випливає, що майже поліциклічною буде і наступна фактор-група $(H^G \cap K^G)/(U \cap V)$. Включення $U \cap V \leq H \cap K$ доводить тепер, що перетин $H \cap K$ буде підгрупою, що майже поліциклічно наближена до нормальної. Лема доведена.

1.3. Пропозиція. *Нехай G – група автоморфізмів майже поліциклічної групи K . Якщо G є локально узагальнено радикальною групою, то вона буде майже поліциклічною.*

Доведення. З теорем 6 та 7 отримаємо, що група G ізоморфно вкладається в лінійну групу $GL(n, \mathbf{Z})$ для деякого натурального числа n . Нехай H – довільна розв’язна підгрупа групи G . Ми можемо розглядати G як підгрупу $GL(n, \mathbf{Q})$. Тепер з класичної теореми Цассенхауза (теорема 3) знайдеться таке натуральне число k , яке залежить тільки від n , що ступінь розв’язності підгрупи H не перевищує числа k . Звідси за допомогою досить стандартних аргументів неважко отримати, що також і довільна радикальна підгрупа групи G буде розв’язною і ступінь її розв’язності не перевищує числа k . У свою чергу це тягне за собою той факт, що кожна локально радикальна підгрупа групи G буде розв’язною і ступінь її розв’язності не перевищує числа k . У цьому випадку неважко довести, що тоді група G містить у собі найбільшу нормальну розв’язну підгрупу S . Оскільки S також є підгрупою $GL(n, \mathbf{Z})$, то з теорема 6 випливає той факт, що S мусить бути поліциклічною підгрупою. Оскільки, очевидно, локально узагальнено радикальна група не містить у собі вільних нециклічних підгруп, то теорема Тітса (теорема 9) показує, що фактор-група G/S буде скінченною. Таким

чином, з доведеного вище про підгрупу S випливає, що і вся група G є майже поліциклічною. Пропозиція доведена.

Нехай G – група і X – клас груп. Покладемо

$$XC(G) = \{ x \in G \mid G/C_G(g^G) \in X \}.$$

У загальному випадку (тобто для довільного класу X) підмножина $XC(G)$ не буде підгрупою в G . Однак, якщо клас груп X є формацією (тобто він буде замкнений відносно переходу до фактор-груп та підпрямих добутків), то $XC(G)$ буде навіть характеристичною підгрупою. У цьому випадку підгрупа $XC(G)$ називається *XC-центром групи G* . Якщо $X = P$ – це клас усіх майже поліциклічних груп, то будемо відповідно говорити про *PC-центр групи* та позначати його через $PC(G)$. Очевидним є той факт, що клас усіх майже поліциклічних груп утворює формацію і тому підмножина $PC(G)$ буде характеристичною підгрупою групи G .

1.4. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо g – такий її елемент, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою, то $g \in PC(G)$.*

Доведення. Покладемо $H_g = \langle g \rangle^G$. З пропозиції 1.3 отримаємо, що фактор-група $G/C_G(H_g)$ буде майже поліциклічною. Але ж це і буде означати, що $g \in PC(G)$. Наслідок доведений.

1.5. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо H – майже поліциклічна нормальна підгрупа G , то для кожного елемента $g \in H$ має місце включення $g \in PC(G)$.*

Доведення. Дійсно, має місце включення $\langle g \rangle^G \leq H$, яке доводить той факт, що $\langle g \rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. Тепер необхідно застосувати **наслідок 1.4**. Наслідок доведений.

1.6. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо її майже поліциклічна підгрупа H буде майже поліциклічно наближена до нормальної, то $H \leq PC(G)$.*

Доведення. Підгрупа H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , яка визначає майже поліциклічну фактор-групу H^G/L . Але ж у цьому випадку і сама підгрупа H^G буде майже поліциклічною. З наслідку 1.5 отримаємо тепер включення $H \leq PC(G)$. Наслідок доведений.

1.7. Наслідок. Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо її циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ є майже поліциклічно наближена до нормальної, то $g \in PC(G)$.

Наступні результати є відомими, але ми не змогли відшукати відповідних посилань і тому наводимо їх тут з доведеннями.

1.8. Пропозиція. Нехай G – група і C – підгрупа її центру. Якщо фактор-група G/C є поліциклічною, то комутант групи G також буде поліциклічним.

Доведення. Фактор-група G/C має субнормальний ряд з циклічними факторами, і тому група G має субнормальний ряд

$$C = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G,$$

де $H_{j+1}/H_j = \langle c_{j+1} H_j \rangle$ – циклічний фактор, $0 \leq j \leq n-1$. Для доведення скористаємось індукцією за числом n . Якщо $n = 1$, то фактор група G/C буде циклічною, і з вибору підгрупи C випливає, що уся група G буде абелевою. У такому разі її комутант буде одиничною підгрупою, зокрема він є скінченним. Нехай тепер $n > 1$, покладемо $H_{n-1} = H$ та нехай вже доведено, що підгрупа $K = [H, H]$ буде поліциклічною. Фактор-група H/K є абелевою, а H/CK буде ще і скінченно породженою. Покладемо також $x = c_n$, тоді маємо $G/H = \langle xH \rangle$. Розглянемо відображення $\psi: aK \longrightarrow [x, a] K$, $a \in H$. Оскільки H/K є абелевою, неважко побачити, що це відображення буде ендоморфізмом підгрупи H/K , причому $\text{Im } \psi = [xK, H/K]$, $\text{Ker } \psi = C_{H/K}(xK)$. З вибору підгрупи C отримаємо включення $C \leq \text{Ker } \psi$, яке доводить той факт, що фактор-група $(H/K)/\text{Ker } \psi$ буде скінченно породженою. Тепер ізоморфізм $\text{Im } \psi \cong (H/K)/\text{Ker } \psi$ показує, у свою чергу, що підгрупа $\text{Im } \psi = [xK, H/K] = T/K$ є скінченно породженою. Фактор-група

$(G/K)/(T/K)$ уже буде центральним розширенням підгрупи $(H/K)/(T/K)$ за допомогою циклічної групи. Тому вона буде абелевою, а тому $[G, G] \leq T$. У свою чергу, T є розширенням поліциклічної підгрупи K за допомогою скінченно породженої абелевої групи T/K . Таким чином, T , а отже і $[G, G]$, буде поліциклічною підгрупою, що і доводить результат. Пропозиція доведена.

1.9. Теорема. *Нехай G – група і C – підгрупа її центру. Якщо фактор-група G/C є майже поліциклічною, то комутант групи G також буде майже поліциклічним.*

Доведення. За умовами теореми, фактор-група G/C містить у собі таку нормальну поліциклічну підгрупу H/C , що G/H є скінченною. З **пропозиції 1.8** випливає, що комутант $D = [H, H]$ буде поліциклічною підгрупою. Для доведення теореми досить довести тепер, що фактор-група G/D має майже поліциклічний комутант. Тому, не применшуючи загальності розгляду, будемо вважати підгрупу D одиничною. Інакше кажучи, можна вважати, що H – абелева підгрупа. Нехай $\{g_1, \dots, g_k\}$ – набір представників всіх суміжних класів групи G за підгрупою H , взятих по одному у кожному суміжному класі. Розглянемо відображення $\psi_j: a \longrightarrow [g_j, a], a \in H, 1 \leq j \leq k$. Оскільки H є абелевою, неважко побачити, що це відображення буде ендоморфізмом підгрупи H , причому $\text{Im } \psi_j = [g_j, H], \text{Ker } \psi_j = C_H(g_j)$. Оскільки центр групи G містить у собі підгрупу C , то отримуємо включення $C \leq \text{Ker } \psi_j$. Це включення показує, що фактор-група $H/\text{Ker } \psi_j$ мусить бути скінченно породженою. Використавши тепер ізоморфізм $\text{Im } \psi_j \cong H/\text{Ker } \psi_j$, у свою чергу можемо побачити, що підгрупа $\text{Im } \psi_j = [g_j, H]$ є скінченно породженою підгрупою. Оскільки це є вірним для кожного індексу $j, 1 \leq j \leq k$, то підгрупа $K = [g_1, H] \dots [g_k, H]$ також буде скінченно породженою. Якщо x – довільний елемент групи G , то $x \in g_j H$ для деякого j , а тому $x = g_j h$ для деякого елемента $h \in H$. Якщо тепер $a \in H$, то маємо

$$[x, a] = [g_j h, a] = [g_j, a]^h [h, a] = [g_j, a] \in K.$$

Це означає, що $[G, H] \leq K$, а отже центр фактор-групи G/K містить підгрупу H/K . Оскільки фактор-група $(G/K)/(H/K)$ є скінченною, то за класичною теоремою Шура (**теорема 1**) комутант $L/K = [G/K, G/K]$ буде скінченним. Врахувавши інформацію про структуру підгрупи K , отримаємо, що підгрупа L буде майже поліциклічною, що доводить теорему. Теорема доведена.

1.10. Теорема. Нехай G – група. Якщо g – такий її елемент, що $g \in PC(G)$, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ має майже поліциклічний комутант та задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп.

Доведення. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$, $C = C_G(H)$. За вибором елемента g , фактор-група G/C буде майже поліциклічною. Очевидно центр підгрупи H містить у собі перетин $C \cap H$. Згадавши про ізоморфізм $H/(C \cap H) \cong HC/C$ і взявши до відома **теорему 1.9**, отримаємо, що комутант K підгрупи H буде майже поліциклічним. Відмітимо, що підгрупа K буде нормальною в усій групі G . Абелеву групу H/K ми можемо розглядати як модуль над цілочисленим груповим кільцем $\mathbb{Z}L$, де $L = G/C$ – майже поліциклічна група. За класичною теоремою Ф. Холла (**теорема 10**) кільце $\mathbb{Z}L$ буде нетеровим. За своєю побудовою $\mathbb{Z}L$ -модуль H/K буде циклічним, а тому він буде гомоморфним образом кільця $\mathbb{Z}L$, що розглядається як модуль над самим собою. З цього буде випливати, що H/K буде нетеровим $\mathbb{Z}L$ -модулем. Оскільки кожний $\mathbb{Z}L$ -підмодуль H/K буде G -інваріантною підгрупою, звідси і отримуємо, що фактор H/K задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. Врахувавши тепер той факт, що K є майже поліциклічною підгрупою, і отже задовольняє умову максимальності для всіх підгруп, одержуємо, що і нормальна підгрупа H також задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. Теорема доведена.

1.11. Лема. Нехай G – група і H – її нормальна підгрупа. Нехай T – підмножина елементів групи G , що задовольняє умову $G = \langle T \rangle C_G(H)$. Тоді центр групи G містить у собі перетин $H \cap C_G(T)$.

Доведення. Нехай x – довільний елемент групи G , $y \in H \cap C_G(T)$. Тоді $x = zb$ для деяких елементів $z \in \langle T \rangle$ та $b \in C_G(H)$. Нагадаємо, що $C_G(T) = C_G(\langle T \rangle)$. Враховуючи цю рівність, маємо тепер

$$[x, y] = [zb, y] = [z, y]^b [b, y] = 1.$$

Це і означає, що $y \in \zeta(G)$. Лема доведена.

1.12. Теорема. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли для кожного її елемента g нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ його циклічної підгрупи $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою.

Доведення. Припустимо спочатку, що G є PC -групою. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$, $C = C_G(H)$. За визначенням PC -групи, фактор-група G/C буде майже поліциклічною. Зокрема, вона буде скінченно породженою. Тому існує така скінченна підмножина T , що $G = \langle T \rangle C$. З того факту, що G є PC -групою випливає тоді, що фактор-група $G/C_G(T)$ буде майже поліциклічною. Ізоморфізм

$$H/(C_G(T) \cap H) \cong HC_G(T)/C_G(T) \leq G/C_G(T)$$

показує, що фактор-група $H/(C_G(T) \cap H)$ буде майже поліциклічною. З леми 1.11 отримуємо, що центр групи G містить у собі перетин $C_G(T) \cap H$. З іншого боку теорема 1.10 показує, що нормальна підгрупа H задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. Врахувавши цю обставину, отримаємо, що центральна підгрупа $C_G(T) \cap H$ мусить бути скінченно породженою. Разом з цим фактом та обставина, що $H/(C_G(T) \cap H)$

є майже поліциклічною групою, показує що і вся підгрупа H буде майже поліциклічною.

Навпаки, припустимо, що для кожного елемента g його нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою. З цього факту за допомогою трансфінітної індукції неважко отримати, що група G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого або скінченні, або скінченно породжені абелеві групи. Зокрема G буде (локально) узагальнено радикальною групою. З **наслідку 1.4** випливає тоді, що $G = PC(G)$, тобто G буде PC -групою. Теорема доведена.

1.13. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли для кожної її скінченно породженої підгрупи H її нормальне замкнення H^G є майже поліциклічною підгрупою.

1.14. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли кожна її циклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Доведення. Припустимо спочатку, що $G \in PC$ -групою. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$. З **теорему 1.12** випливає, що нормальна підгрупа H буде майже поліциклічною. Очевидним чином це означає, що підгрупа $\langle g \rangle$ є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Навпаки, нехай кожна циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ групи G буде майже поліциклічно наближена до нормальної. З цього випливає, що її нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою. Застосувавши тепер **теорему 1.12**, отримаємо той факт, що $G \in PC$ -групою. Наслідок доведений. Наслідок доведений.

1.15. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли кожна її майже поліциклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Доведення. Дійсно, нехай спочатку $G \in PC$ -групою. Вибираємо в ній довільну майже поліциклічну підгрупу H . Тоді H має скінченну множину $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ породжуючих елементів. З **теорему 1.12** випливає, що нормальне замкнення $\langle g_j \rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою для

кожного індексу j , $1 \leq j \leq n$. Тоді майже поліциклічною буде і добуток $\langle g_1 \rangle^G \dots \langle g_n \rangle^G = H^G$. Очевидним чином це означає, що підгрупа H є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Навпаки, якщо кожна майже поліциклічна підгрупа групи G буде майже поліциклічно наближена до нормальної, то те ж саме буде мати місце і для кожної її циклічної підгрупи. Тепер залишилось застосувати **наслідок 1.14**. Наслідок доведений.

В роботі [72] було розглянуто інше розширення поняття наближено нормальної підгрупи. Таким розширенням були підгрупи H групи G , для яких впорядкована за включенням система підгруп $\{ L \mid H \leq L \leq G \}$ задовольняє умову максимальності. Зразу слід відмітити, що це поняття не буде еквівалентним поняттю, що розглядається в даній роботі. В цьому можна упевнитись розглянувши наступний приклад.

1.16. Приклад. Нехай p – просте число, $\langle a \rangle$ – циклічна група порядку p , $\langle g \rangle$ – нескінченна циклічна група,

$$G = \langle g \rangle \rtimes \langle a \rangle = A \rtimes \langle g \rangle -$$

вінцевий добуток цих двох циклічних груп, A – базова підгрупа цього вінцевого добутку. За конструкцією A буде нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою, і отже група G не є (майже) поліциклічною. Ми можемо розглядати A як циклічний модуль над груповим кільцем $J = \mathbf{F}_p \langle g \rangle$ нескінченної циклічної групи над простим полем $\mathbf{F}_p$. Це тягне за собою ізоморфізм $A \cong J / \text{Ann}_J(a)$. У свою чергу $\text{Ann}_J(a)$ буде ідеалом у кільці J . Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс в J , то нескінченність A доводить рівність $\text{Ann}_J(a) = \langle 0 \rangle$. Зокрема звідси випливає, що і $C_A(g) = \langle 1 \rangle$. Нехай тепер H – нормальне замкнення підгрупи $\langle g \rangle$ в групі G . З **наслідку 1.4** отримаємо включення $g \in PC(G)$, яке в свою чергу доводить той факт, що і фактор-група $A/C_A(g)$ повинна бути

поліциклічною. Оскільки A є періодичною, то це означає, що $A/C_A(g)$ мусить бути скінченною. Але ж у цьому випадку $C_A(g) \neq \langle 1 \rangle$. Однак, як ми вже бачили вище, це є неможливим. Отримане протиріччя показує, що підгрупа H не може бути поліциклічною. Інакше кажучи, підгрупа $\langle g \rangle$ не є майже поліциклічно наближена до нормальної. Нехай тепер

$$K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n \leq \dots$$

довільна зростаюча послідовність підгруп, що містять у собі $\langle g \rangle$. З включення $\langle g \rangle \leq K_n$ отримаємо напівпрямий розклад $K_n = B_n \rtimes \langle g \rangle$. Це приводить нас до іншої зростаючої послідовності підгруп

$$B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_n \leq \dots,$$

кожна з яких міститься в A та буде $\langle g \rangle$ -інваріантною. Оскільки групове кільце $\mathbf{F}_p \langle g \rangle$ є нетеровим, то і циклічний $\mathbf{F}_p \langle g \rangle$ -модуль A буде нетеровим. Це означає, що A не містить у собі строго зростаючих послідовностей $\langle g \rangle$ -інваріантних підгруп. Таким чином, знайдеться такий номер m , що $B_m = B_{m+k}$ для кожного натурального k . У свою чергу тоді будемо мати $K_m = K_{m+k}$ для кожного натурального k . Таким чином, впорядкована за включенням система підгруп $\{ L \mid \langle g \rangle \leq L \leq G \}$ задовольняє умову максимальності.

Наступним природним питанням тут є питання про будову груп, кожна підгрупа яких є майже поліциклічно наближена до нормальної. З одного боку, тут можна було використати результати роботи [72]. Але доведення, наведене в цій роботі по суті повторює доведення роботи Б. Неймана [55] за виключенням, останньої частини, де був використаний результат М. Томкінсона. З іншого боку, для нашого випадку остання частина доведення може бути значно спрощена. Тому є сенс навести тут доведення наступної

теореми про будову груп, кожна підгрупа яких є майже поліциклічно наближена до нормальної, використовуючи ідеї доведення Б. Неймана та наступні результати.

Відмітимо спочатку елементарні властивості підгруп, які є майже поліциклічно наближені до нормальних.

1.17. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої є майже поліциклічно наближена до нормальної.*

(1) Якщо H – підгрупа групи G , то кожна підгрупа H є майже поліциклічно наближена до нормальної.

(2) Якщо L – нормальна підгрупа G , то кожна підгрупа G/L є майже поліциклічно наближена до нормальної.

(3) Якщо U, V – підгрупи G , причому U – нормальна в V , то кожна підгрупа V/U є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Ці твердження є майже очевидними.

1.18. Пропозиція. *Нехай G – FC -група. Якщо її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G має скінченний комутант.*

Доведення. Нехай спочатку G є періодичною групою. Вибираємо в ній довільну підгрупу H . Оскільки H є майже поліциклічно наближена до нормальної, то H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Але ж періодична майже поліциклічна група є скінченною. Врахувавши включення $L \leq H$, отримаємо звідси, що підгрупа H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Інакше кажучи, кожна підгрупа G буде майже нормальною. З теореми Б. Неймана [55] отримаємо, що G має скінченний комутант.

Нехай тепер G – неперіодична FC -група. З **теореми 2** випливає, що фактор-група $G/\zeta(G)$ буде періодичною. В центрі $\zeta(G)$ вибираємо таку вільну абелеву підгрупу A , що $\zeta(G)/A$ є періодичною. Тоді і вся фактор-група G/A також буде періодичною. З леми **1.17** отримаємо, що кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної. З доведеного вище отримаємо, що комутант G/A буде скінченною підгрупою. З **теореми 2**

отримаємо, що множина T всіх елементів групи G , що мають скінченний порядок, є характеристичною підгрупою, а фактор-група G/T буде абелевою. Застосовуючи класичну теорему Ремака, з очевидної рівності $A \cap T = \langle 1 \rangle$ отримаємо вкладання

$$G \hookrightarrow V = G/A \times G/T.$$

З доведеного вище отримаємо скінченність підгрупи $[G/A, G/A]$. Той факт, що другий прямий множник є абелевим, приводить до рівності $[V, V] = [G/A, G/A]$. Отже підгрупа $[V, V]$, а з нею і $[G, G]$, буде скінченною. Пропозиція доведена.

1.19. Лема. *Нехай G – група. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G – PC-група.*

Доведення. Дійсно, у цьому випадку і кожна циклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної. Тепер досить застосувати **наслідок 1.15.** Лема доведена.

1.20. Лема. *Нехай G – група, центр якої містить таку періодичну підгрупу A , що G/A – абелева. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G має скінченний комутант.*

Доведення. Для кожного елемента $g \in G$ розглянемо відображення $\psi_g: x \longrightarrow [g, x], x \in G$. Оскільки A – підгрупа центру, то маємо

$$\psi_g(ab) = [g, xy] = [g, y] [g, x]^y = [g, x] [g, y] = \psi_g(x) \psi_g(y).$$

Таким чином, відображення ψ_g буде ендоморфізмом групи G , причому $\text{Im } \psi_g = [g, G] \leq A \leq \zeta(G)$, $\text{Ker } \psi_g = C_G(g)$. Використавши тепер ізоморфізм

$$[g, G] = \text{Im } \psi_g \cong H/\text{Ker } \psi_g = G/C_G(g),$$

отримаємо, що фактор-група $G/C_G(g)$ мусить бути періодичною. З іншого боку, **лема 1.19** показує, що ця фактор-група є майже поліциклічною. Одночасно дві ці складові доводять той факт, що $G/C_G(g)$ є скінченною. Оскільки це має місце для кожного елемента $g \in G$, то $G \in FC$ -групою. Тепер залишається застосувати **пропозицію 1.18**. Лема доведена.

1.21. Лема. *Нехай G – PC-група і припустимо, що H – її нормальна підгрупа, що визначає майже поліциклічну фактор-групу G/H . Якщо комутант підгрупи H є майже поліциклічною підгрупою, то і комутант усієї групи G також буде майже поліциклічною підгрупою.*

Доведення. Оскільки фактор-група G/H є майже поліциклічною, то вона породжується скінченною підмножиною елементів $\{x_1H, \dots, x_kH\}$. Покладемо $K = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$, тоді маємо рівність $G = HK$. Скориставшись тим фактом, що G – PC-група, з **наслідку 1.13** отримаємо, що нормальне замкнення $L = K^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. З співвідношень $G/L = HL/L \cong H/(H \cap L)$ та того факту, що комутант $[H, H]$ є майже поліциклічною підгрупою, випливає, що майже поліциклічним буде і підгрупа $D/L = [G/L, G/L]$. Очевидне включення $[G, G] \leq D$ доводить тепер той факт, що комутант $[G, G]$ усієї групи G також буде майже поліциклічною підгрупою. Лема доведена.

1.22. Теорема. *Нехай G – група. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то комутант усієї групи G буде майже поліциклічною підгрупою.*

Доведення. З **леми 1.19** випливає, що $G \in PC$ -групою. Припустимо, що комутант групи G не буде майже поліциклічною підгрупою. Зокрема, він буде неединичною підгрупою, а тому знайдуться елементи x_1, y_1 , для яких $[x_1, y_1] = z_1 \neq 1$. Покладемо $X_1 = \langle x_1, y_1 \rangle^G$, $C_1 = C_G(X_1)$. Скориставшись тим фактом, що G – PC-група, отримаємо, що фактор-група G/C_1 буде майже поліциклічною. **Лема 1.21** показує, що у цьому випадку комутант підгрупи C_1 також не може бути майже поліциклічною підгрупою.

Зокрема, підгрупа X_1 не може містити у собі $[C_1, C_1]$. У цьому випадку знайдуться елементи x_2, y_2 , для яких $[x_2, y_2] = z_2 \notin X_1$. За їх вибором також маємо $[x_1, x_2] = [x_1, y_2] = [y_1, y_2] = [x_2, y_1] = 1$. Покладемо $X_1 < x_2, y_2 >^G = X_2$, $C_2 = C_G(X_2)$. Знову скористаємось тим фактом, що G – РС-група і отримаємо, що фактор-група G/C_2 буде майже поліциклічною. **Лема 1.21** показує, що комутант підгрупи C_2 знову не може бути майже поліциклічною підгрупою. Застосувавши звичайну індукцію, за допомогою аналогічних аргументів знайдемо підмножину елементів $\{x_n, y_n/n \in \mathbf{N}\}$, що задовольняють наступні умови:

$$\begin{aligned} [x_n, x_k] &= [x_n, y_k] = [y_n, y_k] = 1 \text{ у випадку, коли } n \neq k; \\ [x_n, y_n] &= z_n \text{ та } z_n \notin \langle x_k, y_k / 1 \leq k \leq n-1 \rangle^G. \end{aligned}$$

Нехай $H = \langle x_n, y_n/n \in \mathbf{N} \rangle$. Покладемо тепер $\Sigma = \{n / [x_n, z_n] \neq 1\}$. Припустимо спочатку, що множина Σ є нескінченною. Тоді її елементи можна переіндексувати, зберігаючи їх взаємний порядок, тобто покладемо $\Sigma = \{\sigma(n) / n \in \mathbf{N}\}$. Нехай тепер $U = \langle x_{\sigma(n)} / n \in \mathbf{N} \rangle$, тоді нормальне замкнення U^H містить у собі підгрупу $\langle z_{\sigma(n)} / n \in \mathbf{N} \rangle$. Припустимо, що існує таке натуральне число m , що

$$U \langle z_{\sigma(n)} / 1 \leq n \leq m \rangle^H = U \langle z_{\sigma(n)} / 1 \leq n \leq m-1 \rangle^H.$$

За умовами, яким задовольняють елементи $\{x_n, y_n/n \in \mathbf{N}\}$, будемо мати тоді $[x_{\sigma(m)}, U] = \langle 1 \rangle$ та $[x_{\sigma(m)}, z_{\sigma(n)}] = 1$ у випадку, коли $n < m$, і отже

$$[x_{\sigma(m)}, U \langle z_{\sigma(n)} / 1 \leq n \leq m \rangle^H] = \langle 1 \rangle.$$

З іншого боку, $[x_{\sigma(m)}, z_{\sigma(m)}] \neq 1$. Отримана суперечність доводить, що нерівність

$$U < z_{\sigma(k)} / 1 \leq k \leq n-1 >^H \neq U < z_{\sigma(k)} / 1 \leq k \leq n >^H$$

має місце для кожного натурального номеру n . Таким чином, ми отримуємо строго зростаючий ланцюжок підгруп

$$\begin{aligned} U < z_{\sigma(1)} >^H &< U < z_{\sigma(1), z_{\sigma(2)}} >^H < \dots \\ < U < z_{\sigma(k)} / 1 \leq k \leq n >^H &< U < z_{\sigma(k)} / 1 \leq k \leq n+1 >^H < \dots \end{aligned}$$

З іншого боку, підгрупа U є майже поліциклічно наближена до нормальної в підгрупі H за **лемою 1.17**. Це означає, що U^H містить у собі таку нормальну підгрупу $L \leq U$, що фактор-група U^H/L буде майже поліциклічною. Звідси випливає, що впорядкована за включенням система підгруп $\{K / L \leq K \leq U^H\}$ задовольняє умову максимальності. У цьому випадку і її підсистема $\{K / U \leq K \leq U^H\}$ також повинна задовольняти цю умову. Таким чином ми отримали протиріччя, яке доводить скінченність підмножини Σ .

За допомогою аналогічних аргументів можна довести і той факт, що підмножина $\{n / [y_n, z_n] \neq 1\}$ також є скінченною. Отже, існує такий натуральний номер t , що $[x_n, z_n] = [y_n, z_n] = 1$ для всіх $n \geq t$. Усі наступні розгляди ми будемо проводити вже в підгрупі $\langle x_n, y_n / n \geq t \rangle$. Тому, щоб не обтяжувати наш розгляд новими позначеннями, будемо вважати, що $[x_n, z_n] = [y_n, z_n] = 1$ для всіх натуральних чисел n . Покладемо тепер $\mathcal{E} = \{n / z_n / \in \text{скінченним}\}$. Припустимо тепер, що підмножина $\mathcal{E}$ є скінченною. Тоді існує такий натуральний номер q , що $z_n / \in \text{нескінченним}$ для всіх $n \geq q$. Покладемо $H_1 = \langle x_n, y_n / n \geq q \rangle$, $U_1 = \langle x_n / n \geq q \rangle$, $W = \langle z_n / n \geq q \rangle$. З наших припущень випливає, що центр H_1 містить у собі підгрупу W . Якщо перетин $W \cap U_1$ є неодиначним, то він містить неодиначний елемент $z = x_q^k q x_{q+1}^k q + 1 \dots x_{q+s}^k q + s$ для деякого

натурального номера s . Нехай $p = q + r$ – найменший номер, для якого $k_q + r \neq 0$. Тоді $[y_p, z] = 1$. З іншого боку,

$$[y_p, z] = [y_p, x_q^k q \ x_{q+1}^k q + 1 \dots x_{q+s}^k q + s] = z_p^k p,$$

А останній елемент не може бути одиничним, оскільки за нашими припущеннями z_p має нескінченний порядок. Отримана суперечність доводить нескінченність підмножини Ξ . Покладемо $H_2 = \langle x_n, y_n / n \in \Xi \rangle$, $V = \langle z_n / n \in \Xi \rangle$. Тоді центр підгрупи H_2 містить у собі підгрупу V , причому остання є періодичною та визначає абелеву фактор-групу H_2/V_1 . За побудовою комутант підгрупи H_2 містить V , а остання підгрупа є нескінченною. Зокрема, комутант підгрупи H_2 також буде нескінченним. З іншого боку, **лема 1.20** стверджує, що комутант підгрупи H_2 повинен бути скінченною підгрупою. Це останнє протиріччя і доводить теорему. Теорема доведена.

2. Будова деяких класів анти РС-груп

2.1. Означення. Група G називається анти РС-групою, якщо всі її підгрупи, за винятком майже поліциклічних, будуть майже поліциклічно наближені до нормальних.

За **наслідком 1.15** група G тоді і тільки тоді буде РС-групою, коли кожна її майже поліциклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, тому введені вище групи є протилежними в деякому сенсі до груп з майже поліциклічними класами спряжених елементів.

Наступна лема дає деякі елементарні властивості анти РС-груп.

2.2. Лема. Нехай G – анти РС-група.

(1) Якщо H – підгрупа групи G , то H також буде анти РС-групою.

(2) Якщо L – нормальна підгрупа G , то фактор-група G/L буде анти PC-групою.

(3) Якщо U, V – такі підгрупи G , що U є нормальною в V , то секція V/U також буде анти PC-групою.

2.3. Лема. Нехай G – анти PC-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $H \cap K \leq L$;

(iii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;

(iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

Доведення. Нескінченність множини Λ забезпечує існування таких нескінченних підмножин Δ, Σ в множині Λ , що задовольняють умови $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U/L = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, $V/L = \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$. З того факту, що обидві підмножини Δ, Σ є нескінченними, можна побачити тепер, що обидві підгрупи U/L та V/L не можуть бути майже поліциклічними. За своїм вибором обидві підгрупи U та V будуть H -інваріантними. Тоді також і обидві добутки UH та VH не будуть майже поліциклічними, а отже, вони майже поліциклічно наближені до нормальних. Лема 1.2 показує, що перетин $UH \cap VH$ також буде підгрупою, яка є майже поліциклічно наближена до нормальної. Включення $L \leq U$ та $L \leq V$ свідчать, що має місце також і включення $L \leq UH \cap VH$. З іншого боку, нехай $x \in UH \cap VH$, тоді $x = uh = vu$ для деяких елементів $u \in U, v \in V, h, u \in H$. Звідси для елемента h отримуємо $h = u^{-1}x \in K$, а це показує, що $h \in K \cap H \leq L$. Використовуючи аналогічні аргументи, можна довести, що і $y \in K \cap H \leq L$. Тепер будемо мати

$$uL = uhL = xL = vyL = vL \in (U/L \cap V/L) = \langle 1 \rangle.$$

Інакше кажучи, $uL = vL = L$, тобто $u, v \in L$. Це забезпечує наступне включення $x \in HL$. Таким чином, ми дійшли до включень

$$LH \leq UH \cap VH \leq LH,$$

які тягнуть за собою рівність $UH \cap VH = HL$, яка вже і показує, що підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної. Лема доведена.

2.4. Наслідок. Нехай G – анти РС-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \bigstar_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) підмножина індексів $\Lambda \setminus \mathbf{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

2.5. Наслідок. Нехай G – анти РС-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \bigstar_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для кожного елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

Доведення. Оскільки підгрупа K_λ є H -інваріантною, то вона буде також і $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина індексів $\mathbf{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде скінченною, а тому доповнююча для неї підмножина $M =$

$\Lambda \setminus \text{Supp } \langle h \rangle_{L/L \cap K/L}$ буде вже нескінченною, а це дає можливість застосувати попередній **наслідок 2.4**. Наслідок доведений.

2.6. Наслідок. Нехай G – анти PC -група. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна H -інваріантна підгрупа для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупа K також буде H -інваріантною;
- (ii) множина індексів Λ є нескінченною.

Якщо група G є локально узагальнено радикальною, то має місце включення $H \leq PC(G)$.

Доведення. Дійсно, враховуючи попередній **наслідок 2.5**, отримаємо, що для будь якого елемента h , що належить до підгрупи H , циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в усій групі G . З **наслідку 1.6** отримаємо тепер включення $h \in PC(G)$. Наслідок доведений.

2.7. Наслідок. Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група. Припустимо, що K – підгрупа G , що задовольняє наступні умови:

- (i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна підгрупа для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (ii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді має місце включення $H \leq PC(G)$.

Тепер ми маємо змогу безпосередньо перейти до вивчення структури анти PC -груп.

2.8. Лема. Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група та нехай A – її абелева підгрупа. Якщо PC -центр групи G не містить у собі A , то в підгрупі A існує така скінченно породжена підгрупа B , що фактор-група A/B буде квазіциклічною.

Доведення. В підгрупі A існує вільна абелева підгрупа C , яка визначає періодичну фактор-групу A/C . Припустимо, що ця виділена підгрупа C не має скінченної системи породжуючих елементів. За її вибором це означає, що C є прямим добутком нескінченної множини нескінченних циклічних

підгруп. Приймаючи до уваги **наслідок 2.6**, отримаємо включення $A \leq PC(G)$. Але ж це суперечить нашим умовам відносно підгрупи A . Отримане протиріччя доводить той факт, що підгрупа C мусить бути скінченно породженою. Оскільки фактор-група A/C вже періодична, то маємо природний розклад

$$A/C = \times_{p \in \Pi(A/C)} T_p/C,$$

де T_p/C – силовська p -підгрупа групи A/C , $p \in \Pi(A)$. Якщо припустити, що множина $\Pi(A/C)$ є нескінченною, то з **наслідку 2.5** випливає, що підгрупа $\langle a \rangle C$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в усій групі G для кожного елемента a з підгрупи A . Очевидним є той факт, що $\langle a \rangle C$ є поліциклічною, тому врахувавши **наслідок 1.6**, приходимо до включення $\langle a \rangle C \leq PC(G)$. Зокрема і для елемента a маємо $a \in PC(G)$. Згадаємо тепер, що a є довільним елементом підгрупи A , і це доводить наступне включення $A \leq PC(G)$. Отже знову отримали протиріччя з вибором підгрупи A , яке доводить скінченність множини $\Pi(A/C)$.

Припустимо тепер, що для деякого простого числа p нижній шар

$$\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C \mid (xC)^p = 1\}$$

силовської p -підгрупи T_p/C буде нескінченним. Інакше кажучи, це означає, що $\Omega_1(T_p/C)$ є нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою. Для такого випадку ми знову можемо використати **наслідок 2.5** і отримати, що підгрупа $\langle a \rangle C$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G для довільного елемента $a \in A$, що, як ми вже бачили раніше, тягне за собою включення $A \leq PC(G)$. Отримане знову протиріччя доводить той факт, що підгрупа $\Omega_1(T_p/C)$ повинна бути скінченною для кожного простого числа $p \in \Pi(A/C)$. У свою чергу, це означає, що T_p/C буде черніковською підгрупою для будь-якого простого числа $p \in \Pi(A/C)$. Врахувавши це, отримаємо розклад $T_p/C = K_p/C \times D_p/C$, де K_p/C – скінченна підгрупа, а

інший прямий множник D_p/C є ділимою підгрупою, $p \in \Pi(A/C)$. Нарешті припустимо, що A/C містить у собі дві такі квазіциклічні підгрупи P_1/C та P_2/C , що $P_1/C \cap P_2/C = \langle 1 \rangle$. Для довільного елемента $a \in A$ обидві підгрупи $\langle a \rangle_{P_1}$ і $\langle a \rangle_{P_2}$ не будуть майже поліциклічними, а тому вони повинні бути майже поліциклічно наближені до нормальних в групі G . Вибір підгруп P_1, P_2 забезпечує той факт, що перетин мусить бути $\langle a \rangle_{P_1/C} \cap \langle a \rangle_{P_2/C}$ скінченним. У свою чергу це означає, що перетин $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2}$ буде скінченно породженою абелевою підгрупою, зокрема, він є поліциклічною підгрупою. З лема 1.2 отримаємо, підгрупа $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2}$ – буде майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G . **Наслідок 2.5** показує, що має місце включення $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2} \leq PC(G)$, яке, в свою чергу, приводить до включення $a \in PC(G)$, а отже і $A \leq PC(G)$. Це останнє протиріччя показує, що можливим є тільки розклад $A/C = B/C \times D/C$, де B/C є скінченною підгрупою, а D/C буде квазіциклічною підгрупою. Але ж у цьому випадку B є скінченно породжена абелева підгрупа, а факторгрупа A/C буде квазіциклічною. Лема доведена.

2.9. Лема. *Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група. Якщо вона містить у собі абелеву підгрупу A , яка не є мінімаксною, то G має майже поліциклічний комутант.*

Доведення. Доведена тільки що лема 2.8 приводить нас до включення $A \leq PC(G)$. Тепер ми можемо стверджувати, що PC -центр групи G не може бути мінімаксною підгрупою. З теореми 1.12 випливає, що для будь-якої майже поліциклічної підгрупи $H \leq PC(G)$ її нормальне замкнення H^G буде майже поліциклічною підгрупою. Звідси випливає, що кожна майже поліциклічна підгрупа, яка входить до PC -центру групи G , буде майже поліциклічно наближена до нормальної. З іншого боку, кожна підгрупа PC -центру групи G , яка не є майже поліциклічною, також буде майже поліциклічно наближена до нормальної. Врахувавши тепер теорему 1.22,

будемо бачити, що PC -центр групи G має майже поліциклічний комутант K .

Нехай $xK \in PC(G/K)$, покладемо $X/K = \langle xK \rangle^{G/K} = \langle x \rangle^G K/K$. Застосувавши знову **теорему 1.12**, отримаємо, що підгрупа X/K повинна бути майже поліциклічною. Оскільки такою самою ж буде і підгрупа K , то також підгрупа X , а разом з нею і нормальне замкнення $\langle x \rangle^G$, буде майже поліциклічною. **Наслідок 1.4** забезпечує нам включення $x \in PC(G)$, яке доводить рівність $PC(G/K) = PC(G)/K$. Весь наш наступний розгляд буде проводитись у фактор-групі G/K , тому, щоб не вводити нових позначень, можемо вважати підгрупу K одиничною.

Як ми зможемо побачити далі, це припущення не обмежить загальності наступних аргументів. Отже будемо вважати, що підгрупа $PC(G)$ є абелевою. Наша мета тепер – довести рівність $G = PC(G)$. Припустимо, що ця рівність не має місця. Це означає можливість існування елемента $g \in G \setminus PC(G)$. Вибираємо у підгрупі $PC(G)$ вільну абелеву підгрупу C , що визначає періодичну фактор-групу $PC(G)/C$. Припустимо, що підгрупа C не має скінченної системи породжуючих елементів. За її вибором це означає, що C є прямим добутком нескінченної множини нескінченних циклічних підгруп. У цьому випадку підгрупа C буде майже поліциклічно наближена до нормальної. Оскільки $PC(G)/C$ є періодичною групою, то її секція C^G/C , яка повинна бути поліциклічною та періодичною, є скінченною. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що і нормальне замкнення C^G також буде вільною абелевою підгрупою.

Щоб знову не вводити нових позначень, будемо вважати підгрупу C нормальною. Для підгрупи C є можливим отримати такий розклад $C = C_1 \times C_2$, де обидві підгрупи C_1 та C_2 будуть вільними абелевими та мають нескінченний 0 -ранг. Зокрема вони не можуть бути поліциклічними, а це означає, що тоді секції C_1^G/C_1 та C_2^G/C_2 будуть поліциклічними. Врахувавши рівність $C_1 \cap C_2 = \langle 1 \rangle$ отримаємо той факт, що перетин $\langle g$

$\langle C_1^G \cap \langle g \rangle C_2^G \rangle$ є поліциклічною підгрупою. Також кожна з підгруп $\langle g \rangle C_1^G$ та $\langle g \rangle C_2^G$ не є поліциклічною, а тому обидві вони будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. **Лема 1.2** забезпечує той факт, що і їх перетин $\langle g \rangle C_1^G \cap \langle g \rangle C_2^G$ мусить бути підгрупою, що майже поліциклічно наближена до нормальної. Використавши тепер **наслідок 1.6**, отримаємо важливе включення $\langle g \rangle C_1^G \cap \langle g \rangle C_2^G \leq PC(G)$, яке показує зокрема, що $g \in PC(G)$. Отримана суперечність доводить той факт, що підгрупа C є скінченно породженою.

За вибором підгрупи C фактор-група $PC(G)/C$ є періодичною, тому існує канонічний розклад $PC(G)/C = \times_{p \in \Pi(A/C)} T_p/C$, де T_p/C – силовська p -підгрупа цієї фактор-групи, $p \in \Pi(PC(G))$. Якщо припустити, що множина $\Pi(PC(G)/C)$ є нескінченною, то за **наслідком 2.5** підгрупа $\langle g \rangle C$ повинна бути майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G . Є очевидним той факт, що підгрупа $\langle g \rangle C$ є поліциклічною, тому з **наслідку 1.6** отримаємо включення $\langle g \rangle C \leq PC(G)$. Зокрема це означає, що $g \in PC(G)$, а це вже суперечить припущенню про елемент g . Отримана суперечність доводить скінченність множини $\Pi(PC(G)/C)$.

Як ми вже зазначали вище, підгрупа $PC(G)$ не є мінімаксною. Припустимо тепер, що для деякого простого числа $p \in \Pi(PC(G)/C)$ нижній шар $\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C \mid (xC)^p = 1\}$ силовської p -підгрупи T_p/C є скінченним. У цьому випадку вся силовська підгрупа T_p/C буде черніковською. Згадавши тепер про доведену вище скінченність множини $\Pi(PC(G)/C)$, отримаємо, що фактор $PC(G)/C$ буде черніковською групою. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що $PC(G)$ є мінімаксною підгрупою. Отримана суперечність доводить існування такого простого числа p , що $\Omega_1(T_p/C) = L/C$ – нескінченна підгрупа. Інакше кажучи, це означає, що $\Omega_1(T_p/C)$ буде нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою. Для підгрупи L/C є можливим отримати такий розклад $L/C = L_1/C \times L_2/C$, де обидві підгрупи L_1/C та L_2/C будуть нескінченними елементарними

абелевими. Зокрема, обидві вони не можуть бути майже поліциклічними. У такому разі обидві секції L_1^G/L_1 та L_2^G/L_2 повинні бути поліциклічними, а тому і скінченними, оскільки вони є періодичні. Рівність $L_1 \cap L_2 = \langle 1 \rangle$ показує, що перетин $\langle g \rangle L_1^G \cap \langle g \rangle L_2^G$ є поліциклічною підгрупою. Кожна з підгруп $\langle g \rangle L_1^G$ та $\langle g \rangle L_2^G$ не є майже поліциклічною, а тому обидві вони будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. **Лема 1.2** забезпечує той факт, що і перетин $\langle g \rangle L_1^G \cap \langle g \rangle L_2^G$ буде підгрупою, яка майже поліциклічно наближена до нормальної. Скориставшись тепер **наслідком 1.6**, отримаємо включення $\langle g \rangle L_1^G \cap \langle g \rangle L_2^G \leq PC(G)$, з якого, зокрема, випливає і включення $g \in PC(G)$. Отримане останнє протиріччя доводить потрібну нас рівність $G = PC(G)$. Як вже зазначалось вище, у цьому випадку комутант групи G буде майже поліциклічною підгрупою. Лема доведена.

2.10. Теорема. *Нехай G – узагальнено радикальна анти PC-група. Тоді або група G має майже поліциклічний комутант, або G буде майже розв'язною мінімаксною групою.*

Доведення. Вище доведена **лема 2.9** показує, що якщо серед усіх абелевих підгруп групи G існує підгрупа, яка не є мінімаксною, то комутант групи G повинен бути майже поліциклічною підгрупою. Тому залишається розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи G є мінімаксними.

Позначимо через R максимальну нормальну радикальну підгрупу групи G . Застосувавши **теорему 1.1.9**, отримаємо, що R буде розв'язною мінімаксною підгрупою. Нехай L/R – це максимальна нормальна локально скінченна підгрупа G/R . Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, що не є черніковською, то з **леми 2.2** та **леми 2.9** отримаємо той факт, що фактор-група G/R має скінченний комутант D/R . Його централізатор $C_{G/R}(D/R)$ буде мати тоді скінченний індекс в усій фактор-групі G/R . Якщо припустити, що G/R є нескінченною, то, беручи до уваги включення $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, будемо мати, що $C_{G/R}(D/R)$ є неодиначною нільпотентною

нормальною підгрупою G/R . Це однак суперечить вибору підгрупи R . Отримана суперечність свідчить, що у такому випадку вся фактор-група G/R повинна бути скінченною, і все доведено. Тому залишається розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи фактору L/R будуть черніковськими. **Теорема 9** показує, що у цьому випадку L/R також буде черніковською. Врахувавши вибір підгруп L, R , бачимо, що L/R буде скінченною. Знову припустимо, що фактор-група G/R є нескінченною та позначимо через U/L локально нільпотентний радикал фактор-групи G/L . Врахувавши цей вибір, отримаємо, що фактор U/L буде локально нільпотентною групою без скруту. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Звідси випливає, що перетин $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R$ є неодиначною підгрупою. За означенням фактор-група G/R не містить у собі нормальних локально нільпотентних підгруп, тому маємо $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Проте у цьому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Отримані співвідношення свідчать про те, що V/R – це неодиначна нормальна локально нільпотентна підгрупа фактор-групи G/R , а це суперечить вибору підгрупи R . Отримана суперечність доводить той факт, що фактор-група G/R мусить бути скінченною, а з цим і доводить всю теорему. Теорема доведена.

Для періодичного випадку можна отримати наступне уточнення доведеного вище результату.

2.11. Лема. *Нехай G – група, H – її F -досконала підгрупа. Якщо H є майже поліциклічно наближеною до нормальної, то вона нормальна.*

Доведення. Означення підгрупи, яка є майже поліциклічно наближена до нормальної, показує, що H^G містить у собі таку нормальну підгрупу P , що секція H^G/P є майже поліциклічною. Оскільки вона ще і періодична, то вона скінченна. Але тоді H співпадає з F -досконалою частиною нормального замкнення H^G . Але F -досконала частина є характеристичною, зокрема, вона буде нормальною в усій групі G . Лема доведена.

2.12. Лема. Нехай G – анти РС-група. Якщо H – така її нормальна підгрупа, що кожна підгрупа G , що містить у собі H та не співпадає з H , не є майже поліциклічною, то фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант.

Доведення. З умов лема випливає, що кожна підгрупа G , що містить у собі H та не співпадає з H , є майже поліциклічно наближена до нормальної. Інакше кажучи, кожна підгрупа G/H є майже поліциклічно наближена до нормальної. З **теорему 1.22** отримаємо тепер, що фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант. Лема доведена.

2.13. Теорема. Нехай G – локально скінченна група. Якщо G – анти РС-група, то G – група одного з наступних типів:

- (1) G – група зі скінченним комутантом;
- (2) G – майже квазіциклічна група.

Доведення. Припустимо, що група G має нескінченний комутант. З огляду на локальну скінченність групи це означає, що він не є майже поліциклічним. З **теорему 2.10** отримаємо тоді, що G – майже розв'язна мінімаксна група. Оскільки G – локально скінченна група, то G – черніковська група. Позначимо через D її ділиму (F -досконалу) частину і припустимо, що D не буде квазіциклічною. Нехай K – квазіциклічна підгрупа D . У цьому випадку маємо $D = K \times B$, де підгрупа B є ділимою, а тому і F -досконалою. За **лемою 2.11** обидві підгрупи K, B будуть нормальними. Легко бачити, що обидві фактор-групи G/K та G/B мають майже поліциклічні, а отже, скінченні комутанти. Оскільки $K \cap B = \langle 1 \rangle$, то **теорема Ремака** забезпечує вкладання $G \hookrightarrow G/K \times G/B$, яке, у свою чергу, доводить скінченність комутанта групи G . Отримане протиріччя показує, що D – квазіциклічна підгрупа, а отже, G – група типу (2). Теорема доведена.

Цитована література

1. **Schur I.** *Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution* // J. reine angew. Math. – 1904.– **127**.– S. 20 – 50.
2. **Baer R.** *Finiteness properties of groups* // Duke Math. J.–1948.– **15**.– P. 1021 – 1032.
3. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate elements* // Proc. London Math. Soc. –1951.–**1**, №3.– P. 178 – 187.
4. **Шунков В.П.** *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп* // Алгебра и логика.–1970.– **9**, № 5.– С. 579 – 615.
5. **Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* – М.: Наука, 1980.–384 с.
6. **Чарин В.С.** *О разрешимых группах типа A_3* // Мат. сб. –1961.–**54**, № 3.– С. 489 – 499.
7. **Baer R.** *Polyminimaxgruppen* // Math. Annalen.– 1968.– **175**, № 1.– S. 1 – 43.
8. **Зайцев Д.И.** *О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности* // Мат. сб.–1969.–**78**, № 3 .– С. 323 – 331.
9. **Wehrfritz B.A.F.** *Infinite linear groups.*– Berlin: Springer, 1973.– 229 p.
10. **Robinson D.J.S.** *Finiteness conditions and generalized soluble groups: Part 1.*– Berlin: Springer, 1972.– 210 p.
11. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind* // Math. Annalen.–1897.–**48**.– S. 548 – 561.
12. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe* //S.-B. Heidelberg Akad.–1933.– **2**.– S. 12 – 17.
13. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** *О метабильтоновых группах I* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – Т.5, № 3. – С. 45 – 49.
14. **Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М.** *О метабильтоновых группах II* // Там. же. – 1968. – Т.6, № 5. – С. 50 – 53.

15. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метагамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – Т.7, № 3. – С. 195 – 199.
16. Нагребцкий В.Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – Т.6, № 1. – С. 80 – 88.
17. Махнев А.А. О конечных метагамильтоновых группах // Там же. – 1976. – Т.10, № 1. – С. 60 – 75.
18. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп* // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 179 – 188.
19. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение метациклических метагамильтоновых групп*. – К.: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22с.
20. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп* // Строение групп и их подгрупповая характеристика. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101 – 111.
21. Кузенный М.Ф., Семко М.М. *Будова розв'язних метагамильтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.
22. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении неперiodических метагамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32 – 40.
23. Кузенный М.Ф., Семко М.М. *Метагамильтонові групи та їх узагальнення*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
24. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180 – 185.
25. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743 – 750.
26. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170 – 176.

27. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение метациклических метатагильтоновых групп* // Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173 – 183.
28. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О метатагильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 2. – С. 168 – 175.
29. Mann A. *Groups with dense normal subgroups* // Israel J. Math. – 1968. – 6, №1. – P. 13 – 25.
30. Kurdachenko L.A, Kuzennyi N.F., Semko M.M. *Groups with dense systems of infinite subgroups* // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A. 1985, 3, P. 7 – 9.
31. Kurdachenko L.A, Kuzennyi N.F., Semko N.N. *Groups with a dense system of infinite almost normal subgroups* // Ukrainian Math. J. 1991, 42(7 – 8), P. 904 – 908.
32. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих $U\mathcal{CN}[J]$ -груп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 181 – 186.
33. Семко М.М. *Про будову $U\mathcal{CN}[J]$ -груп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 13. – С. 196 – 203.
34. Семко М.М. *Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 90 с.
35. Семко М.М. *Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.
36. Семко М.М. *Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.
37. Семко М.М. *Будова нільпотентних $U\mathcal{CN}[J]$ -груп* // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 27 – 41.
38. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих ненільпотентних $U\mathcal{CN}[J]$ -груп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 789 – 798.

39. Семко М.М. *Ненільтпотентные группы с узагальненою щільністю нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 15. – С. 175 – 187.
40. Семко М.М. *Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 255 – 263.
41. Семко М.М. *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8. – С. 1148 – 1151.
42. Семко М.М. *Про будову УЩН[]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1396 – 1403.
43. Семко М.М. *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 49 – 53.
44. Семко М.М. *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 43 – 46.
45. Семко М.М. *Про будову УЩН[]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1250 – 1261.
46. Семко М.М. *Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[]-груп* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1 (17). – С. 230 – 237.
47. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих УЩН()-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 11. – С. 1532 – 1536.
48. Семко М.М. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.
49. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих УЩН[]-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 383 – 388.
50. Heineken H. and Mohamed I.J. *Groups with normalizer condition* // Math. Annalen. – 1972. – 198, №3. – P. 178 – 187.

51. **Heineken H. and Mohamed I.J.** *Non-nilpotent groups with normalizer condition* // Lecture Notes Math. – 1974.– **372**.– P. 357 – 360.
52. **Hartley B.** *A note on the normalizer condition* // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973.– **74**, №1.– P. 11 – 15.
53. **Hartley B.** *О нормализаторном условии и мини-транзитивных группах подстановок* // Алгебра и логика.– 1974.– **13**, № 5.– С. 589 – 602.
54. **Menegazzo F.** *Groups of Heineken-Mohamed* //J. Algebra. – 1995.–**171**.– P. 807 – 825.
55. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate subgroups* // Math. Z.– 1955.–**63**, № 1.– P. 76 – 96.
56. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп* // Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.
57. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп* // Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.
58. **Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А.** *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами* // Изв. вузов. Математика.– 1983.– № 10.– С. 57 – 63.
59. **Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э.** *Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп* // Укр. мат. журн.– 1983.– **35**, № 1.– С. 42 – 46
60. **Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Групи з деякими умовами максимальності* // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987.– № 1. – С. 9 – 11.
61. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** *Группы, богатые почти нормальными подгруппами* // Укр. мат. журн.– 1988.– **40**, № 3.– С. 326 – 330.
62. **Семко М.М., Кучменко С.М.** *Групи з великими системами майже нормальних підгруп* //Доп. НАН України.–2004.–№10.– С. 33 – 38.
63. **Семко Н.Н., Кучменко С.Н.** *Группы, у которых почти все подгруппы близки к нормальным* // Укр. мат. журн.– 2005.– **57**, № 4.– С. 514 – 532.

64. **Franciosi S., de Giovanni F.** *Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups* // "Groups – Korea 94".– 1995.–Berlin: Walter de Gruyter.– P. 107 – 118.
65. **Galoppo A.** *Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups* // Ricerche Mat.–2000.– **49**, №2.–P. 213 – 220.
66. **Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.** *Groups with restrictions on non-subnormal subgroups* // Ricerche di Matematica.– 1997.– **46**, № 2.– P. 307 – 320.
67. **Musella C.** *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups* // Note di Matematica.– 2000/2001.– **20**, № 1.– P. 43 – 52.
68. **Кучменко С.Н.** *Группы с широким множеством обобщенно нормальных подгрупп* //Вісник Дніпропетровського університету. Математика.–2003.– Вип. 8.– С. 44 – 53.
69. **Кучменко С.Н.** *Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга* //Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.– 2004.– Вип. № 1.– С. 21 – 33.
70. **Semko M.M., Kuchmenko S.M.** *Groups in which almost all subgroups are near to normal* // J. "Algebra and Discrete mathematics".–2004.–№2.– С. 92 – 113.
71. **Половицкий Я.Д.** *Локально экстремальные и слойно экстремальные группы* // Мат. сб. – 1962. – **58**, № 5.– С. 685 – 694.
72. **Franciosi S., de Giovanni F. and Tomkinson M.J.** *Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes* //Bolletino Unione Mat.Italiana.– 1990.– **4B**, №7.– P. 35 – 55.
73. **Kurdachenko L.A., Otal J. and Soules P.** *Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups* // Communications in Algebra.– 2004.– **32**, № 12.– P. 4769 – 4784.