

НАЦІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЛАСИ ГРУП
З ОБМЕЖЕННЯМИ
ДЛЯ ПІДГРУП

Київ 1997

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

**КЛАСИ ГРУП З ОБМЕЖЕННЯМИ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Світлій пам'яті С. С. Левіщенка присвячено

Збірник наукових праць

Київ 1997

УДК 519.11.47

Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук. пр. / НАН України. Київ: Ін-т математики. Редакція: Кузенний М. Ф. (відп. ред.) та ін. — Київ, 1997. — 128 с.

У збірнику зібрані статті, які відносяться до фундаментального напрямку в теорії груп, мета якого — вивчення груп за властивостями їх підгруп.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів і студентів старших курсів університетів.

Редакційна колегія

М. Ф. Кузенний (відповідальний редактор)

А. Ф. Турбін

М. М. Семко

Д. Я. Требенко (відповідальний секретар)

Рецензенти

доктор фізико-математичних наук,
професор **І. В. Протасов**

доктор фізико-математичних наук,
професор **Л. А. Курдаченко**

Затверджено до друку вченою радою

Інституту математики НАН України

ВІД РЕДАКТОРА

Тематика робіт даного збірника відноситься до розділу дослідження груп з обмеженнями для підгруп. Більша частина наукових досліджень Сергія Сергійовича Левіщенка, якому присвячено це видання, належить цьому розділу теорії груп. Автори статей збірника — його колеги, учні чи учні його колег.

У даному збірнику вивчаються деякі нові види груп з заданими властивостями їх підгруп.

Значна частина робіт присвячена опису груп з обмеженнями нормальності для підгруп. Зокрема, вивчаються групи з умовами щільності нормальності для деяких підгруп та нормальністю метациклічних чи близьких до них підгруп.

Продовжуються дослідження скінченних груп з умовою метациклічності для їх підгруп неперимарного індексу, започатковані С. С. Левіщенком.

Наводяться нові результати дослідження груп з умовами узагальненої доповнюваності для підгруп.

Класифікуються групи з певними обмеженнями на порядок їх комутанта.

Одержано узагальнення теореми Фіттинга, що визначається формациями скінченних груп.

Деякі роботи присвячені дослідженню груп з певними умовами для окремих фактор-груп.

Природно, що дані результати перспективні і будуть розвиватися.

Вважаю, що дане видання буде з увагою сприйняте спеціалістами по алгебрі.

М. Ф. Кузенний

УДК 519.41.47

М. Ф. Кузенний (Ін-т математики НАН України, Київ),

М. М. Семко (Ін-т педагогіки АПН України, Київ),

В. Е. Горещький (Техн. ун-т Поділля, Хмельницький)

ОГЛЯД НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ С. С. ЛЕВІЩЕНКА

It is given a brief survey of scientific-pedagogical activity of S. S. Levishchenko.

Наведено короткий огляд науково-педагогічної діяльності С. С. Левіщенко.

Доктор фізико-математичних наук, професор Сергій Сергійович Левіщенко народився 5 вересня 1944 р. в с. Зубарі Фастівського району на Київщині. Після тяжкої хвороби пішов з життя 7 жовтня 1996 р.

С. С. Левіщенко закінчив школу з золотою медаллю, фізико-математичний факультет Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького, аспірантуру цього ж інституту за спеціальністю „Алгебра і теорія чисел”.

У 1994 р. С. С. Левіщенко захистив докторську дисертацію. Того ж року йому було присвоєно звання професора.

Все трудове життя С. С. Левіщенко провів у Київському державному педагогічному інституті ім. О. М. Горького, останні десять років керуючи кафедрою вищої математики.

Він є автором понад 70 наукових праць, підручників та посібників.

С. С. Левіщенко був членом Координаційної ради Української математичної спілки і вченим секретарем Київської математичної спілки.

Сергій Сергійович Левіщенко дуже любив життя, друзів, родину, особливо свою доньку Машеньку.

1. Коло наукових інтересів С. С. Левіщенко відноситься до теорії груп [1–33]. Значна їх частина опублікована в монографії [33], яка, на великий жаль, побачила світ після його смерті. Основна частина його досліджень присвячена опису груп з обмеженнями для підгруп.

1.1. Перші результати присвячені дослідженню скінченних груп з обмеженнями для підгруп певного індексу. Там розглядалися

© М.Ф.Кузенний, М.М.Семко, В.Е.Горещький, 1997

підгрупи примарного та непримарного індексу, а обмеженнями були: циклічність, абелевість, нільпотентність їх підгруп.

Деяку уяву про ці дослідження дають наступні результати.

Означення. 1. Скінченна нільпотентна група називається S^* -групою, якщо всі її власні підгрупи непримарного індексу пільпотентні.

2. Скінченна непримарна неабелева група називається M^* -групою, якщо всі її підгрупи непримарного індексу абелеві.

3. Скінченна група називається дисперсивною, якщо вона має силовський ряд.

4. Скінченна група, яка не має силовського ряду, називається недисперсивною групою.

5. Скінченна недисперсивна група називається мінімальною недисперсивною, якщо в ній кожна її власна підгрупа дисперсивна.

6. Скінченна нільпотентна група називається S^{**} -групою, якщо всі її нільпотентні підгрупи непримарного індексу є групами Шмідта.

7. Скінченна непримарна неабелева група називається M^{**} -групою, якщо всі її неабелеві підгрупи непримарного індексу є групами Міллера-Морено.

Теорема. 1. S^* -групи вичерпуються групами наступних типів.

1) G — недисперсивна група порядку pq^β , $\beta \geq 3$;

2) $G = P \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in Z(G)$, $Q \triangleleft G$;

3) $G = P \rtimes Q$, Q — нециклічна група, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^{q^2} \rangle$, $P \rtimes \langle b \rangle$ — група Шмідта, $C_Q(P) = Q_1$;

4) $G = P \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $|b| = q^{\beta_1}$, $2 \leq \beta_1 \leq \beta$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^{q^{\beta_2}} \rangle$, $2 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $C_Q(P) = Q_1$, $P \rtimes \langle b^{q^{\beta_2-1}} \rangle$ — група Шмідта;

5) $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, $Q \rtimes R$ — група Шмідта;

6) $G = (P \rtimes Q) \rtimes R$; $P \rtimes R$, $Q \rtimes R$ — групи Шмідта;

7) $G = P \rtimes (Q \times R)$, $P \rtimes Q$, $P \rtimes R$ — групи Шмідта.

Теорема 2. M^* -групи вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = P \rtimes Q$, P — група Міллера-Морено, Q — абелева група або група Міллера-Морено;

2) $G = ((a) \times (b) \rtimes (a)) \rtimes (c)$, $|a| = |b| = 2$, $|c| = 2^{\alpha-2}$, $\alpha \geq 3$, $|a| =$

$= 3$, $ab = ba$, $d^{-1}ad = ab$, $d^{-1}bd = a$, $c^{-1}ac = ab$, $c^{-1}bc = b$, $c^{-1}dc = d^2$,
 $Z(G) = \langle c^2 \rangle$ і $G/Z(G) \cong S_4$;

3) $G = P \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in Z(G)$, $Q \triangleleft G$, P — абелева група або група Міллера–Морено;

4) $G = P \rtimes Q$, Q — нециклічна абелева група або група Міллера–Морено, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^q \rangle$, $P \rtimes \langle b \rangle$ — група Міллера–Морено або група Шмідта, у якій P — група кватерніонів або неабелева група порядку p^3 експоненти p , $C_Q(P) = Q_1$;

5) $G = P \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $|b| = q^{\beta_1}$, $2 \leq \beta_1 \leq \beta$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^{q^{\beta_1}} \rangle$, $2 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $C_Q(P) = Q_1$, Q — абелева група або група Міллера–Морено, $P \rtimes \langle b^{q^{\beta_2-1}} \rangle$ — група Міллера–Морено або група Шмідта, у якій P — неабелева група порядку p^3 експоненти p ;

6) $G = P \times (Q \rtimes R)$, $Q \rtimes R$ — група Міллера–Морено, P — абелева група;

7) $G = (P \times Q) \rtimes R$, $P \rtimes R$, $Q \rtimes R$ — групи Міллера–Морено;

8) $G = P \rtimes (Q \times R)$, $P \rtimes Q$, $R \rtimes R$ — групи Міллера–Морено.

Деякі типи груп цієї теореми були опубліковані в співавторстві зі своїм науковим керівником С. М. Черніковим [25].

Продовження цих досліджень можна побачити в наступних результатах.

Теорема 3. Біпримарна група G тоді і тільки тоді є дисперсивною S^{**} -групою, коли вона розкладається в напівпрямий добуток $G = P \rtimes Q$ своєї силовської p -підгрупи P і силовської q -підгрупи Q , які задовольняють одну із наступних умов:

1) $|P| = p^2$, $|Q| = q^2$, $G = G_1 \times G_2$ де G_1, G_2 — неабелеві групи порядку pq ;

2) $|P| \leq p^2$, Q — група кватерніонів, $1 \leq |C_Q(P)| \leq 2^2$; при $C_Q(P) = 1$ P — мінімальна нормальна підгрупа в будь-якій підгрупі порядку $2^2|P|$;

3) $P = \langle c \rangle P_1$, $c \in Z(G)$, $|c| = p$, або p^2 , $c^p \in \Phi(P_1)$, $Q = \langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|d| = q$, $[b, d] \in \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$; при $[b, d] \neq 1$ і $\beta = 2$ $q > 2$;

$P_1 \lambda \langle b \rangle$ — група Шмідта, $C_Q(P) = \langle b^q \rangle \times \langle d \rangle$; будь-яка підгрупа Шмідта групи G містить $\Phi(P)$;

4) $P = P_1 P_2$, $P_1 \cap P_2 = \Phi(P) = \Phi(P_1) = \Phi(P_2)$, $Q = \langle b \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|d| = q$, $[b, d] \in \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$; при $[b, d] \neq 1$ і $\beta = 2$ $q > 2$, $P_1 \lambda \langle b \rangle$, $P_2 \lambda \langle b \rangle$ — групи Шмідта, $C_Q(P) = \langle b^q \rangle \times \langle d \rangle$; будь-яка підгрупа Шмідта групи G містить $\Phi(P)$;

5) експонента групи P не перевищує μ^3 , $\Phi(\Phi(P)) \leq Z(G)$, $Q = \langle b \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|d| = q$, $[b, d] \in \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$; при $[b, d] \neq 1$ і $\beta = 2$ $q > 2$; $C_Q(P) = \langle b^q \rangle \times \langle d \rangle$; $\Phi(P) \lambda \langle b \rangle$ — група Шмідта, $(P \lambda \langle b \rangle) / \Phi(P)$ — група Міллера–Морено;

6) P — спеціальна група, $Q = \langle b \rangle \cdot C$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $\langle b \rangle \cap C = \langle b^{q^{\beta_1}} \rangle$, $1 \leq \beta_1 \leq \beta$, $C_Q(P) = C$, $\Phi(P) \leq Z(G)$, $P \lambda \langle b^{q^{\beta_1-1}} \rangle$ — група Шмідта;

7) експонента групи P не перевищує p^3 , $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $\Phi(P) \lambda \langle b^q \rangle$ — група Шмідта, $\Phi(\Phi(P)) \leq Z(G)$; $(P \lambda \langle b^q \rangle) / \Phi(P)$ — група Міллера–Морено; $C_Q(P) = \langle b^{q^2} \rangle$;

8) $P = \langle c \rangle P_1$, $|c| = p$ або p^2 , $c \in Z(G)$, $P_1 \triangleleft G$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 2$, $P_1 \lambda \langle b^q \rangle$ — група Шмідта, $\Phi(P_1) = \Phi(P) \leq Z(G)$; будь-яка підгрупа Шмідта групи G містить $\Phi(P)$;

9) $P = P_1 P_2$, $P_1 \cap P_2 = \Phi(P) = \Phi(P_2) \leq Z(G)$, $P_1 \triangleleft G$, $P_2 \triangleleft G$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 2$; $P_1 \lambda \langle b^q \rangle$, $P_2 \lambda \langle b^q \rangle$ — групи Шмідта; будь-яка підгрупа Шмідта групи G містить $\Phi(P)$;

10) $P = P_1 \times P_2$, $|P_1| = |P_2| = p$, $P_1 \triangleleft G$, $P_2 \triangleleft G$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 2$; $P_1 \lambda \langle b^q \rangle$, $P_2 \lambda \langle b^q \rangle$ — групи Міллера–Морено, $p \equiv 1 \pmod{q^2}$;

11) $P = P_1 P_2$, $P_1 \cap P_2 = \Phi(P) = \Phi(P_1) = \Phi(P_2) \leq Z(G)$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 2$; $P_1 \lambda \langle b^{q^{\beta_1-1}} \rangle$, $P_2 \lambda \langle b^{q^{\beta_1-1}} \rangle$ — групи Шмідта, $2 \leq \beta_1 \leq \beta$; будь-яка p -підгрупа, нормальна в $P \lambda \langle b^{q^{\beta_1-2}} \rangle$, або співпадає з P ,

либо міститься в $\Phi(P)$; будь-яка підгрупа Шмідта групи G містить $\Phi(P)$;

12) P містить спеціальну підгрупу P_1 , $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta \geq 1$; $P_1 \rtimes \langle b \rangle$ — група Шмідта, $C_Q(P) = \langle b^q \rangle$.

Теорема 4. Мінімальні недисперсивні M^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = A \ltimes (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $|a| = 3$, $|b| = 4$, A — група кватерніонів, $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ — групи Шмідта, $A \langle b \rangle$ — узагальнена група кватерніонів;

2) $G = A \ltimes (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $|a| = 3$, $|b| = 2$, A — група кватерніонів, $A \rtimes \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ — групи Шмідта, $A \rtimes \langle b \rangle$ — квазідієдральна група;

3) $G = A \ltimes (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $|a| = 3$, $|b| = 2^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \geq 1$, $|A| = 4$, $A \rtimes \langle a \rangle$; $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $A \rtimes \langle b \rangle$ — групи Міллера–Морено;

4) $G = A \ltimes (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $|a| = q$, $|b| = p^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \geq 1$, A — елементарна абелева група порядку p^3 ; $A \rtimes \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ — групи Міллера–Морено, $(A \rtimes \langle b \rangle)' \neq 1$, $b^p \in Z(G)$, $q > p > 2$;

5) $G \cong PSU(2, 5)$;

6) $G \cong SL(2, 5)$.

Питаннями такого роду займалися також О. В. Сидоров, В. С. Монахов, П. П. Барнішовець, М. О. Островерхий, Л. І. Зузук.

1.2. Наступні результати пов'язані з обмеженнями на підгрупи певної максимальності.

Означення 8. Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G , якщо в G не існує такої підгрупи B , що $A < B < G$.

Група G називається своєю $\emptyset$ -максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G .

При $n > \emptyset$ підгрупа A групи G називається n -максимальною в G , коли вона є максимальною підгрупою деякої $(n-1)$ -максимальної підгрупи A групи G .

Основою цих досліджень є результати опису скінченних мінімальних недисперсивних груп.

Теорема 5. *Скінченні розв'язні мінімальні недисперсивні групи G , у яких G' містить хоча б одну силовську підгрупу з G (особливі мінімальні недисперсивні групи) вичерпуються групами типів:*

1) $G = A \lambda (\langle d \rangle \lambda \langle b \rangle)$, де A — елементарна абелева група порядку 4, $|d| = 3^\beta$, $\beta \geq 1$, $|b| = 2^\delta$, $\delta \geq 1$, $A \lambda \langle d \rangle$ і $A \lambda \langle b \rangle$ — групи Міллера–Морено, $b^{-1}db = d^{-1}$;

2) $G = A \cdot (\langle d \rangle \lambda \langle b \rangle)$, де $A \triangleleft G$, A — група кватерніонів, $|d| = 3^\beta$, $\beta \geq 1$, $|b| = 2^\delta$, $\delta \geq 1$, $b^2 \in Z(G)$, $b^{-1}db = d^{-1}$, $A \lambda \langle d \rangle$ — група Шмідта, $A \cap \langle b \rangle \leq \Phi(A)$, $A \cdot \langle b \rangle / \Phi(A)$ — група Міллера–Морено (тут $G / \Phi(A)$ — група попереднього типу).

3) $G = A \lambda (Q \lambda \langle b \rangle)$, де A — елементарна абелева група порядку 9, Q — група кватерніонів, $|b| = 3^\delta$, $\delta \geq 1$, $A \lambda \langle b \rangle$ — група Міллера–Морено, $Q \lambda \langle b \rangle$ — група Шмідта, $A \lambda Q$ — група Фробеніуса;

4) $G = A \cdot (Q \lambda \langle b \rangle)$, де $A \triangleleft G$, A — неабелева група порядку 27 експоненти 3, Q — група кватерніонів, $|b| = 3^\delta$, $\delta \geq 1$, $b^3 \in \Phi(A) \leq Z(G)$, $A \cap \langle b \rangle \leq \Phi(A)$, $A \langle b \rangle / \Phi(A)$ — група Міллера–Морено, $Q \lambda \langle b \rangle$ — група Шмідта, $AQ / \Phi(A)$ — група Фробеніуса (тут $G / \Phi(A)$ — група попереднього типу);

5) $G = A \lambda (\langle d \rangle \lambda \langle b \rangle)$, де A — елементарна абелева група порядку p^3 , $|d| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|b| = p^\delta$, $\delta \geq 1$, $A \lambda \langle d \rangle$ — група Міллера–Морено, $b^p \in Z(G)$, $[A, b] \neq 1 \neq [d, b]$, $3 \leq p \leq q$;

6) $G = A \lambda (Q \lambda \langle b \rangle)$, де A — елементарна абелева група порядку p^k , $k \geq 4$, яка є мінімальною нормальною підгрупою групи G , $|Q| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|b| = p^\delta$, $\delta \geq 1$, $Q \lambda \langle b \rangle$ — група Шмідта, $b^p \in Z(G)$, $[A, b] \neq 1$, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|\Phi(Q) : C_Q(A)| = q^\gamma$, $\gamma \leq 1$, $A \lambda \langle b \rangle$ — силовська p -підгрупа з G ;

7) $G = A \cdot (Q \lambda \langle b \rangle)$, де $A \triangleleft G$, A — неабелева група порядку p^k , $k \geq 5$, $\Phi(A) = Z(A) = A'$, $|b| = p^\delta$, $\delta \geq 1$, $b^p \in Z(G)$, $[\Phi(A), Q] = 1$.

$|A \cap \langle b \rangle| \leq p$; $A/\Phi(A)$, $\Phi(A) \times Q/\Phi(A)$, $\Phi(Q\langle b \rangle)/\Phi(A)$ — підгрупи групи $G/\Phi(A)$, які задовольняють ті ж співвідношення, що й підгрупи A , Q , $\langle b \rangle$ типу 6 відповідно;

8) $G = A \lambda (Q \lambda \langle b \rangle)$, де A — елементарна абелева група порядку p^k , $k \geq 4$, яка є мінімальною нормальною підгрупою групи G , $|Q| = q^\beta$, $\beta \geq 1$, $|b| = p^\delta$, $\delta \geq 1$, $[\Phi(Q), b] \neq 1$, $Q \lambda \langle b \rangle / \Phi(Q)$ — група Міллера–Морено, $b^p \in Z(G)$, $[A, b] \neq 1$, $C_Q(A) = \Phi(Q)$, $A \lambda \langle b \rangle$ — силовська p -підгрупа з G ;

9) $G = A \cdot (Q \lambda \langle b \rangle)$, де $A \triangleleft G$, A — неабелева група порядку p^k , $k \geq 5$, $[\Phi(A), Q] = 1$, $|A \cap \langle b \rangle| \leq p$; $A/\Phi(A)$, $\Phi(A) \times Q/\Phi(A)$, $\Phi(Q\langle b \rangle)/\Phi(A)$ — підгрупи групи $G/\Phi(A)$, які задовольняють ті ж співвідношення, що й підгрупи A , Q , $\langle b \rangle$ типу 8 відповідно.

Теорема 6. Скінченні розв'язні мінімальні недисперсивні групи G , у яких G' не містить жодної силовської підгрупи з G (елементарні мінімальні недисперсивні групи), вичерпуються групами вигляду $G = \prod_{i \in Z_n} S_i$, $n \geq 2$, де $S_i = S_i \lambda \langle b_{i-1} \rangle$ — нормальна в G

підгрупа Шмідта, $A_i \cdot \langle b_i \rangle = P_i$ — силовська p_i -підгрупа групи G , $[S_i, S_j] = 1$, p_i, p_j — різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in Z_n$.

Теорема 7. Скінченні нерозв'язні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

1) G — група, в якій $\Phi(G)$ — r -група, $G/\Phi(G) \cong PSU(2, 2^q)$, q — непарне просте число, $r|2^q + 1$;

2) G — група, в якій $\Phi(G) = D \times R$, $|D| \leq 2$, R — r -група, $G/R \cong SL(2, 3^q)$ або $PSU(2, 3^q)$, r, q — непарні прості числа, $r|3^q + 1$;

3) G — група, в якій $\Phi(G) = D \times R$, $|D| \leq 2$, R — 5-група, $G/R \cong SL(2, 5)$ або $PSU(2, 5)$;

4) G — група, в якій $\Phi(G) = D \times P \times R$, $|D| \leq 2$, P — p -група, R — r -група, $G/P \times R \cong SL(2, p)$ або $PSL(2, p)$, r, p — прості числа, $r|p + 1$, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$;

5) G — група, в якій $\Phi(G) = R \times S$, R — r -група, S — s -група, $G/\Phi(G)$ — група Судзукі $Sz(2^q)$, q — непарне просте число, r, s — різні прості числа, які ділять $2^{2q} + 1$, і не є одночасно дільниками чисел $2^q - 2^{q+1/2} + 1$ і $2^q + 2^{q+1/2} + 1$.

З використанням цих результатів одержано опис скінченних груп, у яких максимальні та 2-максимальні підгрупи Φ -дисперсивні чи дисперсивні за Оре.

Значні результати одержані при обмеженні надрозв'язності для максимальних та 2-максимальних підгруп. Для мінімальних ненадрозв'язних груп встановлено такий результат.

Теорема 8. Скінченні мінімальні ненадрозв'язні групи вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = P \rtimes Q$ — групи Шмідта, $|P| \geq p^2$;

2) $G = P \rtimes Q$, P — силовська p -підгрупа групи G шмідтівського типу, Q — циклічна група, $\Phi(P) \rtimes Q$ і $P \rtimes \Phi(Q)$ — надрозв'язні групи, $[P, \Phi(Q)] = P$;

3) $G = P \rtimes Q$, P — силовська p -підгрупа групи G шмідтівського типу, $\Phi(Q) > C_Q(P) < G$, $Q/C_Q(P)$ — або неабелева група порядку q^3 експоненти q , або примарна група Міллера-Морено, яка містить циклічну максимальну підгрупу, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\Phi(P) \rtimes Q$ і $P \rtimes Q_1$ — надрозв'язні групи, де Q_1 — довільна максимальна підгрупа з Q , $[P, Q'] = P$;

4) $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, P — силовська p -підгрупа G шмідтівського типу, Q і R — циклічні групи, $[P, Q] = P$, $[Q, R] = Q$, $\Phi(P) < \Phi(P \rtimes Q)$, $[P, R] \leq P$, $\Phi(P) \times \Phi(Q) \leq Z(P \rtimes Q)$, $\Phi(R) = Z(Q \rtimes R)$, $P \rtimes R$ — надрозв'язна група, $p \equiv 1 \pmod{q}$.

В роботах С. С. Левіщенка подані результати опису скінченних груп, у яких 2-максимальні підгрупи надрозв'язні. Це є розв'язком відомої проблеми Л. О. Шеметкова, в якому виділено 34 типи груп такого роду.

Скінченні групи, в яких надрозв'язні всі підгрупи непримарного індексу, вивчав В. С. Монахов.

1.3. Значний доробок складають результати опису груп з обмеженнями метациклічності для підгруп. Завершено опис скінченних мінімальних неметациклічних груп.

Теорема 9. *Скінченні групи, в яких кожна власна підгрупа метациклічна, вичерпуються скінченними метациклічними і мінімальними неметациклічними групами:*

Скінченні мінімальні неметациклічні групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1) G — елементарна абелева p -група порядку p^3 ;
- 2) G — неабелева група порядку p^3 експоненти p ;
- 3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \cdot \langle b \rangle$, $|c| = 3$, $|a| = |b| = 3^2$, $\{a, b\} = c$, $\{c, b\} = a^3 = b^6$;
- 4) $G = \langle c \rangle \times Q$, $|c| = 2$, Q — група кватерніонів;
- 5) $G = \langle c \rangle \cdot Q$, $|c| = 4$, $c \in Z(G)$, Q — група кватерніонів, $\langle c^2 \rangle = \Phi(Q)$;
- 6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cdot \langle c \rangle$, $|a| = |b| = |c| = 4$, $\{a, c\} = b^2$, $\{b, c\} = c^2 = a^2 b^2$;
- 7) $G = P \lambda Q$ — група Шмідта, P — група кватерніонів, $q = 3$;
- 8) $G = P \lambda Q$ — група Міллера–Морено, $|P| = p^2$;
- 9) $G = P \lambda Q$, $P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $|x| = |y| = p$, $\{x, Q\} = \langle x \rangle$, $\langle y \rangle \lambda Q$ — група Міллера–Морено;
- 10) $G = (\langle x \rangle \lambda Q) \times (\langle y \rangle \lambda R)$, $|x| = |y| = p$, $\langle x \rangle \lambda Q$, $\langle y \rangle \lambda R$ — групи Міллера–Морено;
- 11) $G = (P \times Q) \lambda R$, $|P| = p$, $|Q| = q$, $R = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \triangleleft R$, $\langle b \rangle \triangleleft R$, $P \lambda \langle a \rangle$, $Q \lambda \langle b \rangle$ — групи Міллера–Морено, $[P, b] = [Q, a] = 1$;
- 12) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $P \lambda \langle a \rangle$ — група Міллера–Морено, $[P, b] = 1$;
- 13) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $P \lambda \langle a \rangle$ — група Міллера–Морено, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $1 < n < \beta$, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;
- 14) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $2 < \alpha \geq \beta > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $P \lambda \langle a \rangle$ — група Міллера–Морено, $[P, b] = 1$;
- 15) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $2 < \alpha \geq \beta > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $P \lambda \langle a \rangle$ — група Міллера–Морено, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $1 < n < \beta - 1$, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;

16) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $2 < \alpha < \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $P \lambda \langle a \rangle$ — группа Міллера-Морено, $[P, b] = 1$;

17) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $2 < \alpha < \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $P \lambda \langle a \rangle$ — группа Міллера-Морено, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $1 < n < \beta - 1$, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;

18) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $1 < k < \alpha$, $\alpha - k \leq \beta$, при $k < \alpha - 1$ $\beta < k + 2$; $P \lambda \langle a \rangle$ — группа Міллера-Морено, $[P, b] = 1$;

19) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $1 < k < \alpha$, $\alpha - k = \beta$; при $k < \alpha - 1$ $\alpha \leq 2k + 1$; $P \lambda \langle a \rangle$, $P \lambda \langle b \rangle$ — групи Міллера-Морено;

20) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $1 < k < \alpha$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $1 < n < \beta$; при $k < \alpha - 1$ $\beta \leq n + k$; $P \lambda \langle a \rangle$, $P \lambda \langle b \rangle$ — групи Міллера-Морено, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;

21) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $1 < k < \alpha - 1$, $\alpha - k + 1 < \beta < k + 3$, $P \lambda \langle a \rangle$ — группа Міллера-Морено, $[P, b] = 1$;

22) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $1 < k < \alpha - 1$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $\beta \leq \alpha$, $1 < n < \beta - 1$, $\alpha - k + 1 < \beta < n + k + 2$, $P \lambda \langle a \rangle$, $P \lambda \langle b^{2^{n-1}} \rangle$ — групи Міллера-Морено, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;

23) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^{\alpha-2})}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $\alpha < \beta$, $P \lambda \langle a \rangle$ — группа Міллера-Морено, $[P, b] = 1$;

24) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $1 < k < \alpha - 1 < \beta - 1 < n + k$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{2^n} \rangle$, $n > 1$; $P \lambda \langle a \rangle$, $P \lambda \langle b^{2^{n-1}} \rangle$ — групи Міллера-Морено;

25) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^{\alpha-2})}$, $|\langle a \rangle \cap$

$|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $C_{\langle a \rangle}(P) = \langle b^{2^\alpha} \rangle$, $1 < \alpha < \beta - 1$, $3 < \alpha \leq \beta - n$; $P \lambda \langle a \rangle$, $P \lambda \langle b^{2^{\alpha-1}} \rangle$ — групи Міллера-Морено, $p \equiv 1 \pmod{2^n}$;

26) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|P| = p$, $|a| = q^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{1+q^{\alpha-1}}$, $C_{\langle a \rangle}(P) = \langle a^{q^m} \rangle$, $0 < m < \alpha$, при $q = 2$ $\alpha > 2$; $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{q^n} \rangle$, $0 \leq n \leq \beta \geq n + \alpha - m$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $p \equiv 1 \pmod{q^n}$;

27) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|P| = p$, $|a| = q^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+q^k}$, $0 < k < \alpha - 1$, при $q = 2$ $1 < k$; $P \lambda \langle a \rangle$ — група Міллера-Морено, $[P, b] = 1$, $\beta = k + 1$;

28) $G = P \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|P| = p$, $|a| = q^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+q^k}$, $0 < k < \alpha - 1$, при $q = 2$ $1 < k$; $C_{\langle a \rangle}(P) = \langle a^{q^m} \rangle$, $0 < m \leq k$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{q^n} \rangle$, $0 \leq n \leq \beta = n + k - m + 1$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $p \equiv 1 \pmod{q^n}$;

29) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|P| = p$, $|a| = q^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+q^k}$, $0 < k < \alpha - 1 < \beta - 1 = n + k - m + s$, при $q = 2$ $1 < k$; $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = q^s$, $0 < s < \alpha - k$, $b^{q^{\beta-1}} = a^{1+q^{\alpha-1}}$, $p \not\equiv 0 \pmod{q}$, $C_{\langle a \rangle}(P) = \langle a^{q^m} \rangle$, $0 < m \leq k$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{q^n} \rangle$, $0 \leq n \leq \beta - s$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $p \equiv 1 \pmod{q^n}$; при $\alpha = k + s + 1$ $q > 2$, a індукує на P автоморфізм ϕ , $b^{q^{\alpha-m}}$ індукує на P автоморфізм ψ , $\psi \in N$, $\psi \not\equiv 0 \pmod{q}$, існує таке натуральне число ω , $\omega \not\equiv 0 \pmod{q}$, що $\psi f(j, l, q, k + 1, k) - i \not\equiv 0 \pmod{q}$, де $j = \omega q^{n-m}$, i задовольняє співвідношення $[a, b^q] = a^{1+q^{k+1}}$, $i \not\equiv 0 \pmod{q}$, а функція f визначена певним чином;

30) $G = P \lambda (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $|P| = p$, $|a| = q^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+q^k}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = q^k$, $0 < s < \alpha - k$, $C_{\langle a \rangle}(P) = \langle a^{q^m} \rangle$, $C_{\langle b \rangle}(P) = \langle b^{q^n} \rangle$, $0 < m \leq k < \alpha - 1 < \beta - 1 > n + k - m + s$, $k = \alpha - s - 1$, при $q = 2$ $k > 1$; $n \geq m + 1$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $p \equiv 1 \pmod{q^n}$.

Вивчення скінченних груп з 2-максимальними метациклічними підгрупами започатковано в [32].

Скінченні групи з метациклічними підгрупами непримарного індексу вивчає А. І. Зубук.

1.4. Наведені результати відносяться лише до скінченних груп. Але С. С. Левіщенко мав значний круг досліджень, присвячений також і нескінченним групам. Серед обмежень у цих групах використовується поняття нормальності підгрупи та його узагальнень [26–29].

Наприклад, у [26, 28] вивчалися групи, в яких нормальні всі нескінченні неабелеві підгрупи.

Теорема 10. Нескінченні локально ступінчасті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами є розв'язними групами вигляду $G = F \rtimes A$, де $F = R \cdot D$, R нормальна в G підгрупа, що розкладається в прямий добуток 1 квазіциклічних p -підгруп, $1 \neq p$ – просте число, $D = S \cdot \langle a \rangle$, $C_D(R) = S \triangleleft G$, $\langle a \rangle \cap S = \langle a^k \rangle$, для довільного цілого числа k a^k індукує на R тождествний або нескінченно незвідний автоморфізм, $R \cap D = V \subseteq \Phi(D)$, $|\langle a \rangle \times A| < \infty$, A – дедекіндова група, $\pi(D) \cap \pi(A) = \emptyset$ і G – група одного з 13 типів.

В роботі [29] вивчалися групи, в яких майже нормальні всі нескінченні підгрупи.

Теорема 11. Нехай G – локально майже розв'язна нечерніковська група. В групі G будь-яка нескінченна підгрупа тоді і тільки тоді майже нормальна, коли G – група одного з наступних типів:

- 1) G – група з центром скінченного індексу;
- 2) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, де $|b| = p$, p – просте число, $C_G(b) = \langle b \rangle$, A – вільна абелева група рангу $p - 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;
- 3) G містить таку скінченну нормальну підгрупу F , що G/F – група типу 2.

Теорема 12. Нехай G – черніковська група, K – її повна частина. В групі G будь-яка нескінченна підгрупа майже нормальна тоді і тільки тоді, коли G – група одного з наступних типів:

- 1) G – група з центром скінченного індексу;
- 2) G – майже квазіциклічна група;
- 3) $G = K \rtimes F$ – черніковська група з не локально циклічною повною частиною K , F – скінченна група і $F = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $\pi(\langle a \rangle) \cap$

$\cap \pi(\langle b \rangle) = \emptyset$, $\pi(\langle b \rangle) = \pi(C_{\langle b \rangle}(\langle a \rangle))$, $K = G_G(K)$ — p -група, p — просте число, $p \in \pi(F)$, $\text{ранг } K$ не більший $r-1$, де $r = \min\{q | q \in \pi(F)\}$, $r \neq 2$, будь-який неодиначний елемент F індукує на K p -адично незвідний автоморфізм;

4) $G/K = R/K \rtimes P/K$, де R — група типу 3, $P = \langle g \rangle \cdot K$, $g^p \in K$, $\text{ранг } K$ дорівнює $p-1$, елемент g індукує на K p -адично незвідний автоморфізм;

5) G містить таку скінченну нормальну підгрупу, що G/F — група типу 3;

6) G містить таку скінченну нормальну підгрупу F , що G/F — група типу 4.

Багато досліджень присвячено знаходженню нових властивостей груп, що задовольняють певні умови. Серед таких умов є ті, що забезпечують розщиплювальність, шмідтовість, нільпотентність, дедекіндовість груп та ін. (див., наприклад, [30, 31]). Серед інших умов можна виділити обмеження локальної метациклічності для певних підгруп.

2. Сергій Сергійович Левішенко залишив також значний доробок у науково-педагогічній діяльності (див., наприклад, [34–40]).

2.1. Ним опубліковані різні навчальні посібники та методичні розробки для аспірантів, студентів та учнів, якими будуть користуватися ще довгі роки. Міжнародно відомими є, наприклад, роботи [16, 34, 35].

Його ім'я пов'язане з активною популяризацією математики, зокрема алгебри (див., наприклад, [37–40]). Багато доповідей він зробив на різних міжнародних, державних та вузівських симпозиумах і конференціях. Серед таких конференцій можна назвати: Міжнародні конференції з алгебри (1992, 1993 рр.), Всесоюзні алгебраїчні конференції (1979, 1981, 1985, 1987 рр.).

2.2. Найвагоміші доробки С. С. Левішенко залишив у викладацькій діяльності. Багато сотень його студентів ще довго будуть з вдячністю пам'ятати високий професіоналізм свого Учителя. Вони також ніколи не забудуть тактовності, чемності, вихованості, доброти, вишчливості, поваги, доброзичливості й оптимізму Сергія Сергійовича. Серед них багато студентів Кошицького (Словакія) університету та вищого педагогічного інституту м. Санта Клара (Куба).

Велику роботу провів С. С. Левіщенко по підготовці науковців. Довгий час він був керівником студентського наукового товариства КДПІ ім. О. М. Горького. Найкращих студентів-математиків він залучав до роботи в гуртку з теорії груп, заснованому видатним ученим Сергієм Миколайовичем Черніковим, і яким пізніше керував сам Сергій Сергійович. З цього гуртка вийшли в світ науки багато вже відомих учених. На базі цього гуртка С. С. Левіщенко заснував семінар з алгебри, який працює і донині. Деякі результати учасників семінару представлені в даному збірнику.

Основні публікації С. С. Левіщенка:

1. Скінченні нелінійнопотентні групи з деякими заданими системами лінійнопотентних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 35–37.
2. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса // Некоторые вопросы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 197–217.
3. Разрешимые недисперсивные группы с некоторыми силовскими подгруппами, порядки которых делятся не более чем на куб простого числа // Укр. мат. журн. – 1975. – 27, № 3. – С. 329–336 (сп. з Кузенним М. Ф.).
4. Конечные разрешимые минимальные недисперсивные группы // Укр. мат. журн. – 1975. – 27, № 4. – С. 526–528 (сп. з Кузенним М. Ф.).
5. О конечных недисперсивных группах. – Киев, 1978. – 48 с. – (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 78.7) (сп. з Кузенним М. Ф.).
6. Конечные квазипрimary группы // XV Всесоюзная алгебраическая конференция, Красноярск, 3–6 июля 1979 г.; Тез. докл. Ч. 1. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979. – С. 91.
7. Конечные квазипрimary группы // Группы, определяемые свойствами системы подгруп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 83–97.
8. Конечные недисперсивные группы, в которых любая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгруп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 117–132 (сп. з Кузенним М. Ф.).
9. Конечные нелінійнопотентные группы, в которых любая нелінійнопотентная подгруппа непримарного индекса является группой Шмидта // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, Ленинград, 22–25 сент., 1981 г.; Тез. докл. Ч. 2. – Ленинград, 1981. – С. 80–81 (сп. з Кузенним М. Ф.).
10. Конечные бипрimary дисперсивные группы, в которых всякая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Исследования групп с заданными свойствами подгруп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 93–104 (сп. з Кузенним М. Ф.).
11. Конечные дисперсивные небипрprimary группы, всякая нелінійнопотентная подгруппа непримарного индекса которых является группой Шмидта.

- Подгрупповая характеристика групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 74–84 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 12 Структура конечных минимальных недисперсивных групп // Группы и системы их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 56–66 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 13 Об одном классе конечных минимальных недисперсивных групп // Структура групп и их подгрупповая характеристика. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 66–73 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 14 Группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. – Киев, 1984. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.11).
- 15 Недисперсивные группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. – Киев, 1984. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.35) (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 16 Группы с условиями дисперсивности для подгрупп. – Киев: КГПИ, 1985. – 96 с. (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 17 Конечные группы с условиями дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп. – Киев: КГПИ, 1986. – 15 с. – Деп. в УкрНИИИТИ 18.02.86. № 629 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 18 Конструктивное описание конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. – Киев: КГПИ, 1986. – 42 с. – Деп. в УкрНИИИТИ 17.04.86. № 1086 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 19 Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами // Структура групп и свойства их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 63–73 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 20 Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы нестационарные // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 42–51 (сп. з Сенюком М. М.).
- 21 Конструктивное описание конечных минимальных несверхразрешимых групп // Вопр. алгебры. – Минск: Университетское, 1987. – № 3. – С. 56–63 (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 22 Конечные группы Шмидта и их обобщения // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 7–8. – С. 963–968. (сп. з Кузениным М. Ф.).
- 23 Структура конечных минимальных неметациклических групп // Zborník Pedagogickej Fakulty Prešov, University P. J. Šafárika v Košice, Roč. XXIV, Zväzok 1, Prírodné vedy, matematika – Košice – 1990 (1992) – S. 49–98 (сп. з Кузениным М. Ф., Сенюком М. М., Томашеком Л.).
- 24 Структура конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы // Там же. – С. 125–160 (сп. з Кузениным М. Ф., Томашеком Л.).
- 25 Конструктивное описание конечных недисперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 6. – С. 818–822 (сп. з Черніковим С. М.).

26. Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследований алгебраических и топологических структур – Киев: КГПИ, 1989. – С. 37–45 (сп. з Кузеним М. Ф., Семком М. М.).
27. Группы с плотной системой бесконечных субнормальных подгрупп // Там же. – С. 62–69 (сп. з Курдаченком Л. А.).
28. О группах с инвариантными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, № 3. – С. 314–321 (сп. з Кузеним М. Ф., Семком М. М.).
29. О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 10. – С. 57–63 (сп. з Семком М. М., Курдаченком Л. А.).
30. К вопросу о расщепляемости групп // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 62–68 (сп. з Кузеним М. Ф.).
31. Одно обобщение дедекиндовых групп // Дифференциально-функциональные уравнения. – Киев: КГПИ, 1991. – С. 41–45 (сп. з Кузеним М. Ф.).
32. Конструктивний опис будови скінченних примарних груп з метациклічними 2-максимальними підгрупами // Тези IV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 11–12 трав. 1995 р. – Київ, 1995. – С. 149 (сп. з Кузеним М. Ф., Семком М. М.).
33. Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 230 с. (сп. з Кузеним М. Ф.).
34. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 1. – К.: Вища шк., 1983. – 216 с. (сп. з Завалом С. Т., Рокіцьким І. О., Пилаєвим В. В.).
35. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 2. – К.: Вища шк., 1986. – 264 с. (сп. з Завалом С. Т., Рокіцьким І. О., Пилаєвим В. В.).
36. Числові системи. – К.: Вища шк., 1988. – 272 с. (сп. з Вивальним Т. М., Григоренком В. К.).
37. Що таке групи? // У світі математики. – К.: Рад. шк., 1982. – Вип. 13. – С. 47–56 (сп. з Кузеним М. Ф.).
38. Про примарні натуральні числа // Там же. – 1981. – Вип. 12. – С. 105–111.
39. Деякі особливості перевірки розв'язків тригонометричних рівнянь // Вибрані питання математики, метод. вказ. для учнів 9 мед. класів. – Київ: КДПН, 1989. – 58 с. (сп. з Требенком Д. Я.).
40. У Київському математичному товаристві // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 5. – С. 720–721.