

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
на тему:

Методика вивчення тригонометричних рівнянь і  
нерівностей у загальноосвітній школі

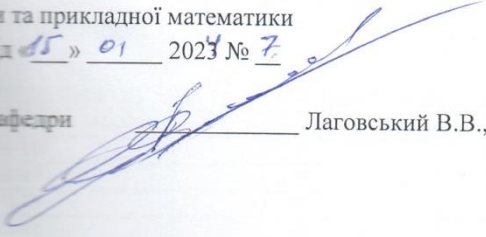
Здобувача вищої освіти  
другого (магістерського) рівня, II курсу, СОМЗ-22-1 групи,  
спеціальності 014 «Середня освіта»  
освітня програма «Середня освіта: математика»

Юр'євої Поліни Борисівни

Науковий керівник  Скасків Л.В., к.ф.-м.н., доцент

Керівник освітньо-професійної програми  Семко М.М., д.ф.-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри  
кібернетики та прикладної математики  
протокол від «15» 01 2023 № 7

Завідуючий кафедри  Лаговський В.В., к.е.н., доцент

Ірпінь – 2023

Регистрація № 212.01.2024  
(дата)В. Гернобай О.Б.  
(підпис відповідальної особи)

Результати перевірки

до захисту  
(до захисту, на доопрацювання)15.01.2024  
(дата)fmf  
(підпис)

Результат захисту

90  
(оцінка)7.02.2024  
(дата)В.  
(підпис)

Голова комісії:

Григорук  
(підпис)Григорук М.В.  
(ініціали, прізвище)

Члени комісії:

ll  
(підпис)Сенко М.М.  
(ініціали, прізвище)В.  
(підпис)Гернобай О.Б.  
(ініціали, прізвище)fmf  
(підпис)Скасків М.В.  
(ініціали, прізвище)

## БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

| Об'єкти контролю                                                                                                                                                               | Діапазон оцінки в балах | Фактична кількість балів | Примітки | Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи) |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ</b>                                                                                                                             |                         |                          |          |                                                                               |
| 1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій) | від 0 до 30             | 25                       |          | fml                                                                           |
| 2. Дотримання вимог щодо оформлення                                                                                                                                            | від 0 до 10             | 10                       |          | fml                                                                           |
| 3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни                                                                                                       | від 0 до 5              | 5                        |          | fml                                                                           |
| 4. Рецензент                                                                                                                                                                   | від 0 до 5              | 5                        |          | fml                                                                           |
| <b>РАЗОМ БАЛІВ</b>                                                                                                                                                             | від 0 до 50             | 45                       |          | fml                                                                           |
| <b>ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ</b>                                                                                                                                   |                         |                          |          |                                                                               |
| 1. Доповідь                                                                                                                                                                    | від 0 до 10             |                          |          | fml                                                                           |
| 2. Роздатковий матеріал                                                                                                                                                        | від 0 до 5              |                          |          | fml                                                                           |
| 3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання                                                                                               | від 0 до 25             |                          |          | fml                                                                           |
| 4. Апробація (участь у конференціях)                                                                                                                                           | від 0 до 10             |                          |          | fml                                                                           |
| <b>РАЗОМ БАЛІВ</b>                                                                                                                                                             | від 0 до 50             | 45                       |          | fml                                                                           |
| <b>ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ</b>                                                                                                                                                | від 0 до 100            | 90                       |          | fml                                                                           |

| Оцінка за 100-бальною шкалою | Оцінка за шкалою ЕКТС | Оцінка за національною шкалою | Дата      | П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)                                                                              |
|------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 90                           | A                     | 5                             | 7.02.2024 | Григорукітський<br>Семко М.М.<br>Григорукітський<br>Семко М.М.<br>Григорукітський<br>Семко М.М.<br>Григорукітський<br>Семко М.М. |

## ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

| Оцінка за 100-бальною шкалою | Оцінка за шкалою ЕКТС | Оцінка за національною шкалою |
|------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 90-100                       | A                     | 5 (відмінно)                  |
| 80-89                        | B                     | 4 (добре)                     |
| 70-79                        | C                     |                               |
| 60-69                        | D                     |                               |
| 50-59                        | E                     | 3 (задовільно)                |
| 35-49                        | X                     | 2 (незадовільно)              |

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                                                             | Стор. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Вступ                                                                                                                                                                       | 9     |
| Розділ 1    ТЕОРЕТИЧНІ            ОСНОВИ            ВИВЧЕННЯ<br>ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ            РІВНЯНЬ            ТА<br>НЕРІВНОСТЕЙ                                            | 12    |
| 1.1.            Зміст теми «Тригонометричні рівняння і нерівності»<br>в класичному курсі тригонометрії                                                                      | 12    |
| 1.2.            Аналіз програм і підручників в контексті навчання<br>теми «Тригонометричні рівняння і нерівності»                                                           | 22    |
| Розділ 2    МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ<br>РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ<br>РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ                                                                             | 29    |
| 2.1.            Методичні прийоми формування ключових і<br>предметних компетентностей з розв'язування<br>тригонометричних рівнянь та нерівностей учнів на<br>базовому рівні | 29    |
| 2.2.            Методика формування ключових і предметних<br>компетентностей з розв'язування тригонометричних<br>рівнянь та нерівностей учнів профільних класів             | 36    |
| Розділ 3    НАПРЯМИ УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ<br>НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ<br>ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА<br>НЕРІВНОСТЕЙ                                                    | 48    |
| Висновки                                                                                                                                                                    | 61    |
| Список використаних джерел                                                                                                                                                  | 65    |
| Додатки                                                                                                                                                                     | 69    |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** В умовах розбудови системи освіти відповідно до Закону України «Про освіту», Державної національної програми «Освіта», відтворення та зміцнення інтелектуального потенціалу нації, виходу науки і техніки в Україні на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти, переходу до ринкових відносин і конкуренції будь-якої продукції, в тому числі і інтелектуальної, особливо важливим є забезпечення належного рівня математичної підготовки підростаючого покоління. Це пов'язано з тим, що математика має великі можливості для інтелектуального розвитку особистості, перед усім розвитку логічного мислення, просторових уявлень, алгоритмічної та інформаційної культури, формує уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації.

Історично склалось, що тригонометричним рівнянням і нерівностям приділялось особливе місце в шкільному курсі. Ще греки на початку людства вважали, що тригонометрія – найважливіша із наук, і ми поділяємо думку, що тригонометрія є одним із найважливіших розділів шкільного курсу, усієї математики загалом. В умовах профільного навчання математики роль тригонометричного матеріалу в математичній підготовці учнів значно посилилась, що пояснюється великим прикладним потенціалом тригонометрії, її значенням для розвитку функціонального мислення, обчислювальної та графічної культури, математичних здібностей учнів. Варто зауважити, що розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей створює передумови для систематизації знань учнів, пов'язаних з усім навчальним матеріалом по тригонометрії (наприклад, властивості тригонометричних функцій, прийоми перетворення тригонометричних виразів і т.д.) і дає можливість установити діючі зв'язки з вивченим матеріалом по алгебрі (рівняння, рівносильні рівняння, нерівності, тотожні перетворення алгебраїчних виразів і т.д.).

Тригонометричні рівняння і нерівності широко представлені у завданнях державної підсумкової атестації та в завданнях зовнішнього незалежного

оцінювання з математики. Як засвідчують аналітичні звіти Українського центру оцінювання якості освіти, результати виконання цих завдань в останні роки суттєво погіршилися, що вимагає пошуку шляхів удосконалення методики вивчення рівнянь та нерівностей, зокрема тригонометричних. Це робить актуальною проблему вдосконалення методики навчання учнів розв'язуванню рівнянь та нерівностей з позицій компетентнісного підходу.

**Стан і ступінь розробки проблеми в спеціальній літературі.** Питаннями, присвяченими власне навчанню учнів розв'язуванню рівнянь і нерівностей і формуванню відповідних розумових прийомів займалися Г. П. Бевз, І. Т. Бородуля, Т. А. Грицик, В. Я. Забранський, Я. Л. Каплан, Є. П. Нелін та інші. Проаналізувавши наукову та методичну літературу, можна зробити висновок, що багато науковців відмічають типові труднощі в учнів при вивченні тригонометричних величин та невміння застосовувати отримані знання до розв'язування прикладних задач. Отже, методика навчання тригонометрії в сучасній школі потребує оновлення.

**Мета дипломного дослідження:** систематизувати та узагальнити теоретичний матеріал з методів розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей у загальноосвітній школі та розробити методичні рекомендації спрямованих на удосконалення процесу навчання учнів.

Для досягнення поставленої мети розв'язувались такі **завдання**:

- виділити теоретичні основи вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей та уточнити методи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей;
- провести оцінку чинних програм та підручників з математики в аспекті досліджуваної проблеми та з'ясувати особливості навчання теми на різних рівнях математичної підготовки учнів;
- дослідити методи формування практичної компетентності учнів на базовому рівні підготовки у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей;

- проаналізувати методику формування ключових і предметних компетентностей учнів у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь, нерівностей на профільному рівні підготовки;

- обґрунтувати напрями удосконалення методики навчання учнів розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

**Об'єктом дослідження** є процес навчання математики учнів у школі.

**Предмет дослідження:** вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей в контексті формування ключових і предметних компетентностей учнів на базовому та профільному рівнях підготовки.

**Методи дослідження.** Для розв'язання поставлених завдань використано такі методи дослідження:

- 1) теоретичні – системний та порівняльний аналіз психолого- педагогічної, навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; моделювання педагогічних процесів;

- 2) емпіричні – спостереження за процесом навчання учнів, аналіз їх навчальної діяльності; анкетування, бесіди з вчителями та учнями;

- 3) систематизація й узагальнення передового досвіду вчителів, методистів.

**Науково-практична значимість одержаних результатів** полягає у систематизації теоретичного матеріалу та розробці методичних рекомендацій щодо вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей у контексті формування математичної компетентності учнів. Матеріали дослідження можуть бути використані вчителями у практичній професійній діяльності, ними можуть скористатися учні під час опрацювання питань з методики навчання математики, у процесі виробничої педагогічної практики у старших класах середньої школи з теми: «Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи».

## РОЗДІЛ 1

### ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

#### 1.1. Зміст теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» в класичному курсі тригонометрії

Тригонометрія традиційно є одним із найважливіших складових частин шкільного курсу математики. І цей курс передбачає завдання, вирішення яких, зазвичай, можна, пройшовши цілеспрямовану спеціальну підготовку.

В давнину тригонометрія виникла у зв'язку з потребами астрономії, і будівельної справи, тобто носила чисто геометричний характер і представляла головним чином «вирахування хорд». З часом в неї почали вкрапляться деякі аналітичні моменти. У першій половині XVIII століття відбувся різкий перелом, після чого тригонометрія прийняла новий напрямок і змістилася у бік математичного аналізу. Саме в цей час тригонометричні залежності стали розглядатися як функції [14, С.25].

Нині тригонометрія стає основою при розробленні методології природничих наук, використовується у розробках, які стосуються технічної й інших галузей діяльності. Тригонометричні функції виявились особливо корисними для вивчення коливних процесів, оскільки на них заснований також гармонічний аналіз функцій та інші інструменти аналізу. Доведенням правомірності такого узагальнення слугує висловлення Томаса Пейна, який у своїй книзі «Доба Розуму» (1794) назвав тригонометрію «душею науки» [35].

У додатку А на основі аналізу літературних джерел [1, 7, 13, 35] відтворено відомості, які засвідчують розвиток тригонометрії, а також її використання в різних галузях у різні часи розвитку науки і виробництва.

Тригонометричні рівняння та нерівності одна з найскладніших тем у курсі математики. Тригонометричні рівняння виникають при вирішенні завдань по планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики і в інших областях.

Тригонометричні рівняння і нерівності з року в рік зустрічаються серед завдань централізованого тестування.

Свого часу велася запекла дискусія з приводу означення поняття тригонометричне рівняння. Тригонометричним пропонували називати:

1. рівняння, в якому змінна входить лише під знак тригонометричної функції (в такому разі рівняння виду  $\sin x + x = 0$  не належить до тригонометричних; його пропонували називати трансцендентним);
2. рівняння, в якому змінна входить під знак тригонометричної функції.

З цього приводу слід погодитись з думкою С. І. Новосьолова, який вважав, що розходження в означеннях тригонометричного рівняння не є принциповими. Важливо одне – немає загального методу розв'язування тригонометричних рівнянь. Слід наголосити на принциповій відмінності тригонометричних рівнянь від алгебраїчних: тригонометричні рівняння, в яких змінна входить лише під знак тригонометричної функції, або зовсім не мають розв'язків, або мають їх безліч. Це пов'язано з властивістю періодичності тригонометричних функцій.

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.

Наприклад:  $\sin x - \cos x = 0$ ;  $2\sin x + \cos x = \sin^2 2x$ ;  $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x$ ;  $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$ .

У курсі математики тригонометричні рівняння розглядаються на множині дійсних чисел. При розв'язанні тригонометричних рівнянь спочатку потрібно визначити область допустимих значень невідомого, враховуючи, що функції  $\cos x$  і  $\sin x$  визначені при всіх дійсних значеннях  $x$ , функція  $\operatorname{tg} x$  визначена при  $x \neq \frac{\pi(2k+1)}{2}$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ , і функція  $\operatorname{ctg} x$  визначена при,  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Загального методу розв'язання тригонометричних рівнянь не існує, і пошук розв'язання в кожному конкретному випадку потребує певної майстерності у виконанні тригонометричних перетворень, знання тригонометричних формул. Потрібно зазначити, що при розв'язанні

найпростіших тригонометричних рівнянь запис розв'язків має однозначну форму. У більш складних прикладах форма запису множини розв'язків неоднозначна, але ідентичність різних форм запису завжди можна довести за допомогою тотожних перетворень. Різна форма запису пояснюється різними методами, за допомогою яких розв'язується дана задача. Розв'язування різних типів тригонометричних рівнянь в основному зводиться до розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

Нерівність називається тригонометричною, якщо вона містить змінну тільки під знаком тригонометричної функції. Наприклад,  $\sin x < \frac{1}{2}$ ,  $\cos 3x > 1$ ,  $\cos x + \operatorname{tg} x \leq 1$  — тригонометричні нерівності. Розв'язати тригонометричну нерівність означає знайти множину значень змінної, при яких нерівність виконується.

Аналіз численних навчальних, навчально-методичних посібників з курсу тригонометрії та алгебри і початку аналізу [2-6, 10, 11, 17-19, 26, 27, 36, 37, 39, 40] засвідчив, що представлення змісту теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» має класичну схему, за якою розгортання теми будемо представляти і в нашому дослідженні.

Алгоритм подання теми має таку схему: 1) поняття і факти про найпростіші тригонометричні рівняння та тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших; 2) типи тригонометричних рівнянь, які розв'язуються за методами; 3) системи тригонометричних рівнянь; 4) найпростіші тригонометричні нерівності.

#### 1. Найпростіші тригонометричні рівняння.

Рівняння називається тригонометричним, якщо невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій.

Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ .

Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння – означає знайти множину всіх кутів, що мають дане значення а тригонометричної функції. Розв'язання найпростіших рівнянь визначається стандартними формулами.

Рівняння  $\cos x = a$

1) Якщо  $|a| > 1$ , то  $\cos x = a$  не має розв'язків, оскільки  $|\cos x| \leq 1$  для будь-якого  $x$ .

2) Якщо  $|a| < 1$ , то враховуючи те, що  $\cos x$  – абсциса точки  $P_t$  одиничного кола, маємо, що абсцису  $a$ , мають дві точки одиничного кола (на осі  $Ox$  відкладемо число  $a$  і через побудовану точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі абсцис (рис. 1.1), яка перетне коло у двох точках ( $P_{t1}$  і  $P_{t2}$ ).

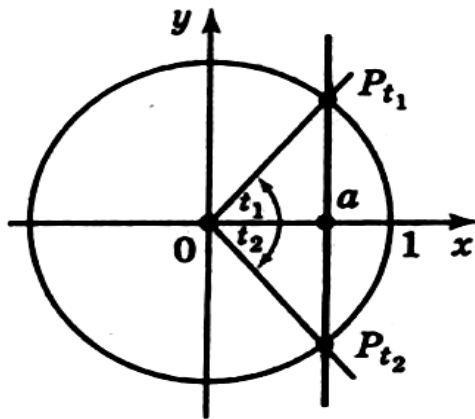


Рис. 1.1. Розв'язання тригонометричних рівнянь

Тоді  $x_1 = \arccos a + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_2 = -\arccos a + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ці розв'язки можна об'єднати  $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Якщо  $|a| = 1$ , то, враховуючи те, що  $\cos x$  – це абсциса точки  $P_t$  одиничного кола, абсцису, рівну 1, має точка  $P_t$  утворена із точки  $P_0(1;0)$  поворотом на кути  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Отже,  $x = 0 + 2\pi n = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , тобто  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; абсцису рівну -1, має точка  $P_t$  утворена з точки  $P_0(1; 0)$  поворотом на кути  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , отже якщо  $a = -1$ , то маємо  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Якщо  $\cos x = 0$ , то маємо  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

За допомогою алгебраїчних перетворень або формул тригонометрії деякі рівняння можуть бути зведені до найпростіших тригонометричних рівнянь. Це рівняння, виду  $Asin(kx+b)+C=0$ ,  $Acos(kx+b)+C=0$ ,  $Atg(kx+b)+C=0$ ,  $Actg(kx+b)+C=0$ . Або рівняння права частина яких – нуль, а ліва може бути спрощена за допомогою формул тригонометрії або рівняння виду:

$$\sin(ax+b)=\sin(cx+d), \quad (1.1)$$

$$\cos(ax+b)=\cos(cx+d), \quad (1.2)$$

$$tg(ax+b)=tg(cx+d), \quad (1.3)$$

$$ctg(ax+b)=ctg(cx+d), \quad (1.4)$$

які у загальному вигляді можна записати так:

$$T(ax+b)=T(cx+d), \quad (1.5)$$

де  $T$  – знак будь-якої з тригонометричних функцій.

Ці типи рівнянь називають основними, оскільки до них у процесі розв'язання зводяться будь-які тригонометричні рівняння, що розв'язуються елементарними методами.

Розглянемо розв'язування цих типів рівнянь на прикладах і в загальному вигляді [32].

$$\text{Тригонометричні рівняння I основного типу: } AT(ax+b)=C \quad (1.6)$$

Рівняння даного типу розв'язуються безпосередньо на основі наступних формул.

$$1) \text{ Якщо } \sin z = c \text{ та } |c| \leq 1, \quad (1.7)$$

$$\text{то } z = (-1)^n \arcsin c + \pi n = \begin{cases} \arcsin c + \pi 2k \\ -\arcsin c + \pi(2k + 1) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$2) \text{ Якщо } \cos z = c \text{ та } |c| \leq 1, \quad (1.9)$$

$$\text{то } z = \pm \arccos c + 2\pi n = \begin{cases} \arccos c + 2\pi n \\ -\arccos c + 2\pi n \end{cases} \quad (1.10)$$

$$3) \text{ Якщо } tg z = c, \text{ то } z = \arctg c + \pi n \quad (1.11)$$

$$4) \text{ Якщо } ctg z = c, \text{ то } z = \text{arcctg} c + \pi n \quad (1.12)$$

Причому параметри  $n$  всюди приймають різні цілі значення:  $0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Варто зауважити, що для рівнянь виду  $\sin z = c$ , при  $c=1$  та  $c=-1$ .

Перша формула може бути записана в короткому вигляді, а саме:

$$\begin{cases} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ при } c = 1 \\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ при } c = -1 \end{cases} \quad (1.13)$$

Дійсно, при  $c=1$  формула буде:

$$z = (-1)^n \arcsin c + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси при парному } n=2k, \quad z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ та при непарному } n=2k+1, \quad z = \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi(2n+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{aligned} \quad (1.15)$$

Якщо  $c = -1$ , то за формулою маємо:

$$z = (-1)^n \arcsin c(-1) + \pi n = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi n \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси при парному } n=2k, \quad z = -\frac{\pi}{2} + \pi 2k, \text{ та при непарному } n=2k-1, \quad z = \\ \frac{\pi}{2} + \pi(2k-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi 2k \end{aligned} \quad (1.17)$$

Такий же результат можна отримати безпосередньо за означення синуса на числовому колі, помітивши, що  $\sin z = 1$  тільки в точці  $B$ , де відображаються числа  $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , а  $\sin z = -1$  тільки в точці  $B$ , де відображаються  $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ .

Аналогічними судженнями переконуємося, що розв'язання рівняння  $\cos z = -1$  можна записати у вигляді  $z = 2\pi k$  а розв'язання рівняння  $\sin z = -1$  у вигляді  $z = \pi(2k+1)$  [32].

$$\text{Тригонометричні рівняння II типу } T(ax+b)=T(a_1x+b_1). \quad (1.18)$$

Розв'язання рівнянь даного типу засновано на наступних теоремах:

I. Для виконання рівності  $\sin u = \sin v$  необхідно і достатньо, щоб виконувалось хоча б одна із умов:  $u=v+\pi \cdot 2n$  та  $u = -v+\pi(2n+1)$  (1.19)

II. Для виконання рівності  $\cos u = \cos v$  необхідно і достатньо, щоб виконувалось хоча б одна із умов  $u = v+2\pi n$  та  $u = -v+2\pi n$  (1.20)

III. Для виконання будь-якого із рівнянь:

$$\operatorname{tgu} = \operatorname{tgv} \quad (1.21)$$

$$\operatorname{ctgu} = \operatorname{ctgv} \quad (1.22)$$

необхідно і достатньо, щоб  $u=v+\pi n$  та щоб числа  $u$  та  $v$  були допустимими значенням аргументів тих функцій, які входять в дане рівняння [32].

Параметр  $n$  в усіх випадках є будь-яким числом.

## 2. Типи тригонометричних рівнянь.

Багато тригонометричних рівнянь, права частина яких дорівнює 0, розв'язуються розкладанням їхньої лівої частини на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один зі співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають змісту. Розглянемо цей спосіб [30].

Тригонометричні рівняння  $T(ax+b) = T_s(a_1x+b_1)$ , у яких  $T$  і  $T_s$  кофункції.

Рівняння даного типу зводяться безпосередньо до основного типу за формулами зведення. Покажемо на конкретних прикладах У дод. Б.

Тригонометричні рівняння типу  $f[t(ax+b)] = 0$ , в яких здійснюється алгебраїчні операції тільки над однією тригонометричною функцією з одним і тим же самим аргументом.

Попередньо розглянемо цей тип рівнянь на частинних прикладах та поставимо наступні запитання:

Чи можуть приймати однакові значення функції:  $y = a\sin^2(kx+1) + b\sin(kx+1) + c$  та  $y = a_1\sin^2(kx+l) + b_1\sin(kx+1) + c_1$ ?

Створюємо тригонометричне рівняння:

$$a\sin^2(kx+1) + b\sin(kx+1) + c = a_1\sin^2(kx+l) + b_1\sin(kx+1) + c_1$$

або після перетворення

$$(a-a_1)\sin^2(kx+l) + (b-b_1)\sin(kx+l) + (c-c_1)$$

Якщо  $a-a_1 \neq 0$ , то заміною  $\sin(kx+l) = z$  дане рівняння зводиться до квадратного алгебраїчного рівняння  $(a-a_1)z^2 + (b-b_1)z + (c-c_1) = 0$  звідки  $z_{1,2} = \frac{b_1-b}{2(a-a_1)} \pm \frac{\sqrt{(b_1-b)^2 - 4(a-a_1)(c-c_1)}}{2(a-a_1)}$ . Позначимо корені коротше  $z_1=p_1$ ,  $z_2=p_2$  заміна дає рівняння I типу  $\sin(kx+l) = p_1$  та  $\sin(kx+l) = p_2$ .

Якщо  $p_1$  та  $p_2$  дійсні числа, не переважаючи за абсолютним значенням, то маємо  $kx_1+l = (-1)^n \arcsin p_1 + \pi n$ ,  $kx_2+l = (-1)^n \arcsin p_2 + \pi n$  звідки

$x_1 = \frac{1}{k}(-1)^n \arcsin p_1 + \pi n - l$ ,  $x_2 = \frac{1}{k}(-1)^n \arcsin p_2 + \pi n - l$ . При цих значеннях аргументах дані функції приймають однакові значення.

Окремі види рівнянь типу  $f[t(ax + b)] = 0$ . (1.23)

А) Зведення тригонометричного рівняння до однієї функції одного і того ж самого аргументу [35].

Досить часто після використання відповідних тригонометричних формул вдається звести рівняння до однієї функції одного й того самого аргументу, після чого застосувати заміну змінних.

Якщо в рівняння входить лише  $\operatorname{tg} x$  і  $\operatorname{ctg} x$ , то після застосування, то після застосування формули  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$  отримаємо рівняння, що містить лише  $\operatorname{tg} x$ .

Якщо в рівняння входить лише  $\sin x$  і  $\cos x$ , причому хоча б одна з функцій тільки у парних степенях (наприклад,  $\sin x$ ), то застосовуємо формулу  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  з подальшою заміною  $\cos x = t$ . Аналогічно застосовуємо формулу  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , якщо  $\cos x$  входить у рівняння лише у парних степенях [26].

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише  $\cos 2x$  і  $\cos x$ , то застосовуємо формулу  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  і вводимо заміну  $\cos x = t$ .

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише  $\cos 2x$  і  $\sin x$ , то застосовуємо формулу  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  і вводимо заміну  $\sin x = t$ .

Розглянемо на прикладах розв'язок рівнянь даного типу у дод. В.

Б) Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних.

Тригонометричні рівняння  $a \sin x + b \cos x = 0$ , де  $a$  і  $b$  — числа,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , називають однорідними тригонометричними рівняннями 1-го степеня відносно  $\sin x$  і  $\cos x$ .

Ті значення  $x$ , при яких  $\cos x = 0$ , не є коренями рівняння. Дійсно у разі  $\cos x = 0$  рівняння набуває вигляду  $a \sin x = 0$ . Оскільки  $a \neq 0$ , то матимемо  $\sin x = 0$ . Проте  $\sin x$  і  $\cos x$  не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Поділивши ліву і праву частини рівняння  $a \sin x + b \cos x = 0$  на  $\cos x \neq 0$ , матимемо  $a \operatorname{tg} x + b = 0$ , після чого закінчуємо розв'язання.

Тригонометричне рівняння  $a\sin^2x + b\cos x \sin x + c\cos^2x = 0$ , де  $a, b, c$  — числа, з яких хоча б два відмінні від нуля, називають однорідними тригонометричними рівняннями другого ступеня відносно  $\sin x$  і  $\cos x$ . Сума показників степенів у всіх доданків при  $\sin x$  і  $\cos x$  дорівнює двом.

Якщо  $a \neq 0$ , то рівняння (по аналогії з однорідним 1-го ступеня) розв'язують, поділивши на  $\cos^2x \neq 0$  з подальшою заміною  $\tan x = t$ . Якщо ж  $a = 0$ , то виносимо  $\cos x$  за дужки та застосовуємо прийом відомий нам з попереднього пункту [35].

До однорідних можуть зводитися рівняння, які мають зовнішній вигляд, відмінний від зовнішнього вигляду однорідного рівняння. При цьому часто застосовують формули тригонометричних функцій подвійного кута та тотожність  $\sin^2x + \cos^2x = 1$  [12]

Тригонометричні рівняння типу  $f(\sin(ax+b), \cos(ax+b), \tan(ax+b), \cot(ax+b), \sec(ax+b), \operatorname{cosec}(ax+b)) = 0$ , де виконуються алгебраїчні дії над деякими круговими функціями одного аргументу

До цього підтипу віднесемо рівняння виду:  $R(\sin z, \cos z, \tan z, \cot z, \sec z, \operatorname{csc} z) = 0$ .

Такі рівняння зводяться до раціональних алгебраїчних рівнянь за допомогою підстановки  $\tan \frac{z}{2} = y$ .

На справді, використовуючи формули будемо мати:

$$\sin z = \frac{\sin 2(\frac{z}{2})}{1} = \frac{2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2}} = \frac{2\tan \frac{z}{2}}{1 + \tan^2 \frac{z}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}; \quad (1.24)$$

$$\cos z = \frac{\cos 2(\frac{z}{2})}{1} = \frac{\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}}{\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{z}{2}}{1 + \tan^2 \frac{z}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}; \quad (1.25)$$

$$\tan z = \tan 2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2\tan \frac{z}{2}}{1 - \tan^2 \frac{z}{2}} = \frac{2y}{1-y^2}; \quad (1.26)$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{1-y^2}{2y}; \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1+y^2}{1-y^2}; \quad \operatorname{csc} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1+y^2}{2y}. \quad (1.27)$$

У такий спосіб кожна з шести кругових функцій виразилась раціональними операціями через  $y$ :

$$\begin{cases} \sin z = \frac{2y}{1+y^2}, \cos z = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \operatorname{tg} z = \frac{2y}{1-y^2} \\ \operatorname{ctg} z = \frac{1-y^2}{2y}, \sec z = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \csc z = \frac{1+y^2}{2y} \end{cases} \quad (1.28)$$

Виконавши заміну в даному рівнянні, отримуємо рівняння:

$R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1-y^2}, \frac{1-y^2}{2y}, \frac{1+y^2}{1-y^2}, \frac{1+y^2}{2y}\right) = 0$ , де над аргументом  $y$  виконуються тільки раціональні операції, а тому його можна записати коротше так:  $R_1(y)=0$ , де через  $R_1$  позначена характеристика всіх раціональних операцій, проведених в рівняннях над  $y$ .

Використовуючи співвідносні методи алгебри, знаходимо дійсні корені цього рівняння:  $y=p_1, p_2, \dots, p_m$ .

Обратною заміною отримуємо рівняння I типу  $\operatorname{tg} x \frac{ax+b}{2} = p_1, \operatorname{tg} x \frac{ax+b}{2} = p_2, \dots, \operatorname{tg} x \frac{ax+b}{2} = p_m$  [12].

Приклади розв'язання вище окреслених типів тригонометричних рівень ілюструє дод. Д.

### 3. Системи тригонометричних рівнянь.

При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь використовуються ті ж прийоми, що і при розв'язуванні систем алгебраїчних рівнянь, а також формули тригонометрії. Звичайно при розв'язуванні тригонометричних систем останні зводять або до одного рівняння з одним невідомим, або до системи рівнянь відносно самих аргументів або функцій цих аргументів [30].

Приклад розв'язку системи тригонометричних рівнянь наведено у дод. Ж.

### 4. Найпростіші тригонометричні нерівності.

Найпростішими тригонометричними нерівностями називаються нерівності виду:  $\sin x > a, \sin x \geq a, \sin x < a, \sin x \leq a; \cos x > a, \cos x \geq a, \cos x < a, \cos x \leq a; \operatorname{tg} x > a, \operatorname{tg} x \geq a, \operatorname{tg} x < a, \operatorname{tg} x \leq a; \operatorname{ctg} x > a, \operatorname{ctg} x \geq a, \operatorname{ctg} x < a, \operatorname{ctg} x \leq a$ .

Загальні формули для розв'язування цих нерівностей є досить громіздкими. У дод. З наведено множини розв'язків найпростіших тригонометричних нерівностей.

Розв'язують тригонометричні нерівності, використовуючи одиничне коло, графіки тригонометричних функцій, лінії тангенса і котангенса.

При розв'язуванні складніших тригонометричних нерівностей здійснюють перехід до однієї або декількох найпростіших тригонометричних нерівностей.

Деякі із досліджуваних типів рівнянь, нерівностей та систем пропонуються для вивчення за програмою рівня стандарту та профільного рівня навчання математики у закладах середньої освіти.

Проведений логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми засвідчує, що учні опановують наступні предметні математичні компетентності: розв'язує найпростіші тригонометричні рівняння – на базовому рівні; формулює означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ ; розв'язує тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами – на профільному рівні. Також тема передбачає формування ключових компетентностей.

## **1.2. Аналіз програм і підручників в контексті навчання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності»**

Вивчення математики у школі диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма [21-25].

У шкільному курсі математики приділяється значна увага вивченню тригонометричного матеріалу, але складність полягає в невідповідності між достатньо великим обсягом та відносно невеликою кількістю годин, відведених на його вивчення (табл. 1.1). Зрозуміло, що в класах із поглибленим вивченням математики часу відводиться більше, але все одно тема залишається складною.

Таблиця 1.1

Розподіл годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти

| Навчальні предмети         | Кількість годин на тиждень у класах |    |                    |    |                   |    |                              |    |
|----------------------------|-------------------------------------|----|--------------------|----|-------------------|----|------------------------------|----|
|                            | Рівень стандарту                    |    | Академічний рівень |    | Профільний рівень |    | Рівень поглибленого вивчення |    |
|                            | 10                                  | 11 | 10                 | 11 | 10                | 11 | 10                           | 11 |
| Математика                 | 3                                   | 3  | -                  | -  | -                 | -  | -                            | -  |
| Алгебра та початки аналізу | -                                   | -  | 2                  | 3  | 5                 | 5  | 5                            | 5  |
| Геометрія                  | -                                   | -  | 2                  | 2  | 4                 | 4  | 4                            | 4  |

У вивченні тригонометрії в школі можна виокремити два етапи:

1) початкове ознайомлення з тригонометричними функціями гострого кута в курсі геометрії (8-9 клас) [21, 22];

2) систематизація і поглиблення знань про тригонометричні рівняння та нерівності в курсі алгебри та початків аналізу (математики) (10-11 клас). Вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей сприяє забезпеченню практичної та прикладної спрямованості навчання математики, розвитку математичних здібностей і розширенню кругозору учнів [23-25].

На першому етапі починаючи з 8 класу, в курсі геометрії вивчаються основні поняття тригонометрії, сам термін «тригонометричні функції» не вводиться. Тригонометричні поняття досить абстрактні, тому учні їх сприймають складно. Так у 8 класі означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута вводиться, як відношення сторін у прямокутному трикутнику і використовується для розв'язування прямокутних трикутників. Також у цьому класі учні знайомляться з основними тригонометричними тотожностями та формулами зведення для кутів виду  $(90^\circ - \alpha)$ .

У 9 класі у курсі вивчення геометрії учні розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса для будь-яких кутів від  $0^\circ$  до  $180^\circ$  на прикладі півкола одиничного радіуса за допомогою координат, що є своєрідною пропедевтичною роботою перед введенням тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою одиничного кола в 10 класі.

Довівши, що співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого кута, які вивчалися у 8 класі, є справедливими для кутів від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , учні вчаться перетворювати тригонометричні вирази. До формул зведення виду  $(90^\circ - \alpha)$  додаються нові формули зведення для кутів  $(180^\circ - \alpha)$ . Доведення теорем синусів та косинусів, дає змогу учням розв'язувати косокутні трикутники. Учні поверхнево знайомляться з радіанною системою вимірювання кутів та дуг.

Відповідно до чинної програми профільної школи вивчення теми: «Тригонометричні рівняння та нерівності» починають в 10 класі. Це пов'язано з розглядом властивостей відповідних функцій (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Розподіл годин для вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» за різними рівнями змісту освіти

| Назва теми                             | Кількість годин для вивчення теми                 |    |                    |    |                   |    |                              |    |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------|----|--------------------|----|-------------------|----|------------------------------|----|
|                                        | Рівень стандарту                                  |    | Академічний рівень |    | Профільний рівень |    | Рівень поглибленого вивчення |    |
|                                        | 10                                                | 11 | 10                 | 11 | 10                | 11 | 10                           | 11 |
| Тригонометричні рівняння та нерівності | 26<br>(разом з темою : «Тригонометричні функції») | –  | 16                 | –  | 35                | –  | 35                           | –  |
| Тригонометричні функції                |                                                   | –  | 20                 | –  | 30                | –  | 35                           | –  |

Програми вивчення математики на різних рівнях у школі ставлять перед собою різні цілі та завдання (дод. К).

Як бачимо на рівні стандарт «Тригонометричні рівняння та нерівності» розглядаються у складі теми «Тригонометричні функції», зокрема передбачається лише розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Програмою академічного рівня «Тригонометричні рівняння та нерівності» відокремлено в окрему тему та розширено зміст навчального матеріалу основними способами розв'язування тригонометричних рівнянь та найпростіших тригонометричних нерівностей.

На профільному рівні передбачається подальше розширення відомостей про розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей, зокрема розглядаються тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами.

Програма для класів з поглибленим вивченням математики зміст навчального матеріалу розширює за рахунок розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Основним джерелом знань, крім знань вчителя, для учнів є підручник. Дослідивши підручники, за якими навчаються діти, можна краще зрозуміти методику вивчення тригонометрії в шкільному курсі математики. Крім того, зміст підручників повинен відповідати чинній програмі з математики.

Розглянемо зміст матеріалу з теми: «Тригонометричні рівняння та нерівності» викладеного на різних рівнях в діючих підручниках з алгебри та початків аналізу за курс 10 класу профільної школи з метою його порівняння та аналізу.

У підручниках Г. П. Бевза і В. Г. Бевз «Математика - 10» (рівень стандарту) [4], М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова «Математика, 10» (рівень стандарту) [5], Нелін Є. П. «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (академічний та профільний рівень) [27], А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (академічний, профільний рівень та з поглибленим вивченням математики) [16-18] при вивченні тригонометричних рівнянь і нерівностей спочатку розглядаються розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей за допомогою одиничного кола, а потім з використанням графіка.

У підручнику Г. П. Бевза і В. Г. Бевза «Математика - 10» (рівень стандарту) [4] в основній частині параграфу на прикладах показується розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою введення заміни, а в рубриці «Виконаємо разом» — розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції та тригонометричних однорідних рівнянь. Після параграфу даються історичні відомості з теми «Тригонометричні функції» Система задач до цього розділу містить понад 300 номерів з різнорівневими завданнями.

У підручнику «Математика, 10» М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова (рівень стандарту) [5] в окремому параграфі «Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь» розглядають розв'язання тригонометричних рівняння за допомогою розкладання на множники, введення заміни, зведення до однієї функції та одного аргументу. У кінці розділу наведено запитання для самоперевірки та тестові завдання до кожної теми розділу.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (академічний рівень) автор Нелін Є. П. [27] основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та способів діяльності із цим матеріалом у формі спеціальних орієнтирів по розв'язуванню завдань.

У кожному розділі розв'язуванню вправ передусє виділення загальних орієнтирів по розв'язуванню завдань з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач в підручнику наводяться приклади, у яких, крім самого розв'язання, окремо міститься також коментар, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

Вивчається розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших, зокрема виділено такі методи: заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом), розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного, розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники. Окремий пункт параграфу присвячено відбору коренів тригонометричних рівнянь. Розглянуто на прикладах розв'язування систем тригонометричних рівнянь і завершується вивчення тригонометричних рівнянь прикладами розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем, де указано тригонометричні формули, які можуть проводити до звуження ОДЗ та тригонометричні рівняння з оберненими тригонометричними функціями.

Закінчується розділ «Тригонометричні рівняння і нерівності» вивченням тригонометричних рівнянь з параметрами.

У підручнику з алгебри і початків аналізу (академічний та профільний рівень) автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [17, 18] після кожного пункту пропонуються різнорівневі вправи для розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та нерівностей, зокрема завдання з параметрами. Розглядаються обернені тригонометричні функції, їх графіки, властивості та деякі основні рівності. Пропонуються різнорівневі вправи для розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей, які містять обернені тригонометричні функції, зокрема побудова графіків. Далі пропонуються зразки розв'язання тригонометричних рівнянь методом заміни змінної, зведенням до однієї функції, одного аргументу, однорідних рівнянь та тих, що зводяться до них, методом введення допоміжного кута рівняння виду  $a \sin x + b \cos x = c$ , розкладанням на множники. В окремому пункті розглянуто розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

У підручнику для класів з поглибленим вивченням математики тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» розглядається аналогічно. Більш глибокому засвоєнню матеріалу теми сприяють два додаткових пункти (необов'язкові для вивчення) «Про суму двох періодичних функцій» і «Тригонометрична підстановка».

Аналіз змісту набору задач у темі «Тригонометричні рівняння та нерівності» приводить до наступних висновків.

За будь – яким підручником учні детально знайомляться з розв'язуванням найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей. Для найпростіших тригонометричних рівнянь пропонується достатня кількість вправ для закріплення основних формул та методів їх розв'язувань.

З методами розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та нерівностей в основній частині підручників учні ознайомлюються через зразки розв'язування таких завдань. Тільки в підручниках [11, 16] учням пропонуються

орієнтири по розв'язуванню більш складних тригонометричних рівнянь та нерівностей.

В підручниках [4, 5, 10, 18] дуже обмежена кількість дослідницьких завдань, зокрема завдань з параметрами, і практично не розглядаються методи їх розв'язування.

Таким чином, врахування принципів наступності математичної освіти в основній та старшій школі, дозволяє вчителю створювати оптимальні умови для оволодіння учнями навчальним матеріалом з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» та оволодіти відповідними предметними та профільними компетентностями.

## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

#### **2.1. Методичні прийоми формування ключових і предметних компетентностей з розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей учнів на базовому рівні**

За програмою базового рівня тригонометричні рівняння та нерівності вивчаються в темі «Тригонометричній функції». З огляду на зазначене доречним є формування ключових компетентностей учнів протягом вивчення указаної теми [21, 23].

Така форма навчання як урок-гра забезпечує умови формування таких ключових компетентностей: спілкування державною мовою; уміння вчитися; соціальна і громадська компетентності. Наведемо орієнтовний план-конспект уроку-гри (матеріали до уроку дібрані із джерел [2-8, 10, 14, 15, 17-19, 26-10, 32,36, 37, 39, 40]).

Тема уроку: Тригонометричні функції

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів про тригонометричні функції;

Розвивати вміння використовувати властивості тригонометричних функцій для розв'язання вправ, творчу активність, розширювати світогляд учнів; розвивати навички самостійної роботи з додатковою літературою;

Виховувати самостійність мислення, толерантність до міркувань інших учнів, зацікавленість темою, залучати до роботи в групі.

Тип уроку: систематизації та узагальнення знань, урок-гра.

Методи навчання, прийоми: попереджувальне завдання, робота в групах, словесні, наочні, практичні.

Основні терміни і поняття: тригонометричні функції синус, косинус, тангенс, котангенс; оберненні тригонометричні функції, парні та непарні функції, період функції.

Міжпредметні зв'язки: геометрія, література.

Наочність: презентація «Тригонометричні функції», лист самоконтролю, картки – завдання, підручник В. Г. Бевз, Г. П. Бевз «Математика 10».

Технічні засоби навчання: комп'ютер, мультимедіа, програма PowerPoint.

Хід уроку:

I. Організаційний момент.

«Емоційний термометр». Виберіть картку, колір якої відповідає вашому емоційному стану (на початок роботи).



ДОВРИЙ



ПОГАНИЙ



СЕРЕДНІЙ

II. Узагальнення і систематизація знань про тригонометричні функції (у вигляді гри).

Групу об'єднано у команди: Синус – Косинус – Тангенс - Котангенс

1. Привітання команд:

| Команда          | Девіз                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Синус</b>     | «Команда синус просто клас, адже синус – це просто сила. Без синуса немає тангенса і навіть немає котангенса. І косинус нам не суперник, переможемо його»                                                                                                                            |
| <b>Косинус</b>   | «Тригонометрія – наша стихія. А косинус – наш в ній скачок. І немає в світі функції, Щоб не розв'язати за урок»                                                                                                                                                                      |
| <b>Тангенс</b>   | «Тангенс – команда наша. Тангенс треба знати, щоб з успіхом приміняти. Тангенс – швиденько зростає і рівняння він рішає. Тангенс два рази відкривався, але з $\pi/2$ не зрівнявся. І в таблицях розписався. У нас настрої бойовий. Хочемо ми з вами порішати і успіху вам побажати». |
| <b>Котангенс</b> | «Будуємо котангенси і добре з цим справляємось».                                                                                                                                                                                                                                     |

2. Привітання гостей (математичний диктант):

Відповісти на питання та вписати до таблиці перші літери відповідей.

1) Синусоїда, косинусоїда, тангенсоїда, котангенсоїда – назви ...

(графіків)

2) Вісь Оу – це вісь ...

(ординат)

1) Яка функція відсутня:

(синус)

$$y = \cos x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

2) Я

3) Синус, косинус, тангенс, котангенс – це ... функції

(тригонометричні)

4) Значення, яке приймає залежна змінна...

(множина)

5) Міра виміру кута...

(радіан)

6) Обернена функція до функції  $y = \operatorname{tg} x$  ...

(арктангенс)

7) Частина кола ...

(дуга)

8) І

Перевірка правильності виконання на слайді презентації:

|   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Г | О | С | Т | Я | М |  | Р | А | Д | І  |

3. Розминка:

Кожна команда отримує по 3 питання. Правильна відповідь оцінюється в 1 бал. Якщо команда не може відповісти на питання, право відповіді надається іншій команді.

Команда № 1:

- 1) Яка функція називається зростаючою?  
(більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції).
- 2) Симетрія графіка парної функції. (відносно осі  $OY$ ).
- 3)  $y = \arccos x$ . Це зростаюча чи спадна функція? (спадна)

Команда № 2:

- 1) Яка функція називається спадною?  
(більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції).
- 2) Період функції  $y = \sin x$ ? ( $T = 2\pi$ ).
- 3)  $y = \arccos x$  – парна чи не парна? (не має властивостей парності і непарності).

Команда № 3:

- 1) Яка функція називається парною? ( $f(-x) = f(x)$ ).
- 2) Період функції  $y = \cos x$ ? ( $T = 2\pi$ ).
- 3)  $y = \arctg x$ . Це зростаюча чи спадна функція? (зростаюча).

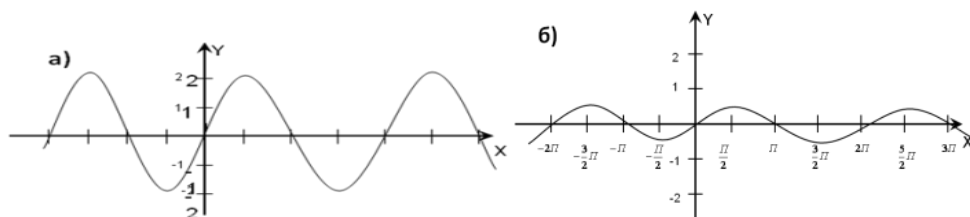
Команда № 4:

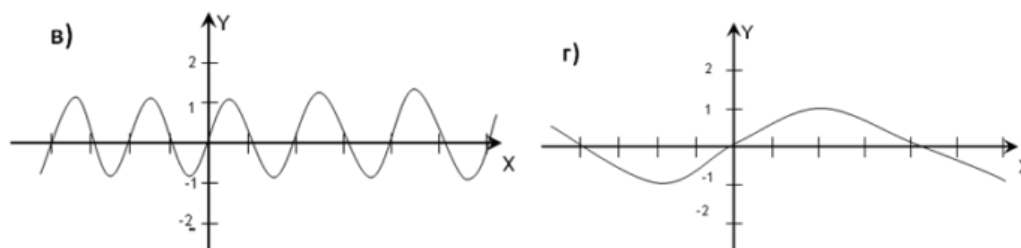
- 1) Яка функція називається непарною? ( $f(-x) = -f(x)$ ).
- 2)  $y = \arcsin x$ . Це зростаюча чи спадна функція? (зростаюча)
- 3) Множина значень функції  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .  $[-1; 1]$

4. Тестові завдання (в бланку відповідей відмітити правильну відповідь):

Питання 1.

На якому з малюнків відображений графік функції  $y = \sin 2x$ ,

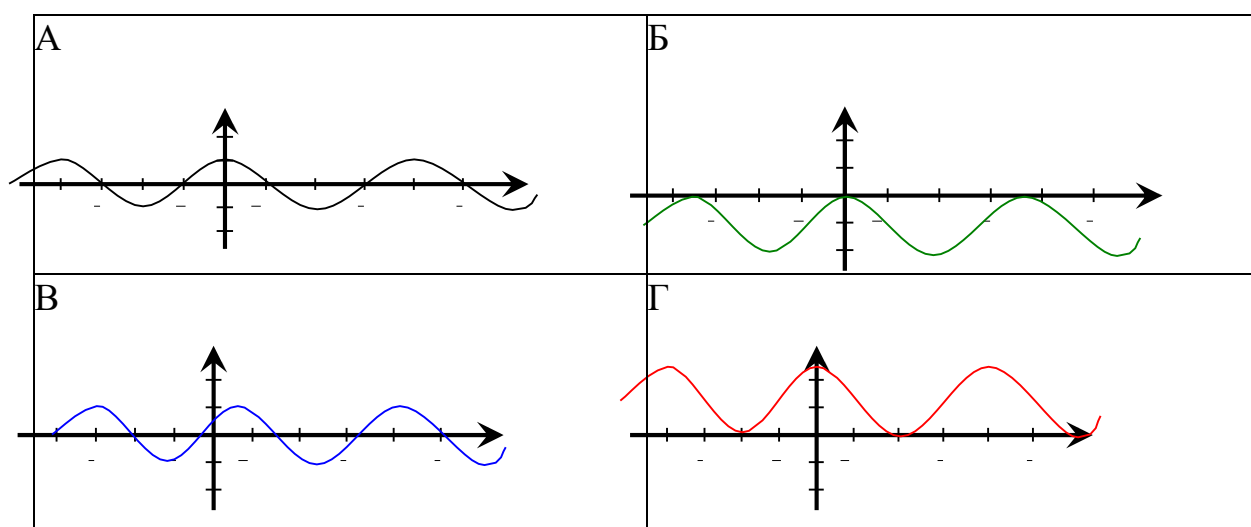




(Відповідь: В)

Питання 2.

Який із малюнків відповідає графіку функції  $y = \cos x + 1$ ?



(Відповідь: Г)

5. Розв'язування вправ (Спростити вирази за картками – завданнями):

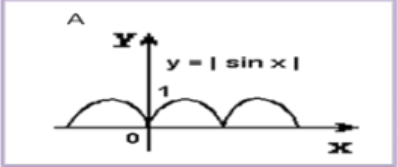
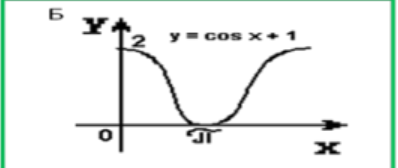
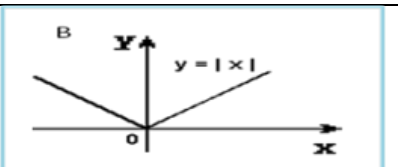
5.1.Конкурс капітанів

| Команда   | Завдання                                                 | Відповіді        |
|-----------|----------------------------------------------------------|------------------|
| 1 команда | $(1 - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 3)$ | $4\sin^2 \alpha$ |
| 2 команда | $(1 - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$     | $\cos^2 \alpha$  |
| 3 команда | $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$                | - 1              |
| 4 команда | $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1}$                | - 1              |

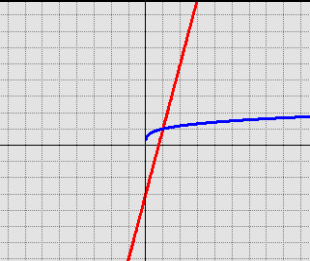
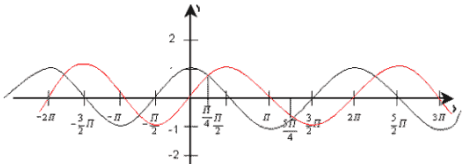
## 5.2. Конкурс учасників команд:

| Команда   | Завдання                                                                  | Відповіді                      |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1 команда | $\sin 310^\circ = \sin(270^\circ + 40^\circ)$                             | $-\cos 40^\circ$               |
| 2 команда | $\cos 220^\circ = \cos(180^\circ + 40^\circ)$                             | $-\cos 40^\circ$               |
| 3 команда | $\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ + 30^\circ)$   | $-\operatorname{ctg} 30^\circ$ |
| 4 команда | $\operatorname{ctg} 200^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 20^\circ)$ | $\operatorname{ctg} 20^\circ$  |

6. Знайти відповідність (виберіть відповідність між графіком і прислів'ям та впишіть правильну відповідь до таблиці):

|   |                                                                                     |                                            |   |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|---|
| А |    | Любиш з гори кататися, люби й сани возити. | 1 |
| Б |   | Як агукнеться, так і відгукнеться.         | 2 |
| В |  | Повторення – мать учіння.                  | 3 |

7. Розв'язати графічно Правильну відповідь записати до листа відповідей:

|                                                                                     |                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| А. рівняння: $\sqrt[4]{4x - 3}$<br>Відповідь: 1                                     | Б. Нерівність $\cos x \leq \sin x$<br>Відповідь: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ |
|  |                          |

7. Конкурс: питання – підказки      Правильні      відповіді      на      питання  
відобразити в таблиці й утворити слово-відповідь:

1) Функція

А) Звичне слово квочки-насідки поставте на перше місце:

Б) На друге місце поставте ноту, яка важлива в будь-якому оркестрі:

В) На третьому місці 15-та буква в алфавіті:

Г) Одне волосся на мордочці кота:

Відповідь: Косинус.

Перевірка правильності виконання на слайді презентації:

|    |    |   |    |
|----|----|---|----|
| А  | Б  | В | Г  |
| КО | СИ | Н | УС |

III. Підведення підсумків.

Рефлексія.

Слово журі. Журналіст:

Всі команди – молодці

Працювали від душі

Знаємо тепер ми і синус і косинус і тангенс і котангенс

І як графік будувати і рівняння як рішать

А просто все це треба добре знать

І ніколи не забувати

Урок успішно пройшов

А це значить, що у нас Все добре в даний час.

Рефлексія. (Емоційний термометр). Виберіть картку, колір якої відповідає  
вашому емоційному стану (на кінець роботи).



ДОВРИЙ



ПОГАНИЙ



СЕРЕДНІЙ

IV. Оцінки учням. Домашнє завдання: Підручник В.Г.Бевз, Г.П.Бев  
«Математика 10», розділ II, повторити основні формули тригонометрії,

підготуватися до контрольної роботи, вирішати завдання домашньої математичної олімпіади.

Предметна математична компетентність учнів, які вивчають тему за програмою базового рівня полягає в розв'язуванні найпростіших тригонометричних рівнянь.

Продемонструємо приклади завдань за допомогою яких можна визначити рівень предметної математичної компетентності учнів з теми: «Тригонометричні рівняння».

Важливе місце у процесі формування компетентностей учнів у навчанні теми відіграє поточний і підсумковий контроль. Доречно на різних етапах вивчення теми пропонувати учням математичні диктанти для перевірки і оцінювання рівня сформованості предметних компетентностей учнів. Також наведемо приклади самостійних і контрольних робіт з теми на базовому рівні підготовки [2-8, 10, 14, 15, 17-19, 26-30, 32, 36, 37, 39, 40]. Приклади самостійних робіт ілюструє дод. Л.

Підсумовуючи, слід відмітити, що організація навчання теми на базовому рівні підготовки учнів повинна мати на меті насамперед формування практичної компетентності старшокласників, передбачати різні нестандартні форми уроків, як от урок-гра, тощо. Обов'язковим має бути моніторинг рівня сформованості предметних математичних компетентностей, який здійснюється під час проведення самостійних і контрольних робіт з теми.

## **2.2. Методика формування ключових і предметних компетентностей з розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей учнів профільних класів**

На відміну від програми базового рівня програмою профільного рівня передбачено вивчення окремої теми: «Тригонометричні рівняння і нерівності» (32 год) [25].

Для формування предметних математичних компетентностей (формування означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтування формул коренів найпростіших тригонометричних рівнянь; розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей, зокрема з параметрами) доречно запропонувати систему вправ [2-8, 10, 14, 15, 16-19, 26-10, 32,36, 37, 39, 40].

Розв'язати рівняння:

- 1)  $24\cos x - 8\cos 2x = 15$ ;
- 2)  $16\sin x + 8\cos 2x = 7$ ;
- 3)  $5\sin x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 6$ ;
- 4)  $5\cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$ ;
- 5)  $\cos 3x + 2\cos x = 0$ ;
- 6)  $\sin 3x - 2\sin x = 0$ ;
- 7)  $2(1 - \sin 2x) - \sin x + \cos x = 3$ ;
- 8)  $2(1 + \sin 2x) + \sin x + \cos x = 3$ ;
- 9)  $\frac{\sin 2x - \cos x}{\cos x} = 1$ ;
- 10)  $\frac{\sin 2x - \sin x}{\sin x} = 1$ ;
- 11)  $\frac{\cos 4x + 2\cos^2 x - 1}{(\sin x + 1)(\sin 3x - 1)} = 0$ ;
- 12)  $\frac{\cos 4x + 2\sin^2 x - 1}{(\cos x - 1)(\cos 3x - 1)} = 0$ ;
- 13)  $\frac{\sin x + \sin 2x - \cos x - 2\cos^2 x}{(\sqrt{3} - 2\cos x)(1 - \sin 2x)} = 0$ ;
- 14)  $\frac{\sin x - 2\sin^2 x + \cos x - \sin 2x}{(\sqrt{3} - 2\cos x)(1 + \sin 2x)} = 0$ ;
- 15)  $|\cos 2x| = \sin 2x - 1$ ;
- 16)  $\sqrt{1 - \cos x} - \sqrt{1 + \cos x} = 1 + a$ .

Як бачимо, запропоновані вправи поступово ускладнюються і потребують уміння визначати тип рівняння та обирати відповідний спосіб його розв'язання.

Розглянемо, якими методами можна на уроках теми формувати окремі ключові компетентності, визначені програмою профільного рівня. Перелік та зміст ключових компетентностей ілюструє дод. М.

Відобразимо це у перспективно-тематичному плануванні теми (дод. Н).

Наведемо приклади розробок уроків теми згідно з перспективно-тематичним плануванням.

### Урок № 10

Тема уроку: Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь.

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з іншими способами розв'язування тригонометричних рівнянь; навчити раціонально вибирати метод їх розв'язування; удосконалити уміння правильно розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння.

Розвивальна: розвивати навички самоконтролю та взаємоконтролю, логічне мислення, пам'ять, вміння аналізувати ситуацію; творчі здібності та пізнавальну активність.

Виховна: виховувати увагу, активність, інтерес до предмету, правильне математичне мовлення.

Формування компетентностей:

1. Соціальна компетентність: самостійне розв'язання завдань різними способами і вибір раціональніших, самооцінка і взаємооцінка.
2. Комунікативна компетентність: стимулювання умінь учнів, коментування розв'язаних завдань, взаємоперевірка вислову власної точки зору.
3. Інформаційна компетентність: використання додаткової інформації; використання таблиць, схем, опорних конспектів.
4. Полікультурна компетентність: зв'язок з іншими предметами, життєвими ситуаціями, моделювання.
5. Продуктивна творча діяльність: використання творчих завдань, складання завдань, питань, алгоритмів.

Тип уроку: формування умінь та навичок.

Обладнання та наочність: мультимедійний комплекс, таблиці «Значення тригонометричних функцій деяких кутів», «Тригонометричні формули», «Формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь», картки з завданнями, картки самоконтролю.

Епіграф:

Краса і багатство тригонометрії – це її формули. Всі вони використовуються при розв'язуванні рівнянь.

Хід уроку:

I. Організаційний етап:

Викладач перевіряє готовність учнів до уроку, відмічає відсутніх; роздає учням картки самоконтролю і пояснює як треба їх заповнювати.

II. Перевірка домашнього завдання:

Перевірка завдання, заданого за підручником.

Перевірити наявність домашніх завдань в зошитах учнів і відповісти на запитання, які виникли в процесі їх виконання.

Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою.

Викладач нагадує учням, що на минулому уроці були розглянуті види найпростіших тригонометричних рівнянь та формули для отримання їх коренів, які вони повинні були вивчити на сьогодні.

Робота по картках. Для перевірки знань учням пропонується письмово на окремих аркушах виконати завдання.

| 1 варіант                                      |                                              | 2 варіант                                    |                              |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------|
| 1. $\cos x = 1$ , $x =$                        | а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$                   | 1. $\sin x = -1$ , $x =$                     | а) $\pi + 2\pi n$            |
| 2. $\sin^2 x - \cos^2 x =$                     | б) $\cos^2 x$                                | 2. $\sin x \cos x =$                         | б) $\cos 2x$                 |
| 3. $1 - \sin^2 x =$                            | в) $-\cos x$                                 | 3. $\cos^2 2x + \sin^2 2x =$                 | в) $-1$                      |
| 4. $\operatorname{tg} x = 1$ , $x =$           | г) $2\pi n$                                  | 4. $\cos^2 x - \sin^2 x =$                   | г) $1$                       |
| 5. $\cos(\pi + x) =$                           | д) $-\cos 2x$                                | 5. $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x) =$ | д) $-\cos x$                 |
| 6. $\sin(x - \frac{\pi}{2}) =$                 | е) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 6. $\cos(x + \pi) =$                         | е) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ |
| 7. $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} =$ | ж) $-\cos x$                                 | 7. $\cos x = -1$ , $x =$                     | ж) $\frac{1}{2} \sin 2x$     |
| 8. $\cos(-\frac{\pi}{3}) =$                    | з) $\frac{1}{2}$                             | 8. $\sin(-\frac{\pi}{2}) =$                  | з) $-\operatorname{tg} x$    |
| 9. $\sin(-\pi) =$                              | к) $0$                                       | 9. $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$                  | к) $\frac{\sqrt{3}}{2}$      |

Відповіді:

1 варіант 1г, 2д, 3б, 4а, 5в, 6ж, 7е, 8з, 9к.

2 варіант 1е, 2ж, 3г, 4б, 5з, 6д, 7а, 8в, 9к.

Після його виконання учні виконують взаємоперевірку за готовими зразками. Кожна правильна комбінація (відповідність) оцінюється 0,5 бала. Загальна кількість балів за це завдання вписується до картки самоконтролю.

III. Формулювання теми, мети й задач уроку.

Мотивація навчальної діяльності учнів

Викладач повідомляє дітям, що тригонометричні функції застосовуються в науці та техніці, тому питання про розв'язування тригонометричних рівнянь досить актуально. На уроці будуть розглянуті способи розв'язування тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших за допомогою тригонометричних формул або винесенням спільного множника за дужки. Кожен учень повинен з'ясувати для себе міру компетентності з метою подальшого відпрацювання теми.

Формулюється тема, мета та епіграф уроку: «Краса і багатство тригонометрії – це її формули. Всі вони використовуються при розв'язуванні рівнянь».

Викладач пропонує дітям активно попрацювати, бо успіх роботи на уроці буде залежати від праці й внеску кожного з них, радить бути уважними, дружними й толерантними.

IV. Актуалізація опорних знань

Учні розбиваються на три групи. Викладач пропонує усно виконати тестові вправи, використовуючи метод «Мікрофон», який учні передають із групи в групу. Учень, який дав правильну відповідь, набирає 0,5 бала і записує його до картки самоконтролю.

Виконання тестових завдань:

1. Назвати значення  $a$ , при яких рівняння  $\sin t = a$  має:

а) має один корінь;

б) жодного кореня;

в) нескінчену множину коренів.

2. Які з наведених тригонометричних рівнянь є найпростішими, а які ні і чому:

а)  $2\cos x = -1$ ;

б)  $\sin x = 1$ ;

в)  $4\operatorname{tg} x = 3$ ;

г)  $\operatorname{ctg} 2x = 0$  ?

3. Яке з наведених рівнянь не має розв'язків:

а)  $\sin x = 3$ ;

б)  $\operatorname{tg} x = 5$ ;

в)  $\cos x = 5$ ;

г)  $\operatorname{ctg} x = -10$ ?

4. Коренем рівняння  $\operatorname{tg} x = a \in \mathbb{R}$  є  $t = \dots$ .

5. Яка рівність є правильною:

а)  $\cos(-x) = \cos x$ ;

б)  $\arcsin(-x) = \arcsin x$ ;

в)  $\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x$ ?

6. Розв'язати рівняння:  $\sin x = \frac{1}{2}$

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos^2 b - \cos 2b = -\sin^2 b;$$

$$2\sin x \cos x = \sin 2x;$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1.$$

V. Засвоєння знань і вмінь

Викладач нагадує учням, що з шкільного курсу алгебри вони знають, що зведене квадратне рівняння можна розв'язати двома способами: за допомогою дискримінанта або за теоремою Вієта. Тригонометричні рівняння теж можна розв'язувати різними способами. Звертає увагу дітей на висловлювання: «Якщо

результат не залежить від способу розв'язування – це математика, а якщо залежить – це бухгалтерія».

Перед нами стоїть задача – показати знання та вміння з розв'язування тригонометричних рівнянь різних типів:

Учням пропонується самостійно розв'язати в зошитах перші три рівняння з подальшою перевіркою (навички самоконтролю) за готовими зразками.

$$1. \sin \frac{x}{5} = -1;$$

$$2. \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x - 1 = 0;$$

$$3. 2 \cos x + 3 = 0;$$

$$4. \sin 4x - \sin 2x = 0;$$

$$5. \sin^2 x = 0.25;$$

$$6. \sin 7x + \sin 33 = 3 \cos 2x;$$

$$7. \sin \frac{x}{5} = -1;$$

$$8. \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x - 1 = 0;$$

$$9. 2 \cos x + 3 = 0.$$

Якщо учні виконали всі три рівняння правильно, то записують до картки самоконтролю – 3 бали.

Проблемні запитання:

Чи є наступне четверте рівняння найпростішим тригонометричним? Як його розв'язати?

Йде колективне обговорення, після якого рівняння  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$  розв'язується учнем біля дошки (за необхідності з коментарем).

Пошукова робота.

Далі викладач пропонує розв'язати рівняння  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

Як розв'язати це рівняння?

Чи розв'язували ви колись подібне?

Учні надають свої пропозиції щодо його розв'язування. Викладач надає можливість учням вибрати один із запропонованих алгоритмів.

Алгоритм розв'язування рівняння  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

1. спосіб:

- З'ясувати чи є дане рівняння найпростішим тригонометричним.
- Застосувати формулу пониження ступеня  $\sin^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .
- За допомогою тотожних перетворень звести до

найпростішого тригонометричного рівняння.

- Записати відповідь.

2 спосіб:

- Ввести нову змінну  $\sin x = t$  і звести дане рівняння до алгебраїчного.
- Пригадати властивості квадратного кореня.
- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.
- Записати відповідь.

Робота в парах. Вибравши алгоритм, учні розв'язують дане рівняння в зошитах. Викладач слідкує за їх роботою.

Відповіді учні записують на дошці та порівнюють результати отримані при розв'язуванні різними способами. Далі діти здійснюють самоконтроль за готовим розв'язанням.

Правильна відповідь оцінюється в два бали.

Робота в малих групах.

Для розв'язування наступного рівняння  $\sin 2x - \sin x = 0$  учні об'єднуються в групи (по 4 чол.).

Пошукова робота. Викладач надає можливість учням скласти алгоритм одного з способів розв'язування рівняння, використовуючи підказку та розв'язати його. Записи ведуться на окремих аркушах. Вибір правильного алгоритму – 0,5 бал, правильно розв'язане рівняння – 2,5 бали.

Скласти алгоритм розв'язування рівняння  $\sin 4x - \sin 2x = 0$  двома способами.

- Застосувати формулу синуса подвійного кута.
- Винести спільний множник за дужки.

- За допомогою тотожних перетворень звести до найпростішого тригонометричного рівняння.
- Записати відповідь.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.
- Застосувати формулу перетворення суми(різниці) тригонометричних функцій у добуток.
- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.

Представники груп записують відповіді на дошці. Перевіряється розв'язання за готовими зразками. Учні груп, які отримали правильні відповіді, записують до карток самоконтролю відповідні бали.

Алгоритм розв'язування рівняння  $\sin 4x - \sin 2x = 0$

1-й спосіб:

- Застосувати формулу синуса подвійного кута.
- Винести спільний множник за дужки.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.
- За допомогою тотожних перетворень звести до найпростішого тригонометричного рівняння.
- Записати відповідь.

$$\sin 4x - \sin 2x = 0;$$

$$2\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0;$$

$$\sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0;$$

$$\sin 2x = 0 \text{ або } 2\cos 2x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \text{ або } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2-й спосіб:

- Застосувати формулу перетворення суми(різниці) тригонометричних функцій у добуток.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.

- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.
- Записати відповідь.

$$\sin 4x - \sin 2x = 0;$$

$$2\sin \frac{4x-2x}{2} \cos \frac{4x+2x}{2} = 0;$$

$$2\sin x \cos 3x = 0;$$

$$\sin x = 0 \text{ або } \cos 3x = 0;$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \text{ або } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далі викладач разом з учнями обговорюють спосіб розв'язування рівняння  $\cos 9x + \cos 5x = \sqrt{3} \cos 2x$ . Учні, по черзі, виходять до дошки і записують кожен етап розв'язання (при необхідності його коментують).

#### VI. Домашнє завдання.

Повторити формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Розв'язати рівняння № 8, 9, 4 (застосувати формулу додавання).

Творче завдання.

Скласти два тригонометричних рівняння, подібних до № 5, 6. Умову та розв'язання записати на окремих аркушах.

#### VII. Підсумок уроку

1. Учні обчислюють кількість балів за картками самоконтролю та віддають їх викладачеві.

2. Відповідають на запитання:

1) Про що ви дізналися на уроці?

2) Які способи розв'язування тригонометричних рівнянь ви запам'ятали?

3) Під час виконання яких завдань ви відчули труднощі?

3. Рефлексія.

Якщо ви не той, хто на вершині, це не значить, що ви той, хто внизу.

Учні малюють в зошитах ескіз гори. Позначають своє місцезнаходження до вершини гори, яке відповідає рівню отриманих на уроці знань.

Дякую за співпрацю та старання!

Матеріали до уроку узагальнення і систематизації знань та реалізації міжпредметних зв'язків теми подано у додатку П.

Для відпрацювання предметних математичних компетентностей з теми слід запропонувати наступну систему вправ на розв'язування тригонометричних рівнянь (дод. Р).

Також пропонуємо варіанти завдань тематичної атестації

Варіант 1

- 1)  $\sin x \cos x + \cos x \sin 2x = 0$ ;
- 2)  $\sin 3x + \sin x = 0$ ;
- 3)  $\sin x + \cos 2x = -2$ ;
- 4)  $5(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x) + 7 = 0$ .

Варіант 2

- 1)  $\cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x = 0,5$ ;
- 2)  $\cos 10x + \cos 12x = 0$ ;
- 3)  $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1$ ;
- 4)  $3 \sin^2 \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) + 3 \sin^3 [\cos x - \sin x \cos^2 x - \sin^2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cos x] = 0$

Завдання теми «Тригонометричні рівняння нерівності та системи» зустрічаються серед завдань ЗНО, тому важливо надати необхідну допомогу учням у повторенні теми під час підготовки до ЗНО (дод. С).

Також на етапі підготовки учнів до складання ЗНО слід звернути увагу на вміння виділяти типи запропонованих тригонометричних рівнянь, тому доречно запропонувати «Шпаргалку – Основні типи тригонометричних рівнянь», яка містить описання рівнянь певного типу і приклади цих рівнянь (дод. Т).

У рівняннях, що розв'язуються розкладанням на множники усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку, використовуючи всі відомі способи розкладання на множники, а саме: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення, штучні способи та використання тригонометричних

формул. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток кількох співмножників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому втрачають смислу.

Деякі тригонометричні рівняння під час перетворень можуть бути зведені до рівності тригонометричних функцій. Такі рівняння розв'язуються на основі рівності однойменних тригонометричних функцій.

1) Для того, щоб синуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) Для того, щоб косинуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3) Для того, щоб тангенси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо одночасне виконання двох умов:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Підсумовуючи, слід відмітити, що розробляючи методичні основи формування компетентностей учнів під час навчання теми «Тригонометричні рівняння» у змісті навчання передбачалося формування предметних математичних компетентностей учнів з теми, а різноманітними формами пред'явлення змісту забезпечується формування ключових компетентностей.

### РОЗДІЛ 3

## НАПРЯМИ УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» є однією з найскладніших тем шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Учням досить важко обрати правильний спосіб розв'язання того чи іншого тригонометричного рівняння та нерівності. Вони допускають значну кількість помилок, тому важливо виконати ретельний аналіз кожної помилки. Ефективним засобом в даному випадку можуть стати програмні продукти, зокрема такі, як: Microsoft Power Point, Derive, Gran1, Mathcad, TEST-W.

Power Point – це додаток до Microsoft Office для Windows та призначений для створення і редагування довільної презентації, що надають можливість поєднувати подання як аудіо- так і візуальної інформації. Програма для створення презентацій Microsoft Power Point є універсальним видом наочності і може бути застосованою у будь-якому класі на уроці будь-якого типу. Та найефективнішою є підготовка та використання презентацій на таких етапах вивчення як уроки-лекції для пояснення нової теми, де учні не тільки слухають, продивляються інформацію на екранах, конспектують, а й відповідають на запитання, розв'язують задачі за наведеним зразком; як практичні заняття для виконання тестових завдань з наступною появою правильної відповіді після його виконання.

Урок-лекція з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» з використанням презентації передбачає, що пояснення учителя супроводжується інформацією на слайдах, що є не тільки яскравою динамічною ілюстрацією, а й способом фіксації найсуттєвішого у новому матеріалі (рис.3.1).

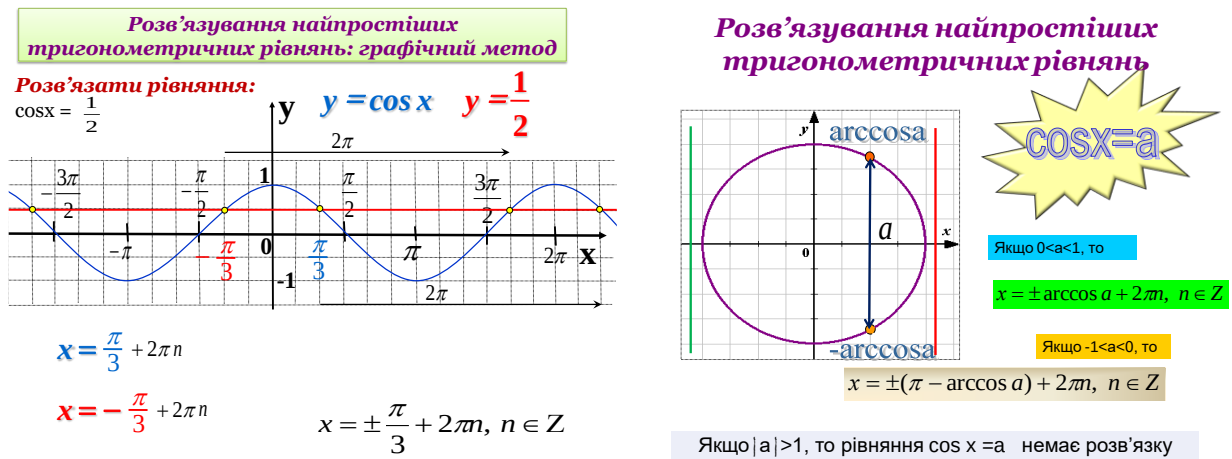


Рис. 3.1. Приклад слайдів пояснення теоретичного матеріалу з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності»

Під час уроку-лекції вчитель може представити на слайдах і приклад розв'язування тригонометричного рівняння чи нерівності, при цьому вчитель перший приклад пояснює сам (рис.3.2), а для другого – залучає учнів до пояснень за готовим малюнком (рис.3.3).

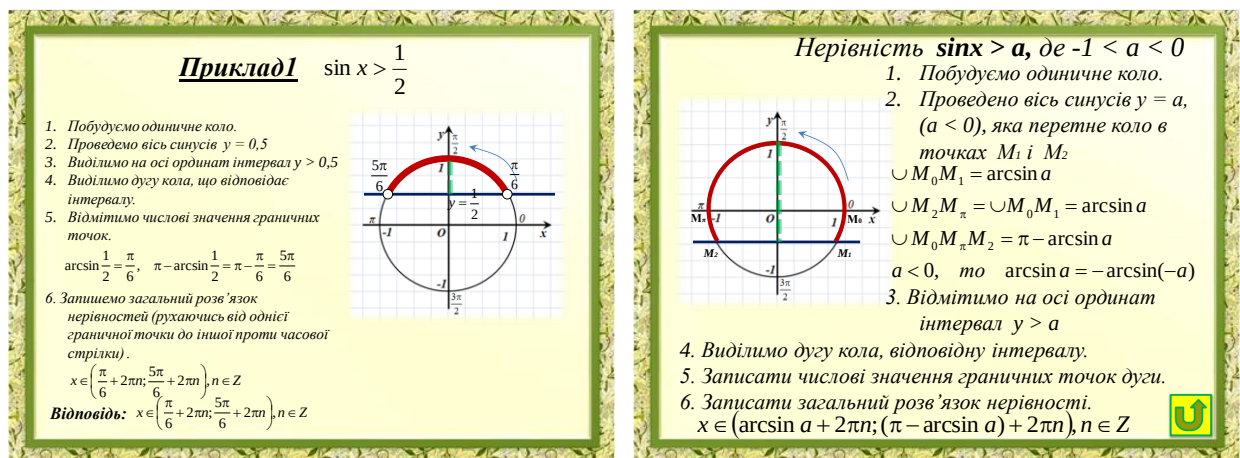


Рис. 3.2. Приклад слайду приклад розв'язування тригонометричного рівняння чи нерівності

При цьому слайди з завданням розв'язати вправи можуть супроводжуватись підказками та подальшим слайдом з правильною відповіддю.



### Розв'яжіть вправи:

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

#### Розв'язання

Згідно з формулою  $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  маємо:

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ , то маємо:  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь:  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$



Розв'язати рівняння:  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ВІРНО!

2  $x = \pm \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

ПОДУМАЙ!

3  $\emptyset$

ПОДУМАЙ!

4  $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ПОДУМАЙ!

5  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ПОДУМАЙ!



**4** **Розв'яжіть нерівність**

**Розв'язання**

$$\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x \in \left[ \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$

**Відповідь:**  $x \in \left[ \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

**Підказка**  
**Таблиця**

|                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$     |
| $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  |
| $\sin x \geq \frac{1}{2}$      | $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$    |
| $\sin x > 0$                   | $\sin x \geq 1$                   |
| $\sin x > -1$                  | $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Рис. 3.3. Приклади слайдів завдань з розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей

Досить ефективно використовувати слайди для проведення тестування з наступною появою правильних варіантів відповідей після їх виконання (рис. 3.4). На екран проектується тест, після виконання якого учні обмінюються зошитами і здійснюють взаємоперевірку.

9. Розв'яжіть рівняння

$$\sin x - \cos x = 0$$

А)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$       Б)  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

В)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$       Г)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д)  $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

**Відповідь вірна**

наступний

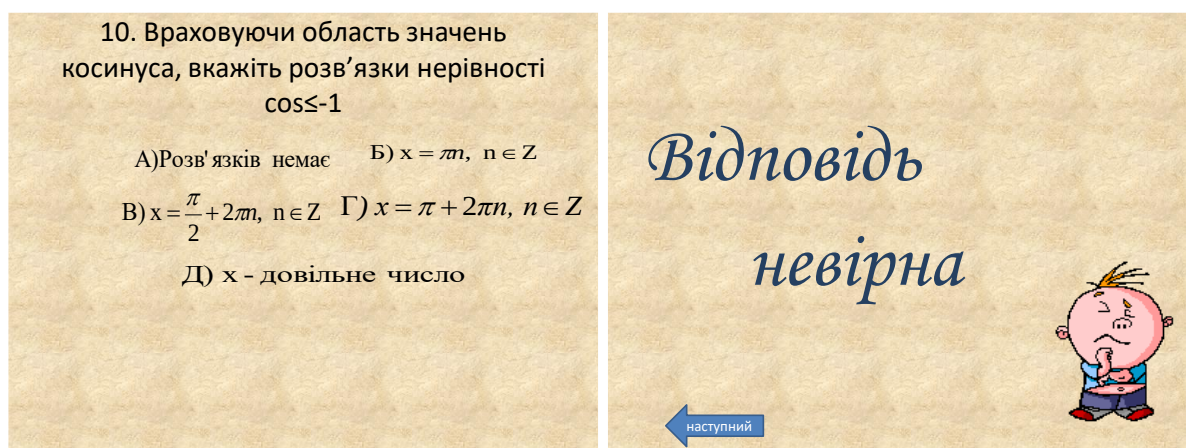


Рис. 3.4. Приклади слайдів з практичного заняття у вигляді тестування з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності»

Систематичне використання комп'ютерних презентацій на уроках з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності», окрім підвищення ефективності засвоєння теми також знімає актуальне питання витратити шкільні ресурси для придбання наочності, зокрема традиційних таблиць, плакатів тощо.

У процесі розв'язування тригонометричних рівнянь можуть виконуватись перетворення, що призводять до появи сторонніх коренів чи втрати коренів. У такому разі необхідно виконати відбір коренів тригонометричного рівняння, саме на цьому етапі учні допускають значну кількість помилок. Тому доцільно разом з учнями виконати графічну перевірку розв'язання даного рівняння за допомогою Gran1. Зауважимо, **Gran1** – це програма призначена для графічного аналізу функцій. Основні функціональні можливості програми: побудова графіків функцій, обчислення значень функції в заданих точках, графічне розв'язання рішення рівнянь, систем рівнянь, нерівностей і систем нерівностей.

Розглянемо на приклади можливості Gran1 для вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» - розв'язок нерівності  $\sin x > \frac{1}{2}$  за допомогою програми Gran1 (рис.3.5).

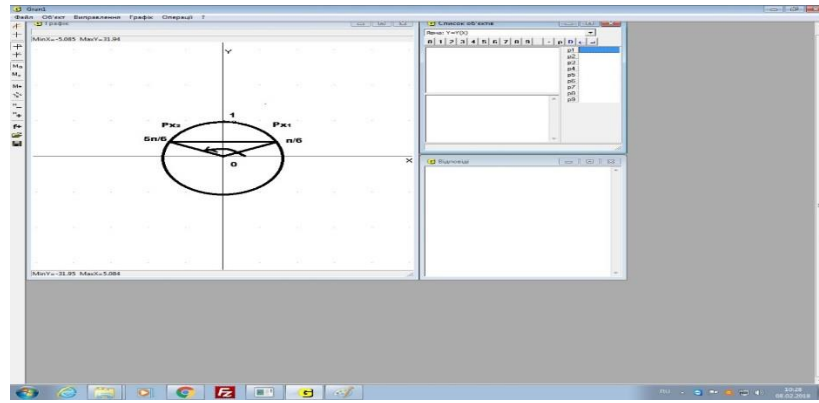


Рис.3.5. Розв'язок тригонометричної нерівності з допомогою програми Gran1

Оскільки  $\sin x$  — це ордината відповідної точки  $P_x$  одиничного кола, то при всіх значеннях  $x$ , які задовольняють даній нерівності, точка  $P_x$  має ординату, більшу за  $\frac{1}{2}$ . Усі такі точки на одиничному колі лежать вище за пряму  $y = \frac{1}{2}$  (вони зображені на рисунку синьою дугою  $P_{x_1}P_{x_2}$  без крайніх точок, оскільки в крайніх точках  $\sin x = \frac{1}{2}$ , а не більший за  $\frac{1}{2}$ ). Якщо, записуючи відповідь, рухатися проти годинникової стрілки, то точка  $P_{x_1}$  буде початком дуги  $P_{x_1}P_{x_2}$ , а точка  $P_{x_2}$  — її кінцем. Спочатку запишемо відповідь на одному періоді (нагадаємо, що для синуса період дорівнює  $2\pi$ ). Для точок  $P_x$  виділеної дуги  $x_1 < x < x_2$ . Оскільки точка  $P_{x_1}$  знаходиться в правій півплощині, то можна взяти  $x_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ . Тоді  $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ . Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ . Через період  $2\pi$  значення синуса повторюються, отже, всі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду  $2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Одержуємо відповідь:  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Для розв'язування нерівності  $\sin x > \frac{1}{2}$  можна скористатися також графіками функцій  $y = \sin x$  та  $y = \frac{1}{2}$  (рис.3.6).

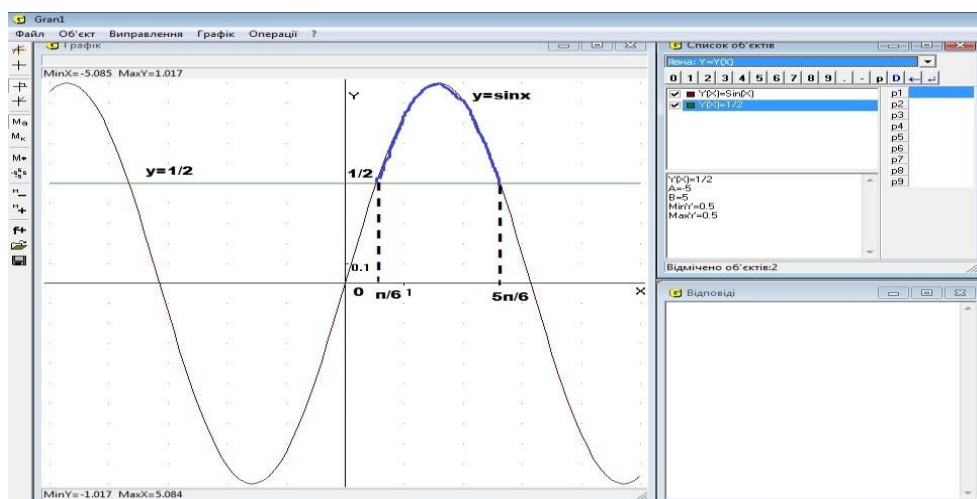


Рис.3.6. Розв'язок тригонометричної нерівності з допомогою програми Gran1

Розв'язками нерівності  $\sin x > \frac{1}{2}$  будуть ті і тільки ті значення  $x$ , для яких відповідні точки графіка функції  $y = \sin x$  знаходяться вище прямої  $y = \frac{1}{2}$  (на рисунку відповідні частини графіка функції виділено синіми лініями).

Щоб знайти абсциси точок перетину цих графіків, досить розв'язати рівняння  $\sin x = \frac{1}{2}$  ( $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ). Враховуючи періодичність функції  $\sin x$  ( $T = 2\pi$ ), досить записати розв'язок заданої нерівності на одному періоді. На відрізку довжиною  $2\pi$  можна взяти, наприклад, такі абсциси точок перетину графіків функцій  $y = \sin x$  і  $y = \frac{1}{2}$ :  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{5\pi}{6}$  (усі інші абсциси точок перетину відрізняються від них на  $2\pi k$ ). Тоді на одному періоді розв'язками заданої нерівності є:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$  (абсциси виділених точок графіка  $y = \sin x$ ). Усі інші розв'язки заданої нерівності одержуються додаванням до знайдених чисел виду  $2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Знову одержуємо відповідь:  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Графічно розв'язок.

Використання програми Gran1 дає можливість значно інтенсифікувати процес практичного закріплення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності».

Для практичних занять з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» також може бути рекомендована програма Derive (з використанням послуги *soLve*). Загалом, дана програма Derive призначена для розв'язування досить значного кола математичних задач – відшукування розв'язків рівнянь в числових і буквених виразах, границь функцій, звичайних і частинних похідних різних порядків, розкладу функції в ряд Тейлора, невизначених та визначених інтегралів різної кратності зі сталими та змінними межами, виконання операцій над векторами та матрицями, визначення числових характеристик статистичних вибірок, графічних побудов у двовимірному і тривимірному просторах тощо. Крім того, виконуються спрощення виразів алгебраїчно з використанням досить загальних перетворень, обчислення значень виразів з вказаною точністю та ін.

При розв'язуванні найпростіших тригонометричних рівнянь виду  $\sin(x) = a$ ,  $\cos(x) = a$ ,  $\operatorname{tg}(x) = a$ ,  $\operatorname{ctg}(x) = a$  за допомогою програми Derive подаються головні розв'язки цих рівнянь у наступному вигляді (рис. 3.7).

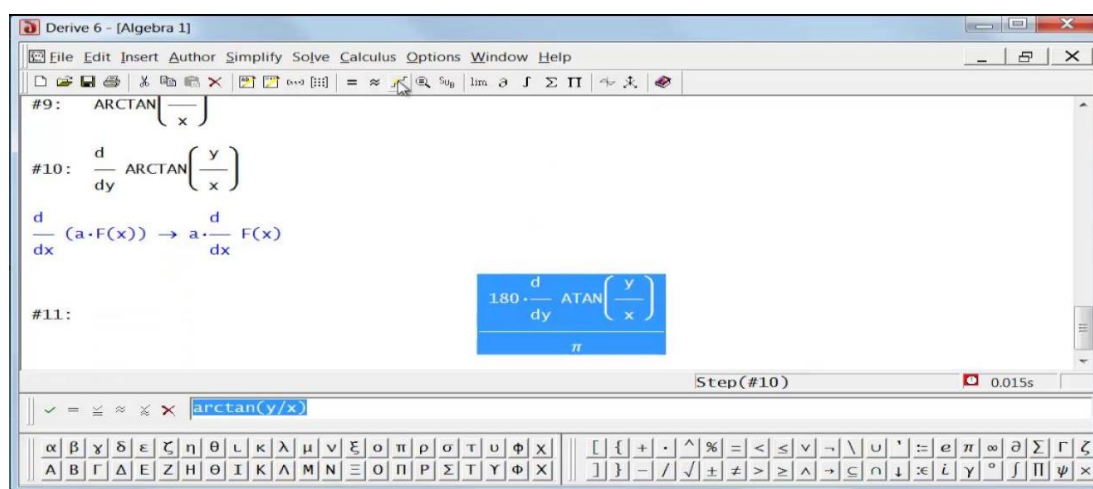


Рис. 3.7. Розв'язок найпростіших тригонометричних рівнянь з допомогою програми Derive

Інші розв'язки можна отримати, використовуючи відповідні графічні побудови або ж враховуючи властивості функцій  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $\operatorname{ctg}(x)$  (парність чи непарність, періодичність, величину періоду, відомості про межі, в яких слід визначити значення  $x$ ). Якщо програма не знаходить розв'язків рівняння, на екран виводиться вихідне рівняння в незмінному вигляді.

Розглянемо застосування програми Derive за більш складними рівняннями. Знайти розв'язки рівняння  $\sin(x) + \cos(2x) = 1$ .

Звернення до послуги *soLve* не дає бажаних результатів, хоч, очевидно, рівняння має розв'язки. Якщо в підпункті *Trigonometry* пункту *Manage* встановити: *Direction: Expand* і *Toward: Sines*, вказаний вираз набуде вигляду  $\sin x + 1 - \sin^2 x = 1$  (див. рис.), однак подальше звернення до послуги *soLve*, послуг *Simplify* чи *Expand* бажаних результатів не дає. В такому разі слід позначити  $\sin x$  через, наприклад,  $v$  і ввести до розгляду рівняння виду  $-2v^2 + v + 1 = 1$ . Після звернення до пункту *soLve* одержимо:  $v = \frac{1}{2}, v = 0$ . Розв'язуючи тригонометричні рівняння  $\sin(x) = 0$  та  $\sin(x) = \frac{1}{2}$ , одержимо розв'язки вихідного тригонометричного рівняння:  $x = 0 + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

У попередньому прикладі було введено заміну  $v = \sin(x)$  (після того, як  $\cos(2x)$  було подано через  $\sin x$ :  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ ).

Часто зручно тригонометричне рівняння звести до алгебраїчного, скориставшись заміною  $v = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Тоді

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - v^2}{1 + v^2},$$

$$\sin(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2v}{1 + v^2}.$$

Розв'язавши (якщо вдається) отримане алгебраїчне рівняння відносно  $v$  і скориставшись оберненою заміною  $x = 2\arctg(v)$ , можна знайти розв'язок вихідного тригонометричного рівняння.

Ще одним дієвим програмним продуктом для практичного засвоєння теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» є MathCad. Для аналітичного розв'язання рівнянь в системі MathCad є спеціальний оператор **Solve** (**Розв'язати**) панелі Symbolic (Символьні). При цьому робоче вікно MathCad має наступний вигляд (рис.3.8)

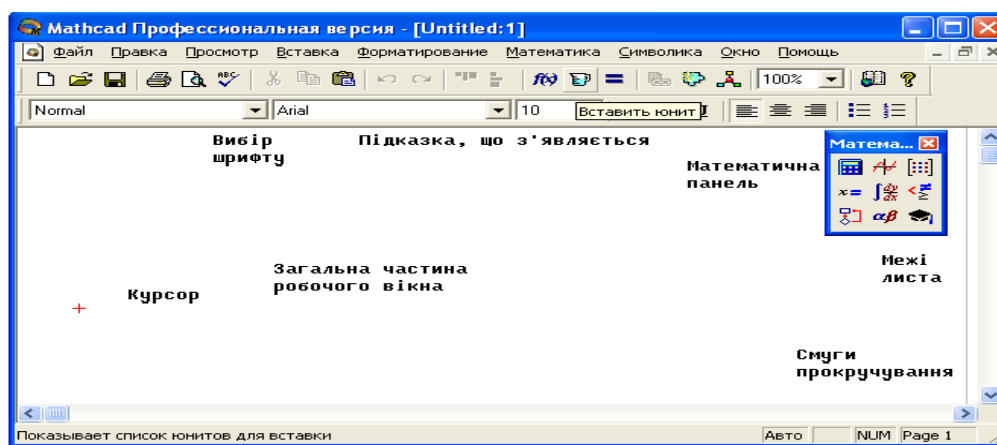


Рис. 3.8. Рабочее окно MathCad

Для того щоб знайти корені рівняння за допомогою оператора Solve потрібно:

1. Ввести оператор Solve з панелі Symbolic.

2. В лівому маркері задати вид рівняння, яке потрібно розв'язати. В якості „=” потрібно ввести знак рівності з панелі Boolean (Ctrl+”=”). Також в лівий маркер можна вводити ім'я функції. У цьому випадку програма знайде нулі функції. Форма запису рівняння через функцію зручне у випадку, коли вона має велику довжину.

3. В правий маркер ввести змінну, відносно якої потрібно виконати розв'язання рівняння. Якщо рівняння має декілька розв'язків, то оператор Solve подає результат у вигляді вектора (матриці-стовпця).

Як відомо, більшість тригонометричних рівнянь мають нескінченну кількість коренів, які записуються за допомогою спеціальних виразів, наприклад: корені рівняння  $\sin(x) = 0$  мають вигляд  $\pi + \pi k$ , (де  $k \in \mathbb{Z}$ ). MathCad знаходить корені лише на проміжку одного періоду функції, заданої в рівнянні. Також, MathCad досить часто робить помилки у розв'язанні тригонометричних рівнянь, особливо, якщо таке рівняння містить параметри. Тому на практиці краще будувати графіки таких рівнянь, або намагатися максимально спростити рівняння.

Розглянемо приклад розв'язання тригонометричного рівняння за допомогою MathCad - розв'язати рівняння  $\cos(x)=x+0,2$  за допомогою функції root (рис. 3.9).



Рис. 3.9. Розв'язок тригонометричного рівняння за допомогою MathCad

Як відомо, педагогічна діагностика може здійснюватися за допомогою тестування. Для цього можна скористатись контрольно-діагностичними програмою Test-W.

Для поточного оцінювання засвоєння теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» можна використовувати програму створення тестів Test-W. Вихідний тест може мати будь-яку кількість питань (рекомендується від 30 до 50 і більше). З вихідного тесту методом випадкового вибору послідовно виводиться задана кількість питань (наприклад, 25). Таким чином, кожен учень одержує свій відмінний від сусідів набір питань, що забезпечує індивідуалізацію і об'єктивність оцінки. На кожне питання тесту пропонується 5 варіантів відповідей, серед яких від одного до трьох вірних (рис.3.10). Як питання, так і варіанти відповідей можуть мати вигляд тексту, формули, таблиці або рисунку.

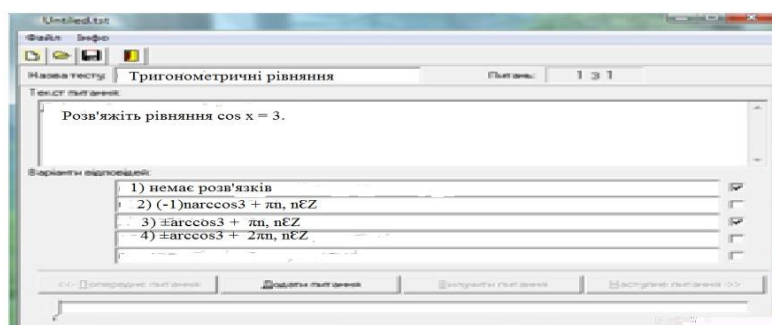


Рис.3.10. Створення тесту з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» за допомогою програми Test-W

Оцінка за поточне тестування в програмі Test-W виставляється відповідно до вибраної шкали згідно з відсотком правильних відповідей: 1) запитання з однією правильною відповіддю: 0 або 1 бал; 2) запитання з двома правильними відповідями: 0; 0,5 (одна правильна відповідь) або 1 бал; 3) запитання з трьома правильними відповідями: 0; 0,33 (одна правильна відповідь); 0,67 (дві) або 1 бал.

Загальна оцінка за тест виставляється автоматично відповідно до вибраної шкали згідно з відсотком правильних відповідей. Оцінка 12 балів не ставиться, оскільки комп'ютерні тести не містять творчих завдань.

Для проведення тестування потрібно виконати такі дії: 1) завантажити файл Test-W2.exe одним із способів, що надає Windows; 2) натиснути кнопку «Відкрити тест»; 3) у вікні діалогу знайти та відкрити папку «Інформатика», а потім папку класу; 4) знайти та відкрити файл потрібного тесту (наприклад, «Тема 3-7») – з'явиться діалогове вікно «Авторизація»; 5) ввести з клавіатури своє прізвище, ім'я та клас, натиснути кнопку «ОК» – розпочнеться тестування.

Програма Test-W2 послідовно виводить на екран запитання вибраного тесту. Учні треба вказати правильні, на його думку відповіді і перейти до наступного питання. Час відповіді на тест обмежений (рис. 3.11)

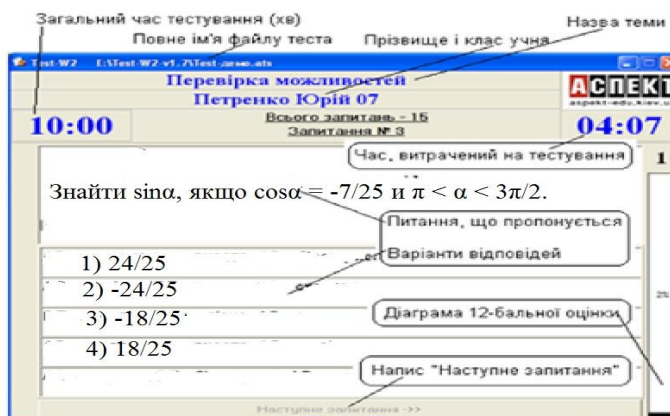


Рис.3.11. Вікно з поточного тестування з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» в програмі Test-W

Послідовність виведення на екран питань із тесту, розташування варіантів відповідей на сусідніх комп'ютерах різна. Отже, кожен учень одержує відмінну від сусідів послідовність запитань і варіантів відповідей. Ця відмінність тим

більша, чим більша кількість завдань у банку цього тесту. Наприклад, тест має 32 запитання, а відповіді потрібно на 20. Варіантів із 32 елементів по 20 може бути безліч не тільки з різною послідовністю питань, а й з відмінностями в розташуванні відповідей (рис. 3.12).

Учневі потрібно послідовно клікнути 1, 2 або 3 варіанти відповідей, які він вважає правильними, доки не стане доступною кнопка «Наступне запитання» (почорніє напис). Для переходу до наступного запитання потрібно клікнути цю кнопку (рис.3.12).

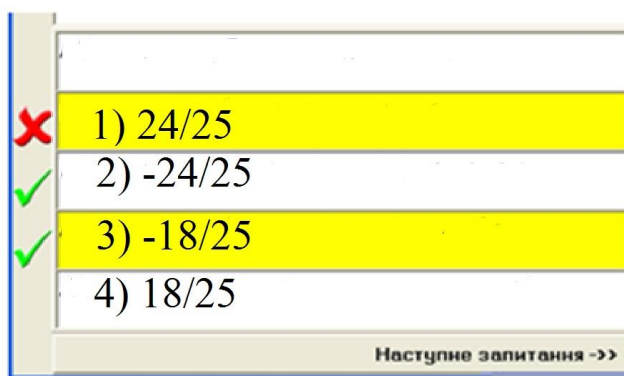


Рис. 3.12. Порядок переходу на наступного питання тестового опитування з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» в програмі Test-W

Якщо під час підготовки тесту у вікні редактора був встановлений прапорець «Діагностика», варіанти відповіді будуть негайно позначатися на полі ліворуч значками: ✓ – правильно; ✗ – неправильно.

Праворуч на екрані знаходиться діаграма, яка показує відсоток правильних відповідей від встановленої кількості завдань. Відповідно до цього відсотку виставляється оцінка за вибраною шкалою. Оцінка і це відношення з кожною правильною відповіддю учня збільшуються, доки не набудуть остаточного значення після відповіді на останнє запитання.

Питання, які залишилися без відповіді за браком часу, зараховуються як такі, на які отримано неправильні відповіді. Відповідно зменшується відсоток правильних відповідей та оцінка.

Після відповіді на останнє запитання замість напису «Наступне питання» з'явиться «Натисніть, щоб одержати кінцевий результат...», після кліку на ньому

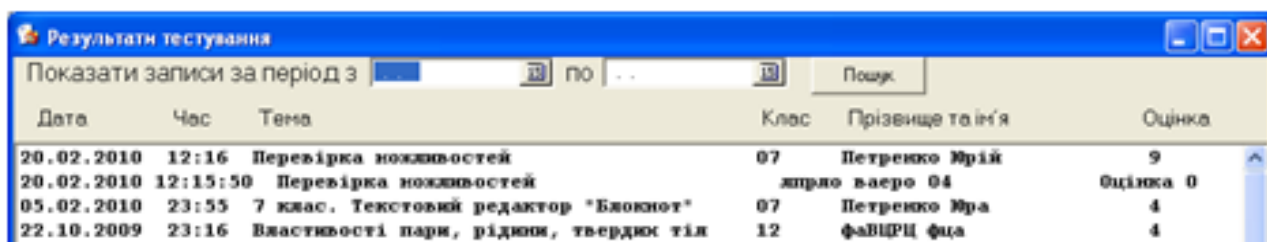
з'являється вікно з результатами тестування: кількість правильних відповідей, допущених помилок, шкала оцінювання та оцінка в балах.

Після проходження тесту прізвище, ім'я та клас учня, дата, час і одержана оцінка заносяться у протокол.

Після натискання на кнопку «Повідомте результат учителю!» всі вікна закриваються. Для нового тестування потрібно знову завантажити програму Test-W2 і повторити описані вище дії.

Для перегляду результатів тестування потрібно: 1) завантажити файл Test-W2.exe; 2) натиснути кнопку «Результати» – відкриється протокол результатів проведених тестувань наведеного вигляду; 3) після перегляду закрити вікно.

Вікно для перегляду результатів тестування на тему «Тригонометричні рівняння та нерівності» в програмі Test-W має наступний вигляд (рис. 3.13)



| Дата       | Час      | Тема                                    | Клас | Прізвище та ім'я | Оцінка   |
|------------|----------|-----------------------------------------|------|------------------|----------|
| 20.02.2010 | 12:16    | Перевірка можливостей                   | 07   | Петренко Юрій    | 9        |
| 20.02.2010 | 12:15:50 | Перевірка можливостей                   | 07   | Петренко Юрій    | Оцінка 0 |
| 05.02.2010 | 23:55    | 7 клас. Текстовий редактор "Блокнот"    | 07   | Петренко Юрій    | 4        |
| 22.10.2009 | 23:16    | Властивості пари, рідності, твердих тіл | 12   | Петренко Юрій    | 4        |

Рис. 3.13. Вікно результатів тестування на тему «Тригонометричні рівняння та нерівності» в програмі Test-W

Якщо тестування завершено примусово, то у протокол заносяться оцінка 0 балів.

Отже, використання інформаційно-комунікаційних технологій на навчальних заняттях з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» сприяють активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, швидкому та ефективному засвоєнню ними навчального матеріалу, формуванню ключових та предметних компетенцій учнів.

## ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене розробці методики вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» на базовому та профільному рівнях підготовки учнів середньої школи, спрямовано на винайдення шляхів формування компетентностей учнів у процесі навчання теми

Тригонометричні рівняння й нерівності займають одне із центральних місць у курсі математики середньої та старшої школи, як по змісту навчального матеріалу, так і по способах навчально - пізнавальної діяльності, які можуть і повинні бути сформовані при їхньому вивченні й застосовані до розв'язання великої кількості задач теоретичного й прикладного характеру.

Навчання учнів профільної школи розв'язуванню тригонометричних рівнянь та нерівностей доцільно організувати за трьома тематичними напрямками: 1) найпростіші тригонометричні рівняння; 2) типи тригонометричних рівнянь, які розв'язуються за методами; 3) системи тригонометричних рівнянь; 4) найпростіші тригонометричні нерівності. До кожного з цих напрямів розроблено стандартні методики навчання та розв'язку реалізації.

Вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей у профільній школі здійснюється у два етапи. На першому здійснюється початкове ознайомлення з тригонометричними функціями гострого кута в курсі геометрії – це середня школа (8-9 клас), курс геометрія, а на другому відбувається систематизація і поглиблення знань про тригонометричні функції – це старша школа (10-11 клас), курс алгебри та початків аналізу (математики). Вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей сприяє забезпеченню практичної та прикладної спрямованості навчання математики, розвитку математичних здібностей і розширенню кругозору учнів.

Проаналізувавши програми на різних рівнях вивчення математики, ми бачимо значну різницю у кількості годин на вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей у курсі алгебри та початків аналізу. На рівні вивчення стандарту

– це 18 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 10 класу – 66 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу – 84 години. Це звісно зумовлено тим, що в програмах вивчення математики на різних визначено різні цілі та завдання.

Основними підручниками з вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» є П. Бевз і В. Г. Бевз «Математика - 10» (рівень стандарту), М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова «Математика, 10» (рівень стандарту), Нелін Є. П. «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (академічний та профільний рівень), А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (академічний, профільний рівень та з поглибленим вивченням математики). Проаналізувавши підручники на предмет вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей, можна зробити висновок, що теоретичний матеріал відповідає чинним навчальним програмам із математики. Всі проаналізовані підручники повністю охоплюють теоретичний матеріал.

У загальному вигляді методику навчання теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» можна звести до наступних етапів:

- 1) підготовчий;
- 2) формування умінь розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння;
- 3) вивчення тригонометричних рівнянь різних видів і методів їх розв'язування;
- 4) формування умінь розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності;
- 5) ознайомлення з тригонометричними нерівностями, які зводяться до найпростіших шляхом рівносильних перетворень, а також з тригонометричними нерівностями, які розв'язуються.

Зауважимо, що на підготовчому етапі учнів слід ознайомлювати з числовим колом; ввести поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса і навчити визначати їх значення на колі; вивчити тригонометричні функції числового і кутового аргументів, де необхідно детально викласти поняття

градусної та радіанної міри одного і того ж кута. Потім розглянути графіки функцій  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$ ,  $y=\operatorname{tg} x$ ,  $y=\operatorname{ctg} x$  і їх властивості. До кінця підготовчого етапу учні повинні засвоїти всі формули, які знадобляться надалі для розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Аналіз чинних програм та підручників для 10-11 класів в аспекті досліджуваної проблеми дав можливість з'ясувати особливості навчання теми на різних рівнях математичної підготовки учнів та розробити методику формування практичної компетентності учнів на базовому рівні підготовки у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь. Елементи методики подано як в основній частині роботи так і в додатках, розробки уроків різних типів, системи вправ з теми орієнтовані на формування ключових компетентностей учнів у процесі розв'язування тригонометричних рівнянь, передбачених програмою.

Розроблено методику формування ключових і предметних компетентностей учнів профільних класів у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем. Розроблено систему вправ як для відпрацювання предметних математичних компетентностей з теми так і для моніторингу рівня сформованих компетентностей.

З метою активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, швидкому та ефективному засвоєнню ними навчального матеріалу, формуванню ключових компетенцій школяра з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» доцільним є впровадження в навчальний процес . я інформаційно-комунікаційних технологій на навчальних. Основними програмними продуктами, що можуть бути використанні при навчанні теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» Microsoft Power Point, Derive, Gran1, Mathcad, TEST-W.

Інтегрування звичайного уроку з теми «Тригонметричні рівння та нерівності» з комп'ютером дозволяє вчителю перекласти частину своєї роботи на ПК, роблячи при цьому процес навчання більш цікавим, різноманітним, інтенсивним. Зокрема, стає більш швидким процес запису визначень, теорем та інших важливих частин матеріалу, тому що вчителю не доводиться повторювати текст кілька разів (він вивів його на екран), учневі не доводиться чекати, поки

вчитель повторить саме потрібний йому фрагмент. Він допомагає їм краще оцінити здібності і знання дитини, зрозуміти його, спонукає шукати нові, нетрадиційні форми і методи навчання, стимулює його професійний ріст. Застосування на уроці комп'ютерних тестів і діагностичних комплексів дозволить вчителю за короткий час отримувати об'єктивну картину рівня засвоєння матеріалу, що вивчається у всіх учнів і своєчасно його скоректувати. При цьому є можливість вибору рівня складності завдання для конкретного учня. Для учня же важливо те, що відразу після виконання тесту (коли ця інформація ще не втратила свою актуальність) він отримує об'єктивний результат із зазначенням помилок, що неможливо, наприклад, при усному опитуванні.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аналітична геометрія / О.А. Борисенко, Л.М.Ушакова. Харків : Основа, 1993. 192 с.
2. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень / С.П. Бабенко. Харків : Основа, 2011. 253 с.
3. Бардушкін В. Тригонометричні рівняння. Відбір коріння / В.Бардушкін, О. Прокоф'єв. *Математика*. 2005. №12. С. 23–27.
4. Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
5. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М.І. Бурда, Т.В. Колесник , Ю.І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с
6. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, І.О. Золотарьова. Харків : Вид-во «Ранок», 2010. 176 с.
7. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія : посіб. [для слухачів підгот. відділень та вступників до пед. ін-тів] / В.Д. Гетманцев, О.Ф.Саушкін. Київ : Либідь, 1994. 144 с.
8. Довідник з елементарної математики, механіки та фізики / Ред. С.Г. Максимовою. Київ : Наукова думка ,1996, 192 с.
9. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі. *Наука і освіта*. 2014. № 1. - С. 127-131. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/NiO\\_2014\\_1\\_29](http://nbuv.gov.ua/UJRN/NiO_2014_1_29).
10. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ: Генеза, 2018. 384с.

11. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10- го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. Київ: Генеза, 2018. 448 с.
12. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова. Київ : Центр навч.-метод. літератури, 2011. 112с.
13. Історія тригонометрії [Електронний ресурс]. URL: <https://www.turkaramamotoru.com/uk97-209105.html>
14. Кожушко Н.М. Доведення тригонометричних нерівностей. *Наукові та методичні засади математичної освіти*. 2014. № 1(6). С.25-30. URL: <https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/2259/1/Kozhushko%20N.%20M..pdf>
15. Македонська С.І. Побудова графіків тригонометричних функцій. *Математика*. 2003. березень (№12). С. 8–11.
16. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. Рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.
17. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
18. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 256 с.
19. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. Київ : Генеза, 2008. 312 с.
20. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Харків: 2001, 262 с.

21. Навчальна програма з математики (5 – 9 клас) для загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) класах загальноосвітніх навчальних закладів <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>

22. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8–9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf>

23. Навчальна програма з математики (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

24. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

25. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

26. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова / [2-ге вид., виправл. і доп]. Харків : Світ дитинства, 2006. 416 с.

27. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень / Є.П. Нелін. Харків: Гімназія, 2010. 416с.

28. Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв'язках. 10 клас / С.М. Перебийніс. Тернопіль: Мандрівець, 2014. 80 с.

29. Роганін О. М. Математика : Практичний довідник / О.М. Роганін, О.І. Каплун. Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. 416 с
30. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмач. Харків : Вид. група «Основа», 2011. 94 с.
31. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак – ЕКО, 2000. 512с.
32. Смоляков А. Н. Прийоми рішення тригонометричних рівнянь / А.Н. Смоляков, П.Ф. Севрюков. *Математика в школі*. 2004. № 1. С. 24– 26.
33. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики. 5–11 класи / Т. М. Сипченко. – 2-ге вид., перероб. і доп. Харьков : Видавництво «Ранок», 2011. 128 с.
34. Тематична атестація. Математика. 10 клас. – Тернопіль : СМП Астон, 2000. – 80 с.
35. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики : навчальний посібник / О.М. Титаренко. Харків : Торсінг, 2003. 368 с.
36. Токарева А. Тригонометричні нерівності. *Математика. Додаток до газети «Перше вересня»*. 2002. № 44.
37. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. Харків : Вид. група «Основа», 2010. 159 с.
38. Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії. *Математика в школах України*. 1993. №3. С. 45–50.
39. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. 272
40. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10 – 11 кл. серед. шк. / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. Київ: Зодіак – ЕКО, 2001. 608 с.