МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

Методика розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, в шкільному курсі математики

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, ІІ курсу, СОМ-24-1 групи,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Немировської Оксани Вікторівни

Науковий керівник Оксана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Гарант освітньо-професійної програми Микола СЕМКО, д.ф-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
вищої та прикладної математики
протокол від «29» 12 2025 № 7

Завідувач кафедри Оксана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Ірпінь – 2025

Реєстрація № 4 10.01.2026 Сенів І.В.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 13.01.2026
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 95 06.02.2026
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії:
(підпис) Н.М. Косева
(ініціали, прізвище)

Члени комісії:
(підпис) М.М. Сенько
(ініціали, прізвище)
(підпис) І.В. Сасків
(ініціали, прізвище)
(підпис) О.А. Дерев
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	28		Крова О.А.
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	9		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	47		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	10		Голова екз. ком. Іосєва К.М.
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	5		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	25		Члени комісії: Семко М.М. Скалєв І.В. Крова О.А.
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	8		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	48		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	95		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
95	A	5 (відмінно)	06.02.2026	Голова екз. ком. Іосєва К.М. Члени комісії: Семко М.М. Скалєв І.В. Крова О.А.

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

Анотація

Оксана Немировська. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ, ЩО МІСТЯТЬ ЗМІННУ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ, В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Магістерська робота присвячена дослідженню методики розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, в шкільному курсі математики. Робота аналізує існуючі підходи до викладання цієї теми, виявляє типові помилки учнів та пропонує вдосконалену методику, яка базується на поєднанні алгебраїчних та геометричних методів. Акцент робиться на візуалізації математичних понять та застосуванні сучасних освітніх технологій для покращення засвоєння матеріалу учнями. Результати дослідження можуть бути використані для підвищення ефективності навчання та успішності учнів при вивченні даної теми.

Ключові слова: освітній процес, учні, методика, розв'язання нерівностей з модулем, поглиблений курс математики, базова школа.

Abstract

Oksana Nemyrovska. METHODOLOGY FOR SOLVING INEQUALITIES CONTAINING A VARIABLE UNDER THE MODULUS SIGN IN THE SCHOOL MATHEMATICS CURRICULUM

This master's thesis is dedicated to the study of the methodology for solving inequalities containing a variable under the modulus sign in the school mathematics curriculum. The work analyzes existing approaches to teaching this topic, identifies typical student errors, and proposes an improved methodology based on a combination of algebraic and geometric methods. Emphasis is placed on the visualization of mathematical concepts and the application of modern educational technologies to improve students' understanding and mastery of the material. The results of the study can be used to enhance the effectiveness of teaching and improve student achievement in the study of this topic.

Keywords: educational process, students, methodology, solving inequalities with modulus, advanced mathematics course, basic school.

ЗМІСТ

ВСТУП 6

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ НЕРІВНОСТЕЙ 9

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З МОДУЛЕМ 22

2.1. Алгебраїчне та геометричне поняття модуля 22

2.2. Місце рівнянь та нерівностей з модулем у шкільному курсі математики 25

2.3. Методи розв’язування нерівностей з модулем 31

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЕМ» 39

ВИСНОВКИ 50

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 52

ВСТУП

Математика, як фундаментальна наука, відіграє ключову роль у розвитку інтелектуальних здібностей людини. Вивчення математики формує логічне мислення, аналітичні навички та здатність до абстрактного узагальнення. Шкільний курс математики, як перший етап математичної освіти, має за мету закласти міцну основу для подальшого навчання та застосування математичних знань у різних сферах життя.

Серед розділів шкільного курсу математики, що потребують особливої уваги, є тема рівнянь та нерівностей. Нерівності, як математичні вирази, що відображають співвідношення між величинами, мають широке застосування в різних галузях науки та техніки. Розуміння нерівностей є необхідним для розв'язання задач з геометрії, фізики, економіки та інших дисциплін.

Особливу складність у вивченні нерівностей становлять нерівності, що містять змінну під знаком модуля. Модуль числа, як абсолютна величина числа, вносить додаткові нюанси у розв'язання нерівностей, вимагаючи від учнів глибокого розуміння властивостей модуля та вміння застосовувати різні методи розв'язання.

Актуальність дослідження методики розв'язування нерівностей з модулем обумовлена кількома факторами. По-перше, ця тема є складною для засвоєння учнями, що призводить до значних труднощів у навчанні. По-друге, недостатня увага до теоретичних аспектів та обмежена кількість практичних задач у навчальних посібниках ускладнюють процес навчання.

Метою даного дослідження є розробка ефективної методики розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, з урахуванням вікових особливостей учнів та сучасних освітніх технологій. Для досягнення мети будуть розв'язані наступні **завдання**: аналіз існуючих методик розв'язування нерівностей з модулем; виявлення типових помилок учнів; розробка нових методичних прийомів; розробка системи вправ різного рівня складності.

Дослідження базується на аналізі наукової літератури з методики навчання математики, аналізі шкільних підручників та програм, а також на емпіричних даних, отриманих в результаті експериментальної роботи з учнями. Очікується, що результати дослідження дозволять вдосконалити методику викладання теми "Нерівності з модулем" та підвищити ефективність навчання учнів.

Наукова новизна дослідження полягає у розробці методики розв'язування нерівностей з модулем, яка враховує як теоретичні основи, так і практичні аспекти навчання. Практична значущість дослідження полягає у можливості використання розробленої методики вчителями математики для покращення якості навчання та досягнення кращих результатів у навчанні учнів.

Об'єктом дослідження є процес навчання розв'язуванню нерівностей з модулем учнів загальноосвітньої школи.

Предметом дослідження є методика розв'язування нерівностей з модулем, що враховує особливості сприйняття матеріалу учнями та забезпечує високий рівень засвоєння знань та умінь.

Дослідження проводилося в два етапи: теоретичний аналіз літератури та конструювання методики. На першому етапі було проведено аналіз існуючих методик викладання теми «Нерівності з модулем», виявлено типові помилки учнів та проаналізовано причини їх виникнення. На другому етапі було розроблено нову методику викладання, що враховує особливості сприйняття математичного матеріалу учнями та сучасні освітні технології.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що представлений матеріал може бути корисним як учням при підготовці до НМТ, так і вчителям для проведення уроків із відповідної теми чи організації курсів за вибором.

Апробація дослідження проводилась шляхом участі та публікації тез у рамках Всеукраїнської науково-практичної конференції «Функціонування соціально-економічної системи України: реалії та перспективи», яка відбулася у Львові 20 березня 2025 року.

Структура даної роботи побудована таким чином, щоб забезпечити логічну послідовність викладення матеріалу. Робота включає вступ, три основні розділи, а також підсумкові висновки і список використаних джерел. У її рамках детально розглядаються різноманітні методи розв’язання рівнянь та нерівностей, що містять модуль, а також практичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі на уроках математики. Завдяки такій організації роботи забезпечується комплексний підхід до вивчення теми та надається можливість глибше зрозуміти теоретичні аспекти і їх практичне впровадження.

Очікується, що результати даного дослідження внесуть свій вклад у вдосконалення методики навчання математики та сприятимуть підвищенню якості математичної освіти в Україні.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ НЕРІВНОСТЕЙ

Основним завданням навчання учнів змістової лінії нерівностей є засвоєння прийомів їх розв’язування (алгебраїчного та графічного), що виступають ефективними математичними інструментами для розв’язування різноманітних математичних задач, а також завдань із суміжних галузей наук.

Зміст цього розділу сприяє розвитку широкого спектра пізнавальних процесів, зокрема формуванню математичного мовлення, навичок самостійного навчання, вмінь алгоритмічного та абстрактного мислення, а також елементів творчості в процесі вирішення задач алгебраїчними методами [6].

Крім того, вивчення графічних способів розв’язування нерівностей допомагає розвивати просторову уяву. Навчання теми нерівностей рекомендується реалізовувати через три основні етапи:

- пропедевтичний (1-7(8) класи);
- основний (вивчення курсу алгебри в 9 класі за базовою програмою або у 8-9 класах для учнів із поглибленим вивченням математики);
- завершальний (10-11 класи профільної школи).

Пропедевтичний етап

Починаючи з першого класу, учням поступово вводять основні математичні поняття, такі як "більше" і "менше" (наприклад, 6 більше ніж 5, 7 менше ніж 8), а також "збільшити" і "зменшити". Діти засвоюють навички порівняння чисел у межах ста, орієнтуючись на їхній порядок розташування. Їх знайомлять із символами «=», «<», «>», навчаючи порівнювати числові вирази за допомогою різницевого підходу. Учні вчаться встановлювати відносини нерівності між числами та числовими виразами, які розраховуються через прості арифметичні дії. Ці навички активно тренуються на дидактичних матеріалах і прикладах з реального життя. На цьому етапі вперше вводяться числові

нерівності, такі як 5 < 6 або 8 > 7. Також під час вивчення одиниць вимірювання діти починають порівнювати довжини як у однакових, так і в різних типах одиниць вимірювання. У рамках теми "Вартість" школярів знайомлять із поняттями "дорожчий-дешевший", "найдорожчий-найдешевший", і вони набувають уміння порівнювати ціни через різницеве співставлення [14].

У другому класі навчання стає більш комплексним, переходячи до вирішення простих задач, пов'язаних зі збільшенням і зменшенням величин, а також із порівнянням через різницевий метод — все це на прикладах із реального життя. Учням пропонують завдання на порівняння числових виразів із дужками, виконання операцій віднімання з переходом через десяток, а також множення. Діти освоюють різницеве порівняння добутку двох множників із числом і вчаться розв’язувати складені математичні задачі, що включають відношення типу "на ... більше", а також задачі, побудовані на основі схематичних малюнків. Розширюється лінія "Вимірювання величин", де діти поглиблюють навички порівняння предметів за довжиною (у вертикальному чи горизонтальному положенні), масою, місткістю, часом, температурою тощо. Особливе місце займають задачі на порівняння значень у різних одиницях вимірювання. У темі "Вартість" формуються поняття "без решти", "достатньо грошей" та "недостатньо грошей".

Навчання в третьому класі представляє собою новий етап у розвитку математичних здібностей учнів, де значно зростає рівень складності. Цей період вирізняється активним формуванням фундаментальних навичок у роботі з числовими виразами, нерівностями та дробами. Школярі освоюють нові методи аналізу, такі як порівняння числових виразів без попереднього обчислення, що сприяє глибшому розумінню властивостей чисел і їх взаємозв’язків. Наприклад, порівнюючи числові вирази (13 − 9 * 13 − 8 чи 16 + 7 * 16 + 8), вони розвивають уміння обґрунтовувати математичні принципи, розширюючи своє уявлення про властивості нерівностей та способи їх доведення. Особливу увагу приділяють порозрядному порівнянню чисел у межах тисячі, що допомагає учням краще орієнтуватися у поняттях великої числової шкали [31].

Крім того, на цьому етапі вводиться поняття кратного порівняння чисел з акцентом на оцінку результатів таких дій. Учні поступово ознайомлюються з ключовими термінами та поняттями, наприклад "менше «у»" і "більше «у»". Під час вивчення дробів вони набувають навичок порівняння дробів із чисельником один, використовуючи для цього візуальні засоби, які значно спрощують опанування цієї теми. Практичні завдання відіграють важливу роль у закріпленні знань. Учні розв’язують задачі, що дозволяють збагатити досвід застосування математичних правил. Наприклад: «Який знак слід поставити замість «*», щоб нерівність (7 * 8 < 1 + 9 * 9) стала правильною?» або «Довжина одного відрізка становить 9 см, другого — втричі менша від першого, а третього — на 7 см довша за другий. Визначити довжину третього відрізка та виразити її в дециметрах». Подібні вправи тренують математичну логіку та розвивають навички вирішення задач багатоступеневої складності [22].

Третій клас також супроводжується знайомством із буквеними виразами. Учні навчаються розрізняти числові нерівності та нерівності зі змінними, а також знаходити їх окремі рішення найбільш зручним для себе способом. Як приклад: «Знайти числа, які задовольняють нерівність 676 < x < 680». Це стає базою для подальшого розвитку вміння працювати з абстрактними математичними поняттями. Четвертий клас продовжує розвивати набутий багаж знань, поглиблюючи розуміння математичних закономірностей і розширюючи діяльність із дробами. Тут учні вивчають методи порівняння дробів із однаковими знаменниками, що допомагає здійснювати більш точний аналіз чисел у рамках даної теми.

Також велика увага приділяється роботі з нерівностями із однією змінною. Для вирішення таких задач використовуються різні методи, зокрема підбір розв’язків або аналіз залежності результату арифметичних дій від зміни одного з компонентів. Як приклад можна взяти правила: «Серед двох різниць із однаковими від'ємниками більша та, у якій зменшуване більше», або «Серед двох різниць із однаковими зменшуваними більша та, у якій від'ємник менший». Дані

правила допомагають учням краще зрозуміти принципи взаємозв’язків між компонентами виразів.

На завершення цього етапу навчання учні повинні зрозуміти, що нерівність зі змінною може мати різну кількість розв'язків: один, декілька, необмежену кількість або ж зовсім не мати жодного.

Математика 5 – 6 клас

У п’ятому класі школярі продовжують розвивати фундаментальні математичні навички, набуті в початковій школі. Вони вдосконалюють уміння порівнювати натуральні числа, числові вирази та дроби з однаковими знаменниками, а також працювати з нерівностями — як зі змінною, так і подвійними нерівностями чи іншими схожими задачами.

Окрім повторення й закріплення вже знайомого матеріалу, учні освоюють нові концепції. До них належить порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками, а деякі навчальні програми охоплюють випадки порівняння дробів із різними знаменниками, якщо один із них є кратним іншому. Також вони вивчають правильні та неправильні дроби, мішані числа й десяткові дроби. Одним із важливих завдань для п’ятикласників стає опанування вміння вибирати відповідний спосіб порівняння залежно від типу чисел [17].

Наприклад:

1. Для десяткових дробів (4,7648 і 4,765): цифри в розрядах одиниць, десятих і сотих збігаються, але в розряді тисячних першого дробу стоїть цифра 4, а другого — цифра 5. Оскільки $4 < 5$, маємо $4{,}7648 < 4{,}765$.

2. Для від’ємних чисел (-12 і -21): модуль першого числа менший за модуль другого, тому $-12 > -21$. 3. У випадку звичайних дробів (3/5 і 13/20): для порівняння потрібно звести дроби до спільного знаменника (12/20 і 13/20). Оскільки $13 > 12$, то $13/20 > 3/5$.

Також учнів знайомлять із порівнянням кутів трикутників та основними критеріями й процедурами порівняння, формуючи розуміння того, що нерівності є важливим інструментом для аналізу математичних об'єктів.

У темі «Середнє арифметичне» учні використовують знання теорії нерівностей для виконання округлень із мінімальною похибкою, а також підрахунку середньої швидкості руху. Під час вивчення трикутника вони засвоюють концепцію існування трикутника на основі довжин його сторін. Наприклад, трикутник зі сторонами 2 см, 4 см і 6 см не може існувати через умову, що сума довжин двох сторін завжди має бути більшою за довжину третьої сторони ($a + b > c$).

У 6 класі учні отримують більш глибоке розуміння порівняння раціональних чисел, включаючи використання координатної прямої для цього. Вводиться геометрична інтерпретація нерівностей, а ключовим стає поняття «модуль числа». Завдяки цьому терміну школярі зможуть не лише порівнювати числа чи оцінювати похибки, а й аналізувати умови існування математичних об’єктів. З'являються нові символи «≤» та «≥», що дозволяють використовувати нестрогі нерівності поряд зі строгими («>» та «<»).

Алгебра 7 – 8 клас

Під час опрацювання теми «Тотожно рівні вирази. Тотожності» у 7 класі школярі зосереджуються на вирішенні завдань, які передбачають порівняння алгебраїчних виразів та виявлення їхньої тотожної рівності. У цьому процесі вони не лише засвоюють базові алгоритми, а й розвивають логічне мислення, навички аналізу та обґрунтовування математичних тверджень.

Особливо корисними для цього є вправи, представлені в підручнику авторів Мерзляка А.Г., Полонського В.Б. та Якіра М.С., під назвою Алгебра: підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти, видання 2020 року. Даний навчальний матеріал пропонує учням різноманітні типові задачі на порівняння виразів, що допомагають закріплювати теоретичні знання та формувати практичні навички в структурному аналізі математичних виразів. Це сприяє більш глибокому розумінню принципів тотожності та їх застосуванню в різних ситуаціях [26].

Вправа 155. *Відомо, що* $a > 0$ *і* $a + b < 0$. *Порівняйте:*

1. b *і* 0*;*

2. $|a|$ *і* $|b|$.

Вправа 176. *Не виконуючи обчислень, порівняйте:* $(-34)^5$ *і* $(-39)^5$.

Вправа 177. *Не виконуючи обчислень, порівняйте:* $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ і $\left(-5\frac{8}{11}\right)^5$

При вивченні теми «*Властивості степеня з натуральним показником*» знаходять свій розвиток навички порівняння виразів у задачах типу:

Порівняйте значення виразів:

$(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ *і* $(-11)^{16}$*;* 16^3 *і* 65^2*;*

10^{40} *і* $10\,001^{10}$*;* 6^{14} *і* $2^{16} \cdot 3^{12}$.

Вивчаючи тему «*Способи задання функцій*» учні порівнюють значення функцій. Наприклад, дано функції:

$$g(x) = \frac{20}{x} - 3, \qquad h(x) = 8 - 3x$$

Порівняти: $g(1)$ і $h(1)$, $g(-2)$ і $h(6)$.

У восьмому класі школярі вдосконалюють навички порівняння виразів і функцій у рамках теми «Числові множини». Програма передбачає виконання вправ, спрямованих на порівняння алгебраїчних виразів. Зокрема,

Вправа 469. *Відомо, що* $a > 0$, $c < 0$. *Порівняйте з нулем значення виразу:*

1) a^3c^4; 2) ac^5.

Під час опанування теми «Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені», учні працюють із порівнянням ірраціональних числових виразів, поступово переходячи від простих до більш складних завдань. На початковому етапі їм пропонуються легші задачі, такі як порівняння чисел $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$, що допомагає закріпити базові навички роботи з виразами, які містять корені. У міру прогресу вивчення теми завдання стають складнішими, що потребує від учнів освоєння глибших математичних підходів.

Одним із важливих аспектів навчання є формування в учнів уміння знаходити область визначення функцій виду $y = \sqrt{x}$. Це включає аналіз обмежень, які накладає квадратний корінь, і точне формулювання області за допомогою

системи нерівностей. Окрім області визначення необхідно також розуміти, як знайти значення функції та використовувати ці знання для практичного розв'язання задач. Такий підхід до навчання сприяє не лише розвитку математичних навичок, але й логічного мислення та уваги до деталей [9].

Основний етап (базова середня освіта: алгебра 8 – 9 клас)

Згідно з чинним Державним стандартом базової середньої освіти, затвердженим постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898, а також Типовою освітньою програмою для учнів 5–9 класів, схваленою наказом Міністерства освіти і науки України від 19.02.2021 № 235, тема нерівностей входить до переліку ключових тем, що опановуються школярами в 8–9 класах.

Теорія нерівностей відіграє важливу роль у дослідженні функцій і активно застосовується для виконання таких задач:

- визначення області визначення та області значень функцій;

- побудова графіків на основі обмежених областей визначення;

- аналіз впливу параметрів на розташування графіків у координатній площині;

- встановлення властивостей функцій, таких як їхнє зростання або спадання.

Учні повинні зрозуміти, що нерівності є цінним інструментом для систематизації логічних міркувань під час розв’язання математичних задач або побудови функцій. Їхнє опанування стає фундаментом для подальшого вивчення систем нерівностей і задач лінійного програмування.

У класах із поглибленим вивченням математики вивченню теми «Числові нерівності та їх основні властивості» приділяється значна увага, особливо в 8 класі. Ця тема забезпечує необхідну базу для: - розв’язання нерівностей із однією змінною; - обґрунтування методів наближених обчислень, включаючи метод меж, метод підрахунку цифр, множення та ділення наближених чисел [25].

У дев'ятому класі, згідно зі стандартною програмою з математики, учні знайомляться з темою числових нерівностей, яка детально викладена у підручнику «Алгебра: підручник для 9 класу» (2017) під авторством Мерзляка А. Г., Полонського В. Б. та Якіра М. С. Розділ охоплює три основні аспекти: числові нерівності, їхні властивості, а також правила додавання і множення числових нерівностей.

Поняття порівняння чисел вводиться через пояснення, де рух праворуч на координатній прямій трактують як додавання до числа b позитивної величини. Це дає змогу визначити три можливі варіанти результату для будь-якої пари чисел a і b:

1. Число a більше за число b.

2. Число a дорівнює числу b.

3. Число a менше за число b.

Результати порівняння записуються у вигляді рівності чи нерівностей із використанням знаків =, < або >. Водночас справедливим може бути лише одне зі співвідношень: $a = b$, $a < b$ або $a > b$. На координатній прямій число, що більше, відповідає точці, розташованій праворуч, а менше — точці зліва. Для визначення взаємного розташування числа на координатній прямій обирається відповідний метод порівняння залежно від типу чисел.

Найбільш практичним підходом є спосіб знаходження різниці між двома числами. Залежно від результату різниця набуває значення додатного числа, від'ємного числа або нуля. Цей універсальний метод базується на означеннях і застосовується до різних типів чисел як загальне правило порівняння [8].

У тексті детально розглядаються основи числових нерівностей, у тому числі їхні ключові характеристики, визначення, а також правила й твердження, які застосовуються у математичному аналізі та під час розв’язування різноманітних задач.

На початку зазначено поняття порівняння чисел: якщо різниця $a - b$ є додатною, то число a більше за число b; якщо різниця від’ємна — число a менше за b. У випадку нульової різниці числа є рівними. Важлива геометрична

властивість полягає у тому, що для нерівності $a > b$ на координатній прямій точка, яка відповідає числу a, розташована праворуч від точки числа b. Переміщення вправо відбувається тоді, коли до числа b додається додатне число: якщо $a = b + c$, то $a - b = c$, що підтверджує нерівність $a - b > 0$. Далі у тексті висвітлено основні теореми, пов'язані з числовими нерівностями. Зокрема:

1. Якщо $a > b$ і $b > c$, то справедливим буде твердження, що $a > c$. Це випливає з того, що відповідні різниці залишаються додатними при складанні.

2. Додавання чи віднімання одного і того ж числа до обох сторін правильної нерівності зберігає її істинність.

3. Множення обох частин нерівності на додатне число не змінює знак нерівності, а при множенні на від'ємне число знак змінюється на протилежний.

Особливо підкреслюється важливість зміни напряму нерівності при множенні на -1: якщо змінити знак чисел у нерівності, то зміниться і напрямок її дії.

Коректне застосування операцій над нерівностями є ключовою навичкою при дослідженні функцій. Їх використовують для визначення найбільших і найменших значень функцій, оцінки обмеженості зверху і знизу, а також для аналізу зростання або спадання функцій.

Крім того, нерівності мають практичне застосування у задачах оптимізації, зокрема при розташуванні об'єктів за певними умовами [28].

Теореми, які регулюють почленне виконання операцій із нерівностями, мають ключове значення у математичних дослідженнях та навчанні. Зокрема:

4. Почленне додавання нерівностей, що мають однаковий знак, завжди призводить до нової правильної нерівності того самого знаку.

5. Почленне множення нерівностей з однаковим знаком для додатних чисел також гарантує утворення коректної нерівності.

Особливу увагу слід звертати на обмеження значень чисел під час множення. Чи числа є додатними чи ні, має суттєвий вплив на правильність нерівності. Якщо умова додатності чисел не виконується, коректність результату може бути порушена.

Таким чином, властивості числових нерівностей формують основу для застосування математичних операцій, а також забезпечують логічну платформу для аналізу функцій і вирішення задач оптимізації. Враховуючи особливості числових нерівностей, важливо наголосити, що окремих правил для почленного віднімання чи ділення не існує. У подібних випадках слід застосовувати комбінацію основних властивостей нерівностей разом із правилами додавання й множення.

Такий підхід дозволяє досягти точності й логічності у виведенні результатів, незалежно від складності математичної задачі. При навчанні школярів необхідно акцентувати увагу на формуванні навичок вирішення задач різних типів, зокрема тих, що охоплюють такі дії:

- порівняння двох чисел;

- аналіз добутку, суми, різниці чисел, піднесення до степеня чи оцінювання оберненого числа;

- доведення простих числових нерівностей за допомогою фундаментальних математичних операцій і властивостей нерівностей.

Для учнів 9 класу передбачено знайомство з темами, спрямованими на розв'язування різних видів нерівностей: «Нерівності з однією змінною», «Розв’язування лінійних нерівностей з однією змінною», «Системи лінійних нерівностей з однією змінною», «Розв’язування квадратних нерівностей». У межах цих тем простежується аналогія між властивостями рівностей і нерівностей. Як властивості рівностей сприяють розв’язування рівнянь, так і аналогічні принципи використовуються для роботи з нерівностями.

Методика розв’язання нерівностей базується на принципі заміни вихідної нерівності на рівносильну, але більш просту для аналізу чи обчислення. У цьому контексті широко застосовуються теореми щодо перенесення членів нерівності або множення її частин на однакові числа [12].

Ці теореми лежать в основі алгоритму розв’язання лінійних нерівностей і включають кілька ключових правил:

1. Перенесення доданка з однієї частини нерівності в іншу зі зміненням знаку на протилежний утворює нову нерівність, рівносильну вихідній.

2. Множення або ділення обох частин нерівності на однакове додатне число не змінює ознаку нерівності.

3. При множенні або діленні обох частин нерівності на однакове від'ємне число необхідно змінити знак нерівності на протилежний.

Ці математичні правила є базовими для алгоритмічного підходу до вирішення лінійних нерівностей з однією змінною. Вони забезпечують логічну послідовність побудови рішень і дозволяють учням глибше зрозуміти взаємозв'язок між властивостями числових рівностей та нерівностей, а також їх практичне застосування.

У шкільному курсі математики нерівності вивчаються за аналогією з рівняннями, відбуваючись через схожі етапи опанування. Проте їх освоєння має власні особливості:

1. Нерівності завжди починають вивчати після ознайомлення з відповідним класом рівнянь.

2. Рівень навичок розв'язання нерівностей, крім лінійних і квадратних, зазвичай нижчий порівняно з рівняннями того ж класу, що пояснюється більшою теоретичною складністю нерівностей.

3. Методика розв'язання нерівностей базується на двох основних підходах:

- Переходу від нерівності $a > b$ до рівняння $a = b$ з подальшим визначенням множини розв'язків вихідної нерівності.

- Застосуванні властивостей функцій і графічних методів аналізу для дослідження нерівностей.

Особливого значення набуває увага до цих методів у процесі навчання, адже перехід від нерівностей до рівнянь і навпаки формує основу для формалізованих підходів старшої школи, таких як «метод інтервалів».

Графічне представлення виступає важливим інструментом під час навчання розв'язання нерівностей, допомагаючи учням краще візуалізувати процеси та концепції.

Завершальний етап (профільна середня освіта: алгебра і початки аналізу 10 – 11 клас)

Профільна середня освіта спрямована на розвиток природних здібностей, особистих інтересів і талантів учнів, забезпечуючи набуття компетентностей, необхідних для успішної соціальної адаптації, формування активної громадянської позиції та свідомого вибору життєвого шляху. Вона також сприяє підготовці до подальшого навчання у вищих навчальних закладах або освоєння професії, виховує відповідальне ставлення до сім'ї, суспільства, природи, а також повагу до національних і культурних цінностей українського народу.

Досягнення цієї мети реалізується завдяки впровадженню компетентнісного освітнього процесу в установах загальної середньої освіти. Такий підхід формує як предметні навички, так і ключові компетентності, пристосовуючи навчання до реальних потреб сучасного життя.

У викладанні математики особлива увага приділяється компетентнісному підходу, який навчає учнів застосовувати здобуті знання в практичних життєвих ситуаціях, брати відповідальність за свої рішення та активно взаємодіяти з суспільством. Математична компетентність відіграє одну з провідних ролей серед ключових умінь. Вона полягає у здатності використовувати математичні знання і методи для розв'язання різноманітних життєвих задач, моделювання процесів і ситуацій за допомогою математичних інструментів, а також у розумінні ролі математики в особистому розвитку й суспільному житті. Її формування є показником якості освіти в галузі математики та природничих наук, забезпечуючи підготовку молоді до реалій сучасного світу, соціальної діяльності та професійного становлення [23].

Ефективне впровадження прикладної спрямованості в курс математики шкільної програми досягається через систематичне використання математичного моделювання. Це передбачає глибоку інтеграцію понять, визначення взаємозв'язків між ними, відповідний підхід до пояснення матеріалу, грамотний вибір системи вправ і методів контролю знань учнів. Іншими словами, навчання

має забезпечувати практичний контекст здобутих математичних знань, що стимулюватиме учнів до активного опанування предмету та створюватиме міцну мотивацію до навчання загалом.

Практичний підхід до вивчення математики в школі включає кілька важливих складових:

1. Складання набору математичних моделей, які відображають реальні явища й процеси, мають важливе культурне та освітнє значення, а також інтегруються з іншими галузями знання.

2. Розвиток навичок і здібностей учнів до аналізу та дослідження таких моделей.

3. Навчання створенню й опрацюванню елементарних математичних моделей повсякденних явищ і процесів.

Однією з ключових тем курсу математики у старшій школі є «Функції та функціональні залежності». Її доречно використовувати як стартову точку навчання, починаючи з розділу «Функції, їхні властивості та графіки». Цей етап передбачає повторення й систематизацію раніше вивченого матеріалу, поглиблення знань і розширення тематики через введення поняття степеневої функції. Основна мета — підготовка учнів до опанування нових типів функцій, зокрема тригонометричних, показникових і логарифмічних, а також до освоєння похідної як інструменту дослідження функцій. Центральним акцентом залишається моделювання реальних процесів і явищ за допомогою функцій.

Курс математики старших класів охоплює й інші значущі теми: обчислення, вирази, рівняння та нерівності. На цьому рівні розширюється клас рівнянь і нерівностей, їх систем і методів розв’язання, а також спектр їхнього практичного застосування. Особлива увага приділяється зв’язку цих понять із властивостями відповідних функцій. Зокрема, програмою охоплюються такі теми, як «Ірраціональні нерівності», «Показникові нерівності», «Логарифмічні нерівності» та «Тригонометричні нерівності».

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З МОДУЛЕМ

2.1. Алгебраїчне та геометричне поняття модуля

Математика, як одна з найдавніших і фундаментальних наук людства, бере свій початок у глибокій давнині, коли первісні суспільства почали долати практичні виклики, що потребували аналітичного мислення. Потреба в лічбі, вимірюванні та розподілі ресурсів стимулювала розвиток базових математичних понять, таких як натуральні числа та найпростіші арифметичні операції. З часом, з розвитком цивілізацій, математика перетворилася з набору практичних прийомів на абстрактну систему знань, що описує закономірності навколишнього світу. Геометрія, як наука про простір, та арифметика, як наука про числа, стали основою для подальшого розвитку математики.

Одним із центральних елементів математичної теорії є поняття модуля числа — концепція, яка виникла внаслідок багатовікової еволюції математики й алгебри. Її витоки губляться в античній історії, коли давньогрецькі мислителі, такі як Евклід, розглядали взаємозв’язок між числами та їх графічними репрезентаціями, зокрема числовою прямою. Хоча сам термін «модуль» їм був незнайомий, обговорення числових відстаней та величин, незалежно від їх знаку, вже тоді прокладало шлях до сучасного розуміння цього поняття. Розуміння відстані між точками на числовій прямій, без урахування напрямку, є основою поняття модуля. Давньогрецькі математики, працюючи з геометричними величинами, неявно використовували ідеї, що лежать в основі поняття модуля, оскільки геометричні величини не можуть бути від'ємними.

З розвитком алгебри та введенням від'ємних чисел виникла необхідність у формальному визначенні величини числа, незалежно від його знаку. Це призвело до появи сучасного поняття модуля, яке стало невід'ємною частиною математичного апарату. Введення поняття модуля дозволило уніфікувати та спростити розв'язування багатьох математичних задач, зокрема, рівнянь та

нерівностей, що містять абсолютні величини. Модуль числа знайшов широке застосування не тільки в математиці, а й у фізиці, техніці та інших науках, де важливо враховувати величину величини, ігноруючи її знак. Наприклад, у фізиці модуль вектора представляє його довжину, а у програмуванні модуль числа часто використовується для перевірки умов та обробки даних [4].

Отже, еволюція поняття модуля числа тісно пов'язана з розвитком математики загалом, відображаючи її перехід від практичних застосувань до абстрактних понять та узагальнень. Це поняття, що виникло з потреб практичних розрахунків, стало потужним інструментом для розв'язання складних математичних задач та знайшло широке застосування в різних галузях науки та техніки.

Середньовічна арабська математика стала наступним ключовим етапом у розвитку концепції модуля. Видатний математик і астроном Аль-Хорезмі значною мірою сприяв систематизації знань про рівняння та аналіз числових величин. Його праці, які охоплювали арифметику й алгебру, отримали визнання далеко за межами арабського світу. Особливий вплив вони справили на західноєвропейську наукову думку, де Аль-Хорезмі вважався одним із новаторів математичних ідей. Примітно, що саме термін «алгебра» походить від назви його ключової роботи — «Скорочений трактат про джабр і мугабала». Незважаючи на те, що в роботах Аль-Хорезмі поняття модуля прямо не згадувалося, числові відстані займали важливе місце у його дослідженнях. Завдяки перекладам арабських текстів на латину європейські математики середньовіччя отримали доступ до надбань ісламської науки. Відомі вчені, такі як Леонардо Фібоначчі та Орестій Макеллі, використовували ці знання для вирішення складних завдань, зокрема питання числових залежностей і геометричних вимірів. Фібоначчі, наприклад, проявляв виняткову цікавість до методів арабської алгебри, засвоєних під час навчання у мусульманського наставника.

Формальне визначення модуля як відстані між точкою на числовій прямій і початком координат традиційно пов’язують із Роджером Котсом. Однак питання авторства залишається предметом академічних дискусій. Готфрід

Лейбніц також використовував термін «модуль», перейнявши його від латинського слова modulus, що означає «міра», проте загальновживане визнання даної концепції закріпилося лише завдяки дослідженням Карла Вейєрштрасса. У другій половині XIX століття Огюстен Коші і Жан Роберт Арган розширили застосування поняття модуля до комплексних чисел, тоді як Хендрик Лоренц поширив його на довжину векторів у багатовимірному просторі. Математичне позначення модуля в його сучасному символічному вигляді з'явилося завдяки Карлу Нейману та поступово інтегрувалося навіть у мови програмування [1].

Сьогодні поняття модуля стало невід'ємною частиною багатьох математичних сфер, охоплюючи теорію чисел, алгебру та математичний аналіз. Воно слугує ключовим інструментом для визначення відстаней на числовій прямій, розв'язування рівнянь і вирішення задач різноманітної складності, що підкреслює його важливість у сучасній математичній науці.

Означення 1. Модулем невід'ємного числа називається саме це число, а модулем від'ємного числа – протилежне йому додатне число, тобто:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Геометричне визначення модуля числа полягає в тому, що модуль — це відстань від точки початку координат до точки на числовій осі, яка відповідає заданому числу. Через це модуль числа завжди має невід'ємне значення.

Другий термін визначає рівняння з модулем як такі рівняння, в яких під знаком модуля знаходяться невідомі або функції від невідомих.

Третій термін характеризує нерівності з модулем, тобто ті нерівності, де під знаком модуля також присутні невідомі або функції від невідомих. Для розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем використовують наступний підхід: якщо область визначення рівняння або нерівності представлена у вигляді об'єднання кількох множин ($E = E1 \cup E2 \cup \ldots \cup Es$), то потрібно розв'язати рівняння чи нерівність окремо на кожній із цих множин. Згодом утворені множини розв'язків об'єднують, щоб отримати повну множину всіх рішень для заданого рівняння або нерівності.

2.2. Місце рівнянь та нерівностей з модулем у шкільному курсі математики

Тема «Рівняння та нерівності з модулем» починає закладатися в навчальну програму ще в 5 класі, коли учні поступово опановують базові принципи порівняння натуральних чисел і навички розв'язування елементарних рівнянь. Надалі це поняття розвивається та поглиблюється, стаючи невіддільною частиною математичної освіти.

Варто детально проаналізувати особливості запровадження поняття «модуль» та його практичного застосування в задачах на рівняння і нерівності, спираючись на зміст підручників з математики та алгебри, призначених для середніх і старших класів, зокрема робіт авторів Істер О.С., Мерзляк А.Г., Полонський В.Б. і Якір М.С. У підручнику «Математика 6 клас», написаному автором Істером О.С., концепція модуля вводиться в розділі «Раціональні числа та дії з ними».

Даний матеріал розглядається після опрацювання таких тем, як «Додатні та від’ємні числа. Число 0», «Координатна пряма» та «Протилежні числа. Цілі числа. Раціональні числа». Автор пропонує визначення модуля числа як відстані від даного числа до початку координат на координатній прямій, що дозволяє учням зрозуміти фундаментальну природу цієї математичної величини та її основні властивості [25].

Для закріплення теоретичних знань у підручнику наведено різноманітні приклади вправ, які охоплюють як базові операції знаходження модуля числа, так і більш складні задачі на розв'язання рівнянь і нерівностей із модулем, включаючи визначення цілих розв’язків. Система завдань структурована за рівнями складності, що сприяє поступовому формуванню навичок учнів, активізує їхнє логічне мислення та допомагає глибше опанувати тему. Різнорівневий підхід до завдань забезпечує можливість адаптивного навчання, дозволяючи кожному учню вдосконалювати свої математичні вміння відповідно до індивідуальних темпів засвоєння.

У підручнику «Математика 6 клас», авторами якого є Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., тема модуля також висвітлюється в розділі «Раціональні числа та дії з ними», аналогічно до структури і послідовності викладу матеріалу у виданні Істера О.С.

Принцип введення поняття залишається незмінним: модуль числа визначається як відстань між числом і початком координат на координатній прямій, що забезпечує послідовний і зрозумілий підхід до пояснення поняття.

Однак у цьому підручнику кількість представлених прикладів для вправ на опрацювання теми значно менша. Основна увага зосереджена на базових завданнях для самостійного аналізу, проте задачі на розв’язання рівнянь і нерівностей із модулем зустрічаються рідше і представлені лише в одному рівні складності. Такий формат може обмежувати можливість учнів для глибшого засвоєння теми через брак варіативності у формулюваннях задач і недостатню кількість прикладів для відпрацювання різноманітних способів їх розв’язання.

Таким чином, порівняння підходів до висвітлення теми «Модуль» у згаданих підручниках демонструє різницю в обсязі та складності практичного матеріалу. У книзі Істера О.С. акцент зроблено на багаторівневому розвитку навичок і ширшій інтеграції модуля в математичний контекст, тоді як у роботі Мерзляка А.Г., Полонського В.Б. і Якіра М.С. матеріал подано більш компактно, що може вплинути на ефективність засвоєння [32].

У навчальному посібнику «Алгебра 7 клас» авторства Істера О. С. поняття модуля вперше знайомить учнів в рамках розділу «Лінійні рівняння та їх системи», особливо у темі «Лінійне рівняння з однією змінною». На сторінках цього підручника висвітлюються базові принципи лінійних рівнянь, пояснення способів їх вирішення та конкретні приклади, що допомагають краще зрозуміти матеріал. Крім того, там представлено значну кількість вправ різного рівня складності на вирішення лінійних рівнянь з однією змінною. Однак з точки зору роботи з рівняннями, які містять модуль, варіативність таких вправ є обмеженою — лише чотири рівні складності. Такий підхід може стати перешкодою для розвитку глибшого розуміння концепції модуля, оскільки учні отримують

обмежену практику.

Аналогічно, у підручнику «Алгебра 7 клас» авторства Мерзляка А. Г., Полонського В. Б. та Якіра М. С., поняття модуля розглядається у темі «Лінійне рівняння з однією змінною», яка знаходиться у розділі «Лінійні рівняння та їх системи». Тут окреслюються ключові аспекти лінійних рівнянь та методи їхнього розв'язування, включаючи розбір рівнянь із модулем. Особливістю даного посібника є велика кількість вправ, структурованих за рівнями складності, серед яких присутні також задачі, які містять модуль. Завдяки таким вправам автори забезпечують можливість практикуватися як на базовому рівні, так і на високому рівні складності, що є важливим для підготовки учнів до складніших завдань, зокрема тих, які можуть бути присутні на Національному мультипредметному тесті (НМТ). Різнорівневий підхід сприяє поступовому та якісному засвоєнню теми.

На наступному етапі вивчення алгебри, у 8 класі за підручником «Алгебра 8 клас» авторства Істера О. С., поняття модуля набуває особливого значення й зустрічається упродовж усього курсу в різних темах. Зокрема, учні працюють із модулем у розділах «Раціональні рівняння. Раціональні вирази», «Функція $y = k/x$, її графік та властивості», «Властивості арифметичного квадратного кореня» та «Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння». У цих темах представлені не лише рівняння, що містять модуль, але й функції, де модуль є важливою складовою; втім, кількість вправ такого типу залишається недостатньою. Вони теж обмежені чотирма рівнями складності, що може обмежити учнів від отримання достатньо широкої практики для більш глибокого освоєння теми модуля. Загалом аналіз засвідчує різний рівень опрацювання поняття модуля в підручниках різних авторів, що впливає на можливості учнів у системному розумінні та практичному застосуванні знань.

У підручниках авторів Мерзляка А. Г., Полонського В. Б., Якіра М. С. більше уваги приділено завданням високого рівня складності, що сприяє кращій підготовці до майбутніх викликів у навчанні та тестуванні. У той же час, із погляду системності, обом навчальним матеріалам ще необхідно посилити

акцент на розмаїтті вправ із модулем для забезпечення повноцінного розуміння цього математичного поняття учнями.

У процесі опанування курсу алгебри за матеріалами підручника «Алгебра 8 клас» (автори Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) поняття модуля розглядається в декількох темах, таких як «Функція y=k/x», «Властивості арифметичного квадратного кореня» та «Квадратні рівняння». Ці теми представлені як завдання для поглибленого опрацювання, що сприяє поступовому розумінню змісту та використання поняття модуля. У підручнику «Алгебра 9 клас» (автор Істер О. С.) здобувачі освіти переходять до більш складного рівня, зокрема до розділу «Нерівності». Тут учні знайомляться з лінійними нерівностями, основними властивостями числових нерівностей, числовими проміжками, множинами та операціями над ними.

Центральною темою курсу алгебри у 9 класі стають функції, їхні властивості, а також елементарні перетворення графіків функцій. У межах вивчення теми «Функція. Область визначення, область значень і графік функції» здобувачі освіти вперше стикаються з графіком функції y = |x|, досліджують його властивості та геометричну інтерпретацію. Тему супроводжує теоретичний матеріал і практичні вправи різного рівня складності, що дозволяє формувати навички побудови та аналізу графіків. Особливий акцент автор робить на темі «Найпростіші перетворення графіків функції», де через послідовно структуровані теоретичні пояснення й приклади розв’язання задач учні отримують ґрунтовні знання про види трансформацій графіків і їхнє практичне застосування. Завдяки вправам різного типу, зокрема завданням із модулем чи графічним методом розв’язування рівнянь підвищеної складності, забезпечується систематичне засвоєння теми [17].

Інший підручник «Алгебра 9 клас» (автори Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) також пропонує аналогічні вправи, але з більш широким набором завдань різної складності. Особливістю цього підручника є введення нерівностей із модулем високого рівня складності, що ускладнює процес опанування теми, але водночас сприяє розвитку аналітичного мислення учнів. У розділі «Функція.

Область визначення, область значень і графік функції» автори менше уваги приділяють теоретичному обґрунтуванню функції y = |x|. Відсутність достатньо розгорнутого пояснення може створити труднощі в розумінні властивостей цієї функції, що призводить до ризику помилкової інтерпретації нової теми. Незважаючи на цей недолік, підручник містить вправи на побудову й дослідження графіка функції y = |x| з добре підібраним діапазоном складності та типів завдань. Це дає змогу компенсувати недостатність теорії через практику й розвивати навички роботи з модулями та функціями навіть у складних умовах навчання.

Алгебра та основи аналізу в старшій профільній школі організовані навколо ключового поняття — «Функції та функціональні залежності». Тому логічним і стратегічно важливим є початок навчання з теми «Функції, їх властивості та графіки», яка виступає базою для подальшого освоєння математичних концепцій. Ця тема дає змогу не тільки повторити й систематизувати знання з базової школи, але й значно розширити їх. Особлива увага приділяється степеневим функціям, що відкриває шлях до глибшого ознайомлення з такими типами функцій, як тригонометричні, показникові та логарифмічні, а також до розуміння фундаментальної ролі похідної в аналізі функцій.

Одним із найважливіших аспектів цієї теми є показ практичного застосування функцій для моделювання реальних процесів, що підкреслює їх значення у сучасному світі. Зміст програми старшої школи значно розширюється за рахунок нових тем, які охоплюють обчислення, перетворення виразів, а також розв’язування рівнянь і нерівностей. Учні знайомляться з новими класами рівнянь, такими як ірраціональні, показникові, логарифмічні та тригонометричні нерівності, формуючи навички їх ефективного розв’язування та застосування в різних ситуаціях. Це не лише сприяє практичній підготовці учнів, але й інтегрується у поглиблене дослідження властивостей функцій.

Цей ширший підхід до тематики дозволяє учням перейти від ознайомлення з базовими функціями до більш складних математичних моделей і методів

аналізу. Завдяки опрацюванню нових типів нерівностей і рівнянь учні поступово формують здатність до самостійного аналізу функціональних залежностей, що стає ключовим елементом майбутніх математичних досліджень та роботи з реальними даними.

Детальний порівняльний аналіз підручників «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» для учнів 10-11 класів, створених авторами Істер О. С., Мерзляк А. Г., Полонський В. Б. та Якір М. С., наведений у таблиці 1.

Таблиця 1

Критерії	**«Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» 10-11 класи автор Істер О. С.**	**«Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» 10-11 класи авторів Мерзляк А. Г. та ін.**
Теоретичний аспект	Матеріал викладено логічно та детально, з ретельним поясненням кожного терміну. Особливу увагу приділено представленню формул, роз'ясненню алгоритмів і аналізу властивостей функцій. У підручнику також багато практичних прикладів використання математики у повсякденному житті, що сприяє підвищенню інтересу до предмета.	Теорія викладена лаконічно і сфокусована на ключових аспектах. Основний акцент зроблено на прикладному використанні знань. Представлено стислий опис властивостей і алгоритмів розв'язання без зайвих деталей. У тексті нерідко з'являються історичні довідки та приклади практичного застосування матеріалу, що підсилює його орієнтованість на реальні умови.
Практичний аспект	Надає широкий вибір завдань для самостійного виконання, розподілених за рівнями складності.	Пропонує значно більше завдань для самостійного вирішення різних рівнів складності, включаючи олімпіадні задачі.
Особливості	Розгорнуті приклади розв’язання задач значно спрощують розуміння складних тем.	Зосереджено увагу на завданнях, що відтворюють реальні життєві ситуації, зокрема у сферах фінансів або технічних процесів.

2.3. Методи розв'язування нерівностей з модулем

У процесі розв'язування нерівностей зі змінною під знаком модуля часто буває зручно звертатися до теореми про рівносильність таких нерівностей. Вона дозволяє спростити аналіз і знайти розв'язок швидше та ефективніше.

Теорема. *Нехай дано нерівність* $f(x) > g(x)$*, причому* $f(x) \geq 0$ *та* $g(x) \geq 0$ *при всіх* x *з області визначення нерівності. Якщо обидві частини нерівності піднести до одного й того ж натурального степеня* n*, то при цьому знак нерівності залишиться без змін і отримаємо нерівність*

$$(f(x))^n > (g(x))^n,$$

рівносильну даній.

Нехай, наприклад, потрібно розв'язати нерівність $|f(x)| > |g(x)|$. Скористаймося тим, що якщо $p(x)$ – деяка функція, то $|p(x)| \geq 0$ і $|p(x)|^2 = (p(x))^2$.

Це означає, що згідно з теоремою, нерівність $|f(x)| > |g(x)|$ рівносильна нерівності $(f(x))^2 > (g(x))^2$. Крім того, іноді корисно скористатись геометричною інтерпретацією модуля дійсного числа.

Перший метод розв'язання нерівностей із модулем базується на визначенні модуля. У геометричному сенсі значення |a| представляє відстань від точки "a" на числовій прямій до початку координат, тоді як |a-b| відповідає відстані між точками "a" і "b" на цій прямій. Наприклад, якщо $a = 5$, $b = 2$, то $|5 - 2| = 3$ – відстань між точками з координатами 2 і 5 (рис.1). Або $|2 - 5| = |-3| = 3$.

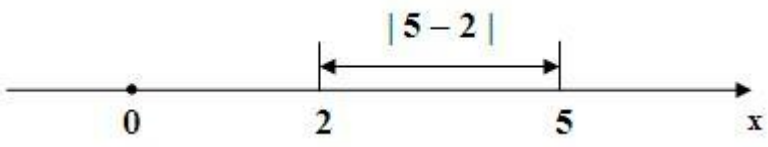


Рис.1

Відстань між точками 5 і -6 дорівнює: $|5 - (-6)| = |5 + 6| = 11$ (рис.2). Або $|-6 - 5| = |-11| = 11$.

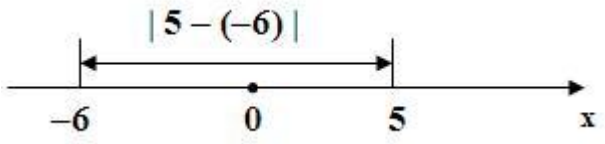


Рис.2

Геометрично нерівність $|x| \leq a$, де $a > 0$, означає, що відстань від точки з координатою x до точки 0 не більша від a (рис.3).

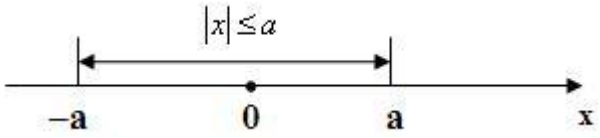


Рис.3

Цю властивість мають точки $x \in [-a; a]$. Отже, нерівність $|x| \leq a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a \leq x \leq a$. Нерівність $|x| < a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a < x < a$.

Нерівність $|x| > a$ означає, що $x > a$ або $x < -a$ (рис.4). Нерівність $|x| \geq a$ означає, що $x \geq a$ або $x \leq -a$.

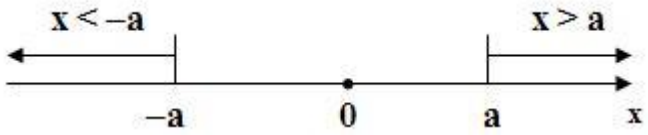


Рис.4

Нерівності $|f(x)| < a$, $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| > a$, $|f(x)| \geq a$, де $a > 0$, розв’язуються аналогічно, оскільки можуть бути зведені до попередніх заміною $f(x) = t$.

Другий підхід до розв’язування нерівностей, які містять змінну під знаком модуля, базується на застосуванні визначення модуля функції:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{якщо } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{якщо } f(x) < 0 \end{cases}$$

Цей метод дозволяє вирішувати задачі шляхом розгляду кожного з випадків, коли вираз під знаком модуля набуває як додатного, так і від'ємного значення. Згідно з означенням модульної функції, модуль певного числа або виразу дорівнює цьому числу у випадку, якщо воно більше або дорівнює нулю,

або протилежному йому числу, якщо воно менше нуля. Таким чином, для розв'язання нерівності необхідно спершу визначити критичні точки, де вираз під знаком модуля змінює свій знак. На основі цих точок область визначення ділиться на проміжки. У кожному проміжку модуль замінюється відповідним виразом — зі збереженням або зміною знаку залежно від того, чи є він додатним чи від'ємним у даній області. Це дозволяє сформулювати кілька окремих рівнянь або нерівностей для кожного випадку. Далі кожне рівняння або нерівність розв'язується самостійно, після чого отримані результати об'єднуються вздовж усієї області визначення. Водночас важливо враховувати умови, за яких був зроблений вибір конкретного вигляду для модульного виразу, щоб не допустити включення зайвих розв'язків, які не належать до початкової нерівності. Завдяки цьому способу забезпечується повний та точний аналіз ситуації, що уможливлює отримання правильного розв'язку.

Нерівність вигляду $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$, якщо $a > 0$. Якщо $a \leq 0$, то нерівність $|f(x)| < a$ розв'язків не має.

Нерівність вигляду

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{bmatrix}$$

якщо $a > 0$; якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності буде множина допустимих значень функції $f(x)$; якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $|f(x)| > a$ буде множина тих x, для яких $f(x) \neq 0$.

Для розв'язання нерівностей, що містять кілька модулів, використовується метод інтервалів для модулів. Суть цього підходу полягає у розбитті числової прямої на інтервали, визначені нулями кожного модуля. На кожному з отриманих інтервалів проводиться пошук множини розв'язків нерівності, після чого результати об'єднуються в загальну множину розв'язків.

Приклад 2.1. Розв'язати нерівність $|5x - 3| > 2$.

Розв'язання. Скориставшись першим способом розв'язування нерівностей з модулем отримуємо, що $5x - 3 > 2$ або $5x - 3 < -2$, тобто

$$\left[\begin{matrix}5x-3>2\\5x-3<-2\end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix}x>1\\x<\frac{1}{5}\end{matrix}\right. \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(1;+\infty)$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(1;+\infty)$

Приклад 2.2. Розв'язати нерівність $|3x-8|<x-2$.

Розв'язання. Дану нерівність можна замінити сукупністю двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{matrix}\begin{cases}3x-8\geq 0\\3x-8<x-2\end{cases}\\\begin{cases}3x-8<0\\-(3x-8)<x-2\end{cases}\end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix}\begin{cases}x\geq\frac{8}{3}\\x<3\end{cases}\\\begin{cases}x<\frac{8}{3}\\x>2{,}5\end{cases}\end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix}x\in\left[\frac{8}{3};3\right)\\x\in\left(2{,}5;\frac{8}{3}\right)\end{matrix}\right. \Rightarrow x\in(2{,}5;3)$$

Відповідь: $x\in(2{,}5;3)$

Приклад 2.3. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x+2|-x>5$.

Розв'язання. Для розв'язування даної нерівності використаємо метод інтервалів для модулів. Позначимо на числовій прямій точки, в яких вирази, що знаходяться під знаком модулів, перетворюються в нуль. Це точки $x=-2$ і $x=3$. Числова пряма розбивається цими точками на три проміжки (рис.5):

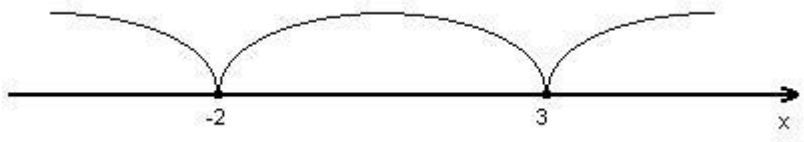


Рис.5

1) Розглянемо проміжок (інтервал) $x\in(-\infty;-2)$. Підставимо в підмодульні вирази замість змінної x довільне значення з даного інтервалу, виявивши тим самим знак підмодульного виразу. Таким чином, $x-3<0$, $x+2<0$. Розкривши модулі відповідно зі зміною знаків, отримаємо нерівність:

$$-x+3-x-2-x>5 \Leftrightarrow -3x-4>0 \Leftrightarrow x<-\frac{4}{3}$$

Тоді

$$\left[\begin{matrix}x\in(-\infty;-2)\\x<-\frac{4}{3}\end{matrix}\right. \Rightarrow x<-2$$

2) Розглянемо проміжок $x \in [-2;3)$. За тим самим принципом, що й на попередньому проміжку, маємо

$$-x+3+x+2-x>5 \;\Leftrightarrow\; -x>0 \;\Leftrightarrow x<0$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{c} x \in [-2;3) \\ x<0 \end{array}\right. \Longrightarrow -2 \le x < 0$$

3) Розглянемо проміжок $x \ge 3$. Маємо

$$x-3+x+2-x>5 \;\Leftrightarrow x>6$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{c} x \ge 3 \\ x>6 \end{array}\right. \Longrightarrow x>6$$

Об'єднаємо отримані множини розв'язків:

$$\left[\begin{array}{c} x<-2 \\ -2 \le x < 0 \\ x>6 \end{array}\right. \Longrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (6;+\infty)$$

Відповідь: $x \in (-\infty;0) \cup (6;+\infty)$.

Приклад 2.4. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2-3|x|-4}{x+1} < -3x.$$

Розв'язання. Розпишемо дану нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$\frac{x^2-3|x|-4}{x+1} < -3x \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} x>0 \\ \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} < -3x \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} x \le 0 \\ \dfrac{x^2+3x-4}{x+1} < -3x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} x>0 \\ \dfrac{x^2-3x-4+3x(x+1)}{x+1} < 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} x \le 0 \\ \dfrac{x^2+3x-4+3x(x+1)}{x+1} < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} x>0 \\ \dfrac{4x^2-4}{x+1} < 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} x \le 0 \\ \dfrac{4x^2+6x-4}{x+1} < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} x>0 \\ (x-1)(x+1)(x+1)<0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} x \le 0 \\ (2x-1)(x+2)(x+1)<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Зобразимо на числових прямих множини розв'язків нерівностей і знайдемо їх перетин і об'єднання відповідно (рис.6).

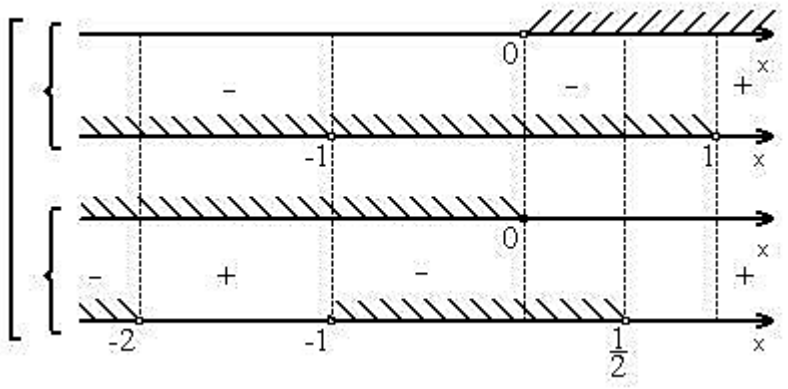


Рис.6

$$\begin{bmatrix} x \in (0;1) \\ x \in (-\infty;-2) \cup (-1;0] \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (-1;1)$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-2) \cup (-1;1)$

Приклад 2.5. Розв'язати нерівність

$$\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| > 1.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності:

$$\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2 > 1,$$

яку можна переписати таким способом:

$$\frac{4x^2+12x+9}{9x^2-12x+4} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-5x^2+24x+5}{(3x-2)^2} - 1 > 0$$

звідки

$$\frac{5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} < 0$$

Методом інтервалів (рис.7) знаходимо розв'язок останньої нерівності, а разом з ним й заданої.

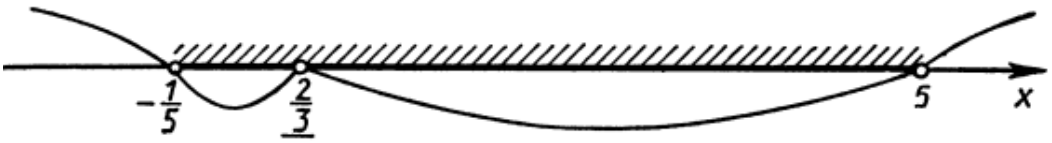


Рис.7

Відповідь: $x \in \left(-\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};5\right)$

Приклад 2.6. Розв’язати нерівність

$$|x^2 - 3x + 2| \le 2x - x^2.$$

Розв’язання. Розпишемо дану нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$|x^2 - 3x + 2| \le 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 \le 2x - x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ -(x^2 - 3x + 2) \le 2x - x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)(x-2) \ge 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x-2) < 0 \\ (x-2) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1; x \ge 2 \\ \frac{1}{2} \le x \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідки $\frac{1}{2} \le x \le 2, x = 2, 1 < x < 2$. Об’єднуючи знайдені множини розв’язків, отримаємо $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Відповідь: : $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$

Дослідження теоретичних і методологічних аспектів рівнянь і нерівностей з модулем виявило їхню фундаментальну роль як у загальній математиці, так і в освітньому процесі шкільного курсу. Історичний розвиток цієї теми демонструє еволюцію від базових геометричних уявлень про відстань до комплексних аналітичних методів, які передбачають використання абсолютного значення. Це підкреслює важливість цієї області для глибшого розуміння математичних взаємозв’язків і структури числових систем, а також її зв'язок з більш абстрактними математичними концепціями, такими як метричні простори та нормовані простори. Застосовані методи розв’язування задач із модулем сприяють розвитку в учнів не тільки гнучкого мислення та навичок систематизації процесу пошуку рішень, а й здатності до абстрактного мислення, аналізу та синтезу інформації. Розуміння модуля як відстані до нуля на числовій прямій є основою для подальшого вивчення більш складних математичних понять.

У результаті аналізу шкільних програм і підручників було виявлено значний освітній потенціал теми рівнянь і нерівностей з модулем. Однак, її презентація у навчальному курсі часто вимагає покращення: недостатня увага до теоретичних основ, обмежена кількість практичних завдань різного рівня складності та відсутність зв’язку з реальним життям можуть створювати труднощі у засвоєнні матеріалу. Для ефективнішого навчання доцільно впровадити більш структурований метод пояснення властивостей модуля та його практичного застосування, включаючи використання візуальних посібників, інтерактивних вправ та прикладів з реального життя. Важливо показати учням практичну значущість цієї теми, наводячи приклади застосування модуля в різних галузях знань, таких як фізика, програмування та економіка.

Для покращення засвоєння матеріалу необхідно акцентувати увагу на геометричній інтерпретації модуля, використовуючи числову пряму та координатну площину. Це дозволить учням візуалізувати процес розв'язання рівнянь та нерівностей, краще зрозуміти суть методу та уникнути типових помилок. Застосування різних методів розв'язування (інтервальний метод, метод розкриття модуля, графічний метод) дозволить учням розвинути гнучкість мислення та вибрати найбільш оптимальний підхід для кожної конкретної задачі. Крім того, важливо забезпечити достатню кількість практичних завдань різного рівня складності, що дозволить закріпити теоретичні знання та розвинути навички розв'язування задач.

Таким чином, рівняння й нерівності з модулем є важливим розділом математики, який сприяє розвитку ключових компетентностей, знань і умінь учнів, таких як критичне мислення, аналітичні навички, здатність до абстрактного мислення та вирішення проблем. Модернізація підходів до викладання цієї теми, включаючи використання сучасних технологій та інтерактивних методів навчання, допоможе не лише встановити глибший інтерес до неї, але й забезпечить краще сприйняття її практичної значущості та важливості для подальшого вивчення математики та інших наук.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЕМ»

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) охоплюють широкий спектр методів, процедур, обладнання та програмних рішень, що забезпечують збір, зберігання, обробку, передачу і використання інформації. Ці технології є основою сучасного інформаційного суспільства, у якому обмін даними відіграє ключову роль у різних сферах життя — від освіти та науки до бізнесу та соціальної взаємодії. Завдяки ІКТ освіта отримує нові перспективи, зокрема можливості для дистанційного навчання, інтеграції мультимедійних ресурсів, використання інтерактивних платформ та створення віртуальних навчальних середовищ.

Сучасне покоління школярів дедалі більше пристосовується до вирішення освітніх завдань за допомогою гаджетів. Згідно з дослідженнями, учні проводять значну частину свого часу, використовуючи смартфони, планшети та комп’ютери, що впливає на їх стиль навчання. Відповідно, застосування інформаційних технологій у процесі викладання математичних тем набуває актуальності, оскільки вони відповідають потребам сучасних учнів. Учням легше засвоювати інформацію, представлену на екранах комп’ютерів чи телевізорів, ніж простий текст, написаний крейдою на класній дошці. Візуалізація матеріалу, інтерактивність та можливість миттєвого зворотного зв’язку сприяють покращенню розуміння складних концепцій, таких як рівняння та нерівності.

ІКТ відкривають нові можливості для інтерактивного навчання, де учні можуть активно взаємодіяти з навчальним матеріалом. Використання онлайн-платформ для дистанційного навчання дозволяє проводити заняття в режимі реального часу, забезпечуючи можливість спілкування між учнями та вчителями, обговорення тем та виконання спільних проектів. Крім того, інтеграція мультимедійних ресурсів, таких як відео, анімації та інтерактивні вправи, робить навчання більш динамічним та захоплюючим. Учні можуть використовувати

різноманітні програми для візуалізації математичних концепцій, що допомагає їм краще зрозуміти матеріал і застосовувати його на практиці.

Важливим аспектом використання ІКТ в освіті є доступність навчальних ресурсів. Учні можуть отримати доступ до численних онлайн-курсів, електронних книг та навчальних матеріалів з будь-якої точки світу, що значно розширює їх можливості для самостійного навчання. Це також сприяє формуванню навичок самостійної роботи, критичного мислення та управління часом. В умовах глобалізації та швидкого розвитку технологій, вміння працювати з інформаційними ресурсами стає необхідним, що підкреслює важливість їх інтеграції в навчальний процес.

При викладанні математики у старших класах доцільно використовувати спеціалізовані мобільні та веб-додатки, такі як GeoGebra, Symbolab, WolframAlpha та Desmos.

Окремо варто звернути увагу на онлайн-інструмент Desmos. Це графічний калькулятор, який надає можливість візуалізації функцій, побудови графіків і розв'язання широкого спектра математичних задач, включно з нерівностями з модулем. Desmos виступає як потужний і доступний інструмент для ефективного навчання та практичного вирішення математичних проблем.

Основні можливості платформи Desmos:

1. **Побудова графіків функцій**. Desmos дозволяє створювати графіки найрізноманітніших типів функцій: лінійних, квадратичних, експоненційних, тригонометричних, логарифмічних та інших. Користувачі можуть будувати як графіки окремих функцій, так і систем рівнянь, що є надзвичайно корисним для порівняльного аналізу та візуалізації взаємозв’язків між функціями.

2. **Дослідження параметрів та їх впливу**. Інструмент дозволяє змінювати параметри функцій у реальному часі, наочно демонструючи, як ці зміни відображаються на формі графіка. Це суттєво спрощує розуміння ролі параметрів у різних типах функцій.

3. **Анімація графіків**. У Desmos можна створювати анімації даних, що особливо актуально для пояснення таких концепцій, як періодичність, амплітуда

або фаза в тригонометричних функціях. Анімоване представлення значно покращує засвоєння складних математичних тем.

4. **Візуалізація даних та таблиць**. Окрім роботи з аналітичними функціями, платформа підтримує введення числових даних у вигляді таблиць та побудову графіків на їх основі. Це робить Desmos ефективним інструментом для створення діаграм, а також дослідження і аналізу статистичних чи експериментальних даних.

5. **Малювання геометричних фігур і робота з нерівностями**. Платформа дозволяє не лише будувати математичні графіки, а й створювати геометричні фігури, працюючи з нерівностями. Така функціональність розширює застосування Desmos у геометрії, наприклад, допомагаючи візуалізувати області, що відповідають різним системам нерівностей.

6. **Збереження та спільний доступ до проєктів**. Всі створені графіки можна зберігати онлайн, ділитися ними через спеціальні посилання або завантажувати їх для друку. Це надзвичайно зручно для використання в навчальних цілях, підготовці домашніх завдань чи виконанні проєктів.

Переваги використання Desmos:

1. *Доступність*: Одна з ключових переваг Desmos полягає в тому, що він працює безпосередньо в браузері. Це означає, що його можна використовувати на будь-якому пристрої, підключеному до Інтернету, без необхідності встановлення додаткового програмного забезпечення.

2. *Безкоштовність*: Платформа надає свої численні функції абсолютно безкоштовно, роблячи її ідеальним інструментом як для освітніх закладів, так і для власного використання вдома.

3. *Зручний інтерфейс*: Desmos має інтуїтивно зрозумілий дизайн, який однаково зручний для новачків у математичних дослідженнях та для досвідчених користувачів, які шукають динамічне середовище для роботи. Desmos ефективно слугує навчальним засобом у викладанні математики, допомагаючи учням глибше зануритися в математичні концепції і легко засвоювати теорію через наочні та інтерактивні приклади.

Особливо корисним Desmos стає при розв'язуванні нерівностей із модулем. Використання цієї онлайн-платформи дозволяє візуалізувати множину розв'язків та краще зрозуміти особливості модуля через графічний аналіз. У процесі роботи з нерівностями з модулем вираження представлено у вигляді двох функцій. Користувач вводить їхні дані в програму, яка автоматично будує графіки на основі заданих параметрів. Розв'язки нерівностей визначаються шляхом аналізу побудованого графіка.

Приклад 3.1. Розв'язати нерівність:

$$8x^2 + 7|x| - 1 \geq 0$$

Розв'язання. Це нерівність виду $F(x, |x|) \geq 0$, вводимо у програму дані функції: $y = 8x^2 + 7|x| - 1, y = 0$ та задану нерівність. На графіку (рис.8) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

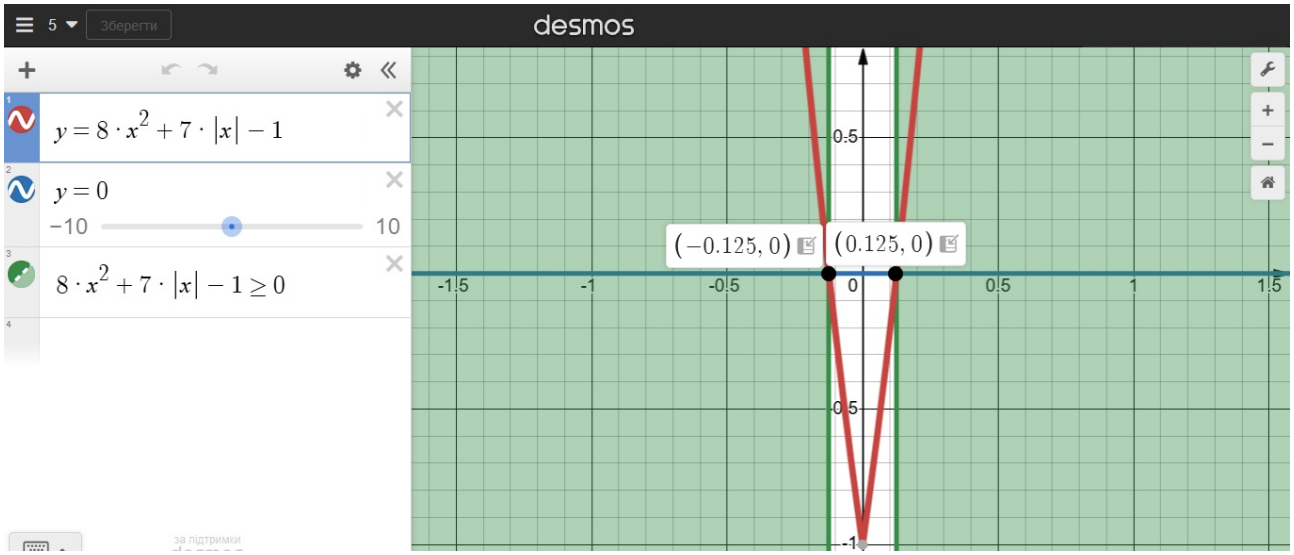


Рис.8

Відповідь: $x \in (-\infty; -0{,}125] \cup [0{,}125; +\infty)$

Приклад 3.2. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{5 - |x + 1|} \leq 2 + x$$

Розв'язання. Розглядаємо дану нерівність, як дві функції: $y = \sqrt{5 - |x + 1|}$ та $y = 2 + x$. Вводимо данні функцій та саму нерівність у програму, яка за допомогою коду будує графіки функцій та множину розв'язків нерівності, позначені зеленим кольором. З графіку (рис.9) видно розв'язок нерівності.

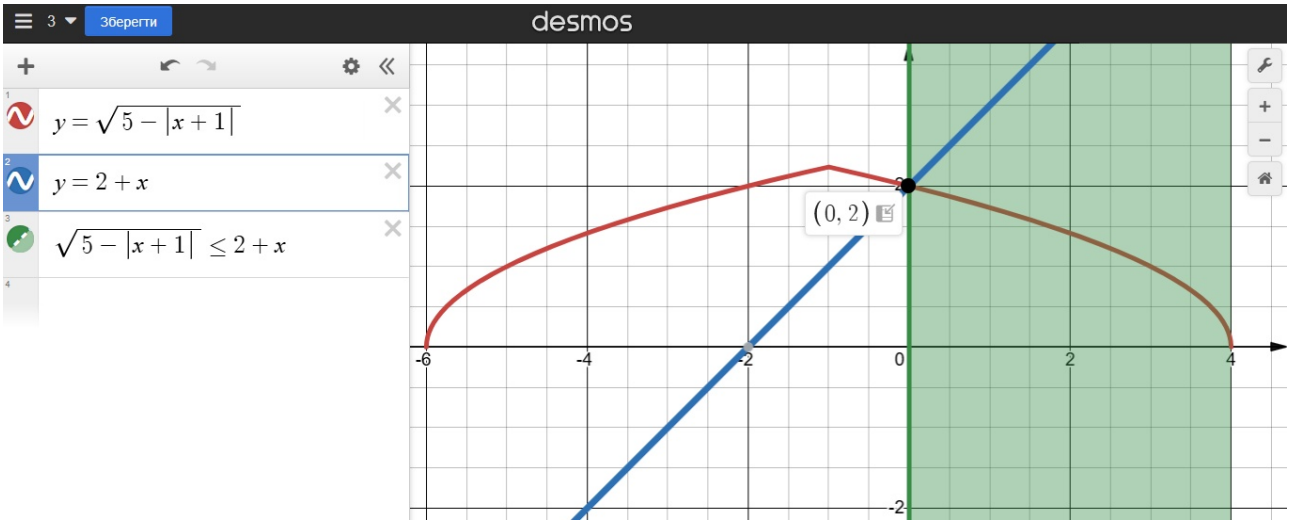


Рис.9

Відповідь: $x \in [0; +\infty)$.

Приклад 3.3. Розв'язати нерівність:

$$\left|\frac{x+7}{2-x}\right| \le 8$$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| \le a$, вводимо у програму дані функції: $y = \left|\frac{x+7}{2-x}\right|, y = 8$ та задану нерівність. На графіку (рис.10) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

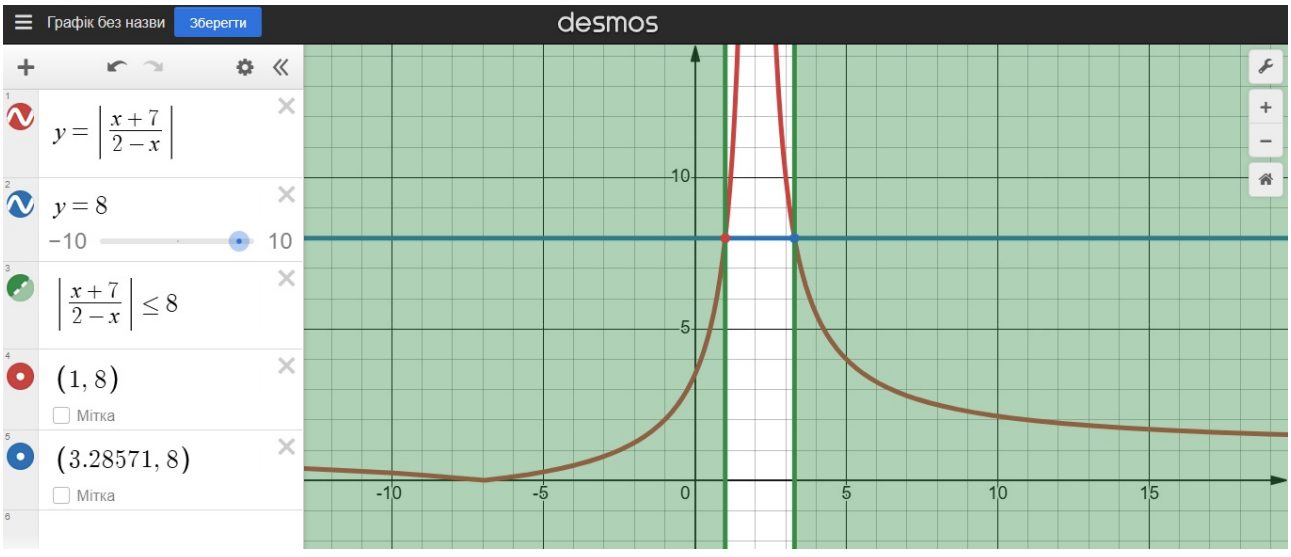


Рис.10

Відповідь: $x \in (-\infty; 1] \cup \left[3\frac{2}{7}; +\infty\right)$

Приклад 3.4. Розв'язати нерівність:

$$\left|\frac{x+1}{x-4}\right| - \left|\frac{x-2}{x+5}\right| \geq 0$$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \geq 0$. Вводимо дві функції $y = \left|\frac{x+1}{x-4}\right| - \left|\frac{x-2}{x+5}\right|, y = 0$ та дану нерівність. Дослідивши дані графіка (рис.11), та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв'язок нерівності.

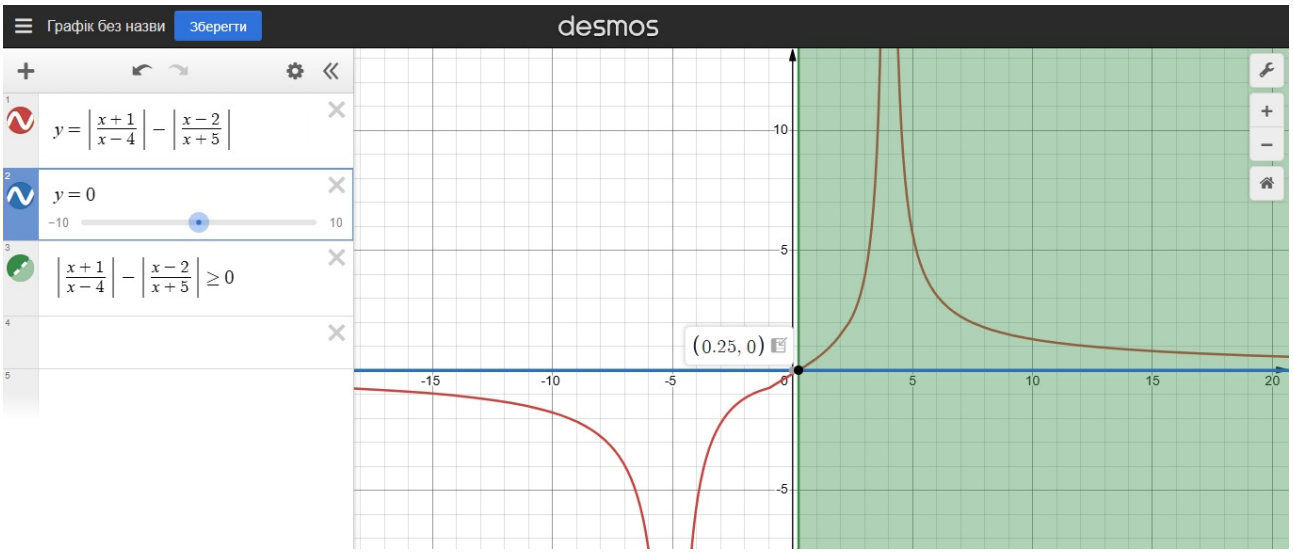


Рис.11

Відповідь: $x \in [0{,}25;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Приклад 3.5. Розв'язати нерівність:

$$|x^2 - 7x + 15| < 9$$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| \leq a$, вводимо у програму дані функції: $y = |x^2 - 7x + 15|,\ y = 9$ та задану нерівність. На графіку (рис.12) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

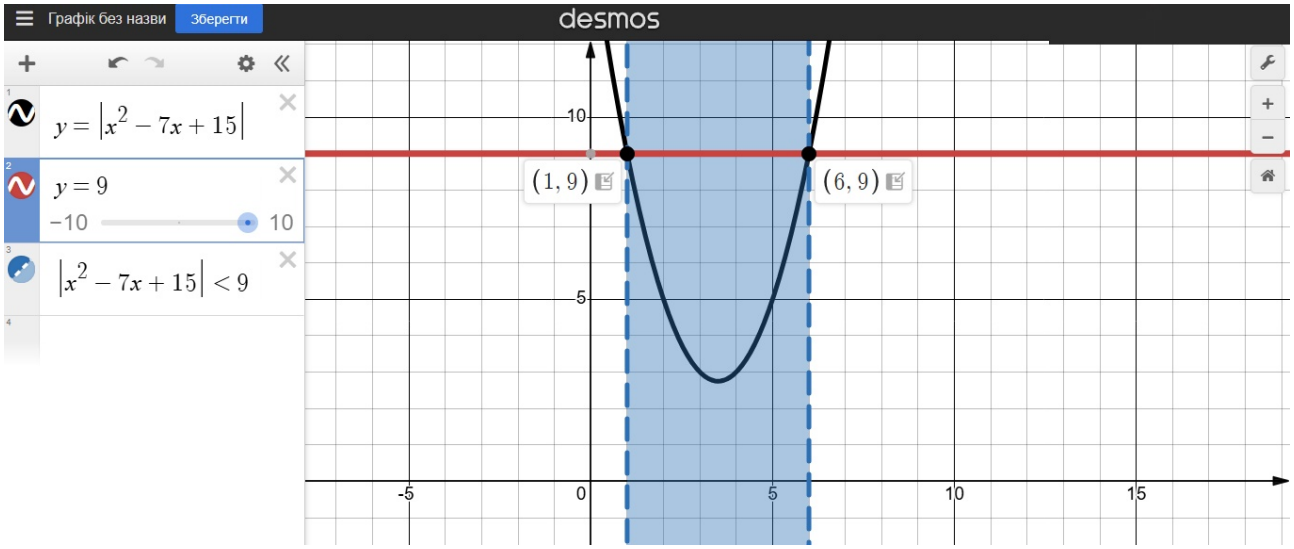


Рис.12

Відповідь: $x \in (1;\ 6)$.

Приклад 3.6. Розв'язати нерівність:

$$\log_3\left(\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x+5|}\right) > 0$$

Розв'язання. Вводимо у програму дані функції: $y = \log_3\left(\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x+5|}\right), y = 0$ та задану нерівність. На графіку (рис.13) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Рис.13

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Приклад 3.7. Розв'язати нерівність:

$$|sin\ x|\ -\ cos\ x\ <\ 1$$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| = \varphi(x)$, водимо дані двох функцій: $y = |\sin x| - \cos x$, $y = 1$ та задану нерівність. На графіку (рис.14) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

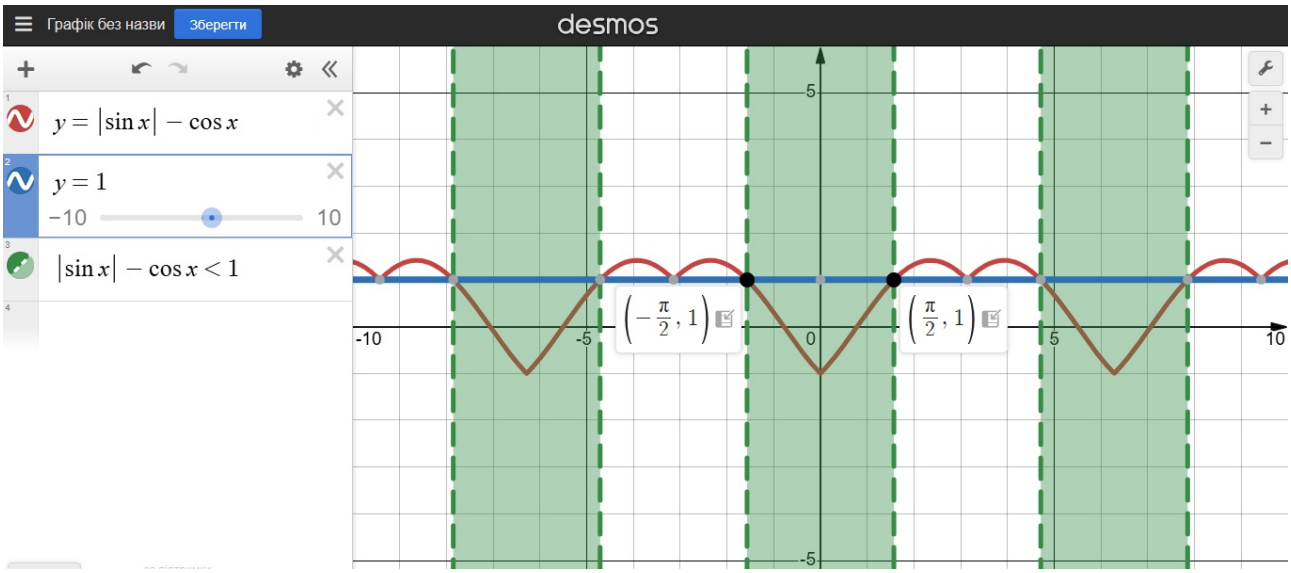


Рис.14

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

Приклад 3.8. Розв'язати нерівність:

$$|3^x\ -\ 1|\ +\ |3^x\ -\ 9|\ >\ 8.$$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0$, вводимо дані двох функцій: $y = |3^x - 1| + |3^x - 9|$, $y = 8$ та дану нерівність. На графіку (рис.15) ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

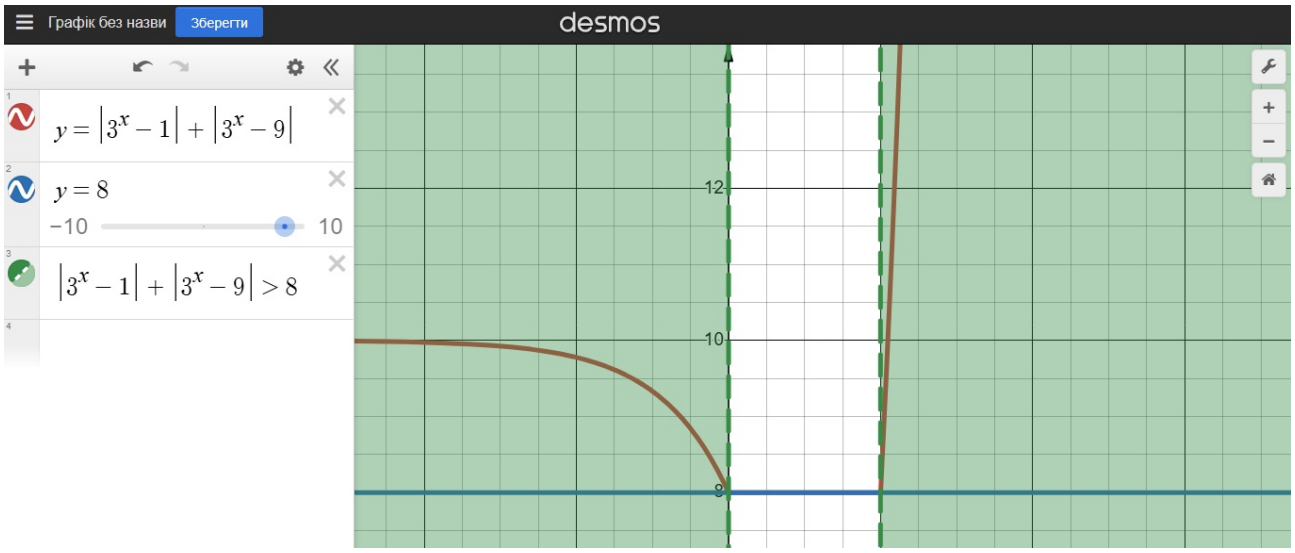


Рис.15

Відповідь: $x \in (-\infty;\ 0)\ \cup\ (2;\ +\infty)$.

Приклад 3.9. Розв'язати нерівність:

$$\log_5(x^2 - 4x + 4)\ <\ \log_5|x - 2|$$

Розв'язання. Це нерівність виду $F(x, |x|) \geq 0$, вводимо у програму дані функцій: $y = \log_5(x^2 - 4x + 4)$, $y = \log_5|x - 2|$ та задану нерівність. Дослідивши дані графіка (рис.16) та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв'язок нерівності.

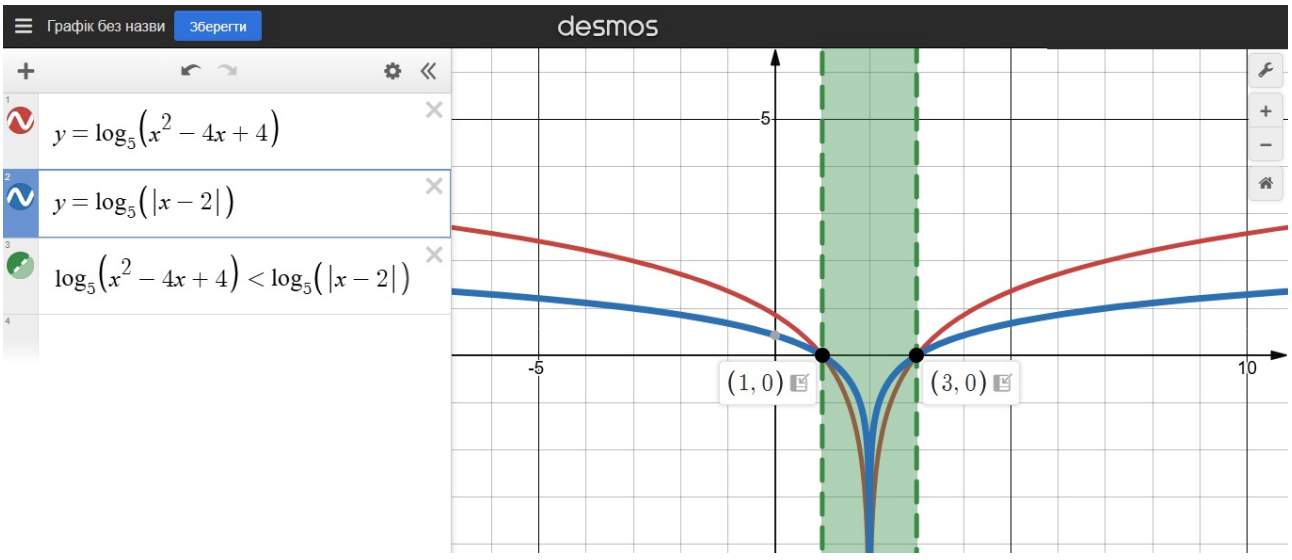


Рис.16

Відповідь: $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$.

Приклад 3.10. Розв’язати нерівність:

$$\frac{x^2-3|x|-4}{x+1}<-3x$$

Розв’язання. Це нерівність виду $F(x,|x|)\geq 0$, вводимо у програму дані функцій: $y=\frac{x^2-3|x|-4}{x+1}$, $y=-3x$ та задану нерівність. Дослідивши дані графіка (рис.17), та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв’язок нерівності.

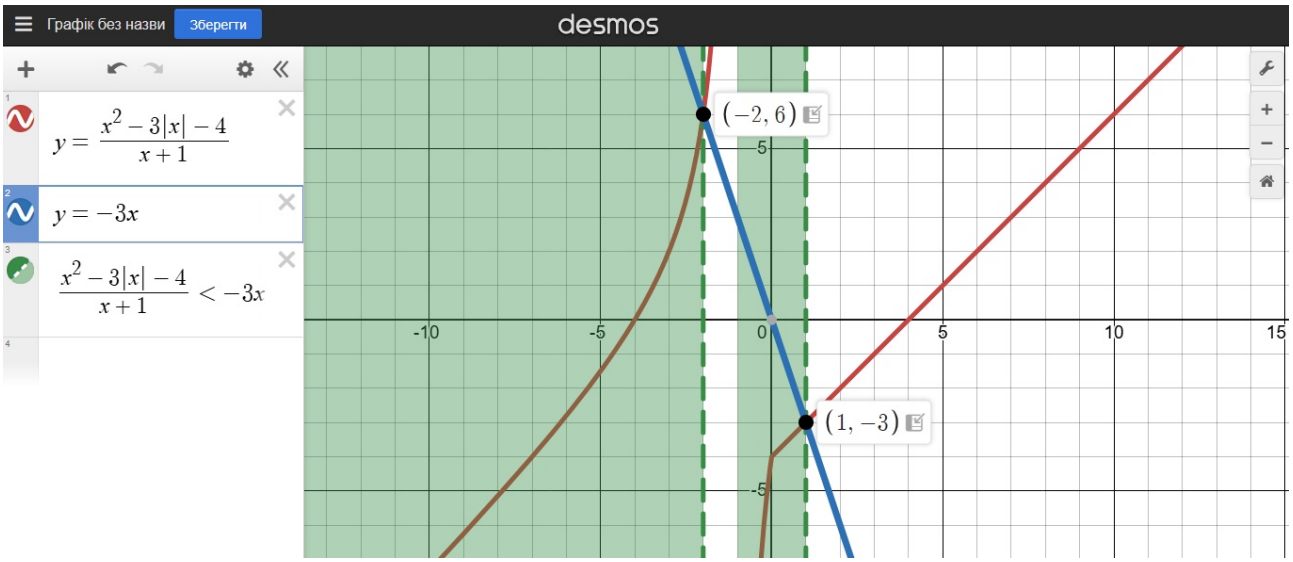


Рис.17

Відповідь: $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)$.

Застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у процесі навчання теми «Рівняння та нерівності з модулем» відкриває широкі можливості для значного покращення ефективності освітнього процесу. Залучення інтерактивних програм, таких як Desmos, а також використання мультимедійних ресурсів створює сприятливе середовище для полегшення сприйняття складних і абстрактних математичних понять. Ці інструменти сприяють покращенню візуалізації навчального матеріалу, забезпечують можливість гнучкого виконання завдань, а також адаптують навчальний процес до індивідуальних потреб кожного учня, враховуючи їхній рівень підготовки та стилі навчання.

Додатковою перевагою використання ІКТ є стимулювання активного залучення учнів до процесу навчання. Інтерактивні цифрові ресурси дають змогу самостійно досліджувати математичні моделі, перевіряти коректність власних

розрахунків у реальному часі й отримувати миттєвий зворотний зв’язок. Завдяки таким інструментам учні можуть не тільки глибше зануритися у вивчення графічних та аналітичних методів при розв’язуванні задач з модулем, але й розвинути свою здатність до критичного мислення, логічного аналізу й прийняття обґрунтованих рішень.

Однак впровадження ІКТ у навчальний процес супроводжується низкою викликів. Успішна реалізація такого підходу вимагає належного технічного оснащення навчального закладу, включаючи доступ до сучасних комп’ютерів та софту. Крім того, важливу роль відіграє методична компетентність вчителя, його здатність ефективно планувати уроки із застосуванням цифрових технологій та долати організаційні труднощі. Серед інших бар’єрів можна відзначити обмежений доступ до необхідних ресурсів або недостатню підготовленість учнів до роботи з деякими програмами.

Підсумовуючи, використання ІКТ у процесі вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» є перспективним напрямом, що не лише сприяє розвитку математичних компетенцій учнів, але й активно формує їхні цифрові навички. Це важливий крок для забезпечення успішної соціалізації молодого покоління у швидко змінному цифровому світі, де технології стають невід'ємною частиною професійної та повсякденної діяльності. Таке поєднання традиційних методів навчання з новітніми технологіями відкриває перед учнями більше можливостей для самореалізації та досягнення освітніх цілей.

ВИСНОВКИ

Засвоєння поняття «Модуль числа» потрібне не лише для вивчення алгоритмів арифметичних дій з додатними та від'ємними числами, воно сприяє в учнів формуванню абстрактного та алгоритмічного мислення, логічного та наочно-образного мислення, тренує пам'ять і покращує здатність концентруватися. Уміння розв'язувати рівняння та нерівності з модулем дозволить учням з легкістю розв'язувати, здавалося б, складні завдання.

Проведене дослідження теоретичних основ вивчення змістової лінії нерівностей (Розділ 1) показало важливість глибокого розуміння поняття модуля числа та його властивостей для успішного засвоєння учнями розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем. Аналіз існуючих підручників та методичних рекомендацій виявив певні прогалини у поданні матеріалу, що потребують доопрацювання.

У другому розділі (Розділ 2) було проаналізовано методичні особливості вивчення даної теми, зокрема, розглянуто алгебраїчне та геометричне тлумачення модуля, що дозволило визначити оптимальні підходи до навчання. Виявлено, що ефективність засвоєння матеріалу залежить від рівня підготовки учнів та застосовуваних методів розв'язування.

Дослідження показало переваги комплексного підходу, що поєднує алгебраїчні та геометричні методи. Визначено оптимальне місце теми «Рівняння та нерівності з модулем» у шкільному курсі математики, враховуючи наявні знання та навички учнів. Встановлено, що найбільш ефективними методами розв'язування нерівностей з модулем є інтервальний метод та метод розкриття модуля, вибір методу залежить від конкретної задачі та рівня підготовки учнів.

Третій розділ (Розділ 3) був присвячений застосуванню інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальному процесі. Аналіз показав, що використання ІКТ сприяє візуалізації понять, моделюванню процесів розв'язування задач та підвищенню мотивації учнів. Ефективне використання інтерактивних вправ та програмного забезпечення значно покращує розуміння

теми та підвищує ефективність навчання.

Результати дослідження свідчать про необхідність інтеграції ІКТ у навчальний процес для підвищення якості освіти з математики. На основі проведеного дослідження розроблено рекомендації щодо вдосконалення методики викладання теми «Рівняння та нерівності з модулем», що враховують як теоретичні основи, так і практичні аспекти навчання.

Запропоновані методичні рекомендації, включаючи використання ІКТ, можуть бути використані вчителями математики для підвищення ефективності навчання та досягнення кращих результатів у навчанні учнів.

Практична значущість роботи полягає в розробці методичних рекомендацій та дидактичних матеріалів, які можуть бути використані вчителями математики для покращення викладання теми «Рівняння та нерівності з модулем». Результати дослідження можуть бути використані для розробки нових підручників та навчальних посібників, що враховують сучасні тенденції у методиці навчання математики.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою та апробацією нових методик вивчення рівнянь та нерівностей з модулем, а також з дослідженням впливу різних факторів (наприклад, індивідуальних особливостей учнів) на успішність засвоєння цієї теми. Важливим напрямком є розробка адаптивних навчальних матеріалів, які враховують індивідуальні потреби кожного учня.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. «A History of Mathematics»(Історія математики) авторства Carl B. Boyer та Uta C. Merzbach. URL: https://surl.li/rzvbut
2. Бантова М.А. Методика викладання математики / М. А. Бантова, Т. В. Бельтюкова. – К.: Генеза, 2008. – 335 с
3. Вивальнюк Л. М., Соколенко О. І., Боровик В. Н. Математика: Посібник для факультативних занять, 9 клас – К.: Освіта, 1993. – 176 с.
4. Завало С. Т. Рівняння і нерівності: [посібник] /С. Т. Завало. - Київ: Рад. шк., 1973. - 384 с.
5. Ізюмченко Л. В. Раціональні рівняння та нерівності [Електронний ресурс]: метод. посіб. / Л. В. Ізюмченко, В. В. Нічишина, Р. Я. Ріжняк. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 84 с.
6. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с.
7. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти /О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2019. – 416 с.
8. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. /О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2015. – 256 с.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. /О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 272 с.
10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. /О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.
11. Істер О. С. Розв’язник основних конкурсних задач з математики зі збірника під редакцією М. І. Сканаві: Навч. посіб. – К.: А.С.К., 2004. – 280 с.
12. Каплан Я. Л. Розв’язування нерівностей: посіб. для вчителів / Я. Л. Каплан. - Київ: Рад. шк., 1967. - 124 с.
13. Коваленко В. Г. Розв’язування нерівностей - Київ: Вища шк., 1975. - 132 с.
14. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.

15. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. –148 с.
16. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.- метод. посібник/ І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 126 с.
17. Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп'ютерні технології. Розвивальне навчання /І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Тріада», 2007. – 171 с.
18. Математика. Інформаційні технології. Освіта: зб. матеріалів доповідей тез учасників XII Міжнародної науково-практичної конференції (Луцьк-Світязь, 23 травня-1 червня 2024 р.) Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. 270 с.
19. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту – Електронний ресурс. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2
20. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10-го кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Д. А. Номіровський. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.
21. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11-го кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Д. А. Номіровський. – Х.: Гімназія, 2019. – 352 с.
22. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7-го кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х.: Гімназія, 2020. – 288 с.
23. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 8-го кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х.: Гімназія, 2021. – 240 с.
24. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9-го кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 272 с.
25. Модуль в рівняннях, нерівностях та графіках функцій [Електронний ресурс] //Методичний вісник для вчителів математики / упоряд. М. Присяжнюк, – Івано-Франківськ, 2018. – С. 62.

26. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу [Електронний ресурс]: підручник /Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.
27. Падалко А.М. Падалко Н.Й. Основні шляхи формування навчально-пізнавальної активності майбутніх інженерів – електриків. Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка.-2012.- №63. С.126-130.
28. Падалко Н. Й. Методика навчання математики : метод. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2021. 143 с.
29. Петренко С. В., Мартиненко О. В. Особливості навчання математики в профільній школі /Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково- практичної конференції. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – С. 63-66.
30. Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика: зб. матеріалів доповідей (статей, тез) учасників Всеукр. інтернет-конф. (м. Луцьк, 18 квіт. 2024 р.) Луцьк: ВІППО, 2024. 224 с.
31. Прус А. В. Модуль у рівняннях та нерівностях [Електронний ресурс]: навч.-метод. посіб. /А. В. Прус. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. - 32 с.
32. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи //Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.
33. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ /С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
34. Чепіль Х. В. Модуль числа. Навчальний посібник [Електронний ресурс] /Відділ освіти Галицької районної державної адміністрації. Районний методичний центр /упоряд. Лавер Н. О. , 2014. – 68 с.