НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ

І. Б. Руденко, О. Б. Чернобай

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА



СЕРІЯ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ»

Серію «На допомогу студенту УДФСУ» засновано 2016 року

Редакційна колегія:
П. В. Пашко, д.е.н. (голова)
О. А. Шевчук, д.е.н. (заступник голови)
В. В. Топчій, д.ю.н.
Н. П. Мацелюх, к.е.н.
М. О. Кужелєв, д.е.н.
К. І. Швабій, д.е.н.
С. П. Піппа, д.е.н.
В. А. Мандрагеля, д.філософ.н.
В. В. Чмелюк, к.ю.н.
І. Й. Малинський, к.н.фіз.вих.
В. А. Шевчук, к.ю.н.

У СЕРІЇ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ» ВИЙШЛИ ДРУКОМ:

2016

«Методичні основи спеціальної фізичної та технічної підготовки студентів за розділом «Легка атлетика»

«Самостійна робота студента як одна з форм впливу на функціональну, фізичну та психологічну підготовленість»

«Організація роботи командира механізованого взводу»

«5.45-мм автомати Калашникова (АК-74, АКС-74, АК-74Н, АКС-74Н) та 5.45-мм ручні кулемети Калашникова (РПК-74, РПКС-74, РПК-74Н, РПКС-74Н)»

«Гранатомет підствольний ГП-25»

«Ручні гранати»

«Кулемети Калашникова – 7.62, ПК, УЖМ, ПКТ»

«Ручний протитанковий гранатомет РПГ-7»

«9-мм пістолет Макарова (ПМ)»

2017

«Вища та прикладна математика»

«Цивільний захист»

«Програмування мовою JAVA : практикум»

«Інформаційні системи і технології в юридичній практиці»

«Дослідження операцій: практикум»

«Чисельні методи»

«English for Students of Finance»

«Основи військової розвідки»

ДЕРЖАВНА ФІСКАЛЬНА СЛУЖБА УКРАЇНИ
УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

СЕРІЯ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ»
Заснована в 2016 році

І. Б. Руденко,
О. Б. Чернобай

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Ірпінь
2017

УДК 517(075.8)
ББК 22.11я73
Р83

Рекомендовано до друку Вченою радою
Університету ДФС України
(протокол № 3 від 27 лютого 2017 року)

Рецензенти:
Семко М. М., д.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики Університету ДФС України;
Березанський Ю. М., д.ф.-м.н., професор, академік НАН України, головний науковий співробітник Інституту математики НАН України.

Руденко І. Б.
Р83 Вища та прикладна математика : навч. посіб. / І. Б. Руденко, О. Б. Чернобай ; Державна фіскальна служба України, Університет ДФС України. – Ірпінь, 2017. – 374 с. – (Серія «На допомогу студенту УДФСУ», т. 10).

ISBN 978-966-337-446-8

Навчальний посібник написаний відповідно до програми навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» для підготовки здобувачів вищої освіти першого бакалаврського рівня.

Посібник містить основні поняття, методи розв'язання, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, необхідні таблиці та завдання для самостійної роботи студентів.

Рекомендований для студентів денної та заочної форми навчання економічних спеціальностей вищих навчальних закладів та коледжів, які вивчають дисципліну „Вища та прикладна математика".

УДК 517(075.8)
ББК 22.11я73

© Руденко І. Б., Чернобай О. Б., 2017
© Університет державної фіскальної служби України, 2017

ISBN 978-966-337-446-8

ЗМІСТ

ВСТУП.....12

РОЗДІЛ 1. ВИЩА МАТЕМАТИКА.....13

Тема 1. Матриці та визначники.....13

1.1. Матриці, основні поняття.....13

1.2. Дії над матрицями. Властивості дій над матрицями.....15

1.3. Визначники. Обчислення визначників.....17

1.4. Властивості визначників.....19

1.5. Обчислення визначників n-го порядку.....20

1.6. Поняття оберненої матриці.....23

1.7. Знаходження оберненої матриці.....24

1.8. Ранг матриці.....26

1.9. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.....28

Завдання для самостійної роботи.....30

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....31

2.1. СЛАР. Основні поняття.....31

2.2. Теорема Кронекера-Капеллі.....33

2.3. Розв'язування систем з однаковою кількістю рівнянь та невідомих.....35

2.4. Розв'язок СЛАР методом Гаусса.....38

2.5. Метод Жордана-Гаусса.....40

2.6. Системи лінійних однорідних рівнянь.....43

Завдання для самостійної роботи.....44

Тема 3. Векторний простір та його базис.....45

3.1. Векторний простір, його розмірність і базис.....45

3.2. Розклад вектора за базисом.....48

Завдання для самостійної роботи 49
Тема 4. Рівняння прямої та площини 50
4.1. Різновиди рівняння прямої на площині 50
4.2. Кут між двома прямими 57
4.3. Відстань від точки до прямої 59
4.4. Пряма і площина в просторі 61
4.5. Кут між площинами 65
4.6. Відстань від точки до площини 65
4.7. Різновиди рівняння прямої у просторі 66
4.8. Кут між прямими 69
4.9. Кут між прямою і площиною 69
Завдання для самостійної роботи 72
Тема 5. Криві лінії другого порядку 73
5.1. Коло 73
5.2. Еліпс 74
5.3. Гіпербола 79
5.4. Парабола 83
5.5. Дослідження рівняння другого порядку 86
Завдання для самостійної роботи 86
Тема 6. Вступ до математичного аналізу 87
6.1. Границя числової послідовності та функції 87
6.2. Границя функції 89
6.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції 91
6.4. Основні теореми про границю 97
6.5. Розкриття деяких невизначеностей 98
6.6. Перша важлива границя 100
6.7. Друга важлива границя 102
6.8. Неперервність функції в точці 103

6.9. Точки розриву функції та їх класифікація 108

Тема 7. Диференціальне числення функції однієї змінної 111

7.1. Похідна функції однієї змінної.....111

7.2. Правила диференціювання функцій. Таблиця похідних.....114

7.3. Економічний зміст похідної 118

7.4. Похідна складної функції і оберненої функції 119

7.5.Диференціювання функцій заданих неявно, параметрично та степенево-показникових.....120

7.6. Диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень.....123

7.7. Основні теореми диференціального числення 126

7.8. Еластичність функції. Задача про податок 130

7.9. Зростання і спадання функції.....132

7.10. Екстремуми функції.....134

7.11. Опуклість, вгнутість, точки перегину 139

7.12. Асимптоти графіка функції 141

Завдання для самостійної роботи.....148

Тема 8. Функції кількох змінних 152

8.1. Функції кількох змінних. Основні поняття.....152

8.2. Функції двох змінних. Область визначення. Лінії рівня.....154

8.3. Частинний приріст та частинні похідні.....158

8.4. Повний приріст та повний диференціал функції двох змінних.....160

8.5. Похідна за напрямом. Градієнт 162

8.6. Частинні похідні вищих порядків 164

8.7. Поняття екстремуму 165

8.8. Безумовні екстремуми функції двох змінних.....166

8.9. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області 168
8.10. Умовний екстремум. Метод Лагранжа 170
8.11. Задача оптимізації виробництва 172
8.12. Поняття про емпіричні формули 173
8.13. Метод найменших квадратів 173
8.14. Лінійна залежність 174
8.15. Квадратична залежність 176
Завдання для самостійної роботи 177
Тема 9. Інтегральне числення 179
9.1. Первісна та невизначений інтеграл 179
9.2. Методи інтегрування 181
9.3. Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен 188
9.4. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції 189
9.5. Інтегрування деяких типів ірраціональностей 191
9.6. Інтегрування найпростіших раціональних дробів 193
9.7. Інтегрування раціональних дробів методом невизначених коефіцієнтів 194
9.8. Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції 199
9.9. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла 200
9.10. Означення визначеного інтеграла 201
9.11. Основні властивості визначеного інтеграла 202
9.12. Визначений інтеграл із змінною верхнею межею. Формула Ньютона-Лейбніца 202
9.13. Метод наближеного обчислення визначеного інтеграла 207

9.14. Визначений інтеграл у економічних задачах.....208
9.15. Поняття про невласні інтеграли.....209
9.16. Невласні інтеграли першого роду.....210
9.17. Невласні інтеграли другого роду.....213
Завдання для самостійної роботи.....215

РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....217
Тема 10. Основні поняття теорії ймовірностей.....217
10.1. Класифікація подій. Операції над подіями.....217
10.2. Операції над подіями.....219
10.3. Класичне означення ймовірності.....221
10.4. Статистичне та геометричне означення ймовірності.....222
10.5. Елементи комбінаторики.....223
10.6. Формули додавання ймовірностей несумісних подій.....226
10.7. Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність.....227
10.8. Множення ймовірностей незалежних подій.....227
10.9. Множення ймовірностей залежних подій.....228
10.10. Ймовірність появи хоча б однієї події.....229
10.11.Теорема додавання ймовірностей сумісних подій...230
10.12. Формула повної ймовірності.....231
10.13. Ймовірність або теорема гіпотез (формули Байєса).....232
10.14. Незалежні випробування за схемою Бернуллі.....234
10.15. Найімовірніше число появи події в схемі Бернуллі.....235
10.16. Формула Пуассона.....236
10.17. Локальна та інтегральна функції Лапласа.....237

10.18. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа 238
10.19. Теорема Бернуллі 240
Завдання для самостійної роботи 241
Тема 11. Випадкові величини 242
11.1. Одновимірні випадкові величини 242
11.2. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики 243
11.3. Закон розподілу неперервних випадкових величин 245
11.4. Числові характеристики випадкових величин 248
11.5. Дисперсія випадкових величин 249
11.6. Середнє квадратичне відхилення 250
11.7. Мода $M_0(X)$, медіана $M_в(X)$ 251
11.8. Початкові та центральні моменти 253
11.9. Асиметрія та ексцес 254
Завдання для самостійної роботи 256
Тема 12. Закони розподілу випадкових величин та їхні числові характеристики 257
12.1. Біноміальний закон розподілу: означення, приклади, основні числові характеристики 257
12.2. Закон Пуассона 259
12.3. Геометричний розподіл 261
12.4. Рівномірний розподіл 261
12.5. Показниковий розподіл (експоненціальний) 263
12.6. Стандартизований нормальний розподіл 266
12.7. Нормальний розподіл 266
12.8. Нормована функція Лапласа 267
12.9. Правило трьох сигм 268

12.10. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин....269
12.11. Двовимірні випадкові величини....269
12.12. Кореляційний момент (коваріація)....274
12.13. Умовні закони розподілу двовимірної дискретної випадкової величини....276
Завдання для самостійної роботи....280
Тема 13. Закон великих чисел. Граничні теореми....281
13.1. Лема Чебишева....281
13.2. Нерівність Чебишева....282
13.3. Теорема Чебишева (про стійкість середнього арифметичного)....284
13.4. Центральна гранична теорема....285
13.5. Теорема Бернуллі....285
13.6. Теорема Ляпунова....286
13.7. Теорема Пуассона....286
13.8. Функції одного випадкового аргументу....287
13.9. Числові характеристики....289
13.10. Функції неперервного випадкового аргументу....291
13.11. Функція двох випадкових аргументів....292
Завдання для самостійної роботи....292

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА....293
Тема 14. Основні поняття математичної статистики....293
14.1. Основні положення вибіркового методу....293
14.2. Функція розподілу вибірки....294
14.3. Основні числові характеристики варіаційного ряду....298
Завдання для самостійної роботи....301

Тема 15. Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів. Статистичні гіпотези та статистичні критерії 302

15.1. Статистичне оцінювання 302

15.2. Точкові оцінки параметрів розподілу 303

15.3. Метод максимальної правдоподібності 304

15.4. Інтервальні оцінки параметрів розподілу 307

15.5. Статистичні гіпотези та їх види 308

15.6. Похибки перевірки гіпотез 309

15.7. Загальний алгоритм перевірки статистичних гіпотез 310

15.8. Критерій узгодження Пірсона 311

15.9. Правило Пірсона 311

Завдання для самостійної роботи 313

Тема 16. Елементи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу 314

16.1. Загальна інформація 314

16.2. Однофакторний дисперсійний аналіз 315

16.3. Елементи регресійного та кореляційного аналізу 319

Завдання для самостійної роботи 324

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ 325

Тема 17. Задачі лінійного програмування 325

17.1. Предмет курсу «Математичне програмування» 325

17.2. Класифікація задач математичного програмування 328

17.3. Задача про використання сировини 329

17.4. Задача про раціональне харчування 330

17.5. Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування 331

17.6. Задачі з n змінними 337

17.7. Форми запису задач лінійного програмування 339
17.8. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом 341
17.9. Визначення початкового опорного плану 342
17.10. Симплексні таблиці 343
17.11. Перевірка опорного плану на оптимальність 345
17.12. М-задача 348
17.13. Поняття двоїстості 352
Завдання для самостійної роботи 356
Тема 18. Транспортна задача 358
18.1. Постановка транспортної задачі 358
18.2. Метод потенціалів 363
Завдання для самостійної роботи 368

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 370

ВСТУП

Підготовка спеціалістів економічного напрямку передбачає оволодіння базовими знаннями з вищої математики, теорії ймовірностей, математичної статистики та математичного програмування. Математичні знання дозволяють оцінювати, контролювати, керувати та прогнозувати процеси, що відбуваються у економічній сфері, у податковому регулюванні виробництва, успішно засвоювати фундаментальні дисципліни, що забезпечують основи економічних знань та закладають базу для наступного вивчення спеціалізованих економічних дисциплін. Вища та прикладна математика також формує загальний світогляд студентів, логічне мислення, культуру праці. Вона дає можливість навчитись керувати економічними системами, тобто використовуючи набуті знання знаходити найефективніший спосіб досягнення потрібних результатів.

З метою вдосконалення математичної підготовки та на основі досвіду роботи викладачів кафедри вищої математики підготовлено навчальний посібник „Вища та прикладна математика".

Матеріал посібника містить чотири розділи: „Вища математика", „Теорія ймовірностей", „Математична статистика" та „Математичне програмування". Для зручності користування кожен розділ поділено на окремі теми, до кожної з яких наведено приклади для самостійної роботи.

Дане видання не тільки допоможе студентам засвоїти курс вищої та прикладної математики, а й буде корисним для викладачів вищої математики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Автори будуть вдячні читачам за критичні зауваження як щодо змісту посібника, так і конкретних задач чи прикладів.

Висловлюємо щиру вдячність рецензентам: доктору фізико-математичних наук, професору М. М. Семку та доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України Ю. М. Березанському .

РОЗДІЛ 1
ВИЩА МАТЕМАТИКА

Тема 1. Матриці та визначники

1.1. Матриці, основні поняття

Означення. Матрицею *розміром* $m \times n$ *називається прямокутна таблиця чисел, розміщених у m рядках і n стовпцях.*

Позначається матриця так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або скорочено } A = (a_{ij}), \text{ де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Числа a_{ij}, що складають матрицю, називають її ***елементами.***

Елементи матриці $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$, у яких номер рядка і стовпчика співпадають, утворюють головну діагональ матриці.

Означення. *Дві матриці* $A = (a_{ij})$ *та* $B = (b_{ij})$ *називаються* ***рівними****, якщо вони однакового розміру і їх відповідні елементи рівні між собою, тобто A = B, якщо* $a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$

Різновиди матриць

1. Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців називається ***квадратною.*** Квадратну матрицю розміром $n \times n$ називають матрицею *n*-го порядку.

2. Квадратна матриця, у якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***.

Наприклад, $D_{3x3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною***. Позначають буквою Е.

Наприклад, одинична матриця 3-го порядку $E_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Одинична матриця n-го порядку має вигляд $E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

4. Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, розміщені по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

5. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю називається ***нульовою*** і позначається буквою О.

Вона має вигляд: $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

6. Матриця, що складається з одного стовпця, називається ***матрицею-стовпцем***, або вектором – стовпцем.

Матриця, що складається з одного рядка, називається ***матрицею-рядком***, або вектором-рядком.

Їх вигляд: $A_{mx1}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_m\end{pmatrix}$, $B_{1xn}=\left(b_1\ b_2\dots b_n\right)$.

7. Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто $(5)_{1\times 1}$ є число 5.

Означення. *Якщо в матриці А поміняти місцями рядки і стовпці із збереженням їх порядку, то одержана матриця називається* ***транспонованою*** *до матриці А і позначається* A^T.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Якщо $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

Транспонування матриць має таку властивість: $\left(A^T\right)^T=A$.

1.2. Дії над матрицями. Властивості дій над матрицями

Додавання матриць

Дію додавання матриць розглядають лише для матриць однакових розмірів.

Означення. ***Сумою*** *двох матриць* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *та* $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *називається матриця* $C_{m\times n}=(c_{ij})$ *така, що* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, *де* $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$

Приклад. Знайти $A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\-2 & -5 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\-2 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\2 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається різниця матриць.

Добуток матриці на число

Означення. ***Добутком*** *матриці* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на дійсне число* k *називається матриця* $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *така, що* $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, *де* $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$

Приклад. Знайти добуток $A\cdot k$, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ $k=2$.

Розв'язання

$$A\cdot k=2\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\6 & 8 & 10\end{pmatrix}.$$

Множення матриць

Множення матриць визначається тільки для узгоджених матриць.

Означення. *Матриця A називається* ***узгодженою*** *з матрицею B, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.*

Означення. ***Добутком*** *матриці* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицю* $B_{n\times p}=(b_{jk})$ *називається матриця* $C_{m\times p}=(c_{ik})$ *для якої* $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, *де* $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, *тобто елемент i-го рядка і k-го стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B.*

Якщо матриці A і B квадратні одного розміру, то добутки AB та BA завжди існують.

Легко показати, що $AE = EA = A$, де A – квадратна матриця, E – одинична матриця того ж розміру.

Приклад. Знайти добуток матриць $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A\cdot B=\left(\begin{array}{ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти добуток $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Добуток AB не визначений, оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B. При цьому добуток BA визначено

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9 & 2+3 & 1+0\\ 1+6 & 2+2 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5 & 1\\ 7 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Означення. *Матриці A і B називають* ***переставними*** *або комутативними, якщо $AB = BA$.*

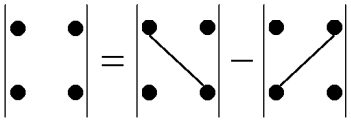
1.3. Визначники. Обчислення визначників

Означення. *Квадратній матриці A n-го порядку можна поставити у відповідність число* $\det A$ *(або $|A|$, або Δ), яке називають* ***визначником цієї матриці.***

1. При $n=1$ $A=(a_1)$, $\det A = a_1$.

2. При $n=2$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обчислення визначника другою порядку можна проілюструвати такою схемою:



Приклад. Знайти визначники матриць: а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 - (-15) = 27$.

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

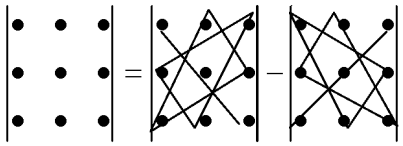
3. При $n=3$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Визначник матриці A також називають її ***детермінантом***.

При обчислені визначників третього порядку зручно користуватися ***правилом трикутника***, яке схематично можна записати так:



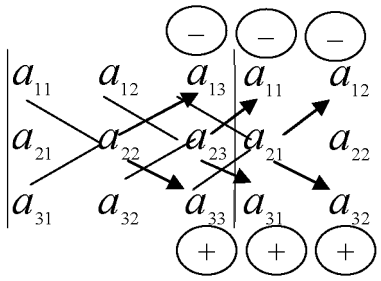
Приклад. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 +$$

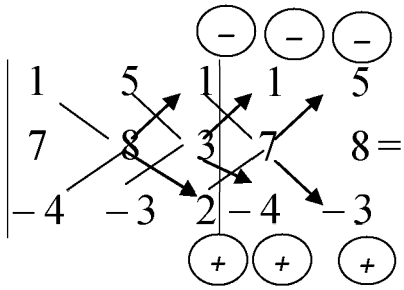
$$+3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

За іншою схемою дописуються два перших стовпчики до матриці A. В результаті дістають прямокутну матрицю розміром 3×5. Тоді додатні та від'ємні доданки беруть за схемою (правило Саррюса):



Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язання



$$= 1\cdot 8\cdot 2 + 5\cdot 3\cdot(-4) + 1\cdot 7\cdot(-3) -$$

$$-1\cdot 8\cdot(-4) - 1\cdot 3\cdot(-3) - 2\cdot 7\cdot 5 = -94.$$

1.4. Властивості визначників

Для визначників третього порядку можна навести властивості, які будуть справедливі для визначників довільного порядку.

1. Величина визначника не зміниться, якщо всі рядки змінити на стовпці з тим же номером.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Перестановка двох стовпців або рядків визначника рівносильна множенню визначника на (–1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо визначник має два рівних стовпці чи рядки, то він дорівнює нулю.

4. Множення всіх елементів деякого рядка чи стовпця визначника на числа k рівносильне множенню цього визначника на це число k.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка чи стовпця визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

6. Якщо відповідні елементи двох стовпців або рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожен елемент деякого стовпця чи рядка визначника являє собою суму двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_{12} & a_{13} \\ c & a_{22} & a_{23} \\ d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого стовпця чи рядка додати відповідні елементи іншого стовпця чи рядка, помножені на спільний множник, то величина визначника не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.5. Обчислення визначників n-го порядку

Мінори. Алгебраїчні доповнення

Розглянемо визначник *n*-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення. ***Мінором*** M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника n-го порядку називається визначник (n–1)-го порядку, який одержимо з цього визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент* a_{ij}.

Якщо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то мінори $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Означення. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника називають мінор цього елемента, взятий із знаком "плюс", якщо сума номерів рядка і стовпчика – число парне, та зі знаком "мінус", якщо – непарне, тобто*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} визначника $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) = -(12+1) = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5.$$

Теорема Лапласа. *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots a_{1n} A_{1n}.$$

Приклад. Обчислити визначник матриці за теоремою Лапласа

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для обчислення визначника вибирають рядок або стовпець, де є нульові елементи.

Виберемо 1 стовпчик, маємо

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41} =$$

$$= 3 \cdot M_{11} + 1 \cdot M_{21} - 1 \cdot M_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122.$$

Зведення визначника до трикутного вигляду

Користуючись властивостями визначника, його зводять до трикутного вигляду, коли всі елементи, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Такий визначник дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots \cdot a_{nn}.$$

Приклад. Обчислити визначник, звівши його до трикутного вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Поміняємо місцями перший та третій рядки, змінивши знак визначника, додамо до елементів другого рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на (-3), маємо

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}^{\times(-3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів другого рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на (-2), одержимо

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}^{\times(-2)} \Big\downarrow = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

З третього рядка винесемо спільний множник (-3) за знак визначника

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями другий і третій рядки. При цьому знак визначника зміниться $\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix}$.

Додамо до елементів третього рядка відповідні елементи другого рядка, помножені на 6, одержимо

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -3.$$

1.6. Поняття оберненої матриці

Нехай А –квадратна матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. *Квадратна матриця А називається* ***неособливою****, якщо визначник цієї матриці не дорівнює нулю:* $\Delta(\mathrm{A}) \neq 0$.

Означення. *Транспоновану матрицю, складену з алгебраїчних доповнень до її елементів, називають* ***приєднаною*** *до матриці А.*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. ***Оберненою*** *для заданої квадратної матриці А називається така матриця* A^{-1}*, добуток якої на матрицю А як зліва, так і справа, дорівнює одиничній матриці, тобто* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$*, де Е – одинична матриця такого порядку, що і матриця А. Матриця* A^{-1} *має той же розмір що й матриця А.*

1.7. Знаходження оберненої матриці

Теорема. *Будь-яка неособлива матриця має обернену.*

Доведення

Нехай задана матриця 3-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \det A\neq 0.$$

Складемо приєднану матрицю до матриці A

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

знайдемо добуток матриць A і A^*:

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}A_{13} & .... & a_{11}\cdot A_{31}+a_{12}\cdot A_{32}+a_{13}\cdot A_{33} \\ a_{21}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{12}+a_{23}\cdot A_{13} & .... & a_{21}\cdot A_{31}+a_{22}\cdot A_{32}+a_{23}\cdot A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}\cdot A_{12}+a_{33}A_{13} & ... & a_{31}A_{31}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}=\det A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\det A\cdot E,$$ тобто

$A\cdot A^*=\det A\cdot E$ (використовувалися властивості визначників).

Аналогічно маємо, що $A^*\cdot A=\det A\cdot E$. Одержані рівності запишемо у вигляді $A\cdot\dfrac{A^*}{\det A}=E$ і $\dfrac{A^*}{\det A}\cdot A=E$. Порівнюючи отримані результати з означенням оберненої матриці, маємо

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A},\ \text{тобто}\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник цієї матриці A, $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця особлива, і до неї оберненої не існує.
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A.
3. Скласти приєднану матрицю A^*.
4. Знайти обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

5. Якщо потрібно, то зробити перевірку, використовуючи означення $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

1. Знаходимо *det A*:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 0 + 3 - 8 = 5 \neq 0$$

2. Знаходимо A_{ij} до кожного елемента цієї матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Складаємо A^* (приєднану до A):

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Обернена матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^* = \dfrac{1}{5} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$

5. Перевіряємо:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -4/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обчислюємо визначник *det A*:

$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -48 - (-48) = 0$ – матриця особлива, отже, оберненої не існує.

1.8. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділяємо в ній k рядків і k стовпців $(k \le \min(m;n))$. Із елементів, які стоять на перетині взятих рядків і стовпців, складаємо визначник k-го порядку підматриці k-го порядку. Всі такі визначники називаються ***мінорами цієї матриці.***

В матриці A виділили мінор 2-го порядку.

Означення. ***Рангом матриці*** *називається найвищий порядок мінора цієї матриці, що не дорівнює нулю.*

Позначають r, r(A) або rang A.

Означення. *Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається* ***базисним****. У матриці може бути декілька базисних мінорів.*

Властивості рангу матриці

1. Ранг матриці дорівнює нулю тільки тоді, коли матриця нульова. В інших випадках ранг матриці дорівнює деякому додатному числу.

2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із її розмірів m чи n, тобто $0 \le r \le min\ (m, n)$.

3. Для квадратної матриці n-го порядку $r = n$ тільки тоді, коли матриця неособлива.

4. Якщо $r < n$, то визначник даної квадратичної матриці дорівнює нулю.

Розглянемо два методи знаходження рангу матриці.

Метод обвідних мінорів

1. Метод обвідних мінорів полягає в тому, що обчислюють поступово мінори, переходячи від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо при цьому знайдено відмінний від нуля мінор $к$-го порядку, то потребують обчислення тільки мінори порядку $(к+1)$ – обвідні. У випадку коли всі обвідні мінори $(к+1)$-го порядку дорівнюють нулю, ранг матриці дорівнює $к$.

Це – громіздка робота для матриць, порядок яких досить великий.

Приклад. Знайти ранг матриці $A_{3\times5}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Оскільки в матриці A є мінори 1-го порядку, які не дорівнюють нулю, то її ранг може дорівнювати одиниці. Мінор 2-го порядку $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=0$, перевіряємо інші мінори 2-го порядку: $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow r|A|\geq2.$

Переставимо цей мінор у лівий верхній кут, переставивши 2-й і 3-й стовпчики: $A\sim A_1=\left(\begin{array}{cc:ccc}2 & 3 & -1 & -2 & 4\\ 4 & 5 & -2 & 1 & 7\\ \hdashline 2 & 1 & -1 & 8 & 2\end{array}\right)$.

Обводимо цей мінор 2-го порядку третім рядком і третім стовпцем: $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0.$

Далі обводимо третім рядком і четвертим стовпчиком: $\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{vmatrix}=0$. Нарешті, обводимо третім рядком і п'ятим стовпчиком $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$. Отже, є відмінний від нуля мінор 2-го порядку, а всі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю.

Відповідь: $r(A)=2$.

1.9. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

Метод елементарних перетворень полягає в застосуванні елементарних перетворень матриці при зведені її до діагонального вигляду.

Елементарні перетворення матриці

При таких елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

1. Перестановка місцями довільних двох рядків (або стовпців).

2. Транспонування матриць.

3. Множення кожного елемента довільного рядка (або стовпця) на число, яке не дорівнює нулю.

4. Викреслювання рядка (або стовпця), який містить усі нульові елементи.

5. Додавання до елементів довільного рядка (або стовпця) відповідних елементів іншого рядка (або стовпця), помножених на одне і те ж число, яке не дорівнює нулю.

Означення. *Дві матриці називаються* ***еквівалентними****, якщо їх ранги рівні. Це записують так A~B, тобто r(A) = r(B). За допомогою елементарних перетворень матрицю зводять до діагонального вигляду. Ранг матриці буде дорівнювати кількості діагональних елементів, які не дорівнюють нулю.*

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A_{3\times5}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі: спочатку поміняємо місцями перший та другий рядки.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7\end{pmatrix}\times(-3)\ \sim\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11\\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11\\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22\end{pmatrix}\times2\ \sim\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11\end{pmatrix}.\ \text{r(A)=2.}$$

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ x(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Оскільки можна третій та четвертий стовпці поміняти місцями і отримати третій елемент головної діагоналі, який відмінний від нуля, то rang $(A) = 3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти матрицю $D = AB - 3BA + 4E$, $M = A^2 + B^T$, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити визначники різними способами:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

3. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -4 & -2x & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

4. Знайти матриці обернені до даних:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

2.1. СЛАР. Основні поняття

Означення 1. *СЛАР m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \ldots \quad a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \ldots \quad a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа $a_{ij,}\ i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$ *– коефіцієнти, числа* b_i *– вільні члени,* x_i *– невідомі.*

Таку систему зручно записувати в матричній формі,

$$\mathbf{A \cdot X = B,}$$

де A – матриця коефіцієнтів системи, називається *основною матрицею*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

A_1 – називають розширеною матрицею системи:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

X – матриця-стовпчик невідомих x_i:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B – матриця-стовпчик вільних членів b_i:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Означення. ***Розв'язком СЛАР*** *називається n значень невідомих* $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = C_3$,, ... $x_n = C_n$, *при підстановці яких усі рівняння системи перетворюються в правильні рівності.*

Означення. *Система рівнянь називається* ***сумісною****, якщо вона має хоча б один розв'язок, і* ***несумісною****, якщо вона не має жодного розв'язку.*

Означення. *Сумісна система називається* ***визначеною****, якщо вона має лише один розв'язок, і* ***невизначеною****, якщо має безліч розв'язків. В останньому випадку кожний розв'язок називається частковим розв'язком системи.*

Означення. *Сукупність усіх часткових розв'язків називається* ***загальним розв'язком***.

Означення. *Дві системи рівнянь називаються* ***рівносильними*** *(еквівалентними), якщо множини їхніх розв'язків співпадають.*

Еквівалентні *системи одержуються при елементарних перетвореннях системи, які виконуються лише над рядками матриці.*

Означення. *СЛАР називається* ***однорідною****, якщо всі вільні члени* b_i *дорівнюють нулю:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \ldots \quad a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однорідна система завжди сумісна, оскільки $x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$ *є розв'язком системи. Цей розв'язок називається нульовим або тривіальним.*

2.2. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задано система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \ldots \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \ldots \quad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Відповідь на питання сумісності цієї системи дає теорема Кронекера-Капеллі або необхідна і достатня умова сумісності системи.

Теорема. *СЛАР сумісна тоді і тільки тоді, якщо ранг основної матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи* A_1.

$r(A) = r(A_1)$ (без доведення)

Приклад . Дослідити систему на сумісність $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$.

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи; визначимо $r(A)$ та $r(A_1)$

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-2)+ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \times 5 \; + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A_1) = 3 = n$, тому система сумісна і має єдиний розв'язок.

Алгоритм розв'язування СЛАР

1. Знайти ранг основної і розширеної матриць системи. Якщо $r(A) \neq r(A_1)$, то система несумісна.

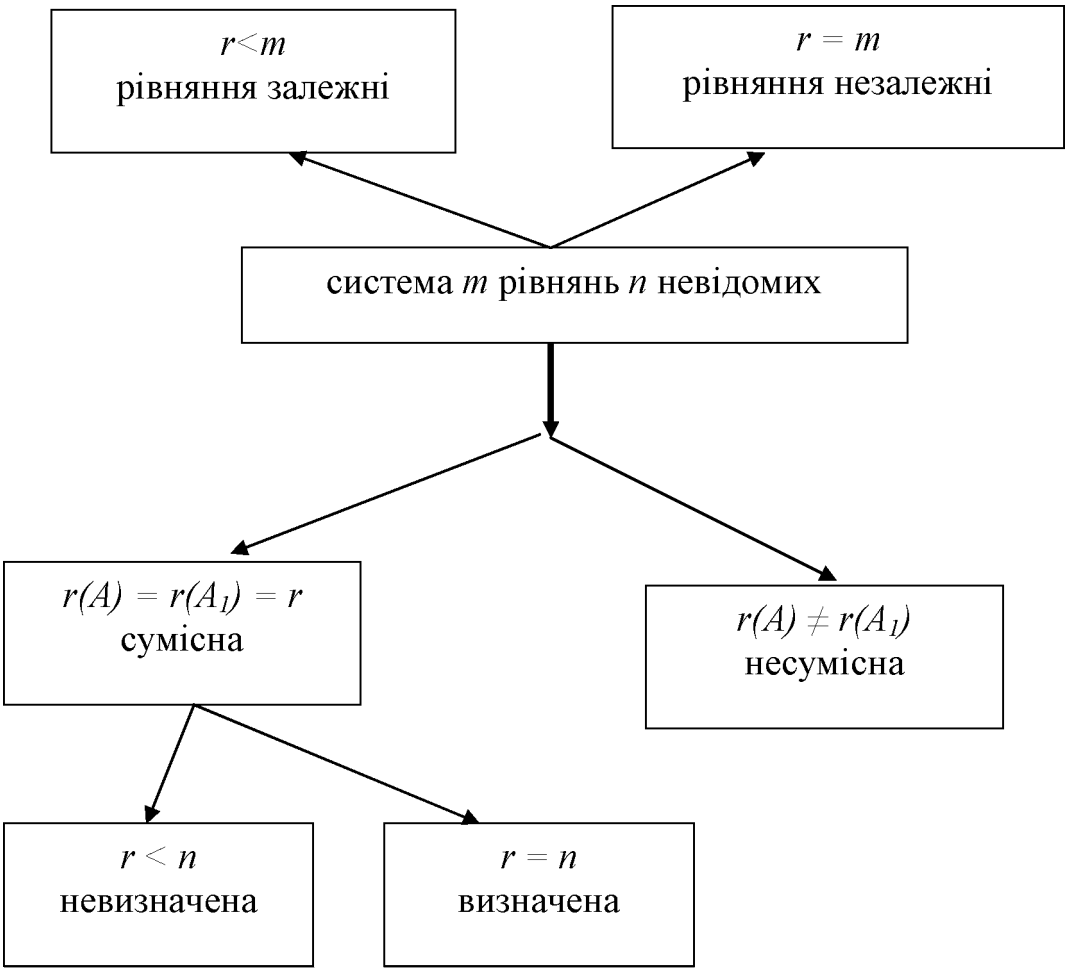
2. Якщо $r(A) = r(A_1) = r$, то потрібно взяти r рівнянь, із коефіцієнтів яких складено базисний мінор (це мінор, порядок якого визначає ранг матриці), інші рівняння відкинути.

3. Невідомі, коефіцієнти яких входять в базисний мінор називаються базисними, їх залишають зліва, а інші $(n–r)$ невідомих називають вільними, їх переносять в праву частину рівняння.

4. Виразити базисні невідомі через вільні. Отримаємо загальний розв'язок.

5. Якщо надати вільним змінним значення нуль, то такий розв'язок_називають базисним. Невід'ємний базисний розв'язок називають опорним.

Алгоритм практичного знаходження всіх розв'язків СЛАР можна навести у вигляді наступної схеми:



2.3. Розв'язування систем з однаковою кількістю рівнянь та невідомих

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots \quad\quad \ldots \quad\quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots \ \ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці $\Delta = \det A$ називається основним визначником системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Матричний метод (метод оберненої матриці)

Запишемо систему в матричній формі і знайдемо її розв'язок.

$A \cdot X = B$ домножимо зліва на A^{-1}, маємо $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Цей матричний метод розв'язання системи не простіший за інші, але відрізняється зручною компактною формою запису.

Алгоритм розв'язування систем матричним методом

1. Перевірити виконання умов:
   - система повинна бути неоднорідною;
   - кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих;
   - визначник основної матриці не дорівнює нулю.
2. Знайти матрицю A^{-1} обернену до матриці A (основної матриці системи).
3. Знайти розв'язок X шляхом множення матриці A^{-1} на матрицю вільних членів B, тобто $X = A^{-1}B$.

Приклад

Розв'язати СЛАР матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання

Основна матриця системи

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, знайдемо A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0.$$

$$A_{11} = (-1)^2 M_{11} = 3; \quad A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = -(-1) = 1; \quad A_{22} = (-1)^4 M_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \cdot 7 \\ -1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Приклад. Розв'язати систему матричним методом

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14. \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Розв'язання

Основна матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 14\\ 5\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\ 15\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x=2,\ y=-5,\quad z=3$.

Правило Крамера

Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулою,

$$x_i=\frac{\Delta i}{\Delta},\ i=\overline{1,n},\ \Delta\neq 0$$

де Δ_i – визначник, отриманий з визначника Δ заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад

Розв'язати СЛАР за формулами Крамера $\begin{cases} x_1+5x_2=1\\ 2x_1-3x_2=15.\end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо основний визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-3-10=-13\neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 75 = -78,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13,$$

тому $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-78}{-13} = 6, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$

Відповідь: $x_1 = 6, \; x_2 = -1.$

2.4. Розв'язок СЛАР методом Гаусса

При $n > 3$ знаходження визначників призводить до громіздких обчислень, і користуватись формулами Крамера або матричним методом стає нераціонально. Одним з найбільш універсальних і ефективних методів розв'язку СЛАР є метод Гаусса. Це метод послідовного виключення невідомих.

На першому етапі (прямий хід) при виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього тощо, СЛАР зводиться до трикутного (або трапецієподібного) вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

На другому етапі (обернений хід), підставивши знайдене з останнього рівняння значення x_n у передостаннє, одержимо значення x_{n-1} тощо; з першого рівняння знаходимо x_1.

Перший етап можна виконувати над розширеною матрицею системи за допомогою таких елементарних перетворень: додавання до елементів одного рядка відповідних елементів другого рядка, помножених на деяке число $\lambda \neq 0$; перестановка рядків або стовпців у матриці.

Приклад. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання

Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при x_1 дорівнює 1. Для цього ліву і праву частини можна поділити на 2 або поміняти місцями перше та друге рівняння, одержимо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю A_1 і зведемо її до трикутного вигляду

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \\ \times(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -6 & -1 & -13 \end{array}\right) \times(6)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \\ -31x_3 = -31 \end{cases} \uparrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 = -3 + 5x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

Приклад . Розв'язати СЛАР $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Розв'язання

Маємо випадок СЛАР, коли $n = 4$, $m = 3$. Складаємо розширену матрицю і зводимо її до трикутного виду :

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A_1) = 2$, тому СЛАР сумісна, оскільки $r = 2$, $n = 4$ і $r < n$, то система невизначена. Дві невідомі ($r = 2$) базисні і дві ($n - r = 2$) будуть вільні. Невідомі x_1 та x_2 можна обрати за базисні, так як базисний мінор $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, тоді x_3, x_4 – вільні невідомі.

Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + x_4 \\ 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Вільні невідомі перенесли у праву частину

$$\begin{cases} 2x_1 = x_3 + x_4 + 2 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}.$$

Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення, наприклад, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Відповідь: Загальний розв'язок СЛАР буде мати вигляд:

$$x_1 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4} = -\frac{C_1}{4} + \frac{3C_2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{4}$$

$$x_3 = C_1$$

$$x_4 = C_2.$$

2.5. Метод Жордана-Гаусса

Щоб не виконувати обернений хід метода Гаусса, здійснюють повне виключення невідомих у стовпчику за допомогою розв'язувального елемента. Цей модифікований метод Гаусса називають ***методом Жордана-Гаусса***.

Алгоритм кроку перетворення Жордана-Гаусса

1. Обираємо розв'язуючий елемент $a_{ij} \neq 0$ (доцільно обирати одиницю).

2. Елементи *i*-го рядка (розв'язуючого) ділимо на a_{ij} і записуємо в *i* рядок.

3. В розв'язуючому *j*-ому стовпці замість a_{ij} пишуть одиницю, а замість інших елементів цього стовпця пишуть 0.

4. Усі інші елементи знаходять за формулою $\overline{a}_{kl} = \dfrac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}$,

де a_{ij} – розв'язувальний елемент, $k = 1, 2, \ldots, m$; $l = 1, 2, \ldots, n$.

Обчислення елементів $\overline{a}_{kl}$ за даною формулою доцільно виконувати за схемою прямокутника



⊕ ⊖

Приклад. Знайти розв'язок СЛАР $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = -6 \\ \quad\quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad = 6 \end{cases}$.

Розв'язання

Складаємо таблицю ($\sum$ – контрольний стовпчик).

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
1	–2	0	–1	–6	–8
0	1	1	3	16	21
2	–3	2	0	6	7

Розв'язуючий елемент $a_{11} = 1$. Перепишемо без змін рядок, який містить розв'язуючий елемент, а всі елементи розв'язуючого стовпчика замінимо на 0. Інші елементи знайдемо за правилом прямокутника.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
0	[–3]	3	–3	–12	–15
0	1	1	3	16	21
0	–5	8	–4	-6	–7

Розв'язуючий елемент дорівнює (–3). Поділимо на (-3) елементи 2-го рядка, одержимо

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
0	[1]	–1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	–5	8	–4	–6	–7

Розв'язуючий 2-й рядок записуємо без змін, елементи розв'язуючого 2-го стовпчика замінимо на 0. Перший стовпчик записуємо без змін. Елементи інших клітинок знаходимо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	–2	1	2	2
0	1	–1	1	4	5
0	0	[2]	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Поділимо 3-й рядок на 2, виберемо розв'язуючий елемент і виконаємо всі перетворення кроку Жордана-Гаусса.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	–2	1	2	2
0	1	–1	1	4	5
0	0	[1]	1	6	8
0	0	3	1	14	18
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	[–2]	–4	–6

Поділимо 4-й рядок на (-2), виберемо наступний розв'язуючий елемент і повторимо підрахунки

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

Відповідь системи знаходиться в стовпчику b: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

2.6. Системи лінійних однорідних рівнянь

Нехай задано система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна СЛАР завжди сумісна, оскільки $r(A) = \mathrm{r}(\mathrm{A}_1)$, вона має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Наведено без доведення умови, при яких однорідна система має ненульовий розв'язок.

1) Для того, щоб система однорідних рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менше кількості невідомих, тобто $r < n$.

2) Для того, щоб однорідна система n рівнянь з n невідомими мала ненульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб її визначник $\Delta = 0$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \ r(A) = 2.$$

Оскільки $r = 2$, $n = 3$ і $r < n$, то система має безліч розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases},$$

x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна.

Відповідь: загальний розв'язок: $x_1 = 2x_3 = 2C$, $x_2 = 3x_3 = 3C$, $x_3 = C$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати СЛАР за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 12. \end{cases}$

2. Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

3. Дослідити на сумісність СЛАР:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 12. \end{cases}$

4. Знайти розв'язок СЛАР методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 10 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$.

5. Знайти розв'язок СЛАР методом Жордана-Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$.

Тема 3. Векторний простір та його базис

3.1. Векторний простір, його розмірність і базис

Означення. *Упорядкована множина n дійсних чисел* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *називається* ***n-вимірним векторним простором*** R_n.

Частинні випадки R_n: R_1 *– одномірний простір, елементами якого є вектори з однією координатою, тобто вектори, що належать деякій прямій;* R_2 *– двовимірний простір, елементами якого є вектори, що належать деякій площині і мають по дві координати;* R_3 *– тривимірний простір, елементами якого є вектори з трьома координатами.*

В *n*-вимірному векторному просторі можна виконувати дії: додавання векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$ та множина вектора на число $k \in R$: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; ...a_n + b_n)$,

$$k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ...; ka_n).$$

Вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$ називаються рівними, якщо $a_i = b_i, i = \overline{1, n}$.

Роль нуль-вектора відіграє $\vec{O} = (0; 0; ...; 0)$.

Означення. *Вектор* $\vec{b}$ *є* ***лінійною комбінацією*** *векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$, *якщо існують такі числа* $x_1, x_2, ..., x_m$, *які одночасно не дорівнюють нулю, що* $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_m \vec{a}_m$.

Означення. *Система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ *називається* ***лінійно залежною****, якщо існують такі числа* $x_1, x_2, ..., x_m$, *які одночасно не дорівнюють нулю, що виконується рівність:*

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_m \vec{a}_m = 0.$$

Якщо ця рівність можлива лише за умови, що $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними***.

У просторі R_n існує безліч лінійно незалежних систем векторів.

Означення. ***Базисом*** *n-вимірного векторного простору* R_n *називається будь-яка сукупність n лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор цього простору.*

Означення. *Максимальне число лінійно незалежних векторів простору називається його* ***розмірністю****. Розмірність простору дорівнює кількості базисних векторів цього простору.*

Наведемо без доведення такі важливі твердження.

1. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно залежні, то після приєднання до них одного або кількох нових векторів дістанемо знову лінійно залежну систему векторів.

2. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежну систему векторів.

3. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших.

4. В просторі R_n будь-яка система $(n+1)$ векторів є лінійно залежною.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ в просторі R_n за означенням 5 перепишемо рівність $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_n \vec{a}_n = 0$ в координатній формі, де $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}; ...; a_{ni}),\ i = \overline{1, n}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Маємо лінійну однорідну систему рівнянь $(n \times n)$ відносно невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$.

Якщо основний визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, і тоді вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ є лінійно незалежними за означенням.

Якщо $\Delta = 0$, то система має ненульові розв'язки, і тоді вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ є лінійно залежними за означенням.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ $(m < n)$ достатньо обчислити ранг матриці, складеної з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Якщо $r(A) = m$, то вектори лінійно незалежні, а якщо $r(A) < m$, то вектори лінійно залежні.

Приклад. Дослідити на лінійну залежність систему векторів:

а) $\vec{a}_1(-3; 4; 5)$, $\vec{a}_2(0; 1; -1)$, $\vec{a}_3(2; -2; 0)$;

б) $\vec{a}_1(3; -2; 4; 1)$, $\vec{a}_2(-1; 2; -1; 2)$, $\vec{a}_3(1; 2; 2; 5)$.

Розв'язання

а) Обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є лінійно незалежними, тому в просторі R_3 ці вектори утворюють базис.

б) Обчислимо ранг матриці, складеної з координат цих векторів, застосовуючи елементарні перетворення матриці, які не змінюють її ранг:

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times(-3) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & 7\\ 0 & -8 & -2 & -14\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times 2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Звідки слідує, що $r(A)=2$.

Таким чином, $r(A)=2<3$ (числа векторів), тому вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ є лінійно залежними.

3.2. Розклад вектора за базисом

Якщо вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n$ утворюють базис в просторі R_n, то довільний вектор $\vec{a}$ цього простору є лінійною комбінацією базисних векторів, тобто існують такі числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, що виконується рівність: $\vec{\alpha}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_n\vec{a}_n$.

Числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n$.

Цей вираз називається розкладом вектора $\vec{\alpha}$ в базисі $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n$. Легко показати, що цей вираз – єдиний для вектора $\vec{\alpha}$.

Приклад. Довести, що вектори $\vec{a}=(5;4;3),\vec{b}=(-3;-1;2)$ *і* $\vec{c}=(-3;1;3)$ утворюють базис в просторі R_3, та розкласти вектор $\vec{d}=(12;9;10)$ в цьому базисі.

Розв'язання

Обчислимо визначник, складений з координат векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -3 & -3\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=-34\neq 0$. Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно незалежні, тому в просторі R_3 вони утворюють базис за означенням 6.

Розкласти вектор $\vec{d}$ в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – означає знайти числа x_1,x_2,x_3 такі, що виконується рівність $\vec{d}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$.

Перепишемо цю рівність в координатній формі

$$\begin{pmatrix}12\\9\\10\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases}5x_1-3x_2-3x_3=12\\4x_1-x_2+x_3=9\\3x_1+2x_2+3x_3=10\end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь будь-яким методом, наприклад, методом Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5&-3&-3&12\\4&-1&1&9\\3&2&3&10\end{array}\right)\leftarrow\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-2&-4&3\\4&-1&1&9\\3&2&3&10\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&3\\0&7&17&-3\\0&8&15&1\end{array}\right)\times(-1)+\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&3\\0&7&17&-3\\0&\boxed{1}&-2&4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-8&11\\0&0&31&-31\\0&1&-2&4\end{array}\right):31\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-8&11\\0&0&\boxed{1}&-1\\0&1&-2&4\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&0&1&-1\\0&1&0&2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=2\\x_3=-1\end{cases}.$$

Отже, $\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$\vec{a}=(2;2;1)$ *і* $\vec{b}=(0;1;1)$.

2. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудовані на векторах

$\vec{a}=(2;3;0)$,

$\vec{b}=(0;-3;2)$,

$\vec{c}=(1;2;3)$.

3. Дослідити на лінійну залежність системи векторів:

а) $\vec{a}_1=(-2;1;3)$,

$\vec{a}_2=(3;0;-1)$,

$\vec{a}_3=(4;2;5)$,

$\vec{a}_4 = (-1; 1; 0)$.

б) $\vec{a}_1 = (-1; 0; 1)$,

$\vec{a}_2 = (2; 1; -3)$,

$\vec{a}_3 = (0; -1; 1)$,

в) $\vec{a}_1 = (1; 0; -1; 2)$,

$\vec{a}_2 = (3; -1; 0; 2)$,

$\vec{a}_3 = (0; 1; 2; -1)$.

4. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -3)$, $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (0; 2; 1)$ утворюють базис в просторі R_3 та розкласти в цьому базисі вектор $\vec{d} = (0; -2; 10)$.

Тема 4. Рівняння прямої та площини

4.1. Різновиди рівняння прямої на площині

Означення. *Рівняння* $F(x, y) = 0$ *називається* **рівнянням деякої лінії на площині,** *якщо це рівняння задовольняє координати* (x, y) *будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняє координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.*

Рівняння $F(x, y) = 0$ буде рівнянням прямої на площині, якщо функція F є лінійною відносно x та y.

Пряма на площині може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до цієї прямої тощо. Різним способам завдання прямої відповідають різні види її рівнянь.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно до заданого вектора.

Відомі координати точки $M_0(x_0; y_0)$, що належить прямій L, і координати вектора $\vec{l}(m, k)$, паралельного прямій (рис. 1).

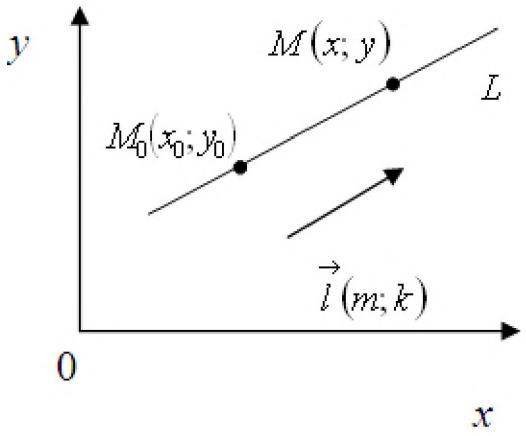


Рис. 1

Потрібно вивести рівняння прямої L як сукупності точок, координати яких задовольняють це рівняння.

Означення. *Будь-який вектор* $\vec{l}(m,k)$ *паралельний до прямої або який лежить на цій прямій, називається напрямним вектором прямої.*

Візьмемо змінну точку $M(x;y)$ на прямій L, тоді вектори $\vec{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ і $\vec{l}(m;k)$ є колінеарними.

З умови колінеарності цих векторів випливає пропорційність відповідних координат, тобто $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}$.

Отримане рівняння називається ***канонічним рівнянням прямої на площині.***

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Відомі координати двох точок на прямій L: $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ (Рис. 2). Складемо рівняння прямої L. Вектор $\vec{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ лежить на прямій L, отже, це напрямний вектор прямої L (рис. 2).

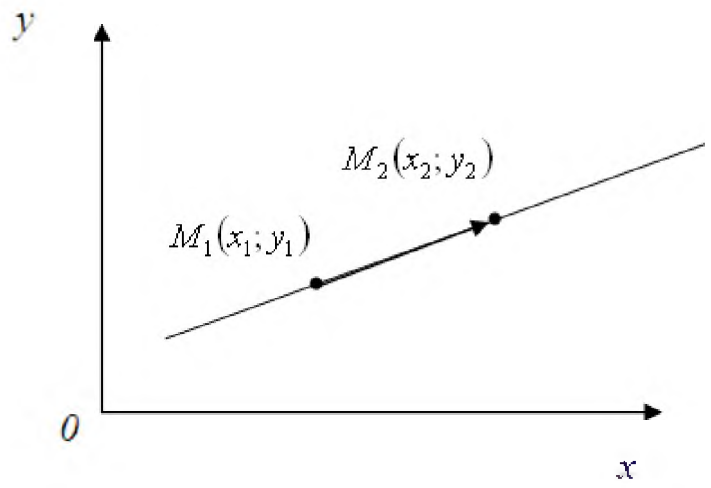


Рис. 2

Якщо у канонічне рівняння прямої замість координат точки $M_0(x_0;y_0)$ підставити координати точки $M_1(x_1;y_1)$, а замість координат цієї напрямного вектора $\vec{l}(m;k)$ підставити координати іншого напрямного вектора прямої – вектора $\vec{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$, то одержимо ***рівняння прямої за двома точками***:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Рівняння прямої у відрізках на осях.

Відомо, що пряма L відсікає на осях координат відрізки довжиною a і b (рис 3). Складемо рівняння цієї прямої. Точки перетину прямої L з осями координат: $M_1(a;0), M_2(0;b)$. Використаємо рівняння прямої за двома точками і одержимо:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b},$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – ***рівняння прямої у відрізках на осях,*** де a – довжина відрізка на осі Ox, а b – довжина відрізка на осі Oy.

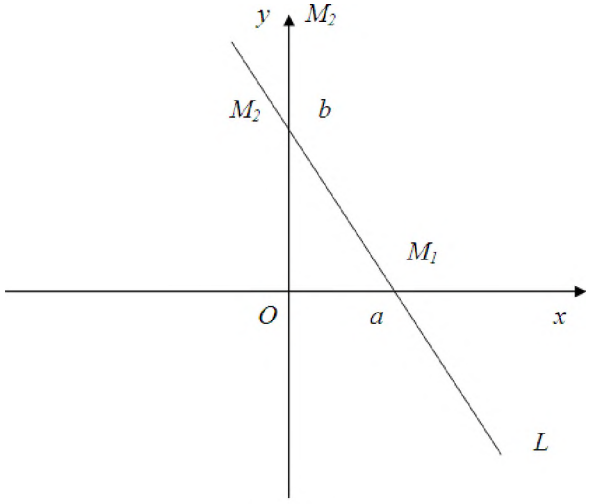


Рис. 3

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до цього вектора.

Відомі координати точки $M_0(x_0;y_0)$ *прямої і координати перпендикулярного вектора* $\vec{n}(A;B)$ *(Рис. 4) . Нехай* $M(x;y)$ *– деяка змінна точка на прямій, тоді вектори* $\vec{M_0M}\ (x-x_0;y-y_0)$ *та* $\vec{n}(A;B)$ *перпендикулярні.*

З умови перпендикулярності векторів випливає, що $\vec{M_0M}\cdot\vec{n}=0$, *звідки одержимо* $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – ***рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до цього вектора.***

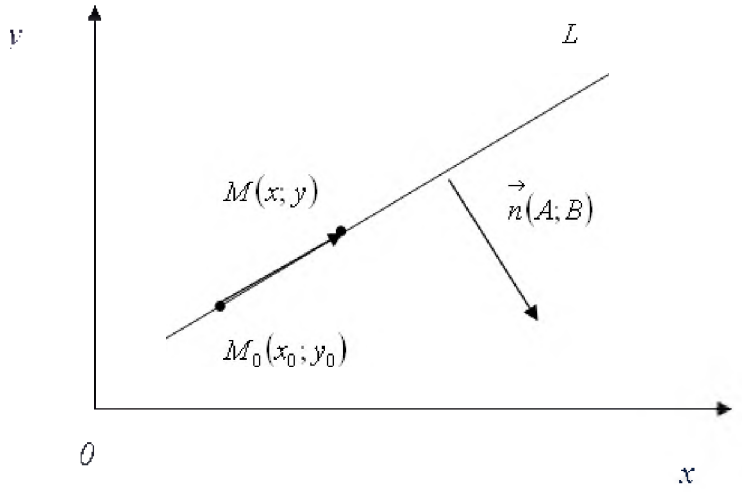


Рис. 4

Загальне рівняння прямої та його частинні випадки

Якщо в рівнянні $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ розкрити дужки і ввести позначення $C=-Ax_0-By_0$, то одержимо ***загальне рівняння прямої на площині***

$Ax+By+C=0$, де A,B – координати перпендикулярного вектора, причому $A,B\neq 0$ одночасно.

Дослідження загального рівняння прямої.

– Якщо $A=0$, то рівняння $By+C=0$ або $y=-\dfrac{C}{B}$ визначає пряму, паралельну осі Ox;

– Якщо $B=0$, то пряма $x=-\dfrac{C}{A}$ визначає пряму, паралельну осі Oy;

– Якщо $C=0$, то пряма $y=-\dfrac{A}{B}x$ визначає пряму, що проходить через початок координат;

– Якщо $A=C=0$, то пряма $y=0$ визначає вісь Ox;

– Якщо $B=C=0$, то пряма $x=0$ визначає вісь Oy.

Нормальне рівняння прямої

Означення. *Вектор, опущений з початку координат перпендикулярно на пряму, називається* ***вектором нормалі*** *цієї прямої.*

Нехай відома відстань p від точки $O(0;0)$ до прямої L, тобто $p=\left|\vec{OP}\right|$, відомо кут α між вектором нормалі і додатним напрямом осі Ox (рис. 5). Потрібно скласти рівняння прямої L.

Координати вектора нормалі $\vec{OP}$ знайдемо як проекції його на осі координат:

$пр._x\vec{OP}=p\cdot\cos\alpha$, $пр._y\vec{OP}=p\cdot\sin\alpha$, де α – кут між вектором $\vec{OP}$ і віссю Ox.

Точка P прямої L має такі ж самі координати, що й вектор $\vec{OP}$, тобто $P(p\cos\alpha;\,p\sin\alpha)$.

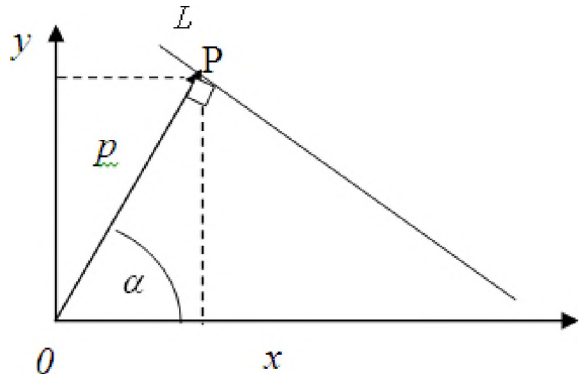


Рис. 5

Складемо рівняння прямої L за точкою $P(p\cos\alpha;\ p\sin\alpha)$ і перпендикулярним вектором $\vec{p}(p\cos\alpha;\ p\sin\alpha)$:

$p\cos\alpha(x-p\cos\alpha)+p\sin\alpha(y-p\sin\alpha)=0$, звідки одержимо ***нормальне рівняння прямої на площині***: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, де p – довжина перпендикуляра, опущеного на пряму з початку координат $(p>0)$, а α – кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом осі Ox.

Якщо загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$ помножити на нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де знак обирається протилежним до знака вільного члена С, то одержимо нормальне рівняння прямої на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Точка $B(0;b)$ і кут β однозначно визначають пряму L на площині (рис. 6).

Дійсно, $y=MC+CN=BC\cdot tg\beta+b=x\cdot tg\beta+b$

Позначимо $k=tg\beta$ і одержимо шукане рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$y=kx+b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої, β – це кут між прямою і додатним напрямом осі OX.

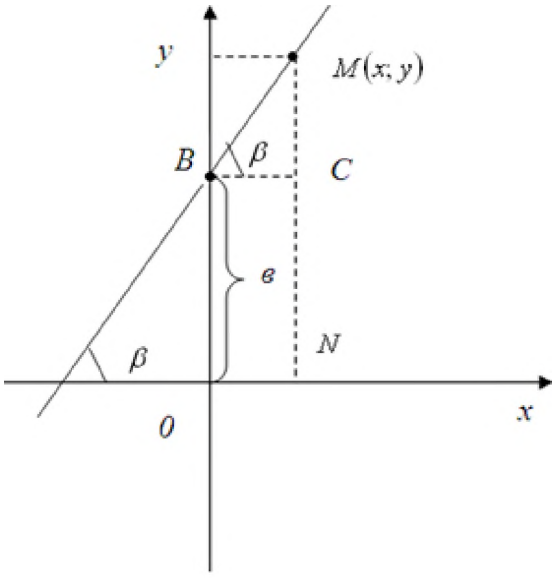


Рис 6

Рівняння прямої, що проходить через задану точку у вказаному напрямі

Відомі координати деякої точки $M_0(x_0; y_0)$ прямої L та кут нахилу β її до осі Ox (рис. 7).

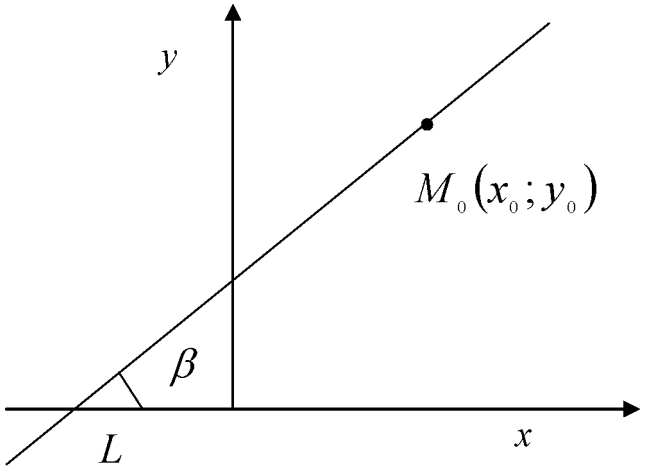


Рис. 7

Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$.

Підставляючи в нього координати даної точки $M_0(x_0; y_0)$ і кут β, знайдемо значення $b = y_0 - kx_0$. Шукане рівняння прямої набуває вигляду $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Якщо k – змінна величина, то це рівняння описує ***пучок прямих***, які проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$.

4.2. Кут між двома прямими

Кут між прямими, заданими канонічними рівняннями, визначається кутом між напрямними векторами цих прямих $\vec{l}_1(m_1;k_1)$ ma $\vec{l}_2(m_2;k_2)$ (рис. 8).

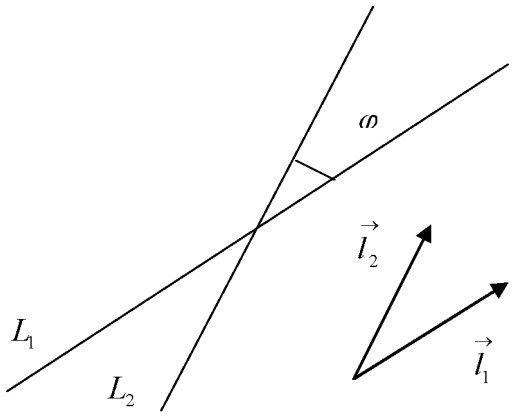


Рис. 8

Косинус кута між ними $\cos\varphi = \dfrac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right| \cdot \left|\vec{l}_2\right|} = \dfrac{m_1 m_2 + k_1 k_2}{\sqrt{m_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + k_2^2}}$.

Звідси випливають умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 та L_2:

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \| \vec{l}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2},\ L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + k_1 k_2 = 0.$$

Кут між прямими, заданими загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ ma $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, визначається кутом між нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1;B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2;B_2)$ цих прямих (рис. 9), тобто $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ звідки випливає, що $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \| \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

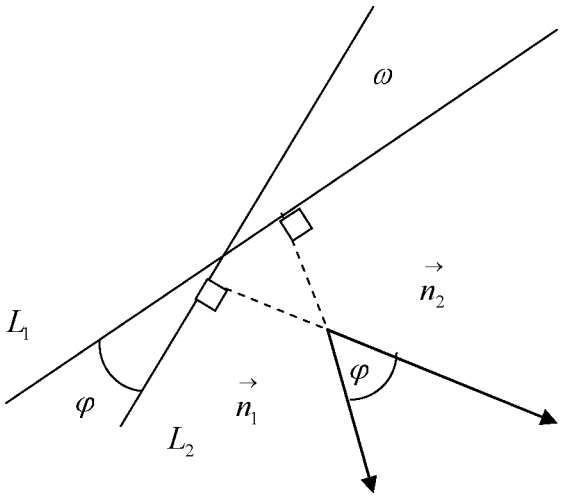


Рис. 9

Кут між прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ *та* $y = k_2 x + b_2$ визначається з рівності $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ (рис. 10), звідки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Отже, маємо $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, звідки випливають умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 *та* L_2: $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0,\ k_1 k_2 = -1,\ k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

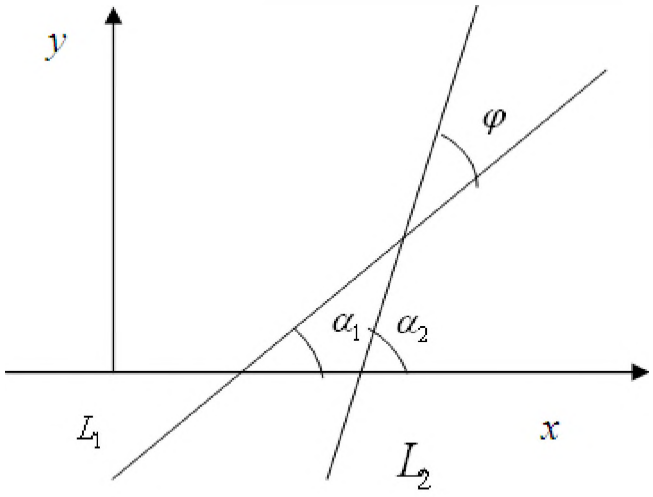


Рис. 10

4.3. Відстань від точки до прямої

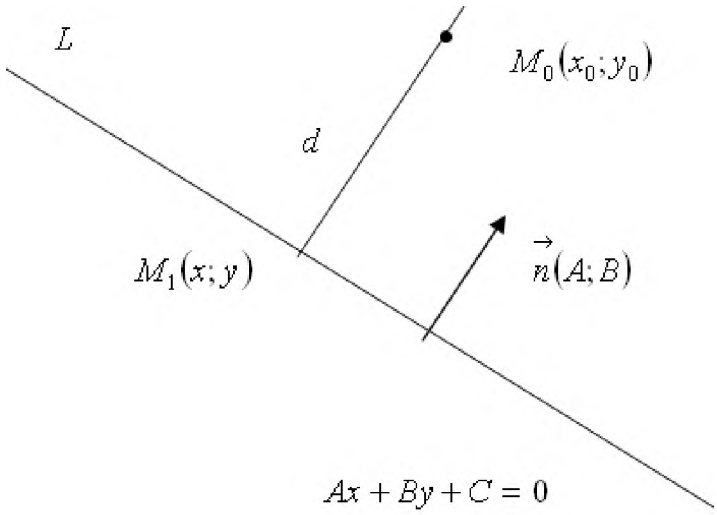


Рис. 11

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої L дорівнює довжині перпендикуляра M_0M_1, опущеного з точки M_0 на пряму (рис. 11). Складемо рівняння прямої M_0M_1, як рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно до даного вектора $\vec{n}(A;B)$: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$, звідки $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

Координати точки $M_1(x;y)$, як точки перетину прямих L і M_0M_1 задовольняють рівняння обох прямих, тобто систему рівнянь $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ B(x-x_0)-A(y-y_0)=0 \end{cases}$.

Після перетворень одержимо $(A^2+B^2)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)=(Ax_0+By_0+C)^2$,

$(A^2+B^2)\cdot d^2=(Ax_0+By_0+C)^2$, звідки

$$d=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

– ***відстань від точки*** $M_0(x_0'y_0)$ ***до прямої*** $Ax+By+C=0$.

Приклад. Трикутник АВС заданий своїми вершинами А(-2; -1), В(4; 3), С(6; 1). Знайти : а) рівняння сторони ВС та записати його у відрізках на осях;

б) рівняння прямої, яка проходить через точку А паралельно до ВС;

в) рівняння та довжину висоти АН.

Розв'язання

а) Рівняння сторони ВС складемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, підставивши в це рівняння координати точок В(4; 3) і С(6; 1), а саме:

$\frac{x-4}{6-4}=\frac{y-3}{1-3}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-2}$, $x-4=-(y-3)$, звідки $x+y-7=0$ – рівняння сторони ВС.

Перепишемо це рівняння у вигляді рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, поділивши обидві сторони рівняння $x+y=7$ на 7: $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$. Отже, $a=7$, $b=7$ – відрізки, які відтинає пряма ВС на осі *Ox* і та осі *Oy* відповідно.

б) Застосовуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно до заданого вектора $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}$, підставивши в це рівняння замість точки $M_0(x_0;y_0)$ точку А(–2; –1), а замість напрямного вектора $\vec{l}(m;k)$ – вектор $\vec{BC}=(6-4;\ 1-3)=(2;-2)$. Одержимо, $\frac{x-(-2)}{2}=\frac{y-(-1)}{-2}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-2}$, звідки $x+y+3=0$ – рівняння шуканої прямої.

в) Складемо рівняння висоти АН, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, підставляючи в це рівняння замість точки $M_0(x_0;y_0)$ точку А(–2; –1), а замість вектора $\vec{n}(A;B)$ – вектор $\vec{BC}(2;-2)$:

$2(x+2)-2(y+1)=0$, звідки $x-y+1=0$ – рівняння висоти *AH*.

Обчислимо довжину висоти *AH*, використовуючи формулу відстані від точки до прямої, підставляючи в неї замість точки

$M_0(x_0; y_0)$ точку А(–2; –1), а замість коефіцієнтів A,B,C – коефіцієнти прямої ВС $(x + y - 7 = 0)$ 1, 1 і –7 відповідно:

$$AH = d = \frac{|1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Приклад. Скласти рівняння двох прямих, що проходять через точку D (–2; 1), з яких одна паралельна, а друга – перпендикулярна прямій $5x - 2y + 4 = 0$.

Розв'язання

Застосовуємо рівняння пучка прямих $y - y_0 = k(x - x_0)$, підставляючи замість точки $M_0(x_0; y_0)$ точку D (–2; 1), а замість k – шукані кутові коефіцієнти прямих; одержимо $y - 1 = k(x + 2)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $5x - 2y + 4 = 0$. Для цього виразимо y через x: $y = \frac{5}{2}x + 2$, звідки $k_0 = \frac{5}{2}$.

Якщо шукана пряма $y - 1 = k(x + 2)$ паралельна до заданої, то $k = k_0 = \frac{5}{2}$. Одержимо $y - 1 = \frac{5}{2}(x + 2)$, $2y - 2 = 5x + 10$, звідки $5x - 2y + 12 = 0$ – рівняння шуканої прямої, паралельної до заданої.

Якщо шукана пряма $y - 1 = k(x + 2)$ перпендикулярна до заданої, то $k = -\frac{1}{k_0} = -\frac{2}{5}$, тоді $y - 1 = -\frac{2}{5}(x + 2)$, $5y - 5 = -2x - 4$, звідки $2x + 5y - 1 = 0$ – рівняння шуканої прямої, перпендикулярної до заданої прямої.

4.4. Пряма і площина в просторі

Різновиди рівняння площини в просторі.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Нехай M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ – задана точка площини, вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярний цій площині, а M $(x\ y\ z)$ – деяка змінна точка площини (рис. 12).

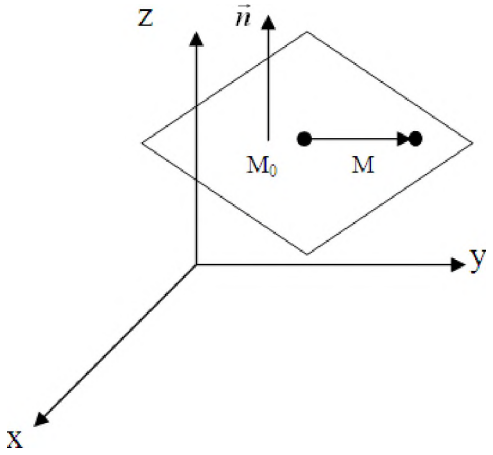


Рис. 12

Оскільки $\vec{n} = (A; B; C) \perp \vec{M_0M}\ (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то $\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$, звідки маємо $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – шукане рівняння площини.

Загальне рівняння площини

У рівнянні $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ розкриємо дужки і позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Одержимо рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, яке називається *загальним рівнянням площини в просторі.* У ньому *A, B і C* – координати перпендикулярного до площини вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, який називається *нормальним вектором площини.*

Наводимо без доведення теорему.

Теорема. *Будь-яке рівняння першого степеня відносно x, y, z визначає площину в просторі. Будь-яка площина у тривимірному просторі визначається лінійним рівнянням* $Ax + By + Cz + D = 0$.

Дослідження загального рівняння площини

1. Якщо A = 0, то площина By + Cz + D = 0 паралельна осі Ox;
2. Якщо B = 0, то площина Ax + Cz + D = 0 паралельна осі Oy;
3. Якщо C = 0, то площина Ax + By + D = 0 паралельна осі Oz;
4. Якщо D = 0, то площина Ax + By + Cz = 0 проходить через початок координат.
5. Якщо A = B = 0, то площина Cz + D = 0 паралельна площині xOy;

6. Якщо A = C = 0, то площина By + D = 0 паралельна площині xOz;

7. Якщо B = C = 0, то площина Ax + D = 0 паралельна площині yOz.

8. Якщо A = D = 0, то площина By + Cz = 0 проходить через вісь Ox;

9. Якщо B = D = 0, то площина Ax + Cz = 0 проходить через вісь Oy;

10. Якщо C = D = 0, то площина Ax + By = 0 проходить через вісь Oz.

11. Якщо A = B = D = 0, то одержимо z = 0 – площина yOx;

12. Якщо A = C = D = 0, то одержимо y = 0 – площина xOz;

13. Якщо B = C = D = 0, то одержимо x = 0 – площина yOz.

Рівняння площини у відрізках на осях

Поділимо обидві сторони рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ на (–D) і одержимо:

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Знайдемо перетин площини з осями координат:

– з віссю *Ox*: *y=z=0,* звідки $x = -\frac{D}{A} = a$;

– з віссю *Oy*: *x=z=0,* звідки $y = -\frac{D}{B} = b$;

– з віссю *Oz*: *y=x=0,* звідки $z = -\frac{D}{C} = c$.

Тоді рівняння площини у відрізках на осях набуде вигляду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де a, b, c – відрізки, які відсікає площина відповідно на осях *Ox, Oy, Oz.*

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай задано три точки площини: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, а $M(x; y; z)$ – деяка змінна точка площини (рис. 13).

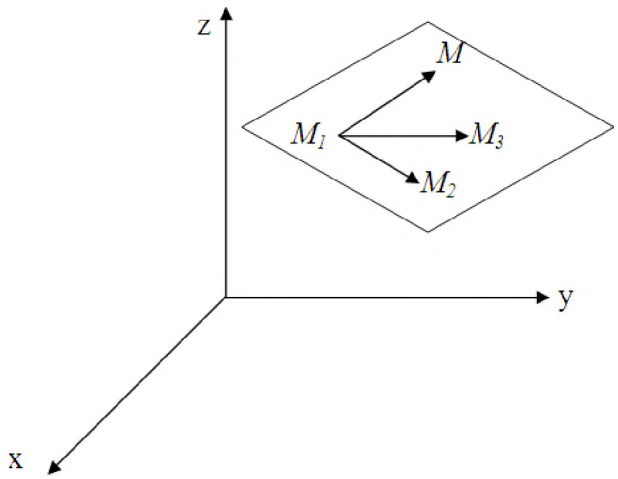


Рис. 13

Вектори $\vec{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ і $\vec{M_1M_3}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1)$ лежать у шуканій площині, тобто компланарні, тому мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю $\vec{M_1M}\cdot\vec{M_1M_2}\cdot\vec{M_1M_3}=0.$

Перепишемо цю рівність в координатній формі і одержимо *рівняння площини за трьома заданими точками:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Нормальне рівняння площини

Нормальне рівняння площини виводиться аналогічно нормальному рівнянню прямої на площині і має вигляд:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора нормалі, тобто вектора, опущеного з початку координат перпендикулярно на площину; p – довжина вектора нормалі $(p>0);\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

Для того, щоб від загального рівняння площини перейти до нормального рівняння, треба обидві сторони останнього домножити на нормуючий множник

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

де знак “+” або “–” обирається протилежним до знака вільного члена D в загальному рівнянні площини.

4.5. Кут між площинами

Нехай площини α_1 та α_2 задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Кут φ між площинами α_1 та α_2 визначається кутом між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, а саме:

$$cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності площин

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ або } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4.6. Відстань від точки до площини

Наведемо без доведення формулу для обчислення відстані від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад. Знайти висоту AH піраміди $ABCD$, заданої своїми вершинами $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 0; -1)$, $C(-1; -1; 2)$, $D(0; 1; 0)$.

Розв’язання

Знайдемо рівняння площини BCD як рівняння площини, що проходить через три заданих точки:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-0 & z+1 \\ -1+2 & -1-0 & 2+1 \\ 0+2 & 1-0 & 0+1 \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x+2)\cdot(-4)-y\cdot(-5)+(z+1)\cdot 3=0, \qquad -4x-8+5y+3z+3=0,$

$4x-5y-3z+5=0$ – рівняння площини BCD.

Знайдемо висоту AH як відстань від точки $A(1;-2;3)$ до площини BCD за формулою відстані від точки площини, а саме:

$$AH=d=\frac{|4\cdot 1-5\cdot(-2)-3\cdot 3+5|}{\sqrt{4^2+(-5)^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{50}}=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A (1; 2; –1)* паралельно векторам $\vec{a}=(3;\,0;\,1)$ та $\vec{b}=(-2;\,1;\,3)$.

Розв'язання

Шукана площина паралельна площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отже, нормальний вектор площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ може бути нормальним вектором шуканої площини. Знайдемо нормальний вектор площини як векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k},\ \text{тобто}\ \vec{n}=(-1;-11;3).$$

Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Одержимо *–1(x – 1) – 11·(y – 2) + 3(z + 1) = 0,* звідки *x + 11y – – 3z – 26 = 0* – шукана площина.

4.7. Різновиди рівняння прямої у просторі

Канонічне рівняння прямої у просторі

Нехай відомі точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої та її напрямний вектор $\vec{l}=(m;k;p)$, а $M(x;y;z)$ – деяка змінна точка цієї прямої. Оскільки $\vec{l}\parallel\vec{M}_0\vec{M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, то з умови паралельності векторів випливає канонічне рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Параметричні рівняння прямої

Якщо позначити через t спільне значення відношень канонічного рівняння прямої, то одержимо параметричні рівняння прямої в просторі, а саме:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{k}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+kt \\ z=z_0+pt \end{cases} - \textit{параметричні рівняння}$$

прямої в просторі,

де t – параметр, $t \in R$.

Рівняння прямої за двома точками

Якщо $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – відомі точки прямої, то вектор $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ є напрямним вектором цієї прямої.

Підставляючи в канонічне рівняння прямої у просторі замість $M_0(x_0;y_0;z_0)$ точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, а замість вектора $\vec{l}=(m;k;p)$ вектор $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, одержимо *рівняння прямої за двома точками*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Рівняння прямої як перетин двох площин

Якщо пряма є спільною прямою двох площин, то її можна подати у вигляді системи двох рівнянь, які описують ці площини, а саме:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Для того, щоб звести цю систему рівнянь до канонічного рівняння прямої, достатньо обчислити будь-які дві точки системи та підставити їх у рівняння прямої за двома точками.

Приклад. Знайти канонічне та параметричні рівняння прямої $\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0 \\ 3x+y-17z=0 \end{cases}$.

Розв'язання

Перепишемо систему рівнянь у вигляді: $\begin{cases} 2x+3y=16z+7 \\ 3x+y=17z \end{cases}$.

Виразимо змінні x та y через змінну z, застосовуючи, наприклад, правило Крамера $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} 16z+7 & 3 \\ 17z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{7-35z}{-7}=5z-1,$

$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 16z+7 \\ 3 & 17z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{-14z-21}{-7}=2z+3.$ Отже, $x = 5z - 1$, $y = 2z + 3$.

Надамо змінній z два будь-яких певних значення, наприклад $z_1=0$ і $z_2=1,$ та одержимо відповідні значення x та y

$x_1=5\cdot 0-1=-1,\ y_1=2\cdot 0+3=3$ та $x_2=5\cdot 1-1=4,\ y_2=2\cdot 1+3=5.$

Отримали два розв'язки системи рівнянь – дві точки $M_1(-1;3;0)$ і $M_2(4;5;1),$ які належать шуканій прямій.

Підставляючи ці точки у рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1},$ одержимо канонічне рівняння прямої у просторі

$\dfrac{x+1}{4+1}=\dfrac{y-3}{5-3}=\dfrac{z-0}{1-0}$, звідки $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$ – шукане канонічне рівняння прямої, де $\vec{l}=(5;2;1)$ – напрямний вектор цієї прямої.

Прирівнявши рівні частки до параметра t, одержимо параметричні рівняння прямої в просторі

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{5} = t \\ \dfrac{y-3}{2} = t \\ \dfrac{z}{1} = t \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 + 2t \\ z = t, \end{cases} \text{ де } t \in R.$$

4.8. Кут між прямими

Кут між двома прямими L_1 та L_2, заданими канонічними рівняннями $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{k_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ та $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{k_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$, визначається кутом φ між напрямними векторами $\vec{l}_1 = (m_1; k_1; p_1)$ та $\vec{l}_2 = (m_2; k_2; p_2)$ цих прямих, а саме:

$$cos\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right| \cdot \left|\vec{l}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + k_1 k_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + k_1^{\,2} + p_1^{\,2}} \cdot \sqrt{m_2^{\,2} + k_2^{\,2} + p_2^{\,2}}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі випливають з умов паралельності та перпендикулярності їхніх напрямних векторів

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + k_1 k_2 + p_1 p_2 = 0.$$

4.9. Кут між прямою і площиною

Нехай пряма L задана канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{k} = \dfrac{z-z_0}{p}$, а площина γ задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0.$

З курсу геометрії відомо, що кут між прямою і площиною визначається кутом між прямою L та її проекцією на цю площину (рис. 14), тобто кутом φ.

Нехай α – кут між нормальними векторами $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ і напрямним вектором прямої $\vec{l}=(m;\ k;\ p)$. Приймаючи до уваги, що $\varphi+\alpha=90°$, виразимо кут φ через α: $\varphi=90°-\alpha$, звідки

$$\sin\varphi=\cos\alpha=\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{l}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{Am+Bk+Cp}{\sqrt{m^2+k^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

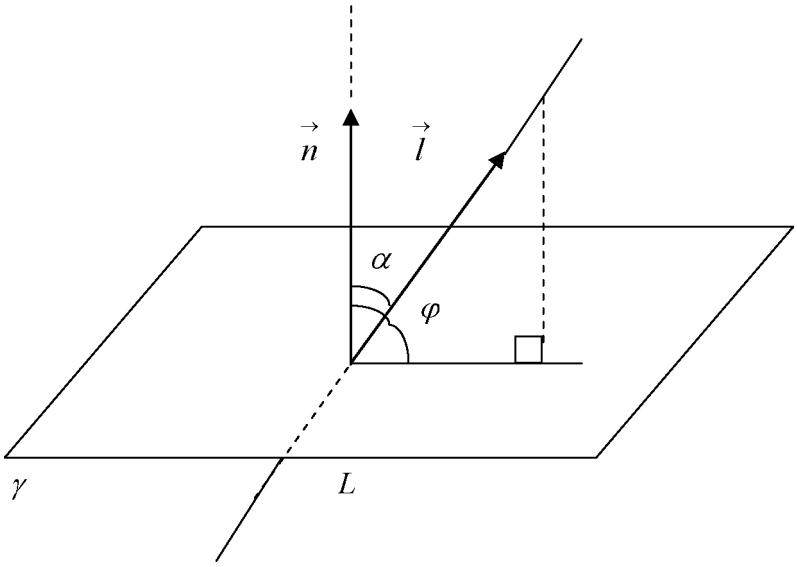


Рис. 14

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

$$L\parallel\gamma\Leftrightarrow\vec{l}\perp\vec{n}\Leftrightarrow Am+Bk+Cp=0,$$

$$L\perp\gamma\Leftrightarrow\vec{l}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\frac{m}{A}=\frac{k}{B}=\frac{p}{C}.$$

Знаходження точки перетину прямої і площини

Для відшукання точки перетину прямої $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{k}=\dfrac{z-z_0}{p}$ та площини $Ax+By+Cz+D=0$ треба розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{k}=\dfrac{z-z_0}{p}\\ Ax+By+Cz+D=0,\end{cases}$, для чого перейдемо від канонічного рівняння прямої до її параметричних рівнянь

$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + kt,\ z = z_0 + pt.$

Підставивши їх у загальне рівняння площини, знайдемо значення параметра $t = t_0$. Отримане значення t_0 підставляємо у параметричні рівняння прямої і знаходимо шукану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Приклад. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ і площиною $2x + y + z - 6 = 0$ та точку їхнього перетину.

Розв'язання

Підставляючи у формулу кута між прямою і площиною координати напрямного вектора прямої $\vec{l}(1;\ 1;\ 2)$ і нормального вектора площини $\vec{n}(2;1;1)$, одержимо значення синуса шуканого кута

$$\sin\varphi = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{6},$$ звідки $\varphi = \arcsin\frac{5}{6}$.

Для відшукання точки перетину прямої і площини необхідно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2} \\ 2x + y + z - 6 = 0. \end{cases}$

Перейдемо від канонічного рівняння прямої до її параметричних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = t \\ \frac{y-3}{1} = t \\ \frac{z-4}{2} = t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

Підставимо значення x, y, z з останньої системи рівнянь в рівняння площини $2x + y + z - 6 = 0$ і знайдемо значення параметра t: $2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0$, звідки $t = -1$.

Підставимо значення $t = -1$ в параметричні рівняння прямої і одержимо шукану точку $\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 4 + 2\cdot(-1) = 2. \end{cases}$

Отже, точка $M(1; 2; 2)$ – точка перетину прямої і площини.

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику ABC з вершинами $A(-3; -2)$, $B(5; 4)$, $C(7; -4)$ знайти:

а) рівняння сторони AC;

б) кут A;

в) рівняння і довжину висоти AH;

г) рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно стороні BC і прямої, що проходить через точку A перпендикулярно стороні AB.

д) периметр ΔABC

є) площу ΔABC

2. Знайти кут між прямими:

а) $3x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$;

б) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3}$;

в) $y = 2x + 5$, $x - y + 7 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить

а) через точку $N(3; -1; 2)$ паралельно площині $5x - 2y + z - 1 = 0$;

б) через три точки $A(-3; 2; 1)$, $B(0; -1; 2)$, $C(5; 1; 0)$;

в) через точки $A(2; -1; 2)$ і $B(1; 3; -1)$ перпендикулярно площині $x - y - z + 3 = 0$.

4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2; 3)$ паралельно прямій

а) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{3}$; б) $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

5. Знайти кут між

а) площинами $3x - 2y + z - 1 = 0$ та $x + 2y - 3z + 5 = 0$;

б) між прямою $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$ та площиною $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Тема 5. Криві лінії другого порядку

Означення. ***Кривими лініями другого порядку*** *називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня відносно цих координат.*

До кривих другого порядку на площині належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

5.1. Коло

Означення. ***Колом*** *називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола на відстані радіуса кола.*

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – центр кола, R – радіус кола (рис. 1), а $M(x; y)$ – деяка змінна точка кола.

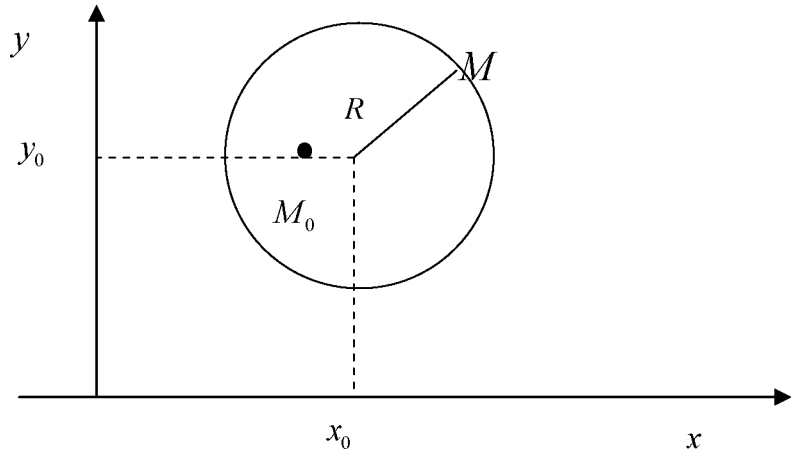


Рис. 15

За означенням кола $\left|\vec{M_0M}\right| = R$, де $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, звідки випливає, що $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Піднесемо до квадрата обидві сторони рівняння і одержимо *рівняння кола*: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Якщо в цьому рівнянні $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то одержимо рівняння кола з центром у початку координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Обидва рівняння називають ***канонічними рівняннями кола***. Якщо в рівнянні $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ розкрити дужки, то

одержимо загальне рівняння кола $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, де $A = -2x_0$, $B = -2y_0$, $C = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

Приклад. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 61 = 0$.

Розв'язання

Виділимо повні квадрати при x та y

$$4(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) - 61 = 0$$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 61 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 + 4(y-2)^2 - 16 - 61 = 0$$

$$4(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 81 \,|:4$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{81}{4}.$$

Отже, центр кола знаходиться у точці $M_0(-1;2)$, а радіус кола $R = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

5.2. Еліпс

Означення. ***Еліпсом*** *називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок, які називають фокусами еліпса, є величиною сталою (позначимо її 2a).*

Нехай F_1, F_2 – задані точки – фокуси еліпса (рис. 2). Вісь *Ox* проведемо через фокуси, а вісь *Oy* – через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до осі *Ox*.

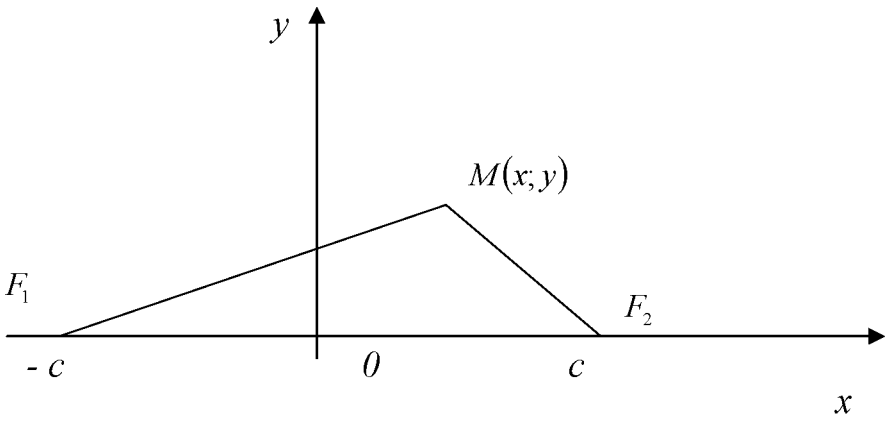


Рис. 16

Позначимо відстань між заданими точками F_1, F_2 через $2c$, тоді $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна змінна точка еліпса, тоді за означенням еліпса маємо: $F_1M + F_2M = 2a$.

Перепишемо цю рівність в координатній формі й одержимо $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Перенесемо другий радикал в праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і, виконавши тотожні перетворення, одержимо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо знову до квадрата обидві частини рівняння, одержимо:

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2.$$

З трикутника F_1MF_2 маємо, що

$F_1M + F_2M > F_1F_2$, тобто $2a > 2c, a > c$.

Звідси $a^2 > c^2$, тому $a^2 - c^2 > 0$ і різницю $a^2 - c^2$ можна позначити, як $b^2 = a^2 - c^2$.

Останнє рівняння набуває вигляду $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$, поділимо обидві частини на a^2b^2; маємо $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Отримали ***канонічне рівняння еліпса***: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яке є рівнянням другого степеня відносно x та y.

Дослідимо це рівняння.

1. Змінні x та y входять у рівняння еліпса у парних степенях, тому еліпс є фігурою симетричною відносно осей Ox та Oy. Точка $O(0;0)$ є центром симетрії еліпса і називається ***центром еліпса***.

2. Знайдемо вершини еліпса як перетин його з осями координат:

– з віссю Ox: $y = 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} = 1,\ x^2 = a^2,\ x = \pm a;$

– з віссю Oy: $x = 0,\ \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y^2 = b^2,\ y = \pm b.$

Отже, маємо дві вершини еліпса на осі Ox: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$ і дві вершини на осі Oy: $B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають ***великою віссю*** еліпса, відрізок a – ***великою піввіссю еліпса***, відрізок $B_1B_2 = 2b$ – ***мала вісь еліпса***, відрізок b – ***мала піввісь еліпса***.

3. Якщо в рівнянні еліпса $a = b$, то одержимо рівняння кола: $x^2 + y^2 = a^2$. Отже, коло – це частинний випадок еліпса.

4. Подальші дослідження рівняння еліпса показують, що еліпс має форму овалу, який вписується у прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ з центром у точці $O(0;0)$ з двома взаємно перпендикулярними осями симетрії – осями координат (рис. 17).

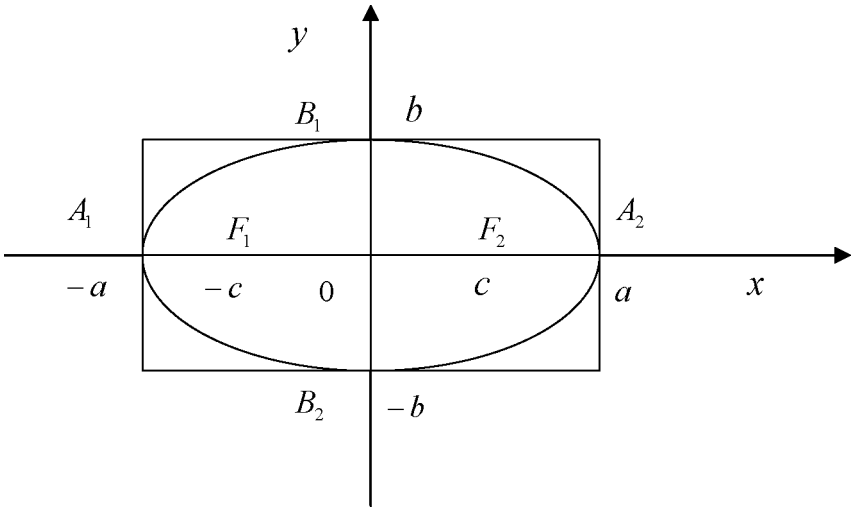


Рис. 17

Означення. ***Ексцентриситетом еліпса*** *називається відношення відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі, позначають* $\varepsilon = \dfrac{F_1F_2}{A_1A_2} = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}.$

Оскільки $c < a$, то $\varepsilon < 1$. Величина ексцентриситету вказує на форму еліпса. Це видно із співвідношення: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто маємо коло. Якщо ε збільшується, то дріб $\frac{b}{a}$ зменшується, що означає все більше розтягнення еліпса вздовж осі *Ox*.

Означення. ***Директрисами еліпса*** *називаються дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі еліпса (великої осі, на якій лежать фокуси еліпса), які розміщені симетрично відносно центра еліпса на відстані* $\frac{a}{\varepsilon}$ *від нього.*

Рівняння директрис еліпса: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Оскільки $\varepsilon < 1$, *то* $\frac{\alpha}{\varepsilon} > \alpha$, *отже, еліпс розміщується між його директрисами.*

Відрізки $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ називаються ***фокальними радіусами*** точки еліпса.

Наведемо без доведення теорему.

Теорема. *Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстані від цієї точки до відповідних директрис є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету еліпса:* $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r}{d} = \varepsilon$ (рис. 18).

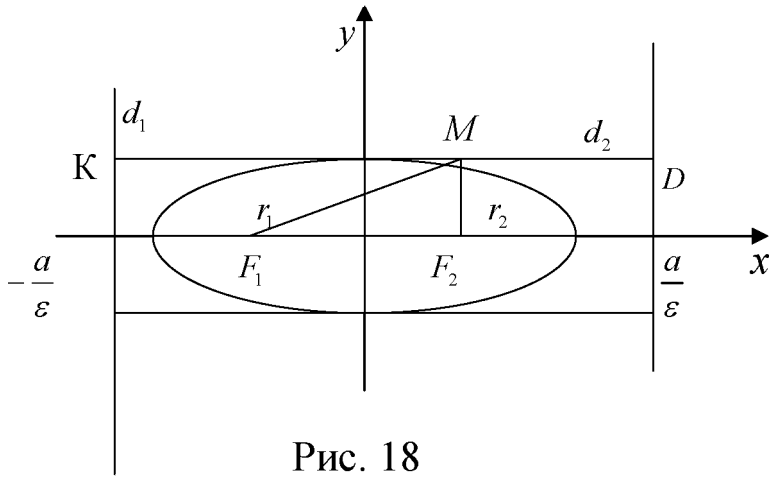


Рис. 18

При паралельному перенесенні осей координат в новий початок $M_0(x_0; y_0)$ рівняння еліпса набуває більш загального вигляду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) мала вісь еліпса дорівнює 12, а ексцентриситет еліпса $\frac{4}{5}$;

б) відстань між директрисами еліпса $\frac{100}{3}$, а відстань між фокусами еліпса 12.

Розв'язання

а) за умовою $2b=12$, звідки $b=6$; $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Використаємо співвідношення: $b^2=a^2-c^2$, звідки $c^2=a^2-b^2$. Піднесемо обидві частини рівності $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ до квадрата, зробимо заміну $c^2=a^2-b^2=a^2-36$ і одержимо рівняння відносно a: $\frac{c^2}{a^2}=\frac{16}{25}$, $\frac{a^2-36}{a^2}=\frac{16}{25}$, після перетворень знайдемо $a^2=100$. Маємо $b^2=36$, $a^2=100$, шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

б) За умовою $\frac{2a}{\varepsilon}=\frac{100}{3}$, звідки $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{50}{3}$. Відстань між фокусами еліпса $2c=12$, звідки $c=6$; $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{6}{a}$.

Підставимо значення $\varepsilon=\frac{6}{a}$ у рівність $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{50}{3}$ і одержимо рівняння відносно a: $\frac{a}{6/a}=\frac{50}{3}$, $\frac{a^2}{6}=\frac{50}{3}$, звідки $a^2=\frac{6\cdot 50}{3}=100$. Знайдемо $b^2=a^2-c^2=100-36=64$.

Одержимо рівняння еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

5.3. Гіпербола

Означення. ***Гіперболою*** *називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок, які називаються фокусами гіперболи, є величина стала (позначимо її* $2a$*).*

Нехай F_1, F_2 – фокуси гіперболи. Позначимо $F_1F_2 = 2c$, тоді $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка гіперболи (рис. 5).

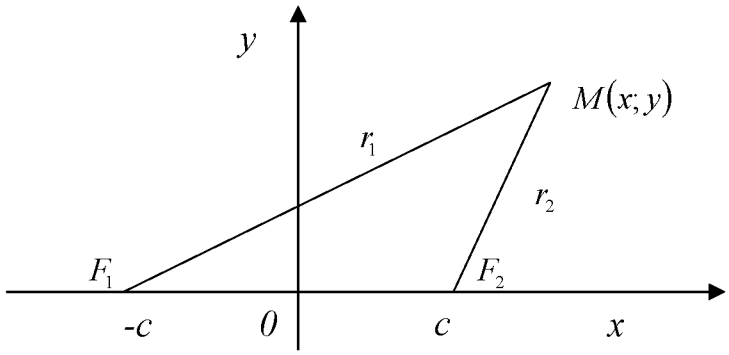


Рис. 19

$F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ – фокальні радіуси точки M гіперболи. З означення гіперболи випливає, що $r_1 - r_2 = 2a$.

Перепишемо останню рівність в координатній формі, враховуючи, що $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Маємо: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Виконаємо перетворення, аналогічні тим, які використовувалися для виведення рівняння еліпса, і враховуючи той факт, що для гіперболи $c > a$ і можливе позначення $b^2 = c^2 - a^2$, одержимо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Знайдемо вершини гіперболи як точки перетину гіперболи з осями координат:

– з віссю Ox: $y = 0$, $x^2 = a^2$, $x = \pm a$;

– з віссю Oy: $x = 0$, $y^2 = -b^2$.

Отже, гіпербола перетинає вісь Ox в двох точках: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, які називають *дійсними вершинами гіперболи*,

а відрізок $A_1A_2 = 2a$ – *дійсною віссю гіперболи.* Рівняння $y^2 = -b^2$ не має дійсних розв'язків, тому вершини $B_1(0; b), B_2(0; -b)$ називають *уявними*, що свідчить про те, що гіпербола не перетинає вісь *Oy*. Відрізок $B_1B_2 = 2b$ називають ***уявною віссю гіперболи***.

Проводячи подальші дослідження рівняння гіперболи, з'ясовуємо, що:

– гіпербола складається з двох нескінчених віток, які є симетричними відносно осей координат і початку координат;

– будь-яка змінна точка $M(x; y)$ гіперболи при її віддаленні у нескінченість необмежено наближається до однієї з двох прямих $y = \pm\frac{b}{a}x$, які називають ***асимптотами гіперболи*** (рис. 6);

– кожна гіпербола має так звану *спряжену гіперболу*, рівняння якої $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і яка має ті ж самі асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$ і будується на тому ж самому малюнку, що і сама гіпербола (рис. 20). Графік спряженої гіперболи – пунктирна лінія.

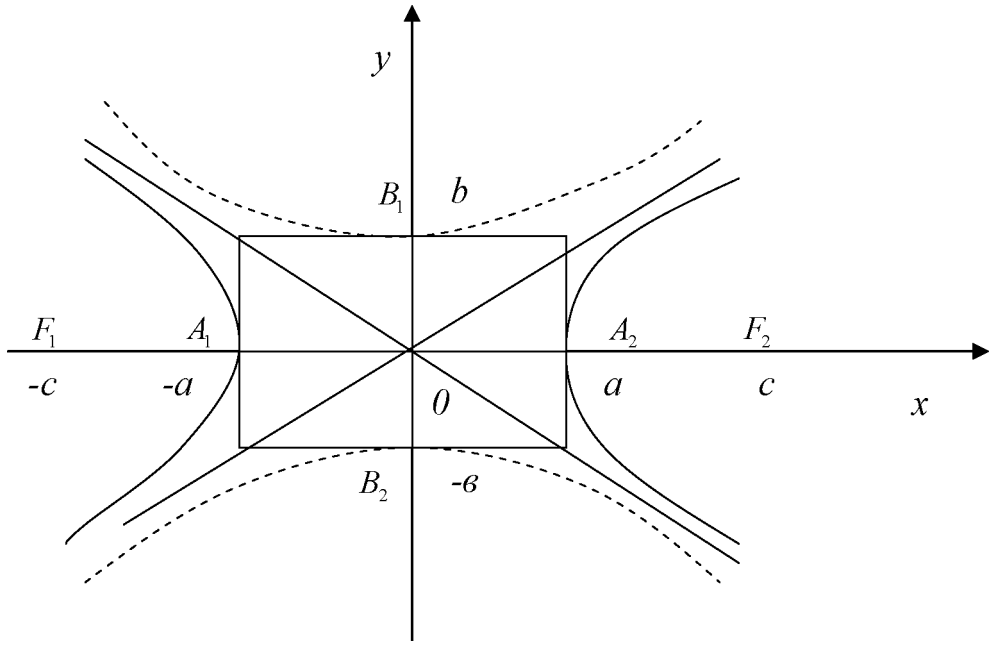


Рис. 20

– фокуси гіперболи знаходяться на дійсній осі (яка лежить на осі *Ox)*, зовні прямокутника зі сторонами $2a$ *і* $2b$, діагоналі якого є асимптотами гіперболи (фокуси спряженої гіперболи знаходяться на осі *Oy*);

– якщо $a = b$, то така гіпербола називається *рівнобічною*; її рівняння має вигляд: $x^2 - y^2 = a^2$; асимптоти її є бісектрисами I і III та II і IV координатних кутів

Означення. ***Ексцентриситетом гіперболи*** *називається відношення відстані між фокусами гіперболи до довжини її дійсної осі:* $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$.

Оскільки для гіперболи $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Аналогічно еліпсу ексцентриситет гіперболи вказує на форму кривої. Зі співвідношення $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ випливає, що коли ексцентриситет гіперболи зменшується до 1, то відношення $\dfrac{b}{a}$ також зменшується. Це свідчить про зменшення кута між асимптотами і віссю Ox та про наближення віток гіперболи до осі Ox. Якщо ексцентриситет гіперболи збільшується, то зростає кут між асимптотами і віссю Ox, вітки гіперболи все більше відхиляються від осі Ox.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{b}$ називають ***директрисами гіперболи***. Оскільки $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Це свідчить про те, що директриси гіперболи розміщуються між лівою і правою вітками гіперболи і не перетинають їх (рис. 21).

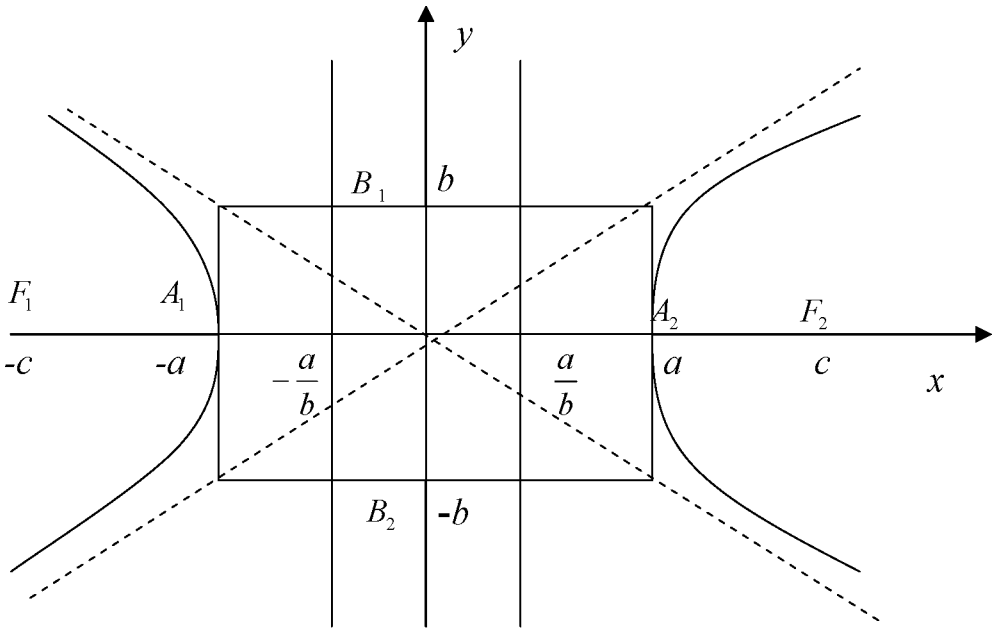


Рис. 21

При паралельному перенесенні початку координат у нову точку $M_0(x_0; y_0)$ рівняння гіперболи набуде більш загального вигляду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, якщо:

а) рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{5}{12}x$, а відстань між фокусами дорівнює 26;

б) точки $M_1(6; -1)$, $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ належать гіперболі.

Розв'язання

а) з означення асимптот гіперболи випливає, що $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, звідки $b = \frac{5}{12}a$. Згідно умови $2c = 26$, $c = 13$. Використаємо співвідношення для a, b і c гіперболи $b^2 = c^2 - a^2$. Підставимо в нього значення $b = \frac{5}{12}a$ і $c = 13$ і одержимо рівняння $\left(\frac{5}{12}a\right)^2 = 13^2 - a^2$, звідки $a^2 = 144$, $a = 12$. Знайдемо $b^2 = 169 - 144 = 25$. Маємо рівняння гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$

б) Точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ задовольняють рівняння гіперболи, тому, підставивши ці точки у рівняння гіперболи, одержимо систему двох рівнянь відносно невідомих a та b:

$\begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \end{cases}$. Позначимо $\frac{1}{a^2} = u, \frac{1}{b^2} = v$. Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 36u - v = 1 \\ 64u - 8v = 1 \end{cases}$.

Розв'язавши цю систему, одержимо $36u - 4u = 1, 32u = 1, u = \frac{1}{32}, v = 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$.

Перейдемо до заміни: $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{32}$, звідки $a^2=32$, $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{8}$, звідки $b^2=8$. Шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.

5.4. Парабола

Означення. ***Параболою*** *називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса параболи) і даної прямої (директриси параболи).*

Нехай F – фокус параболи, l – директриса параболи, а $M(x;y)$ деяка змінна точка параболи (рис. 22). Тоді за означенням маємо рівняння параболи: $MK = MF$

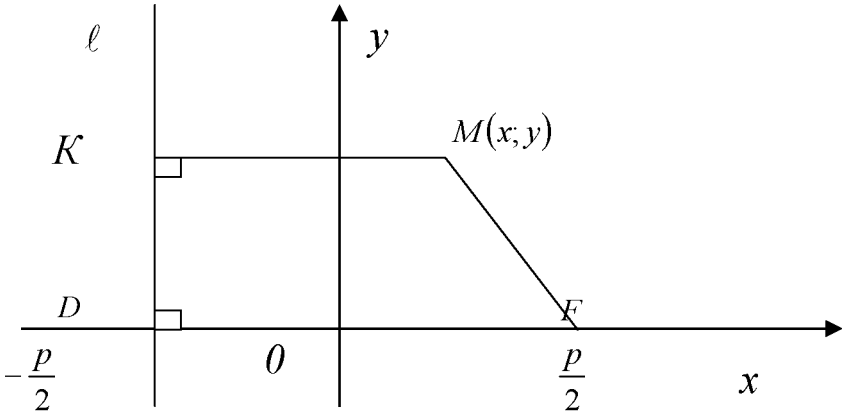


Рис. 22

Позначимо відстань між фіксованою точкою F і фіксованою прямою l через p; $p = FD$. Нехай вісь Ox пройде через точки F і D, а вісь Oy – через середину відрізка DF перпендикулярно до нього. Тоді $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси параболи l має вигляд $x=-\frac{p}{2}$.

Перепишемо рівняння $MK = MF$ в координатній формі, враховуючи, що

$MK=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}$, $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Маємо

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і одержимо рівняння $y^2 = 2px$, яке називають *канонічним рівнянням параболи.*

Це рівняння другого степеня. Дослідимо його.

1. Оскільки у рівнянні $y^2 = 2px$ змінна y входить у парному степені, то парабола є фігурою, симетричною відносно осі Ox.

2. Якщо $y = 0$, то $x = 0$, і навпаки, тобто парабола перетинає вісі Ox, Oy в точці $O(0;\ 0)$, яка називається *вершиною параболи.*

3. Оскільки $p > 0$, $2px \geq 0$, то звідси $x \geq 0$, тобто парабола розміщується справа від початку координат.

4. Із зростанням x зростає $|y|$.

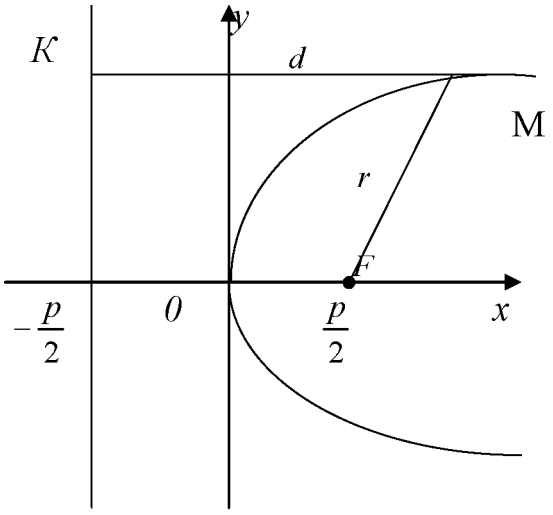
Дослідження рівняння $y^2 = 2px$ дозволяє одержати вигляд параболи (рис. 9).

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$, $x^2 = 2py$ також є канонічними рівняннями параболи, графіки яких зображені на рис. 23–26.

При паралельному перенесенні початку координат у точку $M_0(x_0; y_0)$ рівняння параболи набуває більш загального вигляду

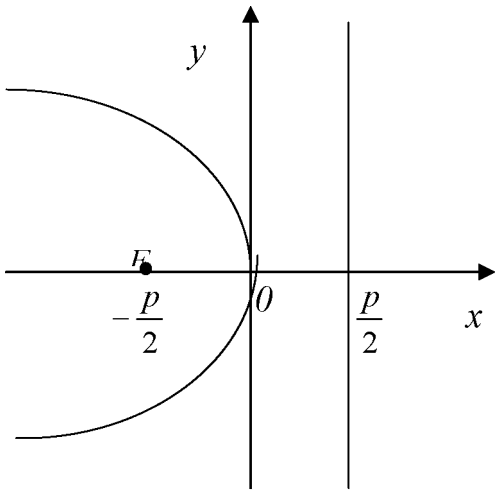
$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0),\quad (x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),\quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$



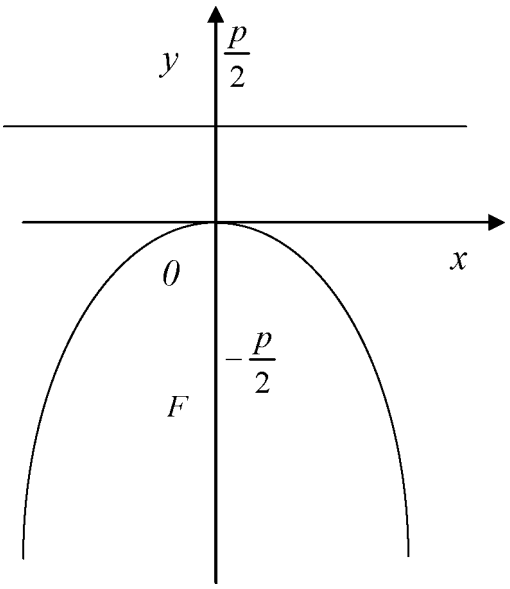
$y^2 = 2px(x \geq 0)$

Рис. 23



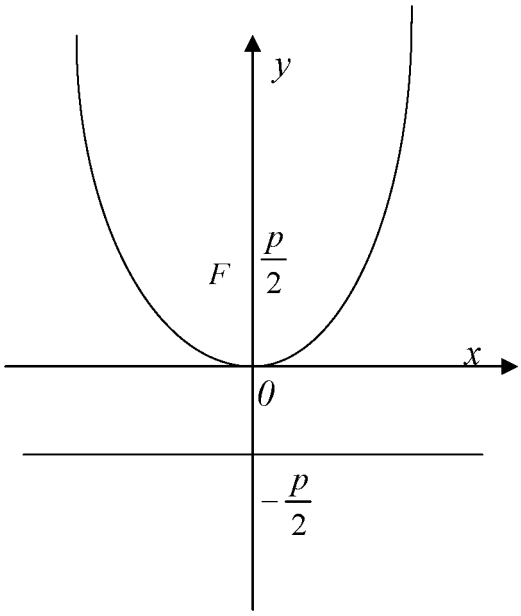
$y^2 = -2px(x \leq 0)$

Рис. 24



$x^2 = -2py (y \le 0)$

Рис. 25



$x^2 = 2py\ (y \ge 0)$

Рис. 26

Для параболи $y^2 = 2px$ (рис. 9) так, як для еліпса і гіперболи, виконується умова $\frac{r}{d} = \varepsilon$, звідки $\varepsilon = \frac{MF}{MK} = 1$, отже ексцентриситет параболи дорівнює 1. Розміщуючи криві у порядку зростання ексцентриситету, одержимо таку послідовність:

1. Коло $\varepsilon = 0$.
2. Еліпс $0 < \varepsilon < 1$.
3. Парабола $\varepsilon = 1$.
4. Гіпербола $\varepsilon > 1$.

Приклад. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус знаходиться в точці перетину прямої $4x - 3y - 4 = 0$ з віссю *Ox*.

Розв'язання

Спочатку знайдемо точку перетину прямої з віссю *Ox*. Для цього треба в рівняння прямої підставити $y = 0$, одержимо $4x - 3 \cdot 0 - 4 = 0$, звідки $x = 1$. Отже, $F(1;\ 0)$ – фокус параболи.

Оскільки $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 1$, звідки $p = 2$. В рівняння $y^2 = 2px$ підставимо $p = 2$ і одержимо рівняння параболи $y^2 = 4x$.

Приклад. На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, відстань якої від директриси дорівнює 4.

Розв'язання

З рівняння параболи випливає, що $2p = 8,\ p = 4,\ \frac{p}{2} = 2,\ x = -2$ – рівняння директриси. Згідно умови $d = 4$, але $d = 2 + x$, де x – абсциса шуканої точки параболи. Маємо $4 = 2 + x,\ x = 2$. Підставимо $x = 2$ в рівняння параболи і одержимо $y^2 = 8 \cdot 2 = 16,$ звідки $y = \pm 4$. Отже, одержали дві шуканих точки $M_1(2;\ 4),\ M_2(2;\ -4).$

5.5. Дослідження рівняння другого порядку

Розглянемо загальне рівняння другого порядку, яке не містить добутку $x \cdot y$, а саме: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$.

Якщо це рівняння є рівнянням деякої кривої другого порядку і, крім того,

1) $A = B$, то це рівняння кола;

2) $A \cdot B > 0$, тобто коефіцієнти A і B одного знаку, але різні за величиною, то це рівняння еліпса;

3) $A \cdot B < 0$, тобто коефіцієнти A і B мають різні знаки, то це рівняння гіперболи;

4) $A = 0$ (або $B = 0$), то це рівняння параболи.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь 8, а відстань між директрисами 16.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між вершинами 12.

4. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 20x$, якщо абсциса точки M дорівнює 7.

Тема 6. Вступ до математичного аналізу

6.1. Границя числової послідовності та функції

Означення. *Якщо кожному натуральному числу n є N ставиться у відповідність число* x_n, *то множину чисел* $x_1, x_2, ...x_n, ...$ *називають* ***числовою послідовністю*** *і позначають символом* $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, ...x_n, ...$ *називають* ***членами числової послідовності***: x_1 *– перший член,* x_2 *– другий,* x_n *– n-й або* ***загальний член послідовності***.

Геометрично послідовність зображується на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її *n-го* члена. Найчастіше послідовність задається формулою *n-го* члена.

Очевидно, що довільна функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел *N*, визначає деяку числову послідовність $\{x_n\}$, $n = 1, 2...$, якщо $x_n = f(n)$.

Останню рівність називають ***формулою n-го члена числової послідовності.***

Приклад. Знайти перші три члена послідовності $\{x_n\}$, якщо $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$.

Розв'язання. Підставляючи у формулу *n*-го члена послідовності числа 1, 2, 3, отримаємо:

$$x_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Означення. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***зростаючою*** *(неспадною), якщо для будь-якого n виконується нерівність* $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} \geq x_n)$. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***спадною*** *(незростаючою), якщо для будь-якого n виконується нерівність* $x_{n+1} < x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$. Усі такі послідовності називаються ***монотонними***.

Означення. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***обмеженою,*** *якщо існують такі числа* m *та* $M(m < M)$, *що для всіх* n *виконується нерівність* $m \le x_n \le M$.

Означення. *Число* a *називається* ***границею числової послідовності*** $\{x_n\}$, *якщо для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *(яке б мале воно не було), існує номер* $N(\varepsilon)$ *такий, що для всіх номерів* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Геометрична інтерпретація границі послідовності

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, яка показує, що елемент x_n знаходиться в ε-околі точки a, тому означення границі можна сформулювати інакше.

Означення. *Число* a *називається* ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, *якщо для будь-якого* ε*-околу точки* a *існує номер* N, *такий що, починаючи з номера* $n > N$, *усі члени послідовності потрапляють у цей окіл (рис. 27).*

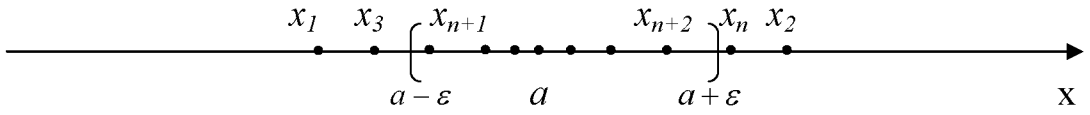


Рис. 27

Послідовність, яка має границю, називають ***збіжною****, а послідовність, що не має границю, називають* ***розбіжною****.*

Основні властивості границі послідовності

1. Теорема Вейєрштрасса. Якщо послідовність монотонна й обмежена, то вона має границю.

2. Якщо послідовність збіжна, то вона має тільки одну границю.

3. Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

4. *Якщо послідовності* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *збіжні, то* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Приклад. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1} = 1$.

Доведення. $|x_n - 1| = \left|\dfrac{2n-1}{2n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{-3}{2n+2}\right| = \dfrac{3}{2n+2}$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$, наприклад $\varepsilon = 0{,}01$. Нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконуватиметься, якщо $\dfrac{3}{2n+2} < \varepsilon$, звідки $n > \dfrac{3}{2\varepsilon} - 1$. Позначимо за N найбільше ціле число, яке не перевищує $\dfrac{3}{2\varepsilon} - 1$, тобто $N = \left[\dfrac{3}{2\varepsilon} - 1\right] = \left[\dfrac{3}{2 \cdot 0{,}01} - 1\right] = [149] = 149$. Тоді для всіх $n > N$, тобто при $n > 149$ матимемо $|x_n - 1| < \varepsilon = 0{,}01$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1} = 1$.

У цьому прикладі за заданим $\varepsilon = 0{,}01$ при $n > 149$ виконується нерівність $\left|\dfrac{2n-1}{2n+2} - 1\right| < \varepsilon = 0{,}01$.

6.2. Границя функції

Означення. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена на проміжку* $(-\infty; +\infty)$. *Число* A *називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$, *якщо для будь-якого малого* $\varepsilon > 0$ *існує таке додатне число* $M = M(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x *таких, що* $|x| > M$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Геометричний зміст означення границі функції при $x \to \infty$

При достатньо великих за модулем значеннях x значення функції $f(x)$ мало (менше ніж на ε) відрізняються від числа A (рис. 28), тобто відповідні точки графіка функції лежать у смузі, обмеженій прямими $y = A + \varepsilon$ *і* $y = A - \varepsilon$.

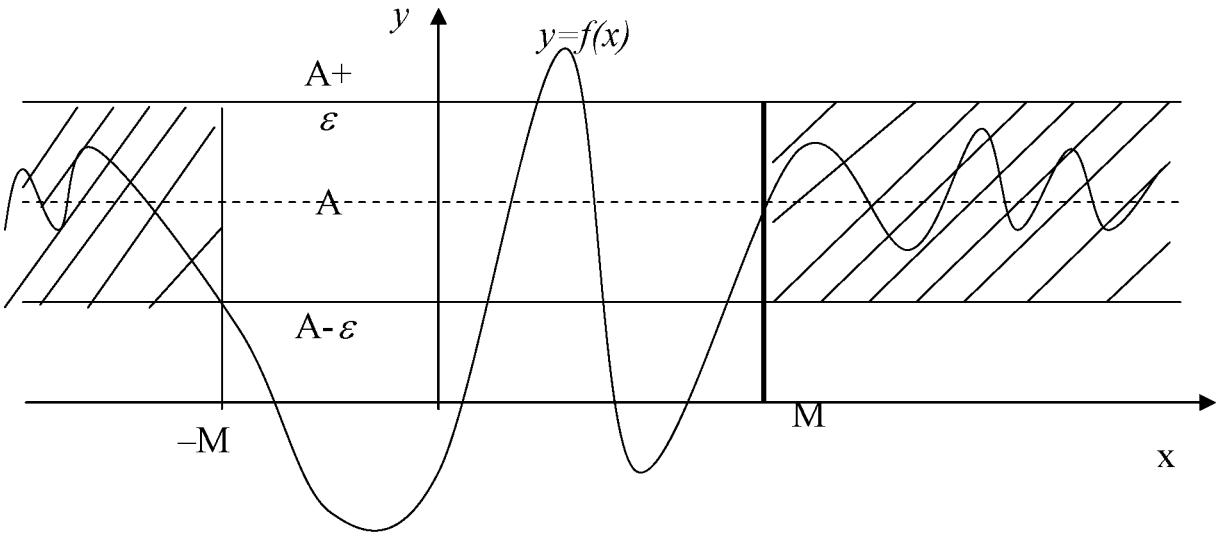


Рис. 28

Означення. *Число* A *називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ *в точці* x_0, *якщо для будь-якого малого числа* $\varepsilon > 0$ *існує число* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *таке, що при всіх* x, *що задовольняють нерівність* $|x - x_0| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Зауваження. *Означення границі не вимагає існування функції в точці* x_0, *тобто* $x \to x_0$, *але* $x \neq x_0$.

Геометричний зміст означення границі функції в точці x_0

За заданим ε-околом числа A існує δ-окіл числа x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ відповідні значення функції $f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$, тобто лежать у смузі шириною 2ε (рис. 29).

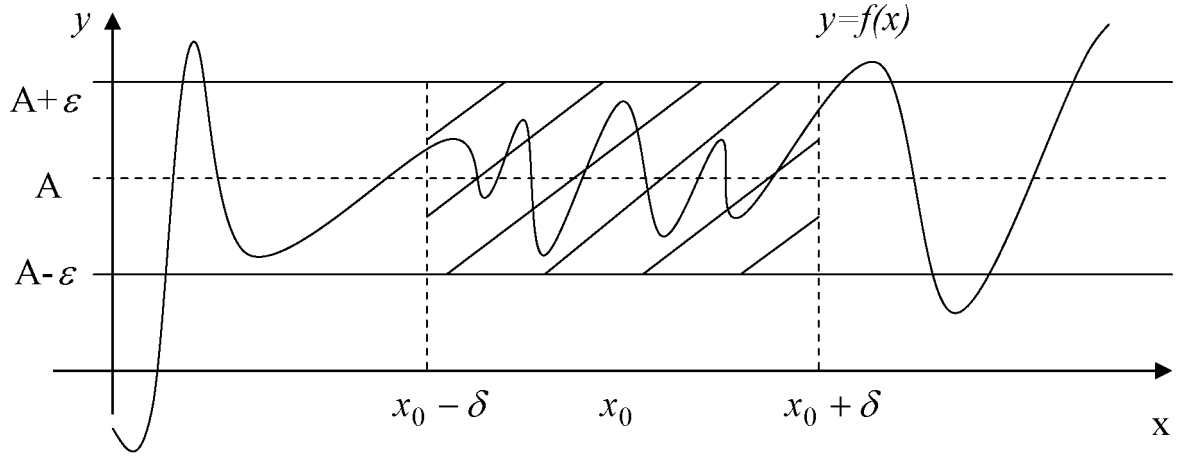


Рис. 29

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Розв'язання. Нехай $\varepsilon>0$ довільне мале число. Розглянемо $\left|(2x+3)-5\right|=\left|2x-2\right|=2\left|x-1\right|$. Нерівність $\left|f(x)-5\right|<\varepsilon$ виконуватиметься, якщо $2\left|x-1\right|<\varepsilon$, звідки $\left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже, якщо $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, то при всіх x таких, що $\left|x-1\right|<\delta$, виконується нерівність $\left|(2x+3)-5\right|<\varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Означення. *Якщо функція $y=f(x)$ має границею число A_1 при $x\to x_0$ $x<x_0$, то число A_1 називають* ***границею функції зліва*** *(лівосторонньою границею) і позначають* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=A_1$.

Означення. *Якщо число A_2 є границею функції $y=f(x)$ при $x\to x_0$ $x>x_0$, то число A_2 називають* ***границею функції справа*** *(правосторонньою границею) і позначають* $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=A_2$.

Для існування границі A функції $y=f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб існували в цій точці границі функції зліва та справа і щоб вони були рівні, тобто $A_1=A_2=A$.

6.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення. *Функція $\alpha(x)$ називається* ***нескінченно малою*** *при $x\to x_0(x\to\infty)$, якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ *(*$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$*).*

Приклад

а) Функція $y = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to \pi n, n \in Z$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pi n} \sin x = 0$ (рис. 30).

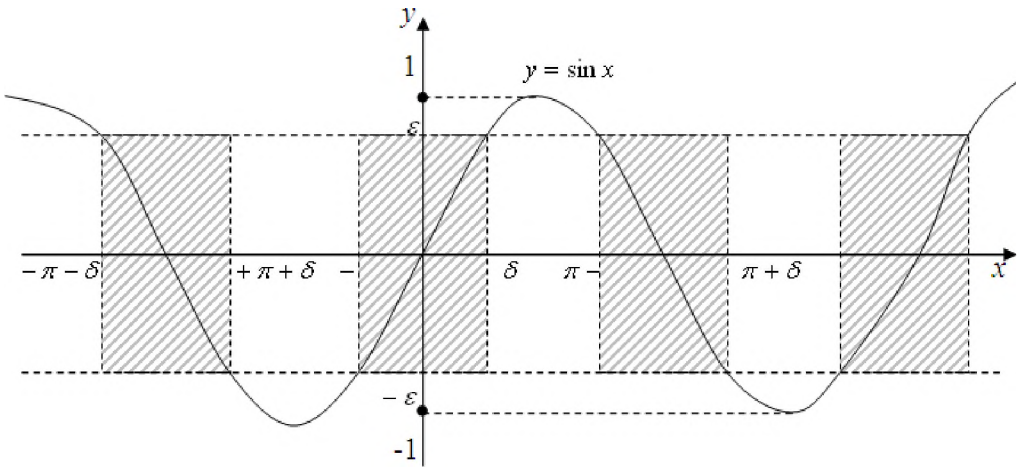


Рис. 30

б) Функція $y = \dfrac{1}{x-2}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$ (тобто при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$), бо $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ (рис. 31).

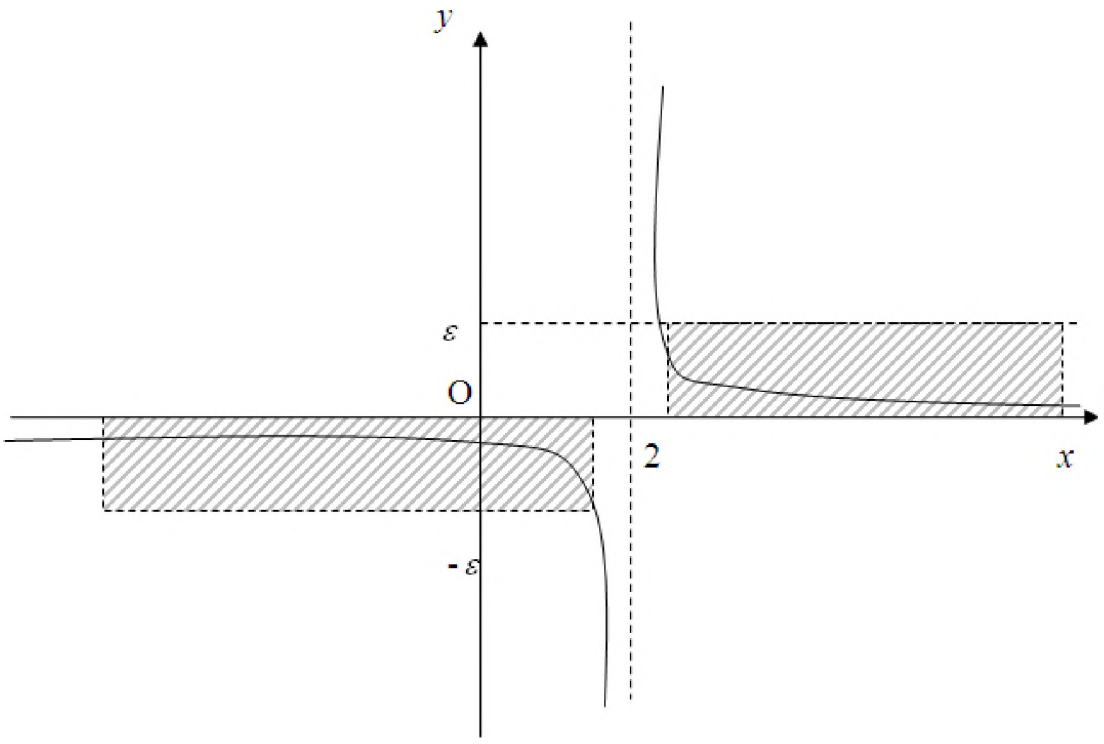


Рис. 31

Властивості нескінченно малих функцій

1. Алгебраїчна сума скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

2. Добуток нескінченно малої функції на сталу величину, або на обмежену функцію, чи на іншу нескінченно малу функцію є нескінченно малою функцією.

3. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є нескінченно малою функцією.

Означення. *Функція* $f(x)$ *називається* ***нескінченно великою*** *при* $x \to x_0$, *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, *тобто для* $\forall M > 0$ *існує* $\delta = \delta(M) > 0$ *таке, що для всіх* x *таких, що* $|x - x_0| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x)| > M$.

Приклад

а) Функція $y = \dfrac{1}{x-2}$ є нескінченно великою при $x \to 2$, бо $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$ (рис. 32).

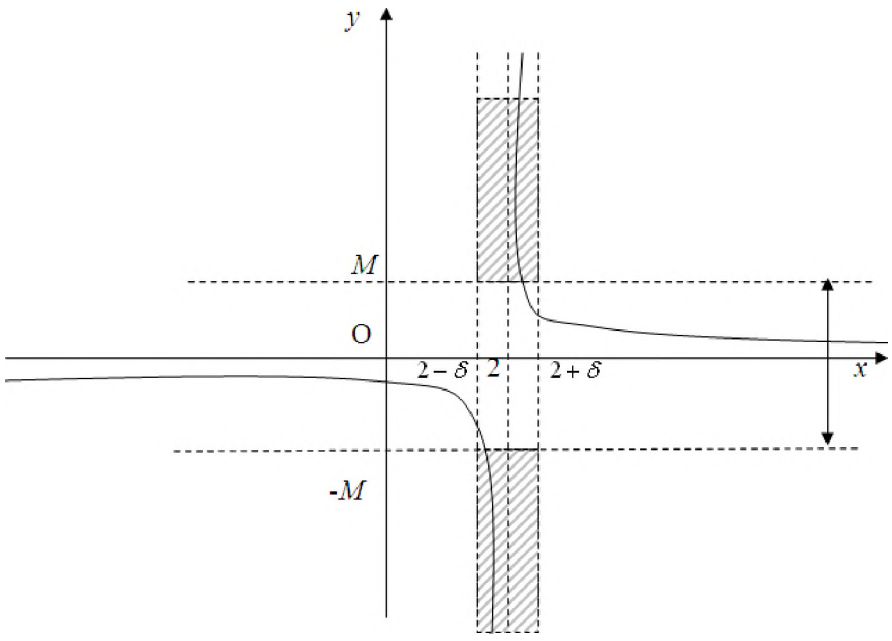


Рис. 32

Дійсно, яке б велике число $M > 0$ не взяли, для відповідних значень $x \in (2-\delta; 2+\delta)$ точки графіка функції лежать зовні смуги, обмеженої лініями $y = M$ та $y = -M$.

Властивості нескінченно великих функцій

1. Сума скінченого числа нескінченно великих функцій є нескінченно великою функцією.

2. Добуток нескінченно великої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю (стала, обмежена, інша нескінченно велика функція) є нескінченно великою функцією.

3. Частка від ділення нескінченно великої функції на функцію, що має границю в точці x_0, є нескінченно великою функцією.

Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими функціями

Теорема. *Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці x_0, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика в точці x_0, і навпаки, якщо $f(x)$ – нескінченно велика функція в точці x_0, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала в точці x_0.*

Доведення. Нехай $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою функцією, тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність: $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Звідси випливає, що $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, тобто функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$. Аналогічно доводиться обернене твердження.

Приклад

1. Функція $y = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to \pi n$, бо $\lim\limits_{x \to \pi n} \sin x = 0$, тому функція $y = \dfrac{1}{\sin x}$ при $x \to \pi n$, $n \in N$ є нескінченно великою і $\lim\limits_{x \to \pi n} \dfrac{1}{\sin x} = \infty$.

2. Функція $y = \dfrac{1}{x-2}$ є нескінченно великою при $x \to 2$, бо $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$, тому функція $y = x - 2$ при $x \to 2$ є нескінченно малою і $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$.

Зв'язок між нескінченно малою функцією та границею функції

Теорема. *Функція* $f(x)$ *має границю* A *в точці* x_0 *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді суми числа* A *і нескінченно малої функції* $\alpha(x)$ *при* $x \to x_0$, *тобто* $f(x) = A + \alpha(x)$.

Доведення. Нехай $f(x)$ має границю A в точці x_0, звідки випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ при $x \to x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначимо $g(x) = f(x) - A$, тоді маємо $|g(x)| < \varepsilon$, тобто з означення границі функції маємо, що $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, тобто $g(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$.

З рівності $f(x) - A = g(x)$ отримаємо $f(x) = A + g(x)$, де $g(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$. Пряма теорема доведена.

Доведемо обернене твердження.

Нехай $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$. Доведемо, що А – границя $f(x)$ в точці x_0.

З рівності $f(x) = A + \alpha(x)$ випливає, що $\alpha(x) = f(x) - A$.

За означенням нескінченно малої функції маємо, що $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - A) = 0$, звідки випливає, що для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ при $x \to x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема доведена.

Порівняння нескінченно малих функцій

Означення. *Якщо* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *нескінченно малі функції в точці* x_0 *і* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то функції* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *називаються* ***еквівалентними*** *нескінченно малим функціям і позначаються* $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to x_0$.

Ланцюг еквівалентних нескінченно малих функцій

Якщо $x \to 0$, *то*

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim$$

$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}$, *де* $\alpha \in R$.

Якщо $x \to x_0$, *то*

$$x - x_0 \sim \sin(x - x_0) \sim tg(x - x_0) \sim \arcsin(x - x_0) \sim arctg(x - x_0) \sim$$

$$\sim \frac{a^{x-x_0} - 1}{\ln a} \sim \ln(1 + (x - x_0)) \sim e^{x-x_0} - 1 \sim \frac{(1 + (x - x_0))^\alpha - 1}{\alpha}, \text{ де } \alpha \in R$$

Ланцюг еквівалентних нескінченно малих функцій застосовується при обчисленні границь функцій, про що свідчить теорема, яку наводимо без доведення.

Теорема. *Якщо* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ *при* $x \to x_0$ *і* $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ *при* $x \to x_0$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_2(x)}$.

Таким чином, під знаком границі можна замінять нескінченно малі функції еквівалентними нескінченно малими функціями.

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{tg2x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$.

Розв'язання

а) оскільки $\sin 5x \sim 5x$, $tg2x \sim 2x$ при $x \to 0$, то згідно з теоремою $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{tg2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$;

б) оскільки $\arcsin(x-3) \sim (x-3)$ при $x \to 3$, то згідно з теоремою

$$\lim_{x \to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

6.4. Основні теореми про границю

Властивості функції, які мають границі в точці

Теорема *(про єдиність границі функції в точці). Функція* $y = f(x)$ *не може мати дві різні границі в одній точці.*

Теорема *(про граничний перехід у нерівності). Якщо в деякому околі точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*, виконується нерівність* $f(x) \le \varphi(x)$ *і кожна з функцій* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *має границю в точці* x_0*, то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

Наслідок. Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0 виконується нерівність $f(x) \le 0$ $(\varphi(x) \ge 0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le 0$ $(\lim \varphi(x) \ge 0)$, у припущенні, що функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають границю в точці x_0.

Теорема *(про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*, виконується нерівність* $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$.

Якщо функції $\varphi(x)$ *та* $\psi(x)$ *мають границю в точці* x_0*, причому* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$*, то функція* $f(x)$ *також має границю в цій точці і* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *має в точці* x_0 *границю, тобто* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$*, то* $y = f(x)$ *– обмежена при* $x \to x_0$.

Властивості границь функцій

Теорема. *Якщо* $f(x) = c$*, де* c *– довільне дійсне число, то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$*, тобто границя сталої в довільній точці* x_0 *дорівнює самій цій сталій.*

Теорема. *Якщо кожна з функцій* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *має границю в точці* x_0*, то в цій точці існують також границі функцій* $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \ne 0\right)$ *і мають місце формули*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm \varphi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot \varphi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Наслідки

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ існує, то для довільного числа c виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, тобто сталий множник можна винести за знак границі.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ існує, то для довільного натурального m $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^m=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^m$.

Приклад. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+5\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(3x-\frac{2x}{x^2+1})$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+5\right)=8$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(3x)-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=0-0=0.$

6.5. Розкриття деяких невизначеностей

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених випадків.

1. Невизначеність виду $[\infty-\infty]$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\frac{3}{x})=\infty\cdot(1-0)=\infty\cdot 1=\infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]=$

Границя зменшуваного і від'ємника в точці $x_0=2$ не існує, тому спочатку виконаємо віднімання дробів, звівши їх до спільного знаменника. Отримаємо

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\ \frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Зауваження. *Для функцій, які мають границю на нескінченності, залишаються справедливі всі сформульовані теореми.*

2. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ *задана відношенням двох многочленів:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{3x^4+x^2+10x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^4, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-1}{3x^4+x^2+10x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}}=\frac{1}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^3+5x^2-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

Після ділення чисельника і знаменника на x^3 отримаємо:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

Після ділення чисельника і знаменника на x^3 одержимо:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Отже, щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$*, задану відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник поділити на найвищий степінь х цих многочленів.*

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$*, задана відношенням двох многочленів.*

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на спільний множник *(x – 1)*:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x+4}=\frac{6}{5}.$$

Скорочення на $(x-1)$ можливе тому, що при означенні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $x\neq x_0$. Тобто при $x\to 1$, $x-1\neq 0$.

Множник $x-x_0$ називають ***критичним множником***. *Отже, щоб розкрити невизначеність* $\frac{0}{0}$, *задану відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник скоротити на критичний множник.*

4. *Невизначеність виду* $\frac{0}{0}$ *задана ірраціональними виразами:* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Позбудемось від ірраціональності в чисельнику, помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз та одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{2}{3}.$$

5. Невизначеність $\infty-\infty$ *задана ірраціональними виразами:*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

6.6. Перша важлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доведення

Побудуємо коло одиничного радіуса і кут $AOB = x \quad (радіан) \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

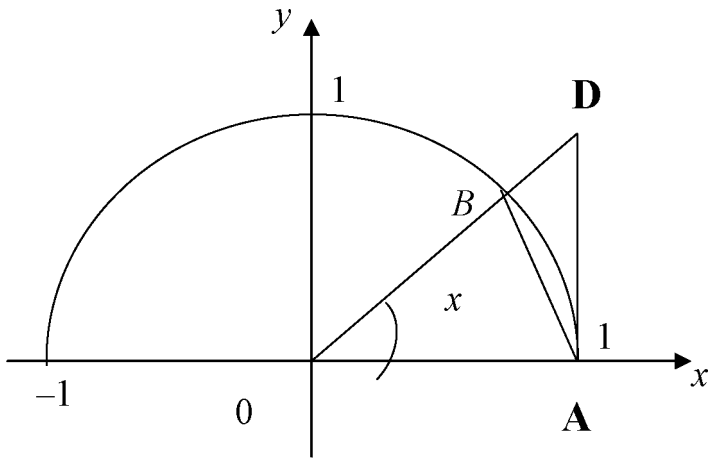


Рис. 33

З малюнку видно, що площа $S_{\Delta AOB} < S_{сектора\ \ AOB} < S_{\ \Delta AOD}$, але $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x,\ S_{сектора\ \ AOB} = \frac{1}{2}x,\ S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}tgx$.

Отже, маємо нерівність $\sin x < x < tgx$.

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ маємо $\sin x > 0$, тому можна поділити на $\sin x$.

Одержимо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Для обернених величин $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, але $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Приклад. Обчислити, використовуючи першу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{bx}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot\sin ax}{ax}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=a;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a\sin ax}{bax}\cdot\dfrac{bx}{\sin bx}\right)=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\dfrac{bx}{\sin bx}=\dfrac{a}{b};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a\sin ax}{bax}\cdot\dfrac{1}{\cos ax}\right)=$

$=\dfrac{a}{b}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos ax}=\dfrac{a}{b}.$

6.7. Друга важлива границя

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (без доведення).

Наслідки

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^{x}=e^{k}.$
2. $\lim\limits_{u\to\infty}(1+\dfrac{k}{u})^{u}=e^{k}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^{k}.$
4. $\lim\limits_{u\to 0}(1+ku)^{\frac{1}{u}}=e^{k}.$

Число $e=2{,}718...$ – одна з фундаментальних величин у математиці.

Показникова функція типу e^{ax} називається експонентою, логарифм з основою e називається натуральним і позначається $\ln$, у теорії ймовірностей та статистиці e^{-x^2} є основною функцією.

Друга важлива границя часто використовується для обчислення інших границь.

Приклад. Обчислити, використовуючи другу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-4}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=$

$=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+1}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}}=e^{-2};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3-2}{2x+3}\right)^{5x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2x+3}\right)^{5x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x+3}{-2}}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right)^{-\frac{2}{2x+3}}\right)^{5x-4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x+8}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10+\frac{8}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e^{-5}.$

6.8. Неперервність функції в точці

Означення *(означення Коші). Функція* $y=f(x)$ *називається* ***неперервною в точці*** x_0, *якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, *тобто якщо виконуються дві умови:*

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує $f(x_0)$);

2) границя зліва дорівнює границі справа в цій точці і дорівнює значенню функції в ній: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Наслідок. Під знаком неперервної функції можна переходити до границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, тобто для неперервної функції можлива перестановка символів границі і функції.

Приклад. Дослідити неперервність у точці $x=0$ функцій:

а) $y=\dfrac{1}{x}$;

б) $y=\begin{cases}x-1 & при\ x<0\\ x & при\quad x\ge 0\end{cases}$;

в) $y=\begin{cases}x^3 & при\ x\ne 0\\ 2 & при\ x=0\end{cases}$;

г) $y=3x^2$.

Розв'язання

а) Функція $y = \frac{1}{x}$ невизначена в точці x_0, отже, функція не є неперервною в точці $x = 0$ (рис. 34а);

б) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x-1) = -1$, тобто односторонні границі функції в точці $x = 0$ існують, але вони різні, отже, функція не є неперервною в точці $x = 0$ (рис. 34б);

в) односторонні границі функції зліва і справа в точці $x = 0$ рівні між собою $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$ і $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$,

але вони не дорівнюють значенню функції в цій точці, бо $f(0) = 2$. Отже, умова неперервності порушена і функція в точці $x = 0$ не є неперервною (рис. 34в);

г) для функції $y = 3x^2$ в точці $x = 0$ виконуються обидві умови неперервності $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$ і $f(0) = 0$.

Отже, функція $y = 3x^2$ в точці $x = 0$ є неперервною (рис. 34г).

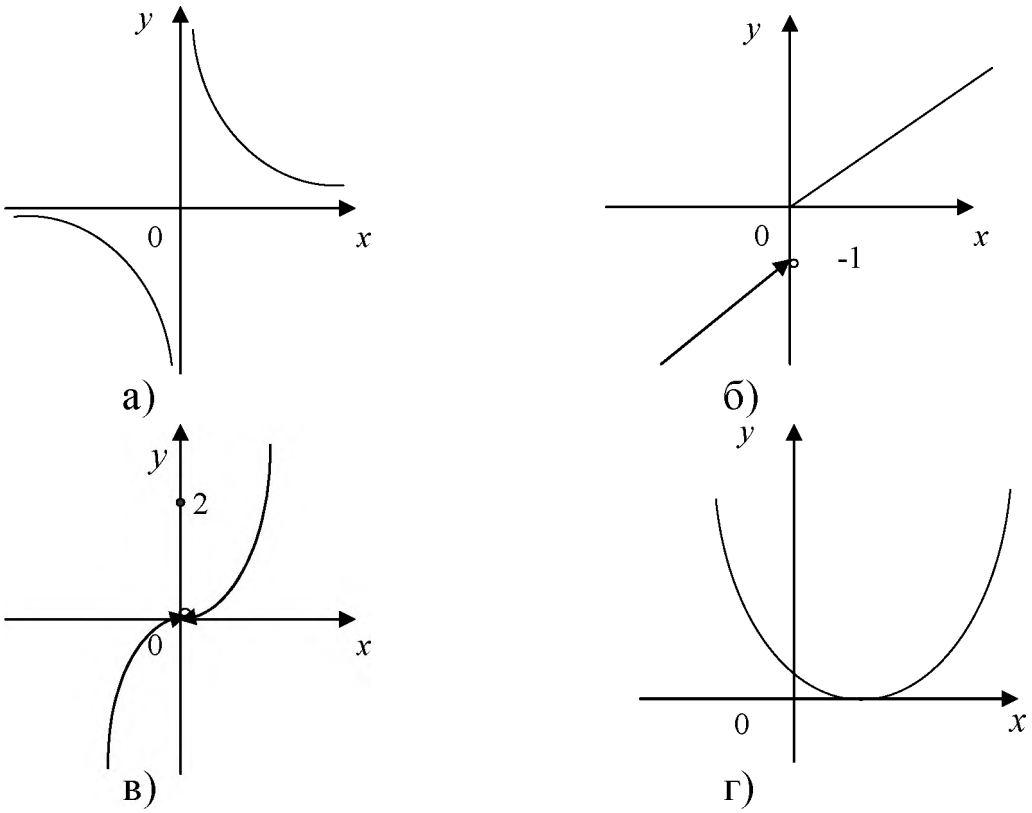


Рис. 34

Сформулюємо ще одне означення неперервності функції. Дамо аргументу x_0 приріст Δx, тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приріст функції в точці x_0 (рис. 35).

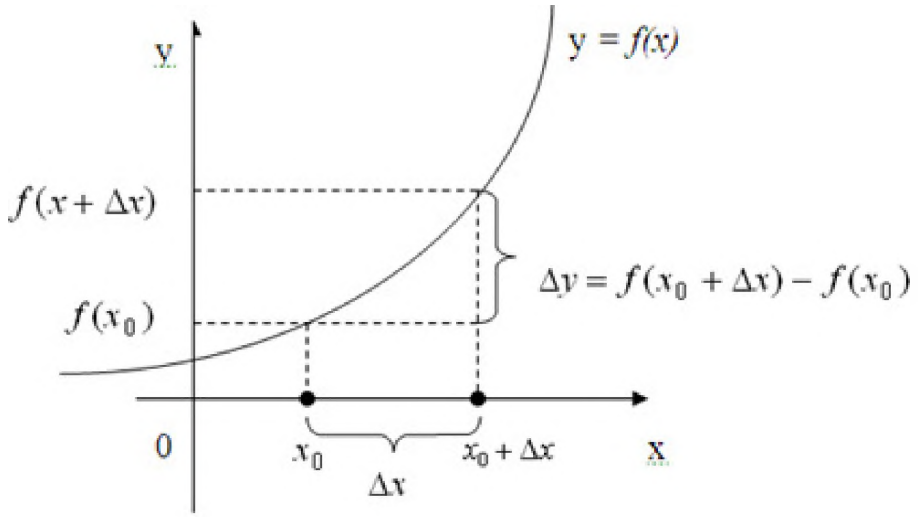


Рис. 35

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***неперервною в точці*** x_0, *якщо вона визначена в цій точці, і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Приклад. Дослідити неперервність функції $y = \sin x$.

Розв'язання

Надамо аргументу приросту Δx. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Обчислимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2} = 2 \cdot \sin 0 \cdot \cos x = 0,$

бо функція $\cos x$ є обмеженою, тобто $|\cos x| \le 1$. Отже, за означенням, функція $y = \sin x$ є неперервною для $x \in$ R, тобто на всій осі Ox.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***неперервною справа (зліва)*** *в точці* x_0, *якщо* $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = f(x_0)$ $(\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = f(x_0))$.

Властивості функцій, неперервних у точці

1. Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ неперервні в точці x_0, то їхня сума $f(x) \pm g(x)$, добуток $f(x) \cdot g(x)$ і частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ також є неперервними в точці x_0 функціями.

2. Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то існує окіл точки x_0, в якому $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

3. Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0, а функція $u = F(y)$ є неперервною в точці $y_0 = f(x_0)$, то їхня композиція (складена функція) $u = F(f(x))$ є неперервною в точці x_0.

Доведення. З неперервності функції $u = F(y)$ випливає за означенням, що $\lim\limits_{x \to x_0} F(f(x)) = F(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$. Через неперервність функції $y = f(x)$ в точці x_0 маємо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$.

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} F(f(x)) = F\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) = F(f(x_0))$, що й треба було довести.

Приклад. Довести, що функція $y = \left| \frac{\sin x}{3x^2 + 2} \right|$ є неперервною в будь-якій точці.

Доведення. Оскільки функції $y = \frac{\sin x}{3x^2 + 2}$ і $y = |x|$ є неперервними в довільній точці x_0, то складена функція $y = \left| \frac{\sin x}{3x^2 + 2} \right|$ як композиція двох неперервних функцій є також неперервною в будь-якій точці.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***неперервною на проміжку*** $(a; b)$, *якщо вона є неперервною в кожній точці цього проміжку.*

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***неперервною на відрізку*** $[a;\ b]$, *якщо вона є неперервною на проміжку* $(a;\ b)$ *і неперервна в точці a справа і в точці b зліва.*

Теорема. *Усі елементарні функції є неперервними на інтервалах їх визначеності.*

Доведення. В основі доведення лежить той факт, що елементарною називається така функція, яка може бути задана однією функцією, що містить скінчене число арифметичних дій і композицій основних елементарних функцій. Через те, що основні елементарні функції неперервні в усіх інтервалах їх визначеності, то з властивостей (1–3) випливає ця теорема.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку (рис. 36), тобто існують такі числа $A\ i\ B\ \ (A < B)$, що для всіх $x \in [a;\ b]$ виконується нерівність $A \le f(x) \le B$.

2. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого m і найбільшого M значення (рис. 37).

3. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і значення її на кінцях відрізках $f(a)\ \ i\ \ f(b)$ мають протилежні знаки, то всередині відрізка $[a;b]$ існує хоча б одна така точка $\xi\ \epsilon\ (a;b)$, що $f(\xi) = 0$ (рис. 38), тобто крива $y = f(x)$ перетне вісь Ox хоча б одній точці.

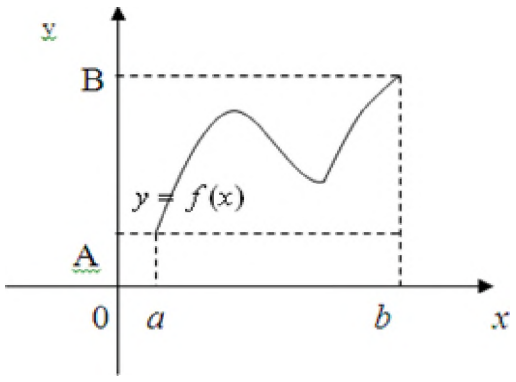


Рис. 36

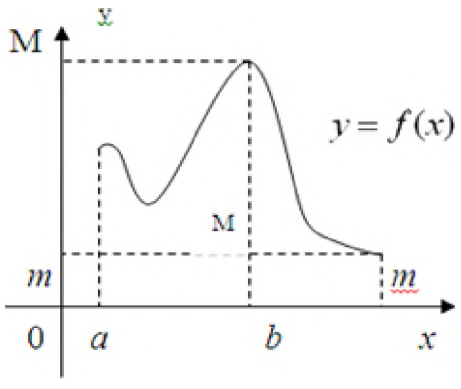


Рис. 37

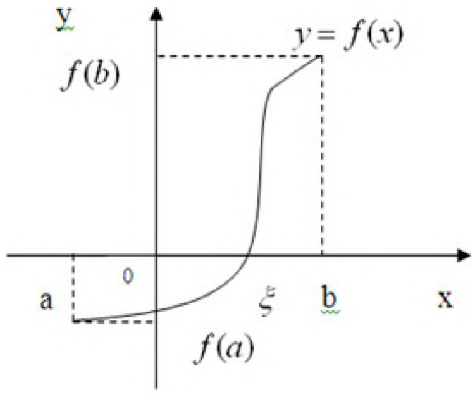


Рис. 38

6.9. Точки розриву функції та їх класифікація

Означення. *Точка* x_0 *називається* ***точкою розриву*** *функції* $y = f(x)$, *якщо в цій точці функція не є неперервною.*

Розрізняють точки розриву першого та другого роду і точки усувного розриву.

Означення. *Точка* x_0 *називається* ***точкою розриву першого роду,*** *якщо в цій точці існують обидві односторонні границі, але вони різні, тобто*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Приклад. На рис. 34б зображено графік функції $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, яка в точці $x = 0$ має розрив першого роду, оскільки в цій точці існують обидві односторонні границі

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x - 1) = -1$ і $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, але вони різні.

Величина $\delta = \left| \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right|$ називається ***стрибком функції*** в точці x_0. У нашому випадку $\delta = |-1 - 0| = 1$.

Означення. *Точка* x_0 *називається* ***точкою розриву другого роду*** *функції* $y = f(x)$, *якщо в цій точці не існує або дорівнює нескінченності хоча б одна з односторонніх границь.*

Приклад. На рис. 34а зображено графік функції $y = \frac{1}{x}$, яка в точці *0* має розрив другого роду, оскільки $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, *а* $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, тобто нескінченними є обидві односторонні границі.

Приклад. Функція $y = \begin{cases} 1, & x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$, яка зображена на рис. 39, має в точці $x = 2$ розрив другого роду, оскільки лівостороння границя функції існує $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$, а правостороння границя нескінченна $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

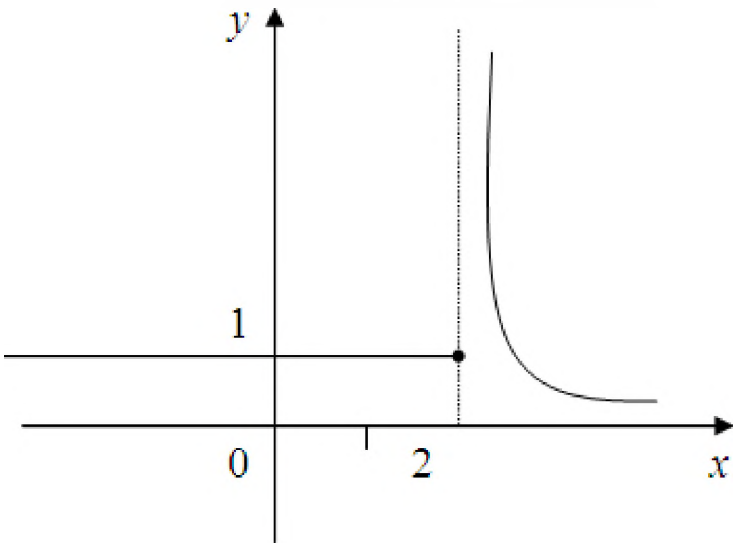


Рис. 39

Означення. *Точка x_0 називається* ***точкою усувного розриву*** *функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують обидві односторонні границі. Вони рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в точці x_0, або функція в цій точці не існує, тобто* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \ne f(x_0)$.

Точка усувного розриву – це частинний випадок точок розриву першого роду, коли стрибок функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $\delta = 0$.

У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$, щоб отримати функцію, неперервну в точці x_0.

Приклад. На рис. 34в зображено графік функції $y = \begin{cases} x^3, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, яка має в точці $x = 0$ усувний розрив, бо $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0 \neq f(0) = 2$.

Щоб усунути цей розрив, довизначимо функцію в точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 0$. Отримаємо нову функцію $y = \begin{cases} x^3, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, або функцію $y = x^3$, яка є неперервною в точці $x = 0$ і на всій осі Ox.

Приклад. Дослідити точки розриву функцій:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$; б) $y = \dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}$; в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання

а) Функція невизначена в точках, у яких знаменник дорівнює нулю, тобто в точках $x = 2$ та $x = 4$. Отже, точки $x = 2$ і $x = 4$ є точками розриву функції. Знайдемо односторонні границі в цих точках:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{1}{(x-2)(x-4)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{1}{(x-2)(x-4)} = -\infty.$$

Оскільки обидві односторонні границі нескінченні, то $x = 2$ – точка розриву другого роду. Аналогічно в точці $x = 4$.

$\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 4+0} f(x) = +\infty$,

отже, точка $x = 4$ є точкою розриву другого роду;

б) функція $y = \dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}$ невизначена в точці $x = 0$, тому ця точка є точкою розриву функції. Односторонні границі функції в точці $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

існують, але вони різні $(0 \neq 1)$. Звідси випливає, що $x = 0$ – точка розриву першого роду.

Стрибок функції в цій точці $\delta = |0 - 1| = 1$;

в) функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ невизначена в точці $x = 0$, але має границю в цій точці $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, звідси $x = 0$ – точка усувного розриву.

Досить покласти $f(0) = 1$, щоб функція стала неперервною. Отже, нова функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 0$.

Тема 7. Диференціальне числення функції однієї змінної

7.1. Похідна функції однієї змінної

Задача про продуктивність праці

Нехай функція $V = V(t)$ виражає кількість випущеної продукції V за час t. Потрібно знайти продуктивність праці у момент часу t_0.

За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість випущеної продукції зміниться від значення $V_0 = V(t_0)$ до значення $V_0 + \Delta V = V(t_0 + \Delta t)$, тоді середня продуктивність праці за цей період часу $V_{ср} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$.

Миттєву продуктивність праці V_M у момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$V_M = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Задача про кутовий коефіцієнт дотичної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ і дві точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M_1(x_1; y_1)$. Тоді $\Delta x = x_1 - x_0$ і $\Delta y = y_1 - y_0$. Проведемо січну M_0M_1 (рис. 40).

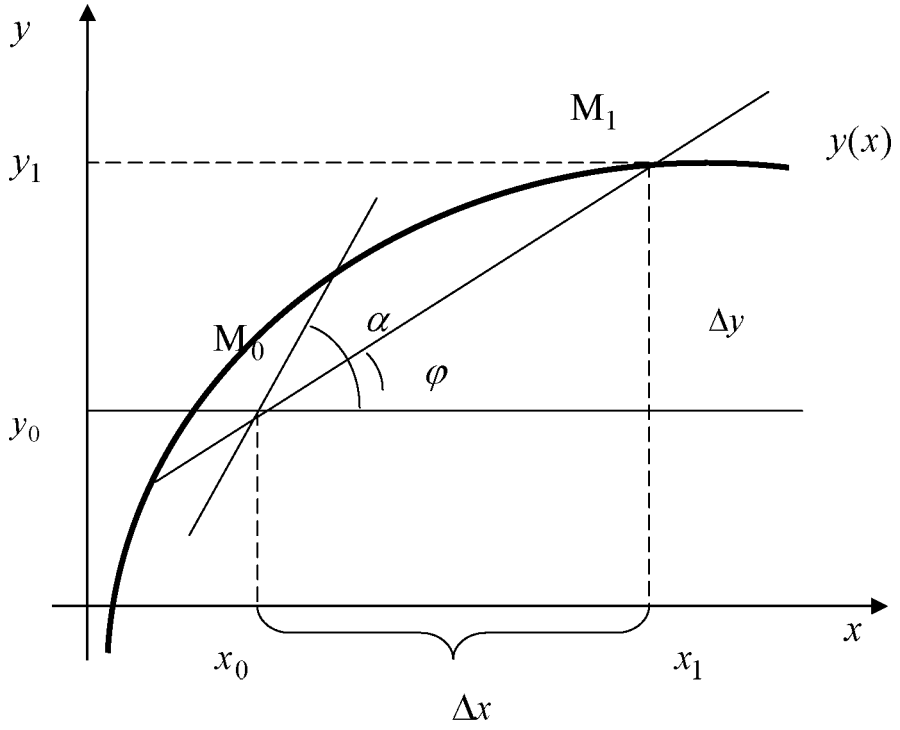


Рис. 40

Означення. ***Дотичною*** *до графіка функції в точці* M_0 *називається граничне положення січної, яка проходить через точку* M_0 *та довільну точку* M_1 *графіка за умови, що* M_1 *прямує вздовж графіка до* M_0.

Кутовий коефіцієнт січної $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, то

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Одержана границя характеризує швидкість зміни функції відносно зміни аргументу.

Розв'язуючи різні задачі, приходимо до границі одного вигляду. Ця границя відіграє важливу роль у математичному аналізі і є основним поняттям диференціального числення.

Нехай задана функція $y = f(x)$, визначена на проміжку X. Розглянемо точку $x \in X$. Надамо аргументу x приросту $\Delta x \neq 0$, тоді функція отримає приріст $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення. ***Похідною*** *функції* $y = f(x)$ *у цій точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля довільним чином, тобто*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Позначають: $y'; f'(x); \frac{dy}{dx}; \frac{d(f(x))}{dx}$.

Зауваження. Довільне прямування Δx до нуля в означенні істотне, бо відповідні границі зліва і справа від x_0 можуть бути різними.

Наприклад, границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функції $y = |x|$ в точці $x = 0$ при $\Delta x \to +0$ рівна 1, а при $\Delta x \to -0$ рівна -1, тобто в точці $x = 0$ функція $y = |x|$ похідної не має.

Означення. *Функцію, яка має скінчену похідну в цій точці, називають* ***диференційованою*** *в цій точці.*

Функцію, диференційовану в кожній точці інтервалу, називають диференційованою на інтервалі.

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *диференційована в точці* $x = x_0$, *то в цій точці вона неперервна.*

Доведення. За умовою функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, тобто існує скінчена границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, де $f'(x_0)$ – стала величина, яка не залежить від Δx. Тоді, враховуючи теореми про зв'язок нескінченно малих з границями функцій,

можна записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$ або $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x$.

При $\Delta x \to 0$ на основі властивостей нескінченно малих можна зробити висновок, що $\Delta y \to 0$. Тому, за означенням функції, неперервної в точці, функція $y = f(x)$ в точці x_0 є неперервною.

Наслідок. *Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то вона неперервна в цьому інтервалі.*

Цю властивість можна використати для наближеного обчислення функції:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Наслідок. *Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної у цій точці.*

Таким чином, необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

7.2. Правила диференціювання функцій. Таблиця похідних

Теорема. *Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = const$, то $y' = 0$.*

Теорема. *Похідна алгебраїчної суми скінченої кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій. Для двох функцій $u(x)$ і $v(x)$ можна записати*

$$\big(u(x)\pm v(x)\big)' = u'(x)\pm v'(x).$$

Теорема. *Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну від другого плюс добуток другого множника на похідну від першого:*

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Теорема. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.*

$\big(c\cdot u(x)\big)' = c\cdot u'(x)$, де $c = const$.

Теорема. *Якщо чисельник і знаменник дробу – диференційовані функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різниця добутків*

знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадрат знаменника початкового дробу:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Зауваження. *Похідну від функції* $y = \frac{u(x)}{c}$, *де* $c = const$, *зручно обчислювати як похідну від добутку величини 1/c на функцію* $u(x)$*:*

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Таблиця похідних

1. $f(x) = c$, $(c)' = 0$, дійсно

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

2. $f(x) = x$, $x' = 1$, оскільки

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

3. $f(x) = x^2$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2 - x_0^{\,2}}{x-x_0} = x_0 + x_0 = 2x_0,\ (x^2)' = 2x.$$

4. $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$.

5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. $(e^x)' = e^x$.

7. $(a^x)' = a^x \ln a$.

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

10. $(\sin x)' = \cos x$.

11. $(\cos x)' = -\sin x$.

12. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

13. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 – це тангенс кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ох, або $f'(x) = k = tg\alpha$, де k – кутовий коефіцієнт дотичної. Розглянемо рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.

Оскільки дотична і нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ у цьому напрямі (рис. 41), де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то отримаємо рівняння дотичної

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ або $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

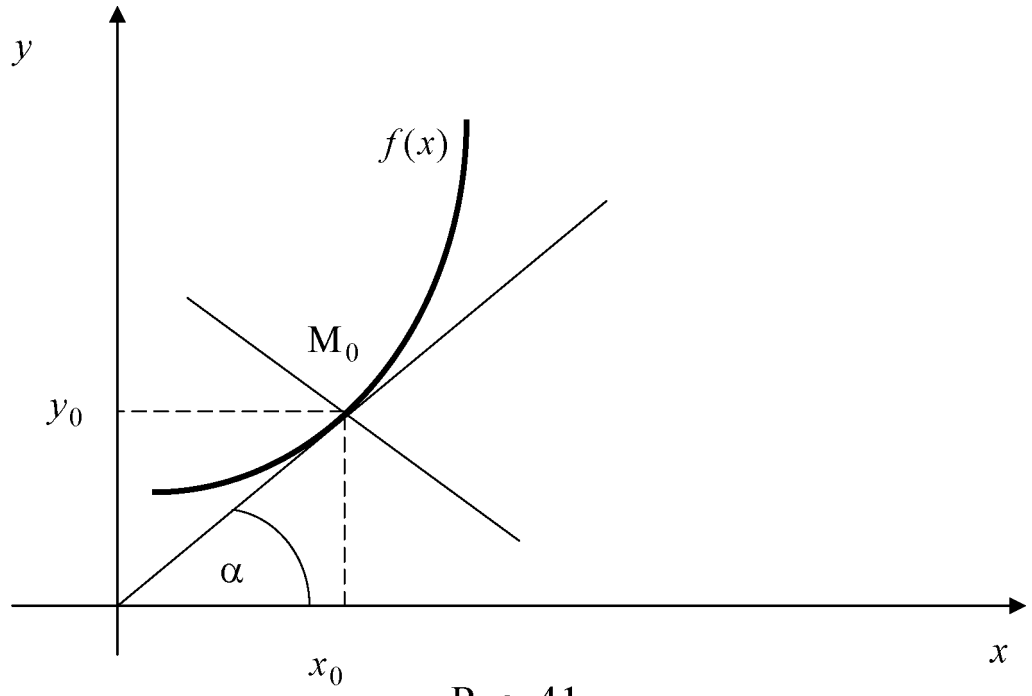


Рис. 41

Означення. ***Нормаллю*** *до графіка функції в точці* M_0 *називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.*

Використовуючи перпендикулярність дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ або } y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Приклад. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2$ в точці $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$ і кут між дотичною в цій точці і віссю Ox.

Розв'язання

$y' = 2x;\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$, тому $k = 1$,

$$tg\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Зауваження. *Якщо в деякій точці похідна дорівнює нулю* $(k = 0)$*, то дотична до графіка функції в цій точці паралельна осі* Ox*, а якщо похідна перетворюється в нескінченність* $(k = \infty)$*, то це означає, що дотична в цій точці паралельна осі* Oy.

7.3. Економічний зміст похідної

Похідна від обсягу випущеної продукції за часом є продуктивність праці в момент t_0.

Приклад. Обсяг продукції V, випущеної бригадою робітників, описано рівнянням $V = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 90t - 40$ (одиниць), $1 \le t \le 7$, де t робочий час у годинах.

Знайти продуктивність праці та швидкість зміни продуктивності праці через 2 години після початку роботи та за 1 годину до її закінчення.

Розв'язання

$V'(t) = -t^2 + 15t + 90$.

Враховуючи, що при вивченні процесів і явищ за допомогою похідної можна оцінити швидкість зміни пов'язаних між собою величин, знайдемо швидкість зміни продуктивності праці як першу похідну від продуктивності праці.

$Z'(t) = (V'(t))' = -2t + 15$

$Z'(2) = -4 + 15 = 11$(од/год)

$Z'(6) = -12 + 15 = 3$(од/год).

Нехай витрати виробництва $k(x)$ є функцією обсягу продукції x.

Границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta x}$ називають *граничними витратами виробництва*.

Для граничних показників вводять позначення $\mathrm{M}k(x)$. З'ясуємо економічний зміст граничних витрат, розглянувши конкретну функцію витрат $k(x) = 100x - 0{,}05x^2$.

Граничні витрати $\mathrm{M}k(x) = 100 - 0{,}1x$ є також функцією x. Оскільки $\frac{\Delta k(x)}{\Delta x} \approx k'(x)$ при малих значеннях Δx, з одного боку, а з іншого – реальний економічний зміст x мають лише цілі x, то можна записати:

$k(x+1) - k(x) \approx k'(x)$, $\Delta x = 1$.

Отже, функція $k'(x)$ показує, наскільки зміняться витрати при збільшенні виробництва на одиницю.

$k(10) = 100 - 0{,}1 \cdot 10 = 99.$

Це означає, що при збільшенні обсягу виробництва з 10 до 11 одиниць витрати виробництва зростуть на 99 одиниць. Така інтерпретація похідної дозволяє проводити ефективний аналіз для визначення оптимальних обсягів випуску продукції.

Приклад. На основі досліджень встановили функцію прибутку від ціни ρ за одиницю продукції $f(\rho) = -50\rho^2 + 500\rho$.

Визначити, яким буде граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $\rho = 2$, $\rho = 5$, $\rho = 10$.

Розв'язання

$f'(\rho) = -100\rho + 500$

$f'(2) = 300,\ f'(5) = 0,\ f'(10) = -500.$

Отже, при збільшенні ціни за одиницю продукції до 5 за одиницю прибуток зростатиме і найбільшим буде при $\rho = 5$, $f(5) = 1250$ тис. грн. При подальшому збільшенні прибуток фірми почне зменшуватися.

7.4. Похідна складної функції і оберненої функції

Означення. *Якщо аргументом функції є функція, тобто* $y = f(z)$, *де* $z = \varphi(x)$, *то функція* $y = f[\varphi(x)]$ *називається складною. Функція* $f(z)$ *називається зовнішньою, а функція* $\varphi(x)$ *внутрішньою, або проміжним аргументом.*

Для знаходження похідної складних функцій необхідно вміти їх подати у вигляді ланцюга елементарних функцій.

Теорема. *Якщо* $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$ *– диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює добутку похідної зовнішньої функції по проміжному аргументу на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.*

$y' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x).$

Похідна оберненої функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$ – диференційовану і строго монотонну на деякому проміжку $(a;b)$. Якщо змінну y розглядати як аргумент, а змінну x як функцію, то нова функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до даної і неперервною на відповідному проміжку $(f(a);f(b))$.

Теорема. *Для диференційованої функції з похідною, що не дорівнює нулю, похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної цієї функції:*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доведення. За умовою функція $y = f(x)$ диференційована і $y'(x) = f'(x) \neq 0$. Нехай $\Delta y \neq 0$ приріст незалежної змінної y, Δx – відповідний приріст оберненої функції $x = \varphi(y)$. Тоді буде справедливою рівність $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$. Перейшовши до границі при $\Delta y \to 0$ і враховуючи, що через неперервність оберненої функції $\Delta x \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta y / \Delta x)}$, тобто $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Приклад. Знайти похідну $y = \arcsin x$.

Область визначення функцій $-1 < x < 1$, тому $\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$. Обернена функція $x = \sin y$, тому $(\sin y)'_y = \cos y$.

За теоремою про похідну оберненої функції маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, тобто $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

7.5. Диференціювання функцій, заданих неявно, параметрично та степенево-показникових

Диференціювання параметрично заданих функцій

Означення. *Функція, задана у вигляді* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, де $t \in (\alpha;\beta)$, *є* ***параметрично*** *заданою.*

Часто при заданні функцій x та y виражаються через деяку третю величину t, що називається *параметром.*

Наприклад, якщо еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}$ – параметричне рівняння еліпса.

Ту саму функцію параметрично можна задати різними способами, але зміст t буде іншим.

Теорема. *Якщо функція y від x задана параметрично* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, *де* $\varphi(t)$ *і* $g(t)$ *– диференційовані функції і* $\varphi'(t)\neq 0$, *то похідна цієї функції* $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Доведення. $x=\varphi(t)$ – розв'яжемо відносно t, $t=k(x)$, k – функція, обернена до $\varphi(t)$. $y=g(t)$ – складна функція від x і маємо $y=g(k(x))$. Знайдемо похідну цієї складної функції: $y'_x = g'_t\cdot t'_x = y'_t\cdot t'_x$.

Тепер використаємо правило диференціювання оберненої функції $t'_x=\frac{1}{x'_t}$. Маємо $y'_x = y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}$, що й потрібно було довести.

Приклад. Знайти похідні функцій а) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 5t^3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язання

а) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 5t^3 \end{cases}$, $\begin{matrix} x'_t = 2t \\ y'_t = 15t^2 \end{matrix}$, $y'_x = \frac{15t^2}{2t}=\frac{15}{2}t$, $t\in(-\infty;\infty)$.

б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $\begin{matrix} x'_t = -a\sin t \\ y'_t = b\cos t \end{matrix}$, $t\in(0;\pi)$, $y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}ctgt$.

Диференціювання неявно заданих функцій

Означення. *Функція y від аргументу x задана неявно, якщо вона записана рівнянням $F(x;y)=0$, нерозв'язаним відносно залежної змінної y.*

Наприклад, $x^2+y^2=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Для обчислення похідної y' неявно заданої функції необхідно знайти похідну лівої і правої частини за відомими правилами і таблицею похідних. При цьому необхідно пам'ятати, що x – незалежна змінна, а y – функція від x, тому $x'=1$, $y'=y'$.

Алгоритм диференціювання неявно заданих функцій

1. Продиференціювати $F(x;y)=0$ по x, розглядаючи ліву частину як складну функцію x.

2. Розв'язати одержане рівняння відносно y'_x.

Приклад. Знайти похідні неявно заданих функцій

а) $x^2+y^2=1$; б) $e^x\sin y-e^y\cdot\cos x=0$; в) $2^x+2^y=2^{x+y}$.

Розв'язання

а) $x^2+y^2=1$ $2x+2y\cdot y'=0$ $y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$.

б) $e^x\sin y-e^y\cdot\cos x=0$,

$e^x\sin y+e^x\cdot\cos y\cdot y'-e^y\cdot y'\cdot\cos x-e^y\sin x=0$ (використали теорему про похідну добутку),

$y'\left(e^x\cos y-e^y\cdot\cos x\right)=-e^x\sin y+e^y\sin x$,

$y'=\frac{-e^x\sin y+e^y\sin x}{e^x\cos y-e^y\cos x}$.

в) $2^x+2^y=2^{x+y}$,

$2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot y'=2^{x+y}\ln 2\cdot(1+y')$,

$2^y\ln 2\cdot y'-2^{x+y}\ln 2\cdot y'=2^{x+y}\ln 2-2^x\ln 2$,

$y'=\frac{2^{x+y}\ln 2-2^x\ln 2}{2^y\ln 2-2^{x+y}\ln 2}=\frac{2^{x+y}-2^x}{2^y-2^{x+y}}$.

Похідна степенево-показникових функцій

Означення. ***Степенево-показниковою*** *функцією називають функцію виду* $y=\left[u(x)\right]^{v(x)}$.

Алгоритм диференціювання степенево-показникової функції

1. Прологарифмувати цю функцію за основою *e:* $\ln y = v(x)\ln u(x)$.

2. Продиференціювати обидві частини рівності, враховуючи, що $\ln y$ і $\ln u$ – складні функції: $\frac{1}{y}y' = v'\ln u + \frac{1}{u}u'v$.

3. З останньої рівності визначити похідну функції y, враховуючи, що $y = [u(x)]^{v(x)}$,

$y' = u^v v'\ln u + u^{v-1}u'v$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^x$.

Розв'язання

$\ln y = x\ln(\sin x)$

$\frac{1}{y}y' = \ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cdot x$

$y' = (\sin x)^x(\ln(\sin x) + xctgx)$.

Похідні вищих порядків

До цього часу розглядали похідну $f'(x)$ від функції $f(x)$, яку називали похідною першого порядку. Але похідна $f'(x)$ сама є функцією, яка теж може мати похідну.

Похідною n-го порядку *називається похідна від похідної* $(n-1)$*-го порядку.*

Позначаються похідні $f''(x)$ – другого порядку (або друга похідна), $f'''(x)$ – третього порядку (або третя похідна).

Для позначення похідних більш високого порядку використовують арабські цифри в дужках, наприклад $f^{(4)}(x)$, $f^{(n)}(x)$

7.6. Диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної і належить до основних понять математичного аналізу. Термін „диференціал" (від латинського „differentia" – різниця) ввів у математику видатний німецький математик Лейбніц (1646–1716 рр.).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a,b]$, тобто в цій точці вона має похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тоді за властивістю границі (якщо функція має границю, її можна подати у вигляді суми цієї границі та нескінченно малої величини) маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \alpha \to 0, \quad \Delta x \to 0,$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Перший доданок лінійний відносно Δx, а другий – нескінченно мала величина. Таким чином, перший доданок – це головна частина приросту функції.

Означення. *Головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції називають* ***диференціалом*** *функції і позначають:*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, $dy = dx = \Delta x$, тобто

$$dy = f'(x)dx.$$

Властивості диференціала

Властивості диференціала пов'язані з властивостями похідної

1. Диференціал сталої величини дорівнює 0:

$$dc = 0$$

2. Сталий множник можна виносити за знак диференціала:

$$d(cu) = cdu.$$

3. Диференціал суми функцій дорівнює сумі диференціалів від функцій доданків:

$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

4. Диференціал добутку дорівнює сумі добутку диференціала першого множника на другий множник та добутку диференціала другого множника на перший $d(uv) = vdu + udv$

5. Диференціал частки знаходиться за формулою:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

6. Диференціал складної функції. Нехай $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$,

$$dy = y'_x x'_t dt = y'_x dx.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \ln(\sin 2x)$ в точці $x = \frac{\pi}{8}$ та при $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання

$$y' = (\ln(\sin 2x))' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2ctg2x,$$

$$dy = 2ctg2x\,dx,$$

при $x = \frac{\pi}{8}$

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = 2ctg2 \cdot \frac{\pi}{8} dx = 2ctg\frac{\pi}{4} dx = 2dx.$$

При $x = \frac{\pi}{8}$, $\Delta x = 0{,}1$

$$dy\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{8} \\ \Delta x=0{,}1}} = 2ctg2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 0{,}1 = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Оскільки диференціал – це головна частина приросту функції, то справедлива рівність:

$$\Delta y \approx dy,$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Диференціал використовують для наближених обчислень значень функції за допомогою формули

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад. Наближено обчислити *arctg* 1,05.

Розв'язання

Маємо функцію $f(x) = arctg\,x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, тоді формула має вигляд:

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctg\,x + (arctg\,x)' \cdot \Delta x$$

або

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Підставимо у формулу конкретні значення $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}05$ і одержимо $arctg1{,}05 \approx arctg1 + \dfrac{0{,}05}{1+1} = \dfrac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810.$

7.7. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на інтервалі* (a,b) *і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці* c *цього інтервалу. Тоді якщо в точці* c *існує похідна* $f'(c)$, *то* $f'(c)=0$.

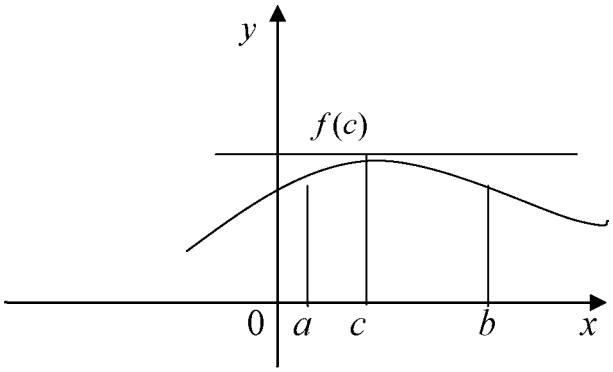


Рис. 42

Доведення. Нехай у точці c функція має $\max$, тоді для довільних точок x, $x \in (a,b)$

$$f(x) \le f(c),,$$

а отже, і для $x = c + \Delta x$ виконується нерівність

$$f(c+\Delta x) \le f(c),$$

$$f(c+\Delta x) - f(c) \le 0,$$

при $\Delta x > 0,$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0,$$

$$f'(c) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0,$$

при $\Delta x < 0,$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0,$$

$$f'(c) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0,$$

тобто $f'(c) = 0$, що й треба було довести.

Якщо в точці c функція має $\min$, то проводять аналогічні міркування.

Геометричний зміст теореми

Якщо в точці $x = c$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c,\ f(c))$ паралельна осі Ox (рис. 43).

Теорема Ролля. *Якщо функція неперервна на відрізку* $[a,b]$, *диференційовна в інтервалі* (a,b) *і на кінцях відрізку набуває рівних значень* $f(a) = f(b)$, *то знайдеться хоча б одна точка* $c \in (a,b)$, *в якій* $f'(c) = 0$.

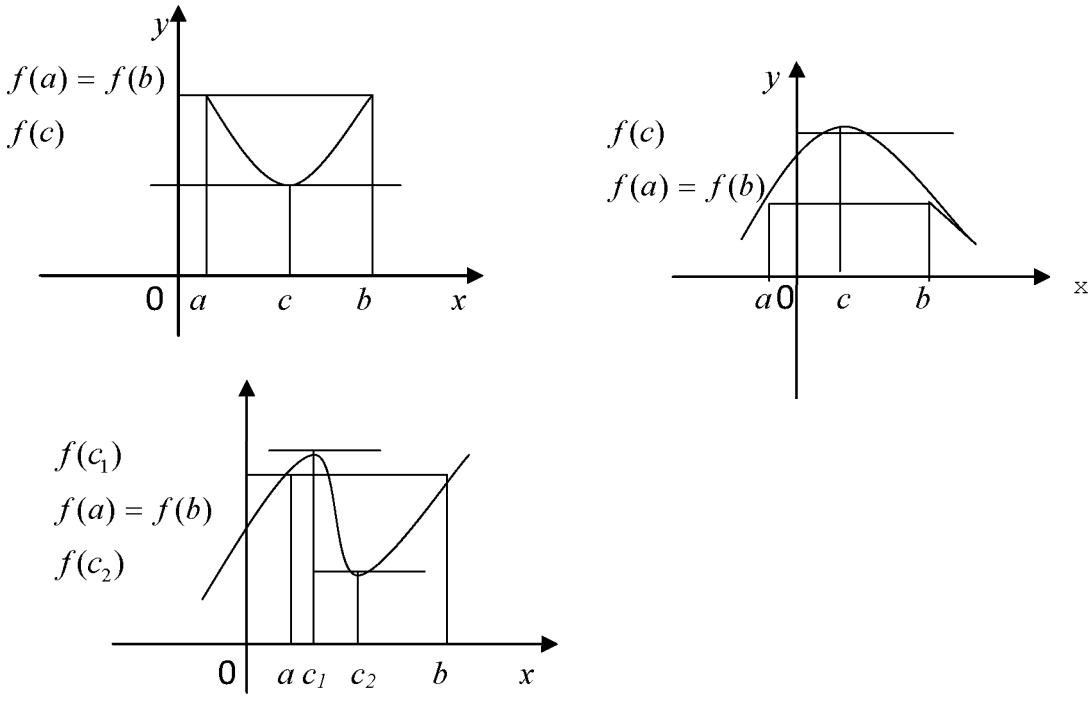


Рис. 43

Геометричний зміст теореми

Якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку функції існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна до осі Ox (рис. 43).

Зауваження. *Усі три умови теореми Ролля суттєві; якщо хоча б одна з них не виконується, то теорема Ролля не справджується.*

Теорема Коші. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні на відрізку* $[a,b]$, *диференційовні в інтервалі* (a,b), *причому* $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, *то існує точка* $c \in (a,b)$, *що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Лагранжа *(про скінчений приріст функції). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$, *диференційована в інтервалі* (a,b), *то в середині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка* $c \in (a,b)$, *в якій*

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

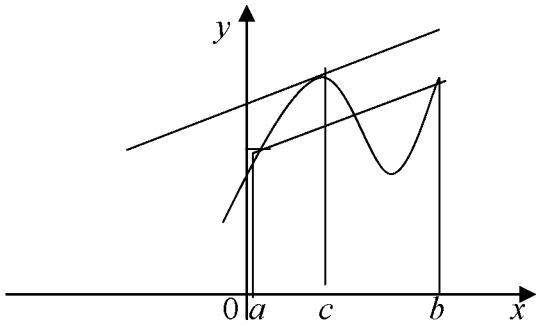


Рис. 44

Геометричний зміст

Якщо функція задовольняє умовам теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої (рис. 44).

Розглянуті теореми застосовуються для дослідження функцій і побудови графіків.

Правило Лопіталя

Нехай функції $f(x)$ *та* $g(x)$ *визначені і диференційовані в околі точки* x_0, *частка* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *в точці* x_0 *має невизначеність* $\left[\frac{0}{0}\right]$

або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, тоді існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ і виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно.

Приклад. Знайти границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$

У невизначеностях виду $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$ спочатку потрібно за допомогою алгебраїчних перетворень звести до невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а потім застосовувати правило Лопіталя.

в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$

Невизначеності виду $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ зводять до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом логарифмування.

д) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = [0^0]$.

Позначимо $y = x^x$, тоді $\ln y = \ln x^x = x\ln x$,

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

$\ln(\lim\limits_{x\to 0} y) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$, отже, $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

7.8. Еластичність функції. Задача про податок

Нехай задана функція $y = f(x)$, Δx – приріст аргументу, Δy – приріст функції, $\frac{\Delta y}{y}$ – відносний приріст функції, $\frac{\Delta x}{x}$ – відносний приріст аргументу.

Означення. ***Еластичністю*** *функції* $y = f(x)$ *називають границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x}{y}y'.$$

Еластичність функції показує наближено, на скільки відсотків зміниться функція при зміні аргументу на 1 %.

Якщо $|E_x(y)| < 1$, то функція називається нееластичною (її відносний приріст спадає).

Якщо $|E_x(y)| > 1$, то функція називається еластичною (її відносний приріст зростає).

Якщо $|E_x(y)| = 1$, то функція нейтральна (зміна x на 1 % відповідає зміні y на 1 %).

Якщо $|E_x(y)| = \infty$, функція абсолютно еластична.

Якщо $E_x(y) = 0$, функція абсолютно нееластична.

Еластичність попиту

Нехай $D = D(p)$ функція попиту від ціни товару, тоді еластичність попиту $E_p(D) = \dfrac{p}{D(p)} \cdot D'(p)$.

Приклад

Якщо функція попиту має вигляд $D = 10 - p$, то еластичність $E_p(D) = \dfrac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \dfrac{p}{10-p} \cdot (-1) = \dfrac{p}{p-10}$.

Для еластичності попиту необхідно, щоб $\left|E_p(D)\right| > 1$, тобто

$$\left|\frac{p}{10-p}\right| > 1$$

$$|p| > |10-p|$$

$$10 - p > 0, \quad p < 10$$

$$2p > 10, \quad p > 5$$

отже, при $5 < p < 10$ попит еластичний.

Задача про податок

У випадку монопольного ринку попит на продукцію визначається формулою:

$$D = \frac{A}{p^{\alpha}},$$

де A – коефіцієнт, який залежить від масштабу виробництва,

p – ціна з ПДВ, $p = p_0(1+\tau)$

τ – ставка з ПДВ,

p_0 – ціна виробника,

α – еластичність попиту за ціною.

При яких значеннях α збільшення ставки ПДВ не приведе до збільшення надходжень до бюджету, якщо надходження до бюджету від ПДВ становлять

$$T = \frac{\tau}{1+\tau} DP.$$

Розв'язання

$$T = \frac{A \cdot p \cdot \tau}{(1+\tau) \cdot p^{\alpha}} = \frac{A}{p^{\alpha-1}} \cdot \frac{\tau}{1+\tau} = \frac{A}{p_0^{\alpha-1}(1+\tau)^{\alpha-1}} \cdot \frac{\tau}{1+\tau} =$$

$$= \frac{A}{p_0^{\alpha-1}} \cdot \frac{\tau}{(1+\tau)^{\alpha}} = C \cdot \frac{\tau}{(1+\tau)^{\alpha}},$$

$$\frac{dT}{d\tau} = C \cdot \frac{(1+\tau)^{\alpha} - \alpha(1+\tau)^{\alpha-1} \cdot \tau}{(1+\tau)^{2\alpha}} = C \cdot \frac{(1+\tau)^{\alpha-1}(1+\tau-\alpha\tau)}{(1+\tau)^{2\alpha}},$$

$\frac{dT}{d\tau} < 0$, при $1+\tau-\alpha\tau < 0$ функція не зростає.

Тобто $1+\tau(1-\alpha) < 0$,

$\tau(\alpha-1) > 1$,

$\alpha - 1 > \frac{1}{\tau}$.

Отже, при $\alpha > \frac{1}{\tau} + 1$ збільшення ставки ПДВ не приведе до збільшення надходжень до бюджету.

Якщо $\tau = 0{,}2$, то $\alpha > 1$.

Це товари високоеластичні, тобто товари не першого вжитку. Для всіх інших товарів зменшення ставки ПДВ приведе до зменшення надходжень і це повинно бути враховано при плануванні бюджету, оскільки зменшення ставки до 19 %, що неодноразово пропонувалось при плануванні бюджету на наступний рік, приведе до зменшення надходжень.

7.9. Зростання і спадання функції

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***зростаючою****, (спадною) в точці* x_0*, якщо існує окіл точки* $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ *такий, що для всіх* $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ *виконується нерівність* $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ *і для всіх* $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Якщо функція є зростаючою (спадною) в кожній внутрішній точці проміжку $(a;b)$, то її називають зростаючою (спадною) на цьому проміжку.

Необхідна ознака зростання (спадання) функції

Якщо диференційовна на деякому проміжку функція зростає (спадає) на цьому проміжку, то $f'(x) \geq 0$ *(*$f'(x) \leq 0$*).*

Доведення. Нехай $f(x)$ зростає на $(a;b)$. Надамо аргументу x приріст Δx так, що $x + \Delta x \in (a;b)$, і розглянемо частку $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Оскільки $f(x)$ – зростаюча, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ і $f(x+\Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, тобто $f'(x) \geq 0$, що й треба було довести.

Аналогічне доведення для спадної функції.

Достатня ознака зростання (спадання) функції

Якщо $f'(x) > 0$ *(*$f'(x) < 0$*) для всіх* $x \in (a;b)$*, то функція зростає (спадає) на проміжку* $(a;b)$.

Доведення. Згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости функції $f(x)$ для довільних $x_1, x_2 \in (a;b)$ і таких, що $x_1 < x_2$, маємо $f(x_2) - f(x_1) = f(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, де $\xi \in (x_1; x_2)$.

Оскільки $f'(\xi) > 0$ за умовою і $x_2 - x_1 > 0$ за припущенням, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ як добуток двох додатних множників, звідки $f(x_2) > f(x_1)$, тобто $f(x)$ – зростаюча функція на $(a;b)$.

Аналогічно доводиться достатня ознака спадання функції на проміжку.

Означення. *Проміжки, в яких функція зростає або спадає, називаються* ***проміжками монотонності*** *функції.*

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Розв'язання

Функція $f(x)$ визначена для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6$.

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $6x^2 - 6 = 0$, звідки $x_1 = -1, \quad x_2 = 1$ – корені рівняння $f'(x) = 0$.

Числа $x_1 = -1$ *і* $x_2 = 1$ розбивають інтервал $(-\infty; +\infty)$ на три інтервали. Визначимо знаки $f'(x)$ на цих інтервалах. Для цього розв'яжемо нерівність $6x^2 - 6 > 0$ методом інтервалів. Одержимо такий розподіл знаків $f'(x)$ (рис. 45):

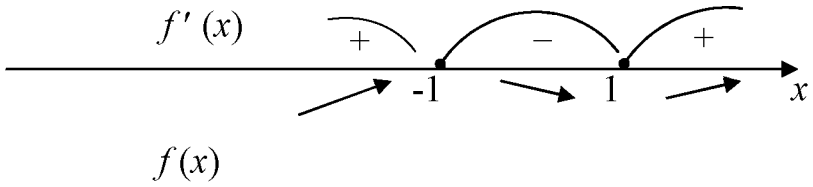


Рис. 45

$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – інтервали зростання функції.

$f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$ – інтервал спадання функції.

7.10. Екстремуми функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$ і $x_0 \in (a; b)$.

Означення. *Функція $f(x)$ має в точці x_0* ***максимум (мінімум)****, якщо існує окіл цієї точки, в якому для всіх $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

Означення. *Значення $f(x_0)$ називається максимумом (мінімумом) або локальним максимумом (локальним мінімумом) функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається так:* $\max f(x) = f(x_0)$ $(\min f(x) = f(x_0))$.

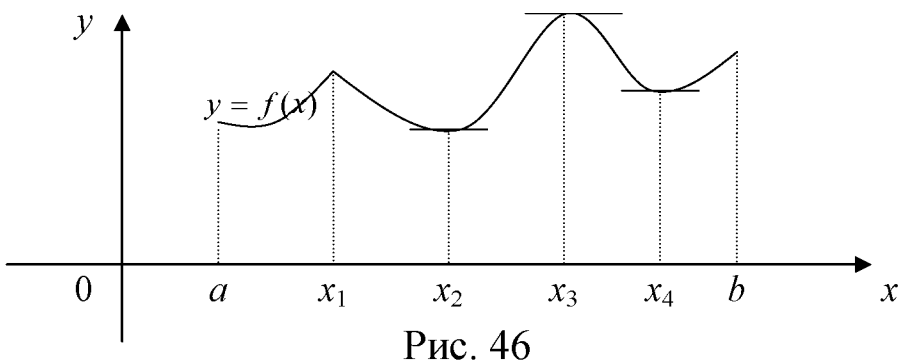


Рис. 46

На рис. 46 точки x_1 і x_3 – точки локального максимуму, а точки x_2 і x_4 – точки локального мінімуму функції $y = f(x)$.

Означення. *Точки максимуму і мінімуму функції називаються* ***точками екстремуму*** *(локального екстремуму) функції на проміжку* $(a;b)$, *а максимум і мінімум функції називаються екстремумами функції.*

Означення. *Точки, в яких* $f'(x) = 0$, *називаються* ***стаціонарними***, *а точки, в яких* $f'(x) = 0$ *або не існує, називаються* ***критичними*** *або* ***"підозрілими"*** *на екстремум.*

Кожна стаціонарна точка $x_0 \in (a;b)$ характеризується тим, що дотична до кривої $y = f(x)$, проведена в точці $(x_0; f(x_0))$, паралельна осі Ox, оскільки кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0) = 0$.

На рис. 46 стаціонарними точками є точки x_2, x_3 і x_4. Точка x_1, в якій похідна $f'(x)$ не існує, є критичною точкою функції.

Наведемо без доведення такі твердження.

Необхідна умова існування екстремуму

Для того щоб точка x_0 *була точкою екстремуму функції, визначеної в околі цієї точки, необхідно, щоб похідна функції в цій точці була рівна нулю* $(f'(x_0) = 0)$ *або не існувала в точці* x_0.

Достатня умова існування екстремуму

Нехай $f(x)$ *диференційовна в околі критичної точки* x_0, *за винятком, можливо, самої точки* x_0, *в якій функція* $f(x)$ *є неперервною. Тоді:*

1) якщо при переході через точку x_0 *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то в точці* x_0 *функція має максимум;*

2) якщо при переході через точку x_0 *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то в точці* x_0 *функція має мінімум;*

3) якщо при переході через точку x_0 *похідна* $f'(x)$ *не змінює знак, то точка* x_0 *не є точкою екстремуму функції.*

Алгоритм дослідження функції на екстремум за першою похідною

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти критичні точки функції, тобто точки, в яких $f'(x)=0$ або не існує.
3. Визначити знак $f'(x)$ в околі кожної критичної точки.
4. Зробити висновок про характер критичної точки.
5. Обчислити екстремум функції в точці x_0.

Приклад. Дослідити на екстремум функції:

а) $y=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$; б) $y=(x-4)^5(x+2)^4$.

Розв'язання

а) Область визначення функції $x\in R$.

Знайдемо похідну $y'=\left(\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7\right)'=3x^3-3x^2-18x$.

Знайдемо критичні точки функції:

$y'=0$, коли $3x^3-3x^2-18x=0$,

$$3x(x^2-x-6)=0.$$

Отже, $x=0$, $x=3$, $x=-2$ – стаціонарні точки функції.

Ці точки ділять область визначення функції $D(y)=(-\infty;+\infty)$ на чотири інтервали (рис. 47).

Визначимо знак $f'(x)$ на кожному з цих інтервалів. Розв'яжемо нерівність $3x(x^2-x-6)>0$, $3x(x-3)(x+2)>0$.

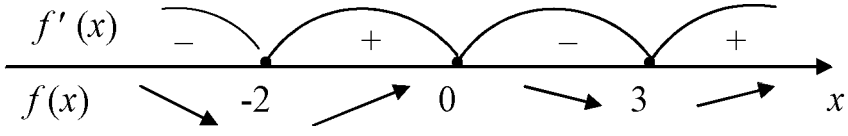


Рис. 47

Точки $x=-2$ і $x=3$ – точки $\min f(x)$.

Точка $x=0$ – точки $\max f(x)$.

Обчислимо екстремуми функції:

$\min f(x)=f(-2)=-9$,

$$\min f(x) = f(3) = -40\frac{1}{4},$$

$$\max f(x) = f(0) = 7.$$

б) Область визначення функції $x \in R$.

Знайдемо похідну

$$y' = \left((x-4)^5(x+2)^4\right)' = 5(x-4)^4(x+2)^4 + 4(x+2)^3(x-4)^5 =$$

$$= (x+2)^3(x-4)^4(9x-6 =)9(x-4)^4(x+2)^3\left(x-\frac{2}{3}\right),$$

$y' = 0$, коли $x = 4$, $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$ – стаціонарні точки функції.

Визначимо знак $f'(x)$ на інтервалах між стаціонарними точками. Для цього розв'яжемо методом інтервалів нерівність $9(x-4)^4(x+2)^3\left(x-\frac{2}{3}\right) > 0$ і знайдемо знаки похідної в цих інтервалах (рис. 48).

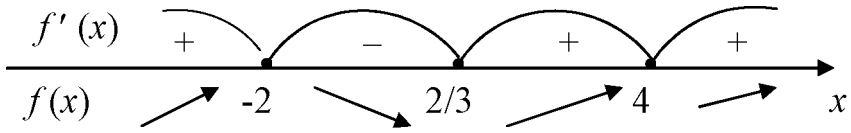


Рис. 48

Точка $x = -2$ – точка $\max f(x)$, $\max f(x) = f(-2) = 0$, точка $x = \frac{2}{3}$ – точка $\min f(x)$, $\min f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{10}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^4$, а точка $x = 4$ не є точкою екстремуму, бо похідна не змінила знак при переході через цю точку.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ диференційована в околі стаціонарної точки x_0, а в самій стаціонарній точці має похідну другого порядку, то:*

1) якщо $f''(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 мінімум;

2) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$, то в точці x_0 може бути екстремум, а може і не бути. Для розв'язання цього питання потрібно застосувати апарат дослідження на екстремум за першою похідною.

Алгоритм дослідження на екстремум за другою похідною

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти стаціонарні точки функції, тобто корені рівняння $f'(x)=0$.

3. Знайти $f''(x)$.

4. Перевірити знак $f''(x)$ у стаціонарних точках:

а) якщо $f''(x_0)>0$, то стаціонарна точка x_0 є точкою мінімуму функції;

б) якщо $f''(x_0)<0$, то стаціонарна точка x_0 є точкою максимуму функції;

в) якщо $f''(x_0)=0$, то користуємося алгоритмом дослідження на екстремум за першою похідною.

5. Обчислити $f(x)$ в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$ за другою похідною.

Розв'язання

Знайдемо похідну

$y'=3x^3-3x^2-18x$; $y'=0$, коли $3x^3-3x^2-18x=0$, $3x(x^2-x-6)=0$, звідки $x=0$, $x=3$, $x=-2$ – стаціонарні точки.

Знайдемо другу похідну $f''=9x^2-6x-18$.

Обчислимо $y''(x)$ в стаціонарних точках.

Оскільки $y''(0)=-18<0$, то $x=0$ – точка $\max f(x)$.

Оскільки $y''(3)=45>0$, то $x=3$ – точка $\min f(x)$.

Оскільки $y''(-2)=30>0$, то $x=-2$ – точка $\min f(x)$.

Обчислимо значення функції в точках $x=0$, $x=3$, $x=-2$:

$f(0)=7-\max f(x)$,

$f(3)=-40\frac{1}{4}-\min f(x)$,

$f(-2)=-9-\min f(x)$.

7.11. Опуклість, вгнутість, точки перегину

Означення. *Крива* $y = f(x)$ *називається* ***опуклою (вгнутою)*** *на проміжку, якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.*

З графіка функції (рис. 49) бачимо, що крива $y = f(x)$ на проміжку $(a; c)$ є опуклою, а на проміжку $(c; b)$ є вгнутою.

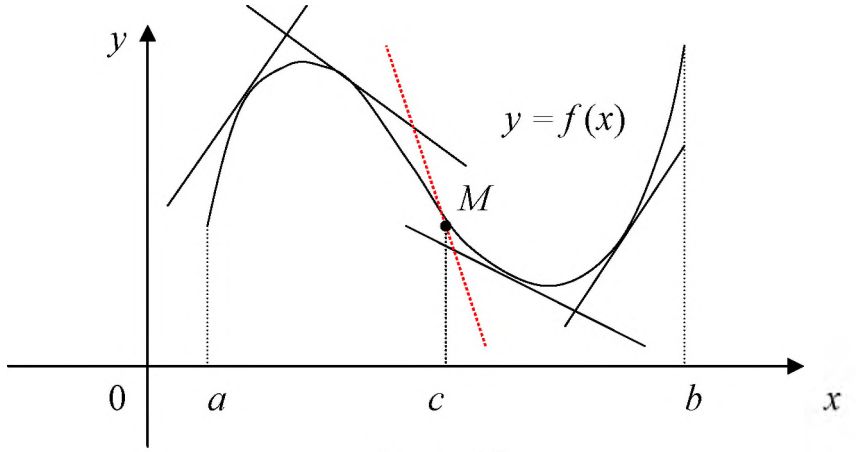


Рис. 49

Означення. *Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається* ***точкою перегину.***

На рис. 49 точка М – точка перегину.

Якщо провести дотичну до кривої в точці перегину M, то одна частина кривої лежить нижче, а друга частина – вище цієї дотичної.

Наведемо без доведення необхідні й достатні умови опуклості, вгнутості та існування точок перегину кривої $y = f(x)$.

Необхідні умови опуклості (вгнутості) кривої $y = f(x)$

Якщо на відрізку $[a;b]$ *крива* $y = f(x)$ *є опуклою (вгнутою), то* $f''(x) \le 0 \left(f''(x) \ge 0\right)$ *для всіх точок* $x \in [a; b]$.

Достатні умови опуклості (вгнутості) кривої $y = f(x)$

Якщо $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ *на відрізку* $[a;b]$, *то крива* $y = f(x)$ *є опуклою (вгнутою) на цьому відрізку.*

Необхідні умови існування точки перегину кривої $y = f(x)$

Якщо x_0 *– точка перегину кривої* $y = f(x)$, *то* $f''(x_0) = 0$ *або* $f''(x_0)$ *– не існує.*

Достатні умови існування точки перегину кривої $y = f(x)$

Нехай точка x_0 *– критична точка другого роду, тобто* $f''(x_0) = 0$ *або* $f''(x_0)$ *не існує, і* $x_0 \in D(y)$.

Якщо при переході через точку x_0 $f''(x)$ *змінила знак, то точка* x_0 *– точка перегину кривої* $y = f(x)$.

Алгоритм дослідження функції на опуклість (вгнутість) і точки перегину

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти другу похідну $f''(x)$.
3. Знайти критичні точки другої похідної, тобто точки, в яких $f''(x) = 0$ або не існує.
4. Дослідити знак $f''(x)$ на інтервалах, на які розбивають область визначення функції її критичні точки.
5. Зробити висновок про характер інтервалів опуклості (вгнутості) та існування точок перегину.
6. Знайти точки перегину $(x_0; f(x_0))$.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ на опуклість (вгнутість) і точки перегину.

Розв'язання

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Знайдемо y' та y''.

$$y' = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)' = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2},\ y'' = \left(\frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

Знайдемо критичні точки другої похідної:

$$\left.\begin{array}{l} y'' = 0, \quad \text{коли} \quad x = 0 \\ y'' \text{ – не існує при} \quad x = \pm 1 \end{array}\right\}.$$

Точка $x = 0 \in D(y)$, а точки $x = \pm 1 \notin D(y)$, отже, точки $x = \pm 1$ не можуть бути точками перегину графіка функції.

Дослідимо знак $f''(x)$ на інтервалах $(-\infty;\ -1)$,$(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$. Для цього треба розв'язати методом інтервалів нерівність $y'' < 0$, звідки

$$2x(x^2+3)(x-1)^3(x+1)^3 < 0 \quad \textit{або}\ x(x-1)^3(x+1)^3 < 0.$$

Маємо такі знаки $f''(x)$ в області визначення функції (рис. 50).

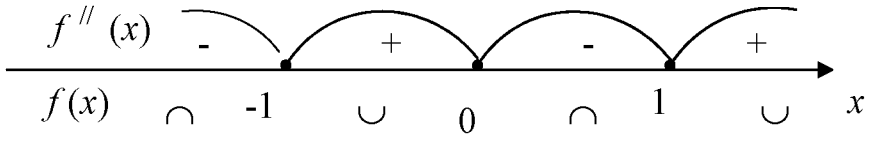


Рис. 50

Отже, інтервали опуклості функції: $(-\infty;\ -1)$.

Інтервали вгнутості функції: $(-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

7.12. Асимптоти графіка функції

Означення. *Пряма, до якої нескінченно близько наближаються точки графіка функції* $y = f(x)$ *при необмеженому віддаленні їх від початку координат, називається* ***асимптотою кривої*** $y = f(x)$ (рис. 51).

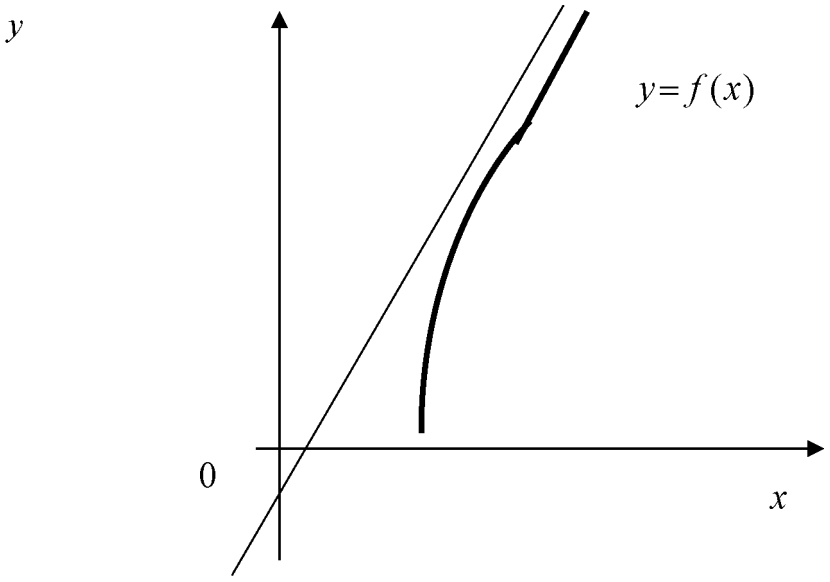


Рис. 51

Асимптоти бувають: вертикальні, горизонтальні, похилі.

Означення. *Пряма* $x = a$ *називається* ***вертикальною асимптотою*** *кривої* $y = f(x)$, *якщо хоча б одна з односторонніх границь функції* $f(a-0)$ *або* $f(a+0)$ *дорівнює нескінченності.*

Вертикальні асимптоти шукають на кінцях області визначення функції або в точках, які перетворюють знаменник функції $f(x)$ в нуль.

Пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$.

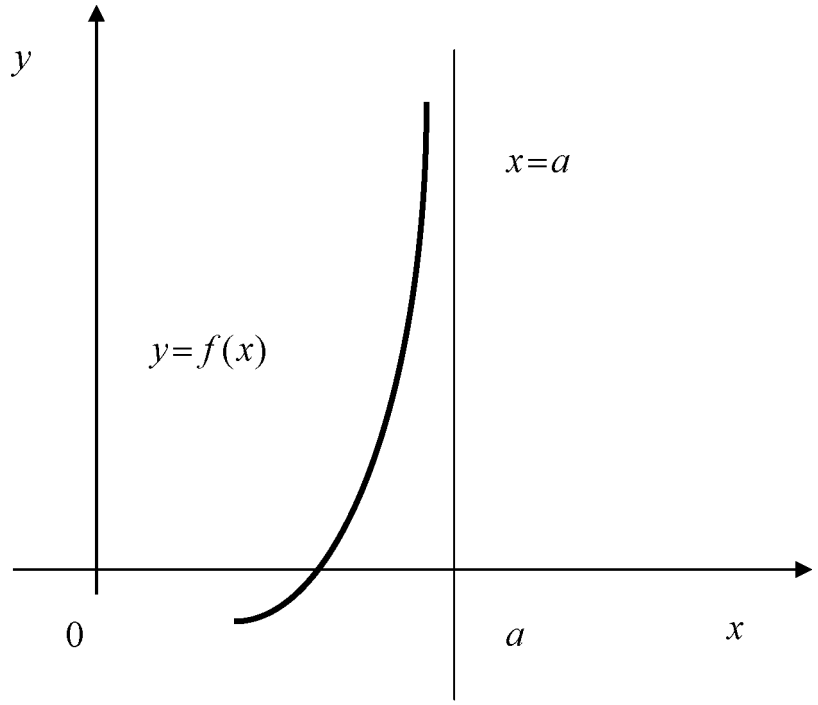


Рис. 52

Означення. *Пряма* $y = b$, *де* $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) < \infty$ ***називається горизонтальною асимптотою*** *кривої* $y = f(x)$.

На рис. 53 пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою для функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$:

1) двосторонньою асимптотою для $y = f_1(x)$, бо $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = b$;

2) правосторонньою (односторонньою) асимптотою для $y = f_2(x)$, бо існує лише $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = b < \infty$.

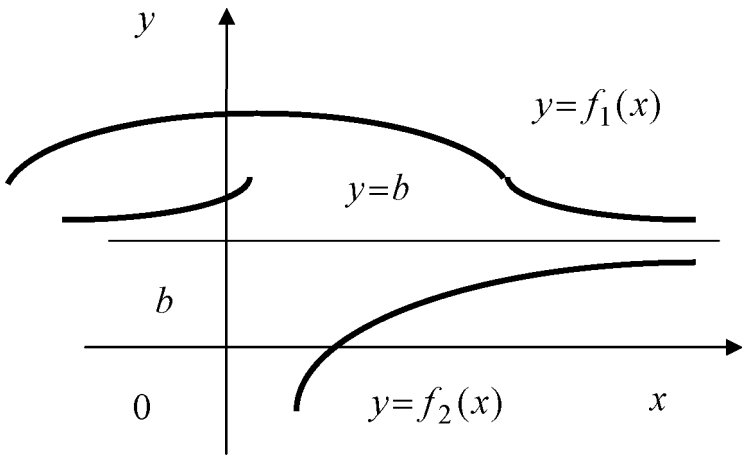


Рис. 53

Означення. *Пряма* $y = kx + b$, *де* $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right)$, $k < \infty, b < \infty$ *називається* ***похилою асимптотою*** *кривої* $y = f(x)$.

На рис. 54 пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою для кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$:

– двосторонньою для $y = f_1(x)$, бо $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} < \infty$ і $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f_1(x) - kx\right) < \infty$;

– лівосторонньою (односторонньою) для кривої $y = f_2(x)$, оскільки скінченими є границі для k і b лише при $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x} < \infty \text{ і } b = \lim_{x\to-\infty}\left(f_2(x) - kx\right) \le \infty,$$

а при $x \to +\infty$ ці границі є нескінченними або не існують.

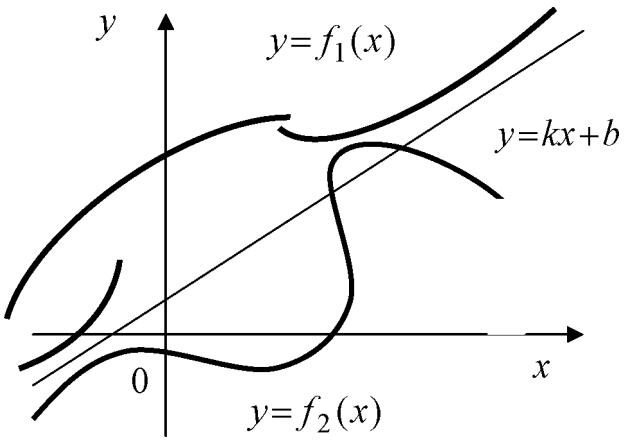


Рис. 54

Приклад. Знайти асимптоти кривих:

а) $y = \dfrac{-8x^3}{4-x^2}$; б) $y = 1 + 5^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання

а) Знайдемо точки, в яких знаменник функції $y = \dfrac{-8x^3}{4-x^2}$ дорівнює нулю. $4 - x^2 = 0$, $x = \pm 2$ – вертикальні асимптоти кривої.

Для горизонтальної асимптоти $y = b$ шукаємо $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-8x^3}{4-x^2} = \infty$, отже, горизонтальної асимптоти крива не має.

Для похилої асимптоти $y = kx + b$ шукаємо

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-8x^3}{x\left(4 - x^2\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-8x^3}{4x - x^3} = 8,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-8x^3}{4-x^2} - 8x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-32x}{4-x^2} = 0.$$

Отже, похила асимптота існує і має рівняння $y = 8x$. Це двостороння асимптота, оскільки значення k і b є обмеженими при $x \to \pm\infty$.

б) Функція $y = 1 + 5^{\frac{1}{x}}$ не визначена в точці $x = 0$. Знайдемо односторонні асимптоти в точці: $\lim\limits_{x \to 0-0} \left(1 + 5^{\frac{1}{x}}\right) = [1 + 5^{-\infty}] = 1 + 0 = 1,$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(1 + 5^{\frac{1}{x}}\right) = [1 + 5^{\infty}] = 1 + \infty = \infty.$$

Правостороння границя в точці $x = 0$ є нескінченною, отже, пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота кривої.

Знайдемо горизонтальні асимптоти кривої:

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + 5^{\frac{1}{x}}\right) = 1 + 5^{\circ} = 1 + 1 = 2,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + 5^{\frac{1}{x}}\right) = 1 + 5^{\circ} = 1 + 1 = 2.$$

Отже, пряма $y = 2$ є двосторонньою горизонтальною асимптотою кривої.

Для відшукання похилої асимптоти знайдемо $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5^{\frac{1}{x}}}{x} = \dfrac{2}{\infty} = 0$. Отже, похилої асимптоти не існує.

Загальна схема дослідження і побудови графіка функції

Алгоритм дослідження функції та побудови графіка

1. Область визначення функції, точки перетину з осями координат.
2. Дослідження функції на парність (непарність), періодичність.
3. Знаходження асимптот графіка функції.
4. Дослідження функції на монотонність, екстремум.
5. Дослідження на опуклість (вгнутість) та точки перегину графіка функції.
6. Побудова графіка функції.

Приклад. Дослідити та побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання

Дослідимо функцію за схемою.

1. Область визначення функції: $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$. Отже, $D(y) = (-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Перетин з осями координат:

1) з віссю Ox: $y = 0$, $\dfrac{x^3}{x^2-1} = 0$, звідки $x = 0$;

2) з віссю Oy: $x = 0$, звідки $y = 0$.

Отже, крива перетинає координатні осі лише в одній точці $O(0;\ 0)$.

2. Дослідимо функцію на парність:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$, отже, функція непарна, що свідчить про симетрію кривої відносно початку координат.

Функція не є періодичною, оскільки вона не містить тригонометричних функцій.

3. Асимптоти кривої.

Вертикальні асимптоти: $x = \pm 1$. Дослідимо поведінку кривої в околі асимптот (рис. 55).

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1} = -\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty.$$

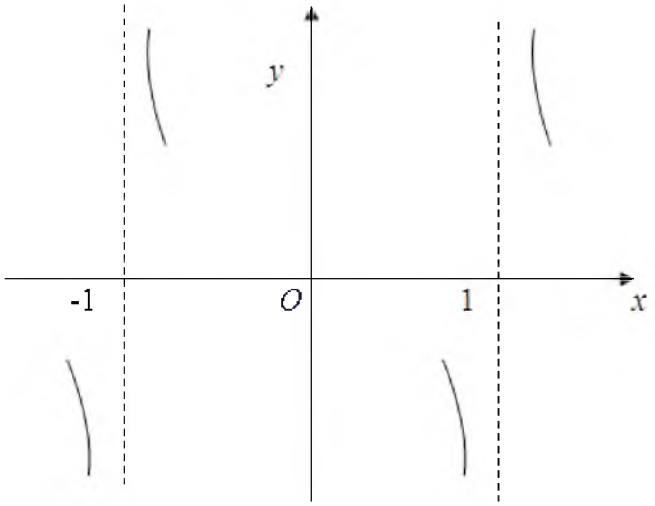


Рис. 55

Горизонтальні асимптоти не існують, оскільки $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$.

Похилу асимптоту $y = kx + b$ знайдемо, обчисливши спочатку $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1 < \infty$, а потім

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0 < \infty.$$

Отже, існує похила двостороння асимптота $y = x$.

4. Дослідимо функцію на монотонність за похідною:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-16)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Критичні точки першого роду

$y' = 0$, коли $x = 0$ або $x = \pm\sqrt{3}$

y' – не існує, коли $x = \pm 1$.

Критичні точки розбивають вісь Ox на шість інтервалів монотонності.

Знайдемо знак похідної на кожному з цих інтервалів, розв'язавши нерівність $\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} > 0$ методом інтервалів.

Одержимо такі знаки $f'(x)$ на цих інтервалах (рис. 56).

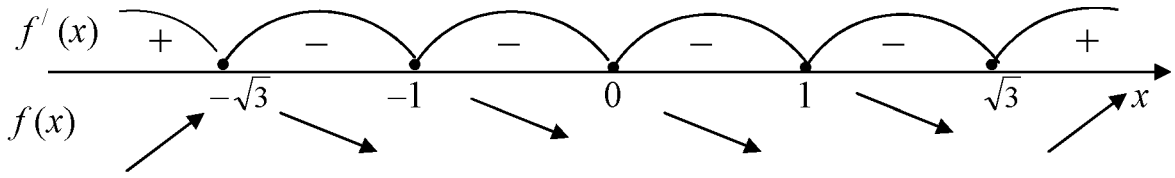


Рис. 56

Маємо $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$ – інтервали зростання функції;

$f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\sqrt{3};\ -1\right) \cup \left(-1;\ 0\right) \cup \left(0;\ 1\right) \cup \left(1;\ \sqrt{3}\right)$ – інтервали спадання функції.

Отже, $x = -\sqrt{3}$ – точка $\max f(x)$, $\max f(x) = f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$;

$x = \sqrt{3}$ – точка $\min f(x)$, $\min f(x) = f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо точки $A\left(-\sqrt{3}; \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ та $B\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ на графіку функції.

5. Дослідимо функцію на опуклість за другою похідною.

$$y'' = \left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = \frac{x\left(2x^2+6\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Критичні точки другого роду

$y'' = 0$, коли $x = 0$

y'' – не існує, коли $x = \pm 1$,

Визначимо знак $f''(x)$ на інтервалах, на які розбивають вісь Ox ці критичні точки:

$y''>0$, тобто $\dfrac{x\left(2x^2+6\right)}{\left(x^2-1\right)^3}>0$.

Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів і одержимо такий розподіл знаків $f''(x)$ (рис. 57).

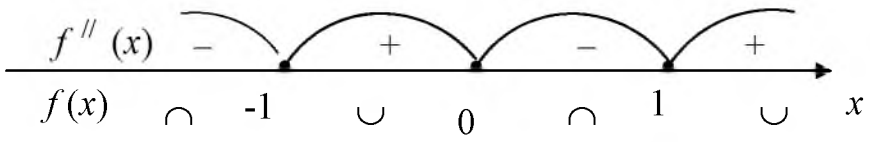


Рис. 57

Інтервали $(-\infty;\ -1),(0;\ 1)$ – інтервали опуклості, а інтервали $(-1;\ 0),(1;\ +\infty)$ – інтервали вгнутості кривої.

Точка $x = 0$ – точка перегину кривої, $f(0)=0$. Отже, маємо на графіку точку $O(0;\ 0)$ – точку перегину кривої. Точки $x=\pm1$ не є точками перегину кривої, бо не належать області визначення цієї кривої.

6. Побудова графіка функції.

Використавши всі дослідження, будуємо графік (рис. 58).

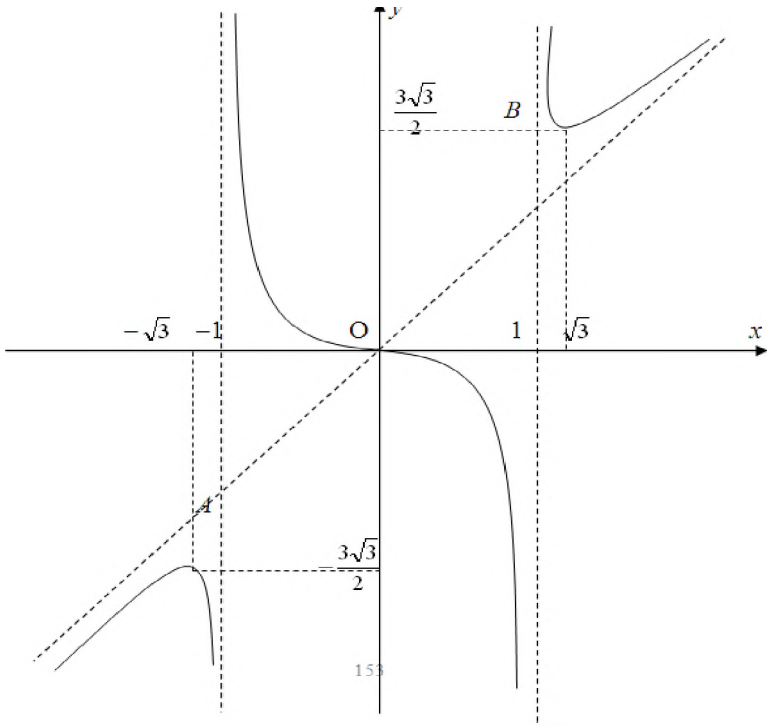


Рис. 58

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись означенням границі, довести, що

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n-3}{7n+1}=\dfrac{2}{7}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)=7$.

2. Користуючись теоремами про границі, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-8}$.

3. Користуючись ланцюгом еквівалентних нескінченно малих функцій, знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{\arcsin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x\sin x)}{(tgx)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

4. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+27}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$.

5. Знайти границі, використовуючи першу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 8x}$.

6. Знайти границі, використовуючи другу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-7}\right)^{x+1}$.

7. Дослідити точки розриву функцій:

а) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$; б) $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$;

в) $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$; г) $y=\dfrac{tg3x}{tgx}$.

8. Дослідити неперервність функції $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на відрізку:

а) $[2;5]$; б) $[4;10]$; в) $[0;2]$.

Дослідити на неперервність функції:

а) $y=\begin{cases}0{,}5x^2 \text{ при } |x|<2\\ 2{,}5 \quad \text{при } |x|=2\\ 3 \quad \text{при } |x|>2\end{cases}$; б) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; в) $y=arctg\dfrac{a}{x-a}$;

г) $y=\dfrac{x^3-x^2}{|x-1|}$; д) $y=7^{\frac{1}{x-5}}$; є) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

9. Для функцій $y=f(x)$ знайти похідну:

а) $y=3x^2-\dfrac{2}{x}+4x\sqrt{x}$; б) $y=x\cdot\ln x$;

в) $y=\dfrac{x-5}{1-2x^2}$; г) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x^2}}$;

д) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\log_5(x^2-3x)$.

9. Знайти похідні неявно заданих функцій:

а) $2y\ln e-x=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$.

10. Знайти похідні параметрично заданих функцій:

а) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+1}\\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=2^{2t}\\ y=2^{-t}\end{cases}$.

11. Знайти похідну функцій:

а) $y=(arctgx)^{\sin 2x}$; б) $y=(\cos 2x)^{tgx}$.

12. Знайти диференціали функцій:

а) $y=\dfrac{\lg x}{x}$; б) $y=x\sin x$; в) $y=2^{-x}$;

г) $y=x\cdot e^x$; д) $y=\sqrt{\sin 2x+\cos 2x}$.

13. Наближено обчислити значення функцій:

а) $\sqrt{1{,}02}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\cos 62°$; г) $arctg\,0{,}98$; д) $\arcsin 0{,}707$.

14. Знайти границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

15. Дослідити на монотонність функції:

а) $y=x^4-2x^2-5$; б) $y=(x-2)^5(2x+1)^4$;

в) $y=\frac{x}{\ln x}$; г) $y=x+\cos x$.

16. Знайти екстремуми функції за першою похідною:

а) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

б) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$;

в) $y=x-\ln(1+x)$.

17. Дослідити функцію на екстремум за другою похідною:

а) $y=x^3-2ax^2+a^2x \quad (a>0)$;

б) $y=x+\frac{a^2}{x} \quad (a>0)$;

в) $y=x+\sqrt{1-x}$.

18. Дослідити на опуклість, вгнутість і точки перегину функції:

а) $y=x^3-5x^2+3x-5$;

б) $y=3x^5-5x^4+3x-2$;

в) $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2} \quad (a>0)$;

г) $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.

19. Показати, що

а) графік функції $y=x\,arctg\,x$ скрізь вгнутий;

б) крива $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

Тема 8. Функції кількох змінних

8.1. Функції кількох змінних. Основні поняття

Означення 1. *Якщо змінна величина u залежить від n незалежних змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то її називають* ***функцією кількох змінних*** *і позначають:*

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $u = f(M), M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$,

$x_1, x_2 \ldots x_n$ – незалежні змінні, або аргументи є рівноправними.

Означення. *Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *і при яких функція* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *приймає певні дійсні значення, називають* ***областю визначення функції.***

Областю визначення функції багатьох змінних є деяка область простору E_n.

Якщо функція визначена в деякій області та на її межі, то говорять, що функція визначена в замкненій області.

Приклад. Знайти область визначення функції $u = \sqrt{121 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Розв'язання

Функція приймає дійсні значення при

$121 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 + z^2 \leq 121$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 11^2$ – рівняння сфери з центром у початку координат і радіусом $R = 11$.

Отже, областю визначення функції є куля з центром у початку координат, радіусом $R = 11$. Тобто $\overline{D} = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 11^2\}$.

Означення. *Точки, в яких функція кількох змінних не визначена, називають* ***розривами*** *цієї функції.*

Приклад. Знайти розриви функції $u = \dfrac{\cos(x + y)}{x^2 + y^2 - z}$.

Розв'язання

Функція має розриви при $x^2 + y^2 - z = 0$, тобто $z = x^2 + y^2$, а це рівняння параболоїда обертання навколо осі Oz.

Означення. ***Околом радіуса r*** *точки* $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ *називають сукупність усіх точок* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ *простору* E_n, *відстань від яких до точки* M_0 *менша або дорівнює r, тобто* $\sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} \le r$.

Означення. *Число A називають* ***границею функції*** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *в точці* $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, *якщо для будь-якого малого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться число r таке, що для всіх точок* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ *з околу радіуса r точки* M_0 *виконується нерівність:*

$$\left| f(x_1, x_2, ..., x_n) - A \right| < \varepsilon .$$

Позначають так:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ x_2 \to x_{20} \\ x_n \to x_{n0}}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A .$$

Границі функції кількох змінних мають багато таких властивостей, як і границі функції однієї змінної, але водночас між ними існує принципова відмінність. Пам'ятаємо, що границя функції однієї змінної існує тоді і тільки тоді, коли існують обидві односторонні границі функції $y = f(x)$ в точці x_0 і вони рівні між собою. Коли говоримо про функцію двох змінних $z = f(x, y)$, то рівність $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$ виконується тоді і тільки тоді, коли значення границі не змінюється при наближені до точки (x_0, y_0) по довільній траєкторії (зліва, справа, зверху, знизу, по довільній прямій, по довільній кривій). Це значно обмежує існування границі функції двох (кількох) змінних у точці.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} \dfrac{\sin(xyz)}{xyz}$.

Розв'язання

Використовуючи першу важливу границю, одержимо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} \frac{\sin(xyz)}{xyz} = 1.$$

Означення. *Функція* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається* ***неперервною*** *в точці* $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, *якщо вона визначена в цій точці і* $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ x_2 \to x_{20} \\ x_n \to x_{n0}}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}).$

незалежно від способу прямування точки M *до точки* M_0.

Означення. *Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається* ***неперервною в цій області.*** *Якщо функція неперервна в області D та на її межі, то говорять, що вона неперервна в замкненій області.*

Область визначення та область неперервності функцій кількох змінних співпадають.

Приклад. Знайти область неперервності функції $u = \dfrac{5}{\sqrt{9 - (x+3)^2 - y^2 - (z-1)^2}}$.

Розв'язання

Функція визначена, коли вираз під знаком кореня додатний, тобто

$9 - (x+3)^2 - y^2 - (z+1)^2 > 0,$

$(x+3)^2 + y^2 + (z+1)^2 < 9,$

$(x+3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ – це рівняння сфери з центром у точці $M_1(-3; 0; -1)$ і радіусом 3. Нерівність $(x+3)^2 + y^2 + (z+1)^2 < 9$ задовольняють лише внутрішні точки сфери.

Отже, область неперервності – це множина точок $M(x, y, z)$, що лежать у середині сфери з центром у точці $M_1(-3; 0; -1)$ і радіусом 3.

8.2. Функції двох змінних. Область визначення. Лінії рівня

В економічних розрахунках часто використовуються функції, що залежать не від однієї змінної, а від двох і більше змінних.

Розглянемо приклади таких функцій.

1. $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ – функція Кобба-Дугласа на честь американських вчених Д. Кобба і П. Дугласа, які вперше 1927 р. застосували її як виробничу функцію до аналізу економіки, де Y – вартість виробленої продукції, К – вартість основного капіталу, L – вартість затрат праці, A, α, β – числові невід'ємні параметри, на які накладається додаткова умова $\alpha + \beta = 1$.

2. Функція корисності – одне з базових понять економічної теорії, вона показує корисність m різних придбаних товарів. Найчастіше зустрічається у вигляді:

а) $u = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \ln(x_i - C_i)$, $\begin{matrix} a_i > 0 \\ x_i - C_i > 0, \\ C_i \geq 0 \end{matrix}$ логарифмічна функція;

б) $u = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i (x_i - C_i)}{1 - b_i}$, $\begin{matrix} a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ x_i > C_i \geq 0 \end{matrix}$ функція сталої еластичності.

Розглянемо функції двох змінних.

Означення. *Змінна z називається* ***функцією незалежних змінних x та y,*** *якщо кожній парі (x; y) з деякої області їх зміни відповідає певне єдине значення величини z, позначають* $z = f(x; y)$.

Означення. *Сукупність усіх впорядкованих наборів чисел виду* $(x;\ y)$, *при яких функція* $z = f(x; y)$ *приймає певні дійсні значення, називають областю визначення функції.*

Приклад. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання

z набуває дійсних значень тоді, коли $1 - x^2 - y^2 \geq 0;\ x^2 + y^2 \leq 1$.

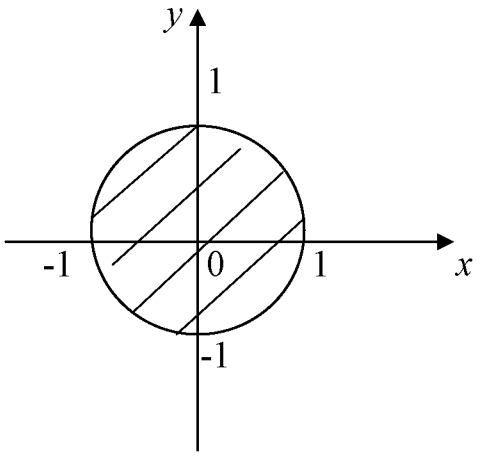


Рис. 59

Отже, область визначення функції – круг з центром у початку координат і радіусом рівним 1.

Графіком функції двох змінних $z = f(x;y)$ є деяка поверхня. Так, графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є півсфера з радіусом 1, розташована над площиною *XOY*.

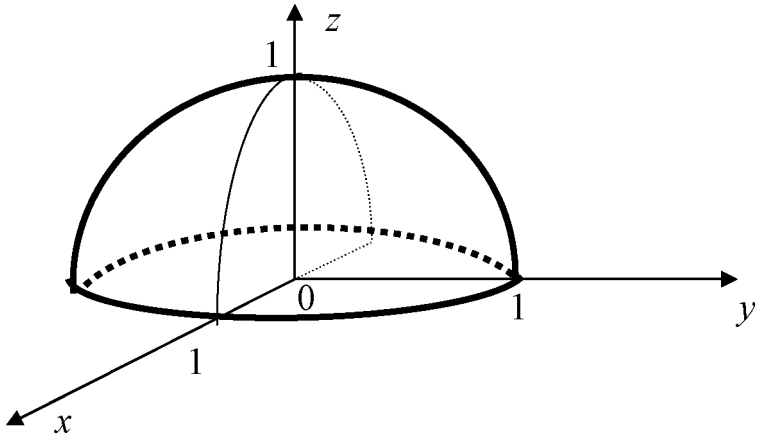


Рис. 60

Означення. *Криві лінії, що лежать у площині XOY і мають рівняння* $f(x;y) = c \ \ (c - const)$ *називаються* ***лініями рівня функції*** $z = f(x;y)$.

Лінія рівня – це множина усіх точок площини, для яких функція $z = f(x;y)$ приймає одне значення.

Приклад. Знайти лінії рівня функції а) $z = (x-2)^2 + (y+3)^2$; б) $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

Розв'язання

а) Лінії рівня функції описуються рівнянням $(x-2)^2+(y+3)^2=c$. Це коло з центром у точці (2; –3) і радіусом $\sqrt{c}$.

б) Для функції Кобба-Дугласа $y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ лінії рівня мають рівняння $K^{\alpha}L^{\beta}=C$, вони вказують вартість основного капіталу та затрат праці, які забезпечують одну і ту ж вартість виробленої продукції.

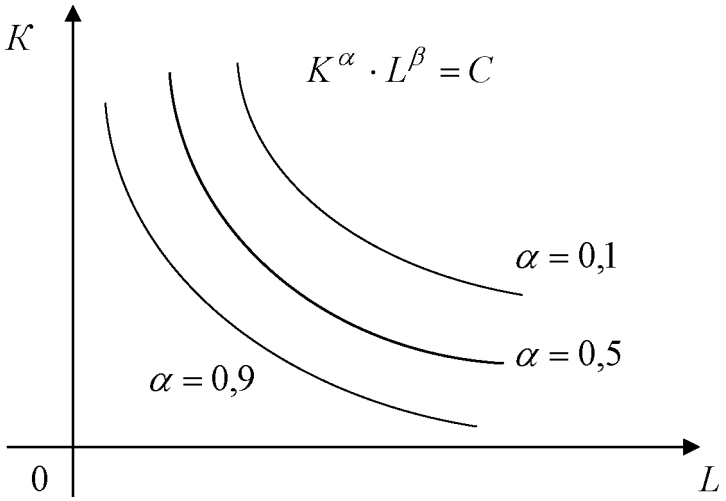


Рис. 61

Означення. *Число A називають* ***границею функції*** $f(x;y)$ *при* $x\to x_0$, $y\to y_0$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon>0$ *знайдеться число r, що для всіх точок (x; y) з r околу точки* $(x_0; y_0)$ *виконується нерівність* $|f(x;y)-A|<\varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$.

Для функції двох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку і частки, встановлені для функції однієї змінної.

Означення. *Функція* $f(x;y)$ *називається* ***неперервною в точці*** $(x_0; y_0)$, *якщо вона визначена в області, що містить цю точку та* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$ *незалежна від способу прямування до цієї точки.*

Функція неперервна в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Якщо функція неперервна в деякій області та на її межі, то вона неперервна в замкненій області.

Області визначення та область неперервності функції двох змінних співпадають.

8.3. Частинний приріст та частинні похідні

Нехай $z = f(x;y)$ функція двох змінних. Надамо змінній x приросту Δx, а змінна y залишається незмінною.

Означення. *Функція z одержить приріст $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x;y)$, який називають* ***частинним приростом по змінній x.***

Функція z одержить приріст $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x;y)$, який називають ***частинним приростом по змінній y.***

Означення. *Якщо існує* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, *то її називають* ***частинною похідною функції*** $z = f(x;y)$ ***по змінній x*** *і позначають* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *або* z'_x, $f'_x(x;y)$, *тобто*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогічно $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ – ***частинна похідна по змінній y.***

За означенням кожна частинна похідна є похідною функції однієї змінної. Тому при обчисленні частинних похідних можна користуватись відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = x^4 + y^4 - 3x^2y^2 + 2x - 1.$

Розв'язання

$z'_x = 4x^3 - 6xy^2 + 2$ (змінну y вважаємо сталою),

$z'_y = 4y^3 - 6yx^2$ (змінну x вважаємо сталою).

Частинні диференціали визначаються як головні частини частинних приростів функції $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx$, $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$.

Означення. *Розглянемо функцію* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. *Надамо змінній* x_k, *приросту* Δx_k *а всі інші незалежні змінні зафіксуємо, то функція одержить приріст* $\Delta_{x_k} u = f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$, *який називають* ***частинним приростом функції по змінній*** x_k.

Означення. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$, *що не залежить від способу прямування* $\Delta x_k \to 0$, *то її називають* ***частинною похідною*** *першого порядку функції* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *по змінній* x_k *і позначають* $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ або $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_k)}{\partial x_k}$ або u'_{x_k}.

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$.

При знаходженні частинної похідної по змінній x_k усі інші змінні слід вважати сталими величинами і тому можна використовувати правила диференціювання та таблицю похідних функції однієї змінної.

Приклади обчислення частинних похідних

а) $u = e^{x/y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{x/y}\right)'_x = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} e^{x/y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{x/y}\right)'_y = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{x/y};$$

б) $u = x^y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^y\right)'_x = y \cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^y\right)'_y = x^y \ln x;$$

в) $u'' = arctg\dfrac{x+y}{z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arctg\frac{x+y}{z}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(arctg\frac{x+y}{z}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(arctg\frac{x+y}{z}\right)'_z = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x+y}{z^2}\right).$$

8.4. Повний приріст та повний диференціал функції двох змінних

Означення. *Нехай маємо функцію двох змінних* $z = f(x;y)$. *Якщо x та y отримають одночасно приріст* Δx *та* Δy, *то різницю* $f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ *називають* ***повним приростом*** *функції і позначають* $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$.

Повний приріст функції можна записати у вигляді $\Delta z = [f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y)] + [f(x; y+\Delta y) - f(x;y)]$. У дужках є частинні прирости функції по кожній змінній.

Застосуємо до них теорему Лагранжа, одержимо

$$\Delta z = \Delta x \cdot f'_x(x+\theta\Delta x; y+\Delta y) + \Delta y \cdot f'_y(x; y+\theta\Delta y),\ 0<\theta<1,$$

f'_x та f'_y – це відповідні границі. Тому якщо функція має границю, то її можна подати як суму границі та нескінченно малої величини $\Delta z = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Означення. *Головна, лінійна відносно* Δx *та* Δy *частина повного приросту функції називається* ***повним диференціалом***

$dz = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y$.

Прирости Δx та Δy незалежних змінних x та y називаються ***диференціалами незалежних змінних*** *і позначаються dx та dy, тому*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Отже, $\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де $\alpha\Delta x$ та $\beta\Delta y$ нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, тому $\Delta z \approx dz$.

Означення. *Головна, лінійна відносно приростів* Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n *частина повного приросту функції називається* ***повним диференціалом*** *функції* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і позначається du.*

Повний диференціал знаходять за формулою

$du = f'_{x_1}\Delta x_1 + f'_{x_2}\Delta x_2 + ... + f'_{x_n}\Delta x_n$.

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\sqrt{xy}$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\sqrt{xy}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\sqrt{xy}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x = \frac{x}{2xy} = \frac{1}{2y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{2x}dx + \frac{1}{2y}dy$.

Використання диференціала для наближених обчислень базується на формулі:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y;$$

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Приклад. Обчислити за допомогою диференціала $\sqrt{(12{,}03)^2 + (4{,}98)^2}$.

Розв'язання

Запишемо функцію $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, тоді $x_0 = 12$; $y_0 = 5$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}02$.

Обчислимо значення функції $f(x_0; y_0) = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$.

Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці $(x_0; y_0)$. Тобто в точці $(12;5)$

$$f'_x(x;y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad f'_x(x_0;y_0)=\frac{12}{13};$$

$$f'_y(x;y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad f'_y(x_0;y_0)=\frac{5}{13};$$

$$\sqrt{12{,}03^2+4{,}98^2}\approx 13+\frac{12}{13}\cdot 0{,}03+\frac{5}{13}(-0{,}02)=13{,}02.$$

8.5. Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай задана функція $z=f(x;y)$ і вектор $\vec{l}\left(l_x;l_y\right)$, що утворює з віссю OX кут φ.

Означення. ***Похідна функції z у напрямі вектора*** $\vec{l}$ *знаходиться за формулою:*

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi,.$$

де $\cos\varphi=\frac{l_x}{|l|}$; $\sin\varphi=\frac{l_y}{|l|}$.

Означення. *Похідна функції* $u=f(x,y,z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}=(l_x,l_y,l_z)$ *знаходиться за формулою:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha=\frac{l_x}{|l|}$; $\cos\beta=\frac{l_y}{|l|}$; $\cos\gamma=\frac{l_\gamma}{|l|}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ (косинуси кутів, що утворює вектор $\vec{l}$ з додатним напрямом осі Ox).

Приклад. Знайти похідну функції $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ у напрямі вектора

$\vec{l}$ (1; 2; –2) в точці M(2; 3; 6).

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)=\frac{2}{\sqrt{49}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{21}+\frac{6}{21}-\frac{12}{21}=\frac{-4}{21}.$$

Означення. *Вектор, який вказує напрям найшвидшого зростання функції* $z=f(x;y)$, *називають* ***градієнтом*** $\overline{grad\,z}=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Модуль градієнта $\left|\overline{grad z}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ визначає швидкість зростання функції.

Для функції $u=f(x,y,z)$ градієнт знаходять за формулою

$$\overline{grad\,u}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

а його модуль

$$\left|\overline{grad\ u}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Приклад. Знайти величину найбільшої зміни функції $u=7x^2y-\frac{7}{2}y^2z+\frac{14}{3}z^3$ в точці $M_0(1, 0, 3)$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=14xy,\ \frac{\partial u}{\partial y}=7x^2-7yz,\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=14z^2-\frac{7}{2}y^2.$$

У точці M_0 вони набувають значення

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=7;\ \ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=126$$

$$\left|\overline{gradu}(M_0)\right|=\sqrt{0^2+7^2+126^2}\approx 126{,}19.$$

8.6. Частинні похідні вищих порядків

Означення. *Частинну похідну першого порядку по змінній x_m від частинної похідної першого порядку по змінній x_k називають* ***частинною похідною другого порядку*** *функції по змінній x_k та x_m і позначають*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m}\ \text{або}\ u''_{x_k x_m}\ \text{при}\ k\neq m,\qquad \frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2}\ \text{або}\ u''_{x_k x_k}\ \text{при}\ k=m.$$

Частинні похідні функції $z=f(x;y)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ є функціями тих же змінних, тому вони теж мають похідні по цих змінних.

Приклад. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z=\ln(x^2+y)$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y\right)\right)'_x=\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y\right)\right)'_y=\frac{1}{x^2+y}\cdot 1=\frac{1}{x^2+y},$$

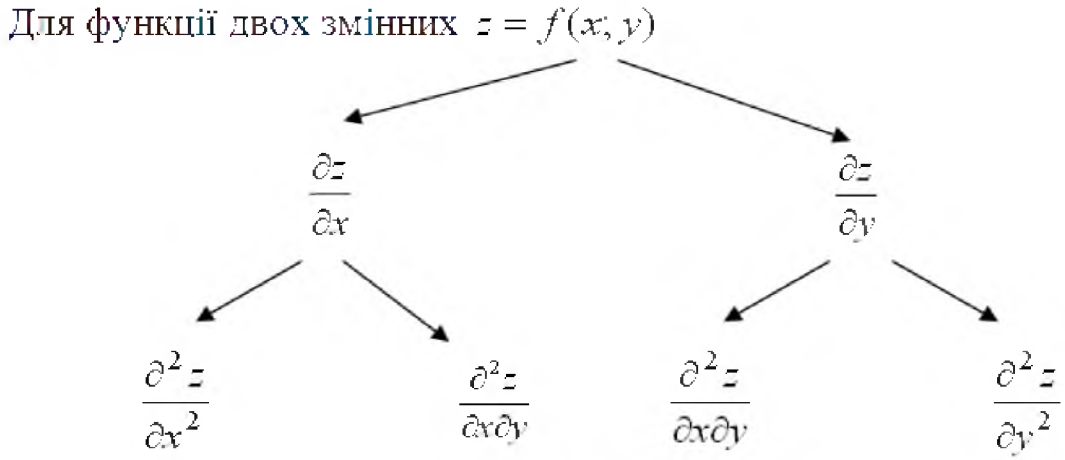
а потім – частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=\left(2x\left(x^2+y\right)^{-1}\right)'_x=2\cdot\left(x^2+y\right)^{-1}+2x\cdot(-1)\left(x^2+y\right)^{-2}\cdot 2x=$$

$$=\frac{2}{x^2+y}-\frac{4x^2}{(x^2+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \left(\left(x^2 + y\right)^{-1}\right)_y = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\left(x^2 + y\right)^{-1}\right)_x = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{\left(x^2 + y\right)^2}.$$



Означення. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *називають* ***мішаними частинними похідними***.

Теорема. *Якщо функція* $z = f(x; y)$ *та похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ *неперервні в точці (x; y) та в деякому її околі, то в цій точці* $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8.7. Поняття екстремуму

Означення. *Функція кількох змінних* $u = f(M)$, $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in E_n$ *має* ***максимум*** *в точці* $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, *якщо* $f(M_0) > f(M)$ *для всіх точок M із досить малого околу точки* M_0.

Означення. *Функція кількох змінних* $u = f(M)$ *має* ***мінімум*** *у точці* M_0, *якщо* $f(M_0)) < f(M)$ *для всіх точок M із досить малого околу точки* M_0.

Означення. *Максимум та мінімум функції кількох змінних називають* ***екстремумами функції***, *а точку* M_0, *де функція має екстремум, називають* ***точкою екстремуму функції***.

Необхідна умова існування екстремуму

Теорема. *Якщо функція* $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ *має екстремум в точці* $M_0(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0})$, *то кожна частинна похідна першого порядку функції дорівнює нулю або не існує в цій точці.*

Означення. *Точки, в яких* $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ *не існують або дорівнюють нулю, називають* ***критичними*** *точками або підозрілими на екстремум.*

8.8. Безумовні екстремуми функції двох змінних

Означення. *Точка* $M_0(x_0; y_0)$ *називається точкою максимуму функції* $z = f(x; y)$, *якщо існує окіл точки* M_0 *такий, що для всіх точок* $(x;\ y)$ *з цього околу виконується нерівність* $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ *(рис. 62).*

Означення. *Точка* $M_0(x_0; y_0)$ *називається точкою мінімуму функції* $z = f(x; y)$, *якщо існує окіл точки* M_0 *такий, що для всіх точок* $(x;\ y)$ *з цього околу виконується нерівність* $f(x_0; y_0) < f(x; y)$ *(рис. 63).*

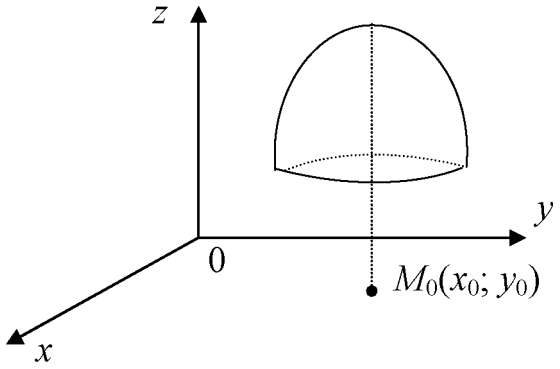


Рис. 62

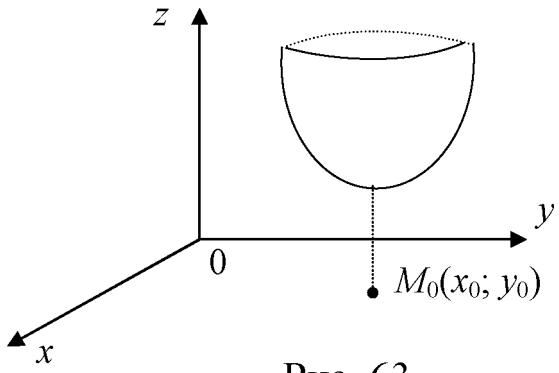


Рис. 63

Означення. *Відповідні значення функції* $f(x_0, y_0)$ *називають* ***максимальним та мінімальним значенням функції.***

Означення. *Максимум і мінімум функції двох змінних називають* ***екстремумами функції.***

Якщо строгі нерівності замінити на нестрогі $(\geq,\ \leq)$, то точка M_0 називається точкою нестрогого екстремуму.

Необхідні умови існування екстремуму

Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ *диференційована функція* $z = f(x, y)$ *має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто* $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$.

Точки, в яких виконуються необхідні умови, називають критичними або стаціонарними (або підозрілими на екстремум).

Достатні умови існування екстремуму

Нехай функція $z = f(x; y)$ *визначена в деякому околі критичної точки* $(x_0; y_0)$ *і має в цій точці неперервні похідні другого порядку:*

$a_{11} = f''_{xx}(x_0; y_0)$;

$a_{22} = f''_{yy}(x_0; y_0)$;

$a_{12} = f''_{xy}(x_0; y_0)$.

Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $a_{11} < 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має максимум;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $a_{11} > 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має мінімум;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція екстремуму не має;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то застосовують іншу ознаку.

Схема дослідження функції на екстремум (безумовний)

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти частинні похідні першого порядку z'_x та z'_y.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ та знайти критичні точки.
4. Знайти частинні похідні другого порядку і обчислити їх значення в критичних точках.
5. За достатніми ознаками зробити висновок про екстремум.
6. Знайти значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Розв'язання

Функція визначена для всіх дійсних x та y.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 2x - y + 3,$$

$$z'_y = -x + 2y - 2.$$

Використаємо необхідну умову існування екстремуму:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -\frac{4}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{matrix}$$

Отже, $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ – критична точка.

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{xy} = -1; \quad z''_{yy} = 2.$$

Знайдемо значення частинних похідних a_{11}, a_{12}, a_{22}, тобто

$$a_{11} = 2, \; a^2{}_{12} = -1, \; a_{22} = 2.$$

Тоді $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ і $a_{11} = 2 > 0$,

тобто за достатніми ознаками функція має мінімум.

Отже,

$$\min z = f\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3}.$$

8.9. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

Найбільше та найменше значення функції знаходять у такій послідовності:

1. Знаходять у цій області критичні точки.

2. На межі області за допомогою рівняння межі функцію зводять до функції однієї змінної, для якої знаходять критичні точки.

3. Знаходять значення функції в усіх знайдених критичних точках і в кутових точках межі області.

4. Серед цих значень вибирають найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в області D, що обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Розв'язання

Знайдемо критичні точки функції

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z'_x = 2x - y - 4 = 0 \\ z'_y = -x + 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 4 = 0 \\ x = 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(\frac{4}{3};\ \frac{8}{3}\right)$ лежить у середині області D (рис. 64).

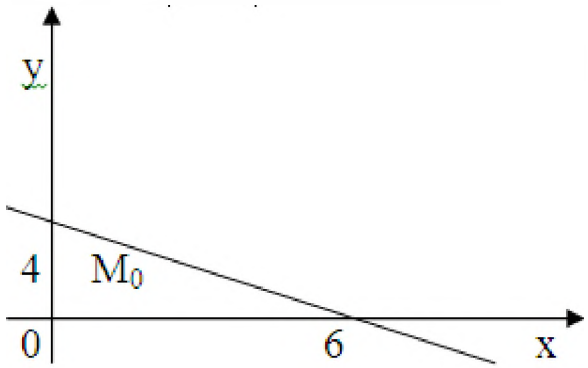


Рис. 64

Знайдемо значення функції в точці M_0

$$z(M_0) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\frac{8}{3} = -\frac{48}{9}.$$

Дослідимо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2$, $z' = 2y$, $2y = 0$, $y = 0$.

Критична точка $M_1(0;\ 0)$. Значення функції в цій точці $z(0;\ 0) = 0$.

Значення функції в кутовій точці $z(0;\ 4) = 16$.

Якщо $y = 0$, то $z = x^2 - 4x$, $z' = 2x - 4$, $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

Критична точка $M_2(2;\ 0)$. Значення функції у критичній точці $z(2;\ 0)=4-8=-4$.

Значення функції в кутовій точці $z(6;\ 0)=36-24=12$.

Якщо $2x+3y-12=0,\ \ y=\dfrac{12-2x}{3}=4-\dfrac{2}{3}x,$ то

$$z=x^2-x\left(4-\frac{2}{3}x\right)+\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2-4x=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x+16.$$

$$z'_x=\frac{38}{9}x-\frac{40}{3}.$$

$$\frac{38}{9}x-\frac{40}{3}=0,\ \ x=\frac{60}{19},\ \ y=\frac{36}{19}.$$

Критична точка $M_3\left(\dfrac{60}{19};\dfrac{36}{19}\right)$. Значення функції у критичній точці $z\left(\dfrac{60}{19},\dfrac{36}{19}\right)=16$.

Серед знайдених значень вибираємо найбільше $\max\limits_{\overline{D}} z\left(\dfrac{60}{19};\dfrac{36}{19}\right)=16$ та $\max\limits_{\overline{D}} z(0,4)=16,$ а найменше $\min\limits_{\overline{D}} z\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)=-\dfrac{48}{9}$.

8.10. Умовний екстремум. Метод Лагранжа

Часто зустрічається задача знаходження екстремуму функції двох змінних за наявності додаткових умов на її аргументи. Такі екстремуми називають ***умовними.***

Нехай потрібно знайти екстремум функції $z=f(x;y)$ за умови $\varphi(x;y)=0$ (рівняння зв'язку).

Алгоритм знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

1. Записати функцію Лагранжа $L(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$, де $\lambda-$ деяке число, що називається множником Лагранжа.

2. Знайти критичні точки функції Лагранжа за необхідними умовами існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases}$$

3. Перевірити в кожній критичній точці M_k достатні умови існування екстремуму:

а) якщо $\Delta(M_k) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix} > 0$, то $M_k -$ точка максимуму;

б) якщо $\Delta(M_k) < 0$, то $M_k -$ точка мінімуму.

4. Знайти значення функції у точках максимуму чи мінімуму.

Приклад. Знайти екстремум функції $z = x + 2y$ за умови $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Необхідна умова існування екстремуму має вигляд

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язками системи є точки

$$M_1\left(1; 2; -\frac{1}{2}\right) \text{ та } M_2\left(-1; 2; \frac{1}{2}\right).$$

Перевіримо достатні умови існування екстремуму

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 2\lambda.$$

Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}$.

У точці M_1 маємо: $\Delta(M_1)=\begin{vmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=16+4=20>0.$

Отже, в точці M_1 функція має максимум $\max z(M_1)=1+2\cdot 2=5.$

У точці M_2 маємо:

$$\Delta(M_2)=\begin{vmatrix}0 & -2 & -4\\ -2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{vmatrix}=-16-4=-20<0.$$

Отже, в точці M_2 функція має мінімум $\min z(M_2)=-1+2\cdot(-2)=-5.$

8.11. Задача оптимізації виробництва

Пошук екстремумів – головний метод, за допомогою якого розв'язується більшість економічних задач.

Нехай функція Кобба-Дугласа $y=AK^{\alpha}\cdot L^{\beta}$.

Знайти значення величини K та L при цінах використаних ресурсів p_1 і p_2, щоб при фіксованому об'ємі продукції y_0 забезпечити мінімум витрат.

Функція витрат має вигляд $C=p_1K+p_2L$.

Математична модель цієї задачі: знайти умовний екстремум функції C при умові, що $y=y_0$.

Складаємо функцію Лагранжа $\phi=p_1K+p_2L+\lambda(y_0-AK^{\alpha}L^{\beta})$.

Необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial K}=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial L}=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}=0\end{cases};\qquad \begin{cases}p_1-\lambda\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}=0\\ p_2-\lambda\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}=0\\ y_0-AK^{\alpha}L^{\beta}=0\end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи дає точку умовного мінімуму функції витрат $K=\dfrac{y_0}{A}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha-1}$, $L=\dfrac{y_0}{A}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}$.

8.12. Поняття про емпіричні формули

При дослідженні різних економічних та соціальних проблем часто одержують *n* значень величини *x* та відповідні їм значення величини *y*.

Результати спостережень записують у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	y_2	y_3	...	y_n

За даними цієї таблиці необхідно визначити вигляд функціональної залежності між *x* та *y*, тобто від табличної форми задання функціональної залежності необхідно перейти до аналітичної форми її запису виду $y = f(x)$.

Означення. *Формули, які складені на основі досвіду і спостережень, називаються* ***емпіричними.***

8.13. Метод найменших квадратів

Розв'язування задачі можна поділити на два етапи.

Перший етап. Використовуючи графічне представлення точок $M_k(x_k; y_k)$ *(к = 1, 2, ... n),* обирають форму залежності між *x* та *y* (лінійну, параболічну, гіперболічну, показникову), тобто обирають вигляд функції:

$$y = f(x).$$

У випадку лінійної залежності (точки M_k мало відхиляються від прямої лінії) між *x* та *y* обирають вигляд функціональної залежності $y = ax + b$.

У випадку параболічної залежності $y = ax^2 + bx + c$.

У випадку гіперболічної залежності $y = \frac{a}{x} + b$.

У випадку показникової залежності $y = a^x + b$.

На цьому етапі параметри *a, b, c* – невідомі.

Нехай у результаті першого етапу розв'язання задачі обрана залежність виду $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ з невідомими параметрами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.

Другий етап. На другому етапі розв'язання задачі будують функцію:

$S = \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(x_r,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m))^2$, залежну від m параметрів.

Ця функція дорівнює сумі квадратів відхилень точок $M_k(x_k; y_k)$ від обраної лінії рівняння якої $y = f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m)$.

Будемо шукати такі значення параметрів $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$, при яких функція S приймає мінімальне значення, тому відхилення табличних даних точок $M_k(x_k; y_k)$ від обраної функціональної залежності (відповідної лінії) буде мінімальним.

Необхідна умова для існування екстремуму функції S – це рівність нулю всіх частинних похідних $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2...m$. Ця умова є системою m алгебраїчних рівнянь з m невідомими. Розв'язок системи і дає найкращі значення шуканих параметрів.

8.14. Лінійна залежність

У випадку лінійної залежності між x та y функція S має вигляд: $S = \sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b))^2$,

де a та b шукані параметри.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2(y_k - ax_k - b) \cdot (-x_k),$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} 2(y_k - ax_k - b) \cdot (-1).$$

За необхідною умовою маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}.$$

Знайдемо основний та допоміжний визначники системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & n \end{vmatrix} = n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k & n \end{vmatrix} = n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} y_k \end{vmatrix} = \sum x_k^2 \sum y_k - \sum x_k y_k \sum x_k .$$

За формулами Крамера одержимо

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2},$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\left(\sum_{k=1`}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \sum_{k=1}^{n} x_k}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}.$$

Приклад. Відомі дані про індекс акцій y (умовних одиниць) деякої компанії залежно від ціни x у.о. продукції, яку вона випускає:

X	13,04	14,02	14,03	15	15,5
Y	310	390	391	400	410

Знайти лінійну залежність $y = ax + b$ між ціною продукції за індексом акцій компанії.

Розв'язання

Обчислення зручно оформити у вигляді таблиці

K	x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2
1	13,04	310	4042,4	170,0416
2	14,02	390	5467,8	196,5604
3	14,03	391	5485,73	196,8499
4	15	400	6000	225
5	15,5	410	6355	240,25
$\sum$	**71,59**	**1907**	**27350,93**	**1028,693**

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1028{,}69a + 71{,}59b = 27350{,}93 \\ 71{,}59a + 5b = 1907. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $\begin{matrix} a = 10{,}24, \\ b = 236{,}36. \end{matrix}$

Маємо $y = 10{,}24x + 236{,}36$, тобто із збільшенням ціни індекс акцій зростає на 10,24 %.

8.15. Квадратична залежність

Якщо розміщення точок у системі координат нагадує параболу $y = ax^2 + dx + c$, то функція S має вигляд:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c \right) \right)^2 .$$

Враховуючи необхідні умови екстремуму функції, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + C\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + C\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + C \cdot n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k . \end{cases}$$

Достатні умови застосувати немає необхідності, бо відповідна функція S має лише мінімум.

Приклад. Методом найменших квадратів знайти формулу $y = ax^2 + bx + c$ для функції заданої таблицею, де х – кількість електронних рахунків клієнтів, у – тривалість часу обслуговування цих рахунків

x	2	3	4	5	6
y	12	13	14	75	100

Розв'язання

Обчислення оформимо у вигляді таблиці

K	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
1	2	4	8	16	12	24	48
2	3	9	27	81	13	39	117
3	4	16	64	256	14	56	224
4	5	25	125	625	75	375	1875
5	6	36	216	1296	100	600	3600
$\sum$	**20**	**90**	**440**	**2274**	**214**	**1094**	**5904**

Складемо систему:

$$\begin{cases} 2274a + 440b + 90c = 5904 \\ 440a + 90b + 20c = 1094 \\ 90a + 20b + 5c = 214. \end{cases}$$

Розв'язок системи:

$a = 7{,}04;$

$b = 32{,}5;$

$c = 46{,}05.$

$y = 7{,}04x^2 + 32{,}5x + 46{,}05$

квадратична залежність між часом обслуговування та кількістю електронних рахунків.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

а) $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$; б) $z = \dfrac{1}{2x + y}$; в) $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

2. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; б) $z = e^{x^2 + y^2}$; в) $z = \sqrt{xy}$.

3. Знайти лінії рівня функцій:

а) $z = xy$; б) $z = \dfrac{x}{y}$; в) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Знайти похідну функції $z = x^2 + xy + y^2$ в точці $M(1;\ 1)$ у напрямі вектора $\vec{l} = 6i + 8j$.

5. Знайти диференціал функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M(1;\ 2)$.

6. Наближено обчислити $\ln\left(0{,}09^2 + 0{,}99^2\right)$.

7. Знайти градієнт функції $z = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$ в точці $M(2;\ 1)$.

8. Знайти екстремуми функцій:

а) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + \dfrac{3}{e}$; б) $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

9. Знайти умовні екстремуми функцій:

а) $u = x + y$, якщо $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$;

б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, якщо $x + y = 1$.

10. Знайти найбільше та найменше значення функції в замкненій області:

а) $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$;

б) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, в області, що обмежена лініями $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.

11. Таблицею задані величини товарного обігу x (тис. гри) та витрати обігу y (гри).

x	60	80	120	160	240	320
y	5510	5760	6235	6750	7885	8635

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

12. У таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га (x) та врожай пшениці (y) центнерів.

x	1	2	3	4	5	7	9	11	12
y	24	26,5	28	37	40	46	49	50	50,5

Обрати вигляд залежності y та x і визначити її параметри.

Тема 9. Інтегральне числення

9.1. Первісна та невизначений інтеграл

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення та ділення, піднесення до степеня та добування кореня, логарифмування та потенціювання, диференціювання та інтегрування.

Означення. ***Первісною функцією*** *для заданої функції* $f(x)$ *називають таку функцію* $F(x)$, *похідна якої дорівнює* $f(x)$, *або диференціал якої дорівнює* $f(x)dx$, *тобто*

$$F'(x) = f(x)$$

$$dF(x) = f(x)dx$$

Функція $f(x) = 3x^2$ має первісні $F(x) = x^3; x^3 + 1;\ x^3 - 7, \ldots, x^3 + C.$

Теорема. *Будь-які дві первісні для заданої функції* $f(x)$ *відрізняються лише на сталий доданок* C.

Доведення

Нехай $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ – первісні для функції $f(x)$.

Доведемо, що $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Оскільки $F_1(x)$ і $F_2(x)$ первісні для $f(x)$, то за означенням первісної маємо $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$, тому $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, а це означає, що $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, оскільки $\left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = 0$, $(C)' = 0$, тому

$F_1(x) - F_2(x) = C$, тобто $F_1(x) = F_2(x) + C$, що й треба було довести.

Наслідок. *Щоб знайти усю нескінченну множину (сукупність) первісних для заданої функції, достатньо знайти лише одну первісну функцію, а усі інші одержати додаванням до неї сталої* C.

$$\begin{cases} F(x) + C - \text{ сукупність первісних} \\ F(x) - \text{ одна з первісних.} \end{cases}$$

Означення. *Сукупність усіх первісних* $F(x)+C$ *для заданої функції* $f(x)$ *називають* ***невизначеним інтегралом*** *і позначають* $\int f(x)dx = F(x)+C$, *де*

$\int$ – знак інтеграла,

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

$f(x)$ – підінтегральна функція,

x – змінна інтегрування,

$F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$,

С – довільна стала інтегрування.

Операція знаходження невизначеного інтеграла називається інтегруванням.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює підінтегральній функції $\int df(x) = f(x)+C$ (комбінація символів $<< d\int >>$ взаємно знищується).

3. Сталий множник A можна виносити за знак інтеграла $\int A\, f(x)dx = A\int f(x)dx$.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює тій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної із функцій – доданків, тобто $\int\left[f(x)\pm g(x)\pm k(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \int k(x)dx$.

Таблиця невизначених інтегралів

Маючи таблицю похідних, одержимо таблицю основних інтегралів. Результати перевіряються диференціюванням.

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x+C$.

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1)$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

9.2. Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування базується на використанні таблиці основних інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла. Але в деяких випадках спочатку потрібно зробити алгебраїчні перетворення підінтегральної функції.

Приклад. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(2\cos x - \frac{3}{x} + 5x \right) dx$; б) $\int (2x-3)^2 dx$;

в) $\int (x+5)^3 dx$; г) $\int \frac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2} dt$.

Розв'язання

а) $\int \left(2\cos x - \frac{3}{x} + 5x \right) dx = 2\sin x - 3\ln|x| + \frac{5x^2}{2} + C$;

б) $\int (2x-3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 9x + C$;

в) $\int (x+5)^3 dx =$

$$= \int \left(x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 5^2 + 5^3\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{15x^3}{3} + \frac{75x^2}{2} + 125x + C;$$

г) $$\int \frac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2} dt = \int \left(3t^{-2} - 5t^{-1} + 7 + t\right) dt = -\frac{3}{t} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^2}{2} + C.$$

Інтегрування підстановкою (метод заміни змінної)

Для знаходження заданого інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, тоді $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

Алгоритм методу заміни змінної

1. Частину підінтегральної функції замінити на нову змінну.
2. Знайти диференціал від обох частин заміни.
3. Весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну, щоб одержати табличний інтеграл.
4. Знайти одержаний інтеграл.
5. Виконати обернену заміну.

Приклад. За допомогою підстановки знайти інтеграли

а) $\int (3x+1)^5 dx$; б) $\int 4\cos 5x dx$; в) $\int \frac{6x^2 dx}{3 - 4x^3}$.

Розв'язання

а) $$\int (3x+1)^5 dx = \left| \begin{array}{c} 3x+1 = t \\ (3x+1)' dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} t^5 dt = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} = \frac{(3x+1)^6}{18} + C;$$

б) $$\int 4\cos 5x dx = 4\int \cos 5x dx = \left| \begin{array}{c} 5x = t \\ (5x)' dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| =$$

$$= 4\int \cos t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{4}{5} \int \cos t dt = \frac{4}{5} \sin t = \frac{4}{5} \sin 5x + C;$$

в) $$\int \frac{6x^2dx}{3-4x^3} = 6\int \frac{x^2dx}{3-4x^3} = \left| \begin{array}{c} 3-4x^3 = t \\ \left(3-4x^3\right)' \cdot dx = dt \\ -12x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{1}{12}dt \end{array} \right| =$$

$$= 6\int \frac{-\frac{1}{12}dt}{t} = -\frac{6}{12}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|3-4x^3\right| + C.$$

Доцільно запам'ятати формули, які легко виводяться методом заміни змінної:

1. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$.
2. $\int a^{kx}dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$.
3. $\int \sin kxdx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$.
4. $\int \cos kxdx = \frac{1}{k}\sin kx + C$.

Інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під знаком інтеграла є добуток функцій, причому хоча б одна з них не є степеневою.

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовні функції, тоді диференціал добутку буде $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$, $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$, проінтегруємо останню рівність: $\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$ за властивістю невизначеного інтеграла $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, тому

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \text{ –}$$

це формула інтегрування частинами. Вона застосовується, коли одержаний інтеграл $\int v \cdot du$ менш складний, ніж даний $\int u \cdot dv$.

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами:

1) в інтегралах вигляду $\int P(x)\cdot e^x\cdot dx;\int P(x)\cdot \sin x dx;\int P(x)\cdot \cos x dx;\int P(x)\cdot a^x dx,$ (де $P(x)$ – многочлен) позначають: $u=P(x),\ dv$ – залишок;

2) в інтегралах вигляду $\int P(x)\cdot \ln x dx;\int P(x)\cdot arctgx dx;\int P(x)\arcsin x dx$ (добуток многочлена й оберненої функції) позначають: u – обернена функція, $dv=P(x)dx$;

3) в інтегралах виду $\int \sin(kx+b)\cdot e^{px+l}dx,\ \int \cos(kx+b)\cdot a^{px+l}dx$ немає значення, що позначати u, а що позначати dv, але такі позначення треба робити двічі, тому що двічі відбувається інтегрування частинами. У результаті одержимо рівняння відносно шуканого інтеграла, розв'язавши яке, знайдемо інтеграл.

Зауваження. Для u знаходимо диференціал, $du=u'dx$, а для dv інтеграл $v=\int dv$.

Приклад. Знайти інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами а) $\int x\cdot e^x dx$; б) $\int x\ln x dx$; в) $\int \sin x\cdot e^{2x+3}dx$.

Розв'язання

а) $$\int x\cdot e^x dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=(x)'dx=dx \\ dv=e^x dx,\ v=\int e^x dx=e^x \end{array}\right|=x\cdot e^x-\int e^x dx=x\cdot e^x-e^x+C.$$

б) $$\int x\ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=(\ln x)'dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx,\ v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

в) $$\int \sin x\cdot e^{2x+3}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\sin x, & du=(\sin x)'dx=\cos x dx \\ dv=e^{2x+3}dx, & v=\int e^{2x+3}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x+3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cdot e^{2x+3}-\int\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\cdot e^{2x+3}-$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos x \cdot e^{2x+3}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & du = (\cos x)'dx = -\sin x dx \\ dv = e^{2x+3}\cdot dx, & v = \int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos x \cdot e^{2x+3} - \int \frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot(-\sin x dx)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{4}\cos x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx.$$

Маємо рівняння відносно шуканого інтеграла $\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx$:

$$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4}e^{2x+3}(2\sin x - \cos x) - \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx.$$

Перенесемо невідомий інтеграл у ліву сторону рівняння, приведемо подібні і знайдемо шуканий інтеграл:

$$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx + \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4}e^{2x+3}\cdot(2\sin x - \cos x),$$

$$\frac{5}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4}\cdot e^{2x+3}\cdot(2\sin x - \cos x), \text{ звідки}$$

$$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{2x+3}(2\sin x - \cos x) + C =$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x+3}\cdot(2\sin x - \cos x) + C = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)\cdot e^{2x+3} + C.$$

Інтегрування за допомогою довідника

Існують спеціальні довідники, які містять велику кількість інтегралів від досить широкого класу функцій.

Приклад. $I(a) = \int \frac{\cos axdx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\cdot\sin ax} + C.$

Розв'язання

Для знаходження інтеграла цього класу $I(4) = \int \frac{\cos 4xdx}{\sin^2 4x}$ у відповідь треба тільки підставити значення параметра $a = 4$, маємо $\int \frac{\cos 4xdx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4\sin 4x} + C.$

Приклади інтегрування виразів

1. $$\int(3\cos x-4\cdot 2^x)dx=\int 3\cos x dx-\int 4\cdot 2^x dx=$$
$$=3\int\cos x dx-4\int 2^x dx=3\cdot\sin x-4\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

2. $$\int(4x-3)^2\cdot x\cdot dx=\int(16x^2-24x+9)\cdot x\cdot dx=$$
$$=\int(16x^3-24x^2+9x)dx=\int 16x^3dx-\int 24x^2dx+$$
$$+\int 9xdx=16\int x^3dx-24\int x^2dx+9\int xdx=16\cdot\frac{x^4}{4}-24\cdot\frac{x^3}{3}+$$
$$+9\cdot\frac{x^2}{2}=4x^2-8x^3+\frac{9}{2}x^2+C.$$

3. $$\int\frac{6x^2-5+3x}{x}\cdot dx=\int(\frac{6x^2}{x}-\frac{5}{x}+\frac{3x}{x})dx=\int(6x-\frac{5}{x}+3)dx=$$
$$=\int 6xdx-\int\frac{5}{x}dx+\int 3dx=6\int xdx-$$
$$-5\int\frac{1}{x}dx+3\int dx=6\cdot\frac{x^2}{2}-5\ln|x|+3x+C.$$

4. $$\int\frac{2xdx}{\cos^2(1-3x^2)}=\left|\begin{array}{l}1-3x^2=t\\(1-3x^2)'dx=dt\\-6xdx=dt\\xdx=-\frac{1}{6}dt\end{array}\right|=\int\frac{2\cdot(-\frac{1}{6})dt}{\cos^2 t}=$$
$$=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=-\frac{1}{3}tgt=-\frac{1}{3}tg(1-3x^2)+C.$$

5. $$\int\cos^3 x\cdot\sin x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\(\cos x)'dx=dt\\-\sin x dx=dt\\\sin x dx=-dt\end{array}\right|=\int t^3\cdot(-dt)=-\frac{t^4}{4}=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C.$$

6. $$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ (\ln x)' dx = dt \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt =$$

$$= \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

7. $$\int x\cdot 3^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = (x)' dx = dx \\ dv = 3^x dx; v = \int 3^x dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3}\cdot dx = \frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx =$$

$$= \frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\cdot \frac{3^x}{\ln 3} = \frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C.$$

8. $$\int 10x\cdot \ln x\cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = (\ln x)' dx = \dfrac{1}{x}\cdot dx \\ dv = 10xdx; v = \int 10xdx = 5x^2 \end{array} \right| =$$

$$= 5x^2\cdot \ln x - \int 5x^2\cdot \frac{1}{x} dx = 5x^2 \ln x -$$

$$- 5\int xdx = 5x^2\cdot \ln x - 5\frac{x^2}{2} = 5x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C.$$

9. $$\int x^2\cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{array} \right| = x^2\cdot e^x - \int e^x\cdot 2x\cdot dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 2x; du = 2dx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{array} \right| = x^2\cdot e^x - (2x\cdot e^x - \int e^x\cdot 2dx) = x^2\cdot e^x -$$

$$- 2x\cdot e^x + 2\int e^x dx = x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x =$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

9.3. Інтегрування виразів, що містять у знаменнику квадратний тричлен

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен ax^2+bx+c, зводиться до виділення повного квадрата із квадратного тричлена і використання формул:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$
2. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
3. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Використовуючи метод підстановки, вводиться заміна: $x \pm \frac{b}{2a} = t, dx = dt.$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}.$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику, одержимо:

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 13 = (x-2)^2 + 9$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \left| \begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{t}{3} = \frac{1}{3} arctg \frac{x-2}{3} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+5}.$

Розв'язання

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+5} = \left| \begin{matrix} x^2+4x+5 = x^2+2 \cdot 2x+4-4+5= \\ = (x+2)^2+1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{(x+1)dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t-2+1)dt}{t^2+1} =$$

$$= \int \frac{(t-1)dt}{t^2+1} = \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - arctgt = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| -$$
$$- arctg(x+2) + C.$$

9.4. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції

1. Для інтегрування виразів $\int \sin Ax \cdot \cos Bxdx$; $\int \sin Ax \sin Bxdx$; $\int \cos Ax \cos Bxdx$ *зручно користуватися такими формулами, які перетворюють добуток функцій у суму:*

$$\sin Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\sin(A+B)x + \sin(A-B)x);$$

$$\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x + \cos(A+B)x);$$

$$\sin Ax \sin Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x - \cos(A+B)x).$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin 5x \cos 3xdx$.

Розв'язання

$$\int \sin 5x \cos 3xdx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 8xdx + \frac{1}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

2. Для інтегрування виразів $\int \sin^P x \cos^K xdx$ *розглянемо два випадки:*

а) нехай p *і* k *–* ***парні числа****, тоді застосовуються формули пониження степеня:*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \cos^4 xdx$.

Розв'язання

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \left| \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \right| = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

б) якщо серед чисел p і k ***хоча б одне непарне****, то потрібно відокремити від непарного степеня один множник, застосувати формули* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *і ввести нову змінну* $\cos x = t$ *або* $\sin x = t$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$\int (1-t^2)\cdot t^2 \cdot (-dt) = \int (-t^2 + t^4)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

3. Для інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *де* $R(\sin x; \cos x)$ *означає, що над функціями* $\sin x$ *та* $\cos x$ *здійснюються операції в межах чотирьох арифметичних дій, застосовується універсальна тригонометрична підстановка* $t = tg\frac{x}{2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

тоді $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{c}t=tg\dfrac{x}{2},\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ x=2arctgt,\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

9.5. Інтегрування деяких типів ірраціональностей

При інтегруванні виразів, що містять дробові степені змінної (тобто ірраціональності) методом підстановки, зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу (раціоналізують інтеграл). Якщо підінтегральна функція є раціональним дробом відносно x^{α}, де α – дробове число, то в цьому випадку вводять нову змінну $t=x^{1/q}$, де q – спільний знаменник дробових показників степеня змінної x.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання

$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{4/3}-x^{5/4}}$, спільний знаменник степенів $\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}$ змінної x дорівнює 12; зробимо підстановку $x^{\frac{1}{12}}=t$, тоді $x=t^{12}, dx=12t^{11}dt, x^{\frac{1}{2}}=t^6, x^{\frac{4}{3}}=t^{16}, x^{\frac{5}{4}}=t^{15}$, маємо

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{4}}}=\int\frac{t^6\cdot12t^{11}dt}{t^{16}-t^{15}}=12\int\frac{t^{17}}{t^{15}(t-1)}dt=12\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=12\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=12\int\frac{t^2-1}{t-1}dt+12\int\frac{dt}{t-1}=12\int(t+1)dt+12\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=12\cdot\frac{t^2}{2}+12t+12\ln|t-1|=6t^2+12t+12\ln|t-1|=$$

$$=6\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^2+12x^{\frac{1}{12}}+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}-1\right|=6x^{\frac{1}{6}}+12x^{\frac{1}{12}}+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}-1\right|+C.$$

Приклади інтегрування виразів

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+17}} =$

$= \left| x^2-8x+25 = x^2-2\cdot 4x+4^2-4^2+25 = (x-4)^2-16+25 = (x-4)^2+9 \right| =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2+9}} = \left| \begin{matrix} x-4=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} =$

$= \ln\left| t+\sqrt{t^2+9} \right| + C = \ln\left| x-4+\sqrt{x^2-8x+17} \right| + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}} =$

$= \left| \begin{matrix} (2x-1)^{\frac{1}{4}}=t \\ 2x-1=t^4 \\ 2dx=4t^3dt \\ dx=2t^3dt \\ (2x-1)^{\frac{1}{2}}=t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^3dt}{t^2-t} = \int \frac{2t^3dt}{t(t-1)} =$

$= 2\int \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t-1} = 2\int \left(\frac{t^2-1}{t-1}+\frac{1}{t-1} \right) dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt =$

$= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1| \right) + C = t^2+2t+2\ln|t-1| + C =$

$= \left((2x-1)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + 2(2x-1)^{\frac{1}{4}} + 2\ln\left| (2x-1)^{\frac{1}{4}}-1 \right| + C =$

$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1 \right)^2 + C.$

3. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^3 x} =$

$= \int \frac{(\sin^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^3 x} =$

$= \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ (\cos x)' dx = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-t^2)^2(-dt)}{t^3} = -\int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^3} =$

$$= -\int\left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t\right)dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + 2\ln|t| - \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2t^2} + \ln|t|^2 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos^2 x| - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

9.6. Інтегрування найпростіших раціональних дробів

Означення. ***Найпростішими раціональними дробами*** *I, II, III, IV типу називаються правильні дроби вигляду:*

I тип – $\dfrac{A}{x-\alpha}$;

II тип – $\dfrac{B}{(x-\beta)^k}$, $(k \geq 2$, *ціле);*

III тип – $\dfrac{Dx+C}{x^2+2px+q}$, $(D<0)$;

IV тип – $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^2}$, $k \geq 2$, *ціле*, $D<0$.

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Інтеграли від найпростіших раціональних дробів I та II типів знаходять методом заміни змінної:

$$\text{I тип} - \int\frac{Adx}{x-\alpha} = A\int\frac{dx}{x-\alpha} = \begin{vmatrix} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = A\int\frac{dt}{t} =$$

$$= A\cdot\ln|t| = A\cdot\ln|x-\alpha| + C.$$

$$\text{II тип} - \int\frac{Bdx}{(x-\beta)^k} = B\int\frac{dx}{(x-\beta)^k} = \begin{vmatrix} x-\beta = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = B\int\frac{dt}{t^k} = B\int t^{-k}dt =$$

$$= B\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1} = \frac{B}{(1-k)t^{k-1}} = \frac{B}{(1-k)(x-\beta)^{k-1}} + C.$$

При інтегруванні найпростішого дробу III типу потрібно спочатку виділити в знаменнику повний квадрат, а потім той вираз, що стоїть під квадратом, замінити на нову змінну.

Отже, одержимо формулу:

$$\text{III тип} - \frac{Dx+C}{x^2+2px+q} = \frac{D}{2}\ln\left|x^2+2px+q\right| +$$

$$+\frac{C-Dp}{\sqrt{q-p^2}}arctg\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)+C.$$

Інтеграл від найпростішого дробу IV типу шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу III типу.

9.7. Інтегрування раціональних дробів методом невизначених коефіцієнтів

Означення. ***Раціональним дробом*** *називають вираз* $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, *де* $Q_m(x)$, $P_n(x)$ – *многочлени відповідних степенів.*

Якщо $m \geq n$, *то дріб неправильний; якщо* $m < n$, *то дріб правильний.*

Якщо дріб неправильний, то треба поділити чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів і одержати заданий дріб у вигляді суми многочлена $W(x)$ (ціла частина дробу) та правильного раціонального дробу (дробова частина неправильного дробу), тобто $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = W(x) + \frac{F^k(x)}{P_n(x)}$.

Приклад

Раціональний дріб розкласти на суму многочлена та правильного дробу.

а) $\frac{x^2+3x+1}{2x^3+4x+8}$, оскільки $n = 2$, $m = 3$ *і* $2 < 3$, то цей дріб правильний і його не можна розкласти на суму многочлена та правильного дробу.

б) $\frac{x^4+2x^3-3x+8}{x^2-4x+1}$, оскільки $n = 4$, $m = 2$ *і* $4 > 2$, то цей дріб неправильний і його можна розкласти на суму многочлена і правильного дробу.

Результат отримаємо за допомогою ділення чисельника на знаменник:

x^4+2x^3-3x+8	x^2-4x+1
$-$	$x^2+6x+23$
$x^4-4x^3+x^2$	
$6x^3-x^2-3x$	
$-$	
$6x^3-24x^2+6x$	
$23x^2-9x$	
$-$	
$23x^2-92x+23$	
$83x-23$	

Остаточно маємо:

$$\frac{x^4+2x^3-3x+8}{x^2-4x+1}=x^2+6x+23+\frac{83x-23}{x^2-4x+1}.$$

Сформулюємо без доведення теорему.

Теорема. *Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів типу I–IV, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.*

Розглянемо такі випадки.

1. ***Корені знаменника дійсні та різні*** $P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+\ldots+(x-\alpha_n)$

У цьому випадку дріб розкладається на суму найпростіших дробів I типу: $\frac{F_k(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}$,

де A_1, $A_2 \ldots A_n$ – невизначені коефіцієнти, які знаходять з одержаної тотожності.

2. ***Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні***, тобто $P_n(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k$, тоді цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I та II типу

$$\frac{F_k(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k},$$

де, $A, B_1, B_2,..., B_k$ – невизначені коефіцієнти, які знаходять з одержаної тотожності.

3. ***Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні,*** крім того, знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники $(D < 0)$:

$P_n(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^k (x^2 + 2px + q)^l$, тоді цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I. II, III, IV типів.

$$\frac{F_k(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + ... + \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{Dx+C}{x^2+2px+q} + ... + \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^l},$$

де $A, B_1,..., B_k, D, C, M, N$ – невизначені коефіцієнти, які знаходять з одержаної тотожності.

Інтегрування раціональних дробів методом невизначених коефіцієнтів пропонуємо проводити з використанням наступної послідовності.

Алгоритм методу невизначених коефіцієнтів

1. Перетворити цей дріб у правильний.
2. Перетворити знаменник у добуток найпростіших многочленів.
3. Записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів I–IV типів, де в чисельнику стоять невизначені коефіцієнти.
4. Звести суму найпростіших дробів до спільного знаменника й отримати СЛАР, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної.
5. Розв'язок СЛАР дає невизначені коефіцієнти.
6. Кінцевий результат отримуємо після обчислення інтегралів від многочлена і найпростіших дробів.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4} dx$.

Розв'язання

Підінтегральний дріб правильний, розкладаємо знаменник на множники $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, одержимо

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)} =$$

$$= \frac{Ax - 4A + Bx - B}{(x-1)(x-4)} = \frac{x(A+B)+(-4A-B)}{(x-1)(x-4)}.$$

Знаменники першого і останнього дробу рівні, тому прирівняємо їх чисельники:

$2x+1 = x(A+B)+(-4A-B)$ – ця рівність можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні, тобто складаємо СЛАР: $\begin{cases} A+B=2 \\ -4A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$. Розклад підінтегральної функції тепер має вигляд: $\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$. Інтегруючи цю рівність, маємо:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-4}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-4| =$$

$$= \ln|x-4|^3 - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{(x-4)^3}{x-1}\right| + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

Розв'язання

Підінтегральний дріб правильний, тому маємо $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$. Зведемо праву частину до спільного знаменника, одержимо:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x-x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+C)+x(A+B-2C)+(-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Маємо, що

$$0x^2 + x + 1 = x^2(A+C) + x(A+B-2C) + (-2A+2B+C)$$

тому $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ -2A+2B+C=1 \end{cases}; \begin{cases} A=\frac{1}{9} \\ B=\frac{2}{3} \\ C=-\frac{1}{9} \end{cases}$.

Остаточно отримаємо $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{\frac{1}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{9}}{x+2}$

Знайдемо інтеграл $\int\frac{(x+1)dx}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-$

$$-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{9}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{9}\ln|x+2|=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{2}{3(x-1)}+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{2x+5}{x^3-8}dx$.

Розв'язання

Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо знаменник в добуток множників $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ і представимо підінтегральну функцію у вигляді суми найпростіших дробів I і III з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{2x+5}{x^3-8}=\frac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Прирівняємо чисельники рівних дробів (першого і останнього) $2x+5=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)$,

$0\cdot x^2+2x+5=x^2(A+B)+x(2A-2B+C)+(4A-2C)$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x і одержимо систему рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=2, \\ 4A-2C=5 \end{cases} \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=-\frac{3}{4}. \\ C=-1 \end{cases}$$

Підінтегральний дріб матимемо такий вигляд:

$$\frac{2x+5}{x^3-8}=\frac{3/4}{x-2}+\frac{-3/4\,x-1}{x^2+2x+4}.$$

Знайдемо інтеграл:

$$\int\frac{2x+5}{x^3-8}dx=\int\frac{3/4}{x-2}dx+\int\frac{3/4\,x-1}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\int\frac{x+4/3}{(x+1)^2+3}dx=\left|\begin{matrix}x+1=t\\dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\int\frac{t+1/3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+3}=\left|\begin{matrix}t^2+3=u\\2tdt=du\\tdt=\frac{1}{2}du\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{8}\ln|u|-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\ln(x-2)^2-\ln(t^2+3)\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\frac{(x-2)^2}{t^2+3}-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+4}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

9.8. Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції

Існують функції, інтеграли від яких не виражаються через елементарні функції.

Наприклад, $\int\frac{\sin x}{x}dx$ (інтегральний синус), $\int\frac{\cos x}{x}dx$ (інтегральний косинус), $\int\frac{dx}{\ln x};\int\frac{e^x}{x}dx;\int e^{-x^2}dx$ (останній часто застосовують у теорії ймовірностей).

Такі інтеграли обчислюють за допомогою рядів або нескінченних добутків елементарних функцій.

9.9. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Означення. *Фігура, обмежена лініями* $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, *називається* ***криволінійною трапецією*** *(рис. 65).*

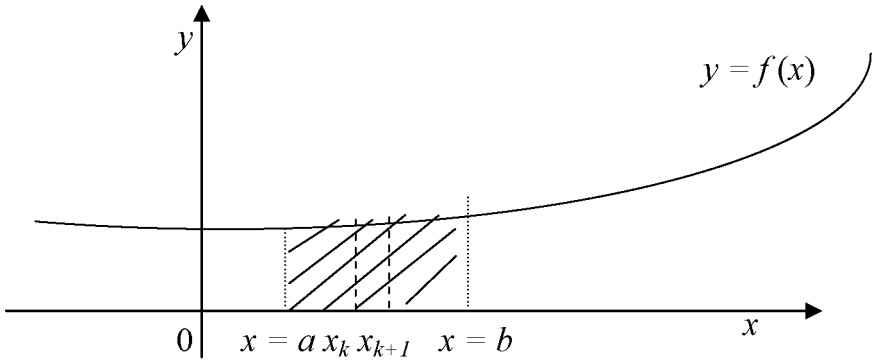


Рис. 65

Для обчислення площі криволінійної трапеції поділимо відрізок [a; b] на n частин так, що $a = x_0 < x_1 < ... x_k < ... x_n = b$.

Довжини цих частин позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Перпендикуляри до осі OX, проведені з точок поділу до перетину з кривою $y = f(x)$, розділяють усю площу на n-вузьких криволінійних трапецій. Замінимо кожну з цих трапецій прямокутником з основою Δx_k та висотою $f(c_k)$, $(x_{k-1} \le c_k \le x_k)$. Площа кожного такого прямокутника $f(c_k)\Delta x_k$. Сума площ усіх прямокутників $S = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. Площа криволінійної трапеції $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. Значення буде точніше, якщо перейти до границі, тобто $S = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Задача про обсяг випущеної продукції

Нехай функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва протягом часу.

Знайдемо обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу [0; T].

Якщо продуктивність не змінюється протягом деякого часу, то $f(t)$ – стала функція, а обсяг продукції ΔU, виробленої за проміжок часу Δt задається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$.

Розіб'ємо відрізок [0; T] на проміжки часу точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = T$.

Для величини обсягу продукції ΔU, виробленої за проміжок часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, маємо $\Delta U_i = f(c_i)\Delta t_i$, де $t_{i-1} \le c_i \le t_i$. Тоді обсяг продукції за проміжок часу [0; T] $U \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$. Значення буде точніше, якщо перейти до границі, тобто $U = \lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$.

9.10. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ задана на [a; b]. Розіб'ємо відрізок [a; b] на n частин так, щоб виконувалося співвідношення $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Означення. *У кожному проміжку* (x_{k-1}, x_k) *довжиною* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ *оберемо довільну точку* c_k *і обчислимо значення* $f(c_k)$. *Побудуємо суму* $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, *яку називають* ***інтегральною сумою*** *функції* $f(x)$ *на відрізку [a;b].*

Означення. *Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при* $\Delta x_k \to 0$ *незалежна від способу поділу відрізка [a;b] на частини та вибору точок* c_k, *то ця границя називається* ***визначеним інтегралом*** *від функції* $f(x)$ *на відрізку [a;b] і позначається* $\int_a^b f(x)dx$, *тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Якщо визначений інтеграл існує, то функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на відрізку [a; b], a і b – ***нижня та верхня межі інтегрування***, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування.

9.11. Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \ \ (C = const)$.

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі визначених інтегралів від кожного доданку $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm ... \int_a^b f_n(x)dx$.

3. Якщо змінити межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. Якщо $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$ і $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$, і для будь-якого $x \in [a;b]$, $f(x) \geq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$.

7. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$, m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції на цьому відрізку, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

8. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку існує точка C, для якої $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

9.12. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца

Означення. *Визначений інтеграл з постійною нижньою межею та змінною верхньою межею називають* ***інтегралом із змінною верхньою межею*** $\int_a^x f(t)dt$ *– це функція від x, тобто* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема. *Якщо* $f(x)$ *неперервна функція, то похідна визначеного інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі дорівнює значенню цієї функції від цієї верхньої межі*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dx \right)' = f(x).$$

Доведення

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді $\Phi(x)$ одержить приріст

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

За властивостями визначеного інтеграла, з неперервності функції $f(x)$ випливає існування точки $c \in [x, x+\Delta x]$, такої, що $\Delta\Phi(x) = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$.

За означенням похідної, якщо $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, тому $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$, що й треба було довести.

Теорема. *Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної, обчисленої для верхньої та нижньої меж інтегрування, тобто якщо* $F(x)$ *є первісна функції* $f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Цю формулу називають ***формулою Ньютона-Лейбніца.***

Доведення

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. За попередньою теоремою $\int_a^x f(t)dt$ – також первісна функції $f(x)$, але дві первісні відрізняються лише на сталий доданок C, тобто $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

Нехай $x = a$, тоді $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0$, $F(a) + C = 0$, $-F(a) = C$.

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Нехай $x = b$, тоді $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Замінимо змінну інтегрування t на x, одержимо $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, що й треба було довести.

Приклад. Обчислити інтеграли: а) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int_{-1}^2 3x^2 dx$.

Розв'язання

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

б) $\int_{-1}^2 3x^2 dx = 3\int_{-1}^2 x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = 2^3 - (-1) = 9$.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Заміна змінної у визначеному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \\ \alpha = \varphi(a) \\ \beta = \varphi(b) \\ \alpha \le t \le \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Приклад. Знайти інтеграли, використовуючи формули заміни змінної а) $\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2}$; б) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Розв'язання

а) $\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{c} t = 1 + x^2 \\ dt = 2xdx \\ \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2$.

б) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \left| \begin{array}{cc} t = \sqrt{1+x} & dx = 2tdt \\ t^2 = 1 + x & \alpha = \sqrt{1+0} = 1 \\ x = t^2 - 1 & \beta = \sqrt{1+3} = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 (t^2 - 1)2t^2 dt =$

$$= 2\int_1^2 (t^4 - t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = 7\frac{11}{15}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі здійснюється за формулою $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU$.

Приклад. Знайти інтеграли: а) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$; б) $\int_1^4 xe^x dx$.

Розв'язання

а) $$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx =$$

$$= (-\pi)\cdot(-1) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

б) $$\int_1^4 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_1^4 - \int_1^4 e^x dx =$$

$$= 4e^4 - e - e^x\Big|_1^4 = 4e^4 - e - e^4 + e = 3e^4.$$

Геометричне застосування визначеного інтеграла

Геометричне застосування визначеного інтеграла – це знаходження площ фігур, обмежених лініями (рис. 66, 67).

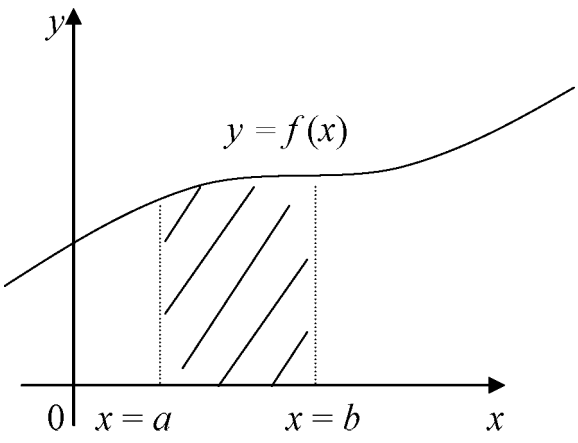


Рис. 66

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

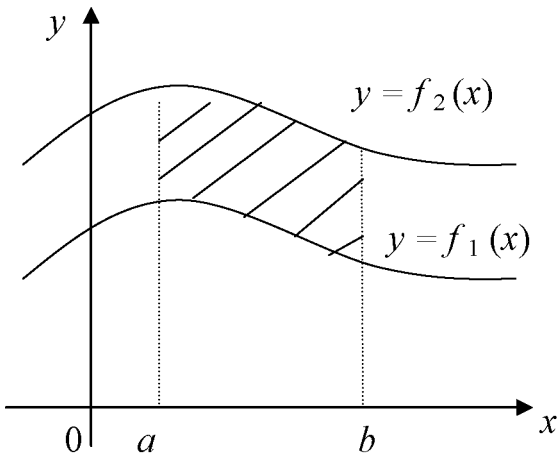


Рис. 67

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

Приклад. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = e^x,\ y = e,\ x = 0;$ б) $y = \frac{4}{x};\ y = 5 - x.$

Розв'язання

а) Побудуємо фігуру обмежену лініями (рис. 68).

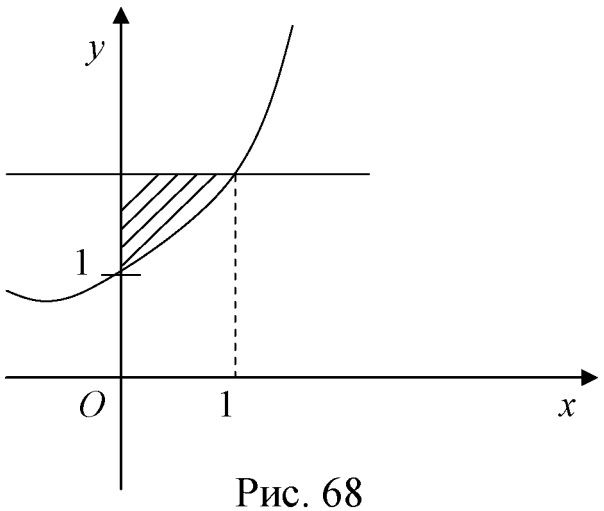


Рис. 68

За формулою площі фігури, обмеженої лініями, одержимо

$$S = \int_0^1 (e - e^x)dx = (e \cdot x - e^x)\Big|_0^1 = e - e - 0 + e^0 = 1 \text{ (кв. од.).}$$

б) Виконаємо малюнок (рис. 69).

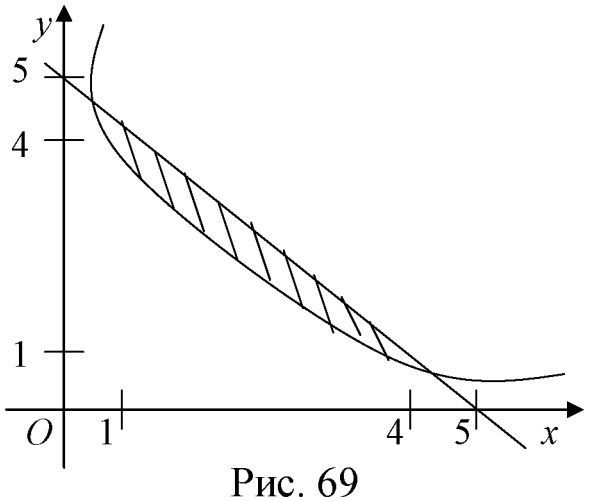


Рис. 69

Знайдемо точки перетину ліній $y = \frac{4}{x}$ та $y = 5 - x$, розв'язавши рівняння.

$$\frac{4}{x} = 5 - x,\ \ 4 = 5x - x^2,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 4.$$

Використовуючи формулу площі, одержимо

$$S=\int_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right)\Big|_1^4=20-8-4\ln 4-5+\frac{1}{2}+0=7\frac{1}{2}-4\ln 4 \text{ (кв. од.)}.$$

9.13. Метод наближеного обчислення визначеного інтеграла

Якщо відрізок інтегрування $[a;b]$ поділити на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і позначити c_k середню точку відрізка $[x_{k-1}, x_k]$, то наближене значення визначеного інтеграла можна обчислити за формулою $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\left(f(c_1)+f(c_2)+...+f(c_n)\right)$, яку називають ***формулою прямокутників***.

Або за формулою $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$, яку називають ***формулою трапецій***.

Якщо відрізок інтегрування $[a;b]$ поділити на парну кількість рівних частин $(n=2m)$ і позначити $y_k=f(x_k)$, де $x_k=a+\Delta x\cdot k$ – точки ділення, $k=0, 1, 2, ..., n$, тоді наближене значення інтеграла можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6m}\left(f(a)+f(b)+2f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n-2})\right)+$$
$$+4\left(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1})\right),$$

яку називають формулою ***Сімпсона або парабол.***

В усіх формулах значення буде точніше при зростанні n і зменшенні Δx.

Вказані формули використовують у тому випадку, коли інтеграл у скінченому вигляді не береться.

Приклад. Знайти значення $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ з кроком 0, 2.

Розв'язання

Знайдемо $f(0)=e^{-0}=1$

$$f(1)=e^{-1}=0{,}368,$$
$$f(x_1)=f(0{,}2)=e^{-0{,}04}=0{,}961,$$

$$f(x_2) = f(0{,}4) = e^{-0{,}16} = 0{,}85,$$
$$f(x_3) = f(0{,}6) = e^{-0{,}36} = 0{,}698,$$
$$f(x_4) = f(0{,}8) = e^{-0{,}64} = 0{,}527.$$

За формулою трапецій маємо

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}2\left(\frac{1+0{,}368}{2} + 0{,}961 + 0{,}852 + 0{,}698 + 0{,}527\right) = 0{,}2 \cdot 3{,}722 = 0{,}74.$$

9.14. Визначений інтеграл у економічних задачах

1. Знайти кількість продукції Q, виробленої за 8 годин, якщо продуктивність праці змінюється за законом $g = -0{,}6t^2 + 4{,}8t + 9$.

Розв'язання

$$Q = \int_0^8 (-0{,}6t^2 + 4{,}8t + 9)dt = (-0{,}2t^3 + 2{,}4t^2 + 9t)\Big|_0^8 = 123{,}8 \text{ (одиниць)}.$$

2. Функція граничних витрат має вигляд $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1 000 до 1 500 одиниць.

Розв'язання

$$\int_{1000}^{1500} V'(x)dx = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)dx = (23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2})\Big|_{1000}^{1500} = 23{,}5 \cdot 1500 -$$
$$- \frac{0{,}01 \cdot 1500^2}{2} - (23{,}5 \cdot 1000 - 0{,}005 \cdot 1000^2) = 5500 \text{ (у. о.)}.$$

3. Коефіцієнт розподілу прибуткового податку.

Ступінь нерівності в розподілі доходів населення ілюструє крива Лоренца (рис. 70). Це графік, в якому на осі OX відкладено відсоток населення від найбідніших до найбагатших, а по осі $OУ$ – відсоток одержаного ними доходу.

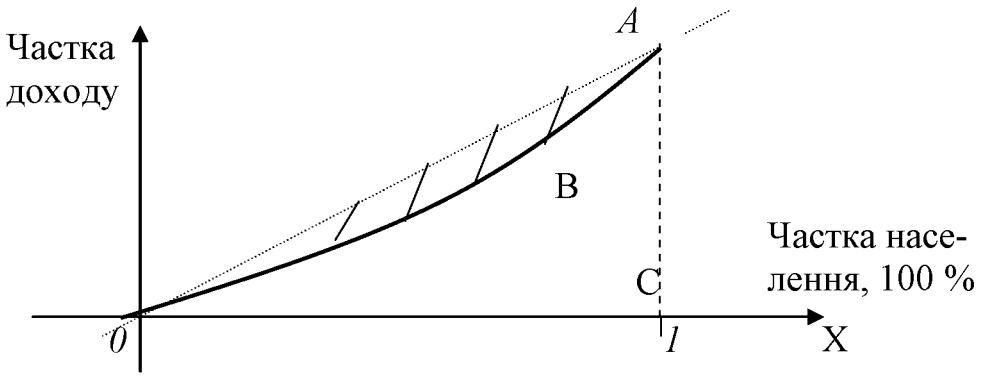


Рис. 70

Заштрихована частина показує різницю між абсолютно справедливим розподілом OA і фактичним OBA, а відношення S_{OBA} до S_{OAC} називається *коефіцієнтом Джині.*

Нехай крива Лоренца задана рівнянням $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$.

Тоді $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, а також

$$S_{OBA} = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 \left(x - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}x \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2 \right) dx = \frac{15}{16}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{15}{32}.$$

Коефіцієнт Джині $K = \frac{S_{OBA}}{S_{OAC}} = \frac{15}{32} \cdot 2 = \frac{15}{16}$.

9.15. Поняття про невласні інтеграли

Означення. *За теоремою про існування визначеного інтеграла, цей інтеграл існує, якщо:*

1) відрізок інтегрування [a;b] скінчений;

2) підінтегральна функція $f(x)$ неперервна або обмежена і має скінчену кількість точок розриву.

Якщо хоча б одна з умов не виконується, то визначений інтеграл називають ***невласним.***

Якщо не виконується перша умова, тобто $a = -\infty$ або $b = \infty$, або $a = -\infty$ і $b = \infty$, то інтеграл називають ***невласним інтегралом з нескінченними межами:***

$$\int_a^{\infty} f(x)dx;\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx;\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо не виконується друга умова, то підінтегральна функція $f(x)$ має точки розриву другого роду на відрізку [a; b]. У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називають ***невласним інтегралом від розривної функції або від функції, необмеженої в точках відрізку інтегрування***.

9.16. Невласні інтеграли першого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\infty)$ й інтегрована на довільному відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < \infty$.

Означення. *Якщо існує скінчена границя* $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, *то її називають* ***невласним інтегралом першого роду*** *і позначають*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Дослідження невласних інтегралів першого роду проводиться шляхом використання граничного переходу до визначеного інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$,

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називають ***збіжним***, і він дорівнює своїй границі. Функцію $f(x)$ при цьому називають ***інтегрованою на даному проміжку.***

Якщо хоча б одна границя не існує або дорівнює нескінченності, то інтеграл називають ***розбіжним***, а функцію $f(x)$ – ***не інтегрованою.***

Геометричний зміст невласного інтеграла такого типу – це площа нескінченної області, обмеженої функцією $f(x)$, віссю *OX* та прямою $x = a$ або $x = b$.

Приклад. Дослідити невласні інтеграли на збіжність

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^0\frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x dx$.

Розв'язання

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$

Отже, інтеграл існує, збіжний і дорівнює одиниці.

б) $\int\limits_{-\infty}^0\frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Невласний інтеграл існує, збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0} e^x dx\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(\int\limits_{0}^{b} e^x dx\right) =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(e^x\Big|_0^b\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(e^b - e^0\right) = 1 - 0 + \infty - 1 = \infty.$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

Інтеграл виду $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$ називають ***інтегралом Пуассона***, він відіграє важливу роль у теорії ймовірностей. Графіком підінтегральної функції $y = e^{-x^2}$ є *крива Гаусса* (рис. 71).

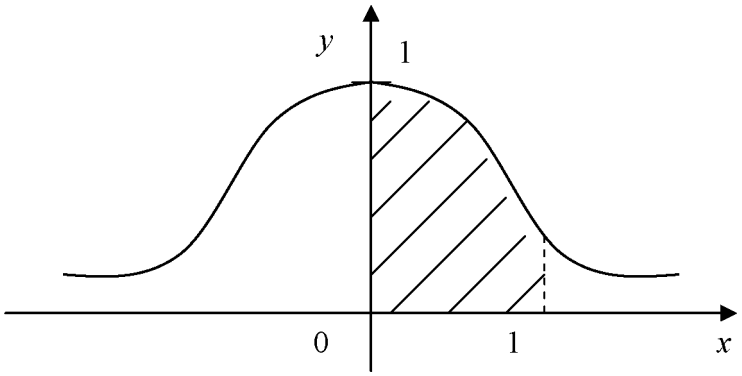


Рис. 71

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2} dx + \int\limits_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Перший інтеграл не є невласним він дорівнює площі під кривою Гаусса на відрізку [0; 1] і виражається скінченим числом.

Для дослідження другого інтеграла розглянемо спочатку

$$\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x} dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b} e^{-x} dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\bar{e}^x\Big|_1^b\right) = \frac{1}{e}.$$

Цей інтеграл збіжний, але $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$ при $x \ge 1$. Отже, інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ також збіжний. Враховуючи симетрію кривої Гаусса, $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$ також збіжний, отже, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ збігається і $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

У розглянутих прикладах обчислення невласних інтегралів базується на означенні. Розглянемо деякі ознаки збіжності невласних інтегралів.

Теорема. *Якщо на проміжку* $[a;+\infty)$ *функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні і задовольняють умову* $0 \le f(x) \le g(x)$, *то із збіжності інтеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *випливає збіжність* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *а із розбіжностей* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *випливає розбіжність* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Наприклад, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+5}$ збігається, оскільки збігається інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ і виконується нерівність $0 < \frac{1}{x^2+5} < \frac{1}{x^2}$.

Теорема. *Якщо існує* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0,$ *то інтеграли* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *та* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язання

Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 1.$

Тому за теоремою 2 ряд збігається.

Теорема. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то збігається й інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

При цьому $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають ***абсолютно збіжним***, а функцію $f(x)$ ***абсолютно інтегрованою на проміжку***.

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – розбіжний, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають ***умовно збіжним***.

9.17. Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ називають ***особливою точкою функції*** $y = f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$, при $x \to b - 0$.

Означення. *Якщо існує скінчена границя* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, *то її називають* ***невласним інтегралом другого роду*** *і позначають* $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ необмежена на $[a; b]$, то її точки розриву можуть бути на лівому кінці або на правому кінці, або в середині проміжку інтегрування.

У цих випадках невласні інтеграли визначаються:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо границі існують, то їх і називають невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Якщо границі не існують або є нескінченними, то невласний інтеграл ***розбіжний.***

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(2x^{\frac{1}{2}} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$

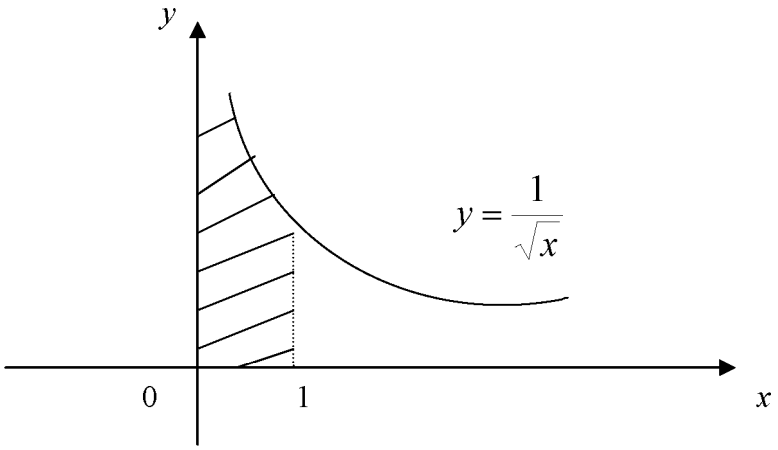


Рис. 72

Невласний інтеграл існує, скінчений і дорівнює 2.

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.$

Невласний інтеграл розбіжний.

Сформулюємо ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні на проміжку* $(a; b)$, *мають особливу точку* $x = b$ *і задовольняють умову* $0 \le f(x) \le g(x)$, *то із збіжності* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *випливає збіжність* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *а з розбіжності інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *– розбіжність* $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Наприклад, оскільки збігається інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, то збігається і $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+5x^2}$, бо $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+5x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, для довільних $x \in (0;\ 1]$.

Теорема. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *на проміжку* $[a;b)$ *неперервні, додатні, а в особливій точці* $x = b$ *існує* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$, *то інтеграли* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *і* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *одночасно збіжні або розбіжні.*

Теорема. *Якщо* $x = b$ *особлива точка функції* $f(x)$ *і* $\int_a^b |f(x)|dx$ *збігається, то* $\int_a^b f(x)dx$ *також збігається.*

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

а) $\int x^4(1-x)^2\,dx$;

б) $\int (x+1)(3x-\frac{1}{x})dx$;

в) $\int \frac{x+4x^3-1}{2x}dx$;

г) $\int (x\cdot \ln 5+\frac{1}{x\ln 2})dx$;

д) $\int \frac{4dx}{5+x^2}$.

2. Знайти інтеграли методом заміни змінної:

а) $\int 3\cdot e^{1-5x}dx$;

б) $\int \frac{2dx}{\sin^2(3x-\frac{\Pi}{4})}$;

в) $\int tg6xdx$;

г) $\int \sqrt{1-\sin x}\cos xdx$;

д) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

3. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int x\cdot e^{-x}dx$;

б) $\int arctgxdx$;

в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

г) $\int (3-4x)\cdot \sin 2xdx$;

д) $\int x\cdot \arccos xdx$;

е) $\int \cos 3x\cdot e^x dx$.

4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\int \frac{xdx}{x^2 + 6x - 7}$; г) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}\right)\sqrt{x+3}}$;

д) $\int \cos^5 x dx$; е) $\int \cos 6x \cdot \cos 8x dx$.

5. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - 7x^2 + 12x}$;

б) $\int \frac{dx}{x^3 + 27}$;

в) $\int \frac{x^6 dx}{x^4 - 16}$.

6. Обчислити інтеграли за формулою Ньютона-Лейбниця:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$; б) $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$.

7. Обчислити інтеграли методом підстановки:

а) $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{1 + x^2}$; б) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$.

8. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int_{0}^{e} x^2 \ln x dx$; б) $\int_{0}^{\pi/2} x \cos 2x dx$.

9. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$;

б) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 + 3x - 1$.

10. Обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів з нескінченними межами інтегрування:

а) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$; б) $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^3}$; в) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.

11. Обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів від необмежених функцій:

а) $\int_{0}^{1} x \ln x dx$; б) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$; в) $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Тема 10. Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності, які притаманні масовим випадковим явищам. При цьому явища вивчають в абстрактній формі, тобто незалежно від їхньої конкретної природи.

Теорія ймовірностей розглядає не самі реальні явища, а їхні спрощені схеми – математичні моделі випадкових явищ.

Предметом теорії ймовірностей є математичні моделі випадкових явищ.

Мета теорії ймовірностей – це здійснення прогнозу в області випадкових явищ, вплив на хід цих явищ, їх контроль та обмеження дії випадковості.

10.1. Класифікація подій. Операції над подіями

Основні поняття теорії ймовірностей – це стохастичний експеримент, випадкова подія, простір елементарних подій.

Означення. ***Експериментом*** *(дослідом, спробою) називають послідовність операцій, виконувані з дотриманням певного комплексу умов.*

Означення. ***Стохастичним експериментом*** *називають експеримент, який можна повторювати будь-яку кількість разів, але результати якого не можна передбачити завчасно.*

Означення. ***Подією*** *називають наслідок експерименту. Події бувають достовірні, неможливі та випадкові.*

Означення. ***Випадковою подією*** *(подією) називають будь-яку сукупність випадкових наслідків. Подія може складатися з одного наслідку. Події позначають A, B,…..* A_1, A_2….

Приклад

Дослід	**Подія**
Виготовлення деталей	А – взята якісна деталь
Підкидання монети	А – випав герб
Складання іспиту	А – іспит не склав

Означення. ***Вірогідною (достовірною)*** *називають подію, яка внаслідок певного експерименту точно відбудеться (випадання цифри або герба при підкиданні монети, зміна дня ніччю тощо).*

Означення. ***Неможливою*** *називають подію, яка, напевно, не відбудеться під час випробування (випадання сімки під час підкидання грального кубика).*

Означення. ***Протилежною*** *до події A називають подію $\bar{A}$, якщо вона настає тоді, коли не настає подія A (рис. 1).*

Приклад

A – поява студента на парі	$\bar{A}$ – неявка студента на парі
A – чекаю дзвоника	$\bar{A}$ – не чекаю дзвоника
A – виплата стипендії	$\bar{A}$ – невиплата стипендії
A – сплата податків	$\bar{A}$ – несплата податків

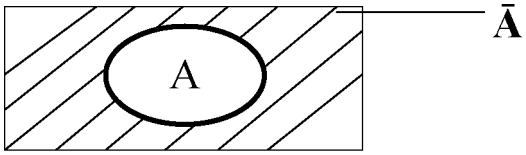


Рис. 73

Означення. ***Несумісними*** *називаються події, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному й тому ж випробуванні. (Поява шістки при підкиданні грального кубика виключає появу граней з іншими числами в одному підкиданні).*

Приклад

Випробування	**Події**
Іспит з вищої математики	A – отримав «5» B – отримав «4» C – отримав «3» D – не склав

Означення. ***Сумісними*** *називаються події, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно).*

Приклад. Два стрільці стріляють у мішень. Події A – влучив перший, B – влучив другий, сумісні.

Означення. ***Рівноможливі події*** *– якщо немає причин стверджувати, що будь-яка одна з них можливіша за іншу. (Підкидання монет: А – випав герб, В – ні.)*

Означення. ***Випадкові події*** $A_1, A_2, \ldots A_6$ *утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробувань одна з них з'явиться обов'язково. (Підкидають кубик, події* A_1 *– випала одиниця,* A_2 *– випала двійка,* A_6 *– випала шістка* $A_1, A_2, \ldots A_6$*.)*

Означення. ***Елементарні наслідки (події)*** *– це такі, які не можна поділити на більш прості (*$\omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_n$*).*

Означення. *Множину всіх можливих елементарних подій називають* ***простором*** *елементарних подій Ω. (Два рази підкидують монету:* $\Omega = \{(Г, Г), (Г, Н), (Н, Г), Н,Н)\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$*).*

Простір елементарних подій називають:

– скінченим (злічена множина елементів, можна пронумерувати);

– нескінченим (незліченим).

10.2. Операції над подіями

Означення. ***Сумою подій*** *А та В називають подію С, яка настає тоді, коли настає хоча б одна із згадуваних подій, А або В,* $A + B = C$, $A \cup B = C$ *(об'єднання).*

A	**B**	**A + B = C**
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–

«+» – подія відбулась

«–» – подія не відбулась

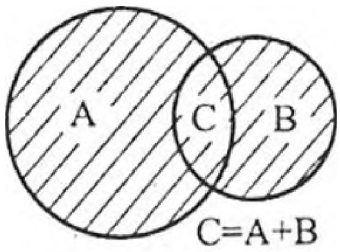


Рис. 74

Означення. ***Добутком*** *(перерізом) подій A та B називається подія C = AB = A ∩ B, яка настає тоді, коли відбуваються обидві події A і B.*

A	**B**	**A B = C**
+	+	+
–	+	–
+	–	–
–	–	–

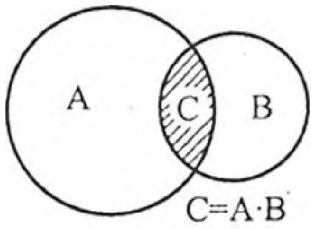


Рис. 75

Означення. ***Різницею*** *A\B = A – B називається подія, яка виконується тоді, коли подія A відбудеться, а подія B – ні (рис. 4).*

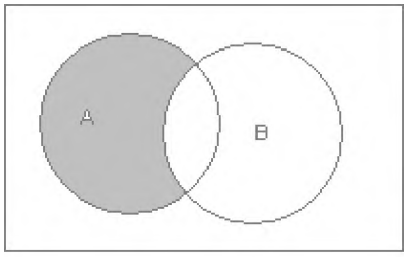


Рис. 76

Приклад. Дана множина однозначних чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Дослід: навмання беруть одне число.

Події: A – взяте число кратне 2.

B – взяте число кратне 3.

Знайти: A + B, A – B, A · B.

A = { 2,4,6,8} B = { 3,6,9}

A + B = { 2,3,4,6,8,9}

A \ B = { 2,4,8}

A · B= { 6}

10.3. Класичне означення ймовірності

У класичній моделі теорії ймовірностей вважають, що:

1. Множина елементарних подій (наслідків) одного випробування $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_n\}$ скінчена й утворює повну групу несумісних подій.

2. З кожним елементарним наслідком ω_j можна пов'язати невід'ємне число p_j, яке називається ймовірністю цього наслідку, причому $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$.

3. Ймовірність P(A) настання події A, яка полягає в тому, що настане одна з елементарних подій $\omega_i, \omega_j \ldots \omega_s$, дорівнює сумі ймовірностей цих подій $P(A) = p_i + p_j + \ldots p_s$.

4. Події $\omega_i, \omega_j \ldots \omega_s$ називають такими, що сприяють події A.

5. Якщо події $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ рівноймовірні, тобто $p_1 = p_2 = \ldots p_n$, то $\mathbf{P(A)} = \frac{m}{n}$, де m – число наслідків, що сприяють події *A*; n – число всіх рівно можливих наслідків.

Означення. ***Ймовірністю випадкової події A*** *називається число P(A), яке дорівнює відношенню числа подій, що сприяють події A до числа всіх можливих несумісних подій, які утворюють повну групу.*

Для кожної випадкової події $A \subset \Omega$:

1) $0 \le P(A) \le 1$;
2) $P(A) = 0$, подія A – неможлива;
3) $P(A) = 1$, подія A – вірогідна (достовірна).

Приклади

1. У групі 30 студентів. Після першої сесії – 6 відмінників. Яка ймовірність того, що навмання обраний студент відмінник?

$$n = 30, m = 6, P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

2. Кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що з'явилось число кратне 3.

$$n = 6,\ m = 2,\ P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

10.4. Статистичне та геометричне означення ймовірності

Означення. ***Ймовірність*** *випадкової події А дорівнює відношенню міри А до міри Ω.* $P(A) = \frac{mes\ A}{mes\ \Omega}$, *mes – міра довжини, площі, об'єму.*

Означення. ***Геометрична ймовірність*** *– ймовірність попадання події (точки) в область (відрізка, частини, площини, об'єму).*

Приклад

Два туристичних пароплава повинні причалити до одного причалу. Час прибуття обох пароплавів рівноможливий протягом доби. Визначити ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого дорівнює 1 год., а другого 2 год.

Нехай x, y – час прибуття пароплаву, тоді $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$

Сприятливі значення: $x - y \le 2$, $y - x \le 1$.

Побудувати область:

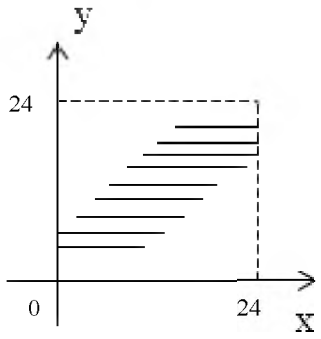


Рис. 77

Відношення площі заштрихованої частини до площі квадрата, сторони якого 24 дорівнює ймовірності:

$$P(A) = \frac{24*24-0,5*23*23-0,5*22*22}{24*24} = 0,121.$$

Статистичне означення ймовірності

Означення. ***Відносною частотою****, або частістю появи події А називається відношення числа випробувань, у яких подія А з'явилась до числа фактично виконаних випробувань.*

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість випробувань, де з'явилась подія А, n – кількість усіх випробувань.

Частість має властивість стійкості: при великій кількості випробувань частість змінюється досить мало, коливаючись біля деякого постійного числа – ймовірності появи цієї події.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A)$$

Означення. ***Статистична ймовірність*** *– це відносна частота (частість) або число близьке до неї.*

Дослід	**Подія**	**Дослідник**	**n**	**Відносна частота**
Підкидання монети	Випадання герба	Бюфон Романовський Пірсон Фішер	4040 80640 24000 10000	0,50693 0,4923 0,5005 0,4979

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(A) = lim_{n\to\infty}\ W(A)$$

Зауваження. *Ймовірність події P(A) обчислюється до випробування, а частість $W(A)$ обчислюється після випробувань.*

10.5. Елементи комбінаторики

Для знаходження m та n у класичному означенні ймовірності використовують: перестановки, розміщення, сполучення (комбінації, сполуки).

Означення. ***Перестановками*** *називають комбінації або групи, що складаються з n елементів і відрізняються порядком їх розміщення.*

$$P_n = n!,\ \ 0! = 1,\ \ 1! = 1$$

Приклад. З трьох букв a, b, c може бути $P_3 = 3! = 6$ перестановок abc, bac, acb….

Означення. ***Розміщеннями*** *називаються комбінації складені з n різних елементів по k елементів, які відрізняються або самими елементами, або їхнім порядком.*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad A_n^n = P_n = n!$$

Приклад. *З чотирьох букв a, b, c, d можна скласти, обираючи по дві*

$$A_n^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12 \text{ розміщень } \text{ab, ba, ac, … .}$$

Означення. ***Сполученнями*** *називаються комбінації, складені з n різних елементів по k в кожній, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}; \qquad C_n^0 = 1; \qquad C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = n; \qquad C_n^{n-1} = n.$$

Приклад. З чотирьох букв по дві можна скласти (порядок не має значення).

$$C_n^k = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6 \text{ сполучень}$$

Приклади.

1. Скількома способами можна обрати 3 чергових з 30 студентів?

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{27!3!} = 4060.$$

2. Скількома способами можна обрати профорга, культорга, старосту?

$$A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = 24 * 360 = 8640.$$

Розміщення, перестановки і комбінації пов'язані рівностями:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{A_n^k}{P_k} \text{ або } A_n^k = P_k C_n^k.$$

Перестановки з повторенням. *Якщо серед n-елементів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому кількість різних перестановок буде менше n. Якщо серед елементів множини з n елементів n_1 – елементи I-го типу, n_2 – елементи II-го типу, n_k – k-го типу, то число перестановок такої множини:*

$$P_n(n_1, n_2 \dots n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Розміщення з повторенням *з n елементів по k елементів називається будь-яка впорядкована k – множина виду* $(a_1 \dots a_k)$*, де* $a_1 \dots a_k$ *– елементи множини не обов'язково різні.*

Число розміщень з повтореннями (k може бути > n). $\bar{A}_n^k = n^k$.

Розміщення з повторенням з n елементів по k елементів називають також k – вибірками з поверненнями з n - множини.

Приклад. Код замка складається з 6 цифр. Загальна кількість усіх можливих наборів з шести цифр дорівнює числу розміщень з 10 з поверненням $\bar{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$.

Означення. ***Комбінації з повтореннями*** *з n елементів по k елементів називають будь-яку k-множину виду* $\{a_1, a_2 \dots a_k\}$, $a_1, a_2 \dots a_k$ *– елементи множини не обов'язково різні (k може бути > n).*

$$C_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Приклад. Кількість способів, якими можна обрати:

1) шість цифр з десяти

$$C_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = \frac{15!}{6! \cdot 10!} = 5005;$$

2) десять цифр з шести

$$C_6^{10} = C_{6+10-1}^{10} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3003.$$

При розв'язанні задач комбінаторики використовують:

1. Правило суми: Якщо об'єкт А можна вибрати n способами, а об'єкт В з цієї ж сукупності m способами, то обрати А або В можна m + n способами.

2. Правило добутку: Якщо об'єкт А із сукупності можна обрати n способами, а після вибору об'єкт В – m способами, то пара об'єктів АВ у вказаному порядку m· n способами.

Приклад

У партії 10 деталей. З них 7 якісних. Знайти ймовірність того, що із 6 взятих деталей 4 якісні.

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = 0{,}5$$

Приклад

У ящику 4 яблука I сорту, 5 яблук II сорту. Навмання беруть два. Знайти ймовірність того, що яблука різних сортів.

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{\frac{4!}{3!} \cdot \frac{5!}{4!}}{\frac{9!}{2! \cdot 7!}} = \frac{5}{54}.$$

10.6. Формули додавання ймовірностей несумісних подій

Означення. *Події називаються* ***несумісними,*** *якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.*

Приклад. У ящику є стандартні і нестандартні деталі. А – взята деталь стандартна, В – взята деталь нестандартна.

Теорема. *Ймовірність появи будь-якої з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій* $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Приклад. Стрілок стріляє по мішені, розділеній на три частини. Ймовірність попадання в першу частину 0,45, у другу – 0,35. Знайти ймовірність того, що стрілок попаде чи то в першу, чи то в другу область.

$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80.$

Наслідок

Сума ймовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$, звідки $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Приклад. Ймовірність одержання повідомлення від певної особи протягом доби 0,25. Знайти ймовірність того, що повідомлення від цієї особи протягом доби не буде одержано.

Нехай подія А – одержання повідомлення протягом доби: $P(A) = 0{,}25$.

Подія $\bar{A}$ – протягом доби повідомлення не одержано. $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Теорема. *Якщо випадкові події* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі їх ймовірностей*

$P(A_1, + A_2 + \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Приклад. Серед автобусів № 3, № 19, № 4 попутними є № 3 і № 4. Яка ймовірність того, що першим прийде потрібний автобус, якщо на лінії працює 10, 15 і 25 машин. Довжини маршрутів однакові.

$$P(A) = \frac{10}{50},\ P(B) = \frac{25}{50},\ P(A+B) = \frac{10}{50} + \frac{25}{50} = \frac{35}{50} = 0,7.$$

Теорема. *Сума ймовірностей повної групи подій дорівнює одиниці.*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

10.7. Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність

Означення. *Випадкові події А та В називають* ***залежними****, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи другої події.*

Означення. *Якщо ймовірність появи однієї з подій не залежить від появи або не появи другої, то такі події називають* ***незалежними****.*

Означення. *Ймовірність події В, обчислена при умові появи події А, називають умовною ймовірністю події В і позначають* $P_A(B)$.

Приклад. В урні 10 кульок: 3 білих і 7 чорних. Навмання беруть дві кульки. Нехай подія А – взята куля біла, подія В – взята куля чорна.

Якщо кулю, яку беруть першою, повертають до урни, то ймовірність появи другої кулі не залежить від того, яка взята перша куля.

Якщо перша куля не повертається до урни, то ймовірність другої події залежить від результату першого випробування.

Якщо першою взяли білу, то залишилося 2 білих і 7 чорних кульок, тому $P_A(B) = \frac{7}{9}$.

Якщо першою взяли чорну, то залишилось 3 білих і 6 чорних кульок, то $P_B(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Зауваження. Якщо події А та В незалежні, то умовна ймовірність дорівнює безумовній $P_A(B) = P(B)$.

10.8. Множення ймовірностей незалежних подій

Теорема. *Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.* $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Приклад. В одному ящику 4 білих і 8 чорних куль. У другому 3 білих і 9 чорних. З кожного ящика беруть по 1 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

Нехай подія A – взята біла куля з першого ящика, B – взята біла куля з другого ящика.

$$P(A) = \frac{4}{12}, \quad P(B) = \frac{3}{12}$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

Узагальнення теореми. *Ймовірність сумісної появи незалежних подій у сукупності дорівнює добутку ймовірностей цих подій.*

$$P(A_1, A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

10.9. Множення ймовірностей залежних подій

Теорема. Ймовірність одночасної появи двох випадкових подій А і В дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність іншої обчислену в припущені, що – перша подія відбулася $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Приклад. В ящику 12 деталей, з них 8 стандартних. Беруть 2 деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі стандартні.

Нехай подія A – взята перша деталь стандартна, B – взята друга деталь стандартна.

$$P(A) = \frac{8}{12}, \quad P_A(B) = \frac{7}{11}$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} = 0{,}42.$$

Узагальнення теореми. *Ймовірність одночасної появи кількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших, причому ймовірність кожної наступної обчислюється в припущені, що всі попередні події вже з'явилися.*

$$P(A_1, A_2, \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \ldots P_{A_1A_{n-1}}(A_n)$$

Порядок подій може бути довільний.

Приклад. Студент знає 20 з 25 питань програми іспиту з теорії ймовірностей. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три запитання, які він отримав на іспиті.

Нехай подія A_1 – студент знає відповідь на перше запитання.

Подія A_2 – студент знає відповідь на друге запитання.

Подія A_3 – студент знає відповідь на третє запитання.

Подія В – студент дасть правильну відповідь на три запитання.

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

За теоремою добутку:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} = 0{,}4956.$$

10.10. Ймовірність появи хоча б однієї події

Нехай є n сумісних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_n$. Позначимо подію А – з'явиться хоча б одна з цих подій, тоді $\bar{A}$ – полягає в тому, що події $A_1, A_2, \ldots A_n$ не з'являться, тобто $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$.

Тоді події А та $\bar{A}$ утворюють повну групу подій, тобто $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, $P(A) = 1 - (\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n)$.

За цією формулою обчислюють ймовірність появи хоча б однієї випадкової події .

Приклад. Ймовірність влучення в мішень першого стрільця 0,7, другого – 0,8, а третього – 0,9. Знайти ймовірність влучення хоча б одного стрільця.

Позначимо події: A_1 – влучив перший стрілець, A_2 – влучив другий стрілець, A_3 – влучив третій стрілець.

А – влучив хоча б один.

Події A_1, A_2, A_3 незалежні, тому $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ також незалежні.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3)$$

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$
$$P(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - {,}006 = 0{,}994$$

10.11. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Означення. *Події називаються* ***сумісними****, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно) в одному випробуванні.*

Приклад. Стріляють два стрільці. Подія A_1 – влучив перший. Подія A_2 – влучив другий. Події сумісні.

Теорема. Ймовірність появи принаймні однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхньої одночасної появи.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Якщо А і В незалежні: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$;
залежні:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B) = P(A) + P(B) - P(B) \cdot P_B(B).$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що навмання взяте двозначне число буде:

а) ділитися на «3»;

б) ділиться на «5»;

в) ділиться на «3» і на «5»;

г) ділиться на «3» або на «5».

Нехай подія A – навмання взяте число ділиться на «3», тоді $P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Подія B – навмання взяте число ділиться на «5», тоді $P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

Подія AB – число ділиться на «3» і на «5», тоді $P(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)$.

Подія $A + B$ – число ділиться на «3» або на «5».

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} = 0{,}467.$$

Для трьох сумісних подій справедлива формула:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Для n-подій:

$$P(A_1+A_2+\dots A_n)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\dots P(A_n)-P(A_1A_2)$$
$$-P(A_1A_3)-\dots P(A_{n-1}A_n)$$
$$+P(A_1A_2A_3)+\dots P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)+\dots(-1)^nP(A_1A_2\dots A_n)$$

10.12. Формула повної ймовірності

Наслідком основних теорем теорії ймовірностей (теорем додавання та множення) є формули повної ймовірності.

Нехай подія А може відбутися за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \dots B_n$, які утворюють повну групу подій.

Нехай відома ймовірність цих подій і умовні ймовірності $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A) \dots P_{B_n}(A)$.

Теорема. *Ймовірність події А, яка може відбутися лише за умови появи однієї з несумісних подій* $B_1, B_2, \dots B_n$, *які утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події А.*

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\dots P(B_n)P_{B_n}(A)$$

$$\mathrm{P(A)}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P(B_k)}\cdot \mathrm{P_{B_k}(A)}.$$

Приклад

Викладач підготував 50 задач до заліку з вищої математики:

20 – з диференціального числення, 30 – з інтегрального числення. Щоб отримати залік, студент повинен розв'язати навмання взяту задачу.

Яка ймовірність отримання заліку, якщо він вміє розв'язувати 18 задач диференційованого числення і 15 задач – інтегрального числення.

Нехай подія B_1 – отримати задачу з диференціального числення. $\mathrm{P(B_1)}=\frac{20}{50}=0{,}4$.

Подія B_2 – отримати задачу з інтегрального числення. $P(B_2) = \frac{30}{50} = 0,6$.

Подія А – розв'язати задачу під час заліку.

Умовна ймовірність: $P_{B_1}(A) = \frac{18}{20} = 0,9$, $P_{B_2}(A) = \frac{15}{30} = 0,5$.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,66.$$

Приклад

У торгову фірму надійшли телевізори від трьох постачальників у відношенні 1:4:5. Практика показала, що телевізори від 1-го, 2-го і 3-го постачальника протягом гарантійного терміну 98 %, 88 %, 92 % не потребують ремонту. Знайти ймовірність, що отриманий телевізор не потребує ремонту під час гарантії.

Нехай подія A_i – телевізор поступив від і – го постачальника.

Подія F – телевізор не потребує ремонту протягом гарантії.

$$P(A_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0,1, P(A_2) = \frac{4}{10} = 0,4, P(A_3) = \frac{5}{10} = 0,5$$

Умовні ймовірності:

$$P_{A_1}(F) = 0,98,\ P_{A_2}(F) = 0,88,\ P_{A_3}(F) = 0,92.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(F) = 0,1 \cdot 0,98 + 0,40 \cdot ,88 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,91.$$

10.13. Ймовірність або теорема гіпотез (формули Байєса)

В умові теореми повної ймовірності невідомо, з якою подією із несумісних подій $B_1, B_2 \ldots B_n$ з'явиться подія А, тому кожну з подій $B_1, B_2 \ldots B_n$ можна вважати гіпотезою, тоді $P(B_k)$ – це ймовірність **k-тої гіпотези.**

Якщо випробування проведено і в результаті його подія А з'явилася, то умовна ймовірність $P_A(B_k)$ може не дорівнювати $P(B_k)$.

Порівняння ймовірностей $P(B_k)$ та $P_A(B_k)$ дозволяє переоцінити ймовірність гіпотези за умови, що подія А з'явилася.

Використаємо теорему множення ймовірностей залежних подій:

$$P(A \cdot B_k) = P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = P(A) \cdot P_A(B_k)$$

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}, \; P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \qquad k = 1, 2 \ldots n.$$

Одержимо формули Байєса. Вони дозволяють переоцінити ймовірність гіпотез. Це важливо при контролі або ревізіях.

Приклад

Деталі виготовлені цехом заводу попадають для перевірки їхньої стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера – 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що деталь признана стандартною першим контролером – 0,94 , а другим – 0,98.

Деталь при перевірці признана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Нехай подія А – придатна деталь признана стандартною, подія B_1 – деталь перевірив перший контролер, подія B_2 – деталь перевірив другий контролер.

$$P(B_1) = 0{,}6; \; P(B_2) = 0{,}4; \; P_{B_1}(A) = 0{,}94; \; P_{B_2}(A) = 0{,}98.$$

За формулами Байєса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) P \cdot_{B_2}(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0.4 \cdot 0{,}98} = 0{,}59.$$

До появи події А: $P(B_1) = 0{,}6$, а після появи $P_A(B_1) = 0{,}59$ ймовірність зменшилась.

Приклад. *(Продовжимо задачу попереднього пункту)*

Проданий телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну. Від якого постачальника ймовірніше всього його отримали.

Подія F – телевізор потребує ремонту протягом гарантії.

$$P(F) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$$

$P_{A_1}(F) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$, $P_{A_2}(F) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$, $P_{A_3}(F) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$

За формулою Байєса:

$$P_F(A_1) = \frac{0,1 \cdot 0,02}{0,09} = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(F)}{P(F)} = 0,027, \qquad P_F(A_2) = \frac{0,4 \cdot 0,12}{0,09} = 0,533,$$

$$P_F(A_3) = \frac{0,5 \cdot 0,08}{0,09} = 0,444.$$

Тобто найбільша ймовірність події A_2 – від другого постачальника.

10.14. Незалежні випробування за схемою Бернуллі

Означення. *Якщо ймовірність появи події А в кожному випробуванні одна й та ж, тобто не зміниться залежно від результатів інших, то такі випробування називаються* ***незалежними відносно події А.***

Якщо незалежні повторні випробування проводяться при одному й тому комплексі умов, то ймовірність появи події А в кожному випробуванні одна й та ж. Вказана послідовність незалежних випробувань отримала назву ***схеми Бернуллі.***

Формула Бернуллі та наслідки з неї

Нехай випадкова подія А може з'явитись у кожному випробуванні з ймовірністю P(A) = p або не з'явитися з ймовірністю $q = 1-p$.

Знайти ймовірність того, що при випробуванні подія А з'явиться m разів і не з'явиться n-m разів. Позначимо шукану ймовірність P_n(m). Коли подія А з'явиться m разів у n випробуваннях, таких подій буде $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Формула Бернуллі:

$$\boldsymbol{P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m},}$$

$$\boldsymbol{P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.}$$

Зауваження

Ймовірність появи події:

1. Менше m разів: $P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots P_n(m-1)$.
2. Не менше m разів: $P_n(k \ge m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \cdots P_n(k)$.
3. Більше m разів: $P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \cdots P_n(k)$.
4. Не більше m разів: $P_n(k \le m) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots P_n(k)$.
5. Хоча б один раз: $P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n$.

Приклад. Митний пост надає статистичну оцінку того, що 20 % усіх осіб, які повертаються з-за кордону не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково обрати 5 осіб, яка ймовірність того, що 3 з них не задекларували весь товар.

Нехай А – подія, що обрана особа не задекларувала товар, тоді

$$P(A) = 0{,}2, n = 5, m = 3, p = 0{,}2$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot (1 - 0{,}2)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}64 = 0{,}0512$$

Приклад. Прилад складено з 10 блоків. Надійність кожного 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

а) відмовлять два блоки: нехай подія А – відмова блока, тоді

$P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \quad q = 1 - p = 0{,}8.$

$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}302;$

б) відмовить хоча б один блок:

$P_{10}(1 < m \le 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 \cdot (0{,}2)^0 \cdot 0{,}8^{10} = 0{,}8926;$

в) відмовить не менше двох блоків:

$P_{10}(2 \le m \le 10) = 1 - \left(P_{10}(0) + P_{10}(1)\right) = 1 - (C_{10}^0) \cdot (0{,}2)^0 \cdot 0{,}8^{10} + C_{10}^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^9) = 0{,}6244.$

10.15. Найімовірніше число появи події у схемі Бернуллі

Якщо ймовірності повної групи подій зобразити графічними точками з координатами $(m, P_n(m))$, з'єднавши ці точки, отримаємо многокутник або полігон розподілу ймовірностей.

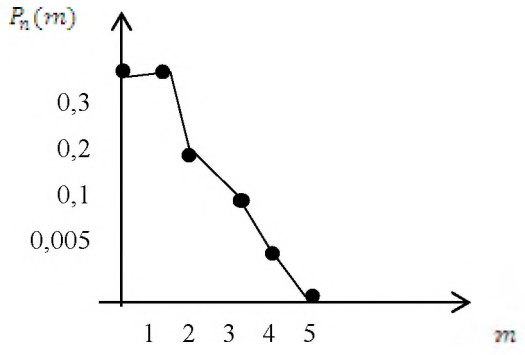


Рис. 78

Є такі значення m, яким відповідає найбільша ймовірність (m = 1).

Означення. *Число, що поява події A в n незалежних випробуваних називається* ***найвірогіднішим****, якщо ймовірність появи цієї події не менше ймовірності інших подій.*

Визначається за формулою:

np- q $\le m_0 \le np + p$ або (n+1)p-1$\le m_0 \le (n+1)p$, m_0 – ціле число.

Якщо $(n+1)p$ – ціле, то найбільше значення ймовірності мають два числа:

$m_0 = (n+1)p$- *1 або* $m_0 = (n+1)p$.

Приклад

За новим технологічним процесом, 80 % усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Нехай m_0: np- q $\le m_0 \le np + p$;

n = 250, p = 0,8, q = 0,2;

$199{,}8 \le m_0 \le 200{,}8$;

m_0 = 200 – ціле число.

10.16. Формула Пуассона

Теорема. Якщо n$\to \infty$, p$\to 0$ так, що добуток np$\to \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$), то $P_m(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, для довільного m = 0, 1, 2 … n.

Наслідок. Ймовірність появи події A m разів у n випробуваннях схеми Бернуллі можна знаходити за наближеною формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np.$$

Приклад

Підручник надруковано тиражем 100 000 екземплярів, ймовірність неправильного брошурування 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

n = 100 000 досить велике,

p = 0,0001 досить мале,

m = 5.

Використаємо формулу Пуассона:

$$P_{100\,000}(5) = \frac{10^5}{5!} \cdot e^{-10} = 0{,}0375.$$

10.17. Локальна та інтегральна функції Лапласа

Означення. ***Локальною функцією Лапласа*** *називають функцію виду*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Основні властивості:

1. *Функція Лапласа* $\varphi(x)$ *– парна,* $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. *Функція визначена для всіх* $x \in (-\infty; \infty)$.
3. $\varphi(x) \to 0$, *коли* $x \to \pm\infty$.
4. $\varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

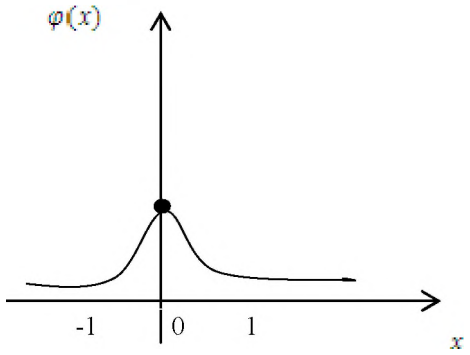


Рис. 79

Означення. ***Інтегральною функцією Лапласа*** *називають функцію*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Локальна і інтегральна функції пов’язані формулою:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

Основні властивості:

1. Функція непарна $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\Phi(x) = 0{,}5, \text{при } x \geq 5$

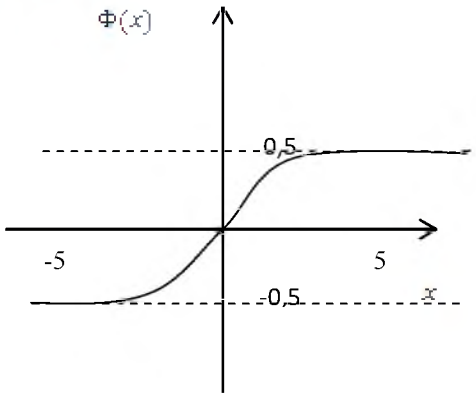


Рис. 80

10.18. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Локальна теорема. Якщо в схемі Бернуллі кількість випробувань n досить велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події A *m*-разів може бути знайдена за наближеною формулою.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(xm),$$

$$\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення $\varphi(x)$ знаходять за таблицею (додаток 1).

Приклад

Ймовірність влучення в мішень для одного пострілу 0,8. Знайти ймовірність того, що в серії зі 100 пострілів буде 75 влучень.

n = 100, m = 75, p = 0,8 $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100\cdot0.8}{\sqrt{100\cdot0.8\cdot0.2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

$$\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$$

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 = 0{,}04565$$

Формулу доцільно використовувати при $n > 100$ та npq >20.

Інтегральна теорема. *Якщо в схемі Бернуллі в кожному з n незалежних випробувань подія A може з'явитися з постійною ймовірністю p, тоді ймовірність появи події A не менше* m_1 *та не більше* m_2 *може бути знайдена за формулою:*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

$\phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, де $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Приклад. Ймовірність появи події в кожному з 2 100 незалежних випробувань 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше 1 470 і не більше 1 500 разів.

n=2100, p=0,7, q=0,3, $m_1 = 1470$, $m_2 = 1500$

$$x_1 = \frac{1470 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{0}{21} = 0,$$

$$x_2 = \frac{1500 - 2100 \cdot 0{,}7}{21} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7} = 1{,}43$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1{,}43) = 0{,}4236,$$

$P_{2100}(1470, 1500) = \phi(1{,}43) - \phi(0) = 0{,}4236$. Значення функції $\phi(x)$ знаходять у таблиці (додаток 2).

Приклад. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність, що кількість очок, кратне трьом, з'явиться 267 разів.

m та n досить великі

$$P(A) = p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad q = 1 - p = \frac{2}{3}$$

$$x_{267} = \frac{m - np}{\sqrt{npg}} = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40} \cdot 4(0{,}025) = \frac{3}{40} \cdot 0{,}3980 \approx 0{,}03$$

Для знаходження $\varphi(0{,}025)$:

$\varphi(0{,}002) = 0{,}398862$,

$\varphi(0{,}003) = 0{,}398783$,

$$\varphi(0{,}025) = \left(\frac{0{,}398862 + 0{,}398783}{2}\right) \approx 0{,}3988.$$

Приклад. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 і не більше 274 разів?

$$P_{800}(260 < m < 274) =$$

$$x_2 = \frac{274 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{22}{40} = 0{,}55$$

$$x_1 = \frac{260 = 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = -0{,}5$$

$$= \phi(0{,}55) + \phi(0{,}5) = 0{,}208840 + 0{,}191482 = 0{,}400322$$

10.19. Теорема Бернуллі

Якщо у n незалежних випробуваннях ймовірність p появи події A однакова і подія A з'явилася n разів, то для довільного додатного числа a має місце рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq a\right) = 0$$

Тобто границя ймовірності відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ події A від її ймовірності на величину, що більше або дорівнює нулю.

Наслідок: $$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Три типи задач:

1) n, $\varepsilon \to P$ відомо n, ε, визначити P;

2) $P, n \to \varepsilon$ відомо P, n, визначити ε;

3) $P, \varepsilon \to n$ відомо P, ε, визначити n.

Приклад

Ймовірність, що покупцеві потрібне взуття 36 розміру дорівнює 0,3. Яка ймовірність, що серед покупців доля тих, кому потрібне взуття 36 розміру відхилиться від ймовірності не більше ніж на 0,04.

n = 500, p = 0,3, $q = 0{,}7, \varepsilon = 0{,}04$

$$P\left(\left|\frac{m}{500}-0{,}3\right|\le 0{,}04\right)=2\phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{500}{0{,}3\cdot 0{,}7}}\right)=2\phi(1{,}95)=0{,}9488$$

Отже, серед 500 покупців доля тих, кому потрібне взуття 36 розміру знаходиться в межах від 0,26 до 0,34, має ймовірність 0,9488.

Приклад. Ймовірність появи події в кожному з 400 випробувань 0,8. Знайти таке додатне ε, щоб з ймовірністю 0, 9876 модуль відхилення відносної частоти появи події від його ймовірності була не більше ε.

n = 400, p = 0,8, $q = 0{,}2$

$$2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=0{,}9876$$

$$2\phi(50\varepsilon)=0{,}9876,\ \phi(50\varepsilon)=0{,}4938$$

За таблицею $\phi(2{,}5)=0{,}4938$, тому $50\varepsilon=2{,}5,\ \varepsilon=0{,}05$.

Приклад. Ймовірність появи події в кожному випробуванні 0,5. Знайти число випробувань n, при якому з імовірністю 0,7698 можна чекати, що частота появи події відхиляється від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

p = 0,5, q = 0,5, $\varepsilon = 0{,}02$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le 0{,}02\right)=0{,}7698$$

$$2\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698$$

$$\phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right)=0{,}3849 \text{(з таблиці додаток 2).}$$

$$0{,}3849=\phi(1{,}2),\ 0{,}04\sqrt{n}=1{,}2,\ \sqrt{n}=30,\ n=900.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти ймовірність того, що ідентифікаційний код особи закінчується:

а) цифрою 2;

б) цифрою кратною 3.

2. В урні N = 16 білих і M = 12 чорних кульок. З урни навмання виймають k = 8 куль.

2. Знайти ймовірність того, що:

а) всі k = 8 куль білі;

б) l = 2 кульки білі і s = 6 чорних.

3. У ящику 12 деталей, виготовлених на заводі № 1, 20 деталей – на заводі № 2 і 18 деталей – на заводі № 3. Ймовірність того, що деталь виготовлена на заводі № 1 відмінної якості дорівнює 0,9, для деталей виготовлених на заводах № 2 і № 3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 та 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості.

3. З партії виробів береться виріб вищої якості. Ймовірність того, що навмання вилучений виріб вищої якості, дорівнює 0,8.

Знайти ймовірність того, що з трьох вилучених виробів виявиться:

1) два вищої якості;

2) хоча б один вищої якості.

4. Страхова компанія виплачує страхову суму за 20 % договорів. Знайти найімовірнішу кількість страхових випадків, за якими виплатять страхову суму, якщо складено 80 договорів.

5. В інкубатор закладено 750 яєць. Імовірність того, що з яйця вилупиться курочка, дорівнює 0,5. Яка ймовірність того, що вилупиться рівно 428 курок?

6. Компанія з реклами пропонує рекламну продукцію промисловим підприємствам. Із попереднього досвіду відомо, що у середньому одне із 57 підприємств, які отримали рекламу, придбає запропоновану продукцію. Протягом доби матеріали було надіслано 26 підприємствам. Чому дорівнює ймовірність того, що принаймні одне з цих підприємств придбає рекламовану продукцію?

Тема 11. Випадкові величини

11.1. Одновимірні випадкові величини

При дослідженні багатьох проблем виникають такі випадкові події, наслідком яких є поява деякого числа, заздалегідь невідомого. Тому такі числові значення випадкові.

Наприклад:

– зріст студента групи;

– кількість телефонних дзвінків до абонента;

– вага новонародженого;

– кількість балів за семестр.

Означення. ***Випадковою величиною*** *називають таку величину, яка внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме й обумовлене випадковими причинами.*

Позначають випадкові величини X, Y, Z, а можливі значення $x_1, x_2 \dots x_n$.

Означення. ***Дискретною випадковою величиною ДВВ*** *називають випадкову величину, можливими значеннями якої є окремі ізольовані числа з різними ймовірностями.*

Наприклад:

– число хлопчиків серед 100 малят;

– кількість викликів у таксі на диспетчерському пункті за добу;

– кількість влучень у мішень при трьох пострілах.

Означення. ***Неперервною випадковою величиною НВВ*** *називають випадкову величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченого або нескінченного інтервалу (a, b).*

Кількість можливих значень такої величини є нескінченна.

Означення. ***Законом розподілу*** *випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.*

11.2. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

Нехай випадкова величина X приймає значення $x_1, x_2 \dots x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots p_n$.

Задати закон розподілу $P_n = P(x = x_n)$ можна:

- аналітично;

- таблично;
- графічно.

Аналітичний спосіб

Функція розподілу дискретної випадкової величини $F(x) = P(X<x) = \sum_{x_i<x} \rho(x_i)$

Табличний спосіб

x	x_1	x_2	…	x_n
ρ (x)	p_1	p_2	…	p_n

де $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Приклад

Випущено 1 000 лотерейних білетів. Один з них має виграш – 100 грн, два з них – виграш – 50 грн, а три – виграш 10 грн.

Знайти закон розподілу суми виграшу власника одного білета.

x	100	50	10	0
P(x)	0,001	0,002	0,003	0,994

P(0) = 1 – (0,001 + 0,002 + 0,003) = 0,994.

Зауваження. Якщо ДВВ може прийняти нескінченну кількість значень, то її ряд розподілу (таблиця) матиме нескінченну кількість елементів у рядках, причому ряд $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ повинен бути збіжним, а його сума дорівнювати одиниці.

Графічний спосіб

Позначимо на осі Ох можливі значення ДВВ, а на осі Оу- відповідне значення ймовірності.

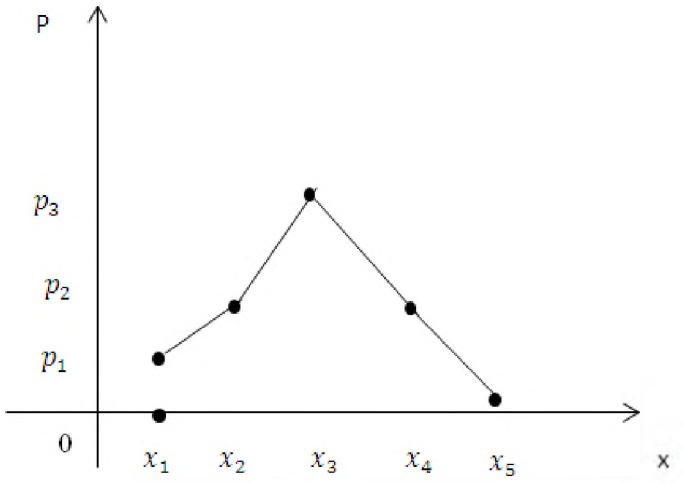


Рис. 81

Поєднавши (x_i, p_i)точки, отримаємо многокутник розподілу випадкової величини (рис. 9).

Значення дискретної випадкової величини, ймовірність якої найбільша, називають ***модою***.

Аналітичний спосіб базується на заданні певної функції, за якою можна знайти ймовірність p, відповідного значення x_k, $P_k = f(x_k)$.

1. Біномальний закон розподілу

$P(x = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, m = 0, 1, 2….n

(схема Бернуллі)

2. Закон Пуассона

$P(x = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$(a > 0), m = 0,1 …n, a = np.

3. Геометричний розподіл

$P(x = m) = pg^{m-1}$, m = 1, 2 … n, q = 1 – p.

4. Гіпергеометричний розподіл

$P = (x = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$, *m = 0, 1 … ,(m – 1).*

5. Поліноміальний розподіл

$P_n(x_i = m_i, x_2 = m_2, \ldots x_5 = m_5) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_s!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots p_s^{m_s}$.

11.3. Закон розподілу неперервних випадкових величин

Задається інтегральною або диференціальною функцією розподілу.

Означення. ***Інтегральною функцією розподілу*** *називають функцію F(x), яка визначає для кожного x ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше x.* F(x) = P (X < x).

Наприклад, F(5) = P(X < 5) означає, що в результаті експерименту випадкова величина X може набути значення, яке міститься ліворуч від 5.

Якщо неперервна випадкова величина може приймати будь-які значення з інтервалу (*a; b*) то *P (a< X < b) = F(b) – F(a).*

P (a < X < b) – ймовірність прийняття величини X значень з (a; b)$

F(b) – F(a) – приріст функції розподілу.

Властивості F(x) інтегральної функції розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) F(x) неспадна функція, $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) F(x) = 0 при $x \le a$, F(x) =1, при x > b;

4) графік F(x);

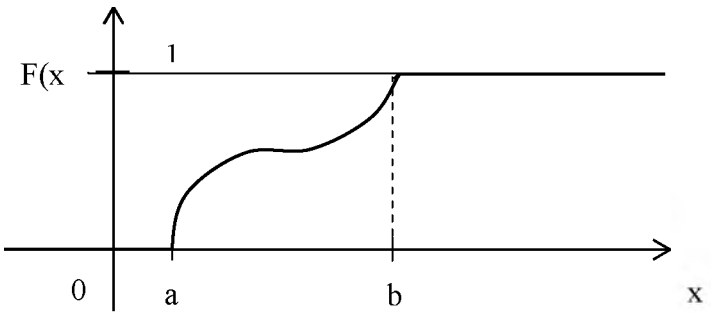


Рис. 82

5) P (a < x < b) = P (a ≤ x < b) = P (a < x ≤ b) = P (a ≤ x ≤ b);

6) якщо, X є (–∞; ∞); F(–∞) = P (x < –∞) = 0, F(∞) = P (x < ∞) = 1;

7) якщо X є [a, b], то F(x) = 0, для $x \le a$, F(x) = 1, для x > b

Означення. ***Диференціальною функцією розподілу*** *(щільністю ймовірностей) неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають:* $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{d(x)}$.

Властивості f (x):

1. $f(x) \ge 0$.

2. Умова нормування НВВ X:

а) X є (– ∞; ∞), то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

б) X є [a, b], то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

3. Ймовірність попадання НВВ в інтервал (a, b) обчислюється за формулою:

P (a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$.

4. Якщо f (x) відома, то F (x) можна знайти за формулою:

F (x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, а якщо неперервна випадкова величина X є [a, b], то

F (x) = $\int_{a}^{x} f(x)dx$.

5. Графік щільності ймовірності називають **кривою розподілу**.

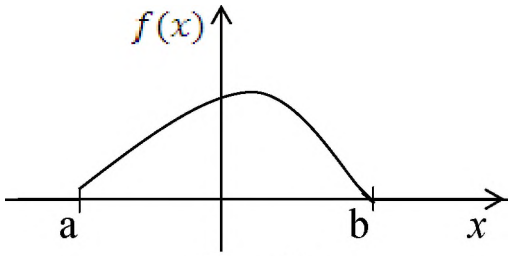


Рис. 83

Приклад

Функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{x+2}{7}, & -2 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Знайти:

а) P (1 < x <4), P (0 ≤ x ≤ 6);

б) f (x);

в) графіки f (x), F(x).

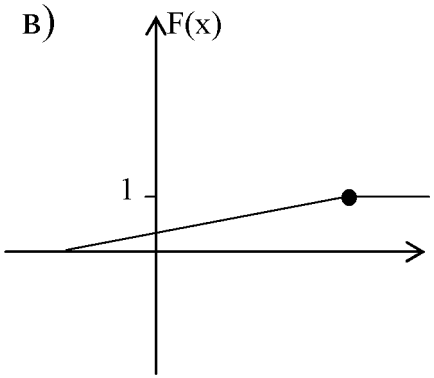
Розв'язання

а) P (1 < x <4) = F(4) – F(1) = $\frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$;

(0 ≤ x ≤ 6) = F(6) – F(0) = $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

б) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{1}{7}, & -2 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$.

в)



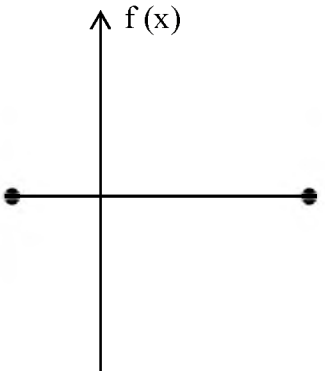




Рис. 84

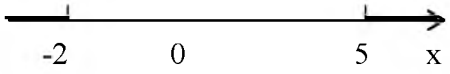


Рис. 85

Закон розподілу ймовірностей як для дискретної випадкової величини, так і для неперервної випадкової величини надає повну інформацію про них. Проте на практиці не завжди вдається його одержати, бо він занадто складний для практичних розрахунків, тому з'явилася потреба характеризувати випадкові величини за допомогою числових характеристик.

11.4. Числові характеристики випадкових величин

Математичне сподівання

Означення. ***Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X*** *називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень випадкової величини X на відповідні їм ймовірності.*

$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$, якщо не скінченну кількість значень $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X число, яке обчислюється за формулою:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, X є (–∞; ∞), або

$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$, X є [a, b], де f(x) – щільність розподілу випадкової величини.

На практиці під M(X) розуміють центр розподілу випадкової величини.

Основні властивості математичного сподівання.

1) M(C) = C, (C = const);
2) M(CX) = CM(X);
3) M(X+Y) = M(X) + M(Y);
4) M(XY) = M(X) · M(Y), якщо X та Y взаємно незалежні.

Приклад

Закон розподілу задано таблицею

x_i	–6	–4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

$\sum p_i = 1$

M(X) = $\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 2{,}8$.

Приклад

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/36, & 0 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/18, & 0 < x \le 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}$$

$$M(X) = \int_0^6 x \cdot \frac{x}{18}\,dx = \frac{1}{18}\int_0^6 x^2\,dx = \frac{1}{19} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^6 = 4.$$

11.5. Дисперсія випадкових величин

Різниця $X - M(X)$ – це відхилення випадкової величини x від свого математичного сподівання $M(X)$.

Означення. ***Дисперсією випадкової величини*** *називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання.*

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

Для дискретної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] \text{ або } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Властивості дисперсії:

1) $D(C) = 0$, $(C = const)$;

2) $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;

3) $D(X) \ge 0$, невід'ємна;

4) Дисперсія алгебраїчної суми скінченного числа випадкової величини дорівнює сумі дисперсії цих випадкових величин: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

Для неперервної випадкової величини якщо X є $(-\infty; \infty)$, то

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx$ або $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2$,

якщо $X \in [a, b]$, то

$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)\,dx$, *або*

$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - (M^{(X)})^2$.

Математичне сподівання характеризує центр розподілу випадкової величини, а дисперсія – розсіювання можливих значень випадкової величини відносно центру розподілу, тобто $M^{(X)}$.

Приклад

$M(X) = 2{,}8$; $D(X) = (-6 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (-4 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}2 + (4 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (6 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (8 - 2{,}8)^2 \cdot 0{,}2$.

Або $D(X) = (36 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}3 + 36 \cdot 0{,}1 + 64 \cdot 0{,}2) - 2{,}8^2 = = 14{,}98 > 0$.

Приклад.

$M(X)=4$.

$D(X) = \int_0^6 x^2 \frac{x}{18}\,dx - 4^2 = \frac{1}{18}\frac{x^4}{4}\Big|_0^6 - 16 = 2 > 0$.

11.6. Середнє квадратичне відхилення

Випадкова величина X має розмірність (метр, міліметр, грам) тому дисперсія вимірюється у квадратних одиницях цієї розмірності. Для порівняння випадкових величин і розсіювання (дисперсії) вводять середнє квадратичне відхилення $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Приклад

Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{25}, & 0 < x < 5 \\ 0, & x \in [0,5] \end{cases}$$

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{2x}{25} dx = \frac{2}{25}\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{10}{3}$$

$$D(X) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2x}{25} dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{25}\frac{x^4}{4}\Big|_0^5 - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{25}{18} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}17.$$

11.7. Мода $M_0(X)$, медіана $M_e(X)$

Означення. ***Модою дискретної випадкової величини*** X *називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи події* $M_0 = X_i,\ p(x_i) = max.$

Означення. ***Модою неперервної випадкової величини*** X *називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності.*

$f(M_0) = max$

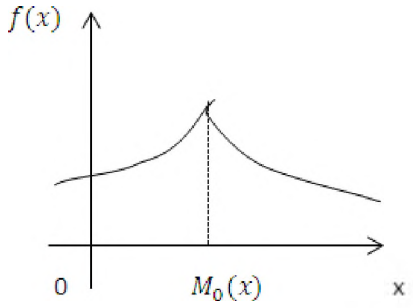


Рис. 86

Якщо випадкова величина має одну моду – одномодальний розподіл; дві моди – двомодальний; кілька – полімодальний; немає моди – антимодальний.

Приклад

Неперервна випадкова величина в [3; 5] задана щільністю $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}$, поза інтервалом $f(x) = 0$.

Знайти $M_o(X), f'(x) = -\frac{3}{4} \cdot 2x + 6 = 0, x = 3, M_o(X) = 3.$

Означення. ***Медіаною*** $M_e(X)$ *неперервної випадкової величини називають те її значення, для якого виконується рівність:*

$$P\left(X < M_e(X)\right) = P\left(X > M_e(X)\right) = \frac{1}{2}$$

$$F\left(M_e(X)\right) = 0{,}5$$

Приклад. $M_e = \frac{2+4}{2} = 3$

Приклад. $F(M_e) = \frac{1}{2}, x \in (0;6)$

$$\frac{(M_e)^2}{36} = \frac{1}{2},\ 2M_e^{\ 2} = 36,\ M_e^{\ 2} = 18,\ M_e \approx 4{,}24 \in (0;6).$$

Геометрично: медіана – це абсциса точки, в якій область обмежена кривою розподілу f(x), ділиться на дві рівні частини.

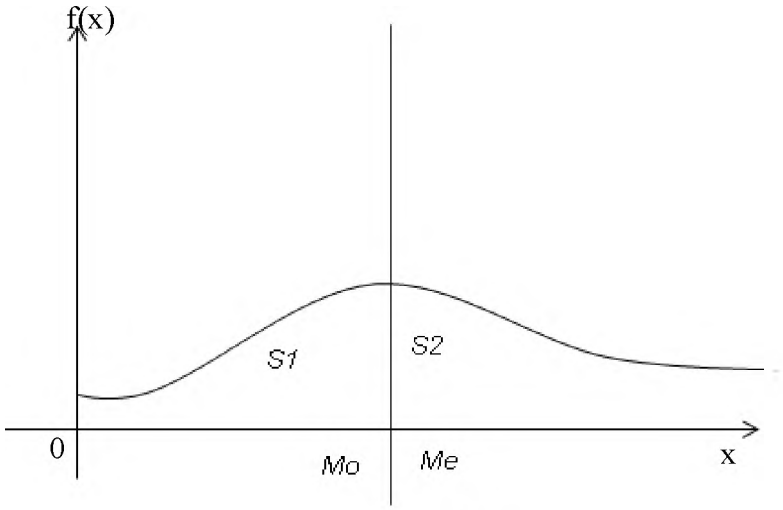


Рис. 87

Медіана дискретної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$S_1 = S_2$$

$$M_e = \begin{cases} x_m, & \text{при } n = 2m-1 \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & \text{при } n = 2m \end{cases}$$

$$M_e \in [x_m, x_{m+1}]$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \le 0.5 \qquad \sum_{i=1}^{n+1} p_i > 0.5$$

Приклад. Дано щільність ймовірностей випадкової величини X, $f(x) = x - \frac{1}{4}x^3$.

Медіану M_e *знайдемо з умови* $P(x < M_e) = 0{,}5$

$P(x < M_e) = \int_0^{M_e} (x - \frac{1}{4}x^3)dx = \frac{M_e^2}{2} - \frac{M_e^4}{6}$, тобто

$$\frac{M_e^2}{2} - \frac{M_e^4}{16} = 0{,}5 \qquad M_e^4 - 8M_e^2 + 8 = 0,\ M_e = \pm\sqrt{4+\sqrt{8}}$$

З чотирьох значень виберемо те, яке належить відрізку [0; 2], $M_e = \sqrt{4-\sqrt{8}} \approx 1{,}09$.

11.8. Початкові та центральні моменти

Означення. ***Початковим моментом*** *порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини* x^k *і позначають:*

$$\vartheta_k = M(X^k), \quad k = 1,2,3 \dots n \quad \text{при } k = 1, \quad \vartheta = M(X) \quad \vartheta_2 = M(X^2).$$

Для дискретної випадкової величини: $\vartheta_k = \sum_{k=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $\vartheta_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Означення. ***Центральним моментом*** *порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини* $[X - M(X)]^k$ *і позначають* $\mu_k = M\,(X - M(X))^k$, $k = 1,2,3 \dots n$.

Для дискретної випадкової величини: $\mu_k = \sum_{k=1}^{n}(x_i - M(X))^K \cdot p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^k \cdot f(x)dx$.

Якщо $X \epsilon [a, b]$, то $\mu_k = \int_a^b (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$.

Початкові і центральні моменти порядку k ≥ 2 дозволяють краще врахувати вплив на математичне сподівання M(X) тих можливих значень випадкової величини X, які є великими, але мають малу ймовірність.

Приклад. Дано ряд розподілу, знайти початкові та центральні моменти.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

$$\vartheta_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 = 4{,}6 = M(x)$$

$$\vartheta_2 = 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 25 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}1 = 26{,}6$$

$$\vartheta_3 = 1 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}4 + 125 \cdot 0{,}2 + 343 \cdot 0{,}2 + 729 \cdot 0{,}1 = 177{,}4$$

$$\vartheta_4 = 1 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}4 + 625 \cdot 0{,}2 + 2401 \cdot 0{,}2 + 6561 \cdot 0{,}1 = 1293{,}8$$

$$\mu_1 = 0; \quad D(x) = 5{,}44; \quad \sigma(x) = 2{,}33$$

$$\mu_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1^2 = 26{,}6 - (4{,}6)^2 = 26{,}6 - 21{,}16 = 5{,}44 = D(x)$$

$$\mu_3 = \vartheta_3 - 3\vartheta_1\vartheta_2 + 2\vartheta_1^3 = 177{,}4 - 3 \cdot 4{,}6 \cdot 26{,}6 + 2 \cdot 4{,}6^2 = 4{,}992$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\delta^3 x} = \frac{4{,}992}{12{,}676} = 0{,}394$$

$$\mu_4 = \vartheta_4 - 4\delta_1\vartheta_3 + 6\vartheta_1\vartheta_2 - 3\vartheta_1^4 = 64{,}55$$

$$E_s = \frac{\mu_4}{\delta_x^4} - 3 = \frac{64{,}55}{29{,}59} - 3 = 2{,}18 - 3 = -0{,}82$$

Приклад

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x', & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$\vartheta_1 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 + \frac{2x^2}{2}|_1^2 - \frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\vartheta_2 = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{x^4}{4}|_0^1 + \frac{2x^3}{3}|_1^2 - \frac{x^4}{4}|_1^2 = \frac{7}{6}$$

$$\vartheta_3 = \int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 x^3(2-x)dx = \frac{3}{2}$$

$$\vartheta_4 = \int_0^1 x^5 dx + \int_1^2 x^4(2-x)dx = \frac{31}{15}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1^2 = \frac{1}{6} = D(x)$$

$$\mu_3 = \vartheta_3 - 3\vartheta_1\vartheta_2 + 2\vartheta_1^3 = 0$$

$$\mu_4 = \vartheta_4 - 4\vartheta_1\vartheta_3 + 6\vartheta_1^2\vartheta_2 - 3\vartheta_1^4 = \frac{1}{15}$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = 0$$

$$E_x = \frac{\mu_4}{\delta_x^4} = -0{,}395.$$

11.9. Асиметрія та ексцес

Означення. ***Асиметрією теоретичного розподілу*** *називають відношення центрального моменту третього порядку до* ***кубу*** *квадратичного відхилення.*

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

$A_s = 0$ – симетричний розподіл (випадкова величина X – симетрія відносно M(X)).

$A_s > 0$, то довша частина правіше моди.

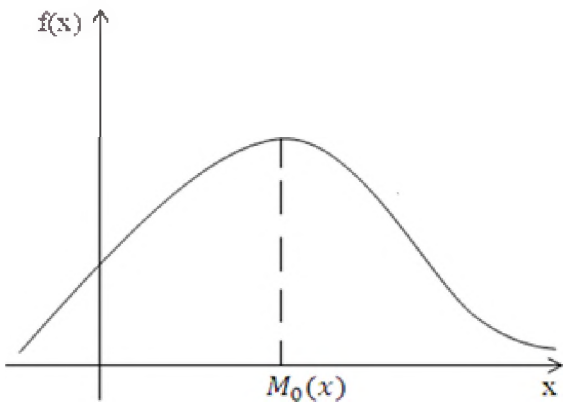


Рис. 88

$A_s < 0$, то довша частина лівіше моди.

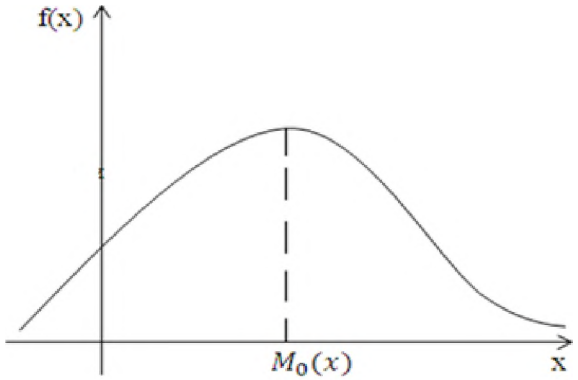


Рис. 89

A_s служить характеристикою скошеності (асиметрії).

Означення. ***Ексцес*** *– це характеристика* $E_k = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$, *характеризує плосковершинність або гостровершинність щільності ймовірності f(x).*

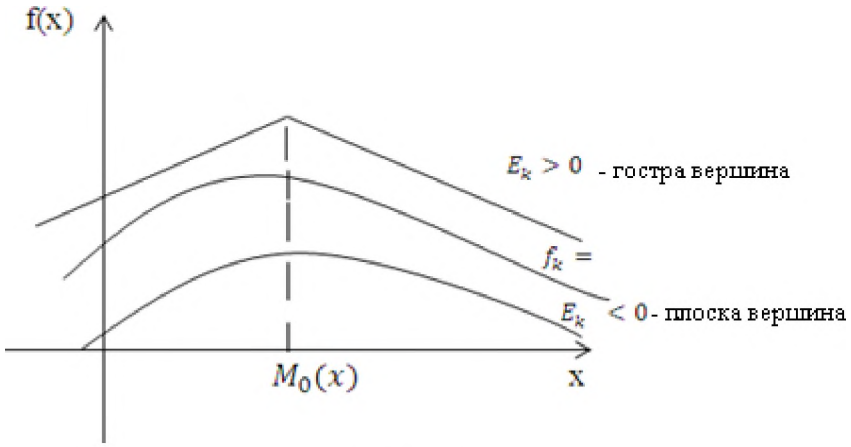


Рис. 90

Приклад. За даним законом розподілу знайти A_s, E_k

x_i	–2	0	3	5
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

$$M(X) = \sum x_i p_i = -0,6 + 0 + 0,3 + 2 = 1,7$$

$$\mu_3 = \sum (x_i - (M(x))^3 p_i = -1,584$$

$$D(X) = \sum (x_i^2 p_i - (M(x))^2 = 1,2 + 0,9 + 10 - 1,7^2 = 12,1 - 2,89 = 9,21$$

$$\sigma(x) = 3,03$$

$$A_s = \frac{-1854}{3,03^3} = -0,523$$

Приклад

x_i	1	2	4
p_i	0,1	0,3	0,6

M(X) = 3,1

D(X) = 1,129

$\sigma(x) = 1,136$

$\mu_3 = -0,888$

$\mu_4 = 2778$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,888}{(1,136)^3} = -0,606,$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{2,778}{1,665} - 3 = -1,332.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Податкова інспекція знаходить недоліки при оформленні звітної документації підприємств з ймовірністю 0,2. Побудувати та обчислити: закон розподілу випадкової величини X – кількість підприємств, що допустили недоліки серед 5 перевірених; полігон розподілу; функцію розподілу; графік функції розподілу; математичне сподівання; дисперсію; середнє квадратичне відхилення; моду; медіану; асиметрію; ексцес.

2. Одновимірна неперервна випадкова величина X має щільність розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти: функцію розподілу F(x); математичне сподівання M(x); дисперсію D(x); середнє квадратичне відхилення σ(x); моду M0; медіану Me; асиметрію As. Побудувати графіки функцій f(x) та F(x).

Тема 12. Закони розподілу випадкових величин та їхні числові характеристики

12.1. Біноміальний закон розподілу: означення, приклади, основні числові характеристики

Якщо ймовірність настання випадкової величини в кожному досліді дорівнює p, то ймовірність того, що при n дослідах поділ здійснюється m раз, визначається формулою Бернуллі $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Закон розподілу випадкової величини x, яка може приймати $n+1$ значення (0, 1 … n), що описується формулою Бернуллі, називається біноміальним.

$M(x) = np$, $D(x) = npq$, $\sigma(x) = \sqrt{npq}$.

Біноміальний закон *використовується в теорії і практиці статистики контролю якості продукції при описі функціонування системи масового обслуговування, в теорії стрільби.*

Дійсно,

$$M(x) = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = np \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} C_n^m p^{m-1} q^{n-m} =$$

$$= np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} p^{(n-2)-(m-2)} = np(p+q)^{n-2} = np$$

Приклад

Скласти закон розподілу числа кульок білого кольору серед чотирьох відібраних, в якій є сім однакових за розміром куль, з яких три кулі є білими.

Знайти M(x), D(x).

$$P(x=x_i)=\frac{C_m^{x_i}\cdot C_{N-M}^{k-x_i}}{C_N^k}=\frac{C_3^{x_i}C_4^{4-x_i}}{C_7^4}$$

$$P(x=0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P(x=1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^3}{C_7^4}=\frac{12}{35}$$

$$P(x=2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$$

$$P(x=3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^1}{C_7^4}=\frac{4}{35}$$

x	0	1	2	3
p_i	$1/35$	$12/35$	$18/35$	$4/35$

$M(x)=\frac{12}{7}$, $D(x)=\frac{24}{49}$.

Приклад

Гральний кубик підкидають n раз. Нехай x – число появ шістки.

$$p=\frac{1}{6};\quad q=\frac{5}{6}$$

x	0	1	2	…	n
p	q^n	$C_n^1pq^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	p^n

$$M(x)=np.$$

Приклад. Ймовірність помилки для першого бухгалтера 0,1, а для другого 0,05. Скласти закон розподілу числа безпомилкових відомостей.

$$q_1=0{,}1 \qquad q_2=0{,}05$$
$$p_1=0{,}9 \qquad p_2=0{,}95$$
$$P(x=0)=P(0)=q^2=0{,}01^2 \qquad P(y=0)=q^2=0{,}0025$$
$$P(x=1)=p^2(1)=C_2^1p_1^1q_1^1=0{,}18 \qquad P(y=1)=C_2^1p_2^1q_2^1=0{,}095$$
$$P(x=2)=P_2(2)=C_2^2p_1^2q_1^0=0{,}81 \qquad P(y=2)=C_2^2p_2^2=0{,}9025$$

x	0	1	2
p_1	0,01	0,18	0,81

y	0	1	2
p_2	0,025	0,095	0,9025

12.2. Закон Пуассона

Закон розподілу випадкової величини x, яка може приймати довільні цілі невід'ємні значення $(0,1,2\ldots n)$, що описується формулою

$$P(x=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Закон розподілу Пуассона називається законом малоймовірних явищ, є граничним випадком біноміального закону.

Приклад:

– кількість народження 4 близнюків;

– кількість збоїв на автомати, лінії;

– кількість збоїв складної системи в нормальному режимі.

Закон Пуассона є законом розподілу наприклад:

$M(x)=a;\quad D(x)=a\ \sigma(x)=\sqrt{a}$

Дійсно,

$$M(x)=\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{a^m e^{-a}}{m!}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=ae^{-a}\cdot e^{a}=a$$

$M(x^2)=a^2+a$

$D(x)=a^2+a-a^2=a$

Приклад

Ймовірність того, що телефон-автомат спрацює неправильно 0,02. Скласти закон розподілу числа неправильних з'єднань при 200 спробах. Записати перший, другий, сотий та 200-й член розподілу. Знайти ймовірність не менше двох неправильних з'єднань.

x	0	1	2	100	200
p	e^{-4}	$4e^{-4}$	$8e^{-4}$	$\frac{4^{100}}{100!}e^{-4}$	$\frac{4^{200}}{200!}e^{-4}$

$p = 0,2 < 0,1, \qquad P(x=0) = \frac{x^0}{0!}e^{-4} = e^{-4}$

$\lambda = np = 4 < 10, \quad P(x=1) = \frac{\lambda}{1!}e^{-4} = 4e^{-4}$

$P(x=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-4} = 8e^{-4}, \qquad P(x=100) = \frac{x^{100}}{100!}e^{-4}$

Приклад

При підкиданні грального кубика може випасти від 1 до 60 очок. Розглянути кількість очок, що випали, як випадкову величину.

Знайти закон розподілу та математичного спадання.

x	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$M(x) = \sum x_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ маємо рівномірний розподіл.

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин:

1. Біноміальний: $P(x=m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 0; 1; 2 \ldots n$

$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
np	npq	npq

2. Пуассона: $P(x=m) = \frac{a^m e^a}{m!}, \qquad a > 0, m = 0; 1; 2 \ldots$

$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
a	a	$\sqrt{a}$

3. Геометричний: $P(x=m) = pq^{m-1}, \quad m = 1; 2 \ldots$

$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$

4. Гіпергеометричний: $P(x=m) = \frac{C_N^m \cdot C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$

$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
$\frac{nm}{N}$	$\frac{nM}{N-1}(1-\frac{M}{N})(1-\frac{n}{N})$	$\sqrt{D(x)}$

5) Рівномірний розподіл: $P(x=m) = \frac{1}{n}$

12.3. Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина X = m, яка має геометричний розподіл, якщо вона приймає значення 1, 2 … m (нескінчену, але злічену множину значень

$$P(x = m) = pq^m, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad m = 1,2 \ldots$$

Ймовірність p утворює геометричну процесію з першим членом p і знаменником q.

x_i	1	2	3	…	m
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}

Дискретна випадкова величина X = m, яка має геометричний розподіл, представляє собою кількість m випробувань, які проведені за схемою Бернуллі з ймовірністю p настання події в кожному випробуванні до першого задовільного результату.

$$M(x) = \frac{1}{p}; \quad D(x) = \frac{q}{p^2}$$

З гвинтівки виконують постріли до першого влучення з ймовірністю **p**. Закон розподілу.

x	1	2	3	…	k
p_i	p	qp	q^2p	…	$q^{n-1}p$

Знайти:

$$\sum p_i = p(q + q^2 + \cdots q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1;$$

$$M(x) = \sum x_i p_i = 1p + 2qp + \cdots kq^{n-1}p = p\left(\frac{d}{dq}(q + q^2 + \cdots q^n)\right)$$

$$= p\frac{d}{qd}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$D(x) = \frac{q}{p^2}$$

12.4. Рівномірний розподіл

Означення. ***Рівномірним розподілом*** *називається розподіл таких випадкових величин, усі значення яких лежать на деякому відрізку [a, b] і мають постійну щільність.*

Тобто $f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ h, \text{при } a < x < b, \text{ але } h \cdot (b-a) = 1,\ h = \frac{1}{b-a} \\ 0, \text{при } x > b \end{cases}$

тоді $f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, x > b \end{cases}$

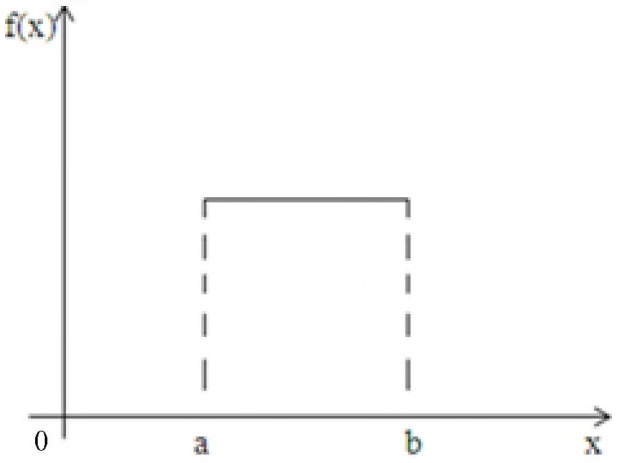


Рис. 91

Якщо X рівномірно розподілена на [a; b], то ймовірність належності x для довільного $[x_1 x_2]$ пропорційна довжині цього інтервалу $P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a, x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{(b-a)\cdot 2} = \frac{b+a}{2}.$$

$$D(x) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{\sqrt{3}\cdot(b-a)}{6}.$$

Приклад

Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини лежать на відрізку [2; 8]. Знайти ймовірність попадання на (3; 5).

$$P(3 < x < 5) = \frac{x_2 - x_1}{b - a} = \frac{5 - 3}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Приклад

Автобуси ходять з інтервалом 5 хвилин. Вважаючи, що випадкова величина X – час очікування автобусу на зупинці розподілена рівномірно на вказаному проміжку часу, знайти середній час очікування та дисперсію.

Рішення

Час очікування автобуса є випадковою величиною розподіленою рівномірно на (0; 5). Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$, де $b - a$ довжина інтервалу, на якому містяться можливі значення x за умовою $f(x) = \frac{1}{5}$.

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}.$$

$$D(x) = M(x^2) - \big(M(x)\big)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$M(x) = \frac{5}{2} = 2{,}5 \quad D(x) = \frac{25}{12}(\text{хв}^2).$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{5}{2\sqrt{3}}(\text{хв}).$$

Рівномірний закон використовується при аналізі похибок округлень, при проведенні числових розрахунків у задачах масового обслуговування, при статистичному моделюванні спостережень.

12.5. Показниковий розподіл (експоненціальний)

Аналогом закону Пуассона для неперервних випадкових величин є показниковий розподіл.

Випадкова величина X розподілена за показниковим законом, якщо щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

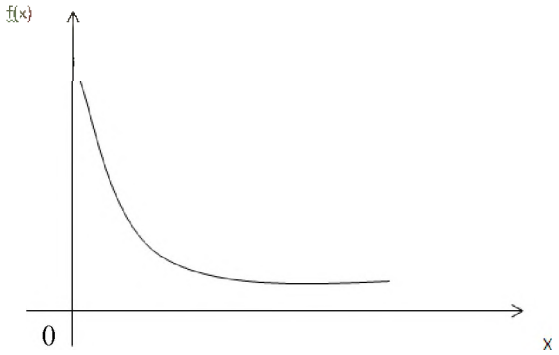


Рис. 92

Показниковому розподілу задовольняють:

– тривалість телефонної розмови;

– гарантійний термін ремонту техніки;

– час безвідмовної роботи комп'ютера та ін.

Інтегральна функція

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} xe^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

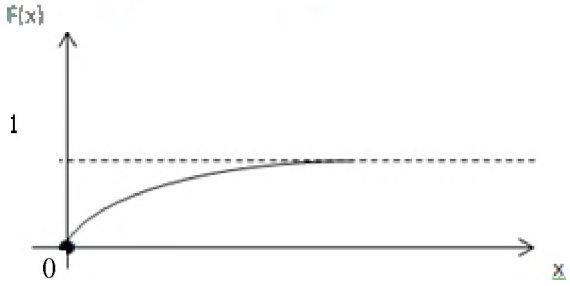


Рис. 93

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(\alpha\,;\beta)$

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\alpha) - F(\beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

$$P(x < \alpha) = 1 - e^{-\lambda\alpha}$$

Числові характеристики:

$$M(x) = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(x) = \int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - [M(x)]^2 = \left[-x^2\lambda e^{-\lambda x} - \frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_{0}^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{\lambda}$$

Якщо T – неперервна випадкова величина, що виражає час безвідмовної роботи деякого елемента, а λ-інтенсивність відмов (середнє число відмов за одиницю часу), то час t відмовної роботи цього елементу можна вважати випадковою величиною розподіленою за показниковим законом з функцією розподілу $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$, яка визначає ймовірність відмови елемента за час t.

Функція надійності $R(t)$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t: $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Приклад. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4e^{-4x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань X попаде в інтервал (0,2; 0,5).

$$P(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

$$P(0{,}2 < x < 0{,}5) = e^{-4\cdot 0{,}2} - e^{-4\cdot 0{,}5} = e^{-0{,}8} - e^{-2} = 0{,}314.$$

Для знаходження e^{-x} – використовуємо таблицю

Числові характеристики:

$$\lambda = 4;$$

$$M(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Приклад. Час розформування поїзду t - випадкова величина, що підлягає показниковому закону розподілу. Нехай $\lambda = 5$ – середня кількість поїздів розформування за 1 годину. Знайти ймовірність того, що поїзд розформовано менше ніж за 30 хвилин.

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(0{,}5) = P(T < 0{,}5) = 1 - e^{-5\cdot 0{,}5} = 1 - 0{,}082 = 0{,}918$$

Знайти ймовірність, що час розформування від 6 хвилин до 24 хвилин.

$$P(0{,}1 < T < 0{,}4) = e^{-5\cdot 0{,}1} - e^{-5\cdot 0{,}4} = e^{-0{,}5} - e^{-2} = 0{,}6065 - 0{,}1353 = 0{,}4712$$

Приклад

Ймовірність безвідмовної роботи елемента розподілена за показниковим законом $f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02t}, t > 0$. Знати ймовірність безвідмовної роботи 50 год.

$R(t) = e^{-\lambda t}$ – функції надійності;

$R(50) = e^{-0{,}02 \cdot 50} = e^{-1} = 0{,}3679.$

12.6. Стандартизований нормальний розподіл

$1. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4, \; F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

$2. M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dt = 0.$

$3. D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dt = 1.$

$4. \sigma(x) = 1.$

$5. P(\alpha \le x \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$

12.7. Нормальний розподіл

Випадкова величина x називається розподіленою за нормальним (гауссівським законом), якщо щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де а, σ – параметри розподілу, $a = M(x), \; \sigma^2 = D(x)$:

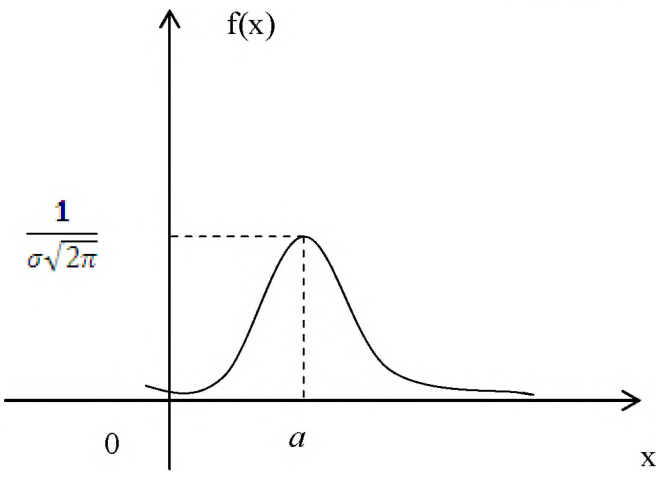


Рис. 94

крива $y = f(x)$ – крива Гаусса.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$M(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt = a$$

$$D(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt - M^2(x) = \sigma^2$$

$$\sigma(x) = \sigma$$

$$P(\alpha \le x \le \beta) = F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Функція помилок $\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt.$

12.8. Нормована функція Лапласа

$$\bar{\Phi}(x) = 0{,}5\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \text{ або } \bar{\Phi}(x\sqrt{2}) = 0{,}5\Phi(x)$$

Ймовірність попадання в інтервал випадкової величини, яка підлягає нормальному закону розподілу.

$$P(a < x < b) = 0{,}5\ [\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)]$$

Властивості:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(\infty) = 1$;

3) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$$P(|x-m| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

За допомогою цієї формули знаходять ймовірність попадання випадкової величини, що відчиняється нормальному закону в інтервалах, симетричний відносно точки а.

Приклад. Випадкова величина X розподілення за нормальним законом. Математичне сподівання.

$$M(x) = 40 = a$$

$$D(x) = 200;\ \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$P(30 < x < 80) = 0{,}5[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = 0{,}5[\Phi(2) + \Phi(0{,}5)] =$$

$$0{,}5[0{,}995 + 0{,}521] = 0{,}758$$

$$P(x < \alpha) = \Phi(\alpha) = 0{,}5 + \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$$

$$P(x > \alpha) = 1 - \Phi(\alpha) = 0{,}5 - \Phi(\tfrac{\alpha - a}{\sigma}).$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\tfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi(\tfrac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Приклад. Вважаючи, що зріст чоловіків певної вікової групи є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами a = 173 см, $\sigma^2 = 36\text{см}^2$.

1) $f(x)$ – вираз для щільності ймовірності;

2) долю костюмів четвертого зросту (176–182), яку треба передбачити в загальному об'ємі виготовлення:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}}$$

$$P(176 < x < 182) = \Phi\left(\tfrac{182-173}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{173-176}{6}\right) = \Phi\left(\tfrac{3}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417.$$

12.9. Правило трьох сигм

Якщо випадкова величина x *розподілена нормально, то* $P(|x - a| > 3\sigma) \to 0$, *тобто практично достовірною є подія, що величина* x *відхилена від свого середнього значення* a *(математичне сподівання) не більше ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення* σ. *На практиці це правило використовують так: якщо закон розподілу випадкової величини* x *невідомий, але* $|x - a| < 3\sigma$, *то можна припускати, що* X *розподілена нормально.*

$P(a - 3\sigma \le x \le a + 3\sigma) = P(|x - a| \le 3\sigma = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0{,}19973$

Сформулювати правило 3σ для неперервної випадкової величини X, a = 173, $\sigma^2 = 36$ практично достовірно, що зріст чоловіків певної вікової групи міститься в межах від $a - 3\sigma = 173 - 3 \cdot 6 = 155$ до

$a + 3\sigma = 191,\ 155 \le x \le 191.$

Приклад. Завод виготовляє стальні кульки діаметром *d*, але фактично вони відрізняються від *d*. Позначимо через *x* різницю між фактичним і проектованим значенням діаметра. Величина *x*

має нормальний розподіл із математичного сподівання, дорівнює 0 і середнім квадратичним відхиленням характеризує середню точність.

Умова, що кулька пройде контроль $-\varepsilon < x < \varepsilon$, $p(-\varepsilon < x < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon-0}{\sigma}\right) - \Phi(\left(\frac{-\varepsilon-0}{\sigma}\right) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$.

Отже, ймовірність, що кулька буде бракована: $1 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

12.10. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Назва	*f(x)*	*F(x)*	*M(x)*	*D(x)*	*P(x₁<x<x₂)*
Рівномірний	$\begin{cases}\frac{1}{6-a}, a \le x \le \\ 0, x < 0, x > \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{x_1-x_2}{b-a}$
Показниковий	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x < \end{cases}$	$\begin{cases}1 - e^{-\lambda x}, & x \ge \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$
Нормальний	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot fe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_2-}{\sigma}\right.$

12.11. Двовимірні випадкові величини

Розглядали випадкові величини X, які при кожному значенні приймали одне можливе числове значення, вони називаються одновимірним.

Випадкові величини, можливі значення яких визначаються двома, трьома,… n-числами, називаються, відповідно, двовимірними, трьохвимірними, n −вимірними.

Двовимірна випадкова величина (X, Y) визначається двома складовими або компонентами, що утворюють систему двох випадкових величин.

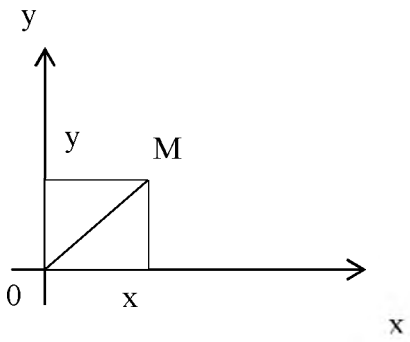


Рис. 95

Якщо складові X, Y – дискретні, то випадкова величина – дискретна. Якщо неперервні – то неперервна.

Означення. ***Закон розподілу двовимірних випадкових величин*** *називається переліком можливих значень цієї величини* (x_i, y_j) *та їх ймовірностей* $p(x_i, y_j)$ $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,m}$

Закон розподілу можна задати:

– *аналітично;*

– *таблично.*

y	x			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_n, y_m)$
y_2				
…	…	…	…	…
y_m				$P(x_n, y_m)$

Події $(X = x_i, Y = y_j, i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots m)$ утворюють повну групу, тому $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$.

Закон розподілу двовимірної випадкової величини дозволяє отримати закони розподілу кожної компоненти X та Y. Щоб знайти $p(x = x_i)$, потрібно додати по стовпцях «x_i», а щоб $p(y = y_j)$, потрібно додати по рядках «y_j».

Приклад

Знайти закони розподілу компонентів двовимірної ДВВ. Закон задано таблицею.

y	x		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

Закон розподілу X:

$p(x_1) = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16$

$p(x_2) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48$

$p(x_3) = 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}36$

Закон розподілу Y:

$p(y_1) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6$

$p(y_2) = 0{,}4$

x	x_1	x_2	x_3
p	0,16	0,48	0,36

y	y_1	y_2
p	0,6	0,4

Приклад

У двох ящиках знаходяться по 6 кульок. В першому ящику: 1 з № 1, 2 з № 2, 3 з № 3. У другому ящику: 2 з № 1, 3 з № 2, 1 з № 3. Нехай x – номер кульки, витягнутої з першого ящика. y – номер кульки, вийнятої з другого ящика. З кожного ящика вийняли по одній кульці. Скласти таблицю розподілу.

Випадкова точка	(1; 1)	Має кратність	1 x 2 = 2
	(1; 2)		1 x 3 = 3
	(1; 3)		1 x 1 = 1
	(2; 1)		2 x 2 = 4
	(2; 2)		2 x 3 = 6
Усього випадкових точок 6 x 6 = 36	(2; 3)		2 x 1 = 2
	(3; 1)		3 x 2 = 6
	(3; 2)		3 x 3 = 9
	(3; 3)		3 x 1 = 3

Одержимо закон розподілу:

X \ Y	1	2	3
1	$1/18$	$1/12$	$1/36$
2	$1/9$	$1/6$	$1/18$
3	$1/6$	$1/4$	$1/12$

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{12}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{7}{3}$$
$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{11}{6}$$

$(m_x, m_y) = (\frac{7}{3};\frac{11}{6})$ – центр розсіювання.

Випадкові величини незалежні:

x_i	1	2	3
p_i	$1/6$	$1/3$	$1/2$

y_i	1	2	3
p_i	$1/3$	$1/2$	$1/6$

$$m_x = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{3} \qquad m_y = \frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

$$D(x) = (-\tfrac{4}{3})^2\cdot\frac{1}{18}+(-\tfrac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{9}+(\tfrac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{6}+(-\tfrac{4}{3})^2\cdot\frac{1}{12}+(-\tfrac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{6}+(\tfrac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{4}+(-\tfrac{4}{3})^2\cdot\frac{1}{36}+(-\tfrac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{18}+(\tfrac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{5}{9}$$
$$\sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$D(y) = (-\tfrac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{18}+(-\tfrac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{9}+(-\tfrac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6}+(\tfrac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{12}+(\tfrac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{6}+(\tfrac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{4}+(\tfrac{7}{6})^2\cdot\frac{1}{36}+(\tfrac{7}{6})^2\cdot\frac{1}{18}+(\tfrac{7}{6})^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{17}{36}, \qquad \sigma_y=\frac{\sqrt{17}}{6}$$

$$C_{xy} = (-\tfrac{4}{3})\cdot(-\tfrac{5}{6})\cdot\frac{1}{18}+(-\tfrac{4}{3})\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\cdots=0 \qquad \sigma_{xy}=0$$

Закон розподілу системи неперервних випадкових величин (x, y) задамо за допомогою функції ймовірності f(x, y) ймовірність попадання випадкової точки (x, y) в область D визначається $P[(x,y) \subset D = \iint f(x,y)dxdy.$

Властивості:

1) $f(x,y) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Якщо всі випадкові точки належать області D, то $\iint f(x,y)dxdy = 1.$

Числові характеристики: D.

Математичне сподівання дискретних випадкових величин (X;Y) визначається за формулами:

$m_x = M(X) = \sum_{i=m}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}$

$m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}.$

Точка $(m_{x1}m_y)$ називається центром розсіювання системи випадкових x_m величин (X;Y).

Дисперсія $D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2;\ D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,(y_j - m_y)^2;\ D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2$

Дисперсія $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x,y)dxdy;$

НВВ $D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f(x,y)dxdy;$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$

Приклад. Система випадкових величин (X,Y) підлегла закону:

1) $f(x) = \begin{cases} a(x+y) - \text{в області } D \\ 0, \quad \text{поза областю } D \end{cases}$

область D обмежена лініями: $x = 0; x = 3;\ y = 0; y = 3.$

Знайти ймовірність попадання в квадрат а: $x = 1; y = 1; x = 2; y = 2.$

$a\int_0^3\int_0^3 (x+y)dxdy = 1;$

$a\int_0^3 (xy + \frac{y^2}{2})dx = a\int_0^3 (3x + \frac{9}{2})dx = a\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}\right)\Big|_0^3 = 27a,\ a = \frac{1}{27}.$

$P\big((x;y) \subset Q\big) = \frac{1}{27}\int^2\int_1^2 (x+y) = \frac{1}{27}\int_1^2 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_1^2 dx = \frac{1}{27}(\frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2})\Big|_1^2 = \frac{1}{9}.$

$$m_x = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)dxdy = \frac{1}{27}\int_0^3 (x^2y + \frac{xy^2}{2}\Big|_0^3)dx = \frac{1}{27}\left(27 + \frac{21}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

$$m_y = \frac{4}{7}$$

$$D(x) = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2(x+y)dydx = \frac{11}{16}; \quad \sigma(x) = \frac{\sqrt{11}}{4}, \sigma(y) = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

12.12. Кореляційний момент (коваріація)

Важливу роль у теорії випадкових величин відіграє кореляційний момент

$$K_{xy} = M[(x-m_x)(y-m_y)].$$

Для дискретних $K_{xy} = \sum_m \sum_n (x_n m_x)(y_m - m_y)p_{nm}$.

Для неперервних $K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$.

Кореляційний момент можна знайти:

$$K(XY) = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Для дискретних $M(XY) = \sum_m \sum_n x_n y_m p_{nm}$.

Для неперервних $M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(xy)dxdy$.

Означення. ***Випадкові величини називаються незалежними****, якщо ймовірність однієї з них прийняте значення, що лежить у довільному проміжку області її значень, не залежить від того, яке значення прийняла інша величина.*

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y);\ K_{xy} = 0.$$

Для характеристики зв'язку між величинами X та Y розглядають коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$, що є безрозмірною величиною.

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то $r_{xy} = 0$.

Якщо X та Y пов'язані лінійною залежністю:

$Y = aX + b$, то $r_{xy} = 1$, при $a > 0$

$r_{xy} = -1$, при $a < 0$

Взагалі: $-1 \le r_{xy} \le 1$

$$y = a_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x)$$

$$x = a_x + \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y)$$

Коваріація двох випадкових величин характеризує як ступінь залежності випадкових величин, так і розсіювання навколо точки з координатами ($m_x m_y$).

Приклад

Задано закон розподілу с-ми двох дискретних випадкових величин ($X;Y$).

X / Y	5	10	15	p_y
2	0,01	0,2	0,09	0,3
4,5	0,2	0,02	0,18	0,4
7	0,19	0,08	0,03	0,3
p_x	0,4	0,3	0,3	1

$$M(x) = \sum x_i p_x = 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}3 = 9{,}5$$

$$M(x^2) = \sum {x_i}^2 p_x = 25 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}3 + 225 \cdot 0{,}9 + 107{,}5$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 107{,}5 - 90{,}25 = 17{,}25$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} = 4{,}15$$

$$M(y) = \sum y_i p_j = 2 \cdot 0{,}3 + 4{,}5 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}3 = 0{,}6 + 1{,}8 + 2{,}1 = 4{,}5$$

$$M(y^2) = \sum {y_i}^2 p_j = 4 \cdot 0{,}3 + 20{,}25 \cdot 0{,}4 + 49 \cdot 0{,}3 = 24$$

$$D(y) = M(y^2) - M^2(y) = 24 - 4{,}5^2 = 3{,}75$$

$$\sigma_y = 1{,}94$$

$$M(xy) = \sum y_j \cdot x_i \cdot p_{ij}$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 15 \cdot 0{,}09 + 4{,}5 \cdot 5 \cdot 0{,}2 + 4{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}02 + 4{,}5 \cdot 15 \cdot 0{,}18 + 7 \cdot 5 \cdot 0{,}19 + 7 \cdot 10 \cdot 0{,}08 + 7 \cdot 15 \cdot 0{,}03 = 37{,}32$$

$$K_{xy} = M(xy) - M(x)M(y) = 37{,}32 - 9{,}5 \cdot 4{,}5 = -5{,}43$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-5{,}43}{4{,}15 \cdot 1{,}94} = -0{,}67.$$

12.13. Умовні закони розподілу двовимірної дискретної випадкової величини

Нехай двовимірна дискретна випадкова величина дискретна з можливими значеннями складових $x_1, x_2 \dots x_n y_1 \dots y_m$.

Означення. *Умовним розподілом складової* X при $Y = y_j$ *називається сукупність умовних ймовірностей за умови, що подія* $Y = y_j$ *вже відбулася:*

$$p(x_i/y_{j_{const}}) = \frac{p(x_i, y_j = const)}{p(y_j = const)}, \quad i = 1,2 \dots n, \quad \text{контроль: } \sum p(x_i/y_j) = 1$$

Аналогічно:

$$p(y_i/x_{j_{const}}) = \frac{p(x_i = const, y_j)}{p(x_j = const)}, \text{ контроль: } \sum p(y_j/x_i) = 1$$

X / Y	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0,4$	0,15	0,3	0,35
$y_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

Знайти:

а) безумовні розподіли складових

x	2	5	8
p	0,2	0,42	0,38

y	0,4	0,8
p	0,8	0,2

б) умовний закон розподілу x при $Y = y_1 = 0,4$

$p(x_i/y_i), y_1 = 0,4\ const, \quad i = 1,2,3.$

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.15}{0.8} = \frac{3}{16}$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}$$

$$p(x_3/y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.35}{0.8} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

X	3	2	5
$P(x/y_1)$	3/16	3/8	7/16

в) Умовний закон розподілу Yпри $x_2 = 5$.

$$p(y_1/x_2) = \frac{p(x_2,y_1)}{p(x_2)} = \frac{0.3}{0.42} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

$$p(y_2/x_2) = \frac{p(x_2,y_2)}{p(x_2)} = \frac{0.12}{0.42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

y	0,4	0,8
$P(y/x_2)$	5/7	2/7

Числові характеристики для цих умовних законів називаються умовними.

Умовним математичним сподіванням ДВВ Y при $X = x_i$(x_i-певне можливе значення X) називають добуток можливих значень Y на їхні умовні ймовірності.

$$M(Y/x = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j/x_i)$$

$$M(X/y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i/y_j)$$

Умовна дисперсія:

$$D\left(Y/x = x_i\right) = \frac{1}{px_i}\sum_{i=1}^{n} y_j{}^2 p(y_j/x_i) - M^2(Y/x = x_i)$$

$$D(X/y = y_j) = \frac{1}{Py_j}\sum_{i=1}^{m} x^2 p(x_i/y_j) - M^2(X/y = x_{yij})$$

$$\sigma(Y/x = x_i) = \sqrt{D(Y/x = x_i)} \quad \sigma(X/y = y_j) = \sqrt{D(X)y} = y_i$$

$$M(x/y = 0{,}4) = 2 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{7}{16} = \frac{23}{4}$$

$$M(x^2/y = 0{,}4) = 4 \cdot \frac{3}{16} + 25 \cdot \frac{3}{18} + 64 \cdot \frac{7}{16} = \frac{305}{8}$$

$$D(x/y = 0{,}4) = M(x^2/y = 0{,}4) - M^2(x/y = 0{,}4) = \frac{305}{8} - (\frac{23}{4})^2 = \frac{81}{16} =$$

5,0625.

$$\sigma = 2{,}25$$

$M(y/x)$ – як функція відхілення: $f(x)$ – називається функцією регресії Y на X

$M(x/y)$ – як функція відхілення: $g(y)$ – називається функцією регресії X на Y

Означення. ***Функція розподілу n-вимірної*** *в.в.* $x_1, x_2 \ldots x_n$ *називається функція* $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, *яка дорівнює ймовірності суміс-ного виконання n нерівностей.*

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2 \ldots X_n < x_n)$$

Означення. ***Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y)*** *називають функцію F(x, y), яка визначається для пари кожних чисел (x, y) ймовірність того, що X прийме значення менше за x, і при цьому Y прийме значення менше за y.*

Геометрично: значення функції F(x, y) дорівнює ймовірності попадання випадкової точки (x, y) в заштриховану частину.

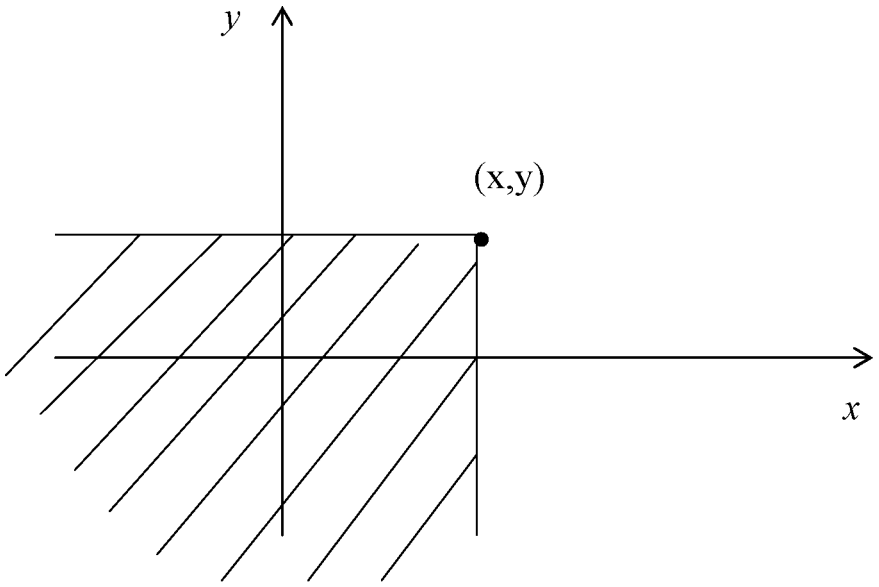


Рис. 96

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. Функція неспадна за кожним з аргументів:

$x_1 > x_1, F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$

$y_2 > y_1, F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

3. $F(x,-\infty) = F(-\infty;y) = F(-\infty;\infty) = 0$.
4. $F(x,+\infty) = F_1(x);\ \ F(+\infty;y) = F_2(y)$,

де $F_1(x) = P(x < x)$ – функція розподілу випадкової величини X.

$F_2(y) = P(y < y)$

Функція розподілу для дискретних випадкових величин являє собою деяку ступінчату поверхню.

Означення. *Ймовірність попадання випадкової точки в частину смуги дорівнює приросту функції розподілу за одним із аргументів, яку називають* ***функцією регресії y на x або регресією y на x.***

Графіки – відповідні лінії регресії.

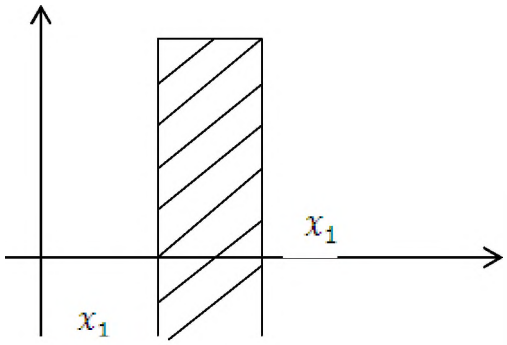


Рис. 97

$$P(x_1 \le X \le x_2, Y < y) = F(x_2; y) - F(x_1; y)$$

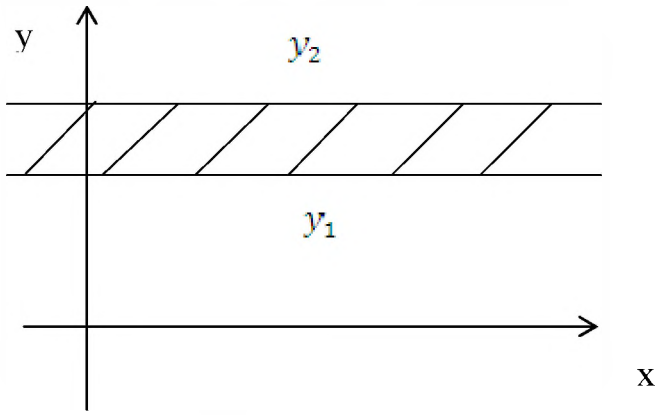


Рис. 98

$$P(x < x, y_1 \le Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x_1, y_1)$$

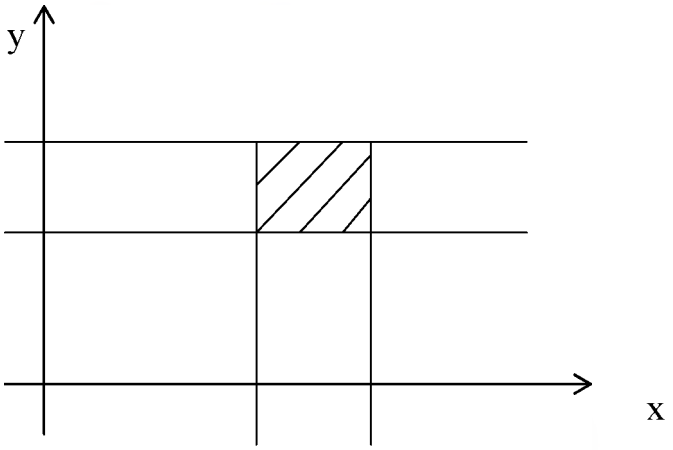


Рис. 99

$$P(x_1 \le x \le x_2, y_1 \le Y \le y_2 = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

Для неперервної випадкової величини

Означення. ***Двовимірна випадкова величина (X, У) називається неперервною****, якщо її функція розподілу F(x, y) неперервна функція, яка є диференційованою за кожним з аргументів і для якої існує* $F''_{xy}(x,y)$.

Означення. ***Щільністю ймовірності*** $f(x,y)$ *неперервної двовимірної випадкової величини (x, y) називають другу мішану похідну від функції розподілу*

$$\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометрично це поверхня у просторі, поверхня розподілу.

Властивості:

1. $f(x,y) \geq 0;$
2. $P(x,y \in D) = \iint f(x,y)dxdy;$
3. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy;$
4. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Завдання для самостійної роботи

1. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показниковим законом, заданим щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3e^{-3x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини *X* в інтервал (0,13; 0,7).

2. Випадкова величина *X* є нормально розподіленою з математичним сподіванням $a = -2$ і дисперсією $D = 7$. Записати вирази для щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$ і побудувати їхні графіки. Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (–4, 7). Яка ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше, ніж на 3 одиниці?

3. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (*X*, *Y*).

y \ x	0	2	3
–1	0,2	0,11	0,09
2	0,05	0,05	0,1
5	0,1	0,1	a

Знайти значення параметра a. Обчислили кореляційний момент системи випадкових величин, коефіцієнт кореляції та $M(Y/X=2)$.

4. $f(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y), & \text{в області D} \\ 0, & \text{поза областю D} \end{cases}$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$

Знайти: $a, m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$.

Тема 13. Закон великих чисел. Граничні теореми

Під **законом великих чисел** розуміють сукупність теорем, в яких встановлюється зв'язок між середнім значенням досить великої кількості випадкових величин та середнім арифметичним їхніх математичних сподівань.

Закон великих чисел *– основа практичного використання теорії ймовірностей.*

13.1. Лема Чебишева

Нехай X додатна випадкова величина із скінченним математичним сподіванням M(X), тоді $P(X \ge 1) \le M(X)$.

Тобто якщо випадкова величина X набирає лише невід'ємні значення, тоді ймовірність того, що при випробуванні вона набере значення, яке більше від додатного числа a, не переважає дробу, в чисельнику якого M(X), а значення – число a.

$P(X \ge a) \le \frac{M(X)}{a}$ – нерівність Маркова

$P(X \le a) \ge 1 - \frac{M(X)}{a}$.

Приклад

Середнє споживання електроенергії в населеному пункті 12 000 кВт/год. Визначити ймовірність того, що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом доби перевищує 50 000 кВт/год.

Розв'язання

$$M(X) = 12000\frac{\text{кВт}}{\text{год}}, x \geq 50000.$$

Використаємо нерівність Маркова

$$P(x > a) = \frac{M(X)}{a}; \quad P(x > 50000) \leq \frac{12000}{50000} = 0{,}24;$$

$$P(x > 50000) \leq 0{,}24.$$

Приклад

Нехай число телефонних дзвінків у будь-які 20 хвилин розподілено за законом Пуассона з математичним сподіванням 100. Обчислити ймовірність того, що кількість дзвінків перевищує 120.

Розв'язання

$$P(X \geq 120) \leq \frac{M(X)}{120} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

13.2. Нерівність Чебишева

Нехай X – випадкова величина математичного сподівання $M(X)$ та дисперсії $D(x)$, $\forall\, \varepsilon$ як завгодно мала величина, тоді ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від математичного сподівання $M(X)$ за абсолютною величиною не менше будь-якого додатного ε обмежена зверху величиною $D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Відхилення випадкової величини від математичного сподівання менше ніж ε виражається:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Приклад

Відомо, що $\frac{3}{4}$ всієї продукції, що виробляється заводом першого ґатунку. Оцінити ймовірність того, що число виробів першого ґатунку серед 200 000 виготовлених відрізнятиметься від математичного сподівання цього числа не більше ніж на 2 000 штук.

Розв'язання

$$p = \frac{3}{4} = 0{,}75;\ n = 200000;\ \varepsilon = 2000;\ q = 0{,}25$$

$$M(X) = np = 200000 \cdot 0{,}75 = 150000$$

$$D(X) = npq = 200000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 37500, \text{тоді}$$

$$P(|X - M(X)|) < \varepsilon \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2};\ P(x - 150000) < 2000 \geq 1 - \frac{37500}{20000^2} = 0{,}990625$$

Приклад

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що при 1 000 підкиданнях монети число випробувань герба знаходиться в межах від 450 до 550.

Розв'язання

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$$

$$D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 250$$

Нерівність Чебишева

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$$

$\varepsilon = |450 - 500| = |550 - 500| = 50$ – *різниця між межами та математичним сподіванням.*

$$P(|X - 500| \leq 50) \geq 1 - \frac{250}{50^2} = 0{,}9$$

Приклад

Яку найменшу кількість разів потрібно підкинути монету, щоб із ймовірністю якнайменше 0,9 очікувати випадання герба від 0,4 до 0,6.

x – випадкова величина, m – поява герба, n – кількість підкидань.

$$M(x) = M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{np}{n} = p = 0{,}5$$

$$D(x) = \frac{npq}{n^2} = \frac{0{,}25}{n}$$

$$\varepsilon = 0{,}1$$

$$P(0{,}42 < x < 0{,}6) = P(-0{,}1 < x - M(x) < 0{,}1) = P(|x - M(x)| < 0{,}1 \geq 1 - \frac{0{,}25}{0{,}1^2 n} = 0{,}9$$

$$1 - \frac{0{,}25}{0{,}1^2 n} \geq 0{,}9, \quad n \geq 250.$$

13.3. Теорема Чебишева (про стійкість середнього арифметичного)

Нехай $x_1, x_2 \ldots x_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин для яких $M(x_i) = a_i; \quad D(x_i) \leq c,$ тоді $\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$

При доведенні теореми отримаємо

$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$ яка застосовується на практиці.

або $P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n} - M(x)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(x)}{n\varepsilon^2}.$

Приклад

Нехай у результаті 100 незалежних дослідів знайдено значення випадкової величини x: $x_1, x_2 \ldots x_{100}$.

Нехай математичне сподівання $M(x) = 10, \ D(x) = 1$. Оцінити знизу ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним значенням випадкової величини $\frac{\sum_{i=0}^{100} x_i}{100}$ та математичним сподіванням менше ½.

Розв'язання

Використаємо рівність:

$$P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n} - M(x)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(x)}{n\varepsilon^2}$$

$$n = 100, M(x) = 10, \ D(x) = 1, \ \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} - 10\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\mathbf{1}}{100 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{24}{25} = 0{,}96.$$

Приклад

У результаті 200 дослідів знайдені значення випадкової величини x: $x_1, x_2 \ldots x_{200}, M(x) = D(x) = 2$. Оцінити знизу ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним значенням випадкової величини та математичним сподіванням менше $\frac{1}{5}(0{,}75)$.

13.4. Центральна гранична теорема

Нехай задана послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $x_1, x_2 \ldots x_n$. $M(x_i) = 0, \quad D(x_i) = b, \; i = 1,2.$

Розглянемо випадкову величину $Y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, тоді $M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i) = 0$.

$$D(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) = nb.$$

При $n \to \infty$ функція розподілу

$$F_{yn}(x) = P(Y_n < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi nb}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2nb}} dz,$$

тобто сума буде розподілена за нормальним законом, математичне сподівання дорівнює 0 та дисперсія nb.

Наслідок

При $n \geq 30$ розподіл суми однаково розподілених випадкових величин мало відрізняється від нормального розподілу.

13.5. Теорема Бернуллі

Встановлює зв'язок між частотою події і її ймовірністю при постійних умовах випробувань.

Теорема Бернуллі. *Нехай ймовірність появи події A в кожному із незалежних повторних випробувань = p, m – число появ події A (частота появи) в n випробуваннях.*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1, \qquad \varepsilon = 0$$

При доведенні теореми одержимо:

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq \frac{1-P}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, яка використовується на практиці.

Приклад

Ймовірність дозрівання кукурудзи з трьома стручками дорівнює $\frac{3}{4}$. Оцінити ймовірність того, що серед 300 стебел з трьома стручками буде за абсолютною величиною відрізнятись від ймовірності дозрівання такого стебла не більше ніж на 0,02.

Розв'язання: $p = \frac{3}{4}; n = 3000; \varepsilon = 0{,}02; q = \frac{1}{4}.$

$$P\left(\left|\frac{m}{3000} - \frac{3}{4}\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{nq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 3000 \cdot 0{,}02} = \frac{63}{64} = 0{,}984.$$

Приклад

Монету підкидають 1 000 разів. Оцінити знизу ймовірність відхилення випадання герба від ймовірності його появи менше ніж на 0,1.

$$n = 1000; p = q = \frac{1}{2};\ \varepsilon = 0{,}1.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1\right) > 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1000 \cdot (0.1)^2} = \frac{39}{40}.$$

$$\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1; 400 < m < 600.$$

Ймовірність числа попадання герба в інтервал (400; 600) більша $\frac{39}{40}$.

13.6. Теорема Ляпунова

Нехай задана послідовність незалежних випадкових величин $(X_1, X_2 \ldots X_n)$, таких, що $M(x_i) = 0\ \ D(x_i) = b_i^2$.

Побудуємо суми випадкових величин $Y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Позначимо $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, якщо виконується умова рівномірної малості величин, то утворюють суму $\frac{1}{B_n^3} = \sum_{i=1}^{n} (M(X))^3 \to 0$ при $n \to x$, то сума Y_n буде розподіленою нормально з математичним сподіванням $M(Y_n) = 0, D(Y_n) = B_n^2$.

13.7. Теорема Пуассона

Встановлює стійкість частини при змінних умовах випробувань.

Якщо проводиться n незалежних випробувань і ймовірність появи події А в і-тому випробовуванні p_i, то при збільшенні n частина $\frac{m}{n}$ появи події А збігається, а ймовірностей до середньоарифметичного ймовірностей p_i

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right|\right) < \varepsilon = 1$ ε – як завгодно мале, додатне число.

Приклад

Стрільба ведеться почергово з трьох гармат ймовірність попадання в ціль кожної 0; 2; 0; 4; 0; 6; проведено 600 пострілів.

Встановити, що частота відрізняється від середньої ймовірності попадання не більше ніж на 0,05.

Розв'язання:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| < \varepsilon \geq 1 - \frac{\bar{p}\bar{q}}{n\varepsilon^2}\right.$$

$p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}4;\ p_3 = 0{,}6; m = n_2 = n_3 = 200;\ n = 600; q_1 = 0{,}8;\ q_2 = 0{,}6;\ q_3 = 0{,}4;\ \varepsilon = 0{,}05.$

$$\bar{p} = \frac{0.2\cdot 200 + 0.4\cdot 200 + 0.6\cdot 200}{600} = 0{,}4.$$

$$\bar{p}\bar{q} = \frac{0.2\cdot 0.8\cdot 200 + 0.4\cdot 0.6\cdot 200 + 0.6\cdot 0.4\cdot 200}{600} = \frac{0.64}{3}.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0{,}4\right| < 0{,}05\right) > 1 - \frac{0.64}{3\cdot 600\cdot 0.05} = \frac{193}{225} = 0{,}86.$$

13.8. Функції одного випадкового аргументу

Нехай задано закони розподілу двох дискретних випадкових величин

x	x_1	x_2	$\ldots x_n$
p_i	p_1	p_2	$\ldots p_n$

y	y_1	y_2	$\ldots y_m$
p_j	p_1	p_2	$\ldots p_m$

Означення. ***Добутком*** *дискретної випадкової величини X на сталу величину k називають випадкову величину Z = kx, що приймає значення* $Z_i = kx_i$ *з тими ж ймовірностями* $P(z_i = kx_i) = p_i$.

Означення. ***r-тою стелінню*** *випадкової величини* $X(x')$ *називають випадкову величину* $Z_i = x_i^r$ *з тими ж ймовірностями* $P(z = x_i^r) = p_i$.

Означення. ***Алгебраїчною сумою*** *двох дискретних випадкових величин X та У називають випадкову величину, що приймає всі можливі значення* $x_i \pm y_j;\ i = 1 \ldots n;\ j = 1 \ldots m$ *з ймовірністю* $p_{ij} = P(x = x_i;\ y = y_j)$.

Означення. ***Добутком (часткою)*** *двох дискретних випадкових величин X та У називається випадкова величина, яка приймає всі можливі значення* $x_i y_j\ (x_i / y_j); i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$ *з ймовірністю* $p_{ij} = P(x = x_i \cdot y = y_j)$.

Зауваження. Якщо випадкові величини незалежні $p_{ij} = p_i \cdot p_j$.

Приклад

Задано закони розподілу

x	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,4	0

y	1	2	4
p_i	0,4	0,5	0,1

Побудувати: $V = X \cdot Y$

V	1	2	3	4	6	8	12	16	24
p_i	0,08	0,1	0,12	0,18	0,19	0,2	0,08	0,04	0,01

y \ X	$^{1}/_{0,4}$	$^{2}/_{0,5}$	$^{4}/_{0,1}$
$^{1}/_{0,2}$	$^{1}/_{0,08}$	$^{2}/_{0,1}$	$^{4}/_{0,02}$
$^{3}/_{0,3}$	$^{3}/_{0,12}$	$^{6}/_{0,15}$	$^{12}/_{0,03}$
$^{4}/_{0,4}$	$^{4}/_{0,16}$	$^{8}/_{0,2}$	$^{16}/_{0,04}$
$^{6}/_{0,1}$	$^{6}/_{0,04}$	$^{12}/_{0,05}$	$^{24}/_{0,01}$

$M(V) = 5{,}94;\quad M(V^2) = 46{,}48;\quad D(V) = M(V^2) - M^2(V) = 11{,}2.$

Означення. *Нехай задано функцію У дискретної випадкової величини х, тобто* $y = y(x)$. *Якщо різним випадковим значенням величини х відповідають різні значення випадкової величини У, то ймовірності випадкових значень випадкової величини У є рівні* $P(Y = y_j) = P(x = x_i)$, *то значення ймовірностей додаються.*

13.9. Числові характеристики

Нехай задано функцію У дискретного випадкового аргументу Х, тоді числові характеристики Y визначаються:

$$M(Y) = m_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - m_y)^2 \cdot p_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i) p_i - (\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i \cdot p_i))^2$$

Приклад

Три спортсмени роблять по два постріли у мішень. Знайти закон розподілу випадкової величини Х – загальна кількість влучень.

Знайти М(Х):

Для $x_1: p_1 = 0{,}6;\ q_1 = 0{,}4$

$$P(x_1 = 0) = C_2^0 p_1^0 q_1^2 = 0{,}16$$
$$P(x_1 = 1) = C_2^1 p_1^1 q_1^1 = 0{,}48$$
$$P(x_1 = 2) = C_2^2 p_1^2 q_1^0 = 0{,}36$$

Для $x_2: p_2 = 0{,}8;\ q_2 = 0{,}2$

$$P(x_2 = 0) = C_2^0 p_2^0 q_2^2 = 0{,}04$$
$$P(x_2 = 1) = C_2^1 p_2^1 q_2^1 = 0{,}32$$
$$P(x_2 = 2) = C_2^2 p_2^2 q_2^0 = 0{,}64$$

Для x_3:

$$P(x_3 = 0) = C_2^0 p_3^0 q_3^2 = 0{,}25$$
$$P(x_3 = 1) = C_2^1 p_3^1 q_3^1 = 0{,}5$$
$$P(x_3 = 2) = C_2^2 p_3^2 q_3^0 = 0{,}25$$

Знайдемо закон $x_1 + x_2$

x_1 \ x_2	0	1	2
	0,04	0,32	0,64
0	0	1	2
0,16	0,0064	0,0112	0,11024
1	1	2	3
0,18	0,0192	0,1536	0,3072
2	2	3	4
0,36	0,0144	0,1152	0,2304

$x_1 + x_2$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p_i	0,064	0,0704	0,2704	0,4224	0,2304

Знайдемо таблицю $(x_1 + x_2) + x_3$

x_3 \ x_1+x_2	0	1	2	3	4
	0,064	0,0704	0,2704	0,4224	0,2304
0	0	1	2	3	4
0,25	0,016	0,0176	0,0676	0,1056	0,0576
1	1	2	3	4	5
0,5	0,0032	0,5052	0,352	0,2112	0,1152
2	2	3	4	5	6
0,25	0,0016	0,0176	0,676	0,1056	0,0576

x	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,0016	0,0208	0,1044	0,25840	0,3364	0,2208	0,5576

Приклад

Випадкова величина має розподіл:

$Y=2^x$	2^{-1}	2^0	2^1	2^2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти: $M(Y)$, $D(Y)$, $Y = 2^x$.

$Y=2^x$	2^{-1}	2^0	2^1	2^2
2^x	1/2	1	2	4
p	0,2	0,1	0,3	0,4

$$M(Y) = \sum y_i p_i = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 p_i - M^2(y) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}4 - (2{,}4)^2 = 0{,}98$$

13.10. Функції неперервного випадкового аргументу

Нехай x – неперервна випадкова величина із заданою щільністю розподілу $f(x),\ y = y(x)$.

Тоді:

$$G(Y) = P(Y < y) = P\{x < \varphi(y)\} = F_x(\varphi(y)) = \int_0^{\varphi(y)} f(x)dx$$

$$M(Y) = M[y(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

якщо $x \in [a;b]:\quad M(Y(x)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$

$$D(Y) = D(Y(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M(\varphi(x))]^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(x)))^2,$$

якщо

$$x \in [a;b]:\quad D(Y) = D(\varphi(x)) = \int_a^b [\varphi(x) - M(\varphi(x))]^2 f(x) dx =$$

$$= \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(x)))^2$$

Приклад

Випадкова величина x задана $f(x) = \cos x$ *в* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad f(x) = 0$.

Знайти $M(Y) = M(x^2) \quad \varphi(x) = x^2$.

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$D(Y) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)dx - M^2(\varphi(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx = (\frac{\pi^2 - 8}{4})^2 = 20 - 2\pi^2$$

13.11. Функція двох випадкових аргументів

Нехай X та Y неперервні незалежні випадкові величини, що мають щільність розподілів $f_1(x), f_2(y)$. При цьому якщо щільність хоча б одного задана на (–∞; ∞), то щільність розподілу $g(z) = x + y$.

$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)dx$ або $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-x) f_2(y)dy$.

Для невід'ємних значень:

$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x)dx$ або $g(z) = \int_0^z f_1(z-y) f_2(y)dy$.

Означення. ***Щільність розподілу суми*** *незалежних випадкових величин називається композицією.*

Якщо $f_1(x)$ та $f_2(y)$ задані на обмежених інтегралах, то для обчислення щільності величини $z = x + y$ доцільно спочатку визначити функцію *G(Z),* а потім продиференціювати $g(z) = G(Z)$.

Якщо X та Y незалежні, то: $P(x, y \subset D) = \iint f_1(x) f_2(y)dxdy$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x	1	3	4	9
p_i	0,1	0,3	0,45	0,15

За нерівністю Чебишова оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| \prec 4$.

2. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ (x-2)^2, & 2 \le x < 3, \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність події $A = \left\{ |X - M(x)| \prec \frac{1}{2} \right\}$.

РОЗДІЛ 3
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 14. Основні поняття математичної статистики

14.1. Основні положення вибіркового методу

Математична статистика розробляє методи отримання математичного опису й обробки експериментальних даних, які надають змогу за результатами випробувань робити ймовірнісні висновки про закономірності випадкових масових явищ.

Основні задачі математичної статистики:

1) оцінка невідомої функції розподілу;

2) оцінка невідомих параметрів розподілу;

3) статистична перевірка гіпотез;

4) довірчі інтервали.

Означення. ***Генеральною сукупністю*** *називають усю сукупність однорідних об'єктів, яку вивчають відносно деякої кількісної або якісної ознаки, що характеризує ці об'єкти.*

Означення. ***Вибірковою сукупністю*** *(вибіркою) називають сукупність випадково відібраних об'єктів з генеральної сукупності.*

Означення. ***Повторною*** *називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед вибором наступного) повертається в генеральну сукупність.*

Означення. ***Безповторною*** *називають вибірку, при якій відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається.*

Означення. ***Репрезентативною*** *називають вибірку, яка правильно представляє пропозиції генеральної сукупності.*

Означення. *Значення ознаки* x_n *у окремих членів сукупності називають* ***варіантами,*** *а числа, які вказують, скільки разів повторюється кожна варіанта, –* ***частотами*** n_i.

Означення. ***Об'ємом*** *вибіркової чи генеральної сукупності називають кількість об'єктів цієї сукупності (*n*).*

Означення. ***Варіаційний ряд*** *– це сукупність елементів вибірки, записаних у порядку зростання (позначають* x_i*) та відповідних їм частот (*n_i*) або відносних частот* $w_i = \frac{n_i}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right)$.

Приклад

Нехай у вибірці з n варіант x_1, x_2, ... x_n ознака x прийняла значення $x_1 - n_1$ раз, значення $x_2 - n_2$ рази; значення $x_m - n_m$ раз.

Означення. *Статистичний розподіл вибірки – це перелік варіант* x *і відповідні їм значення частот або відносних частот.*

Варіанта x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m
Частота n_i	n_1	n_2	…	n_i	…	n_m
Відносна частота w_i	w_1	w_2	…	w_i	…	w_m

Одержимо дискретний варіаційний ряд.

Інтервальний варіаційний ряд запишеться так:

Інтервал	$[x_1 - x_2]$	$[x_2 - x_3]$	…	$[x_{i-1} - x_i]$	…	$[x_{n-1} - x_n]$	$\sum$
Частота n_i	n_1	n_2	…	n_i	…	n_k	n
Відносна частота w_i	w_1	w_2	…	w_i	…	w_k	1

Інтервальний ряд можна умовно перебудувати у дискретний шляхом заміни кожного інтервалу його серединою.

14.2. Функція розподілу вибірки

Означення. ***Теоретичною функцією розподілу*** *називають функцію розподілу* $F^*(x)$ *генеральної сукупності. Вона означає ймовірність події* $X < x$.

$F(x) = P(X < x)$.

Означення. ***Функцією розподілу вибірки*** *(емпіричною функцією розподілу) називають функцію* $F^*(x)$*, яка означає для кожного значення* x *відносну частоту події* $X < x$*:*

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число тих x_i, для яких $x_i < x$, n – об'єм вибірки. При великих n $F^*(x) = F(x)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} p[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1$, для довільного $\varepsilon > 0$.

Властивості емпіричної функції розподілу:

1) значення емпіричної функції належать відрізку [0; 1];

2) $F^*(x)$ – неспадна функція;

3) якщо x_1 і x_2 найменша і найбільша варіанти, то $F^*(x) = 0$, при $x \le x_1$; $F^*(x) = 1$, при $x > x_k$;

4) графік – це ступінчаста функція, яка має розриви в точках x_1, x_2, x_3 (рис. 100).

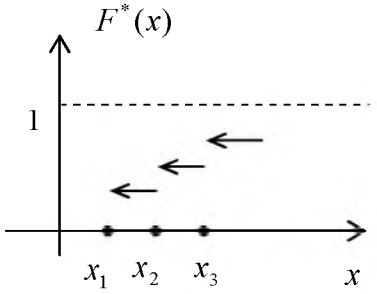


Рис. 100

Якщо на площині нанести точки $(x_1;\ n_1), (x_2;\ n_2), \ldots (x_k;\ n_k)$ і з'єднати сусідні (рис. 101) точки відрізками, то отримана лінія називається ***полігоном частот***. Якщо на площині нанести точки з координатами $(x_1;\ w_1), (x_2;\ w_2), \ldots (x_k;\ w_k)$, то отримаємо полігон ***відносних частот*** (рис. 102).

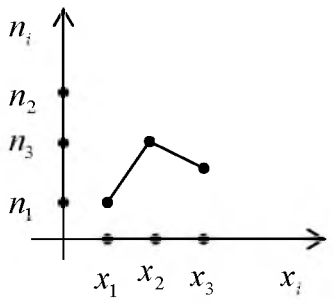


Рис. 101

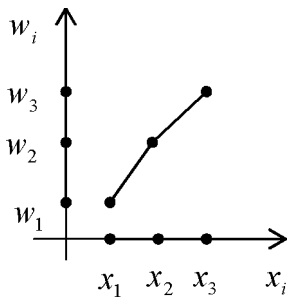


Рис. 102

Означення. *Інтервальний статистичний ряд, зображений графічно називається* ***гістограмою частот.***

Для побудови гістограми інтервал, на якому лежать усі варіанти, розбивають на декілька частин однакової довжини h*, потім шукається сума всіх частот варіант, що попали в кожен з відрізків довжиною* h. На цих інтервалах довжиною h, як на основах, будують прямокутники висотою $\frac{n_i}{h}$ ($\frac{n_i}{n \cdot h}$ для відносних частот). Площа гістограми дорівнює n (1 – для гістограми відносних частот).

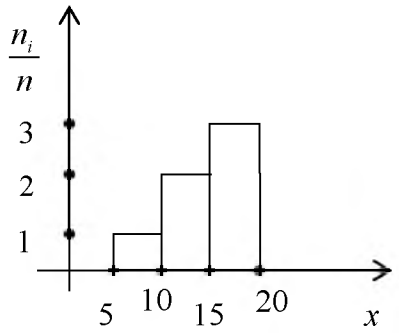


Рис.103

Гістограма – це наближений графік щільності ймовірностей випадкової величини, тобто наближений графік диференціальної функції її розподілу.

Приклад

У результаті спостережень одержали розподіл ознаки x вибірки:

x_i	–2	0	1	2	3	7
n_i	4	5	7	8	6	1

Побудувати:

1) емпіричну функцію розподілу;
2) полігон частот;
3) гістограму частот.

1. $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 33;\ w_i = \frac{4}{33}; \frac{5}{33}; \frac{7}{33}; \frac{8}{33}; \frac{6}{33}; \frac{2}{33}; \frac{1}{33}.$

$$F*(x)=\begin{cases}0, & \text{для } x\le -2\\ {}^{4}/_{33}, & \text{для } -2<x\le 0\\ {}^{9}/_{33}, & \text{для } 0<x\le 1\\ {}^{16}/_{33}, & \text{для } 1<x\le 2\\ {}^{24}/_{33}, & \text{для } 2<x\le 3\\ {}^{30}/_{33}, & \text{для } 3<x\le 5\\ {}^{32}/_{33}, & \text{для } 5<x\le 7\\ 1, & \text{для } x\le 7\end{cases}$$

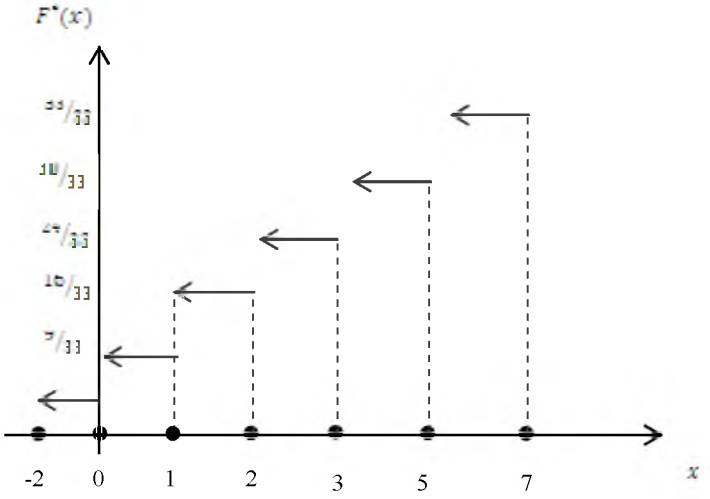


Рис. 104

2. Побудуємо точки з координатами (–2; 4), (0; 5), (1; 7), (2; 8), (3; 6), (5; 2), (7; 1).

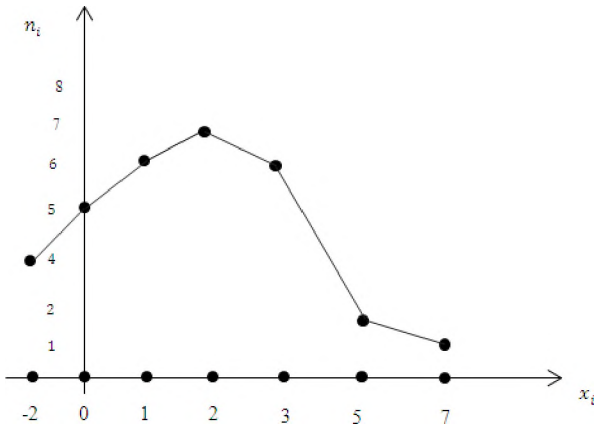


Рис. 105

3. Довжина відрізка [–2; 7] = 9. Розіб'ємо відрізок на 4 частини $h = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Складемо таблицю:

відрізки	[–2; 0,25]	[0,25; 2,5]	[2,5; 4,75]	[4,75; 7]
кількість n_k	9	15	6	3
щільність частоти $\frac{n_k}{h}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$

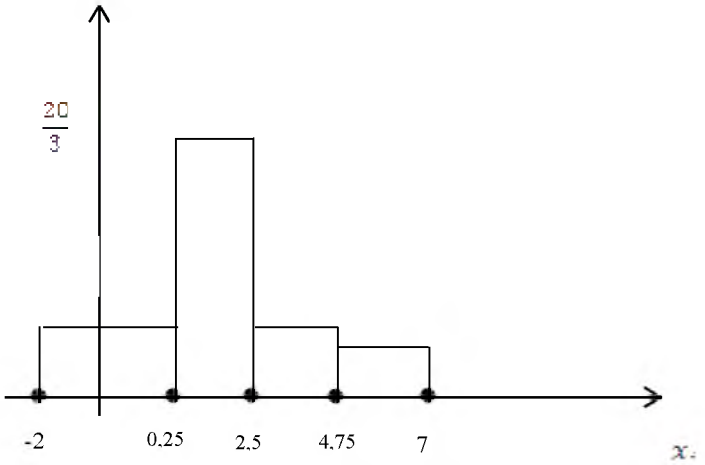


Рис. 106

14.3. Основні числові характеристики варіаційного ряду

Означення. ***Вибірковим середнім*** *варіаційного ряду називають дріб, чисельник якого містить суму добутків варіант* x_i *на відповідні частоти* n_i*, а знаменник – об'єм вибірки* n*:*

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}.$$

Означення. ***Дисперсією*** *варіаційного ряду називають середнє арифметичне квадратів відхилень варіант від їхньої вибіркової середньої:*

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i}{n} \quad \text{або} \quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x}_в)^2.$$

Означення. ***Середнім квадратичним відхиленням*** *називають арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії:* $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Означення. ***Коефіцієнтом варіації називають*** *відношення середнього квадратичного відхилення* $\sigma_в$ *до вибіркового середнього* $\bar{x}_в$ виражене у відсотках:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\%.$$

Коефіцієнт варіації служить для характеристики розсіювання варіаційного ряду.

Означення. ***Розмахом*** *варіювання* R *називають різницю між найбільшою та найменшою варіантами:*

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Означення. ***Модою*** M_o *називають варіанту, яка має найбільшу частоту.*

Означення. ***Медіаною*** M_e *називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини з рівним числом варіант.*

Означення. ***Початковим статистичним моментом*** *k-го порядку називають:*

$$v_k^* = \sum_{i=1} {x_i}^k \frac{n_i}{n}$$

При:

$$k = 0, v_0^* = \sum_{i=1} {x_i}^0 \frac{n_i}{n} = 1;$$

$$k = 1, v_1^* = \sum_{i=1} {x_i}^1 \frac{n_i}{n} = \bar{x}_в - \text{вибіркове середнє;}$$

$$k = 2, v_2^* = \sum_{i=1} {x_i}^2 \frac{n_i}{n} = \bar{x}_в{}^2 - \text{середнє квадратичне;}$$

$$k = 3, v_3^* = \sum_{i=1} x_i^3 \frac{n_i}{n} = \bar{x}_B^3.$$

Означення. ***Центральним статистичним моментом*** *k-го порядку називають:*

$$\mu_k{}^* = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x}_в)^k \cdot \frac{n_i}{n}$$

При:

$$k=0, \mu_0^* = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x}_в)^0 \cdot \frac{n_i}{n} = 1;$$

$$k=1, \mu_1^* = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x}_в)^1 \cdot \frac{n_i}{n} = 0;$$

$$k=2, \mu_2^* = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot \frac{n_i}{n} = \sigma_\beta^2 - \text{статистична дисперсія;}$$

$$k=3, \mu_3^* = \sum_{i=1} (x_i - в)^3 \cdot \frac{n_i}{n};$$

$$k=4, \mu_4^* = \sum_{i=1} (x_i - \bar{x}_в)^4 \cdot \frac{n_i}{n}.$$

Між початковими та центральними моментами існує зв'язок:

$$\mu_2^* = v_2^* - v_1^{*2};$$

$$\mu_3{}^* = v_3^* - 3v_1^* v_2^* + 2v_1^{*3};$$

$$\mu_4{}^* = v_4^* - 4v_1^* v_3^* + 6v_1^{*2} v_2^* - 3v_1^{*4}.$$

Асиметрія вибіркового розподілу обчислюється за формулою:

$$A_s{}^* = \frac{\mu_3{}^*}{\sigma_в^3}.$$

Якщо розподіл симетричний, то $A_s = 0$.

Ексцес вибіркового розподілу визначається за формулою:

$$E_k{}^* = \frac{\mu_4{}^*}{\sigma_\beta^4} - 3.$$

Приклад. Оцінки в балах x_i, одержані студентами на екзаменах з вищої математики:

x_i	15	25	35	45	55	65	75	85
n_i	5	10	15	20	25	15	8	2

Знайти основні числові характеристики.

Вибіркове середнє: $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n} = 48{,}7$

Дисперсія вибірки: $D_в = \frac{\sum_{i=1}^k x_i{}^2 n_i}{n} - (\bar{x}_в)^2 = 2647 - 2371{,}69 = 275{,}31.$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_в = \sqrt{D_в} = 16{,}59.$

Мода: $M_o = 55.$

Медіана: $M_e = 50$.

Розмах вибірки: $R = V = x_{max} - x_{min} = 85 - 15 = 70$.

Коефіцієнт варіації: $V = \frac{\sigma_в}{x_в} \cdot 100\% = \frac{16,59}{48,7} \cdot 100\% = 34,07$.

Для знаходження початкових моментів до четвертого порядку включно складемо таблицю:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^3 n_i$	$x_i^4 n_i$
15	5	75	1125	16875	253125
25	10	250	6250	156250	3906250
35	15	525	18375	643125	22509375
45	20	900	40500	1822500	82012500
55	25	1375	75625	4159375	228765625
65	15	975	63375	4119375	267759375
75	8	600	45000	3375000	253125000
85	2	170	14450	12282520	104401250
∑	**100**	**4870**	**264700**	**12483250**	**734920000**

Знаходимо початкові моменти:

$$v_k = \frac{\sum_{i=1} x_i^k n_i}{n}; \quad v_1 = 48,7; \quad v_2 = 2647; \quad v_3 = 124832,5; \quad v_4 = 7349200.$$

Скористуємося формулами зв'язку, одержимо:

$$\mu_0 = 1; \quad \mu_1 = 0; \quad \mu_2 = v_2 - v_1^2 = 275,3;$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v^3 = -146392,897;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1v_2 - 3v_1^4 = 4236247,5.$$

Асиметрія:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_в^3} = -32.$$

Ексцес:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_в^4} = -3 = 52,9.$$

Завдання для самостійної роботи

Дано генеральну сукупність з 20 елементів. Виконати такі завдання:

1. Побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу.

2. Обчислити числові характеристики вибірки.
3. Побудувати полігон частот та відносних частот.
4. Побудувати гістограму, розбивши на чотири інтервали.

N; N+1; N; N+2; N+1; N-1; N+2; N+2; N+3; N-1; N; N; N+1; N+1; N+2; N+5; N+3; N+1; N+2.

Тема 15. Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів. Статистичні гіпотези та статистичні критерії

15.1. Статистичне оцінювання

Означення. ***Статистичною оцінкою*** *невідомого параметра випадкової величини X генеральної сукупності (теоретичного розподілу) називається функція від випадкових величин (результатів вибірки), що спостерігаються.*

Щоб статистичні оцінки були близькими до істинного значення числової характеристики генеральної сукупності, вони повинні бути незміщеними, спроможними та ефективними.

Означення. ***Оцінка*** *називається* ***незміщеною****, якщо її математичне сподівання як випадкової величини $\widetilde{\theta_n}$ дорівнює істинному значенню θ числової характеристики:* $M(\widetilde{\theta_n}) = \theta$.

Означення. ***Оцінка*** *називається* ***спроможною****, якщо вона збігається за ймовірністю до істинного значення параметра, тобто для будь-якого* $\varepsilon > 0 \quad P\{|\widetilde{\theta_n} - \theta| \le \varepsilon\} \to 1, \text{при } n \to \infty$.

Означення. ***Оцінка*** *називається* ***ефективною****, якщо вона має мінімальну дисперсію певного класу оцінок.*

Означення. ***Вибіркова середня*** $\bar{x}_в$ *є незміщеною, спроможною і ефективною оцінкою генеральної сукупності.*

Означення. ***Статистична вибіркова дисперсія*** $D_в$ ***є спроможною****, але зміщеною оцінкою* $M(D_в) = \frac{n-1}{n} \cdot D_2$. *Для отримання незміщеної оцінки використовують виправлену статистичну дисперсію* $S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2$.

15.2. Точкові оцінки параметрів розподілу

Означення. ***Точковими оцінками*** *параметрів розподілу генеральної сукупності називають такі оцінки, які визначаються одним числом. Вибіркове середнє* $\bar{x}_в$, *вибіркова дисперсія* $D_в$, *вибіркове середньоквадратичне* $\sigma_в$ *належать до точкових оцінок.*

Точкові оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, їх можна вважати первинними результатами обробки вибірки тому, що невідомо, з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності.

Якщо об'єм вибірки досить великий, то точкові оцінки задовольняють практичні потреби точності.

Для знаходження точкових оцінок невідомих параметрів розподілу використовують метод моментів і метод максимальної правдоподібності.

Метод моментів точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає порівняно з емпіричними та теоретичними моментами цього ж порядку.

Якщо розподіл визначається одним параметром, то для його визначення прирівнюють один теоретичний момент одному емпіричному.

Наприклад, початковий теоретичний момент першого порядку прирівнюють початковому емпіричному моменту першого порядку:

$$v_1 = \mu_1; \quad v_1 = M(x); \quad \mu_1 = \bar{x}_в; \quad M(x) = \bar{x}_в,$$

де $\bar{x}_в$ – обчислюється з вибірки.

Якщо розподіл визначається двома параметрами, то, крім рівності $v_1 = \mu_1$, центральний теоретичний момент другого порядку прирівнюють до центрального емпіричного моменту другого порядку:

$$\mu_2 = m_2, \qquad \mu_2 = D(x); \quad m_2 = D_в.$$

Одержимо систему рівняння:

$$\begin{cases} M(x) = \bar{x}_в \\ D(x) = D_в. \end{cases}$$

Якщо параметрів m, то використовують одну з двох систем, у яких прирівнюють m початкових або центральних моментів:

$$\begin{cases} M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ M(x^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \overline{M(x^m)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m \end{cases} \begin{cases} M(x) = \bar{x}_в \\ D(x) = D_в \\ M(x - M(x))^m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^m \end{cases}$$

Приклад

Випадкова величина розподілена за законом Пуассона $P_\lambda(x = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$. Знайти невідомий параметр λ.

Розв'язання

Використаємо метод моментів $M(x) = \bar{x}_в$; але для закону Пуассона $M(x) = \lambda$, тому $\lambda = \bar{x}_в$ (знаходять за вибіркою).

Приклад

Випадкова величина розподілена за показниковим законом розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Знайти невідомий параметр λ.

Розв'язання

Використаємо метод моментів $M(x) = \bar{x}_в$, але для показникового закону розподілу $M(x) = \frac{1}{\lambda}$, тому $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}_в$, звідки $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_в}$.

Приклад

Випадкова величина підлягає рівномірному закону розподілу з невідомими параметрами a та b. Функція розподілу: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$.

Розв'язання

Використаємо $M(x) = \frac{a+b}{2}$; $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$, одержимо систему:

$$\begin{cases} M(x) = \bar{x}_в \\ D(x) = D_в \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{x}_в \\ \frac{(b-a)^2}{12} = D_в \end{cases}$$

Розв'язок системи і надасть нам значення параметрів a та b.

15.3. Метод максимальної правдоподібності

Метод максимальної правдоподібності точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає у знаходженні максимуму функції одного або декількох шуканих параметрів.

Метод максимальної правдоподібності

Теорема. *Нехай ознака генеральної сукупності* x визначається *лише одним параметром* θ *і має щільність ймовірностей* $f(x,\theta)$. *У випадку реалізації вибірки з варіантами* $x_1, x_2, \dots x_n$ *щільність ймовірностей вибірки* $f(x_1, x_2, \dots x_n, \theta^*) = f(x_1, \theta^*), f(x_2, \theta^*) \dots f(x_{n2}, \theta^*)$.

Варіанти розглядають як незалежні випадкові величини, які мають один і той самий закон розподілу, що й ознака генеральної сукупності x.

Суть методу полягає в тому, що, фіксуючи значення варіантів $x_1, x_2, \dots x_n$ визначають таке значення параметра θ^*, при якому функція максимізується. Вона називається функцією максимальної правдоподібності і позначається $L = L(\theta^*)$.

У випадку нормального закону розподілу

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1^*, \theta_2^*) = \frac{1}{(2\pi\theta_2^*)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1^*)^2}{2\theta_2^*}}.$$

За статистичними оцінками θ_1^*, θ_2^*, вибирають ті їхні значення, для яких задана вибірка буде найімовірнішою, тобто функція досягає максимуму.

На практиці переходять до

$$\ln\left(f\left(f(x_1, x_2, \dots x_n)\vartheta_1^*, \theta_2^*\right)\right) = L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1^*, \theta_2^*) =$$

$$= \frac{n}{2}(\ln\pi + \ln\theta_2^*) - \frac{\sum(x_i - \theta_2^*)^2}{2\theta_2^*}.$$

За необхідною умовою існування екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta_1^*} = -\dfrac{1}{\vartheta_2^*}\sum(x_i - \vartheta_1^*) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta_2^*} = -\dfrac{1}{2\vartheta_2^*} + \dfrac{1}{2(\vartheta_2^*)^2}\sum(x_i - \theta_1^*)^2 = 0 \end{cases};$$

$$\theta_1^* = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}_в \quad \theta_2^* = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x}_в) = D_в.$$

Приклад

Знайти методом максимальної правдоподібності за вибіркою $x_1, x_2, \dots x_n$ точкову оцінку параметра λ закону Пуассона $P_\lambda(x = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$.

Розв'язання

Побудуємо функцію

$L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda) = p(x = x_1, \lambda) \cdot p(x = x_2, \lambda) \cdot \dots \cdot p(x = x_n, \lambda)$. Але:

$p(x = x_1, \lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda}$; $p(x = x_2, \lambda) = \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\lambda}$; $\dots\dots$; $p(x = x_n, \lambda) = \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\lambda}$;

тоді $L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!} e^{-\lambda n}$.

Прологарифмуємо

$$\ln L = \ln \frac{\lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!} e^{-\lambda n} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ln \lambda - \lambda n - \ln(x_1! x_2! \dots x_n!);$$

Знайдемо похідну

$(\ln L)' = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{\lambda} - n - 0 = n$, тобто $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$, або $\lambda = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{\lambda}$.

Приклад

Знайти методом максимальної правдоподібності за вибіркою $x_1, x_2 \dots x_n$ точкову оцінку параметра p геометричного розподілу $P(x = x_i) = (1-p)^{x_i-1} p$, де x_i – число випробуване до появи подій, p – ймовірність появи події.

Розв'язання

Складаємо функцію правдоподібності

$L = P(x_1, p) \cdot P(x_2, p) \dots P(x_n, p)$,

враховуємо, що

$P(x = x_i) = (1-p)^{x_i-1} p$, одержимо $L = (1-p)^{x_1-1} p \cdot (1-p)^{x_2-1} p \dots (1-p)^{x_n-1} p = (1-p)^{x_1+x_2+x_n-n} p^n$

.

Прологарифмуємо:

$\ln L = n \ln p + (x_1 + x_2 \dots x_n - n) \cdot \ln(1-p)$.

Знайдемо похідну:

$$(\ln L)' = n\frac{1}{p} - (x_1 + \dots x_n - n) \cdot \frac{1}{1-p} = 0.$$

Знайдемо критичну точку:

$$(1-p) \cdot n = p \cdot (x_1 + x_2 + \dots x_n - n), \text{звідки } p = \frac{n}{x_1 + x_2 + \dots x_n}.$$

Знайдемо другу похідну:

$$(\ln L)' = -\frac{n}{p^2} - (x_1 + x_2 \dots x_n - n) \cdot \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Підставимо вираз $p = \frac{n}{x_1+x_2+\cdots x_n}$, одержимо $\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i - n)/(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(\sum_{i=1}^n x_i - n)^2}$.

Оскільки $\sum_{i=1}^n x_i < n$, то $\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n-\sum_{i=1}^n x_i} < 0$ при $p = \frac{1}{\bar{x}_B}$, тобто ця точка і є точкою максимуму.

15.4. Інтервальні оцінки параметрів розподілу

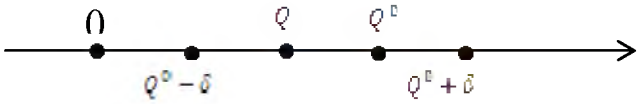
У випадку малих вибірок користуються інтервальними оцінками, які визначаються початком і кінцем інтервалу.

Якщо Q^0 статистична характеристика невідомого параметра Q, то нерівність $|Q - Q^0| < \delta (\delta > 0)$; $Q^0 - \delta < Q < Q^0 + \delta$.

Точність і надійність оцінки Q^0 параметра зображується через довірчий інтервал та довірчу ймовірність.

Означення. ***Надійністю або довірчою ймовірністю оцінки*** *Q^0 параметра Q називається ймовірність з виконання нерівності* $|Q - Q^0| < \delta$, *тобто* $P(|Q - Q^0| < \delta) = \gamma$.

Означення. ***Довірчим*** *називають інтервал* $(Q^0 - \delta, Q^0 + \delta)$, *яким покриває невідомий параметр* Q *із вказаною надійністю* λ



Випадковий інтервал $[Q^0 - \delta, Q^0 + \delta]$ покриває точку Q з ймовірністю λ.

Довірчий інтервал може розглядатися як інтервал значень параметра Q, сумісних з експериментальними даними не суперечних з ними.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу у випадку:

1) відомого σ $P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$

З надійністю γ стверджується, що довірчий інтервал $\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр а – математичне

сподівання з точністю $\left(\delta = \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Число t визначається рівністю $2\Phi(t) = \gamma$ із таблиці функції Лапласа.

Наслідок. За вказаних умов (нормальний закон із параметром σ, точністю δ і числом t, яке визначається через γ об'єм вибірки задається формулою: $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$;

2) для невідомого σ: $P\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right) = \propto$ довірчий інтервал покриває невідомий параметр а з надійністю γ.

Випадкові величини $\bar{x}$ та S можуть замінюватись не випадковими $\overline{x_\beta}$ та S знайденими за вибіркою.

Приклад. Випадкова величина розподілена нормально, $\sigma = 2; n = 25$. Знайти з $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для величини а вказаного розподілу.

Розв'язання. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma = 0{,}475$ за таблицею функції Лапласа $t_\gamma = 14{,}96$, тоді точність оцінки $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\ \ t_\gamma = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}96 = 0{,}784.$

Довірчий інтервал $(\bar{x} - 0{,}784;\ \bar{x} + 0{,}784)$

Наприклад, якщо $\bar{x} = 2{,}3$, то з надійністю 95 % інтервал (1,5; 3,1) покриває невідомий параметр а, тобто а = 2,3 з точністю 0,8 і надійністю 95 %.

Приклад. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання нормально розподільної генеральної сукупності за вибірковою середньою рівна 2 і $\sigma = 16$.

Розв'язання. За умовою $\gamma = 0{,}95$, з таблиці функції $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ знаходимо $t = 1{,}96$. Підставимо у формулу $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 16^2}{2^2} \approx 246.$

15.5. Статистичні гіпотези та їх види

Означення. ***Статистичною гіпотезою*** *Н називають будь-яке припущення відносно виду або параметрів розподілу випадкової величини х, яка може бути перевірена за результатами вибірки.*

Означення. ***Простою називають гіпотезу****, що містить лише одне припущення. Якщо гіпотеза складається із скінченного або нескінченного числа простих гіпотез, то вона називається складною.*

Означення. ***Основною (умовною) називається*** *гіпотеза і позначається* H_o. *Інші гіпотези (припущення), що суперечать нульовій, називають альтернативними, або конкуруючими, їх позначають* $H_1, H_2 \ldots$.

15.6. Похибки перевірки гіпотез

Статистична гіпотеза, яка висунута може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки.

При перевірці статистичної гіпотези за даними випадкової вибірки можна зробити хибний висновок. При цьому можуть бути помилки (похибки). Якщо за висновком відкидається правильна гіпотеза, то це помилка першого роду, якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза, то це помилка другого роду. Ймовірність здійснити помилку першого роду називається рівнем значущості і позначається α. Найчастіше рівень значущості приймають 0,05, це означає, що в п'яти випадках із 100 ризикуємо одержати похибку першого роду, тобто відкинути правильну гіпотезу. Ймовірність похибки другого роду позначають β.

При контролі якості продукції ймовірність визнати нестандартними стандартні вироби називається ризиком виробника, а ймовірність визнати придатними браковані вироби називається ризиком споживача.

Перевірка статистичної гіпотези здійснюється за допомогою статистичного критерію. Статистичним критерієм називають випадкову величину $k(x)$, яка служить для перевірки нульової гіпотези. Емпіричним (спостереженням) значенням $K_{\text{спост.}}$ називають значення критерію, що обчислюється за даними вибірки.

Після вибору певного критерію узгодження, множину всіх можливих значень поділяють на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється, а друга – при яких вона приймається.

Означення. ***Критичною областю*** *називається сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.*

Означення. ***Областю прийняття*** *гіпотези називається сукупність значень критерію, при яких гіпотезу приймають.*

Означення. ***Критичними точками (границями)*** $K_{кр.}$ *називають точки, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.*

Означення. ***Правобічною*** *називають критичну область, що визначають нерівністю* $K < K_{кр.}$, $K_{кр.} > 0$.

Означення. ***Лівобічною*** *називається критична область, що визначається нерівністю* $K > K_{кр.}$, $K_{кр.} < 0$.

Для знаходження критичної області спочатку потрібно знайти критичну точку $K_{кр.}$ за умови $P(K > K_{кр.}) = \alpha$ (у випадку правобічної критичної області); $P(K < K_{кр.}) = \pounds$ (у випадку лівобічної критичної області). $P(K < K_{1.}) + P(K > K_{2.}) = \alpha$ (двобічна критична область). Для кожного критерію узгодження є відповідні таблиці, які дозволяють знайти таку точку $K_{кр.}$, що задовольняє відповідну умову.

При знаходженні критичної області користуються також потужністю критерію.

Означення. ***Потужністю критерію*** *називають ймовірність належності критерію критичній області за умови, що правильна альтернативна гіпотеза. Тобто потужністю критерію є ймовірність того, що основна гіпотеза буде відхилена, якщо альтернативна гіпотеза правильна.*

15.7. Загальний алгоритм перевірки статистичних гіпотез

1. Визначити гіпотезу H_1, альтернативну до гіпотези H_0.

2. Вибрати статистичну характеристику перевірки.

3. Визначити допустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості.

4. За відповідною таблицею знайти критичну область (критичну точку) для обраної статистичної характеристики.

5. Зробити висновок чи належать значення статистичної характеристики до критичної області, при яких H_0 відхиляється, а H_1 приймається.

15.8. Критерій узгодження Пірсона

Нехай вибірка має такий розподіл об'ємом n

Варіанти x_i	x_1	x_2	....	x_m
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_m

або

Інтервали l_k	(x_1, x_2)	(x_1, x_2)	...	(x_{m-1}, x_m)
Частоти n_k	n_1	n_2	...	n_m

З рівнем значущості α перевірити основну гіпотезу.

H_0: ***генеральна сукупність розподілена нормально.*** Критерієм перевірки цієї гіпотези беруть випадкову величину χ^2, яка у різних випробуваннях приймає різні, насамперед невідомі, значення.

Критичне значення цієї випадкової величини залежить від рівня значущості α та числа ступенів вільності $k = s - 1 - r$, де s – число груп (інтервалів) вибірки, r – число параметрів вибірки. Для розподілу генеральної сукупності за нормальним законом (два параметри α і σ) ступенів вільності $k = s - 3$.

$\chi^2_{\text{кр.}} = \chi^2(\alpha, k)$

Ці критичні значення знаходять у таблиці.

15.9. Правило Пірсона

Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0 – генеральна сукупність розподілена нормально, потрібно:

1) обчислити теоретичні частоти n_k для варіант вибірки;

2) обчислити спостережне значення критерію χ^2 за формулою:

$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k}$$

3) знайти ступені вільностей χ^2 за формулою $k = S - 3$;

4) за таблицею знайти критичну точку $\chi^2_{\text{кр.}}$, яка відповідає рівню значущості α та ступеню вільності k;

5) зробити висновок:

якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, то гіпотеза H_0 приймається;

якщо $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, то гіпотезу H_0 потрібно відхилити.

Приклад

Задана генеральна сукупність. За допомогою критерію Пірсон перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

98,06	101,25	101,25	96,25	100,85	101,25
98,85	99,25	100,55	100,45	100,02	99,2
99,4	98,2	98,2	97,2	94,2	100,6
98,2	96,2	97,9	103,9	105,9	100,9
99,9	101,9	101,81	99,9	103,3	101,9
96,32	102,72	100,72	100,72	101,72	96,42
96,42	98,71	100,22	101,72	99,97	103,97
98,97	99,97	96,27	96,97	98,97	100,97
98,97	100,97				

Найбільше значення 105,9, а найменше 94,2

$R = 105{,}9 - 94{,}2 = 11{,}7, n = 50.$

Побудуємо ряд розподілу:

Інтервал	(94;96)	(96;98)	(98;100)	(100;102)	(102;104)	(104;106)
Середина x_i	95	97	99	101	103	105
Частоти n_i	1	9	16	19	4	1

Знайдемо $\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = 99{,}76;$

$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} \qquad (\overline{xв})^2 = 3{,}9624;$

$\sigma_в = \sqrt{D_в} = 1{,}996.$

Об'єднаємо 1 і 2 та 5 і 6 інтервали, тоді $k = 4 - 3 = 1$.

За таблицею $\chi^2_{\text{кр.}}(0{,}05;1) = 3{,}8$.

Обчислимо теоретичні частини:

x_i	$x_i + 1$	n_1	$z_i = \frac{x_i - x_в}{\sigma_в}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x_в}{\sigma_в}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	n'_i=n($\Phi_{z_{i+1}} - \Phi_{z_i}$)
94	98	10	-2,885	-0,8817	-0,5	-0,311	9,445
98	100	16	-0,88	0,12	-0,3105	0,04776	17,9165
100	102	19	0,12	1,1222	0,0477	0,36864	16,044
102	106	25	1,1222	3,1262	0,369	0,5	6,55

Для обчислення $\chi^2_{\text{сп}}$ складаємо таблицю:

i	n_i	n'_i	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	10	9,445	0,03261
2	16	17,9	0,2017
3	19	16,0	0,5625
4	5	6,55	0,3668
$\sum$	50	50	$x^2_{\text{сп}} = 1{,}1636$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} = 1{,}1636 < 3{,}8 = \chi^2_{\text{кр.}}$, то гіпотеза про нормальний закон розподілу приймається.

Завдання для самостійної роботи

1. 200 однотипних деталей були піддані шліфуванню. Результату вимірювання наведено в таблиці.

x_i	3,N	3,N+1	3,N+2	4,0	4,N	4,N+1	4,N+2	4,N+3
n_i	1+N	22-N	70+N	79-N	27-N	26-N	4+N	1+N

Знайти точкові незмінні статистичні оцінки. N = 1, 2,..

2. З надійністю 0,95 знайти довірчий інтервал оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі вибіркові середини $\overline{x_в}$, об'єм вибірки n та середнє квадратичне відхилення.

а) $\overline{x_в} = 14;\ n = 25,\ \delta = 5;$

б) $\overline{x_\beta} = 10{,}2; n = 16, \delta = 4$;

в) $\overline{x_\beta} = 16{,}8; n = 25, \delta = 5$;

г) $\overline{x_\beta} = 2000; n = 16, \delta = 40$;

д) $\overline{x_\beta} = 42{,}8;\ n = 16, \delta = 8$.

3. Знайти мінімальний обсяг вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності дорівнюватиме 0,2. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1{,}5$.

а) $\gamma = 0{,}925$;

б) $\gamma = 0{,}95$;

в) $\gamma = 0{,}978$;

г) $\gamma = 0{,}99$;

д) $\gamma = 0{,}999$.

4. Статистичні спостереження рівня доходу одного підприємства подано в таблиці.

x_i	*N+5*	*N+6*	*N+7*	*N+8*	*N+9*	*N+10*	*N+11*	*N+12*	*N+13*
n_i	1	2	3	20	25	24	15	7	3

а) з надійністю $\gamma = 0{,}95$ при значенні $\sigma = 3$ побудувати інтервал довіри для математичного сподівання;

б) з надійністю $\gamma = 0{,}95$ розрахувати інтервал для σ. Значення $\overline{x_\beta}$ та знайти за статистичними даними.

Тема 16. Елементи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу

16.1. Загальна інформація

Сутність дисперсійного аналізу полягає в тому, що загальну дисперсію досліджуваної ознаки розділяють на окремі компоненти, які обумовлені впливом певних конкретних умов. Істотність

їхнього впливу на цю ознаку здійснюється методом дисперсійного аналізу.

Відповідно до дисперсійного аналізу будь-який його результат можна подати у вигляді суми певної кількості компонентів. Так, наприклад, якщо досліджується вплив певного чинника на результат експерименту, то модель, що описує структуру останнього, можна подати так:

$$x_{ij} = \bar{x} + a_j + \varepsilon_{ij}.$$

При цьому $M(\varepsilon_{ij}) = 0$ і ε_{ij} як випадкові величини мають закон розподілу ймовірностей $N(0; \sigma^2)$ і між собою незалежні $(K_{ij} = 0)$.

Складнішою моделлю аналізу є вивчення впливу на результати експерименту кількох факторів. Зокрема, при аналізі впливу двох факторів структура моделі набуває такого вигляду:

$$x_{ijk} = \bar{x} + \alpha_i + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

де x_{ijk} – значення ознаки X в i-му експерименті на j-му рівні впливу фактора A і на k-му рівні впливу фактора B; $\bar{x}$ – загальна середня величина ознаки X; α_i – ефект впливу фактора A на i-му рівні; β_i – ефект впливу фактора B на j-му рівні; γ_{ij} – ефект одночасного впливу факторів A і B; ε_{ijk} – випадкова компонента.

У разі проведення дисперсійного аналізу досліджуваний масив даних, одержаних під час експерименту, поділяють на певні групи, які відрізняються дією на результати експерименту певних рівнів факторів.

Вважаємо, що досліджувана ознака має нормальний закон розподілу, а дисперсії в кожній окремій групі здобутих значень ознак однакові.

16.2. Однофакторний дисперсійний аналіз

Нехай потрібно дослідити вплив на ознаку X певного одного фактора. Результати експерименту ділять на кілька груп, які відрізняються між собою ступенем дії фактора.

Для зручності результати експерименту зводять у спеціальну таблицю:

Ступінь впливу фактора (групи)	Спостережуване значення ознаки X	Групові середні	Загальна середня
1	$x_{11}, x_{21}, x_{31} \dots, x_{n,1}$	$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i1}}{n_1}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} x_{ij}}{N}$ $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$
2	$x_{12}, x_{22}, x_{32} \dots, x_{n,2}$	$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i2}}{n_2}$	
3	$x_{13}, x_{23}, x_{33} \dots, x_{n,31}$	$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i3}}{n_3}$	
p	$x_{1p}, x_{2p}, x_{3p} \dots, x_{n,p}$	$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ip}}{n_p}$	

Відповідно до моделі однофакторного дисперсійного аналізу необхідно визначити дві дисперсії, міжгрупову (дисперсію групових середніх) і внутрішньогрупову.

Загальна дисперсія розглядається як сума квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2.$$

Тоді поділ загальної дисперсії на компоненти здійснюється так:

$$\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_j - \bar{x}).$$

Для того щоб мати виправлені дисперсії, необхідно кожну із здобутих сум поділити на число ступенів свободи.

Так, для загальної дисперсії $\frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2}{N}$ виправлена дисперсія дорівнюватиме $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2}{N-1}$.

Виправлена дисперсія S_1^2, що характеризує розсіювання всередині групи, зумовлене впливом випадкових факторів, обчислюється за формулою:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N - p},$$

де $N - p = k_1$ є числом ступенів свободи для S_1^2, оскільки при цьому використовується p співвідношень при обчисленні групових середніх $\bar{x}_j, j = 1,p$.

Виправлена дисперсія S_2^2, що характеризує розсіювання групових середніх $\bar{x}_j$ відносно загальної середньої $\bar{x}$, яке викликане впливом фактора на результат експерименту ознаки X, обчислюється за формулою:

$S_2^2 = \sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_j - \bar{x})^2$, де $p - 1 = k_2$ – це число ступенів свободи S_2^2, оскільки групові середні варіюють відносно однієї загальної середньої $\bar{x}$.

Завдання виявлення впливу фактора на наслідки експерименту полягає порівняно з виправленими дисперсіями S_1^2, S_2^2. І справді, якщо досліджуваний фактор не впливає на значення ознаки X, то цього разу S_1^2, S_2^2 можна розглядати як незалежні оцінки загальної дисперсії D. І навпаки, якщо відношення S_1^2 і S_2^2 істотне, то цього разу вибірки слід вважати здійсненими з різних сукупностей, тобто із сукупностей з різним рівнем впливу фактора.

Порівняння двох дисперсій ґрунтується на перевірці правильності нульової гіпотези: $H_0: D_1 = D_2$ – про рівність дисперсій двох вибірок.

За статистичний критерій вибирається випадкова величина

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{p-1}{N-p}.$$

За значеннями$a, k_1 = N - p, k_2 = p - 1$, знаходимо критичну точку.

Спостережуване значення критерію обчислюється за формулою.

Якщо $F^0 \leq F_{кр.}$, то нульова гіпотеза про вплив фактора на результати досліджень відхиляється, а коли $F^0 > F_{кр.}$, то цим самим підтверджується вплив фактора на ознаку X.

Результати спостережень та обчислення статистичних оцінок зручно подати в упорядкованому вигляді.

Вид варіацій ознаки	Сума квадратів відхилення	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсії
Внутрішньогрупова	$\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij} \quad \bar{x}_j)^2$	$N-p$	$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{N-p}$
Міжгрупова	$\sum_{j=1}^{p} n_j(\bar{x}_j \quad \bar{x})^2$	$p-1$	$S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{p} n_j(\bar{x}_j-\bar{x})^2}{p-1}$
Загальна	$\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2$	$N-1$	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{N-1}$

Приклад. Оцінка впливу перевірок ДФС на накладання штрафів, наведено у таблиці.

Ступінь впливу фактора	Кінцевий результат
1	3,2; 3,1; 3,1; 2,8; 3,3; 3,0
2	2,6; 3,1; 3,7; 2,9; 2,7; 2,8
3	2,9; 2,6; 3,0; 3,1; 3,0; 2,8
4	3,7; 3,4; 3,2; 3,3; 3,5; 3,3
5	3,0; 3,4; 3,2; 3,5; 2,9; 3,1

З'ясувати, чи істотно впливає штраф на результат при $\alpha = 0{,}001$.

Розв'язання. Використовуючи табл. 2 і виконавши відповідні обчислення, отримаємо

Ступінь впливу	Кінцевий результат	Групові середні	Загальна середня
1	3,2; 3,1; 3,1; 2,8; 3,3; 3,0	$\bar{x}_1 = 3{,}083$	
2	2,6; 3,1; 3,7; 2,9; 2,7; 2,8	$\bar{x}_2 = 2{,}8$	
3	2,9; 2,6; 3,0; 3,1; 3,0; 2,8	$\bar{x}_3 = 2{,}9$	$\bar{x} = 3{,}073$
4	3,7; 3,4; 3,2; 3,3; 3,5; 3,3	$\bar{x}_4 = 3{,}4$	
5	3,0; 3,4; 3,2; 3,5; 2,9; 3,1	$\bar{x}_5 = 3{,}18$	
Види варіацій ознаки	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсії
Внутрішньогрупова	$\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{5}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 = 0{,}926734$	$k_1 = N-p = 30-5 = 25$	S_1^2
Міжгрупова	$\sum_{j=1}^{5} n_j(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 = 1{,}3377$	$k_2 = p-1 = 5-1 = 4$	$S_2^2 = 0{,}3344$

$$F_{\text{кр.}}(a = 0{,}001;\ k_1 = 4; k_2 = 25) = 6{,}6;$$

$$F' = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0{,}3344}{0{,}03707} = 9{,}0208$$

Висновок. Оскільки $F' > F_{\text{кр.}}$, то вплив штрафів на кінцевий результат є істотним.

16.3. Елементи регресійного та кореляційного аналізу

Означення. *Функціональний зв'язок $y = f(x)$, якщо кожному незалежному значенню змінної x поставити у відповідність єдине конкретне значення залежної змінної y.*

Означення. *Стохастичною залежністю називають таку залежність, за якої зміна однієї з випадкових величин викликає певну зміну розподілу іншої.*

Означення. *Стохастична залежність є кореляційною, якщо зміна значень однієї величини викликає зміну середнього значення іншої.*

У випадку функціональної залежності, знаючи X, маємо можливість знайти величину Y, в разі кореляційної залежності встановлено лише тенденцію зміни Y при зміні X.

Кореляційний та регресійний аналіз тісно пов'язані між собою методами обробки статистичних даних, різниця існує між метою досліджень та формою встановлення зв'язку. У кореляційному аналіз виявляється тіснота зв'язку, у регресійному – форма.

Вкажемо існуючі види регресії та кореляції.

Вивчаючи взаємозв'язок факторних (незалежних) та результативних (залежних) ознак, виникають ситуації:

1) X та Y – випадкові величини;
2) X – детермінована, Y – стохастична.

Види кореляцій:

– відносно характеру кореляції: додатна (пряма); від'ємна (обернена);

– відносно кількості змінних: проста або парна; множинна; частинна (з її допомогою охоплюється весь причинно-наслідковий комплекс);

– відносно форми зв'язку: лінійна; нелінійна;

– відносно типу зв'язку явищ: безпосередня кореляція; посередня кореляція; хибна (помилкова) кореляція.

Види регресії:

– відносно числа явищ, що враховуються в регресії: проста (парна) регресія; множинна (багатофакторна) регресія;

– відносно форми залежності: лінійна; нелінійна;

– відносно характеру регресії (у випадку парної регресії): додатна регресія; від'ємна регресія;

– відносно типу зв'язку явищ: безпосередня регресія (причина безпосередньо діє на наслідок); посередня регресія (Y та X не пов'язані, а визначають загальним впливом на них третього фактора); нонсенс-регресія (абсурдна).

Основні задачі кореляційного аналізу:

1) вимірювання тісноти зв'язку двох або більше явищ: уточнення відомих зв'язків та виявлення невідомих зв'язків;

2) відбір факторів, що мають суттєвий вплив на Y;

3) виявлення невідомих причинних зв'язків – безпосередньо не визначає їх, але встановлює рівень необхідності цих зв'язків та правдивість висновків.

Основні задачі регресійного аналізу:

1) встановлення форми залежності;

2) вибір та оцінка функції регресії;

3) перевірка значущості коефіцієнтів регресії та адекватності моделі;

4) інтерполяція та екстраполяція даних.

Кореляційний зв'язок, як правило, характеризується вибірковим коефіцієнтом кореляції, що характеризує ступінь лінійної функціональної залежності між Y та X.

Для двох випадкових величин X та Y коефіцієнт кореляції має такі основні властивості:

1. $|r| \le 1$ або $-1 \le r \le 1$.

2. Якщо $r = \pm 1$, то між X та Y існує функціональний зв'язок, що виражається лінійною функцією (рис. 1).

3. Якщо $r = 0$, то X та Y некорельовані (але це не означає, що функціонального зв'язку не існує, залежність може бути квадратичною) (рис. 2).

4. Коефіцієнти кореляції X та Y і Y та X не співпадають.

Приклад. Отримано вибіркові дані про ціни на квартири та загальну їхню площу в деякому місті, січень 2016 р.

y_i	13,8	13,8	14	22,5	24	28	32	20,9	22	21,5	32	35	24	37,9	27,5
x_i	33	40	36	60	55	80	95	70	48	53	95	75	63	112	70

X – загальна площа квартири, кв. м; Y – ринкова ціна квартири, тис. у.о.

Необхідно:

1. Побудувати графік залежності між змінними, за яким необхідно підібрати модель рівняння регресії.

2. Розрахувати параметри рівняння регресії методом найменших квадратів.

3. Знайти коефіцієнт еластичності.

4. Оцінити тісноту зв'язку між змінними за допомогою показників кореляції та детермінації.

Розв'язання

Графік залежності змінних X та Y будується у прямокутній системі координат. На осі абсцис відкладаються значення факторної ознаки X, а на осі ординат – результативної ознаки Y. Враховуючи невелике число пар значень змінних, по кожній з них виділимо 5 інтервалів, використовуючи формулу:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k},$$

де h – довжина інтервалу;

x_{min} – найменше значення ознаки;

x_{max} – найбільше значення ознаки;

k – число інтервалів.

Для змінної X: $h = \frac{112-33}{5} = 15{,}8$. Для інтервалу округлюється в сторону збільшення для зручного значення, $h = 16$.

У результаті отримаємо такі границі інтервалів: 33 + 16 = 49; 49 + 16 = 65; 65 + 16 = 81; 81 + 16 = 97; 97 + 16 = 113.

Аналогічно, для змінної Y: $h = \frac{37,9-13,8}{5} = 4,82; h = 5$. Границі інтервалів становлять: 13; 18; 23; 28; 33; 38.

На графік наносяться точки, координати яких відповідають значенням Y та X. Характер розташування точок на графіку показує, що зв'язок між змінними може виражатися лінійним рівнянням регресії:

$$\widehat{y_x} = b_0 + b_1 x.$$

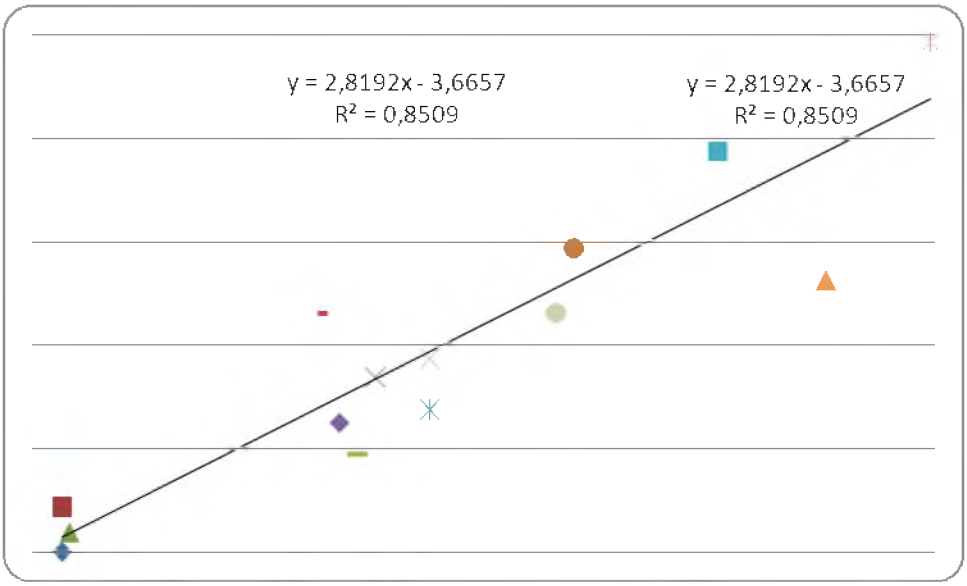


Рис. 107. Залежність ціни на квартири від загальної її площі

2. Параметри рівняння регресії знаходимо методом найменших квадратів шляхом складання та розв'язання системи нормальних рівнянь.

Для проведення усіх розрахунків будується допоміжна таблиця.

У таблиці усі середні знаходяться за формулою середньої арифметичної простої: $\overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$.

Підставимо отриманні суми в систему рівнянь, враховуючи, що n = 15:

$$\begin{cases} 368,9 = 15b_0 + 985b_1, \\ 26466,7 = 985b_0 + 72111b_1 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо $b_0 = 4,7743$; $b_1 = 0,3018$.

Параметри рівняння регресії також можна знайти за формулами, які отримано шляхом використання правила Крамера розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розрахункова таблиця:

№ з/п	x	y	x^2	y^2	xy	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
1.	33	13,8	1089	190,44	455,4	14,734	–0,934	0,873
2.	40	13,8	1600	190,44	552	16,847	–3,047	9,283
3.	36	14	1296	196	504	15,640	–1,640	2,688
4.	60	22,5	3600	506,25	1350	22,883	–0,383	0,147
5.	55	24	3025	576	1320	21,374	–2,626	6,896
6.	80	28	6400	784	2240	28,919	–0,919	0,845
7.	95	32	9025	1024	3040	33,447	–1,447	2,092
8.	70	20,9	4900	436,81	1463	25,901	–5,001	25,012
9.	48	22	2304	484	1056	19,261	2,739	7,500
10.	53	21,5	2809	462,25	1139,5	20,770	0,730	0,532
11.	95	32	9025	1024	3040	33,447	–1,447	2,092
12.	75	35	5625	1225	2625	27,410	7,590	57,604
13.	63	24	3969	576	1512	23,788	0,212	0,045
14.	112	37,9	12544	1436,41	4244,8	38,577	–0,677	0,459
15.	70	27,5	4900	756,25	1925	25,901	1,599	2,556
Усього	985	368,9	72111	9867,85	26466,7	368,899	–0,001	118,625
Середнє значення	65,667	24,593	4807,4	657,857	1764,447	24,593	–	7,908

$$b_1 = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\overline{X^2} - (\bar{X})^2} = \frac{1764{,}447 - 65{,}667 \cdot 24{,}593}{4807{,}4 - (65{,}667)^2} = 0{,}3018.$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \cdot \bar{X} = 24{,}593 - 0{,}3018 \cdot 65{,}667 = 4{,}7743.$$

Невеликі розбіжності в результатах розрахунків пояснюються заокругленням середніх значень у другому випадку.

Таким чином, рівняння регресії має вигляд $\hat{y}_x = 4{,}7743 + 0{,}3018x$.

Коефіцієнт регресії показує, що при збільшені загальної площі квартири на 1 м^2 ціна квартири в середньому збільшиться на 0,3018 тис. у.о., або на 301,8 у.о.

Завдання для самостійної роботи

1. З'ясувати, чи істотно впливає фактор F на ознаку X при заданих рівнях значущості α.

Варіант, α	Рівень фактора	Спостережувані значення X	Варіант, α	Рівень фактора	Спостережувані значення X
1 $\alpha = 0,01$	1	3,4; 4,2; 5,1; 4,3; 4,6	2 $\alpha = 0,05$	1	9,4; 8,2; 7,1; 8,3; 7,6
	2	3,8; 3,6; 4,5; 5,2; 5,1		2	8,8; 9,6; 7,5; 8,2; 9,1
	3	4,3; 5,6; 5,2; 4,9; 4,7		3	8,3; 9,6; 8,2; 7,9; 8,7
	4	3,6; 3,9; 4,3; 5,4; 5,0		4	7,6; 8,9; 9,3; 7,4; 9,0
3 $\alpha = 0,05$	1	18; 24; 21; 25	4 $\alpha = 0,01$	1	234; 321; 269; 308
	2	23; 25; 21; 20		2	338; 353; 289; 331
	3	19; 17; 22; 21		3	278; 312; 329; 358
	4	18; 22; 24; 23		4	332; 371; 369; 328
	5	23; 21; 24; 26		5	264; 338; 289; 352

2. Досліджується два типи цінних паперів, дохідність яких дорівнює, відповідно, X та Y. Мета дослідження виявити взаємозалежні коливання курсів цінних паперів.

Необхідно:

1. Побудувати графік залежності між змінними, по якому необхідно підібрати модель рівняння регресії.

2. Розрахувати параметри рівняння регресії методом найменших квадратів.

3. Знайти коефіцієнт еластичності.

4. Оцінити тісноту зв'язку між змінними за допомогою показників кореляції та детермінації.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	K–1	K–2	K+4	K+3	K+5	K+3	K+10	K+11	K+14	K+12
x_i	N+1	N+1	N+5	N+2	N+7	N+4	N+14	N+15	N+22	N+31

РОЗДІЛ 4
МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

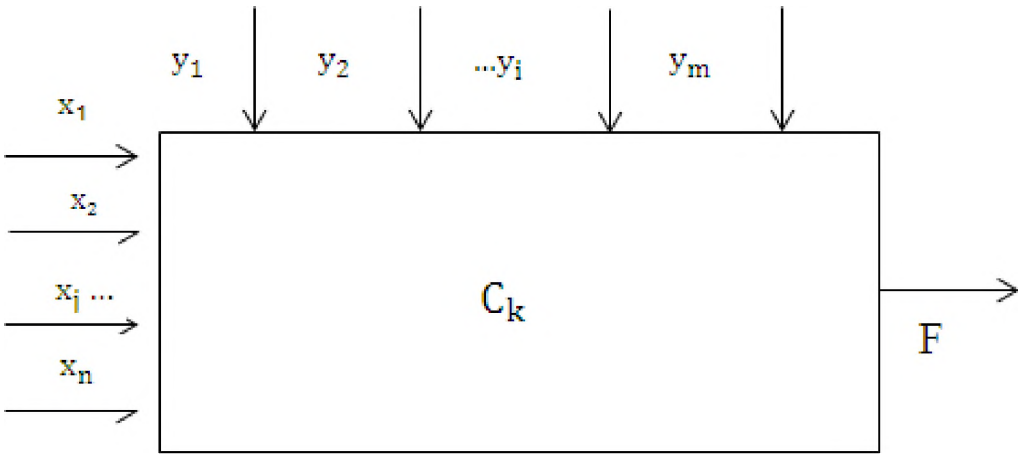
Тема 17. Задачі лінійного програмування

17.1. Предмет курсу «Математичне програмування»

Важливим завданням сучасності є оперування економічними системами, оптимізація їхньої структури, траєкторія розвитку й формування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. Ці проблеми вивчає наука, яку називають ***теорією дослідження операцій.*** Вона охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану.

Математичне програмування – один з основних інструментів теорії дослідження операцій. Його завдання полягає у розробці методів розв'язку оптимізаційних задач та оптимального розв'язку.

Економічну систему можна подати у вигляді прямокутника:



$C_k (k = 1; 2 \ldots l)$ – кількісні характеристики системи (наявність ресурсів).

Якщо йдеться про податкову систему, то C_k характеризують норми податків, проценти за кредит тощо.

Параметри C_k можуть бути сталими або залежати від певних умов.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, які бувають:

– незалежними;

– залежними;

– дискретними;

– неперервними.

Незалежні змінні бувають двох видів:

– ***керовані*** $x_j (j = 1, 2 \dots n)$, значення можна змінювати в деякому інтервалі;

– ***некеровані*** $y_i (i = 1; 2 \dots m)$, значення яких не залежить від волі людей.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування.

Наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети має кількісну характеристику, тобто може бути описаний математично.

F – обрана мета (ціль) вимірюється незалежними змінними та параметрами.

$$F = f(x_1, x_2, \dots x_n; y_1, y_2 \dots y_m, C_1, C_2 \dots C_e)$$

Означення. ***Функцію*** F *– називають цільовою функцією (функцією мети).*

Задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, *щоб цільова функція набула екстремального значення (максимального чи мінімального).*

$$F^* = max(min) f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m, \dots c_1 \dots c_j)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми умовами. Ці процеси записують за допомогою системи математичних рівностей та нерівностей.

$$q_r(x_1, \dots x_n, y_1;\ y_1 \dots y_m, C_1, C_2 \dots C_j)\ \{\leq, \geq\}\ 0$$

Ці системи називають ***системою обмежень***, або системою умов задач.

Для економічних систем x_j мають бути невід'ємними.

$$x_j \geq 0 (j = 1; 2 \dots n)$$

Вказані вирази є економіко-математичною моделлю цієї економічної задачі.

Розробляючи модель, потрібно керуватися такими правилами:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним. Математичне моделювання – це вузька межа між переспрощенням і переускладненням. Прості моделі не забезпечують точність, а переускладнені важко реалізувати.

3. Модель повинна бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів x_j була непорожньою. Якщо система обмежень має єдиний розв'язок, то не існує задачі вибору оптимального плану.

Означення. *Будь-який набір змінних* $x_1, x_2 \dots x_n$, *що задовольняє умови задачі, називають* ***допустимим планом***, *або* ***планом***.

Означення. *Кожний* ***допустимий план*** *є* ***стратегією*** *економічної системи, програмою дій. Сукупність усіх розв'язків системи обмежень, тобто множина усіх допустимих планів, становить* ***область існування планів***.

Означення. *План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається* ***оптимальним***.

Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування. Задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію.

17.2. Класифікація задач математичного програмування

Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи:

– лінійні;

– нелінійні.

Якщо цільова функція та система обмеження є лінійними функціями, тобто містять змінні x_j, у першому степені маємо лінійну задачу, а в усіх інших – нелінійні.

Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їхнього розв'язку розроблено універсальний метод (симплексний метод), теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язувати цим методом.

Економічні та технологічні процеси є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах нестабільності, тому доводиться будувати нелінійні, стохастичні моделі.

Розв'язувати нелінійні моделі складніше тому, що немає універсального методу. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) лінійними. Такий підхід на практиці є ефективним.

У нелінійному програмуванні виділяють:

– **опукле програмування** – область допустимих планів є опуклою множиною, а цільова функція є опуклою функцією;

– **квадратичне програмування** – цільова функція квадратична.

Задачі математичного програмування поділяються на:

– **дискретні** (задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають дискретних значень);

– **цілочисельне програмування** (в яких одна або кілька змінних набувають цілочисельних значень);

– **неперервні** (якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення).

Задачі математичного моделювання поділяються на детерміновані та стохастичні.

Детерміновані *задачі не містять випадкових змінних і параметрів.*

Стохастичні *задачі містять випадкові величини (вивчають стохастичне програмування*).

Економічні процеси розвиваються в часі, тому відповідні моделі повинні відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального плану потрібно застосовувати класи задач математичного програмування ***(статичні)*** одно крокові, ***(динамічні)*** багатокрокові.

Однокрокові задачі характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ітерацій (кроці) алгоритму.

Окремо виділяють:

– дробово-лінійне програмування (обмеження лінійне, а цільова функція дробово-лінійна);

– теорія ігор (застосовується в ринковій економіці).

17.3. Задача про використання сировини

Підприємство випускає продукцію n-видів $П_1, П_2 \ldots П_n$, для виготовлення якої треба використовувати сировину $S_1, S_2 \ldots S_m$. Припустимо, що запаси сировини кожного виду $b_1, b_2 \ldots b_m$ умовних одиниць. Кількість сировини, яка необхідна для виготовлення одиниці продукції кожного з видів П задасться таблицею:

Види сировини	**Кількість одиниць сировини**				**Запаси**
	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$	
S_1	a_{11}	a_{12}	⋯	a_{n1}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	⋯	a_{n2}	b_2
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	...
S_m.	a_{m1}	a_{m2}	⋯	a_{mn}	b_m

a_{ij} означає кількість одиниць сировина S_i , яка необхідна для виготовлення продукції $П_j$.

Відомо, що від реалізації одиниці продукції $П_j$ підприємство одержує прибуток c_j. Потрібно скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним.

Припустимо, що підприємство випускає x_j одиниць продукції $П_j$, тоді прибуток підприємства виражається за формулою: $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$.

Загальна кількість сировини S_i, що використовується при виготовлені продукції всіх видів: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n$

Вона не може перевищувати всього запасу: b_i отже, повинна виконувати нерівність: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1; 2 \ldots m)$.

Очевидно $x_i \geq 0$.

Математичну задачу можна сформулювати так:

Дано систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

і лінійну функцію

$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$

Треба серед розв'язків системи нерівностей обрати такий, при якому лінійна функція $f(x_1, \ldots x_n)$ набуває найбільшого значення, або знайти максимум лінійної функції в області допустимих розв'язків.

17.4. Задача про раціональне харчування

При правильному харчуванні калорійність харчових продуктів повинна повністю відшкодувати затрати енергії людини, при цьому потреба окремих рослинних та тваринних жирів, білків і вуглеводів не повинна перевищувати норму.

Нехай n різних продуктів з калорійністю a_{1j}, що дорівнює кількості калорій в одиниці маси.

В одиниці маси j-го продукту міститься:

a_{2j} – жирів, a_{3j} – білків, a_{4j} – вуглеводів.

Потреба організму в енергії b_1, жирах b_2, білках b_3, вуглеводах b_4. Тоді при правильному харчуванні повинні виконуватися такі нерівності:

$$\begin{cases} a_n x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n \geq b, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n \leq b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \cdots a_{3n} x_n \leq b_3, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + \cdots a_{4n} x_n \leq b_4 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$ – кількість і-го продукту.

Критерій оптимальності – економія витрат продуктів:

$$F = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \to \min; \quad j = 1; 2; 3; 4;$$

c_j – вартість одиниці кожного продукту.

17.5. Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування

Для розв'язку задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що грунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування.

Задача

Знайти екстремум функції.

$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min)$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2 \\ a_{m_1} x_1 + a_{m_2} x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Припустимо, що система сумісна і многокутник розв'язків обмежений.

За геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування, кожне і-те обмеження – нерівність півплощини з граничною прямою $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$.

Системою обмежень описується спільна частина або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють усі обмеження задачі.

Таку множину називають многокутником розв'язків або областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування.

Умова невід'ємних змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадрату системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.

Властивості задачі лінійного програмування, що застосовують під час графічного розв'язку

1. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многокутника розв'язків.

2. Якщо цільова функція досягає екстремального значення більш ніж в одній вершині многокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставлення координат якої в лінійну цільову функцію набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язку задач лінійного програмування

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких отримуємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівності на знак рівності.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = \overrightarrow{grad\ z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) і в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, й обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Можливі випадки:

- цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці (вершині многокутника розв'язків) (рис. 108);

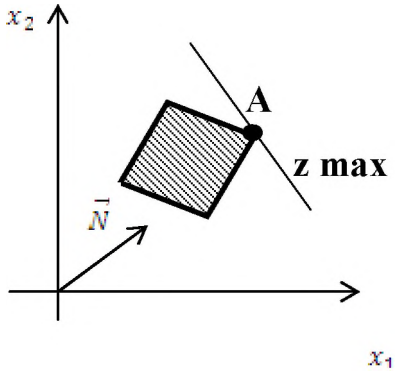


Рис. 108

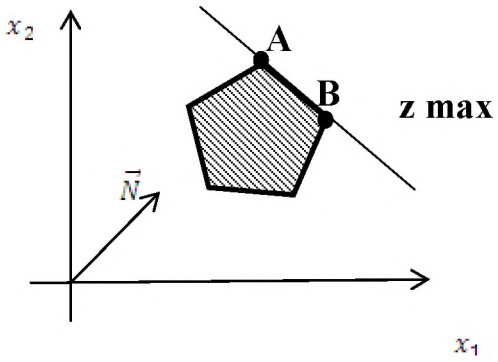


Рис. 109

- максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB (рис. 109);
- задача лінійного програмування не має оптимальних планів – цільова функція необмежена (рис. 110);
- система обмежень несумісна (рис. 111);

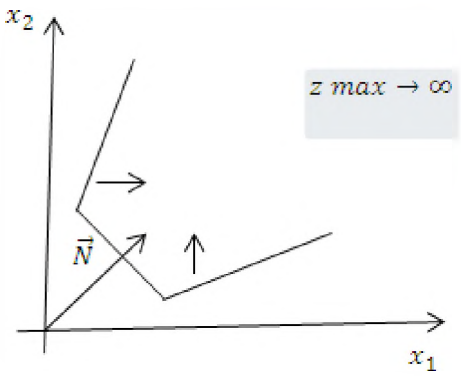


Рис. 110

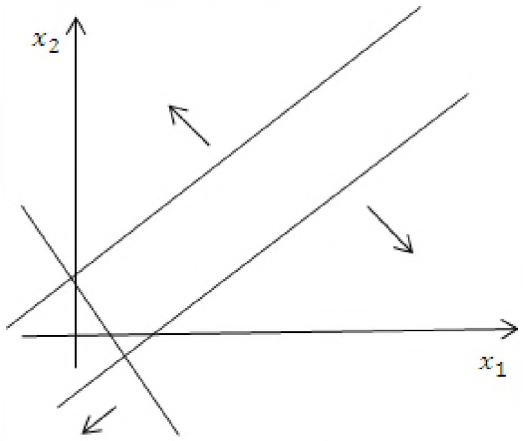


Рис. 111

- задача Л. П. має оптимальний план за необмеженої області (рис. 112–114).

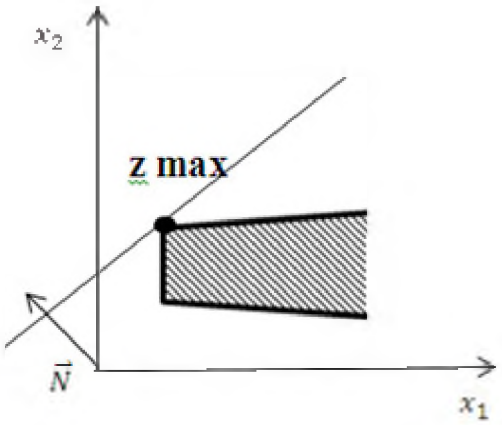


Рис. 112

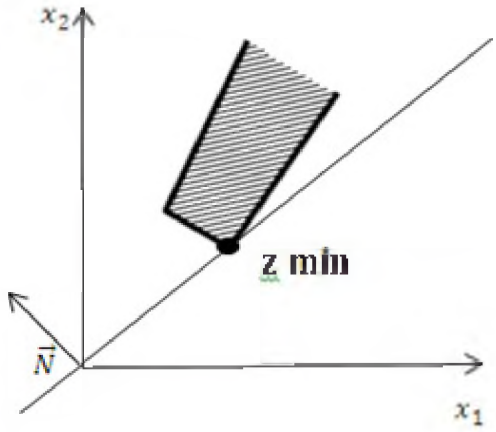


Рис. 113

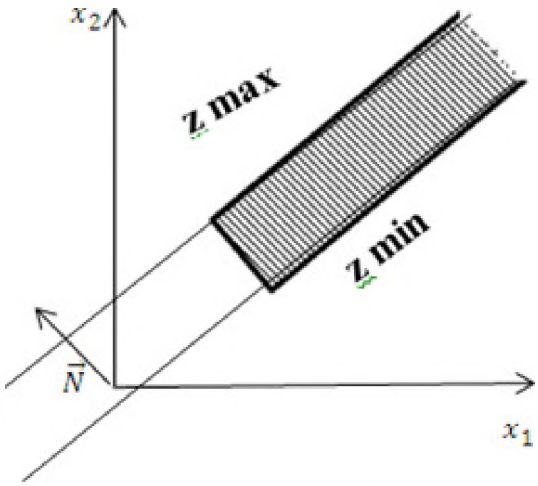


Рис. 114

Приклад

Знайти $\begin{cases} max \\ min \end{cases} z = -3 + 2x_1 + x_2$

при $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -4 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$.

1. Побудуємо многокутник:

будуємо прямі $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

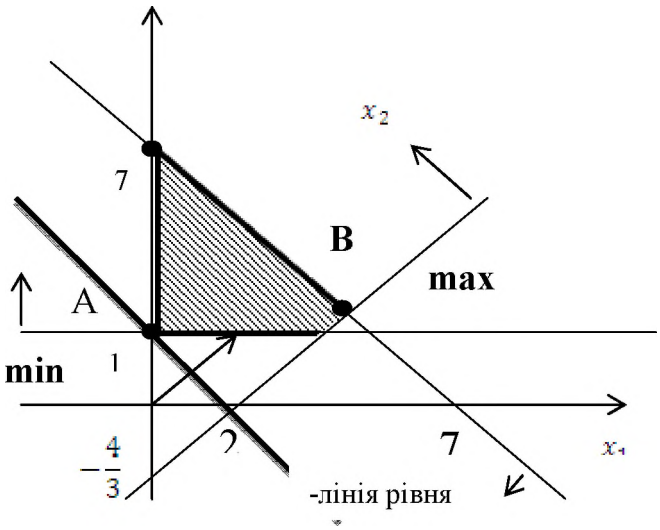


Рис. 115

$$\frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{7}=1$$

$$\frac{-2x_1}{-4}+\frac{3x_2}{-4}=\frac{-4}{-4}$$

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{-\frac{4}{3}}=1.$$

2. Градієнт $\vec{N}=(2;1)$.

3. Знаходимо оптимальну точку

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ -2x_1+3x_2=-4 \end{cases}$$

$$5x_2=10,$$

$$x_2=2, x_1=5$$

B(5; 2).

4. max z = –3 + 2·5 + 2 = 9

A: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$

min z= –2.

Приклад.

$$z=x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\geq 4 \\ 2x_1+x_2\geq 4 \\ x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

1. $x_1+2x_2=4 \quad \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{2}=1$

2. $2x_1+x_2=4 \quad \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{4}=1$

3. $x_1 = 0$

4. $x_2 = 0$

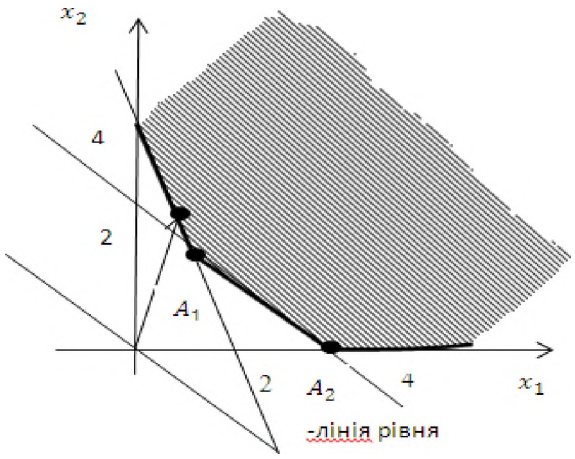


Рис. 116

Необмежена область $\vec{N} = (1;2)$ вказує, що max не існує z min = 4 в усіх точках відрізка A_1A_2.

Приклад

$$z = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 - 4x_2 = 4$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{-1} = 1$$

$$\vec{N} = (-2;1)$$

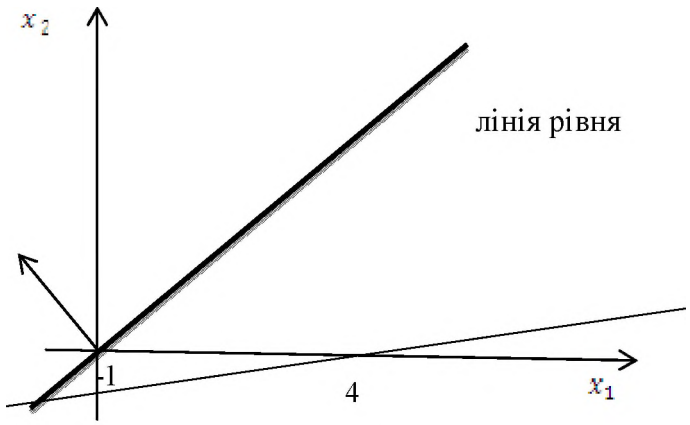


Рис. 117

Ні max, ні min функція не має.

17.6. Задачі з n змінними

Можна розв'язати графічним методом, якщо:

$n - m \le 2$, $\begin{cases} n - \text{кількість змінних} \\ m - \text{кількість обмежень} \end{cases}$

Приклад. Розв'язати графічно

$$max\, z = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ x_i \ge 0 (i = \overline{1,5}) \end{cases}$$

1. Виділимо базисні змінні.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
1	-1	1	-1	1	4
0	(1)	1	1	1	3
0	0	1	-1	-1	2
1	0	2	0	2	7
0	1	1	1	1	3
0	0	(1)	-1	-1	2
1	0	0	2	4	3
0	1	0	2	2	1
0	0	1	-1	-1	2

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_4 - 4x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_4 - 2x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 + x_5 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Усі невідомі додатні, тому віднімемо змінні, одержимо:

$$\begin{cases} 2x_4 + 4x_5 \le 3 \\ 2x_4 + 2x_5 \le 1 \\ -x_4 - x_5 \le 2 \\ x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}.$$

Підставимо у цільову функцію:

$$z = (3 - 2x_4 - 4x_5) + (1 - 2x_4 - 2x_5) + 2(2 + x_4 + x_5) - x_4$$

$z = 8 - 3x_4 - 4x_5$ – нова функція.

$$\begin{cases} 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_4 - x_5 = 2 \\ x_4, x_5 = 0 \end{cases}$$

$grad\ z = \bar{N}(3;-3;-4)$

$\left(0;\frac{1}{2}\right)\ x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2\frac{1}{2}$

$2max = 6$

Приклад

$\max(\min z) = 16x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 - 5x_5$ n = 5, m = 3, n – m = 2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 20 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_4 = 12 + 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_5 = -16 + 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

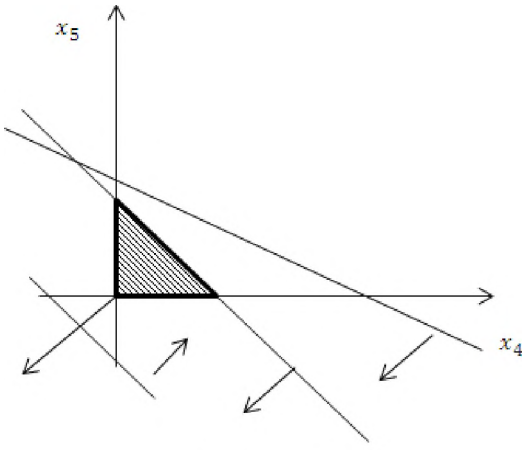
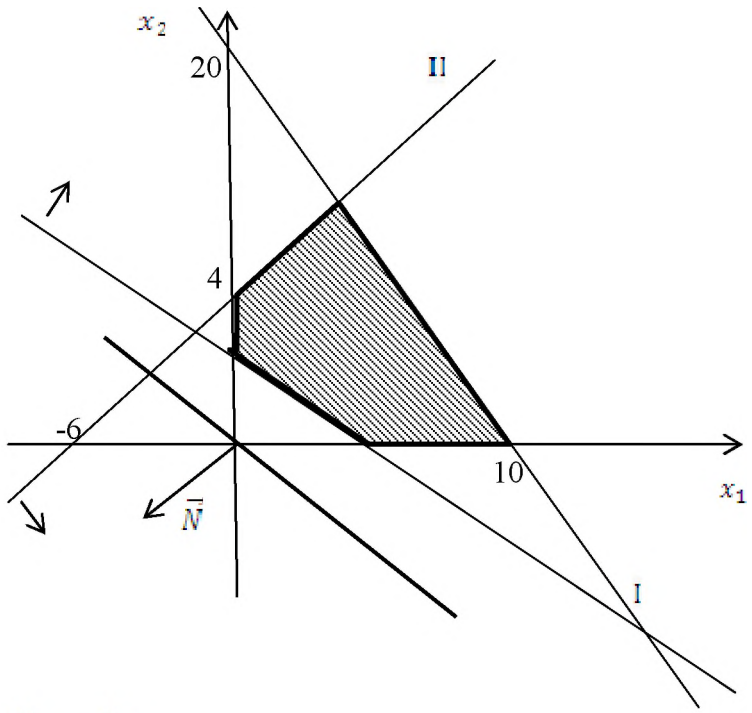


Рис. 118

$$\begin{cases} \dfrac{x_4}{3/2} + \dfrac{x_5}{3/4} = 1 \\ \dfrac{x_4}{1/2} + \dfrac{x_5}{1/2} = 1 \\ \dfrac{x_4}{-2} + \dfrac{x_5}{-2} = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{20}=1 \\ \frac{x_1}{-6}+\frac{x_2}{4}=1 \\ \frac{x_1}{8}+\frac{x_2}{4}=1 \end{cases}$$

$\bar{N}(-2;-3)$

z max(0; 4) = –12; z min(6; 8)= –36

17.7. Форми запису задач лінійного програмування

Загальна форма запису задачі лінійного програмування

$$\max(min)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Симетрична або стандартна форма запису:

$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ [\ i = \overline{1,m})$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ [\ i = \overline{1,m})$

$x_j \ge 0, [j = \overline{1,n})$ $x_j \ge 0, [j = \overline{1,n})$.

Канонічна або основна форма запису:

$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (\ i = \overline{1,m})$ $x_j \ge 0 (j = \overline{1,n})$.

Усі три форми задач еквівалентно, тобто від однієї форми можна перейти до іншої.

1. Задачу мінімізації можна звести до задачі максимізації і навпаки:

$\min z = -\max(-z)$.

2. Нерівність $\le$ множенням на (–1) зводять до нерівності $\ge$ і навпаки.

3. Обмеження нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$ зводяться до обмежень – рівностей додаванням до лівої частини додаткових невід'ємних змінних $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Обмеження $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$ зводяться до обмежень – рівностей відніманням від лівої частини додаткових невід'ємних змінних $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$.

4. У випадку необхідності обмеження – рівність можна записати у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \le b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \ge b_i. \end{cases}$$

5. Якщо в задачі лінійного програмування деяка змінна x_k не підлягає умові невід'ємності, її замінюють різницею двох інших невід'ємних змінних $x_k' \ge 0$, $x_k'' \ge 0$.

$x_k = x_k' - x_k''$

Приклади

Знайти початкові опорні плани задач лінійного програмування.

1. $\max z = 2x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Базисні змінні: x_1, x_3, x_5.

Вільні змінні: x_2, x_4.

Опорний план (4; 0; 16; 0; 6).

2. max z= $x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 2x_5$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + 3x_4 = 24 \\ -x_4 = 4 \\ x_4 + x_5 = 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Базисні змінні: x_1, x_3, x_5.

Вільні змінні: x_2, x_4.

Опорний план(4; 0; 24; 0; 8).

3. max z= $-x_1 + 6x_2 + 2x_4 - x_5 + 2x_6$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_4 - x_5 + x_6 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Базисні: x_3, x_5, x_6.

Вільні: x_1, x_2, x_4.

Опорний план(0; 0; 4; 0; 3; 3).

17.8. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $z_j - c_j$.

Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі.

Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умови оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану не існує.

4. Перехід до нового опорного плану виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення п. 3.

17.9. Визначення початкового опорного плану

1. Записати задачу в канонічній формі:

– всі обмеження рівняння з невід'ємними правими частинами;

– у цільову функцію додаткові змінні записують з коефіцієнтом нуль.

Для того щоб можна було знайти опорний план, необхідно, щоб вільні члени стояли в правій частині рівняння і були невід'ємні, а в системі обмежень були виділені базисні змінні.

Приклад

Знайти початковий опорний план задачі.

$$\min Z = -5x_1 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Базисні зміні: x_4, x_2.

Вільні зміні: $x_1, x_3 = 0;$

$x_0 = (0;3;0;2);$ $\alpha(x_0) = 0.$

Вільним змінним надають значення 0, а базисні – дорівнюють вільним членам.

І випадок

Нехай у системі обмежень маємо одиничний невід'ємний базис.

Наприклад, вона має вигляд:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad b_i \geq 0 (i = \overline{1,m}).$$

Говорять, що обмеження має зручний вигляд, якщо при невід'ємній правій частині ліва частина містить змінну, що входить з коефіцієнтом = 1, а в решту обмежень з коефіцієнтом = 0.

Якщо кожне обмеження канонічної задачі ЛП має зручний вигляд, тобто система обмежень зведена до одиничного невід'ємного базису, то початковий опорний план будується досить просто.

Зручні змінні вибираються за базис, а решта – вільні змінні.

Вільні змінні = 0, а базисні – вільним членам.

II випадок

Якщо система обмежень має вигляд:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad b_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$

Зведемо задану систему до канонічного виду, ввівши додаткові змінні:

$x_{n+i} \ge 0, i = \overline{1,m}.$

Отримаємо систему обмежень:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \qquad b_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$

Звідси опорний план:

$x_0 = (0,0 \dots 0, b_1, b_2 \dots b_m).$

У цільову функцію змінні вводяться із коефіцієнтом = 0.

Приклад

Знайти початковий опорний план.

$$\min z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9 \\ 14x_1 - 42x_2 - 16x_3 \le 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{array}\right\} + x_4 + x_5 + x_6$$

Зведемо до канонічного виду:

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 + x_4 = 9 \\ 14x_1 - 42x_2 - 16x_3 + x_5 = 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_6 = 4 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

$x_0 = (0;0;0;9;21;4)$

$z(x_0) = 0$

17.10. Симплексні таблиці

У першому стовпчику записують $Б_з$ опорного плану в тій послідовності, в якій вони розміщені у системі обмежень.

Другий стовпчик – $C_{баз}$– коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції.

Третій стовпчик – план – значення базисних змінних в опорному плані A_0.

Решта стовпчиків – коефіцієнти кожного обмеження.

Приклад

$$max\ z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

$Б_з$	$C_{баз}$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	2	0	0	0
x_3	0	6	1	1	1	0	0
x_4	0	4	0	1	0	1	0
x_5	0	10	2	1	0	0	1
$z_j - c_j$		0	–1	–2	0	0	0

Запишемо в канонічній формі.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$x_0 = (0;0;6;4;10)$$

Оцінки

$$\Delta_0 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0,1 \cdot 0 = 0$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 1 = -1$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 = -2$$

$$\Delta_3 = 0, \Delta_4 = 0.$$

Занести задачу в симплексну таблицю і знайти опорний план:

$$\min z = -6x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 48 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Базисні змінні: x_3, x_4.

Вільні змінні: x_1, x_2.

Б$_з$	С$_{баз}$	А$_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
			–6	8	–1	2
x_3	–1	8	–2	1	1	0
x_4	2	48	3	–8	0	1
$z_j - c_j$		68	14	–25	0	0
		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

$\Delta_0 = -1 \cdot 8 + 2 \cdot 48 = 68$

$\Delta_1 = -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - (-6) = 14$

$\Delta_2 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) - 8 = -25$

$\Delta_3 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - (-1) = 0$

$\Delta_4 = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 = 0$

17.11. Перевірка опорного плану на оптимальність

Теорема (ознака оптимальності опорного плану)

Опорний план є оптимальним, якщо для всіх j (j = $\overline{1,n}$) виконується умова:

$z_j - c_j \geq 0\ (max)$;

$z_j - c_j \leq 0 (min)$.

Значення оцінок визначають за формулою:

$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij} - c_j \ j = \overline{1,n}.$

Можливі такі випадки:

– усі Δ_j задовольняють умовам оптимальності і тоді визначений опорний план є оптимальним.

– не всі оцінки задовольняють умовам оптимальності, тоді виконують перехід до іншого опорного плану.

Перехід до іншого опорного плану

Задача на max

Якщо існують $\Delta_j < 0$, то план не оптимальний і переходять до іншого опорного плану.

Серед від'ємних оцінок знаходять максимальну за абсолютною величиною.

$\max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j| = |\Delta_{j_0}|$, тоді j-стовпчик – розв'язувальний.

Задача на min

Розв'язувальний стовпчик обирається за умови: $\max \Delta_j > 0 = \Delta_{j_0}$.

Змінну x_{j_o} вводять у базис.

Для визначення змінної, яку виводять з базиса знаходять симплексне відношення:

$$\frac{b_i}{a_{ij_o}},\ a_{ij_o} > 0.$$

Серед симплексних відношень визначають найменше:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \frac{b_i}{a_{ij_o}} = 0$$

вказує на рядок, в якому містить змінна, яку виводить з базиса x_{i_o}, тоді рядок i_0 – розв'язувальний.

Елемент на перетині i_0 – рядка та j_0 стовпця – розв'язувальний.

Складають таблицю нового опорного плану за правилами:

1) елементи i_0-рядка дорівнюють відповідним елементам розв'язувального рядка, поділені на розв'язувальний елемент;

2) усі елементи j_0-рядка дорівнюють 0, крім $a_{i_o j_o} = 1$;

3) усі інші елементи (враховуючи індексний рядок) нової таблиці отримують так: від відповідного елемента попередньої таблиці відняти добуток елементів розв'язувального рядка і стовпця, поділивши на розв'язувальний елемент.

Для контролю індексів рядка користуються формулами:

$\Delta_0 = C_{баз} \cdot A_0,\ \Delta_j = C_{баз} \cdot A_j - c_j$.

Приклад

Розв'язати симплексним методом.

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_i \ge 0, j = \overline{1,2} \end{cases}$$

1. Зведемо задачу до канонічного виду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

2. Опорний розв'язок $\bar{x} = (0; 0; 6; 4)$.

3. Складаємо симплексну таблицю

Б$_з$	С$_{баз}$	А$_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_3	0	6	2	4	1	0
x_4	0	4	1	[4]	0	1
$z_i - c_i$		0	–1	–2	0	0

Знаходимо симплексні відношення:

$Q_1 = 6 : 4 = \frac{3}{2}$; $Q_2 = 4 : 4 = 1$.

Є від'ємні оцінки, тобто знайдений розв'язок не оптимальний.

У базис потрібно ввести нову змінну, серед від'ємних оцінок оберемо найбільшу за модулем –2, отже, базисні змінні – x_2

Для визначення змінної, яку виводять із базису, порахуємо симплексні відношення: $A_0 : x_2$.

Із знайдених відношень виберемо найменше –1, що відповідає змінній x_4. Замість x_4 вводимо x_2.

Б$_з$	С$_{баз}$	А$_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_3	0	2	[1]	0	1	–1
x_2	2	1	$1/4$	1	0	$1/4$
$z_i - c_i$		2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$1/2$

Знаходимо симплексне відношення:

$2 : 1 = 2$; $1 : 1/4 = 4$ менше.

Б$_з$	С$_{баз}$	А$_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	2	0	0
x_1	1	2	*1*	0	1	–1
x_2	2	$1/2$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$z_i - c_i$		3	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Від'ємних оцінок немає. Знайдений розв'язок оптимальний $x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = 0;\ x_4 = 0,\ \max z = 3.$

Приклад

$$\min z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$\min z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$Б_з$	$C_{баз}$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	-2	3	0	0
x_4	0	2	-2	1	3	1	0
x_5	0	1	1	[3]	4	0	1
$z_i - c_i$		0	-1	2	-3	0	0

Симплексне відношення:

$2:1 = 2;\ 1:3 = \frac{1}{3}.$

Задача на min є додатні оцінки. Переходимо до наступної таблиці:

$Б_з$	$C_{баз}$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	-2	3	0	0
x_4	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_2	–2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$z_i - c_i$		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	$-\frac{3}{3}$

Додатних оцінок немає, тобто план є оптимальним:

$x_0(0;-2;0;0),\ \min z = -\frac{2}{3}.$

17.12. М-задача

Нехай система обмежень має вигляд

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad b_i \geq 0 (i = \overline{1,m}).$

Перейдемо до канонічної форми шляхом введення додаткових змінних.

$x_{n+i} \geq 0, (i = \overline{1,m})$.

Система обмежень не має зручного вигляду.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i - x_{n+i} = b_i \qquad b_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$.

У цьому випадку вводять штучний базис шляхом переходу до М-задачі.

$\max(min)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+)M \sum_{i=1}^{m} w_i$.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i - x_{n+i} + co_i = b_i \qquad (i = \overline{1,m})$.

$x_i \geq 0, (j = \overline{1,n})\ w_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$.

У цільовій функції знак «–» відноситься до задачі максимізації.

Якщо деякі з рівнянь вихідної системи мають зручний вигляд, то в них не вводять штучні змінні.

Початковий опорний план М-задачі має вигляд:

$\overline{x_0} = (0,0,0 \ldots 0, b_1, b_2, \ldots b_n)$

Між оптимальними планами початкової задачі і М-задачі є зв'язок: якщо в оптимальному плані М-задачі всі штучні змінні $w_i^* = 0$, то значення координат, що залишилися, дадуть оптимальний план початкової задачі.

Приклад

Знайти початковий опорний план задачі.

$$\min z = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 2 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Введемо допоміжні змінні x_5, x_6, x_7 та штучні змінні w_1, w_2.

Перейдемо до задачі в канонічному вигляді та до М- задачі.

$$\min z = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + Mw_1 + Mw_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 14x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_6 + w_1 = 2 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_7 + w_2 = 1 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,7})\ w_i \geq 0, (i = \overline{1,2}) \end{cases}$$

Початковий опорний план (0; 0; 0; 0; 3; 0; 0; 2; 1)

Занести умову задачі в симплексну таблицю і записати початковий опорний план:

$$\max z = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 \le 10 \quad + x_4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \quad - x_5 + w_1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \quad - x_6 + w_2 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Зведемо задачі до канонічного виду, а потім до М-задачі.

$$\max z = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mw_1 - Mw_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 + w_1 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + w_2 = 3 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}) \; w_i \ge 0, (i = \overline{1,2}) \end{cases}$$

М-задача має зручний вигляд, занесемо її в симплексну таблицю.

$Б_з$	$C_{баз}$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_1	w_2
			9	6	-3	0	0	0	**-M**	**-M**
x_3	-3	4	-1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	10	1	1	0	1	0	0	0	0
w_1	-M	9	3	1	0	0	-1	0	1	0
w_2	-M	3	-1	3	0	0	0	-1	0	1
$z_i - c_i$		-12	-6	-9	0	0	0	0	0	0
		-12M	-2M	-4M	0	0	M	M	0	0

Початковий опорний план має вигляд:

$$\overline{x_0} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, w_1, w_2) = (0, 0, 4, 10, 0, 0, 9, 3)$$

$$z(x_0) = -12 - 12M$$

Індексний рядок розбивають на два:

I – вільні члени $\Delta_0 = C_{баз} \cdot A_0; \Delta_j = C_{баз} \cdot A_j - c_j;$

II – коефіцієнти, що містять М.

Розв'язати задачу, використовуючи штучний метод.

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6 & + x_4 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 12 & - x_5 + w \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mw$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5 + w = 12 \end{cases}$$

$Б_з$	$C_{баз}$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w
			2	-3	-4	0	0	M
x_4	0	6	6	3	[2]	1	0	0
w	M	12	6	4	3	0	-1	1
$z_j - c_j$		0	-2	3	4	0	0	0
		12M	6M	4M	3M	0	-M	0
x_3	-4	3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0
w	M	3	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-1	1
$z_j - c_j$		-12	-14	-3	0	-2	0	0
		3M	-3M	$-\frac{1}{2}M$	0	$-\frac{3}{2}M$	-M	0

Усі оцінки не додатні. За ознакою оптимальності опорний план (0; 0; 3; 0; 0; 3) оптимальний, але в оптимальному плані штучна зміна $\neq 0$, то система обмежень цієї задачі не сумісна. Задача розв'язку не має.

Альтернативний оптіум

Якщо в індексному рядку останньої симплексної таблиці (що містить оптимальний план) є хоча б одна нульова оцінка, що відповідає вільній змінній, то ЗЛП має нескінчену множину оптимальних планів).

Ознака необмеженості цільової функції

Якщо в розв'язувальному стовпці немає жодного додатного елемента, то функція мети на множині допустимих планів не обмежена.

Ознака несумісності системи обмежень

Якщо в оптимальному плані М-задачі не всі штучні змінні дорівнюють 0, то система обмежень цієї задачі не сумісна.

17.13. Поняття двоїстості

Кожній задачі лінійного програмування відповідає двоїста, що формується за допомогою певних правил безпосередньо за умови прямої задачі.

Якщо задача лінійного програмування має вигляд:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \dots c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}) \end{cases},$$

то двоїста задача запишеться так:

$$\min F = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots b_my_m$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m_1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + \cdots a_{22}y_2 + \cdots a_{m_2}y_m \ge c_2 \\ a_{1m}y_1 + \cdots a_{2m}y_2 + \cdots a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_j \ge 0, (j = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Пряма задача	Двоїста задача
$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m}), (j = \overline{1,n})$ $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$	$\min F = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j \ (j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m})$ $y_i \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$

Приклад

$\max z = 2x_1 + 7x_2$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$\min F = 14y_1 + 8y_2$ $\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + 8y_2 \ge 7 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

$min z = 12x_1 + 24x_2 + 18x_3$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$	$\min F = 14y_1 + 8y_2$ $\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 5y_3 \le 12 \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \le 24 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \le 18 \\ y_1, y_2, y_3 \le 0 \end{cases}$

Правила побудови двоїстих задач

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі.

Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі на max, то цільова функція двоїстої задачі – на min і навпаки.

4. Коефіцієнти при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільової функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m_1} & a_{m_2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{m_1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{m_2} \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюється одна з однієї транспонуванням.

7. Якщо на зміну прямої задачі накладено умову невід'ємності, то відповідне обмеження двоїстої задачі записують як обмеження нерівності, якщо ні, то як обмеження рівності.

8. Якщо будь-яке обмеження прямої задачі записано як рівність, то на відповідну змінну двоїстої задачі умова невід'ємності не накладається.

Приклад

Пряма задача лінійного програмування

$\max z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \le -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \le 1 \\ -x_1 - 3x_3 - 2x_4 \le -2 \\ -2x + x_2 - 3x_4 = -5 \\ x_1, x_4 \ge 0 \\ x_2, x_3 - \text{довільні} \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{matrix}$$

Двоїста задача:

$$\min F = -3y_1 + 4y_2 + y_3 - 2y_4 - 5y_5$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 - 2y_4 - 2y_5 \ge -12 \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 = 10 \\ 2y_2 - 3y_4 = -15 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 \ge -11 \\ y_1, y_3, y_4 \ge 0 \\ y_2, y_5 - \text{довільні} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \text{ не відємне} \\ x_4 \end{matrix}$$

Двоїсті пари задач бувають симетричні – обмеження прямої та двоїстої задачі є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $x_j \ge 0$	$\min F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j$ $y_i \ge 0$
$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$ $x_j \ge 0$	$\max F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j$ $y_i \ge 0$

Несиметричні – обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої лише як нерівності. У цьому випадку у відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення необмеженого знаком.

$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $x_j \geq 0$	$\min F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j$ $y_i \epsilon (-\infty; \infty)$
$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $x_j \geq 0$	$\max F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_j$ $y_i \epsilon (-\infty; \infty)$

Перша теорема двоїстості

Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $max\, z = min\, F$ *і навпаки.*

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач необмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план x^*, визначений симплексним методом, то оптимальний план двоїстої задачі y^* визначається із співвідношення: $y^* = \overline{C_{баз}} \cdot D^*$,

де $\overline{C_{баз}}$ – вектор – рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані, D^{-1} – матриця обернена до матриці D, складеної з базису оптимального плану, компоненти яких взято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1}завжди міститься в останній симплексній таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач ЛП знаходять розв'язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості

Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі і-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний і-ий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо і-ий компонент оптимального плану двоїстої задачі додатній, то відповідне і-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості

Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати графічно:

$z = 2x_1 + 3x_2$ (max, min)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 - min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 20 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_j \geq 0 \\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$\min z = x_1 - 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$\max z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12 \\ 6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 35 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$min\ z = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

2. Розв'язати симплексним методом:

1) $\max z = 2x_1 + 4x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $\max z = 12x_1 + 2x_3 - 3x_4$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

3) $\max z = 2x_1 + 6x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Побудувати двоїсті задачі до ЗЛП у симетричній формі:

1) $\max z = 3x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 4x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $\min z = -10x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ -5x_1 + x_2 \ge -5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $\min z = 2x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Побудувати двоїсті задачі в несиметричній формі:

1) $\min z = 2{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11 \\ x_1, x_3 \geq 0 \\ x_2 - \forall \end{cases}$$

2) $\max z = 6x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

3) $\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 6 \\ x_1 - x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_4 - \forall \end{cases}$$

Тема 18. Транспортна задача

18.1. Постановка транспортної задачі

Споживачі / Поста-чальники	B_1	B_2	…	B_n	Потреби
A_1	x_{11}/c_{11}	x_{12}/c_{12}	…	x_{1n}/c_{1n}	a_1
A_2					a_1
A_m					a_m
Запаси	b_1	b_2	…	b_n	

x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з і-того пункту постачання (A_1) в j-тий пункт споживання (B_j).

Нехай маємо m пунктів виробництва (постачальника) $i = \overline{1,m}$. У кожному пункті A_i зосереджено відповідний товар a_1.

Нехай цей товар необхідно перевезти в n пунктів споживання (В$j = \overline{1,n}$).

Потреби кожного пункту B_j дорівнюють b_j.

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції з і-того пункту виробництва в j-ий пункт споживання.

Вважаємо, що виконується баланс, тобто загальна кількість виробленого товару у пунктах виробництва збігається із загальною кількістю одиниць товару, що потребує споживач.

Поставимо задачу так:

1) щоб весь товар з пунктів виробництва був вивезений;
2) потреби кожного пункту споживання були задоволені;
3) загальна вартість усіх перевезень з пунктів виробництва у пункти споживання була мінімальною.

Кількість товару, перевезеного з $1,2 \dots m$ пунктів, задовольняють умовам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots x_{2n} = a_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots x_{mn} = a_m \end{cases} - \text{по запасах}$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}.$$

Кількість товару, що перевозиться в $1,2 \dots n$ пункт, задовольняють умовам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots x_{1n} = b_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots x_{2n} = b_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \geq 0, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,m} \end{cases} - \text{по потребах}$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = 1,n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}.$$

Загальна вартість усіх перевезень:

$$z = \begin{matrix} c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots c_{1n}x_{1n} + \cdots \\ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots c_{mn}x_{mn} + \cdots \end{matrix}$$

Математична модель:

$min\, z = \sum_{i=1}^{m} \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$,

при умовах:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}. \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Задача закритого типу, тобто:

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Якщо запаси дорівнюють потребам.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то відкритого типу.

Розв'язок транспортної задачі проводять за алгоритмом:

1) визначення опорного плану;

2) оцінка цього плану;

3) перехід від одного плану до іншого шляхом заміни однієї із базисних змінних на вільну.

Особливості системи транспортної задачі:

– коефіцієнти при невідомих в усіх рівняннях дорівнюють одиниці;

– кожна змінна зустрічається лише в двох рівняннях;

– система рівнянь ТЗ симетрична відносно всіх змінних x_{ij};

– матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих $x_{ij}(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ складається з одиниць та нулів, кожен стовпчик матриці містить два елементи рівних 1, а решту – нулі. При розв'язку транспортної задачі важливе місце займає теорема про ранг матриці. Ранг матриці транспортної задачі на одиницю менший кількості рівнянь, тобто $r = m + n - 1$, де m – кількість постачальників; n – кількість споживачів.

Кожний опорний розв'язок системи обмежень транспортної задачі повинен мати: $n - r = mn - (n + n - 1) = (n - 1)(m - 1)$ вільних змінних, рівних нулю і $r = m + n - 1$ – базисних.

Якщо кількість зайнятих клітинок задовольняє умові $m+n-1$, то план перевезень називають невиродженим, а якщо кількість зайнятих клітинок не задовольняє цій умові, то план перевезень називають виродженим.

Побудова опорного розв'язку транспортної задачі

- **метод північно-західного кута**

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	3	2	6	50
A_2	2	4	5	1	70
A_3	3	6	7	5	100
Потреби	40	60	50	70	

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4 **40**	3 **10**	2	6	50
A_2	2	4 **50**	5 **20**	1	70
A_3	3	6	7 **30**	5 **70**	100
Потреби	40	60	50	70	

У клітинку (1; 1) запишемо min(50; 40) = 40 і перший стовпчик не розглядаємо.

У клітинку (1; 2) запишемо min(50–40; 60) = 10 і перший рядок не розглядаємо.

У клітинку (2; 2) запишемо min(70; 60–10) = 50 і другий стовпчик не розглядаємо.

У клітинку (2; 3) запишемо min(70–50; 50) = 20, другий рядок заповнено.

У клітинку (3; 3) запишемо min(100; 50–20) = 30.

Вихідний опорний план перевезень:

$$x = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \end{bmatrix}$$

Відповідна функція мети:

$$f = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 50 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 7 \cdot 30 + 5 \cdot 70 = 1050$$

- **Правило «мінімального елемента»**

Заповнювати таблицю починаємо з клітинки, якій відповідає найменша вартість (це клітинка (2; 4) $c_{24} = 1$).

У клітинку (2; 4) запишемо min(70; 70) = 70 і викреслюємо другий рядок та четвертий стовпчик.

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси	
A_1	4	3	2 50	6	50	–
A_2	2	4	5	1 70	70	–
A_3	3 40	6 60	7	5	100	
Потреби	40	60	50	70		

Із залишених вартостей найменше: -2 в клітинки (1; 3) запишемо min(50; 50) = 50, перший рядок і третій стовпчик не розглядаємо.

Найменша вартість клітинки (3; 1) min(100; 40) = 40, в клітинки (3; 2) запишемо min(100–40; 60) = 60.

Опорний розв’язок матиме вигляд:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Функція мети $f = 2 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 60 = 650$.

Для цього опорного плану:

$r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

x_2 – вироджений план.

2. Знайти відповідні функції мети.

18.2. Метод потенціалів

За таким опорним планом, у якого кількість зайнятих клітинок $m+n-1$, надається кожному постачальнику і споживачу число, що називається потенціалом. Потенціали вибирають так, щоб їхня сума для кожної завантаженої клітини дорівнювала тарифу перевезень одиниці вантажу.

Якщо клітинка (i; k) базисна (зайнята), то $U_i + V_k = C_{ik}$;

U_i – потенціал i-го постачальника;

V_k – потенціал k-го споживача;

C_{ik} – тариф базисної клітини.

Розв'яжемо систему $m+n-1$ рівнянь виду $U_i + V_k = C_{ik}$.

Далі рахують оцінки вільних клітинок за формулою: $S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$.

Якщо для вільних клітин усі оцінки $S_{ij} \geq 0$, то одержаний опорний план перевезень оптимальний. Якщо хоча б одна оцінка $S_{ij} \leq 0$, то число базисних клітин вводять клітинку, для якої S_{ij} найменша.

Для такої клітинки будується цикл і проводять переміщення вантажу так, щоб баланс циклу зберігався.

Наприклад

Якщо цикл має вигляд:

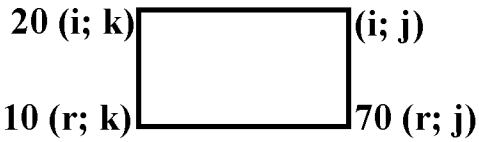


Вільній клітині умовно надаємо знак «+», тоді слідкуючій клітині за рухом годинникової стрілки «–» тощо. Знаки чергуються.

У від'ємних вершинах обираємо найменшу min(20; 30) = 20 од.

Кількість вантажу 20 одиниць, додаємо до постачальників у клітинах із знаком «+» і віднімаємо в клітинах із знаком «–».

У результаті такого переміщення баланс вантажу не порушується, хоча змінюється завантаження клітин.



При розв'язку задач може бути, що найменше постачання однакове у кількох вершинах ланцюгів перерахунку, тоді після перерахунку в кількох базисних клітинах постачання дорівнює 0.

У цьому випадку будь-яка одна нульова базисна клітинка приймається за вільну.

Може бути, що найменше постачання у від'ємних вершинах дорівнює 0, в цьому випадку зміна дорівнює 0.

Нульова базисна переходить у вільну, а відповідна вільна у базисну.

Такі кроки повторюються до тих пір, доки всі характеристики вільних клітин будуть невід'ємні.

Наприклад

Нехай модель транспортної задачі виглядає так:

	Споживачі					
Постачальники	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запаси**	
A_1	2 0	3	2 30	4	30	-
A_2	3	2 30	5	1 10	40	-
A_3	4 20	3 0	2	6	20	
Потреби	20	30	30	10	90	
	-	-	-	-		

Заповнимо таблицю методом мінімального елемента.

Заповнені 4 клітинки, а повинно бути заповнено 4 + 3 – 1 = 6.

Оберемо дві клітинки, у яких поставимо постачання рівні нулю;

A_1B_1 та A_3B_2.

Базисним буде план у тому випадку, якщо обрані $m+n-1$ клітинок утворюють викреслювану комбінацію.

Комбінація клітинок називається викреслюваною, якщо всі рядки і стовпці матриці можна викреслити.

Розглянемо всі рядки і викреслимо ті, у яких по одній базисній клітинці.

Розглянемо всі стовпці і викреслимо ті, у яких по одній базисній клітинці.

Знову переходимо до рядків тощо, доки не викреслимо всю таблицю.

Комбінація викреслювана, отже, план опорний.

Перевіримо оптимальність плану:

					U_i
	(2) + 0	2 3	(2) - 30	4 4	0
	0 3	(2) 30	2 5	(1) 10	1
	(4) - 20	(3) 0	-2 2 +	6	2
V_j	2	1	2	0	

Знайдемо потенціали завантажених клітин:

$U_1 + V_1 = 2$ Нехай $U_1 = 0$, тоді:

$U_3 + V_1 = 4$ $\quad V_1 = 2$

$U_2 + V_2 = 2$ $\quad U_3 = 2$

$U_3 + V_2 = 3$ $\quad V_2 = 1$

$U_1 + V_3 = 2$ $\quad V_3 = 2$

$U_2 + V_4 = 1$ $\quad U_2 = 1$

$V_4 = 0$

Знаходимо характеристики вільних клітин:

$S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

$S_{21} = 3 - (1 + 2) = 0$

$S_{12} = 3 - (1 + 0) = 2$

$S_{14} = 4 - 0 = 4$

$S_{23} = 5 - (2 + 1) = 2$

$S_{33} = 2 - (2 + 2) = -2$

$S_{34} = 6 - 2 = 4$

План не оптимальний, оскільки є від'ємна характеристика –2.

Будуємо ланцюг перерахунку.

Для побудови ланцюгів перерахунку:

1) ланцюг є замкнутим многокутником;

2) вершини є клітинки таблиці, причому одна з вершин – вільна клітинка, а решта – базисні;

3) усі кути прямі, а кожен відрізок обмежений двома вершинами, що належать одному стовпцю чи одному рядку;

4) кількість вершин парна;

5) відрізки можуть проходити через базисні клітини, що не є вершинами.

Вершини, в яких поставки при перерахунку збільшуються позначимо +, їх називають додатними, а в яких зменшуються позначимо –, їх називають від'ємними.

У ланцюжку однакова кількість від'ємних і додатних вершин, що строго чергуються.

Будуємо ланцюг перерахунку.

Тепер ця клітина стане базисною. Значення поставки – найменше значення у від'ємних вершинах min(20; 30) = 20.

Отримаємо новий план:

					U_i
	(2) 20	0 3	(2) 10	6 4	0
	2 3	(2) 30	4 5	(1) 10	-1
	2 4	(3) 0	(2) 20	8 6	0
V_j	2	3	2	-2	

Для цього плану знаходимо потенціали і характеристики вільних клітин.

$U_1 + V_1 = 2$ $U_1 = 0$, $V_1 = 2$

$U_1 + V_3 = 2$ $U_3 = 2$

$U_2 + V_2 = 2$ $U_2 = -1$

$U_2 + V_4 = 1$ $V_4 = -2$

$U_3 + V_2 = 2$ $V_2 = 3$

$U_3 + V_3 = 2$ $U_3 = 0$

І характеристики:

$S_{12} = 3 - 3 = 0$

$S_{14} = 4 - (0 - 2) = 6$

$S_{21} = 3 - (2 - 1) = 2$

$S_{23} = 5 - (2 - 1) = 4$

$S_{31} = 4 - (2 + 0) = 2$

$S_{34} = 6 - (0 - 2) = 8$

Усі характеристики додатні, тому план оптимальний:

$F\,min = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 170$ грн.

За цим планом постачальник:

$\mathbf{A_1}$ повинен везти 20 одиниць вантажу в $\mathbf{B_1}$.

$\mathbf{A_1}$ повинен везти 10 одиниць вантажу в $\mathbf{B_3}$.

$\mathbf{A_2}$ повинен везти 30 одиниць вантажу в $\mathbf{B_2}$ по 2 грн.

$\mathbf{A_2}$ повинен везти 10 одиниць вантажу в $\mathbf{B_4}$ по 1 грн.

$\mathbf{A_3}$ повинен везти 20 одиниць вантажу в $\mathbf{B_3}$ по 2 грн.

Задача відкритого типу

Якщо

$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$

або

$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$

Якщо перша нерівність, то вводиться фіктивний постачальник, вводиться додатковий рядок, в якому:

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i.$

Усі тарифи $c_{i\,m+1} = 0$.

Наприклад

Знайти оптимальний план.

Споживачі / **Постачальники**	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_3}$	$\mathbf{B_4}$	**Запаси**
A_1	4	10	5	3	60
$\mathbf{A_2}$	6	7	2	8	100
$\mathbf{A_3}$	8	9	12	11	70
Потреби	50	55	70	45	230 / 220

	50	55	70	45	10	U_i
60	4 5 10 15	5 5	3 2 0 45			0
100	+ 6 0 7 20	2 3 8 70	0 - 10			2
70	- 8 9 15	55	8 12 4 11 -2 0 +			4
V_j	4	5	0	3	-2	

min(10; 15) = 10.

Після переміщення:

	50	55	70	45	10	U_i
60	4 5 10 15	5 5	3 4 0 45			0
100	6 0 7 30	2 3 8 70	2 0			2
70	8 9 5	55	8 12 4 11 10	0		4
V_j	4	5	0	3	-4	

Усі оцінки додатні – план оптимальний.

Завдання для самостійної роботи

Побудувати опорні плани:

- **метод північно-західного кута**
- **метод мінімального елемента**

1	3	2	50
4	5	7	100
6	2	4	130
70	100	110	280

4	7	2	3	30
3	1	0	4	190
5	6	3	7	250
70	120	150	130	470

5	1	2	3	300
6	3	7	1	200
4	5	3	2	500
2	4	6	4	700
230	420	650	400	1700

3	1	5	4	2	200
6	4	2	7	3	450
5	2	3	4	6	500
300	400	200	100	150	1150

5	3	1	4	2	6	1780
4	2	3	6	1	3	2000
1	3	7	4	5	2	1530
3	4	6	7	1	5	2860
850	1870	1950	1670	1000	830	8170

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В. Математика для економістів: Вища математика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Т. 1 – К. : Національна академія управління, 1997.

2. Бугір М. Математика для економістів / М. Бугір. – К. : Академія, 1998.

3. Валєєв К. Г. Вища математика : навчальний посібник. – Ч. 1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001.

4. Валєєв К. Г. Вища математика : навчальний посібник. – Ч. 2 / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2002.

5. Валєєв К. Г. Вища математика : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 1999.

6. Бащук О. Ю. Математика для економістів. Вища математика. – Частина І : Лінійна алгебра. Аналітична геометрія : навч. посіб. / О. Ю. Бащук, В. О. Клименко, В. О. Клименко; за заг. ред. О. Ю. Бащук. – Ірпінь : Видавництво Національного Університету ДПС України, 2016. – 126 с. (англ. мовою). – (Серія «Податкова та митна справа в Україні», т. 51).

7. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003.

8. Гмурман В. Е. Теория вероятности и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2004.

9. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в двух частях / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Высшая школа, 1997.

10. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – Ч. 1, 2 / А. Я. Дороговцев. – Київ : Либідь, 1993.

11. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001.

12. Вища математика: збірник задач : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. – К. : А.С.К., 2001.

13. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 1 : Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2000. – 304 с.

14. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 2 : Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.

15. Высшая математика для экономистов : учебное пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Кремера Н. Ш. – Москва : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

16. Красе М. С. Математика для экономических специальностей : учебник / М. С. Красс. – М. : ИНФРА, 1998.

17. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2004. – 452 с.

18. Руденко І. Б. Курс лекцій з вищої математики / І. Б. Руденко, С. Б. Харенко, О. Б. Чернобай; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – 2-ге вид., без змін. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2009. – 266 с.

19. Руденко І. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник / І. Б. Руденко, С. Б. Харенко, О. Б. Чернобай; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2010. – 178 с.

20. Залізко В. Д. Диференціальні рівняння. Практикум : навчальний посібник / В. Д. Залізко, Г. В. Мамонова, О. Б. Чернобай; за заг. ред. Г. В. Мамонової. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2009. – 158 с.

21. Задорожня Т. М. Практичні заняття з вищої математики : навчальний посібник. – Ч. ІІІ / Т. М. Задорожня, С. М. Кучменко, О. Б. Чернобай; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2009. – 160 с.

22. Задорожня Т. М. Опорний конспект лекцій з теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів / Т. М. Задорожня, Г. В. Мамонова. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2011. – 229 с.

23. Збірник вправ та задач з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» / Задорожня Т. М., Кучменко С. М.,

Мамонова Г. В., Руденко І. Б., Харенко С. Б., Чернобай О. Б. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2013. – 114 с.

24. Збірник тестових завдань з вищої математики / Задорожня Т. М., Кучменко С. М., Мамонова Г. В., Руденко І. Б., Семко М. М., Харенко С. Б., Чернобай О. Б. – Ірпінь : ВЦ НУДПС України, 2013. – 284 с.

25. Математика для економістів. Курс лекцій : навч. посіб. / Задорожня Т. М., Руденко І. Б., Харенко С. Б., Чернобай О. Б.; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – Ірпінь : Видавництво Національного університету ДПС України, 2015. – 342 с.

26. Рудь І. Б. Практичні заняття з вищої математики : навч. посіб. – Ч. II / І. Б. Рудь, Н. В. Точиліна, С. Б. Харенко; за заг. ред. Є. А. Сторожука. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2006. – 178 с.

27. Рудь І. Б. Практичні заняття з вищої математики. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія : навчальний посібник. – Ч. I / І. Б. Рудь, Н. В. Точиліна, Є. А. Сторожук; за заг. ред. Є. А. Сторожука. – Ірпінь : Національна академія ДПС України, 2003. – 180 с.

28. Математика для економістів (заочна форма навчання) : навч. посіб. / Семко М. М., Пискун М. М., Задорожня Т. М., Ярова О. А. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2010. – 317 с.

29. Вища математика (перший семестр). Розрахункові роботи / Семко М. М., Задорожня Т. М., Кучменко С. М., Мамонова Г. В., Руденко І. Б., Харенко С. Б., Чернобай О. Б., Ярова О. А.; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – Київ, 2012. – 96 с.

30. Вища математика (другий семестр). Розрахункові роботи / Семко М. М., Задорожня Т. М., Кучменко С. М., Мамонова Г. В., Руденко І. Б., Харенко С. Б., Чернобай О. Б., Ярова О. А.; за заг. ред. О. Б. Чернобай. – Київ, 2013. – 100 с.

31. Дидактичні матеріали до екзамену з вищої математики : посібник / Семко М. М., Кучменко С. М., Харенко С. Б., Ярова О. А. – Київ, 2014. – 144 с.

32. Контрольні роботи з вищої математики : навчальний посібник / Семко М. М., Чернобай О. Б., Скасків Л. В., Ба-

щук О. Ю., Кучменко С. М., Харенко С. Б., Ярова О. А., Акперова І. В. – Київ, 2015. – 58 с.

33. Вища математика. Методичні вказівки до виконання екзаменаційних та залікових завдань : навчальний посібник / Семко М. М., Чернобай О. Б., Бащук О. Ю., Кучменко С. М., Скісків Л. В., Ярова О. А., Руденко І. Б. – Київ : Інститут математики НАН України, 2016. – 50 с.

34. Семко М. М. Практикум з теорії ймовірності та математичної статистики : навчальний посібник / М. М. Семко, Л. В. Скасків. – Київ : Інститут математики НАН України, 2015. – 81 с.

35. Контрольні роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики : навчальний посібник / Семко М. М., Чернобай О. Б., Скасків Л. В., Бащук О. Ю., Кучменко С. М., Харенко С. Б., Ярова О. А., Акперова І. В. – Київ, 2016. – 58 с.

36. Шкіль М. І. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – Книга 1 / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – Київ : Либідь, 1994.

37. Шкіль М. І. Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. – Книга 2 / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – Київ : Либідь, 1994.

38. Шкіль М. І. Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – Книга 3 / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – Київ : Либідь, 1994.

Навчальне видання

СЕРІЯ «НА ДОПОМОГУ СТУДЕНТУ УДФСУ»

Руденко Ірина Борисівна,
Чернобай Ольга Борисівна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Редактор *М. М. Грабарчук*

Форматування та
комп'ютерна верстка *О. В. Лисенко*

Здано до друку 15.06.2017. Формат 60×84/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman».
Друк. арк. 19.64.
Наклад 300 прим. Замовлення № 626.

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром
Університету ДФС України
08200, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область, Україна

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 5104 від 20.05.2016*