O. A. Yarova

GROUPS WITH RESTRICTIONS ON NON-NORMAL SUBGROUPS



UNIVERSITY OF STATE FISCAL SERVICE OF UKRAINE

O. A. Yarova

GROUPS WITH RESTRICTIONS ON NON-NORMAL SUBGROUPS

(ON SOME MOST MODERN DIRECTIONS OF SCIENTIFIC ALGEBRAIC RESEARCH AND THEIR INFLUENCE ON THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCE OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS)

Monograph

Scientific editor
Doctor of physical and mathematical sciences,
Professor M. M. Semko

Irpin
2019

UDK 512.54
BBK 22.14
Y76

Recommended for publication by the Academic Council of the University of State Fiscal Service of Ukraine (protocol № 11 from November, 27, 2018)

Reviewers:

L. A. Kurdachenko, Head of the Department of Geometry and Algebra of the Oles Honchar Dnipro National University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine;

A. P. Petravchuk, Head of the Department of Algebra and Mathematical Logic of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. V. Pratsiovytyi, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine.

O. A. Yarova

Y76 Groups with restrictions on non-normal subgroups (on some most modern directions of scientific algebraic research and their influence on the formation of professional competence of future mathematics teachers): monograph; Scientific editor M. M. Semko. – Irpin, University of SFS of Ukraine, 2019. – 192 p. – ORCID 0000-0002-0522-8368.

ISBN 978-966-337-503-8

The monograph is devoted to the study of locally graded groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. In particular, we investigated the groups in which derived subgroups of all proper subgroups are Chernikov under condition that they possess a normal Kurosh-Chernikov system whose factors are locally graded. The obtained results give the opportunity to obtain information on the basic concepts and the results of some important sections of the theory of infinite groups and can be used in formation of the professional competence of future mathematics teachers.

For scientific and pedagogical workers, university teachers, who train teachers of mathematics, masters, post-graduate students.

UDK 512.54
BBK 22.14

© Yarova O. A., 2019
© University of State Fiscal Service of Ukraine, 2019

ISBN 978-966-337-503-8

УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

О. А. Ярова

ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ПІДГРУПИ, ЩО НЕ Є НОРМАЛЬНИМИ

(ПРО ДЕЯКІ НАЙСУЧАСНІШІ НАПРЯМИ НАУКОВИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ЇХ ВПЛИВ НА ФОРМУВАННЯ ФАХОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ)

Монографія

Науковий редактор
доктор фізико-математичних наук,
професор М. М. Семко

Ірпінь
2019

УДК 512.54
ББК 22.14
Я76

Рекомендовано до друку Вченою радою
Університету державної фіскальної служби України
(*протокол № 11 від 27 листопада 2018 року*)

Рецензенти:

Курдаченко Л. А., завідувач кафедри алгебри і геометрії Дніпровського національного університету імені Олеся Гончаря, доктор фізико-математичних наук, професор;

Петравчук А. П., завідувач кафедри алгебри і математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, професор;

Працьовитий М. В., декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор.

Ярова О. А.

Я76 Групи з обмеженнями на підгрупи, що не є нормальними (про деякі найсучасніші напрями наукових алгебраїчних досліджень та їх вплив на формування фахової компетентності майбутніх учителів математики): монографія / О. А. Ярова; за заг. ред. Семко М. М. – Ірпінь: Університет ДФС України, 2019. – 192 с. – ORCID 0000-0002-0522-8368.

ISBN 978-966-337-503-8

Монографія присвячена дослідженню локально ступінчатих груп, у яких кожна підгрупа або нормальна, або має черніковський комутант. Зокрема, вивчені групи, у яких комутанти всіх власних підгруп є черніковськими підгрупами за умови, що вони мають нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої локально ступінчасті. Одержані результати дають можливість отримати інформацію про базові поняття та результати деяких важливих розділів теорії нескінченних груп і можуть бути використані при формуванні фахової компетентності майбутніх учителів математики.

Для науково-педагогічних працівників, викладачів університетів, які готують вчителів математики, магістрів, аспірантів.

УДК 512.54
ББК 22.14

© Ярова О. А., 2019
© Університет державної фіскальної служби України, 2019

ISBN 978-966-337-503-8

CONTENTS

LIST OF TERMS AND NOTATIONS 7

INTRODUCTION 13

CHAPTER 1. LITERATURE REVIEW AND PRELIMINARY THEORETICAL INFORMATION 15

1.1. Literature review 15

1.2. Preliminary theoretical information 18

CHAPTER 2. GROUPS, WHOSE PROPER SUBGROUPS HAVE CHERNIKOV DERIVED SUBGROUP 23

2.1. Preliminary results 23

2.2. The structure of groups, whose all proper subgroups have Chernikov derived subgroup 32

CHAPTER 3. GROUPS, WHOSE ALL SUBGROUPS ARE EITHER NORMAL OR HAVE CHERNIKOV DERIVED SUBGROUP 38

3.1. Preliminary results 38

3.2. On some classes of groups, whose all subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup 45

3.3. Some technical results 52

3.4. On the structure of some groups, whose all subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup 69

REFERENCES 82

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 91
ВСТУП 98
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ 100
1.1. Огляд літератури 100
1.2. Попередні теоретичні відомості 103
РОЗДІЛ 2. ГРУПИ, ВЛАСНІ ПІДГРУПИ ЯКИХ МАЮТЬ ЧЕРНІКОВСЬКИЙ КОМУТАНТ 109
2.1. Попередні результати 109
2.2. Структура груп, всі власні підгрупи яких мають черніковські комутанти 121
РОЗДІЛ 3. ГРУПИ, ВСІ ПІДГРУПИ ЯКИХ АБО НОРМАЛЬНІ, АБО МАЮТЬ ЧЕРНІКОВСЬКИЙ КОМУТАНТ 128
3.1. Попередні результати 128
3.2. Про деякі класи груп, всі підгрупи яких або нормальні, або мають черніковський комутант 137
3.3. Деякі технічні результати 146
3.4. Про будову деяких груп, всі підгрупи яких або нормальні, або мають черніковський комутант 167
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 183

LIST OF TERMS AND NOTATIONS

H^G: *normal closure* of a subgroup H in a group G, that is the normal subgroup generated by all conjugations of H in G.

$\zeta(G)$: *center* of a group G.

$\zeta_\alpha(G)$: α*-th term of upper central series* of a group G.

$\gamma_\alpha(G)$: α*-th term of lower central series* of a group G.

$[G,G]$: *derived subgroup* of a group G.

$Aut(G)$: *group of automorphisms* of a group G.

$C_H(M) = \{x \in H \mid xa = ax \ \forall\ a \in M\}$: *centralizer* of a subset M in subgroup H. If H is a normal subgroup of G and L is a subgroup containing H, then by $C_G(L/H)$ we denote the full preimage of subgroup $C_{G/H}(L/H)$ in G.

We will say that G is the *semidirect product* of A and B, $G = A \leftthreetimes B$, if A is normal in G, $A \cap B = \langle 1 \rangle$ and $G = AB$.

We will say that G is a *Dedekind group* if all subgroups of G are normal.

We will say that G satisfies the *maximal condition* (respectively, *minimal condition*) if G does not have infinite ascending (respectively, descending) series of subgroup.

A group G is called a *Chernikov group*, if G includes a normal subgroup D of finite index, which is a direct product of finitely many quasicyclic subgroups. A subgroup D is called a *divisible part* of Chernikov group G. We will denote it $d(G)$.

A group G is called *polycyclic* if it has a finite normal series of subgroups

$$\langle 1 \rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G,$$

whose factors G_{j+1}/G_j are cyclic, $0 \le j \le n-1$.

A group G is called *minimax* if it has a finite series of normal subgroups, whose factors satisfies the minimal condition or the maximal condition for all subgroups.

If G is minimax and almost solvable, then it has a finite series of normal subgroups, whose factors are either Chernikov or almost polycyclic.

A group G is called *hypercentral* if it has an upper central series terminating in G itself (that is, G coincides with the last term of the upper central series).

For an arbitrary element $g \in G$ we denote by g^G a subset of all elements that are conjugate to g, that is $g^G = \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$.

$FC(G) = \{g \in G \mid \text{class } g^G \text{ is finite}\}$.

Obviously, $FC(G)$ is a characteristic subgroup of G. We will say that $FC(G)$ is the *FC-center* of G. If $G = FC(G)$, then G is called *FC-group*.

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. We write $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ if each subgroup of any $\mathfrak{X}$-group belongs to $\mathfrak{X}$. We write $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$ if each factor-group of any $\mathfrak{X}$-group belongs to $\mathfrak{X}$. We write $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$ if each group, which is the product of a finite set of normal $\mathfrak{X}$-subgroups, belongs to $\mathfrak{X}$.

If G is a group and π is a set of primes, then by $O_\pi(G)$ we denote the largest normal π-subgroup of G. If p is a prime, then by p' we denote the set of all primes distinct from p. Thus, $O_{p'}(G)$ is the largest normal subgroup of G, which does not contains the p-elements.

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups, G be a group. We will say that G is *almost* $\mathfrak{X}$*-group* if G contains a normal subgroup H such that G/H is finite and $H \in \mathfrak{X}$. In particular, the *almost abelian* (respectively, *almost solvable*) group is a group containing an abelian (respectively, solvable) subgroup of finite index.

Let A be an abelian group, p is a prime, P is a Sylow p-subgroup of A. For each $n \in \mathbb{N}$ we put $\Omega_n(P) = \{x \in P \mid |x| \le p^n\}$. Obviously, $\Omega_n(P)$ is the characteristic subgroup of A. We have

$$\Omega_1(P) \le \Omega_2(P) \le \ldots \le \Omega_n(P) \le \Omega_{n+1}(P) \le \ldots$$

and $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(P)$.

A group is called *locally finite* if each its finite subset generates a finite subgroup.

A group is called *bounded* if there exists a finite upper bound for the orders of its elements.

A group is called *residually finite* if for each non-trivial element there exists (normal) subgroup of finite index that does not contain this element.

Let K be a locally finite field and θ is an automorphism of K satisfying the condition $\theta^2(a)=a^2$ for each $a\in K$. The linear group $Sz(K)$ is a subgroup of $SL_4(K)$ generated by:

(i) a subgroup Q of all matrices of the following form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ (1+\theta)(a)+b & \theta(a) & 1 & 0 \\ (2+\theta)(a)+ab+\theta(b) & b & a & 1 \end{pmatrix},$$

where $a,b\in K$;

(ii) a subgroup D of all diagonal matrices, whose main diagonal have the following form

$$((1+\theta^{-1})(\alpha),\theta^{-1}(\alpha),-\theta^{-1}(\alpha),(-1-\theta^{-1})(\alpha))$$

where $\alpha\in U(K)$;

(iii) matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let p be a prime. We will say that a group G has *finite section p-rank* $r_p(G)=r$ if each elementary abelian p-section U/V of G is finite of order at most p^r and there is an elementary abelian p-section A/B of G such that $|A/B|=p^r$.

We will say that a group G has *finite section rank* if it has finite section p-rank for each prime p.

We will say that G has *finite special rank* $r(G) = r$ if each finitely generated subgroup of G can be generated by r elements and r is the least positive integer with this property.

A group G is called *generalized radical* if it has an ascending series of normal subgroups, whose factors are either locally nilpotent or locally finite.

Recall some basic concepts of module theory. Let R be a commutative ring and A be a module over R. Put

$$Tor_R(A) = \{a \in A \mid Ann_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

If R has no zero divisors, then the subset $Tor_R(A)$ is a submodule of A. In this case we say that $Tor_R(A)$ is a *R-periodic part of A*. A module A is called *R-periodic* if it coincides with its *R-periodic part*. We will say that A is *R-torsion-free* if its R-periodic part is trivial.

Let D be a Dedekind domain. Put

$$Spec(D) = \{P \mid P \text{ is a maximal ideal of } D\}.$$

If I is an ideal of D, then put

$$A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

It is not hard to see that a subset A_I is a D-submodule of A. A submodule A_I is called the *I-component* of A. If A coincides with its I-component, then we will say that *A is an I-module over D*.

Put

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle\}.$$

It is not hard to check that the subset $\Omega_{I,n}(A)$ is a D-submodule and $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$ for each positive integer n. Therefore $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Denote by $Ass_D(A)$ a subset of all maximal ideals of D, for which the corresponding P-component A_P is non-trivial.

Then $Tor_D(A) = \oplus_{P \in \pi} A_P$, where $\pi = Ass_D(A)$ (see, for example, [1, corollary 3.8]).

Let D be a Dedekind domain, C be a simple D-module. Then C is isomorphic to D/P for some maximal ideal P of D. Denote the D-injective envelope of C by C_{p^∞}. A module C_{p^∞} is called *the Prüfer P-module*. A module C_{p^∞} is an injective limit of the system of D-modules $\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$C_{p^\infty} \cong liminj\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(see, for example, [1, corollary 5.21]). By construction, a Prüfer module C_{p^∞} is a P-module, $\Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong D/P^k$ and

$$\Omega_{P,k+1}(C_{p^\infty})/\Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong (D/P^{k+1})/(P/P^{k+1}) \cong D/P$$

for each positive integer k. Thus, if E is a proper D-submodule of C_{p^∞}, then there is a positive integer k such that $E = \Omega_{P,k}(C_{p^\infty})$. Indeed, if the element b belongs to $\Omega_{P,k}(C_{p^\infty})$, but not contained in $\Omega_{P,k-1}(C_{p^\infty})$, then $E = bD$. Note that the Prüfer P-module C_{p^∞} is monolithic and its monolith coincides with its lower layer $\Omega_{P,1}(C_{p^\infty})$.

Let R be a commutative ring without zero divisors, x is a non-zero element of R and A is a module over R. We say that A is *x-divisible* if for each element a of A there is an element c such that $cx = a$. In other words, $Ax = A$.

A module A is called *R-divisible*, if it is *x-divisible* for each non-zero element x of R.

Let D be a Dedekind domain, A be a module over ring and x is an element of D. A submodule B of A is called *x-pure*, if $Bx = B \cap Ax$.

If L is an ideal of D, submodule B is *x-pure* in A for each element $x \in L$, then B is called *L-pure*.

Finally, B is called *a pure submodule* if B is D-pure.

Let G be an abelian group, H be a subgroup of G and A be a $\mathbb{Z}G$-module. Put

$$\zeta_{\mathbb{Z}H}(A) = \{a \in A \mid ax = a \text{ for every } x \in H\}.$$

It is easy to check that the subset $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$ is a $\mathbb{Z}G$-submodule of A. $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$ is called the *H-center* of A. Starting with H-center, we can define *the upper H-central series of A*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots C_\gamma$$

by the following rule: $C_1 = \zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \zeta_{\mathbb{Z}H}(A/C_\alpha)$ for all ordinals $\alpha < \gamma$, and $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A/C_\gamma) = \langle 0 \rangle$. The last term C_γ of this series is called *the upper H-hypercentre* of A.

Let G be an abelian group, H be a subgroup of G and A be a $\mathbb{Z}G$-module. Let B, C are $\mathbb{Z}G$-submodules of A such that $B \le C$. The factor C/B is called *H-central* (respectively, *H-eccentric*) if $C_H(C/B) = H$ (respectively, $C_H(C/B) \neq H$).

A $\mathbb{Z}G$-submodule C is called *H-hypereccentric*, if C has an ascending series of $\mathbb{Z}G$-submodules

$$\langle 0 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots C_\gamma = C,$$

such that

(1) $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ is a simple $\mathbb{Z}G$-module,

(2) $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ is H-eccentric for each ordinal $\alpha < \gamma$.

INTRODUCTION

For more than a hundred years, an intensive study of the influence of the system of normal subgroups on the structure of the whole group has been carried out. If G is a group, then by $\mathcal{L}_{norm}(G)$ (respectively, $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$) we denote the system of all normal subgroups of G (respectively, the system of all non-normal subgroups of G). The presence of a large system of normal and close to normal subgroups have a very strong influence on the group structure. If all subgroups of a group are normal then its structure was described long ago. For the finite groups R. Dedekind obtained such description, and later R. Baer extended it to arbitrary groups. Groups, whose all subgroups are normal, were later called *Dedekind*. The natural next step was the study of groups G, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ satisfies some (often very strong) restrictions. This topic begins intensively develop by S.M. Chernikov and his school, as well as many other well-known algebraists, in particular R. Baer, B. Neumann, F.M. Lyman, M.F. Sesekin, D. Robinson, L.A. Kurdachenko, M.F. Kuzennyi, M.M. Semko, A. Rhemtulla, S. Franciosi, F. de Giovanni, H. Lenstra.

G.M. Romalis and M.F. Sesekin began to study groups in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists only of abelian subgroups. They called such groups *metahamiltonian*. The natural continuation of these studies is the consideration of the situation when subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ belong to the class of groups, which is a natural extension of the class of abelian groups. For example, L.A. Kurdachenko, J. Otal, A. Russo and G. Vincenci studied the groups, in which the subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ have a finite derived subgroup or FC-groups. This dissertation work continues research in this direction. Since the natural generalization of finite groups are Chernikov groups, the groups with the Chernikov derived subgroup is the natural generalization of groups with finite derived subgroup. In this monograph, we study the groups, whose subgroup are either normal or have Chernikov derived subgroup.

As we have noted above, groups with large systems of normal subgroups are a rather long-standing research object in group theory. Normal subgroups have a strong influence on the group structure. Therefore, when the system of

normal subgroups is quite large, the structure of the group can be studied in detail. Figuratively speaking, if group has many normal subgroups, then this group is very close to abelian. For example, if all subgroups of a group are normal (that is, the system $\mathcal{L}_{norm}(G)$ contains all subgroups of a group and respectively the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is empty), then it is either abelian, or is a direct product of quaternion group, elementary abelian 2-group and periodic group without elements of order 2.

This result was obtained for finite groups in the paper of R. Dedekind [2], and then it was extended to arbitrary groups in the paper of R. Baer [3]. The natural next step was the study of groups G, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ satisfies some (often very strong) restrictions. The first such papers were papers of O.Yu. Schmidt [4, 5], which have already become classical ones. In them O.Yu. Schmidt studied finite groups, in which all subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ are conjugate or system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of two classes of conjugate subgroups. However, the systematic study of groups, in which the system of non-normal subgroups satisfies some rather strong condition, begins with papers of S.M. Chernikov [6, 7]. As we have already mentioned, many well-known algebraists participated in the development of this topic, which enriched it with many deep and interesting results. One of the interesting area of this topic was the study of groups, whose non-normal subgroups are abelian. Such groups were called *metahamiltonian*. Their study began with the papers of M.F. Sesekin and G.M. Romalis [8-10]. V.T. Nagrebetsky [11] and A.A. Makhnev [12] studied finite metahamiltonian groups. M.F. Kuzennyi and M.M. Semko [13-19] obtained a full description of metahamiltonian groups.

The class of abelian groups has many natural generalizations. One of them is a class of groups with a finite derived subgroup and more wider class of FC-groups. In the papers of L.A. Kurdachenko, J. Otal, A. Russo and G. Vincenci [20, 21] the authors studied the groups, in which the subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ either have finite derived subgroup or are FC-groups. Since the natural generalization of finite groups are Chernikov groups, the groups with the Chernikov derived subgroup are natural generalization of groups with finite derived subgroup. This monograph is devoted to the investigation of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup.

CHAPTER 1

LITERATURE REVIEW AND PRELIMINARY THEORETICAL INFORMATION

This section gives an overview of literature on research related to the results of this work. Here is a brief account of the well-known results that are used in the future.

1.1. Literature review

If G is a group, then by $\mathcal{L}_{norm}(G)$ (respectively, $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$) we denote the system of all normal subgroups of G (respectively, the system of all non-normal subgroups of G). Groups with large systems of normal subgroups are a rather long-standing research object in group theory. Normal subgroups have a strong influence on the group structure. Therefore, when the system $\mathcal{L}_{norm}(G)$ is quite large (respectively, the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is quite small), very often the structure of the group can be studied in detail. For example, if all subgroups of a group are normal (that is, the system $\mathcal{L}_{norm}(G)$ contains all subgroups of a group and respectively the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is empty), then it is either abelian, or is a direct product of quaternion group, elementary abelian 2-group and periodic group without elements of order 2. This result was obtained for finite groups in the paper of R. Dedekind [2], and then it was extended to arbitrary groups in the paper of R. Baer [3]. The natural next step was the study of groups G, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ satisfies some (often very strong) restrictions. The first such papers were papers of O.Yu. Schmidt [4, 5], which have already become classical ones. In them O.Yu. Schmidt studied finite groups, in which all subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ are conjugate or system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of two classes of conjugate subgroups. It is interesting to note that R. Brandl [22] were repeated much later the results of O.Yu. Schmidt from [4].

Moreover, H. Mousavi [23] was repeated much later the results of O.Yu. Schmidt from [5]. However, the systematic study of groups, in which the system of non-normal subgroups satisfies some rather strong condition, begins with papers of S.M. Chernikov. He wrote a series of papers that demonstrated the effectiveness of this approach. In the first paper [6] of this series, he considered the infinite groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists only of finite subgroups. In [7] he considered the infinite groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ satisfies the minimal condition. In this connection, it should be noted that in 1990 N. Hekster and H. Lenstra published a paper [24], in which they considered the groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is finite. The results of this work are a simple corollary of the results of paper [7]. In [25-30] S.M. Chernikov considered some generalizations of the results of the first two papers. In the paper of L.A. Kurdachenko, M.F. Kuzennyi and M.M. Semko [31] and in the paper of G. Cutolo [32] considered infinite groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ satisfies the maximal condition. These results were generalized in the paper of L.A. Kurdachenko and V.E. Goretsky [33].

In well-known papers of R. Baer and D.I. Zaitsev were introduced very interesting new conditions of finiteness namely weak maximal and minimal conditions for different types of subgroups. These conditions and related results were so interesting and fruitful that they gave rise to a large series of papers in which these conditions were considered for different types of subgroups. We will not consider here all aspects of research related to the above conditions and note one result related with our subject.

Let $\mathfrak{M}$ be a some system of subgroups of a group G. We say that $\mathfrak{M}$ satisfies the *weak minimal condition* (or *maximal*), or that G satisfies the weak minimal condition for $\mathfrak{M}$-subgroups or shorter $Min-\infty-\mathfrak{M}$ (respectively, to maximal condition for $\mathfrak{M}$-subgroups or shorter $Max-\infty-\mathfrak{M}$) if G does not have infinite descending (respectively, ascending) series $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ of subgroups of system $\mathfrak{M}$ such that the indexes $|H_n : H_{n+1}|$ (respectively,

$|H_{n+1}:H_n|$) are infinite for each $n\in\mathbb{N}$. If $\mathfrak{M}$ is the set of all non-normal subgroups, we obtain the groups with weak minimal condition (respectively, maximal) for non-normal subgroups. L.A. Kurdachenko and V.E. Goretsky [33] studied these groups.

F.M. Lyman [34, 35] considered groups in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists only of cyclic subgroups. If all cyclic subgroups of a group are normal, then all subgroups are normal. Therefore, the question arises about the structure of groups, whose all non-cyclic subgroups are normal, that is, the system of all non-normal subgroups consists only of cyclic subgroups. S.M. Chernikov [26] posed this question. The above papers was devoted to solving this problem. If all finitely generated subgroups of a group are normal, then all subgroups are normal. Naturally, the question arises about the opposite situation: what we can say about groups, whose all non-finitely generated subgroups are normal. Groups of such type were considered by L.A. Kurdachenko, V.V. Pylayev [36] and G. Cutolo, L.A. Kurdachenko [37]. Note a series of papers M.F. Kuzennyi, M.M. Semko [38-67], M.M. Semko, O.A. Yarova [68-74], where groups with other natural restrictions on the system $\mathcal{L}_{norm}(G)$ were considered.

The natural continuation of papers of O.Yu. Schmidt [4, 5] was the paper of R. la Yaye and A. Rhemtulla [75], where groups (both finite and infinite), in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ splits into a rather small number of conjugacy classes, were considered. In the paper of M. de Falco, F. de Giovanni and C. Musella [76] infinite groups, in which the set $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is a union of finite number of conjugacy classes, were considered.

G.M. Romalis and M.F. Sesekin [8-10] began to study the groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists only of abelian subgroups. Such groups were called metahamiltonian. The study of finite metahamiltonian groups was continued in the papers of V.T. Nagrebetsky [11] and A.A. Makhnev [12]. The full description of metahamiltonian groups was obtained in the series of papers of M.F. Kuzennyi and M.M. Semko [13-19].

The class of abelian groups has many natural generalizations. One of them is a class of groups with a finite derived subgroup and more wider class of FC-groups. In the papers of L.A. Kurdachenko, J. Otal, A. Russo and G. Vincenci [20, 21] the authors studied the groups, in which the subgroups of the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ either have finite derived subgroup or are FC-groups. Since the natural generalization of finite groups are Chernikov groups, the groups with the Chernikov derived subgroup are natural generalization of groups with finite derived subgroup. This monograph is devoted to the investigation of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup.

1.2. Preliminary theoretical information

The following results that will be needed, relate to the theory of FC-groups. The first result that we will use is the classical Ditzman lemma (see, for example, [77, Lemma II.1.1]).

1.2.1. Lemma. *Let G be a group, M be a finite subset of G. Suppose that each element of M has finite order and finite number of conjugations. Then normal subgroup generated by M is finite.*

The next important result of this theory is the classical theorem of I. Schur (see, for example, [77, Theorem II.1.4]).

1.2.2. Theorem. *Let G be a group, whose center has a finite index c. Then the derived subgroup $[G,G]$ is also finite, moreover $[G,G]^c = \langle 1 \rangle$.*

This theorem has the following generalization, which we will also need (see, for example, [78, Theorem 3.9]).

1.2.3. Theorem. *Let G be a group. Suppose that the central factor-group is Chernikov. Then the derived subgroup $[G,G]$ is also Chernikov.*

We also need some results from the theory of abelian groups. The first one is the next (see, for example, [79, Theorem 14.4]).

1.2.4. Theorem. *Let G be an abelian group containing a subgroup H and G/H is a free abelian group. Then $G = H \times K$ for some subgroup K of G.*

1.2.5. Proposition [80]. *Let G be a hypercentral group, A be a normal abelian p-subgroup for some prime p. If the factor-group $G/C_G(A)$ does not have proper subgroups of index p, then the center of G contains a subgroup A.*

The following result is one of the first important results of the theory of finite groups (see, for example, [81, Theorem A.10.7]).

1.2.6. Proposition. *Let G be a finite group. If every subgroup of G is abelian, then G is solvable.*

Let G be a group. A system $\mathfrak{S}$ of its subgroups is called the *Kurosh-Chernikov system* if it satisfies the following conditions:

(i) $\mathfrak{S}$ is linearly ordered by inclusion;

(ii) $G, \langle 1 \rangle \in \mathfrak{S}$;

(iii) $\mathfrak{S}$ is closed under intersections and unions of its subgroups; in particular, with every subgroups $H \neq G$ it contains the intersection $H^{\wedge}$ of all subgroups of system $\mathfrak{S}$ that contains H and do not coincide with H; with each of its the non-trivial subgroup K contains the union $K^{\vee}$ of those subgroups of the system $\mathfrak{S}$ that contains K and do not coincide with K;

(iv) if $H \in \mathfrak{S}$ and $H \neq G$, then H is normal in $H^{\wedge}$.

The factor-groups $H^{\wedge}/H$ are called *the factors* of system $\mathfrak{S}$. A system $\mathfrak{S}$ is called *normal* if each of its members is a normal subgroup of G.

1.2.7. Theorem [82, § 58]. *Let G be a locally solvable group. Then G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are abelian.*

Some results of the theory of locally finite groups will also be needed. The first result, which has already become classic, is the following.

1.2.8. Theorem [83]. *If every abelian subgroup of locally finite group G satisfies the minimal condition, then G is Chernikov. In particular, locally finite group with minimal condition is Chernikov.*

The next result follows from theorem 4.8 of the book [84] and the existence of a classification of finite simple groups.

1.2.9. Theorem. *Let G be a locally finite simple group. Suppose that Sylow p-subgroups of G are solvable for each prime p. Then G can not be finite dimensional linear group.*

1.2.10. Theorem [85]. *Let G be an infinite locally finite simple group. Suppose that Sylow p-subgroups of G are solvable for each prime p. If G is not a finite dimensional linear group, then it contains a subgroup Y such that the central factor-group $Y / \zeta(Y)$ is isomorphic to $PSL_2(K)$ or $Sz(K)$ for some infinite locally finite field K.*

1.2.11. Theorem [86]. *Let G be a group, whose proper subgroups are Chernikov-by-nilpotent. Then G can not be isomorphic to $PSL_2(K)$ or $Sz(K)$ for any infinite locally finite field K.*

The next classic result is well-known.

1.2.12. Theorem. *Let G be a finitely generated group. Then every subgroup of G of finite index is also finitely generated.*

1.2.13. Theorem (see, for example, [87, Chapter 1, Theorem 1]). *Let G be an almost polycyclic group. Then G is residually finite.*

1.2.14. Theorem (see, for example, [88, Theorem 3]). *Let G be a finitely generated metabelian group. Then G satisfies the maximal condition for normal subgroups.*

1.2.15. Theorem [2, 3]. *Let G be a group, whose all subgroups are normal. If G is non-abelian, then G is a direct product of quaternion group, elementary abelian 2-group and periodic abelian group without elements of order 2.*

1.2.16. Theorem (see, for example, [89, Theorem 7.4]). *Let G be a union of a finite set of abelian subgroups. Then its center has a finite index.*

1.2.17. Theorem (see, for example, [89, Theorem 1.6]). *Let G be a FC-group. If G is torsion-free, then G is abelian.*

1.2.18. Theorem (see, for example, [89, Theorem 1.6]). *Let G be a FC-group. A set of all elements of G of finite order is a characteristic subgroup of G.*

1.2.19. Theorem (see, for example, [78, Corollary 5.12]). *Let G be a finite group, A be a $\mathbb{Z}G$-module and B be a $\mathbb{Z}G$-submodule of A. If the additive group of A is finitely generated, then there exists a $\mathbb{Z}G$-submodule E such that $B \cap E$ and $A/(B \cap E)$ are finite.*

1.2.20. Theorem (see, for example, [78, Corollary 5.15]). *Let G be a finite group, F be a field and A be an FG-module. Suppose that $char(F) = 0$ or $char(F)$ does not divide the order of G. Then A is a semisimple FG-module.*

1.2.21. Theorem (see, for example, [1, proposition 7.11]). *Let D be a Dedekind domain, P be a maximal ideal of D and A be a P-module over D. A module A is artinian if and only if the lower layer $\Omega_{P,1}(A)$ is artinian.*

1.2.22. Theorem (see, for example, [1, Proposition 7.11]). *Let D be a Dedekind domain and A be a module over D. A module A is artinian if and only if*

$$A = a_1 D \oplus \ldots \oplus a_n D \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k,$$

where C_j is a Prüfer P_j-submodule, $P_j \in Spec(D)$, $1 \le j \le k$, and $Ann_D(a_j) = P_j^{m_j}$, $P_j \in Spec(D)$, $1 \le j \le n$.

1.2.23. Theorem (see, for example, [1, Theorem 5.26]). *Let D be a Dedekind domain and A be a module over D. If A is periodic and divisible, then A is a direct sum of Prüfer submodules.*

1.2.24. Theorem (see, for example, [1, Corollary 6.5]). *Let D be a Dedekind domain and A be a module over D. If $Ann_D(A)$ is non-zero, then A is a direct sum of cyclic submodules.*

1.2.25. Theorem (see, for example, [1, Theorem 9.15]). *Let D be a Dedekind domain and A be a P-module over D for some maximum ideal P. Then A contains a D-pure submodule B such that B is a direct sum of cyclic submodules and factor-module A/B is D-divisible.*

1.2.26. Theorem (see, for example, [1, Theorem 8.11]). *Let D be a Dedekind domain and A be a module over D. If B is a pure D-submodule A and $Ann_D(A)$ is non-zero, then $A = B \oplus C$ for some D-submodule C.*

1.2.27. Theorem [80, Lemma 1]. *Let G be a group and a be an element of G with finitely many conjugations. Then the normal closure $\langle a\rangle^G$ either finite or finite-by-(torsion-free finitely generated abelian).*

1.2.28. Theorem (see, for example, [79, Theorem 23.1]). *Let G be a periodic divisible abelian group. Then G is a direct product of quasicyclic subgroups.*

1.2.29. Theorem [90]. *Let G be a locally finite group. Suppose that Sylow p-subgroups of G are Chernikov for each prime p. Then G is almost locally solvable.*

1.2.30. Theorem [91]. *Let G be a periodic locally solvable group. Suppose that Sylow p-subgroups of G are Chernikov for some prime p. Then $G / O_{p'}(G)$ is a Chernikov group.*

1.2.31. Corollary. *Let G be a periodic almost locally solvable group. Suppose that Sylow p-subgroups of G are Chernikov for some prime p. Then $G / O_{p'}(G)$ is a Chernikov group.*

1.2.32. Theorem (see, for example, [92, Theorem 2.4.5]). *Let G be a locally finite group, C be a normal Chernikov subgroup of G. If $\Pi(C) \cap \Pi(G / C) = \varnothing$, then C has a complement in G and all this complements are conjugate in G.*

1.2.33. Theorem (see, for example, [78, Proposition 5.19]). *Let G be a finite group, A be a $\mathbb{Z}G$-module and additive group of A is periodic. If $\Pi(A) \cap \Pi(G) = \varnothing$, then $A = C_A(G) \oplus [A, G]$.*

CHAPTER 2

GROUPS, WHOSE PROPER SUBGROUPS HAVE CHERNIKOV DERIVED SUBGROUP

Let G be a group and $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of subgroups with Chernikov derived subgroup. Here two diametrically opposite situations are possible: a) the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ is empty; b) the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of all proper subgroups of G. In the first case, all subgroups of a group G are normal, and the structure of such group well-known. In the second case, all proper subgroups of G have Chernikov derived subgroup, and this case requires a special study. This is an important first step in the study of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup.

2.1. Preliminary results

We will start with the following slight generalization of Ditzman lemma.

2.1.1. Lemma. *Let G be a group, F be a finite subgroup of G. If the set of subgroups that conjugate to F is finite, then the normal closure F^G of F is finite.*

Proof. Since F has a finite set of conjugated subgroups, the normalizer $N_G(F)$ has finite index in G. Then F is a finite normal subgroup of $H = N_G(F)$. This means that the centralizer $C_H(x)$ has finite index in H for any element $x \in F$. Since $|G:H|$ is finite, then $|G:C_G(x)|$ is also finite for any element x of F. Applying **Lemma 1.2.1**, we obtain that the normal closure $\langle x \rangle^G$ is finite for each element $x \in F$. Since F is finite, then its normal closure generated by a finite set of subgroups $\langle x \rangle^G$. Note that every subgroup $\langle x \rangle^G$ is finite. This means that F^G is also finite. □

2.1.2. Proposition. *Let G be a group and H be a subgroup of G. Suppose that $\mathfrak{X}$ is a class of groups satisfying the following conditions:*

(a) $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$,

(b) $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$,

(c) every $\mathfrak{X}$-by-finite group belongs to $\mathfrak{X}$.

If H belongs to $\mathfrak{X}$ and the set of subgroups that conjugate to H is finite, then the normal closure H^G of H also belongs to $\mathfrak{X}$.

Proof. Since H has a finite set of conjugated subgroups, the normalizer $N_G(H)$ has finite index in G. Let $\{H_0 = H, H_1, ..., H_n\}$ be a set of all subgroups that conjugate to H in G. Then each normalizer $L_j = N_G(H_j)$ has finite index in $G, 0 \le j \le n$.

Note that if $H_j = x^{-1}Hx$, then

$$L_j = N_G(H_j) = N_G(H^x) = N_G(H)^x, 0 \le j \le n,$$

and we obtain that $\{L_0, L_1, ..., L_n\}$ is a class of conjugated subgroups. Since $|G : L_j|$ are finite for every $0 \le j \le n$, we obtain that the intersection $K = \bigcap_{0 \le j \le n} L_j$ has finite index in G. Note that in this case K is a normal subgroup of G. Since $K \le N_G(H_j)$, we obtain the following equality $H_j^y = H_j$ for every element y of K and every $0 \le j \le n$. Put $T_j = H_j \cap K$. Then

$$T_j^y = (H_j \cap K)^y = H_j^y \cap K^y = H_j \cap K = T_j$$

for every element y of K and every $0 \le j \le n$. In other words, T_j is normal in K for every $0 \le j \le n$. From the condition $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ we obtain that $T_j \in \mathfrak{X}$, $0 \le j \le n$. Since $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$, the product $T_1 \cdot ... \cdot T_n$ belongs to $\mathfrak{X}$. Clearly, a subset $\{T_0, T_1, ..., T_n\}$ is a class of conjugated subgroups. This means that the product $T = T_1 \cdot ... \cdot T_n$ is a normal subgroup of G.

We have the following isomorphism $HT/T \cong H/(H \cap T)$. Since $T_0 = H \cap K \le H$ and $T_0 \le T$, then $T_0 \le H \cap T$. From the fact that K is a normal

subgroup of a group G we obtain that the intersection $H \cap K$ is normal in H. Isomorphism $H/(H \cap K) \cong HK/K$ together with finiteness of the factor-group G/K demonstrates that the intersection $H \cap K$ has finite index in H. Since $H \cap K$ is contained in $H \cap T$, the intersection $H \cap T$ has finite index in H. Since $HT/T \cong H/(H \cap T)$, HT/T is finite. Therefore, HT/T is a finite subgroup of G/T, which has a finite set of conjugated subgroups. By **Lemma 2.1.1** the normal closure $(HT/T)^{G/T} = H^G T/T$ is a finite subgroup. Note that a subgroup T is contained in H^G, so that $H^G T = H^G$. Finally, from finiteness of H^G/T and inclusion $T \in \mathfrak{X}$ together with the conditions of this statement we obtain that the normal closure H^G belongs to $\mathfrak{X}$. □

2.1.3. Corollary. *Let G be a group and H be a Chernikov subgroup of G. If the set of subgroups that conjugated to H is finite, then the normal closure H^G is a Chernikov subgroup.*

Obviously, the class of Chernikov groups satisfies all conditions of the **Proposition 2.1.2.**

2.1.4. Lemma. *Let G be a solvable group. If G contains proper subgroups of finite index and every proper subgroup of G has Chernikov derived subgroup, then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Since G is solvable, G contains a normal subgroup L such that the factor-group G/L is a finite cyclic p-group for some prime p. Denote the generator of this factor-group by gL, that is $G/L = \langle gL \rangle$. Suppose at first, that g has finite order. By our conditions, G/L is a p-group, so we can assume that g is a p-element. From the choice of L we obtain that the derived subgroup $[L,L]$ is Chernikov. We must show now that the derived subgroup of $G/[L,L]$ is Chernikov. Since

$$[G/[L,L], G/[L,L]] = [G,G][L,L]/[L,L] = [G,G]/[L,L],$$

we obtain that $[G,G]$ is a Chernikov subgroup. To be short we can assume that L has a trivial derived subgroup, that is L is abelian. As we shall see below, this

will not contradicts with the generality of our considerations. From the fact that L is abelian follows that the intersection $S = \langle g \rangle \cap L$ is a normal subgroup of G. Since it is finite, it will be sufficient to prove that the derived subgroup of G/S is a Chernikov subgroup. As above, we can assume that S is trivial. Suppose that L contains proper subgroups of finite index. From the fact that the factor-group G/L is finite, we obtain that L contains proper G-invariant subgroup K. If we suppose that G coincides with the product of K and $\langle g \rangle$, we obtain the equality $L = K(L \cap \langle g \rangle) = K$, which contradicts with the choice of K. This contradiction shows that the product $E = K\langle g \rangle$ is a proper subgroup of G. This means that the derived subgroup D of $K\langle g \rangle$ is a Chernikov subgroup. Since G/L is abelian, L contains $[G,G]$, so that $D \leq [G,G] \leq L$. From the fact that the factor-group E/D is abelian we obtain the equality $\langle 1 \rangle = [gD, KD/D]$. On the other hand, L is also abelian and we obtain that $[L/D, KD/D]$ is trivial. Taking into account the fact that G is a product of subgroups $\langle g \rangle$ and L, we obtain the inclusion $KD/D \leq \zeta(G/D)$. From the finiteness of G/L and L/K we obtain the finiteness of the factor-group $(G/D)/(KD/D)$. In other words, the center of the factor-group G/D has a finite index. In this case $U/D = [G/D, G/D]$ is a finite subgroup by classical theorem of I. Schur (**Theorem 1.2.2**). But in this case a subgroup U is Chernikov, and hence the derived subgroup $[G,G]$ is also Chernikov.

Now we must to consider the case when L does not contains proper subgroups of finite index. Since L is abelian, we choose free abelian subgroup Y such that the factor-group L/Y is periodic. If L is periodic, we can say that Y is trivial. By **Theorem 1.2.28** L/Y is a direct product of quasicyclic subgroups. This means that L contains a subgroup V such that L/V is a quasicyclic p-group for some prime p. From the finiteness of the factor-group G/L we obtain the finiteness of the set $\{V^x \mid x \in G\}$.

Put

$$\{V^x \mid x \in G\} = \{V_1 = V, V_2, ..., V_n\} \text{ and } W = \bigcap_{1 \le j \le n} V_j .$$

For an arbitrary element x of G we have an isomorphism

$$L / V^x = L^x / V^x \cong L / V ,$$

which shows that the factor-group L / V^x is also a quasicyclic p-group. Applying Remak's theorem we obtain the following embedding

$$L / W \hookrightarrow L / V_1 \times ... \times L / V_n ,$$

which shows that L / W is Chernikov. Note that W is G-invariant, and the product $W\langle g \rangle$ is a proper subgroup of G. This means that the derived subgroup Y of $W\langle g \rangle$ is a Chernikov subgroup. By above arguments, we can prove that $WY / Y \le \zeta(G / Y)$. From the finiteness of G / L and the fact that L / W is Chernikov we obtain that the factor-group $(G / Y) / \zeta(G / Y)$ is Chernikov. In this case, the derived subgroup $Z / Y = [G / Y, G / Y]$ is Chernikov by **Theorem 1.2.3**. Since Z is Chernikov, the derived subgroup $[G,G]$ is also Chernikov.

Suppose now that g has an infinite order. As above, we can assume that L is abelian. This means that the intersection $S = \langle g \rangle \cap L$ is a normal subgroup of G. In the factor-group G / S the image gS of g has finite order, and it follows that the derived subgroup of G / S is Chernikov. Denote the periodic part of abelian subgroup L by T. Note that T is G-invariant. Consider the factor-group G / T.

Let $T \ne bT$ be an arbitrary element of L / T, and put $B / T = \langle bT \rangle^{G/T} = \langle bT \rangle^{\langle gT \rangle}$. If $\langle gT, B / T \rangle$ is a proper subgroup of G / T, then its derived subgroup is Chernikov. On the other hand, the derived subgroup of $\langle gT, B / T \rangle$ is contained in B / T, and therefore it is torsion-free. This means that the derived subgroup of $\langle gT, B / T \rangle$ is trivial, that is the elements gT and bT commute. Put $G / T = \langle gT, B / T \rangle$. Then $(B / T)\big(L / T \cap \langle gT \rangle\big) = L / T$.

Obviously, that $L/T \cap \langle gT \rangle \leq C_{B/T}(gT)$, which shows that $C_{B/T}(gT)$ is non-trivial. If $B/T = C_{B/T}(gT)$, we again obtain that the elements gT and bT commute. Therefore, it remains to consider the case when $B/T \neq C_{B/T}(gT) = C/T$. Since the extraction of a root in a torsion-free abelian group is uniquely defined, C/T is a pure subgroup of B/T. From the fact that the factor-group G/L is finite, it follows that B/T is a finitely generated abelian subgroup, and therefore B/C is a free abelian group of finite rank. But in this case $B/T = C/T \times R/T$ for some subgroup R/T (see **Theorem 1.2.4**). We have $\langle gT \rangle \cap R/T = \langle 1 \rangle$, in particular $\langle gT, R/T \rangle$ is a proper subgroup of G/T. As we have seen above, in this case $\langle gT, R/T \rangle$ is abelian, and therefore we have $R/T \leq C_{B/T}(gT) = C/T$. This contradiction shows that $B/T = C_{B/T}(gT)$. Thus, in every case the factor-group G/T is abelian.

Since T is periodic, the intersection $T \cap S$ is trivial. Applying Remak's theorem, we obtain that G is isomorphic to some subgroup of the product $G/T \times G/S$. From the fact that the factor-group G/T is abelian and derived subgroup of G/S is Chernikov we obtain that derived subgroup of G is also Chernikov. □

2.1.5. Lemma. *Let G be a solvable group. Suppose that G does not contains proper subgroups of finite index. If every proper subgroup of G has Chernikov derived subgroup, then $[G,G]$ is Chernikov.*

Proof. Since G is solvable, G contains a normal subgroup B such that G/B is abelian. Note that abelian group which has no proper subgroups of finite index is divisible. Thus, G/B is a divisible abelian group. Note also that every divisible abelian group has a quasicyclic factor-group. Thus, G includes a normal subgroup L such that G/L is a quasicyclic p-group for some prime p. In this case, there is an ascending series of subgroups

$$L = L_0 \leq L_1 \leq \ldots \leq L_n \leq L_{n+1} \leq \ldots G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n,$$

where L_{n+1}/L_0 is a cyclic group of order p^n, $n \geq 0$. Put $L_{n+1}/L_0 = \langle g_{n+1} L_0 \rangle$,

$n \geq 0$. Since L is a proper subgroup, $[L,L]$ is Chernikov. We must show that the factor-group $G/[L,L]$ has Chernikov derived subgroup. As above, we can assume that $[L,L]$ is trivial. In other words, we can assume that L is abelian. Since G/L is abelian, for every element x of G $[x,A]$ is a normal subgroup of G. Indeed, if y is an arbitrary element of G, then $x^y = xb$ for some element b of L. Taking into account that L is abelian, for an arbitrary element $a \in L$

$$[x,a]^y = [x^y, a^y] = [xb, a^y] = [x, a^y]^b [b, a^y] = [x, a^y].$$

Since L_n is a proper subgroup, the derived subgroup of L_n is Chernikov. In particular, $[g_n, L]$ is a Chernikov subgroup for every $n \geq 0$. Let $x, y \in G, a \in L$. Since L is abelian,

$$[xy, a] = [x,a]^y [y,a] = [x, a^y][y,a] \in [x,A][y,A].$$

In particular, $[x^k, A] \in [x,A]$, and therefore $\left[\langle x \rangle, A\right] = [x,A]$. This means that

$$[g_n, L] = \left[\langle g_n \rangle, L\right] \leq \left[\langle g_{n+1} \rangle, L\right] = [g_{n+1}, L].$$

Thus, we obtain the following ascending series

$$[g_1, L] \leq [g_2, L] \leq \ldots \leq [g_n, L] \leq [g_{n+1}, L] \leq \ldots$$

of G-invariant Chernikov subgroups of L. If F is a finite G-invariant subgroup of L, then the factor-group $G/C_G(F)$ is finite. By our conditions, G has no proper subgroups of finite index, and therefore $G = C_G(F)$ which shows that $F \leq \zeta(G)$. Let C be a Chernikov G-invariant subgroup of L. Since C is abelian, C is a union of its finite G-invariant subgroups. From the above, we obtain the following inclusion $C \leq \zeta(G)$. In particular, $\zeta(G)$ includes $[g_n, L]$ for every $n \geq 0$. Put $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [g_n, L]$, then $K \leq \zeta(G)$ and by the choice of C the factor-group L_n / K is abelian for every $n \geq 0$. Since $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$, we obtain that G/L is abelian. Thus, G is a nilpotent group and its class of nilpotency no more than 2.

Suppose that G is a periodic group. Then $G = Dr_{p \in \Pi(G)} G_p$, where G_p is a Sylow p-subgroup of G. If $\Pi(G)$ contains at least two primes, then G is a direct

product of two proper subgroups, and therefore the derived subgroup of G is Chernikov. Suppose now that $\Pi(G)=\{p\}$ for some prime p. By **Proposition 1.2.5** $L\le\zeta(G)$. Taking into account that G/L is locally cyclic, we obtain that G is abelian.

It remains to consider the case when G is non-periodic. Since G is nilpotent, the set T of all its elements of finite order is a characteristic subgroup. Then G/T is torsion-free, and therefore G includes a normal subgroup S such that G/S is a torsion-free divisible abelian group. This means that there exists a normal subgroup R such that $G/R=U/R\times V/R$, where U/R and V/R are quasicyclic groups. In particular, G is a product of two proper normal subgroups U and V, and their intersection is R. From the fact that U and V are proper subgroups follows that their derived subgroups are Chernikov. Put $D=[U,U][V,V]$. In this case G/D is a product of two normal abelian subgroups UD/D and VD/D. Therefore, the center of G/D includes their intersection E/D. Since $RD/D\le E/D$, the factor-group $(G/D)/\zeta(G/D)$ is Chernikov. Hence, by **Theorem 1.2.3** the derived subgroup $[G/D,G/D]$ is Chernikov. Since D is a product of two normal Chernikov subgroups, then D is Chernikov. Therefore, the derived subgroup $[G,G]$ is also Chernikov. □

From **Lemmas 2.1.4** and **2.1.5** directly follows

2.1.6. Corollary. *Let G be a solvable group. If every proper subgroup of G has Chernikov derived subgroup, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

2.1.7. Proposition. *Let G be an almost solvable group. If every proper subgroup of G has Chernikov derived subgroup, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

Proof. Since G is almost solvable, G includes the largest normal solvable subgroup S (solvable radical of G). If $S=G$, then by **Corollary 2.1.6** the derived subgroup of G is Chernikov. Therefore, suppose that S is a proper subgroup of G. Let L/S be an arbitrary proper subgroup of G/S. Then L is a

proper subgroup of G, and therefore $[L,L]$ is a Chernikov subgroup. Since the index $|G:L|$ is finite and $[L,L]$ is normal in L, the index $|G: N_G([L,L])|$ is also finite. In other words, $[L,L]$ has a finite set of conjugations in G.

By **Lemma 2.1.3** the normal closure $[L,L]^G$ is a Chernikov subgroup. Denote the system of all proper subgroups of G/S by $\mathfrak{M}$. Since G/S is finite, this system is finite. In this case, the system $\mathfrak{D}=\{[L,L]\,|\,L\geq S, L/S\in\mathfrak{M}\}$ is also finite. Put $C=\left\langle [L,L]^G\,|\,[L,L]\in\mathfrak{D}\right\rangle$. As proven above, the normal closure of every subgroup of $\mathfrak{D}$ is Chernikov. Since $\mathfrak{D}$ is finite, C is a Chernikov subgroup. Thus, $[S,S]\in\mathfrak{D}$. Therefore $[S,S]\leq C$ and $[S,S]\leq S\cap C$. Since $SC/C\cong S/(S\cap C)$, SC/C is abelian. In particular, if $G=CS$, then all is proved. Therefore, suppose that CS is a proper subgroup of G. If L/SC is a proper subgroup of G/SC, then L/S is a proper subgroup of G/S. This means that $[L,L]\leq C$, which shows that L/SC is an abelian subgroup of G/SC. Thus, every proper subgroup of G/SC is abelian. Therefore, G/SC is solvable (see **Proposition 1.2.6)**. In turn, G/C is a solvable group. Appling **Proposition 2.1.6**, we obtain that the derived subgroup K/C of G/C is Chernikov. Since C is Chernikov, K is also Chernikov. From inclusion $[G,G]\leq K$ we obtain that $[G,G]$ is a Chernikov subgroup. □

2.1.8. Proposition. *Let G be a locally solvable group. If every proper subgroup of G has Chernikov derived subgroup, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

Proof. By **Theorem 1.2.7** G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are abelian. If G includes a proper subgroup of finite index, then G includes a proper normal subgroup of finite index. Since the derived subgroup of every proper subgroups is Chernikov, G is solvable, and therefore we can apply **Corollary 2.1.6**. Hence, we suppose that G has no proper subgroups of finite index. If F is a finite normal subgroup of G, then the factor-group $G/C_G(F)$ is also finite. Our assumption shows that $G=C_G(F)$, which means

that the center $\zeta(G)$ includes F. Let C be a Chernikov normal subgroup of G. Denote its divisible part by D. Since D is abelian, D is a union of its finite G-invariant subgroups, and we obtain that $D \leq \zeta(G)$. In the factor-group $G/\zeta(G)$ a subgroup $C\zeta(G)/\zeta(G)$ is finite and normal, and using again the above arguments, we obtain that $C\zeta(G)/\zeta(G) \leq \zeta(G/\zeta(G))$. In other words, the second hypercenter $\zeta_2(G)$ includes every normal Chernikov subgroup. Denote by K the union of all proper subgroups of system $\mathfrak{S}$. Since $\mathfrak{S}$ is linearly ordered, K is a normal subgroup of G. If $K \neq G$, then from the properties of the system $\mathfrak{S}$ we obtain that the factor-group G/K is abelian. Taking into account that $[K,K]$ is a Chernikov subgroup, we obtain that G is solvable, and then it remains to use **Corollary 2.1.6.** Therefore, suppose that $K = G$. Since $U \leq V$, $[U,U] \leq [V,V]$, and therefore the system

$$\mathfrak{M} = \{[U,U] \mid U \in \mathfrak{S}, U \neq G\}$$

is also linearly ordered by the usual inclusion. This means that the union M of all subgroups of the system $\mathfrak{M}$ is a normal subgroup of G. For every subgroup U from $\mathfrak{M}$ its derived subgroup $[U,U]$ is Chernikov. From the above, we obtain that $[U,U] \leq \zeta_2(G)$. In other words, for every subgroup U from $\mathfrak{M}$ the factor-group $U\zeta_2(G)/\zeta_2(G)$ is. This means that the factor-group $G/\zeta_2(G)$ is a union of a linearly ordered system consisting of abelian subgroups. Therefore, $G/\zeta_2(G)$ abelian. Thus, G is nilpotent and we can use **Corollary 2.1.6.** □

2.2. The structure of groups, whose all proper subgroups have Chernikov derived subgroup

Our main goal here is to find the structure of groups from the rather wide class of groups, whose proper subgroups have Chernikov derived subgroup.

2.2.1. Definition. A group G is say to be *locally graded* if each finitely generated subgroup of G includes a subgroup of finite index.

The class of locally graded groups is very wide, it includes the classes of all locally finite groups, locally almost solvable groups, locally residually finite groups.

The following assertion is well-known, but we could not find the proper reference, so we give it with a proof

2.2.2. Proposition. *Let G be a locally graded group. If G satisfies the minimal condition, then G is a Chernikov group.*

Proof. Note at first that every group satisfying the minimal condition is periodic. Thus, G is periodic. Denote by F an arbitrary finitely generated subgroup of G. Suppose that F can be infinite. Since F is finitely generated, it includes a proper subgroup F_1 of finite index. The finiteness of the index $|F:F_1|$ implies that F_1 is also finitely generated. Therefore, F_1 includes a proper subgroup F_2 of finite index. Thus, we will obtain the strictly descending series of subgroups, which contradicts to our condition. This contradiction shows that F must be finite. Thus, G is locally finite. Well-known that locally finite group satisfying the minimal condition is Chernikov (see **Theorem 1.2.8**). □

2.2.3. Lemma. *Let G be a locally graded group, whose proper subgroups have Chernikov derived subgroup. If $[G,G]$ is not Chernikov, then G is countable.*

Proof. Suppose that $[G,G]$ is not Chernikov. By **Proposition 2.2.2** it does not satisfy the minimal condition. Then the derived subgroup $[G,G]$ has a strictly descending system of subgroups

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots.$$

Choose an elements $x_1 \in H_1 \setminus H_2, x_2 \in H_2 \setminus H_3, \ldots, x_n \in H_n \setminus H_{n-1}, \ldots$. Put

$$X_n = \langle x_j \mid j \geq n \rangle,\ n \in \mathbb{N}.$$

These subgroups also construct a strictly descending system

$$X_1 > X_2 > \ldots > X_n > \ldots.$$

This means that a subgroup $X = X_1$ can not be Chernikov. Since each element

x_j belongs to the derived subgroup $[G,G]$, there is a finite subset M_j such that $x_j \in [T_j,T_j]$, where $T_j = \langle M_j \rangle$, $j \in \mathbb{N}$. Put $T = \langle M_j \mid j \in \mathbb{N} \rangle$. Then T is a countable subgroup and $x_j \in [T,T]$ for every positive integer j. In other words, the derived subgroup $[T,T]$ includes X. Hence, $[T,T]$ can not be a Chernikov subgroup. In turn, this means that T can not be a proper subgroup. Thus, $T = G$ and this shows that G is countable. □

2.2.4. Lemma. *Let G be an infinite group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has a system of proper subgroups*

$$\langle 1 \rangle = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_n \le G_{n+1} \le \ldots$$

such that $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$. Then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.

Proof. Denote the derived subgroup $[G_n,G_n]$ by D_n for each positive integer n. Since D_n is Chernikov, D_n has a maximum normal divisible Chernikov subgroup K_n, $n \in \mathbb{N}$. From inclusion $G_n \le G_{n+1}$ we obtain that $K_n \le K_{n+1}$ for every positive integer n. In turn, this means that the union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = K$ is a subgroup of G. Obviously, this subgroup is periodic abelian and divisible. If $G = K$, then G is abelian, and all is proved. Therefore, suppose that K is a proper subgroup. Then K is divisible and Chernikov. To be short we can suppose that K is trivial. This will not affect to the generality of our investigation.

By our assumptions, a subgroup D_n is finite for every positive integer n. Since $G_n \le G_{n+1}$, $D_n \le D_{n+1}$ for each positive integer n. In turn, this means that $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$ is a subgroup of G. Obviously, last subgroup is locally finite. If $G \ne D$, then D is a normal Chernikov subgroup, and factor-group modulo D is abelian, so all is proved. Therefore, suppose that $G = D$. In other words, the group G is countable and locally finite. If G includes a subgroup of a finite index, then our assertion follows from **Proposition 2.1.7**.

Let G be a simple group, p be a prime and P be a Sylow p-subgroup of G. If $P = G$, then G is a locally finite p-group. In particular, G is locally solvable. Then by **Proposition 2.1.8** G has a Chernikov derived subgroup. Thus, we can suppose that G is not a p-group. In this case, every Sylow p-subgroup is proper and hence has Chernikov derived subgroup. In particular, it is solvable. By **Theorem 1.2.9** a group G can not be linear. In this case, by **Theorem 1.2.10** G includes a subgroup Y such that $Y / \zeta(Y)$ is isomorphic to $PSL_2(K)$ or $Sz(K)$ for some infinite locally finite field K. However, this contradicts to **Theorem 1.2.11.** This contradiction shows that G can not be simple.

Thus, G includes a non-trivial normal subgroup A_1. A factor-group G / A_1 is again infinite and non-simple, and therefore includes a proper non-trivial normal subgroup A_2 / A_1, etc. Repeating the same arguments, we obtain that G has an ascending series of normal subgroups

$$\langle 1 \rangle < A_1 < A_2 < \ldots < A_\alpha < A_{\alpha+1} < \ldots A_\gamma = G,$$

where γ is a countable limit ordinal. The derived subgroup D_α of every normal subgroup A_α is Chernikov. Denote by K_α the divisible part of Chernikov subgroup D_α. Note that in a group without proper subgroups of finite index every finite normal subgroup is contained in its center. Since K_α is generated by finite G-invariant subgroups and G has no proper subgroups of finite index, $K_\alpha \leq \zeta(G)$ for every ordinal $\alpha < \gamma$. The factor group D_α / K_α is finite and then $D_\alpha / K_\alpha \leq \zeta(G / K_\alpha)$ for each $\alpha < \gamma$. This means that the second term of the upper central series of G includes $[G,G]$. In particular, G is nilpotent. It remains to apply **Corollary 1.2.6**. □

Now we can proof the main result of this section.

2.2.5. Theorem. *Let G be a group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. If G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are locally graded, then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Suppose that G includes a proper normal subgroup H such that the factor-group $K = G/H$ is locally graded. If K is finitely generated, then it includes a proper subgroup W of finite index. In this case, W has a Chernikov derived subgroup, and hence K is almost solvable, and we can apply **Proposition 2.1.7**. If K has no finite system of generators, then it is union of countable ascending series of its proper subgroups, and we can apply **Lemma 2.2.4**. In these cases, G/H has a Chernikov derived subgroup. In particular, G/H is almost solvable. Since H is a proper subgroup, it also has a Chernikov derived subgroup, and therefore it is almost solvable. This means that the whole group is almost solvable, and we can apply **Proposition 2.1.7**. Thus, G has a Chernikov derived subgroup.

Suppose now that G has no proper normal subgroups such that the factor-groups by them are locally graded. In particular, G has no proper subgroups of finite index. Let $\mathfrak{S}$ be a normal Kurosh-Chernikov system of G, whose factors are locally graded. From the above, we obtain that $\mathfrak{S}$ has no maximal elements. In other words, for an arbitrary subgroup L of $\mathfrak{S}$ there exists a subgroup R from $\mathfrak{S}$ such that L is a proper subgroup of R. Since L is a proper subgroup of G, it has a Chernikov derived subgroup $[L,L]$. From the fact that L is contained in R we obtain that $[L,L] \leq [R,R]$. Therefore, the system of subgroups $\{[L,L] \mid L \in \mathfrak{S}\}$ like the system $\mathfrak{S}$ is linearly ordered. Since $G = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L$, $Q = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} [L,L]$ is a normal subgroup, which contains the derived subgroup of G. Denote by $d([L,L])$ a divisible part of Chernikov subgroup $[L,L]$. Since L is a subgroup of R, $d([L,L]) \leq d([R,R])$. Therefore, the system of subgroups $\{d([L,L]) \mid L \in \mathfrak{S}\}$ like the system $\mathfrak{S}$ is linearly ordered. This mean that the union $D = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} d([L,L])$ is a subgroup of G. Note that the center of G includes every finite normal subgroup. Indeed, G has no proper subgroups of finite index, and therefore the centralizer of every finite normal subgroup is equal to whole group. Since a divisible Chernikov subgroup $d([L,L])$ is a union of its finite

G-invariant subgroups, the center $\zeta(G)$ contains $d([L,L])$ for every subgroup $L \in \mathfrak{S}$. Thus, $D \leq \zeta(G)$. Note that D is a periodic abelian divisible subgroup. In the factor-group G/D consider the system $\mathfrak{S}^{\Lambda} = \{LD/D \mid L \in \mathfrak{S}\}$. From $d([L,L]) \leq D$ we obtain an isomorphism $[L,L]/([L,L] \cap D) \cong [L,L]D/D$, which shows, in particular, that the factor-group $[L,L]D/D$ is finite. Since G has no proper subgroups of finite index, $[L,L]D/D \leq \zeta(G/D)$ for each subgroup belonging to $\mathfrak{S}$. Hence, the second hypercenter of G includes Q. It has already been proved that Q contains a derived subgroup $[G,G]$. Thus, G is nilpotent. Applying **Corollary 2.1.6** we obtain our result. □

2.2.6. Corollary. *Let G be a group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. If G has an ascending series of normal subgroups, whose factors are locally graded, then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

2.2.7. Corollary. *Let G be a group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. If G has a descending series of normal subgroups, whose factors are locally graded, then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

2.2.8. Corollary [93]**.** *Let G be a locally graded group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. Then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

2.2.9. Corollary. *Let G be a locally generalized radical group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. Then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

2.2.10. Corollary. *Let G be a locally almost solvable group, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup. Then $[G,G]$ is a Chernikov subgroup.*

O. Yu. Ol'shanskii constructed a series of exotic examples of infinite simple groups, whose all proper subgroups are abelian (see [84, §28]). These examples shows that the **Theorem 2.2.5** can not be generalized to arbitrary groups, whose all subgroups have Chernikov derived subgroup.

CHAPTER 3

GROUPS, WHOSE ALL SUBGROUPS ARE EITHER NORMAL OR HAVE CHERNIKOV DERIVED SUBGROUP

Let G be a group, whose system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of subgroups with Chernikov derived subgroup. Denote by $\mathfrak{S}$ the system of all subgroups, whose derived subgroup is not Chernikov. Then every of these subgroups is normal and defines the Dedekind factor-group. Recall that a Dedekind group is nilpotent, and its class of nilpotency no more than 2. Let H be the intersection of all subgroups from $\mathfrak{S}$. Then the factor-group G/H is nilpotent, and its class of nilpotency no more than 2. If K is a proper subgroup of H, then from the choice of H we obtain that $K \notin \mathfrak{S}$, so its derived subgroup is Chernikov. As was proved in the previous section, under some general conditions, a subgroup H also has Chernikov derived subgroup. This means that G is almost solvable (under the additional conditions considered in section 2). This shows that the case of almost solvable group is fundamental in the study of groups, in which the system $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ consists of subgroups with Chernikov derived subgroup.

3.1. Preliminary results

We start with the following almost obvious result.

3.1.1. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then*

(i) if H is an arbitrary subgroup of G, then each subgroup of H is either normal or has Chernikov derived subgroup;

(ii) if L is an arbitrary normal subgroup of G, then each subgroup of the factor-group G/L is either normal or has a Chernikov derived subgroup;

(iii) if S is an arbitrary subgroup of G and $[S,S]$ is not Chernikov, then the factor-group G/S is Dedekind.

3.1.2. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is a torsion-free abelian subgroup of G. If $N_G(A)$ contains an element g of finite order, then $g \in C_G(A)$.*

Proof. Suppose the contrary. Assume that $C_G(A)$ has no an element g. Let m be an arbitrary positive integer. Put $H_m = \langle A^m, g \rangle$. A subgroup A^m is characteristic in A, and therefore A^m is $\langle g \rangle$-invariant. Then $\langle A^m, g \rangle$ is a semidirect product of A^m and $\langle g \rangle$: $\langle A^m, g \rangle = A^m \leftthreetimes \langle g \rangle$. It follows that $[H_m, H_m] \leq A^m$. Suppose that $\langle A^m, g \rangle$ is abelian. Then

$$(a^g)^m = (a^m)^g = a^m$$

for each element a of A. As a corollary we obtain that $(a^g a^{-1})^m = 1$. Since A is torsion-free, $a^g a^{-1} = 1$, and hence $a^g = a$. It proves the inclusion $g \in C_G(A)$, and we obtain a contradiction with our assumption. This contradiction shows that $\langle A^m, g \rangle$ can not be abelian for any positive integer m. But in this case its derived subgroup $[H_m, H_m]$ is non-trivial for any positive integer m. Inclusion $[H_m, H_m] \leq A^m$ shows that $[H_m, H_m]$ is torsion-free. In particular, it can not be Chernikov. This means that $\langle A^m, g \rangle$ is normal for any positive integer m, and hence the intersection $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle A^m, g \rangle = \langle g \rangle$ is also normal. Since g has finite order, $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$, which means that $g \in C_G(A)$, which proves our result. □

3.1.3. Lemma. *Let G be a finitely generated group. If G includes a subgroup L of finite index, whose derived subgroup $[L, L]$ is Chernikov, then G is almost abelian.*

Proof. Denote the derived subgroup of L by K. The finiteness of the index $|G : L|$ shows that L is also finitely generated (**Theorem 1.2.12**). Denote by D the divisible part of Chernikov subgroup K. Then the factor-group L / D includes a normal finite subgroup K / D such that L / K is abelian and finitely

generated. In particular, the factor-group L/D is almost polycyclic. This means that L/D is residually finite (**Theorem 1.2.13**). Then L/D includes a normal subgroup F/D of finite index such that $(F/D)\cap(K/D)=\langle 1\rangle$. This shows that a subgroup F/D is abelian. The fact that its index $|G:F|$ is finite together with **Theorem 1.2.12** shows that F is finitely generated. Since it is metabelian, it satisfies the minimal condition for normal subgroups (**Theorem 1.2.14**). On the other hand, if D is non-trivial, then it has an infinite ascending series of finite G-invariant subgroups. This contradiction shows that $D=\langle 1\rangle$, and hence $L\cong L/D$ is almost abelian. Since $|G:L|$ is finite, G is almost abelian. □

3.1.4. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that the derived subgroup of every subgroup of finite index is not Chernikov. Let R be the intersection of all subgroups of finite index. Then G/R is either abelian or G includes a normal subgroup V containing R such that G/V is a quaternion group and V/R is abelian.*

Proof. Since the derived subgroup of every subgroup of finite index is not Chernikov, then every subgroup H of finite index is normal in G. By **Lemma 3.1.1** the factor-group G/H is Dedekind. Put

$$\mathfrak{M}=\{X \mid X \text{ is a subgroup of finite index in } G\},\ R=\cap\mathfrak{M}.$$

By the classical Remak's theorem the factor-group G/R is isomorphic to some subgroup of the product $Dr_{H\in\mathfrak{M}}G/H$. Suppose that G/R is non-abelian. Then G includes a normal subgroup U of finite index such that G/U is a non-abelian Dedekind group. In this case $G/U=Q/U\times V/U$, where Q/U is a quaternion group and V/U is a direct product of an elementary abelian 2-subgroup and periodic abelian subgroup without elements of order 2 (**Theorem 1.2.15**). Let W be a subgroup of V, which has finite index in V. Then W has finite index in G, and then W is normal in G. This means that G/W is a Dedekind and non-abelian group. If V/W is non-abelian, then V includes a D-invariant subgroup Y such that the factor-group V/Y is a quaternion group. Then G/Y is (quaternion

group)-by-(quaternion group). On the other hand, Y has finite index in G, and therefore by **Lemma 3.1.1** G/Y is a Dedekind group. This contradiction shows that V/W is abelian. Put

$$\mathfrak{S} = \{X \mid X \text{ is a subgroup of finite index in } V\}, T = \cap\mathfrak{S}.$$

Obviously, $\mathfrak{S}$ is a subset of $\mathfrak{M}$, so that $T \geq R$. Applying Remak's theorem, we obtain that V/T is isomorphic to some subgroup of the product $Dr_{W\in\mathfrak{S}}V/W$. Since the last group is abelian, V/T is also abelian. Let $X \in \mathfrak{M}$, then $X \cap V$ has finite index in V, which shows that $X \cap V \in \mathfrak{S}$. This means that $\mathfrak{S} = \{X \cap V \mid X \in \mathfrak{M}\}$. Then

$$R = R \cap V = \left(\bigcap_{X\in\mathfrak{M}} X\right) \cap V = \bigcap_{X\in\mathfrak{M}} (X \cap V) = T.$$

Thus, V/R is abelian. □

3.1.5. Corollary. *Let G be a finitely generated group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G is almost solvable, then G is almost abelian.*

Proof. If G includes a subgroup L of finite index with Chernikov derived subgroup, then by **Lemma 3.1.3** G is almost abelian.

Thus, suppose that the derived subgroup of every subgroup, which has finite index in G, is not Chernikov. Denote by R the intersection of all subgroups of finite index. Applying **Lemma 3.1.4** we obtain that the factor-group G/R is either abelian or G includes a normal subgroup V such that $V \geq R$, G/V is a quaternion group and V/R is abelian. The fact that the factor-group G/V is finite together with **Theorem 1.2.12** shows that V is finitely generated. Since it is almost abelian, V includes proper subgroups of finite index. This means that $R \neq V$. Since the factor-group V/R is abelian, its derived subgroup $[V,V] = K$ can not coincides with V. Let S be the largest normal solvable subgroup of K. Obviously, a subgroup S is G-invariant. Suppose that $K \neq S$. Then K/S is finite and non-solvable. A factor-group V/S is finite-by-abelian. Since it is finitely generated, V/S is almost polycyclic. By **Theorem 1.2.13** the factor-

group V/S is residually finite. In this case V/S includes a normal subgroup E/S of finite index such that $(E/S)\cap(K/S)=\langle 1\rangle$. In particular, E has finite index in G, and therefore E is normal in G. From

$$X/S\cong(X/S)/((E/S)\cap(X/S))\cong(X/S)(E/S)/(E/S)\leq(G/S)/(E/S)$$

and $G/E\cong(G/S)/(E/S)$ we obtain that G/E includes a finite non-solvable subgroup. On the other hand, we noted above that each finite factor-group of G is Dedekind, in particular, it is solvable. This contradiction shows that $K=S$. In other words, K is solvable. Suppose that K is non-trivial. In this case $U=[K,K]\neq K$, V/U is non-abelian, but metabelian. Since it is finitely generated, it is residually finite by **Theorem 1.2.14**. It follows that U is the intersection of some subgroups of finite index. On the other hand, R is the intersection of all subgroups of finite index in V. Therefore, R is contained in U. This contradiction proves the equality $K=\langle 1\rangle$, which shows that V is abelian. Since G/V is finite, G is almost abelian. □

3.1.6. Lemma. *Let G be a finitely generated group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G is torsion-free and G includes a normal abelian subgroup A such that G/A is a finite cyclic group. Then G is abelian.*

Proof. Let x be an element of G having the following property $G/A=\langle xA\rangle$. By our conditions G/A is finite, and therefore $x^m\in A$ for some positive integer m. Since G is torsion-free, $1\neq x^m$. In particular, $C=C_A(x)$ is a non-trivial subgroup. It is easy to check that C is a pure subgroup of A. If $C=A$, then G is abelian, and all is proved. Therefore, suppose that C is a proper subgroup of A. Obviously, C is $\langle x\rangle$-invariant. Note that xC has finite order in G/C. Applying **Lemma 3.1.2** we obtain that $xC\in C_{G/C}(A/C)$. But in this case the factor-group G/C is abelian. Since A is abelian, from the choice of C we obtain that $C\leq\zeta(G)$. In particular, it shows that G is nilpotent. Since G is torsion-free and almost abelian, G abelian. □

3.1.7. Corollary. *Let G be a finitely generated group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G is torsion-free and almost solvable. Then G is Abelian.*

Proof. By **Corollary 3.1.5** G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A is finite. Thus, $G = \bigcup_{1\le j\le k} Ax_j$ for some elements $x_1,...,x_k$ of G. **Lemma 3.1.6** shows that $\langle A, x_j \rangle$ is abelian for every $1 \le j \le k$. Since $G = \bigcup_{1\le j\le k} \langle A, x_j \rangle$, the center of G has finite index (**Theorem 1.2.16**). In particular, G is an FC-group. Since a torsion-free FC-group is abelian (**Theorem 1.2.17**), we obtain our result. □

3.1.8. Corollary. *Let G be a locally almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G is torsion-free. Then G is abelian.*

3.1.9. Lemma. *Let G be a locally almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then the set of all elements of G of finite order is a (characteristic) subgroup of G.*

Proof. Let x and y are arbitrary elements of finite order. Denote by F a subgroup, which generated by x and y. Suppose that F is infinite. By **Corollary 3.1.5** F includes a normal abelian subgroup A of finite index. Applying **Theorem 1.2.12** we obtain that A is finitely generated. In this case, we can find a positive integer k such that $K = A^k$ is a non-trivial torsion-free subgroup. Moreover, the factor-group A/A^k is finite, and then F/K is also finite. **Lemma 3.1.2** shows that $[K,x] = \langle 1 \rangle = [K,y]$. Since x and y are generators of F, the center of F includes a subgroup K. On the other hand, since the center of F has finite index, F is an FC-group. However, the set of all elements of FC-group having finite order is a subgroup (**Theorem 1.2.18**). In particular, $\langle x, y \rangle$ is finite, which proves our result. □

3.1.10. Corollary. *Let G be a locally almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then every finitely generated subgroup of G is central-by-finite. In particular, G is a locally FC-group.*

Proof. Let F be an arbitrary finitely generated subgroup of G. Denote by T the subset of all elements of F, which have finite order. By **Lemma 3.1.9** T is a characteristic subgroup of F. From **Corollary 3.1.8** we obtain that the factor-group F/T is abelian. In turn, this implies the finiteness of $[F,F]$. This means that F is an FC-group. It remains only to note that a finitely generated FC-group has center of finite index. □

3.1.11. Corollary. *Let G be a locally almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then the derived subgroup of G is periodic.*

Proof. Denote by T the subset of all elements of G of finite order. By **Lemma 3.1.9** T is a characteristic subgroup of G. A factor-group G/T is torsion-free. By **Corollary 3.1.8** G/T is abelian. Thus, $[G,G] \leq T$. □

Collected the above results, we obtain the following

3.1.12. Theorem. *Let G be a locally almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then*

(*i*) *every finitely generated subgroup of G is central-by-finite; in particular, G is a locally FC-group;*

(*ii*) *the derived subgroup of G is a periodic (and therefore locally finite) subgroup; in particular, if G is torsion-free, then G is abelian.*

We can generalize this theorem in the following way.

3.1.13. Theorem. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are locally graded, then G is almost solvable. In particular, $[G,G]$ is locally finite. Thus, if G is torsion-free, then G is abelian.*

Proof. If G includes a subgroup of finite index with Chernikov derived subgroup, then G is almost solvable and we can apply **Theorem 3.1.12.** Thus, suppose that the derived subgroup of every subgroup of finite index is not Chernikov. Put

$\mathfrak{M} = \{X \mid X \text{ is a subgroup with non - Chernikov derived subgroup}\}$, $R = \cap\mathfrak{M}$.

Thus, if H belongs to the system $\mathfrak{M}$, then H is normal in G and the factor-group G/H is Dedekind by **Lemma 3.1.1**. By the classical Remak's theorem G/R is isomorphic to some subgroup of the product $Dr_{X\in\mathfrak{M}}G/X$. Since every Dedekind group is either abelian or nilpotent of class 2 (**Theorem 1.2.15**), G/R is either abelian or nilpotent of class 2 (note that the equality $G = R$ is possible). If H is a proper subgroup of R, then by construction of R a subgroup $[H,H]$ is Chernikov. **Theorem 2.2.5** shows that the derived subgroup of R is also Chernikov. Since G/R is nilpotent, G is almost solvable. □

3.1.14. Corollary. *Let G be a periodic group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are locally graded, then G is locally finite.*

3.1.15. Corollary. *Let G be a finitely generated group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are locally graded, then its center has finite index. In particular, G is almost abelian.*

Proof. Indeed, by **Theorem 3.1.13** G is almost solvable. Thus, we can apply **Theorem 3.1.12**. □

3.1.16. Corollary. *Let G be a locally graded group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Then G is almost solvable. In particular, $[G,G]$ is locally finite. Thus, if G is torsion-free, G is abelian.*

3.2. On some classes of groups, whose all subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup

In the first section of this chapter we obtained some general description of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. The following sections are devoted to a more detailed study of the structure of such groups. In this section, we consider the case when such group includes a subgroup of finite index, which has Chernikov derived subgroup.

3.2.1. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian torsion-free subgroup of G. If $N_G(A)$ contains an element g of infinite order such that $g^k \in A$ for some positive integer k, then $g \in C_G(A)$.*

Proof. Suppose the contrary, that is $g \notin C_G(A)$. Since g has infinite order, $g^k \neq 1$, which means that $g^k \in A$ and then $C = C_A(g)$ is non-trivial. Recall that the extraction of a root in torsion-free abelian group is uniquely defined, which implies that C is pure in A. By above assumption $C \neq A$. Thus, a subgroup A contains an element b, which does not belong to C. Put $B = \langle b \rangle^{\langle g \rangle}$. Then $Z = B \cap C \neq B$, which shows that Z is $\langle g \rangle$-invariant. Since $B/Z = B/(B \cap C) \cong BC/C$, the factor-group B/Z is a torsion-free finitely generated abelian group. In other words, B/Z is a free abelian group of finite rank. In this case $B = Z \times R$ for some subgroup R (**Theorem 1.2.4**). Applying **Theorem 1.2.19**, we obtain that B includes a $\langle g \rangle$-invariant subgroup E such that $Z \cap E = \langle 1 \rangle$ and B/ZE is finite. In particular, this means that E is non-trivial. On the other hand, in $\langle gC, A/C \rangle$ an element gC has finite order, then by **Lemma 3.1.2** $\langle gC, A/C \rangle$ is abelian. This means that C includes $[g, E]$. Since E is $\langle g \rangle$-invariant, $[g, E] \leq E$. Thus, $[g, E] \leq C \cap E$, which means that $[g, E] = \langle 1 \rangle$ and therefore $E \leq C_A(g) = C$. This contradiction shows that $A = C_A(g)$. □

3.2.2. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian torsion-free subgroup of G. Then $N_G(A)/C_G(A)$ is also torsion-free.*

3.2.3. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let g be an element of G. Suppose that G includes a subgroup A such that $A = Dr_{n\in\mathbb{N}} A_n$, where A_n is a non-trivial $\langle g\rangle$-invariant subgroup, $n\in\mathbb{N}$. Then there exists a positive integer k such that $[A_n, g] = \langle 1\rangle$ for all $n \geq k$.*

Proof. Suppose first that $\langle g\rangle$ is normal and denote by $\langle x\rangle$ the intersection $\langle g\rangle \cap A$. Then there is a positive integer k such that $\langle x\rangle \cap Dr_{n\geq k} A_n = \langle 1\rangle$. From normality of $\langle g\rangle$ we obtain that for every element y of G $[\langle g\rangle, y] \leq \langle g\rangle$. On the other hand, choose a positive integer n such that $n \geq k$ and let a be an arbitrary element of A_n. Since A_n is $\langle g\rangle$-invariant, $[g,a]\in A_n$, and hence $[g,a]\in A_n \cap \langle g\rangle = \langle 1\rangle$. Thus, in this case we have to the equality $[A_n, g] = \langle 1\rangle$ for all positive integers $n \geq k$.

Suppose now that $[A_n, g]$ are non-trivial subgroups for infinite set of positive integers n. We can assume that $[A_n, g] \neq \langle 1\rangle$ for all $n \geq k$. There are two infinite subsets Δ and Σ, which have the following properties $\Delta \cup \Sigma = \{n \mid n \geq k\}$ and $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$. Put

$$A(\Delta) = Dr_{n\in\Delta} A_n \text{ and } A(\Sigma) = Dr_{n\in\Sigma} A_n.$$

Note that the intersection $A(\Delta) \cap A(\Sigma)$ is trivial. We have

$$Dr_{n\in\Delta}[g, A_n] \leq \left[\langle g\rangle A(\Delta), \langle g\rangle A(\Delta)\right]$$

and

$$Dr_{n\in\Sigma}[g, A_n] \leq \left[\langle g\rangle A(\Sigma), \langle g\rangle A(\Sigma)\right].$$

These inclusions shows that the derived subgroups $\left[\langle g\rangle A(\Delta), \langle g\rangle A(\Delta)\right]$ and $\left[\langle g\rangle A(\Sigma), \langle g\rangle A(\Sigma)\right]$ can not be Chernikov. This means that both subgroups

$\langle g\rangle A(\Delta)$ and $\langle g\rangle A(\Sigma)$ are normal. Hence, their intersection $\langle g\rangle A(\Delta)\cap\langle g\rangle A(\Sigma)$ is also normal. From the construction of subgroups $A(\Delta)$ and $A(\Sigma)$ we obtain the equality $\langle g\rangle A(\Delta)\cap\langle g\rangle A(\Sigma)=\langle g\rangle$. Thus, $\langle g\rangle$ is normal and this case has already been considered earlier. □

3.2.4. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian p-subgroup of G for some prime p. If* $gC_G(A)$ *is a q-element of* $N_G(A)/C_G(A)$, *where q is a prime different from p, then* $[A,g]$ *is a Chernikov subgroup.*

Proof. Note first that the centralizer $C=C_A(g)$ is a $\langle g\rangle$-invariant subgroup of A. If aC is an element of A/C such that $[g,a]=c\in C$, then $g^{-1}ag=ac$ and therefore $g^{-k}ag^k=ac^k$ for any positive integer k. In particular, if $|gC_G(A)|=t$, then $c^t=1$. On the other hand, t and p are coprime and c is a p-element, which implies that $c=1$. Thus, $C_{A/C}(g)=\langle 1\rangle$. Denote B/C the lower layer of A/C. Since $|gC_G(A)|$ and p are coprime, $B/C=Dr_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda/C$, where A_λ/C is a minimal finite $\langle g\rangle$-invariant subgroup for every index $\lambda\in\Lambda$ (**Theorem 1.2.20**). Applying **Lemmas 3.1.1** and **3.2.3** and taking into account the equality $C_{A/C}(g)=\langle 1\rangle$, we obtain the finiteness of Λ. In turn, this means that B/C is finite. The finiteness of the lower layer of abelian p-group A/C shows that this p-group is Chernikov.

Consider now a mapping $\phi_g: a\to[a,g], a\in A$. Since A is abelian, ϕ_g is an endomorphism of A. Then $A/C_A(g)=A/Ker\phi_g\cong \mathrm{Im}\phi_g=[A,g]$. Since $A/C_A(g)$ is Chernikov, $[A,g]$ is also Chernikov. □

3.2.5. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian p-subgroup of G for some prime p. If* $gC_G(A)$ *is a p-element of* $N_G(A)/C_G(A)$, *then* $[A,g]$ *is a Chernikov subgroup.*

Proof. If $[a,g]=1$ for every element a of A, then $[A,g]=\langle 1\rangle$, and all is proved. Therefore, suppose that A has an element b_1 such that $[b_1,g]\neq 1$. Put $B_1=\langle b_1\rangle^{\langle g\rangle}$. A subgroup B_1 is finite and $\langle g\rangle$-invariant. Among all subgroups of A having trivial intersection with B_1 we choose the maximal subgroup and denote it by M_1. Then the lower layer of the factor-group A/M_1 is finite and this means that this factor-group is Chernikov. Since the order $|gC_G(A)|$ is finite, the system of subgroups $\{M_1^x \mid x\in\langle g\rangle\}$ is also finite. Let

$$\{M_1^x \mid x\in\langle g\rangle\}=\{U_1,\ldots,U_m\}.$$

Then the intersection $C_1=\bigcap\limits_{x\in\langle g\rangle} M_1^x=\bigcap\limits_{1\le j\le m} U_j$ is obviously $\langle g\rangle$-invariant, and applying Remak's theorem, we obtain the following embedding

$$A/C_1 \hookrightarrow Dr_{1\le j\le m} A/U_j.$$

For every element x of $\langle g\rangle$ there is an isomorphism $A/M_1^x\cong A/M_1^x$, which implies that the factor-group A/U_j is Chernikov for every $1\le j\le m$. This means that the factor-group A/C_1 is Chernikov.

Suppose that C_1 has an element b_2 such that $[b_2,g]\neq 1$. Put $B_2=\langle b_2\rangle^{\langle g\rangle}$. Note that B_2 is a finite $\langle g\rangle$-invariant subgroup and the intersection $B_1\cap B_2$ is trivial. Among all subgroups of A having trivial intersection with B_1B_2 choose the maximal subgroup and denote it by M_2. Then the lower layer of the factor-group A/M_2 is finite, and this means that this factor-group is Chernikov. Using the above arguments, we construct a $\langle g\rangle$-invariant subgroup C_2 such that the factor-group A/C_1 is Chernikov and the intersection $B_1B_2\cap C_2$ is trivial. If $[C_2,g]$ is non-trivial, we will continue the process started above. If we assume that this process is not finite, then we construct an infinite system $\{B_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ of finite $\langle g\rangle$-invariant subgroups such that $[B_n,g]$ are non-trivial for every positive

integer n and $\langle B_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}} B_n$. However, this contradicts to **Lemma 3.2.3**. This means that our process can not be infinite. This shows that A includes a $\langle g \rangle$-invariant subgroup E such that the factor-group A/E is Chernikov and $[E,g]$ is trivial. In this case we can show that $[E,g]$ is Chernikov. □

3.2.6. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian periodic subgroup of G. If $gC_G(A)$ is a p-element of $N_G(A)/C_G(A)$, where p is a prime, then $[A,g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Indeed, we have a standard direct decomposition $A = Dr_{q\in\Pi(A)} A_q$, where A_q is a Sylow q-subgroup of A, $q \in \Pi(A)$. Applying **Lemma 3.2.3**, we obtain the existence of finite subset $\pi \subseteq \Pi(A)$ such that $[A_q,g]$ is trivial for all primes q from the subset $\Pi(A)\setminus\pi$. If $q\in\pi$ and $q \neq p$, then **Lemma 3.2.4** shows that $[A_q,g]$ is a Chernikov subgroup. If $p\in\pi$, then by **Lemma 3.2.5** $[A_p,g]$ is Chernikov. Since a subset π is finite, $[A,g]$ is Chernikov. □

3.2.7. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian periodic subgroup of G. If $gC_G(A)$ is an element of $N_G(A)/C_G(A)$ of finite order, then $[A,g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Since $gC_G(A)$ has finite order, $gC_G(A) = g_1C_G(A)\cdot\ldots\cdot g_mC_G(A)$, where $g_jC_G(A)$ is a p_j-element for some prime p_j, $1 \le j \le m$. By **Corollary 3.2.6** $[A,g_j]$ is a Chernikov subgroup for each j, $1 \le j \le m$. An inclusion $[A,g] \le [A,g_1]\cdot\ldots\cdot[A,g_m]$ shows that $[A,g]$ is also Chernikov. □

3.2.8. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian periodic subgroup of G. If $F/C_G(A)$ is a finite subgroup of the factor-group $N_G(A)/C_G(A)$, then $[A,F]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Let $\{g_1,...,g_m\}$ is a transversal to F in $C_G(A)$. **Corollary 3.2.7** shows that $[A,g_j]$ is a Chernikov subgroup for every j, $1 \le j \le m$. From $[A,F] \le [A,g_1]\cdot...\cdot[A,g_m]$ we obtain that $[A,F]$ is also Chernikov. □

3.2.9. Corollary. *Let G be an almost abelian group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G is periodic, then its derived subgroup is Chernikov.*

Proof. Denote by A an abelian subgroup of G of finite index. By **Corollary 3.2.8** $[A,G]$ is a Chernikov subgroup. A factor group $G/[A,G]$ has center of finite index, and therefore by **Theorem 1.2.2** its derived subgroup is finite. In this case the derived subgroup of G is also Chernikov. □

3.2.10. Theorem. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G includes a subgroup of finite index with Chernikov derived subgroup, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

Proof. Since G includes a subgroup of finite index with Chernikov derived subgroup, it also contains a normal subgroup H with this property. Put $K=[H,H]$, then the factor-group H/K is abelian, and therefore the set T/K of all its elements of finite order is a characteristic subgroup. A factor-group H/T is torsion-free and by **Corollary 3.2.2** $H/T \le \zeta(G/T)$. Applying **Theorem 1.2.2**, we obtain that the derived subgroup $D/T=[G/T,G/T]$ is finite. In this case, the set P/D of all elements of G/D of finite order is a characteristic subgroup, and factor-group by it is abelian and torsion-free. From the choice of P/D, P/K is periodic and G-invariant. Suppose that T is a proper subgroup of H. This means that H/K contains an element x_1K of infinite order. Denote the normal closure $\langle x_1K\rangle^{G/K}$ by X_1/K, then X_1/K is a finitely generated abelian G-invariant subgroup. Therefore, there is a positive integer n such that $Y_1/K=(X_1/K)^n$ is torsion-free, in particular it is free

abelian and G-invariant. If the factor-group H/Y_1 is non-periodic, then we find in H/Y_1 a G-invariant free abelian subgroup Y_2/Y_1, etc. Thus, we will find in H/K a subgroup U/K, which has an ascending series of G-invariant subgroups, whose factors are free and abelian, and H/U is periodic. Obviously, U is G-invariant and torsion-free. Since H/U is periodic, G/U is a periodic almost abelian group. By **Lemmas 3.1.1** and **3.2.9** the derived subgroup of G/U is Chernikov. Since P/K is periodic and U/K is torsion-free, $P \cap U = K$. By Remak's theorem $G/K \hookrightarrow G/P \times G/U$. Since G/P is abelian, $[G/K, G/K]$ is Chernikov. Since K is Chernikov, then so $[G,G]$. □

3.3. Some technical results

In this section we continue the investigation of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. In the previous sections we showed that the main stage in investigation of such groups is the consideration the case of almost solvable groups. In the studying of solvable groups the first natural step is the study of their local structure, that is the study of the structure of their subgroups of the form $\langle g, A\rangle$, where A is an abelian subgroup and $g \in N_G(A)$. The main goal of this section and the next section is to study of such subgroups of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. This section contains some technical results that we need in the future.

3.3.1. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G contains an element g and subgroups A and B such that*

(1) $[A,B] = \langle 1\rangle$;

(2) *A, B are* $\langle g\rangle$*-invariant;*

(3) $\langle A,B\rangle \cap \langle g\rangle = \langle 1\rangle$;

(4) $A \cap B = \langle 1 \rangle$;

(5) $C_A(g) \neq A$.

Then the derived subgroup of $\langle B, g \rangle$ *is Chernikov.*

Proof. Since $C_A(g) \neq A$, a subgroup A has an element a such that $[g,a] = d \neq 1$. In this case $a^{-1}ga = gd \neq g$. If $gd \in B\langle g \rangle$, then $gd = g^m b$ for some integer m and some element $b \in B$. This implies that $g^{m-1} = db^{-1}$. By condition (3) $db^{-1} = 1$, and then by (4) $d = b = 1$. This contradiction shows that $gd \notin B\langle g \rangle$. In turn, this means that $B\langle g \rangle$ can not be normal. Thus, it has a Chernikov derived subgroup. □

3.3.2. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer* $C_G(A)$. *If* $A = Dr_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, *where* A_λ *is a* $\langle g \rangle$*-invariant subgroup, then* Λ *includes a finite subset M such that* $A_\lambda \leq C_A(g)$ *for every* $\lambda \in \Lambda \setminus M$.

Proof. If the set Λ is finite, then all is proved. Therefore, suppose that Λ is infinite. Obviously, that Λ includes a subset Δ such that the difference $\Lambda \setminus \Delta$ is finite and $Dr_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} A_\lambda$ contains an intersection $\langle g \rangle \cap A$. If $C_A(g)$ includes A_λ for every $\lambda \in \Delta$, then again all is proved. Thus, suppose that there is an index $\lambda \in \Delta$ such that the centralizer $C_A(g)$ has no A_λ. Put $B = Dr_{\mu \in \Delta \setminus \{\lambda\}} A_\mu$. By **Lemma 3.3.1** the derived subgroup of $B\langle g \rangle$ is Chernikov. In this case the lower layer $\Omega_1\left(\left[B\langle g \rangle, B\langle g \rangle\right]\right)$ of this derived subgroup is finite. This means that we can find a subset $\Sigma \subseteq \Delta$ such that $\Omega_1\left(\left[B\langle g \rangle, B\langle g \rangle\right]\right) \cap Dr_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu = \langle 1 \rangle$, which shows that the intersection $\left[B\langle g \rangle, B\langle g \rangle\right] \cap Dr_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu$ is also trivial. Since $Dr_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu$ is $\langle g \rangle$-invariant, $C_A(\langle g \rangle)$ includes $Dr_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu$, and we obtain our result. □

3.3.3. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an elementary abelian p-subgroup of G, where p is a prime and let g be an element of G of infinite order. Suppose also that A is $\langle g\rangle$-invariant and $\langle g\rangle \cap C_G(A) = \langle 1\rangle$. Then $F_p\langle g\rangle$-module A is periodic.*

Proof. Denote the ring $F_p\langle g\rangle$ by J. Suppose the contrary. Then A has an element c such that $Ann_J(c)$ is trivial. In this case we have the following isomorphism $C = cJ \cong J$. Put $x = g^2$, then

$$J = F_p\langle x\rangle \oplus \left(F_p\langle x\rangle\right)g,$$

and therefore $C = C_1 \oplus C_1^g$, where $C_1 = cF_p\langle x\rangle$. Note that the both subgroups C_1 and $C_2 = C_1^g$ are $\langle x\rangle$-invariant. By **Lemma 3.3.1** the derived subgroup of $C_2\langle x\rangle$ is Chernikov. Since C_2 is elementary abelian, $\left[C_2\langle x\rangle, C_2\langle x\rangle\right]$ is finite. In particular, $C_2\langle x\rangle$ is an FC-group. Then there exists a positive integer m such that $x^m \in C_G(C_2)$. However, this contradicts to the fact that C_2 is torsion-free. This contradiction shows that $F_p\langle g\rangle$-module A is periodic. □

3.3.4. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian p-subgroup of G, where p is a prime and let g be an element of G of infinite order. Suppose also that A is $\langle g\rangle$-invariant and $\langle g\rangle \cap C_G(A) = \langle 1\rangle$. If $F_p\langle g\rangle$-module $A_1 = \Omega_1(A)$ is periodic, then $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-module $C = c\mathbb{Z}\langle g\rangle = \langle c\rangle^{\langle g\rangle}$ is finite for every element c of A.*

Proof. Denote the ring $F_p\langle g\rangle$ by J and $\mathbb{Z}\langle g\rangle$ by R. Since A is a p-subgroup, the order of c is equal to p^k for some positive integer k. If $k = 1$, then $C = cJ \cong J/I$, where $I = Ann_J(c)$ is a non-zero ideal. Note that every non-zero ideal of J has finite index, and therefore C is finite.

We use induction by k. Suppose that $k>1$. Obviously, the mapping

$$\phi: u \to pu, u \in C,$$

is an R-endomorphism of C and $\mathrm{Im}\phi = pC, Ker\phi = \Omega_1(C)$. Moreover, since $pC = (pc)R$, pC is a cyclic R-submodule and $|pc| = p^{k-1}$. By induction hypothesis, a submodule pC is finite. Moreover,

$$pC = \mathrm{Im}\phi \cong C / Ker\phi = C / \Omega_1(C),$$

which shows that $C/\Omega_1(C)$ is finite. Since R is noetherian, every finitely generated R-module is noetherian. This means that submodule $\Omega_1(C)$ is finitely generated. Since every cyclic J-submodule $\Omega_1(A)$ is finite, $\Omega_1(C)$ is also finite. Thus, C is finite. □

3.3.5. Lemma. *Let G be a group. Suppose that G includes a periodic abelian normal subgroup A such that the factor-group G/A is abelian. If $\langle g, A\rangle$ is locally nilpotent for every element $g \in G$, then G is locally nilpotent.*

Proof. Let p be a prime number and denote by P the Sylow p-subgroup of A. Denote by B the lower layer of P, that is $B = \Omega_1(P)$. If g is an element of G, which not belongs to A, then B is a module over group ring $F_p\langle x\rangle$, where $\langle x\rangle$ is an infinite cyclic group, and the action of x on A is defined by the rule $ax = a^g$ for every element a of B. Then $J = F_p\langle x\rangle$ is a principal ideal domain. If B is not J-periodic, then B has an element a such that $Ann_J(c) = \langle 0\rangle$ (note that this is possible in the case when g has infinite order). However, in this case the subgroup $\langle a, g\rangle$ is isomorphic to the wreath product $\langle a\rangle wr\langle g\rangle$, which is non-nilpotent. This contradiction shows that B is a J-periodic module. If $b \in B$, than

$$\langle b\rangle^{\langle g\rangle} = bJ \cong J / Ann_J(b) \neq \langle 0\rangle.$$

Each non-zero ideal of J has finite index, which implies that $\langle b\rangle^{\langle g\rangle}$ is finite. If M is a minimal J-submodule of bJ, then $Q = Ann_J(M)$ is a maximal ideal of J. Since $\langle g, M\rangle$ is nilpotent, $\langle 1\rangle = [g, M] = M(x-1)$. It follows that Q is coincide

with $(x-1)J$. The last equality is true for arbitrary simple J-submodule, which shows that $Ass_J(B)=\{(x-1)J\}$. It follows that B has an ascending series of $\langle g\rangle$-invariant subgroups

$$\langle 1\rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots \le C_n \le C_{n+1} \le \ldots C_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = B,$$

where $C_1 = C_B(g), C_{n+1}/C_n = C_{B/C_n}(g)$ for every positive integer n. Since G/A is abelian, C_n is G-invariant for every positive integer n.

Put $B_1 = B, B_n = \Omega_n(P)$ for every positive integer n. Obviously, that the mapping

$$\phi: b \to pb, b \in B_2,$$

is a $\langle g\rangle$-endomorphism. Since $\mathrm{Im}\phi \le B_1, Ker\phi = B_1$, the factor-group B_2/B_1 is isomorphic to some $\langle g\rangle$-invariant subgroup of B_1. This means that B_2/B_1 is $\langle g\rangle$-hypercentral. By induction, we can show that B_{n+1}/B_n is $\langle g\rangle$-hypercentral for every positive integer n, which implies that P is also $\langle g\rangle$-hypercentral. Moreover, the length of the upper $\langle g\rangle$-central series of P no more than the first infinite ordinal ω. Indeed, by **Lemma 3.3.4.** for any element $u \in P$ a subgroup $\langle u\rangle^{\langle g\rangle}$ is finite. Since the center of $\langle g\rangle$-hypercentral group has non-trivial intersection with every non-trivial $\langle g\rangle$-invariant subgroup, some term of the upper $\langle g\rangle$-central series with finite index includes $\langle u\rangle^{\langle g\rangle}$.

Since this is true for every Sylow p-subgroup of A, $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-module A is also $\langle g\rangle$-hypercentral with $\langle g\rangle$-central length at most ω. Let

$$\langle 1\rangle = Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_n \le Z_{n+1} \le \ldots Z_\omega = A$$

be an upper $\langle g\rangle$-central series of A.

We choose in G another arbitrary element y. Applying the above arguments, we can show that $\mathbb{Z}\langle y\rangle$-module Z_1 is $\langle y\rangle$-hypercentral. Let

$$\langle 1\rangle = Y_0 \le Y_1 \le \ldots \le Y_n \le Y_{n+1} \le \ldots Y_\omega = Z_1$$

be an upper $\langle y\rangle$-central series of Z_1. By the choice of Z_1 this series is also $\langle g,y\rangle$-hypercentral.

Since the factor-group G/A is abelian, the mapping

$$\xi : z \to z(g-1),\ z \in Z_2$$

is a G-endomorphism and $\mathrm{Im}\xi \le Z_1, Ker\xi = Z_1$. Thus, Z_2/Z_1 is isomorphic to some G-invariant subgroup of Z_1, in particular Z_2/Z_1 is $\langle g,y\rangle$-hypercentral. By induction, Z_{n+1}/Z_n is $\langle g,y\rangle$-hypercentral for every positive integer n. It follows that A is $\langle g,y\rangle$-hypercentral. In other words, a subgroup $\langle A,g,y\rangle$ is hypercentral. Similarly, we can prove that $\langle A,g_1,...,g_m\rangle$ is hypercentral for every finite subset $\{g_1,...,g_m\}$ of elements of G. □

3.3.6. Lemma. *Let G be a group, A be an elementary abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G of infinite order. Suppose that A is $\langle g\rangle$-invariant and $\langle g\rangle \cap C_G(A) = \langle 1\rangle$. If $F_p\langle g\rangle$-module A is periodic and includes a non-zero divisible $F_p\langle g\rangle$-submodule, then $\langle g\rangle$ has an element x and A includes an $\langle x\rangle$-invariant subgroup U such that $U\langle x\rangle$ is non-normal and $C_{\langle x\rangle}(U) = \langle 1\rangle$.*

Proof. Denote the group ring $F_p\langle g\rangle$ by J. Let D be a J-divisible part of A. By **Theorem 1.2.23** $D = \oplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$, where D_λ is a Prüfer P_λ-submodule for some maximal ideal P_λ, $\lambda \in \Lambda$. Suppose that Λ has at least two different elements λ and μ. Since D_λ, D_μ are divisible, $Ann_J(D_\lambda) = \langle 0\rangle = Ann_J(D_\mu)$. In particular, $C_{\langle g\rangle}(D_\lambda) = \langle 1\rangle$. Applying the same arguments as in **Lemma 3.3.1**, we can prove that $D_\mu\langle g\rangle$ can not be normal, and we can assume that $U = D_\mu, x = g$.

Let D be a Prüfer P-submodule for some maximal ideal P. Put $L = \Omega_{P,1}(D)$, then L is isomorphic to J-module J/P. Since every non-zero ideal of J has finite index, L is finite. Put $\langle z\rangle = C_{\langle g\rangle}(L)$. We choose a non-zero

element a_1 in L, then $a_1(z-1)=0$. Since D is a J-divisible module, there exists an element a_2 such that $a_2(z-1)=a_1$. Similarly, we can choose a set of elements $\{a_n \mid n \geq 3\}$, which satisfies the following conditions: $a_{n+1}(z-1)=a_n, n \geq 3$. In other words, $Q=\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ is a Prüfer Z-submodule, where $Z=(z-1)F_p\langle z \rangle$. Put $x=z^p$, then $a_2(x-1)=0$. Let $u_1=a_1, v_1=a_2$. Applying the above arguments, we can choose a subsets $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ and $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, which satisfies the following conditions: $u_1(x-1)=0=v_1(x-1)$, $u_{n+1}(x-1)=u_n, v_{n+1}(x-1)=v_n$, for of all positive integers n. Put $U=\langle u_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$, $V=\langle v_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$. Both subgroups U and V are $\langle x \rangle$-invariant and $C_{\langle x \rangle}(U)=C_{\langle x \rangle}(V)=\langle 1 \rangle$. Applying the same arguments as in **Lemma 3.3.1**, we can prove that $U\langle x \rangle$ is non-normal. □

3.3.7. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an elementary abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g \rangle$-invariant. Then the maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $F_p\langle g \rangle$-submodule A is finite.*

Proof. Suppose first that the element g has infinite order and $\langle g \rangle \cap A$ is trivial. Denote the group ring $F_p\langle g \rangle$ by J. By **Lemma 3.3.3** a J-module A is periodic. Let P be a maximal ideal of J and $P \neq (g-1)J$. Denote the P-component of J-module A by B. Put $C=\Omega_{P,1}(B)$. For submodule C we have a direct decomposition $C=\oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, where C_λ is a simple J-submodule such that $P=Ann_J(C_\lambda)$. In particular, the centralizer $C_A(\langle g \rangle)$ does not contains C_λ for every $\lambda \in \Lambda$. By **Lemma 3.3.2** the set of indices Λ is finite. This means that $B=\oplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, where E_λ is either a cyclic J-submodule or Prüfer P-submodule (see **Proposition 1.2.21** and **Theorem 1.2.22**).

Suppose that E_λ is a Prüfer P-submodule. By **Lemma 3.3.6** $\langle g\rangle$ has an element x and A includes an $\langle x\rangle$-invariant subgroup U such that $U\langle x\rangle$ can not be normal and $C_{\langle x\rangle}(U)=\langle 1\rangle$. Then the derived subgroup of $U\langle x\rangle$ is Chernikov. Since U is elementary abelian, the derived subgroup $[U\langle x\rangle, U\langle x\rangle]$ is finite. In particular, $U\langle x\rangle$ is an FC-subgroup, and therefore we can find a positive integer m such that $x^m \in C_{\langle x\rangle}(U)$. This contradiction shows that E_λ can not be Prüfer P-submodule. In other words, E_λ is a cyclic submodule, in particular, E_λ is finite for every $\lambda \in \Lambda$. From the finiteness of Λ we obtain that B is also finite.

Since A is a J-periodic module, we obtain a standard primary decomposition $A=\oplus_{P\in\pi} A_P$, where $\pi = Ass_J(A)$ and A_P is a P- component of A. If $P \neq (g-1)J$, then $C=\Omega_{P,1}(A_P)=\oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, where C_λ is a simple J-submodule satisfying the condition $Ann_J(C_\lambda)=P$. In particular, for every $\lambda\in\Lambda$ $C_C(g)\cap C_\lambda=\langle 0\rangle$. This means that $C_A(g)\cap A_P=\langle 0\rangle$ for every maximal ideal $P\neq(g-1)J$. Put $\Sigma=\pi\setminus\{(g-1)J\}$. If the set Σ contains only ideal P, then by proved above A_P is finite. Thus, suppose that $\Sigma\neq\{P\}$ and put $\Delta=\Sigma\setminus\{P\}, L=\oplus_{Q\in\Delta} A_Q$. Since the order of g is infinite, $\langle g\rangle\cap A=\langle 1\rangle$. By **Lemma 3.3.1** the derived subgroup of $\langle L,g\rangle$ is Chernikov. Since L is an elementary abelian p-subgroup, its derived subgroup $[\langle L,g\rangle,\langle L,g\rangle]$ is finite, which shows that $\langle L,g\rangle$ is an FC-subgroup. This means that the index $|L:C_L(g)|$ is finite. Taking into account the equality $\langle 0\rangle = C_L(g)$, we obtain that L is finite, which implies the finiteness of $\oplus_{P\in\Sigma} A_P$. Note that $\oplus_{P\in\Sigma} A_P$ is a maximal $\langle g\rangle$-hypereccentric $F_p\langle g\rangle$-submodule of A.

It remains to consider the case when g has finite order or $|g|$ is infinite, but $g^k \in C_G(A)$ for some positive integer k. Put $J=F_p\langle y\rangle$, where $\langle y\rangle$ is an infinite cyclic group, and the action of y on A is defined by the rule $ay=a^g$ for

every element $a \in A$. In this case J is a principal ideal domain, but $Ann_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. In particular, A is a J-periodic module, which implies that $A = \oplus_{P \in \pi} A_P$, where A_P is a P-component of A and the set $\pi = Ass_J(A)$ is finite. Put $B = A_P$. Then by **Theorem 1.2.24** we have a direct decomposition $B = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, where B_λ is a cyclic J-submodule for every $\lambda \in \Lambda$. Applying the above arguments, we can prove that the lower layer $\Omega_{P,1}(A_P)$ is finite, and therefore a set of indices Λ is also finite. In turn, this means that A_P is also finite. Since $\Sigma = \pi \setminus \{(y-1)J\}$ is finite, the direct sum $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$ is also finite. But $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$ is a maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $F_p\langle g \rangle$-submodule of A. □

3.3.8. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that A is an abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g \rangle$-invariant. Then the maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-submodule A is Chernikov.*

Proof. Indeed, let E be a maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-submodule of A. By **Lemma 3.3.7** $\Omega_1(E)$ is finite. This means that E is Chernikov. □

3.3.9. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian periodic subgroup of G and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g \rangle$-invariant. Then the maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-submodule A is Chernikov.*

Proof. Indeed, let E be a maximal $\langle g \rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-submodule of A. Then we have a standard direct decomposition $E = Dr_{p \in \Pi(E)} E_p$, where E_p is a Sylow p-subgroup. By **Corollary 3.3.8** E_p is a Chernikov subgroup. Applying **Lemma 3.3.1**, we can prove that the set $\Pi(E)$ is finite. This means that E is a Chernikov subgroup. □

3.3.10. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an elementary abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g\rangle$-invariant. If C is an upper $F_p\langle g\rangle$-hypercenter of A, then $[C,g]$ is a finite subgroup.*

Proof. Suppose first that g has infinite order and $\langle g\rangle \cap A$ is trivial. We will consider A as a module over group ring $F_p\langle g\rangle$. As above, put $J = F_p\langle g\rangle$. By the choice of C we obtain that C is coincides with the Z-component of A, where $Z = (g-1)J$ (obviously, this ideal is maximal). By **Theorem 1.2.25** C includes a submodule B satisfying the following conditions: B is a J-pure submodule, $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, where B_λ is a cyclic J-submodule for every index $\lambda \in \Lambda$ and C/B is J-divisible.

Suppose that $B \neq C_B(g)$. Then Λ has index ν such that $C_B(g)$ does not contains B_ν. Put $E = \oplus_{\lambda\neq\nu} B_\lambda$. Applying again **Lemma 3.3.1**, we obtain that the derived subgroup of $\langle E,g\rangle$ is Chernikov. Since E is elementary abelian, the derived subgroup $\left[\langle E,g\rangle,\langle E,g\rangle\right]$ is finite, in particular, $\langle E,g\rangle$ is an FC-group and in this case $|E:C_E(g)|$ is finite. Therefore, the index $|B:C_B(g)|$ is also finite, which shows that $Ann_J(B) \neq \langle 0\rangle$. By **Theorem 1.2.26** we obtain the following direct decomposition $C = B \oplus D$. Since D is isomorphic to the factor-module C/B, D is a J-divisible submodule, and then by **Theorem 1.2.23** D is a direct sum of Prüfer submodules. As in the proof of **Lemma 3.3.7**, we can show that D must be trivial, that is C is coincides with B. In particular, the index $|C:C_C(g)|$ is finite.

It remains only to consider the case when element g is of finite order or $|g|$ is infinite, but $g^k \in C_G(A)$ for some positive integer k. Denote by J the group algebra of the infinite cyclic group $\langle y\rangle$ over simple field $F_p\langle y\rangle$ and define the action of y on A by the following rule $ay = a^g$ for every element

$a \in A$. This action naturally can be extended to the action of J on A, that is A becomes a module over J. Note that J is a principal ideal domain, but $Ann_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. In particular, $Ann_J(C) \neq \langle 0 \rangle$. Then by **Theorem 1.2.24** we have a direct decomposition $C = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, where B_λ is a cyclic J-submodule for every $\lambda \in \Lambda$. Using the above arguments, we can prove that the index $|C : C_C(g)|$ is finite. □

3.3.11. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian p-subgroup of G, where p is a prime, and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g \rangle$-invariant. If C is an upper $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-hypercenter of A, then $[C, g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. If g has infinite order, then the intersection $A \cap \langle g \rangle$ is trivial. If order of g is finite, then the intersection $S = A \cap \langle g \rangle$ is also finite. Obviously, that S is a $\langle g \rangle$-invariant subgroup. Therefore, in this case instead of subgroup A we will consider its factor group A / S. Also we can assume that in every case the intersection $A \cap \langle g \rangle$ is trivial.

If $[g, C] = \langle 1 \rangle$, then all is proved is proved. Therefore, we can assume that C contains an element c such that $[g, c] \neq 1$. Denote the normal closure $\langle c \rangle^{\langle g \rangle}$ by C_1, then C_1 is finite and $[g, C_1]$ is non-trivial. Consider the lower layer $L = \Omega_1(C)$ of C. Put $J = F_p \langle y \rangle$, where $\langle y \rangle$ is an infinite cyclic group and the action of y on A is defined by the following $ay = a^g$ for every element $a \in A$. Note that J is a principal ideal domain. By **Lemma 3.3.7** $Ann_J(C)$ is non-zero. Applying **Theorem 1.2.24**, we obtain a direct decomposition $C = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, where B_λ is a cyclic J-submodule. **Lemma 3.3.10** shows that there is a finite subset $\Phi \subseteq \Lambda$ such that $B_\lambda (y - 1) = \langle 0 \rangle$ for every λ belonging to $\Lambda \setminus \Phi$. In other words, $[g, B_\lambda] = \langle 1 \rangle$ for every $\lambda \in \Lambda \setminus \Phi$. Since C_1 is finite, the intersection

$L \cap C_1$ is also finite. Then there exists a subset $\Psi \subseteq \Lambda$ such that the direct sum $\oplus_{\lambda \in \Psi} B_\lambda$ contains the intersection $L \cap C_1$. Put $\Delta = \Phi \cup \Psi$, $Q = \oplus_{\lambda \in \Delta} B_\lambda$, which shows that Q is finite. Choose a $\langle g \rangle$-invariant subgroup E in C such that E is maximal by the following properties: $\oplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} B_\lambda \leq E$ and $Q \cap E = \langle 1 \rangle$. Put $R/E = \Omega_1(C/E)$. By **Lemma 3.3.10** the index $|R/E : C_{R/E}(g)|$ is finite. By the choice of E we obtain that R/E is finite, which follows that the factor-group C/E is Chernikov. Applying again **Lemma 3.3.1**, we obtain that the index $|E : C_E(g)|$ is finite. This means that $C/C_C(g)$ is Chernikov.

The mapping $\phi : c \to [g,c], c \in C$ is a $\langle g \rangle$-endomorphism of A. Then $\mathrm{Im}\phi = [g,C]$, $Ker\phi = C_C(g)$ are $\langle g \rangle$-invariant in A. Since $[g,C] \cong C/C_C(g)$, $[g,C]$ is a Chernikov subgroup. □

3.3.12. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian periodic subgroup of G and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g \rangle$-invariant. If C is an upper $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-hypercenter of A, then $[C,g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. As in the proof of the last result we can assume that g has infinite order and the intersection $A \cap \langle g \rangle$ is trivial. We have a standard primary direct decomposition $C = Dr_{p \in \pi} C_p$, where $\pi = \Pi(C)$ and C_p is a Sylow p-subgroup of C, $p \in \pi$. If $[g,C_p] = \langle 1 \rangle$ for every prime p, then $[g,C]$ is trivial, and all is proved. Therefore, it remains to consider the case when there is a prime q such that $[g,C_q] \neq \langle 1 \rangle$. By **Corollary 3.1.11** $[g,C_q]$ is a Chernikov subgroup. Put $L = Dr_{p \neq q} C_p$. Applying **Lemma 3.3.1**, we obtain that the index $|L : C_L(g)|$ is finite. In turn, this means that $[g,L]$ is finite. Taking into account the existence of direct decomposition $[g,C] = [g,C_q] \times [g,L]$, we obtain that $[g,C]$ is a Chernikov subgroup. □

3.3.13. Lemma. *Let G be an abelian group, A be a $\mathbb{Z}G$-module such that $C_G(A)=\langle 1\rangle$. Suppose that B is a $\mathbb{Z}G$-submodule of A satisfying the following conditions:*

(1) *B and A/B are simple $\mathbb{Z}G$-modules;*

(2) *B is a G-central submodule and the factor-module A/B is G-eccentric.*

Then there exists a $\mathbb{Z}G$-submodule C such that $A=B\oplus C$.

Proof. Choose in G an arbitrary non-trivial element z. Since G is abelian, the mapping

$$\phi_z : a \to a(z-1), a \in A$$

is a $\mathbb{Z}G$-endomorphism of A. In particular, $\mathrm{Im}\phi_z$ and $Ker\phi_z$ are $\mathbb{Z}G$-submodules of A. By the choice of this mapping $Ker\phi_z$ contains B. If we suppose that $Ker\phi_z$ does not coincides with B, then from our conditions we obtain the equality $Ker\phi_z = A$, which follows that $z \in C_G(A)=\langle 1\rangle$, and we obtain a contradiction. Thus, $Ker\phi_z = B$. Then

$$A/Ker\phi_z \cong \mathrm{Im}\phi_z = C,$$

which means that C is a $\mathbb{Z}G$-submodule of A, for which $C_G(C)\neq G$. Moreover, C is a simple $\mathbb{Z}G$-submodule. Therefore, since $C\neq B$, the intersection $C\cap B$ is trivial. Since the factor-module A/B is a simple $\mathbb{Z}G$-module, $C+B=A$, and therefore we have a direct decomposition $A=B\oplus C$. □

3.3.14. Lemma. *Let G be an abelian group, A be a $\mathbb{Z}G$-module such that $C_G(A)=\langle 1\rangle$. Suppose that B is a $\mathbb{Z}G$-submodule of A satisfying the following conditions:*

(1) *B and A/B are simple $\mathbb{Z}G$-modules;*

(2) *B is a G-eccentric submodule and the factor-module A/B is G-central.*

Then there exists a $\mathbb{Z}G$-submodule C such that $A=B\oplus C$.

Proof. Choose in G an arbitrary non-trivial element z. Since G is abelian, the mapping

$$\phi_z : a \to a(z-1), a \in A$$

is a $\mathbb{Z}G$-endomorphism of A. In particular, $\mathrm{Im}\phi_z$ and $Ker\phi_z$ are $\mathbb{Z}G$-submodules of A. Since $C_G(A/B) = G$, $\mathrm{Im}\phi_z \le B$. If we assume that $\mathrm{Im}\phi_z = \langle 0 \rangle$, then $z \in C_G(A) = \langle 1 \rangle$, and we obtain a contradiction. Thus, $\mathrm{Im}\phi_z$ is a non-zero submodule. Since B is a simple $\mathbb{Z}G$-submodule, $\mathrm{Im}\phi_z = B$. $\mathbb{Z}G$-factor $A(z-1)/B(z-1)$ is a $\mathbb{Z}G$-homomorphic image of the factor-module A/B. Since $C_G(A/B) = G$, then $C_G(A(z-1)/B(z-1)) = G$. From the fact that B is a simple $\mathbb{Z}G$-submodule and equalities $A(z-1) = \mathrm{Im}\phi_z = B$ and $C_G(B) \neq G$ we obtain that $A(z-1) = B(z-1)$. In other words, for every element a of A in B there exists an element b such that $a(z-1) = b(z-1)$. This means that $(a-b)(z-1) = 0$, and therefore $a - b \in C_A(z)$. Since a is an arbitrary element of A, $A = B + C_A(z)$. Note that $C_A(z) = Ker\phi_z$, and then $C_A(z)$ is a $\mathbb{Z}G$-submodule. Since B is a simple $\mathbb{Z}G$-submodule, we obtain that either intersection $B \cap C_A(z)$ is trivial or $C_A(z)$ contains B. In the last case we obtain that $A = C_A(z)$, which means that $z \in C_G(A) = \langle 1 \rangle$, and we obtain a contradiction with the choice of element z. Thus, $\langle 0 \rangle = B \cap C_A(z)$, which implies the equality $A = B \oplus C$, where $C = C_A(z)$. □

3.3.15. Corollary. *Let G be an abelian group, A be a $\mathbb{Z}G$-module such that $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Suppose that A has a finite $\mathbb{Z}G$-composition series. Then*

(1) *$A = C \oplus E$, where C is an upper G-hypercenter of A and E is a maximal G-hypercentral $\mathbb{Z}G$-submodule of A;*

(2) *E includes every G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A, in particular, the above direct decomposition is unique.*

Proof. The first statement follows directly from **Lemmas 3.3.13** and **3.3.14**. Let B be a G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A. If the factor

$(B+E)/E$ is non-zero, then it contains a non-zero $\mathbb{Z}G$-submodule D/E. From isomorphism $(B+E)/E \cong B/(B \cap E)$ we obtain D/E is G-isomorphic to some simple $\mathbb{Z}G$-factor of B. Hence, D/E is G-eccentric. On the other hand, the relations $(B+E)/E \le A/E \cong C$ shows that $C_G(D/E) = G$. This contradiction shows that E contains a submodule B. □

3.3.16. Corollary. *Let G be an abelian group, A be a $\mathbb{Z}G$-module such that $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Suppose that every finitely generated submodule of A has finite $\mathbb{Z}G$-composition series. Then*

(1) *$A = C \oplus E$, where C is an upper G-hypercenter of A and E is a maximal G-hypercentral $\mathbb{Z}G$-submodule of A;*

(2) *E includes every G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A, in particular, the above direct decomposition is unique.*

Proof. $\mathbb{Z}G$-module A has a local system of finitely generated $\mathbb{Z}G$-submodules $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Since A_λ has a finite composition $\mathbb{Z}G$-series, by **Corollary 3.3.15** there exists a direct decomposition $A_\lambda = C_\lambda \oplus E_\lambda$, where C_λ is an upper $\mathbb{Z}G$-hypercenter of A_λ (in other words, $C_\lambda = C \cap A_\lambda$) and E_λ is a maximal G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A_λ for every $\lambda \in \Lambda$. If submodule A_μ contains a submodule A_λ, then from

$$A_\lambda / (A_\lambda \cap E_\mu) \cong A_\lambda E_\mu / E_\mu \le A_\mu / E_\mu \cong C_\mu$$

we obtain that $A_\lambda \cap E_\mu$ is a maximal G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A_λ, that is $A_\lambda \cap E_\mu = E_\lambda$. Put $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. Then E is a G-invariant subgroup of A, which has the property $E \cap A_\lambda = E_\lambda$ for every $\lambda \in \Lambda$. By the construction of E, it is a G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A. Then, since

$$A_\lambda = C_\lambda \times E_\lambda = (C \cap A_\lambda) \times (E \cap A_\lambda),$$

we obtain the direct decomposition $A = C \times E$. In particular, E is a maximal G-hypereccentric $\mathbb{Z}G$-submodule of A. The proof of the second statement is the same to proof of the corresponding statement from **Corollary 3.3.15**. □

3.3.17. Corollary. *Let G be a group, A be a normal abelian p-subgroup of G, where p is a prime. Let g be an element of G such that $C_G(A) \neq gC_G(A) \in \zeta(G/C_G(A))$. If $F_p\langle g\rangle$-module $\Omega_1(A)$ is periodic, then A includes the G-invariant subgroups C and E such that $A = C \times E$, where C is an upper $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-hypercenter of A and E is a maximal $\langle g\rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-submodule of A.*

Proof. If g has infinite order and intersection $\langle g\rangle \cap C_G(A)$ is trivial, then by **Lemma 3.3.4** the normal closure $\langle a\rangle^{\langle g\rangle}$ is finite for every element a of A. If there exists a positive integer m such that $g^m \in C_G(A)$, then we can show that $\langle a\rangle^{\langle g\rangle}$ is finite. This means that every finitely generated $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-submodule A has finite composition series. Therefore, we can apply **Corollary 3.3.16**. From the fact that $gC_G(A)$ belongs to the centre of $G/C_G(A)$ follows that C is a $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-module of A. By **Corollary 3.3.16** each $\langle g\rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-submodule of A is contained in E, which shows that E is G-invariant. □

3.3.18. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian periodic subgroup of G and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g\rangle$-invariant. Then $[A, g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. If there exists a positive integer n such that $g^n \in C_G(A)$ (in particular, this is possible if g has finite order), then $\langle A, g^n\rangle$ is the central extension of subgroup A by cyclic group. In this case $\langle A, g^n\rangle$ is abelian and $\langle A, g\rangle$ is almost abelian. By **Theorem 3.2.10** $\langle A, g\rangle$ is a Chernikov subgroup, in particular $[g, A]$ is also Chernikov.

Thus, we can assume that the intersection $\langle g\rangle \cap C_G(A)$ is trivial. By **Lemma 3.3.3** and **Corollary 3.3.17** A includes the $\langle g\rangle$-invariant subgroups C

and E such that $A = C \times E$, where C is an upper $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-hypercenter of A and E is a maximal $\langle g\rangle$-hypereccentric $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-submodule of A. By **Corollary 3.3.9** E is a Chernikov subgroup. By **Corollary 3.3.12** $[g,C]$ is also Chernikov. Hence, it follows that $[g,A]$ is a Chernikov subgroup. □

3.3.19. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian subgroup of G and let g be an element of G, which does not belong to the centralizer $C_G(A)$. Suppose also that A is $\langle g\rangle$-invariant and $[T,g] = \langle 1\rangle$, where T is the periodic part of A. Then $[A,g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. If there exists a positive integer n such that $g^n \in C_G(A)$ (in particular, this is possible if g has finite order), then $\langle A, g^n\rangle$ is the central extension of A by cyclic group. In this case $\langle A, g^n\rangle$ is abelian and $\langle A, g\rangle$ is almost abelian. By **Theorem 3.2.10** the derived subgroup of $\langle A, g\rangle$ is Chernikov, in particular $[g,A]$ is also Chernikov.

Thus, we can assume that the intersection $\langle g\rangle \cap C_G(A)$ is trivial, in particular $\langle g\rangle \cap A$ is also trivial. If $A = T$, then the statement is trivially executed. Therefore, we can assume that A is non-periodic. The factor-group $\langle A, g\rangle / T$ is an extension of torsion-free abelian subgroup A/T by infinite cyclic group. Therefore, it is also torsion-free. By **Theorem 3.1.12** the factor-group $\langle A, g\rangle / T$ is abelian. This means that for every element a of A we have $a^g = ax$ for some element $x \in T$. Since x has finite order, $g^k \in C_G(a)$, where $k = |x|$. In other words, every element of A has in $H = \langle A, g\rangle$ only finite set of conjugations. By **Theorem 1.2.27** together with the fact that $\langle A, g\rangle / T$ is abelian we obtain that the normal closure $\langle a\rangle^H$ is a finite-by-(infinite cyclic) subgroup. In particular, there exists a positive integer t such that $\langle a^t\rangle$ is normal

in H. Suppose that element a_1 of A has infinite order and let t_1 be a positive integer such that $B_1 = \langle a_1^{t_1} \rangle$ is normal in H. If the factor-group A/B_1 has an element $a_2 B_1$ of infinite order, then we find again a positive integer t_2 such that $B_2/B_1 = \langle a_2^{t_2} B_1 \rangle$ is normal in H/B_1. Applying the same arguments and transfinite induction, we construct in subgroup A an H-invariant free abelian subgroup B such that the factor-group A/B is periodic. By **Corollary 3.3.18** the derived subgroup of H/B is Chernikov. Since B is torsion-free, $B \cap T = \langle 1 \rangle$. Applying the Remak's theorem, we obtain the embedding of H to the direct product $H/B \times H/T = L$. We have already noted that the factor-group H/T is abelian and the derived subgroup of H/B is Chernikov. Hence, it follows that the derived subgroup $[L,L]$ is also Chernikov. In this case $[H,H]$ and hence $[A,g]$ is a Chernikov subgroup. □

3.3.20. Theorem. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian subgroup of G and $g \in N_G(A) \setminus C_G(A)$. Then $[A,g]$ is a Chernikov subgroup.*

Proof. Denote the periodic part of A by T. Applying **Corollary 3.3.18**, we obtain that $B = [g,T]$ is a Chernikov subgroup. In the factor group A/B we have the inclusion $T/B \leq C_{A/B}(gB)$. By **Lemma 3.3.19** $[gB, A/B]$ is a Chernikov subgroup. Since B is Chernikov, $[A,g]$ is also Chernikov. □

3.4. On the structure of some groups, whose all subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup

In this section, we will continue the studying of groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. We will find here the description of the structure of some classes of almost solvable groups that have this property. We start with the following result.

3.4.1. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Let A be an abelian subgroup of G. If B is a subgroup of $N_G(A)$ such that $B \geq A$ and B/A is a finitely generated abelian group, then the derived subgroup of B is Chernikov.*

Proof. Since B/A is abelian and finitely generated, it includes a torsion-free subgroup C/A of finite index. We will prove that the derived subgroup of C is Chernikov. Then by **Theorem 3.2.10** the derived subgroup of B is Chernikov.

Since C/A is a torsion-free finitely generated abelian group, C/A is a torsion-free abelian group of finite rank, that is

$$C/A = \langle g_1 A \rangle \times \ldots \times \langle g_n A \rangle.$$

By **Theorem 3.3.20** $[g_j, A]$ are Chernikov subgroups for every j, $1 \leq j \leq n$. Then their product $D = [g_1, A] \cdot \ldots \cdot [g_n, A]$ is also Chernikov. In this case we can assume that D is trivial. This means that $[B, A]$ is also trivial. Denote the periodic part of A by T. Since A/T and B/A are torsion-free, B/T is also torsion-free. By **Theorem 3.1.12** it is abelian. In turn, it follows that $[g_j, B]$ are periodic subgroups for every j, $1 \leq j \leq n$. Since B is nilpotent and its class of nilpotency at most 2, we obtain the following isomorphism

$$[g_j, B] \cong B / C_B(g_j)$$

for every j, $1 \leq j \leq n$. Obviously, B is contained in every centralizer $C_B(g_j)$, which shows that the factor-group $B/C_B(g_j)$ is periodic. Since it is abelian and finitely generated, $B/C_B(g_j)$ is finite for every j, $1 \leq j \leq n$. Taking into account **Theorem 1.2.27**, we obtain that the normal closure $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle^B$ is finite-by-(free abelian group of finite rank). Note that the factor group B/P is a product of its central subgroup A/P and torsion-free abelian subgroup. Therefore, B/P is abelian, which implies that P includes $[B, B]$, and we obtain our result. □

3.4.2. Theorem. *Let G be a locally graded group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor group G/A is finitely generated. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. Since the factor-group G/A is finitely generated, G includes a finitely generated subgroup F such that $G = FA$. By **Corollary 3.1.15** F is almost abelian, and by **Theorem 3.1.12** the derived subgroup of F is finite. The isomorphism

$$G/A = FA/A \cong F/(F \cap A)$$

shows that the factor-group G/A has finite derived subgroup. In this case, G/A includes a finitely generated abelian subgroup L/A of finite index. We can assume that L is normal in G. By **Lemma 3.4.1** the derived subgroup $[L,L]$ is Chernikov. Applying **Theorem3.2.10**, we obtain that the derived subgroup of G is also Chernikov. □

3.4.3. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A is abelian and has no proper subgroups of finite index. Then the center of G contains its derived subgroup.*

Proof. Let $\mathfrak{L} = \{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ be a system of subgroups of G, each of which contains A, such that $\{L_\lambda / A \mid \lambda \in \Lambda\}$ is a local system of all finitely generated subgroups of the factor-group G/A. By **Theorem 3.2.10** the derived subgroup D_λ of L_λ is Chernikov for every $\lambda \in \Lambda$. Since L_λ / A is abelian, A includes D_λ, in particular D_λ, is abelian. Then D_λ has a system $\{D_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ of its finite G-invariant subgroups such that D_λ is generated by elements of this system. The centralizer of every subgroup D_{λ_n} has finite index in G. On the other hand, every such centralizer contains a subgroup A. Since the factor-group G/A has no proper subgroups of finite index, this centralizer must coincides with G. In other words, the center of G includes a subgroup D_{λ_n} for every positive integer

n. Since the subgroups D_{λ_n} generate D_λ, then the center of G includes a subgroup D_λ for every $\lambda \in \Lambda$. If $L_\lambda \le L_\mu$, then obviously $D_\lambda \le D_\mu$. Since the system $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ is local, the system $\{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ is also local. Therefore, the union $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ is a subgroup of G. As we have shown above, the center of G includes a subgroup D. Since G is generated by $L_\lambda, \lambda \in \Lambda$, the derived subgroup $[G,G]$ coincides with D. This means that $G/\zeta(G)$ is abelian. □

3.4.4. Lemma. *Let G be a periodic group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A is abelian and has no proper subgroups of finite index. Then G is abelian.*

Proof. By **Lemma 3.4.3** G is nilpotent and its class of nilpotency at most 2. Since it is periodic, we have a standard direct decomposition $G = Dr_{p \in \Pi(G)} S_p$, where S_p is a Sylow p-subgroup of G, $p \in \Pi(G)$. Each subgroup S_p is an extension of its normal abelian subgroup $S_p \cap A$ by abelian group $S_p/(S_p \cap A) \cong S_p A/A$. Put $Q = Dr_{q \ne p} S_q$, then $S_p \cong G/Q$, which shows that

$$S_p A/A \cong G/QA \cong (G/A)/(QA/A).$$

Thus, $S_p/(S_p \cap A)$ is isomorphic to some subgroup of G/A. This means that the factor-group $S_p/(S_p \cap A)$ has no proper subgroups of finite index. Since this factor-group is abelian, it is divisible. By **Proposition 1.2.5** the center of S_p contains a subgroup $S_p \cap A = A_p$. Since S_p/A_p is divisible and abelian, by **Theorem 1.2.28** it is a direct product of quasicyclic subgroups, and then S_p has an ascending series of subgroups

$$A_p = P_0 \le P_1 \le \ldots P_\alpha \le P_{\alpha+1} \le \ldots P_\gamma = S_p,$$

whose factors are quasicyclic. Consider a subgroup P_1. Since A_p its central subgroup and P_1/A_p is quasicyclic, P_1 is abelian. From the fact that S_p/A_p is abelian we obtain that P_1 is normal in S_p/A_p. From the above, P_1 is a central

subgroup of S_p. Using the above arguments, we can show that P_2 is abelian. Applying now a transfinite induction, we obtain that S_p is abelian. Since this is true for every prime p from $\Pi(G)$, G is Abelian. □

3.4.5. Corollary. *Let G be a periodic metabelian group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has no proper subgroups of finite index. Then it is abelian.*

3.4.6. Corollary. *Let G be a periodic solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has no proper subgroups of finite index. Then it is abelian.*

Proof. Suppose that G is non-abelian. Put $D=[G,G]$ and $K=[D,D]$. Then $G \neq D$ and $D \neq K$. The factor-group G/K is abelian. By **Corollary 3.4.5** it is abelian. In this case, the subgroup K contains D, and we obtain that $D=K$. This contradiction shows that G is abelian. □

3.4.7. Corollary. *Let G be a periodic almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has no proper subgroups of finite index. Then it is abelian.*

Proof. Indeed, since G has no proper subgroups of finite index, it is solvable, and we can apply **Corollary 3.4.6**. □

3.4.8. Theorem. *Let G be a periodic group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has a normal Kurosh-Chernikov system, whose factors are locally graded. If G has no proper subgroups of finite index, G is abelian.*

Proof. Indeed, by **Theorem 3.1.13** G is almost solvable, and we can apply **Corollary 3.4.7**. □

3.4.8. Corollary. *Let G be a periodic locally graded group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G has no proper subgroups of finite index, G is abelian.*

3.4.9. Corollary. *Let G be a locally finite group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. If G has no proper subgroups of finite index, G is abelian.*

3.4.10. Corollary. *Let G be a periodic almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A has no proper subgroups of finite index. Then G is abelian.*

Proof. By **Corollary 3.4.7** the factor-group G/A is abelian, and we can apply **Corollary 3.4.4**. □

3.4.11. Theorem. *Let G be a periodic almost solvable group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal subgroup A such that the factor group G/A has no proper subgroups of finite index. If the derived subgroup of A is Chernikov, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

Proof. Put $K=[A,A]$, then K is Chernikov. By **Corollary 3.4.10** G/K is abelian. This means that K is a derived subgroup of the whole group G. □

3.4.12. Corollary. *Let G be a periodic group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G contains a normal subgroup A such that the factor-group G/A is Chernikov. If the derived subgroup of A is Chernikov, then the derived subgroup of G is also Chernikov.*

Proof. Indeed, denote by D/A the divisible part of Chernikov factor-group G/A and put $K=[D,D]$. By **Theorem 3.4.11** K is a Chernikov subgroup. Since D has finite index in G, by **Theorem 3.2.10** the derived subgroup of G is Chernikov. □

Consider the following generalization of residually finite groups. Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. We will say that a group G is *residually-$\mathfrak{X}$-group* if for each non-trivial elements g there exists a normal subgroup H_g that does not contain this element and G/H_g belongs to $\mathfrak{X}$.

If $\mathfrak{X}$ is a class of Chernikov group, then we will say about residually Chernikov groups.

3.4.13. Theorem. *Let G be a periodic group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G is a residually Chernikov group. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. Since G is a residually Chernikov group, it has a system of normal subgroups $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, having the following properties: $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \langle 1\rangle$ and factor-group G/H_λ is Chernikov for every $\lambda \in \Lambda$.

If there exists an index $\mu \in \Lambda$, for which the derived subgroup $[H_\mu, H_\mu]$ is Chernikov, then by **Corollary 3.4.12** the derived subgroup of the whole group G is Chernikov. Thus, we can assume that every derived subgroup $[H_\lambda, H_\lambda]$ is not Chernikov for any $\lambda \in \Lambda$. By **Lemma 3.1.1** the factor-group G/H_λ is a Dedekind group for every $\lambda \in \Lambda$.

Suppose that G includes a normal subgroup U such that the factor-group G/U is a non-abelian Dedekind group. In this case $G/U = Q/U \times V/U$, where Q/U is a quaternion group and V/U is a direct product of an elementary abelian 2-subgroup and periodic abelian subgroup without elements of order 2 (**Theorem 1.2.15**). Consider a system of normal subgroups $\{V_\lambda = V \cap H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Since V has finite index in G, the factor-group G/V_λ (respectively V/V_λ) is Chernikov for every $\lambda \in \Lambda$. Suppose that there exists an index $\nu \in \Lambda$ such that the factor-group V/V_ν is non-abelian. Then V includes a normal subgroup Y such that the factor-group V/Y is quaternion group. Note that Y has a finite index in G. If the derived subgroup $[Y,Y]$ is Chernikov, then by **Theorem 3.2.10** the derived subgroup $[G,G]$ is also Chernikov, and all is proved. Therefore, suppose that that $[Y,Y]$ is not Chernikov. Then Y is normal in G and by **Lemma 3.1.1** the factor-group G/Y is Dedekind. On the other hand, the factors G/V and V/Y are isomorphic to quaternion group, and therefore G/Y can not be Dedekind. This contradiction shows that the factor-

group V/V_λ is abelian for every $\lambda \in \Lambda$. From the equality $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \langle 1\rangle$ we obtain that $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \langle 1\rangle$. By Remak's theorem we obtain that V is isomorphic to some subgroup of the product $Dr_{W\in\mathfrak{S}} V/V_\lambda$. Since each groups V/V_λ is abelian, the product $Dr_{W\in\mathfrak{S}} V/V_\lambda$ is an abelian group, and therefore its subgroup V is also abelian. By the choice of V it has finite index in G, and again applying **Theorem 3.2.10**, we obtain that the derived subgroup $[G,G]$ is Chernikov. □

3.4.14. Corollary. *Let G be a locally finite group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that the Sylow p-subgroups of G are Chernikov for every prime p. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. By **Theorem 1.2.29** G is an almost locally solvable group. By **Corollary 1.2.31** the factor-group $G/O_{p'}(G)$ is a Chernikov group for every prime p. Clearly, the intersection of all normal subgroups of $O_{p'}(G)$ is trivial (that is the intersection by all primes p). This means that G is residually Chernikov. By **Theorem 3.4.13** the derived subgroup of G is Chernikov. □

3.4.15. Corollary. *Let G be a locally finite group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has a finite section rank. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. Indeed, by **Theorem 1.2.32** for every prime p the Sylow p-subgroups of G are Chernikov, and we can apply **Corollary 3.4.14**. □

3.4.16. Corollary. *Let G be a locally finite group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G has a finite special rank. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

3.4.17. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that G/A is a quasicyclic p-group. If g is an element of G of infinite order, then $[g,G]$ is either a quasicyclic p-group or trivial.*

Proof. By **Lemma 3.4.3** the derived subgroup of G is contained in its center. It follows that the mapping $\theta_g : x \to [g,x], x \in G$ is an endomorphism of G. Moreover, $Ker\theta_g = C_G(g), \mathrm{Im}\theta_g = [g,G]$. Obviously, the centralizer $C_G(g)$ contains a subgroup A. Since G/A is either a quasicyclic p-group or trivial, from isomorphism $G/Ker\theta_g = G/C_G(g) \cong \mathrm{Im}\theta_g = [g,G]$ we obtain that $[g,G]$ is either a quasicyclic p-group or trivial. □

3.4.18. Corollary. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A is a divisible Chernikov group. If g is an element of G of infinite order, then $[g,G]$ is a Chernikov group.*

Proof. Since the factor-group G/A is a divisible Chernikov group, G has a finite series of subgroups

$$A = A_0 \le A_1 \le \ldots \le A_n = G,$$

whose factors A_{j+1}/A_j are quasicyclic, $0 \le j \le n-1$. We use induction by n. If $n = 1$, then the assertion follows from **Lemma 3.4.17** (note that the trivial group is Chernikov). Suppose that $n > 1$, and let it be already proven that $[g, A_{n-1}]$ is Chernikov. Consider the factor-group $G/[g, A_{n-1}]$. We must show that $[g[g, A_{n-1}], G/[g, A_{n-1}]]$ is a Chernikov subgroup. Since

$$[g,G]/[g, A_{n-1}] = [g[g, A_{n-1}], G/[g, A_{n-1}]]$$

and $[g, A_{n-1}]$ is a Chernikov subgroup, $[g,G]$ is also Chernikov. In this case we can assume that $[g, A_{n-1}]$ is trivial. In other words, we suppose that the center of A_{n-1} contains an element g. By **Lemma 3.4.3** the derived subgroup of G is contained in its center. This means that the mapping $\theta_g : x \to [g,x], x \in G$ is an endomorphism of G. By induction hypothesis the centralizer $C_G(g)$ contains a subgroup A_{n-1}. From the isomorphism $G/Ker\theta_g = G/C_G(g) \cong \mathrm{Im}\theta_g = [g,G]$ we obtain that that $[g,G]$ is either a quasicyclic p-group or trivial. □

3.4.19. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal periodic abelian subgroup A such that the factor-group G/A is abelian and minimax. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. Since G/A is abelian and minimax, it contains a torsion-free finitely generated subgroup C/A such that G/C is Chernikov. Denote the divisible part of G/C by D/C. We must show that the derived subgroup $[D,D]$ is Chernikov. By **Theorem 3.2.10** the derived subgroup G is Chernikov. Therefore, we can assume that G/C is a divisible Chernikov group.

By **Theorem 3.4.2** the derived subgroup $[C,C]$ is Chernikov. In this case we can assume that $[C,C]$ is trivial. In other words, suppose that C is abelian. Then A is a periodic part of C. By **Theorem 1.2.4** $C = A \times K$ for some subgroup K. Note that from the isomorphism $C/A \cong K$ we obtain that K is a torsion-free finitely generated subgroup, which shows that it is free abelian. Thus, K has a direct decomposition

$$K = \langle g_1 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle,$$

where g_j has infinite orders, $1 \leq j \leq n$. By **Lemma 3.4.3** the centre of G contains its derived subgroup. **Lemma 3.4.18** shows that $[g_j,G]$ is a Chernikov group for every j, $1 \leq j \leq n$. Put $L = [g_1,G] \cdot \ldots \cdot [g_n,G]$. Then L is a normal Chernikov subgroup of G. The factor-group KL/L is contained in the center of G/L, in particular it is normal. The factor-group $(G/L)/(KL/L) \cong G/KL$ is an extension of its periodic abelian subgroup $(CL/L)/(KL/L)$ by divisible Chernikov group G/CL, and then it is periodic. Applying **Lemma 3.4.4**, we obtain that $(G/L)/(KL/L)$ is abelian. The factor-group G/L is an extension of its periodic normal subgroup AL/L by abelian group G/AL. Denote the periodic part of G/AL by T/AL. Then T/L is a normal periodic subgroup and the factor-group $(G/L)/(T/L) \cong G/T$ is an abelian torsion-free group. Since $KL/L \cong K$ is torsion-free, the intersection $(T/L) \cap (KL/L)$ is trivial.

Applying the Remak's theorem, we obtain the embedding of G/L in the direct product $(G/L)/(KL/L)\times(G/L)/(T/L)$. As we have seen above, both direct multipliers of this product are abelian groups. It follows that G/L is also abelian. In turn, this means the derived subgroup of G is contained in L, and therefore coincides with L. Since L is Chernikov, all is proved. □

3.4.20. Lemma. *Let G be a group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal periodic abelian subgroup A such that the factor-group G/A is almost solvable and minimax. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. By **Theorem 3.1.12** the set T of all elements of finite order of G is a characteristic subgroup and the factor-group G/T is torsion-free and abelian. Since A is periodic, it contained in T. Note that the periodic almost solvable minimax group is Chernikov, and therefore T/A is Chernikov. By **Corollary 3.4.12** the derived subgroup $[T,T]$ is Chernikov. By **Lemma 3.4.19** the derived subgroup of $G/[T,T]$ is Chernikov. Finally, from

$$[G,G]/[T,T]=[G/[T,T],G/[T,T]]$$

we obtain that the derived subgroup of G is Chernikov. □

3.4.21. Theorem. *Let G be a locally graded group, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal periodic abelian subgroup A such that the factor-group G/A is minimax. Then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. By **Corollary 3.1.16** G is almost solvable, and therefore we can apply **Lemma 3.4.20**. □

Finally, consider one of the possible partial situations.

3.4.22. Theorem. *Let G be a periodic subgroup, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. Suppose that G includes a normal abelian subgroup A such that the factor-group G/A is also abelian. If $\Pi(A)\cap\Pi(G/A)=\varnothing$, then the derived subgroup of G is Chernikov.*

Proof. If the center of G contains a subgroup A, the G is nilpotent. In this case, it is a direct product of its Sylow $\Pi(A)$-subgroup and Sylow $\Pi(G/A)$-subgroups. In particular, it is abelian, and all is proved. Therefore, suppose that A is non-central. Then there exists an element $a_1 \in A$ and $g_1 \in G \setminus A$ such that $[a_1, g_1] \neq 1$. We can assume that $\Pi(\langle g_1 \rangle) \cap \Pi(G/A) = \varnothing$. Put $C_1 = C_A(g_1)$. Since the factor-group G/A is abelian, the mapping

$$\theta_1 : a \to [g_1, a], a \in A,$$

is a G-endomorphism of A. This means that $Ker\theta_1 = C_A(g_1)$ and $\mathrm{Im}\theta_1 = [g_1, A]$ are G-invariant subgroups of A. Since A has finite index in $\langle A, g_1 \rangle$, **Theorem 3.2.10** shows that the derived subgroup of $\langle A, g_1 \rangle$ is Chernikov. In particular, $[g_1, A]$ is also Chernikov. From the isomorphism

$$A/Ker\theta_1 = A/C_A(g_1) \cong \mathrm{Im}\theta_1 = [g_1, A]$$

we obtain that the factor-group $A/C_A(g_1)$ is Chernikov. Suppose that the centre of G contains a subgroup C_1. Consider the factor-group G/C_1. By **Theorem 1.2.32** A/C_1 has a complement, that is $G/C_1 = A/C_1 \leftthreetimes L/C_1$. Since $\Pi(A) \cap \Pi(G/A) = \varnothing$ and A/C_1 is an abelian Chernikov subgroup, the centralizer E/C_1 of A/C_1 has finite index in G/C_1. Note that $E/C_1 = A/C_1 \times K/C_1$. In particular, E/C_1 is abelian. Since $C_1 \leq \zeta(G)$, E is nilpotent, and hence abelian. Now it remains to apply **Theorem 3.2.10**.

Suppose that the center of G has no C_1. Then there exists an element $a_2 \in C_1$ and $x_2 \in G \setminus A$ such that $[a_2, x_2] \neq 1$. By **Theorem 1.2.32** $\langle g_1, x_2, A \rangle$ has a semidirect decomposition $\langle g_1, x_2, A \rangle = A \leftthreetimes S$, and all complements to A are conjugate. In particular, we can assume that S contains an element g_1. We have $x_2 = g_2 b$, where $g_2 \in S, b \in A$. Then $[a_2, x_2] = [a_2, g_2]$. Note that S is abelian, and therefore $S = \langle g_1, g_2 \rangle$. Note that S is a direct product of two cyclic subgroups, and therefore we can assume that $S = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$. By **Theorem 1.2.33** we obtain a direct decomposition

$$A = C_A(\langle g_1\rangle) \oplus [A, \langle g_1\rangle] = C_A(g_1) \oplus [A, \langle g_1\rangle] = C_1 + [A, \langle g_1\rangle].$$

Since $a_2 \in C_1$, $\langle g_1, a_1\rangle \cap \langle g_2, a_2\rangle = \langle 1\rangle$. Put $C_2 = C_A(\langle g_1, g_2\rangle)$. Repeating the above arguments, we obtain that the factor-group A/C_2 is Chernikov. If the center of G contains a subgroup C_2, then we can prove that the derived subgroup of G is Chernikov. Therefore, we can assume that C_2 is non-central. Then again we can find the elements g_3, a_3, etc. Applying the above arguments, we find the elements $g_1, ..., g_n, a_1, ..., a_n$ such that

(1) $\langle g_1, ..., g_n\rangle = \langle g_1\rangle \times ... \times \langle g_n\rangle$;

(2) $\Pi(\langle g_1, ..., g_n\rangle) \cap \Pi(A) = \varnothing$;

(3) $a_1, ..., a_n \in A$;

(4) $[a_j, g_j] \neq 1, 1 \leq j \leq n$;

(5) $\langle g_1, a_1, ..., g_{j-1}, a_{j-1}\rangle \cap \langle g_j, a_j\rangle = \langle 1\rangle$;

(6) $[g_j, a_k] = 1, k < j, 1 \leq j, k \leq n$.

If this process is finite, then as above we can prove that the derived subgroup of G is Chernikov. Therefore, we assume that this process is infinite. Consider an arbitrary element g_j. The set of positive integers $\{n \mid n > j\}$ split into two infinite subsets Λ and M having trivial intersection Let $U = \langle g_t, a_t \mid t \in \Lambda\rangle$, $V = \langle g_t, a_t \mid t \in M\rangle$. Both subgroups U and V are $\langle g_j\rangle$-invariant, $U \cap V = \langle 1\rangle$, derived subgroups $[U,U], [V,V]$ are not Chernikov and $\langle g_j\rangle \cap UV = \langle 1\rangle$. Then the derived subgroups of subgroups $\langle g_j\rangle U$ and $\langle g_j\rangle V$ are not Chernikov, and then these subgroups are normal. In this case their intersection $\langle g_j\rangle = \langle g_j\rangle U \cap \langle g_j\rangle V$ is normal. This means that $[a_j, g_j] \in \langle g_j\rangle$. On the other hand, since A is also normal, $[a_j, g_j] \in A$, which means that $[a_j, g_j] \in \langle g_j\rangle \cap A = \langle 1\rangle$. But this contradicts to the choice of elements a_j, g_j, and we obtain our result. □

REFERENCES

1. **Kurdachenko L.A., Semko N.N., Subbotin I.Ya.** *Insight into modules over Dedekind domains*. – Kiev: Institute of Mathematics, 2008. – 119 p.
2. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind.* Math. Annalen. – 1897.– **48**. – P. 548-561.
3. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe*. S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2**. – P. 12-17.
4. **Schmidt O.Yu.** *Groups having only one class on non-normal subgroups.* Mat. Sbornik, **33** (1926), P. 161-172
5. **Schmidt O.Yu.** *Groups with two classes on non-normal subgroups.* Proceeding of the Group Theory Seminar, 1938, P. 7-26.
6. **Chernikov S.N.** *Groups with prescribed properties of system of infinite subgroups*. Ukrainian Math. J. – **19**, №6 – 1967 – P. 111-131.
7. **Chernikov S.N.** *Infinite non-abelian groups with minimal condition for non-normal subgroups*. Math. Notes. –1967. – **6**, № 1. – P. 11-18.
8. **Romalis G.M., Sesekin N.F.** *On metahamiltonian groups I.* Matem. Zapiski Ural. University – **5** (1966), number 3, P. 45-49.
9. **Sesekin N.F., Romalis G.M.** *On metahamiltonian groups II.* Matem. Zapiski. Ural. University – **6** (1968), number 5, 50 – 53.
10. **Romalis G.M., Sesekin N.F.** *On metahamiltonian groups III.* Matem. Zapiski Ural. University – **7** (1970), number 3, P. 195-199.
11. **Nagrebetsky V.T.** *Finite non-nilpotent groups, whose non-abelian subgroups are invariant*. Matem. Zapiski Ural. University – 1967. – **6**, № 1. – P. 80-88.
12. **Makhnev A.A.** *On finite metahamiltonian groups*. Matem. Zapiski Ural. University – 1976. – **10**, № 1. – P. 60-75.
13. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of soluble non-nilpotent metahamiltonian groups*. Math. Notes – **34** (1983), number 2, P. 179-188.

14. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of soluble metahamiltonian groups*. Reports of Acad. Science of USSR, ser. A – **2** (1985), P. 6-9.

15. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *On structure of non-periodic metahamiltonian groups*. Izv. VUZ Mathematics – **11** (1986), P. 32-40.

16. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of non-periodic metabelian metahamiltonian groups with the non-elementary derived subgroup*. Ukrainian Math. J. – **39** (1987), no. 2, P. 180-185.

17. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *On structure of non-periodic non-abelian metahamiltonian groups with an elementary derived subgroup of rank* 3. Ukrainian Math. J – **41** (1989), no. 2, P. 170-176.

18. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *On metahamiltonian groups with an elementary derived subgroup of rank* 2. Ukrainian Math. J. – **42** (1990), number 2, P. 168-175.

19. **Semko M.M., Kuzennyi N.F.** *Structure of periodic metabelian metahamiltonian groups with an elementary derived subgroups of rank* 2. Ukrainian Math. J – **39** (1987), number 6, P. 743-750.

20. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** *The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes.* Advanced in Group Theory 2002. Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoli, May – June 2002. – Roma: Aracne. – P. 93-110.

21. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** *Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes.* Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – December 2004. – **104A**, №2. – P. 177-189.

22. **Brandl R.** *Groups with few non-normal subgroups*. Communications in Algebra. – 1995. – **23**, №6. – P. 2091-2098.

23. **Mousavi H.** *On finite groups with few non-normal subgroups.* Mathematical Communications in Algebra. – 1999. – **27**, №7. – P. 3143-3151.

24. **Hekster N.S., Lenstra H.W.** *Groups with finitely many non-normal subgroups*. Archiv Math. – 1990. – **54**. – P. 225-231.

25. **Chernikov S.M.** *Infinite non-abelian groups with minimal condition for non-invariant abelian subgroups*. Dokl. AS USSR. – 1969. – **184**. – P. 786-789.

26. **Chernikov S.M.** *Investigations of groups with given properties of subgroups*. Ukrainian Math. J. **21** (1969), number 2, P. 160-172.

27. **Chernikov S.M.** *Infinite non-abelian groups with normality condition for infinite non-abelian subgroups*. Doklady AN USSR – **194** (1970), P. 1280-1283.

28. **Chernikov S.M.** *Infinite non-abelian groups, whose infinite non-abelian subgroups are invariant*. Ukrainian Math. J. – 1971. – **23**, № 5. – P. 604-628.

29. **Chernikov S.M.** *Groups with invariant infinite abelian subgroups.* Groups with Restrictions on Subgroups. Naukova Dumka: Kiev, 1971. – P. 47-65.

30. **Chernikov S.M.** *Infinite non-abelian groups with the minimal condition on non-normal non-abelian subgroups*. Groups with Restrictions on Subgroups. Naukova Dumka: Kiev – 1971, P. 106-115.

31. **Kurdachenko L.A., Kuzennyi M.F., Semko M.M.** *Groups with some maximal conditions* // Dopov. AS URSR. Series A. – 1987. – № 1. – P. 9-11.

32. **Cutolo G.** *On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups*. Rivista Mat. Pura Applicata. 1991. – **91**. P. 49-59.

33. **Kurdachenko L.A., Goretsky V.E.** *Groups with weak minimal and maximal conditions for subgroups which are not normal*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1989. – V. 41. – №. 12. – P. 1474-1477.

34. **Liman F.M.** *Non-periodic groups with system of invariant subgroups.* Algebra and Logic – **7** (1968), number 4, P. 245-254.

35. **Liman F.M.** *Periodic groups, whose abelian non-cyclic subgroups are invariant*. Groups with Restrictions on Subgroups. Naukova Dumka: Kiev, 1971. – P. 65-95.

36. **Kurdachenko L.A., Pylayev V.V.** *On groups that are dual to Dedekind groups*. Rep. of Acad. Science of USSR, 1989, number 10, P. 21-22.

37. **Cutolo G., Kurdachenko L.A.** *Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups*. Geometriae Dedicata. – 1995. – **55**. – P. 279-292.

38. **Semko M.M.** *Groups with conditions of denseness of normality and its generalizations for some system of subgroups*. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1998. – 285 p.

39. **Semko M.M.** *On the structure of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups*. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997. – 90 p.

40. **Semko M.M.** *The structure of groups with generalized conditions of denseness of normality for subgroups*. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997. – 63 p.

41. **Semko M.M.** *Classes of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups*. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997. – 62 p.

42. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *On groups close to metacyclic groups*. Ukrainian Mathematical Journal – 1996. – V. 48, N 6. – P. 782-790.

43. **Semko M.M.** *The structure of locally graded DN[ ]-groups*. Integral transformations and their application to the boundary value problems. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1996. – V. 12. – P. 181-186.

44. **Semko M.M.** *On the structure of CDN[ ]-groups*. Integral transformations and their application to the boundary value problems. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1996. – V. 13. – P. 196-203.

45. **Semko M.M.** *The structure of nilpotent CDN[ ]-groups*. Classes of groups with restrictions for subgroups. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1997. – P. 27-41.

46. **Semko M.M.** *Structure of locally graded non-nilpotent CDN[ ]-groups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 6. – P. 883-893.

47. **Semko M.M.** *Non-nilpotent groups with generalized conditions of denseness of normality for subgroups*. Integral transformations and their application to the boundary value problems. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1997. – V. 15. – P. 175-187.

48. **Semko M.M.** *On groups with conditions of denseness of normality for subgroups*. Integral transformations and their application to the boundary value problems. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1997. – V. 16. – P. 255-263.

49. **Semko M.M.** *Structure of one class of groups with conditions of denseness of normality for subgroups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 8. – P. 1292-1295.

50. **Semko M.M.** *On the construction of CDN []-groups with elementary commutant of rank two*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 10. – P. 1570-1577.

51. **Semko M.M.** *The structure of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups*. Dop. NAS of Ukr. – 1997. – V. 9. – P. 49-53.

52. **Semko M.M.** *The structure of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups*. Dop. NAS of Ukr. – 1997. – V. 10. – P. 43-46.

53. **Semko M.M.** *On the structure of CDN []-groups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V. 50. – №. 9. – P. 1431-1441.

54. **Semko M.M.** *The structure of metacyclic and minimal non-metacyclic CDN[ ]-groups*. The boundary value problems for differential equations. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1998. – V. 1 (17). – P. 230-237.

55. **Semko M.M.** *Structure of locally graded CDN(]-groups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V. 50. – №. 11. – P. 1750-1754.

56. **Semko M.M.** *Structure of locally graded CDN[)-groups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1999. – V. 51. – №. 3. – P. 427-433.

57. **Kuzennyi N.F., Levishchenko S.S., Semko M.M.** *Groups with invariant infinite non-abelian subgroups*. Research methods of algebraic and topological structures. – Kyiv: KSPI, 1989. – P. 37-45.

58. **Kuzennyi N.F., Levishchenko S.S., Semko M.M.** *On groups with invariant infinite non-abelian subgroups*. Modern analysis and its applications. – Kyiv: Naukova Dumka, 1989. – P. 173-183.

59. **Semko M.M.** *Some types of non-abelian groups with a prescribed system of invariant infinite subgroups*. Constructive description of groups with given properties of subgroups. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1980. – P. 107-117.

60. **Semko M.M.** *Some non-abelian groups with a prescribed system of invariant infinite abelian subgroups*. Ukrainian Mathematical Journal. – 1981. – V. 33. – № 2. – P. 211-213.

61. **Semko M.M.** *Periodic non-abelian groups with a prescribed system of invariant infinite non-abelian subgroups*. Subgroup characterization of groups. – Kyiv: Institute of Math. of NAS of Ukraine, 1982. – P. 92-98.

62. **Semko M.M.** *Non-periodic non-abelian groups with a prescribed system of invariant infinite non-abelian subgroups*. Preprint 82.23. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1982, – 58 p.

63. **Semko M.M., Koval T.V.** *On groups with conditions of denseness of normality for non-cyclic subgroups*. Scientific notes of Drahomanov NPU. Series: Physics and Mathematics. – 2001. – V. 2. – P. 173-179.

64. **Semko M.M., Koval T.V.** *Locally graded groups with different conditions of generalized denseness of normality for non-cyclic subgroups*. Scientific notes of Drahomanov NPU. Series: Physics and Mathematics. – 2004. – № 5. – P. 195-201.

65. **Semko M.M., Kuzennyi M.F.** *The structure of nilpotent CDN( )-groups*. Classes of groups with restriction for subgroups. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1997. – P. 20-27.

66. **Semko M.M., Kuzennyi M.F.** *The structure of locally graded metahamiltonian CDN[ ]-groups*. Integral transformations and their application to the boundary value problems. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997. – V. 14. – P. 211-219.

67. **Kurdachenko L.A., Kuzennyi M.F., Semko M.M., Subbotin I.Ya.** *On some problems of theory of generalized solvable groups*. Bulletin of the Kiev University. Series Physics and Math. – 2007. – V. 3.– P. 32-44.

68. **Yarova O.A.** *On groups, whose all proper subgroups are close to abelian*. Bulletin of the Kiev University. Series Physics and Mathematics. – 2008. – V. 4. – C.36-39.

69. **Semko N.N., Yarova O.A.** *On some generalization of metahamiltonian groups*. Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – №2. – P. 16-24.

70. **Yarova O.A.** *On groups, whose all proper subgroups are close to abelian*. Dopov. NAS of Ukraine. – 2009. – №7. – P. 34-35.

71. **Yarova O.A.** *On groups close to metahamiltonian*. Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series Math. – 2009. – V. 14. – P. 143-149.

72. **Yarova O.A., Semko M.M.** *About groups close to Hamiltonian*. 7-th International Algebraic Conference in Ukraine. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2009. – P. 123-124.

73. **Yarova O.A., Semko M.M.** *On some generalization of metahamiltonian groups*. International conference "Discrete mathematics, algebra and their applications". – Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus, 2009. – P. 12-13.

74. **Yarova O.A., Semko M.M.** *Groups, whose non-normal subgroups close to abelian groups*. International scientific conference devoted to the 50thanniversary of the Department of Algebra and Mathematical Logic. – Kyiv: Kyiv National T. Shevchenko University, 2009. – P. 49 – 51.

75. **La Yaye R., Rhemtulla A.** *Groups with a bounded number of conjugacy classes of non-normal subgroups*. Journal of Algebra. – 1999. – **214**. – P. 41-63.

76. **De Falco M., de Giovanni F., Musella C.** *Groups with few conjugacy classes of non-normal subgroups*. Mathematica Slovaca. – 2008. – **58**. – P. 177-184.

77. **Gorchakov Yu.M.** *Groups with finite classes of conjugate elements*. – M.: Nauka, 1978. – 120 p.

78. **Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya.** *Artinian modules over group rings*. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.

79. **Fuchs L.** *Infinite abelian groups*. Academic Press: New York, 1970.

80. **Kurdachenko L.AA.** *Locally nilpotent groups with weak minimal condition for normal subgroups*. Siberian Mathematical Journal. – 1984. – **25**, №4. – P. 589-594.

81. **Doerk K., Hawkes T.** *Finite soluble groups*. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

82. **Kurosh A.G.** *Group theory*. – M.: Nauka, 1967. – 648 p.

83. **Shunkov V.P.** *On locally finite groups with minimal condition for abelian subgroups*. Algebra and Logic. – 1970. – **9**, № 5. – P. 579-615.

84. **Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F.** *Locally finite groups*. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.

85. **Shute G.** *Unions of Chevalley groups*. Abstracts Amer. Math. Soc. – 1982. – **3.** – P. 260.

86. **Otal J., Pena J.M.** *Infinite locally finite groups of type PSL(2,K) or Sz(K) are not minimal under certain conditions*. Communications Publicacions Matematiques. – 1988. – **32.** – P. 43-47.

87. **Segal D.** *Polycyclic groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. – 289 p.

88. **Hall P.** *Finiteness conditions for soluble group*. Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**. – P. 419-436.

89. **Tomkinson M.I.** *FC-groups*. Boston: Pitman, 1984. – 171 p.

90. **Belyaev V.V.** *Locally finite groups with Chernikov Sylow p-subgroups.* Algebra and Logic. – 1981. – **20**, №7. – P. 605-619.

91. **Kargapolov M.I.** *Locally finite groups, which have normal system with finite factors*. Siberian Mathematical Journal. – 1961. – **2**, № 6. – P. 853-873.

92. **Dixon M.R.** *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups*. – Singapore: World Scientific, 1994. – 304 p.

93. **Otal J., Pena J.M.** *Groups, in which every proper subgroups is Chernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Chernikov*. Archiv Math. – 1988. – **51.** – P. 193-197.

94. **Ol'shanskii A.Yu.** *Geometry of defining relations in groups*. Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht – 1991.

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

H^G – *нормальне замикання* підгрупи H у групі G, тобто нормальна підгрупа, породжена всіма спряженими з H підгрупами у групі G.

$\zeta(G)$ – *центр* групи G.

$\zeta_\alpha(G)$ – *член верхнього центрального ряду* групи G, що має порядковий номер α.

$\gamma_\alpha(G)$ – *член нижнього центрального ряду* групи G, що має порядковий номер α.

$[G,G]$ – *комутант* групи G.

$Aut(G)$ – *група автоморфізмів* групи G.

$C_H(M)=\{x\in H \mid xa=ax\ \forall\ a\in M\}$ – *централізатор* підмножини M у підгрупі H. Якщо H – нормальна підгрупа групи G, L – підгрупа, що містить H, то через $C_G(L/H)$ позначимо повний прообраз в G підгрупи $C_{G/H}(L/H)$.

Група G називається *напівпрямим добутком* своїх підгруп A і B, це буде позначатись $G=A\leftthreetimes B$, якщо підгрупа A є нормальною в G, $A\cap B=\langle 1\rangle$ та $G=AB$.

Група G називається *дедекіндовою*, якщо кожна її підгрупа є нормальною.

Будемо говорити, що група G задовольняє *умову максимальності* (відповідно, *мінімальності*), якщо G не має нескінчених зростаючих (відповідно, спадаючих) ланцюжків підгруп.

Група G називається *черніковською*, коли вона містить у собі нормальну підгрупу D скінченного індексу, що розкладається у прямий добуток скінченної множини квазіциклічних підгруп. Цю підгрупу D ми будемо називати *подільною частиною* черніковської групи G і позначати через $d(G)$.

Група G називається *поліциклічною*, якщо вона має скінченний нормальний ряд підгруп

$$\langle 1\rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G,$$

фактори G_{j+1} / G_j якого будуть циклічними групами, $0 \le j \le n-1$.

Група G називається *мінімаксною*, якщо вона має скінченний ряд нормальних підгруп, кожен фактор якого задовольняє умову мінімальності або умову максимальності для всіх підгруп.

Якщо група G буде мінімаксною та майже розв'язною, то вона має скінченний ряд нормальних підгруп, кожен фактор якого буде або черніковською групою або майже поліциклічною групою.

Група G називається *гіперцентральною*, якщо вона має верхній центральний ряд, що закінчується групою G (тобто група G співпадає з останнім членом верхнього центрального ряду).

Для довільного елемента $g \in G$ позначимо через g^G підмножину всіх елементів, які спряжені з g, тобто $g^G = \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$.

$FC(G) = \{g \in G \mid \text{клас } g^G - \text{скінченний}\}$.

Очевидно, $FC(G)$ – характеристична підгрупа групи G, її називають *FC-центром* групи G. Якщо $G = FC(G)$, то G називають FC-групою.

Нехай $\mathfrak{X}$ – клас груп. Будемо писати $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ у випадку, коли кожна підгрупа у будь-якій $\mathfrak{X}$-групі сама належить до класу $\mathfrak{X}$. Будемо писати $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$ у випадку, коли кожна фактор-група будь-якої $\mathfrak{X}$-групи сама належить до класу $\mathfrak{X}$. Будемо писати $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$ у випадку, коли кожна група, що є добутком скінченної множини нормальних $\mathfrak{X}$-підгруп, сама належить до класу $\mathfrak{X}$.

Якщо G – група, π – деяка множина простих чисел, то через $O_\pi(G)$ будемо позначати найбільшу нормальну π-підгрупу з G. Якщо p – просте, то через p' позначатимемо множину простих чисел, відмінних від p. Отже, $O_{p'}(G)$ – це найбільша нормальна підгрупа з G, яка не містить p-елементів.

Нехай $\mathfrak{X}$ – клас груп та G – група. Будемо говорити, що G є майже $\mathfrak{X}$-*групою*, якщо група G містить таку нормальну підгрупу H, що G/H є скінченною, а $H \in \mathfrak{X}$. Зокрема, майже абелева (відповідно, майже розв'язна) група – це група, яка містить у собі абелеву (відповідно, розв'язну) підгрупу скінченного індексу.

Нехай A – абелева група, p – просте число, P – силовська p-підгрупа A. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\Omega_n(P) = \{x \in P \mid |x| \le p^n\}$. Очевидно, $\Omega_n(P)$ – характеристична підгрупа A. Маємо

$$\Omega_1(P) \le \Omega_2(P) \le \ldots \le \Omega_n(P) \le \Omega_{n+1}(P) \le \ldots$$

і $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(P)$.

Група називається *локально скінченною*, якщо кожна її скінченна підмножина породжує скінченну підгрупу.

Група називається *обмеженою*, якщо порядки її елементів обмежені у сукупності.

Група називається *резидуально скінченною*, якщо для кожного її неодиничного елемента існує (нормальна) підгрупа скінченного індексу, що не містить цього елементу.

Нехай K – локально скінченне поле та θ – автоморфізм K, що задовольняє умову $\theta^2(a) = a^2$ для кожного $a \in K$. Лінійна група $Sz(K)$ – це підгрупа $SL_4(K)$, що породжується:

(i) підгрупою Q всіх матриць, що мають наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ (1+\theta)(a)+b & \theta(a) & 1 & 0 \\ (2+\theta)(a)+ab+\theta(b) & b & a & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } a,b \in K;$$

(ii) підгрупою D всіх діагональних матриць, головна діагональ яких має наступний вигляд

$$((1+\theta^{-1})(\alpha), \theta^{-1}(\alpha), -\theta^{-1}(\alpha), (-1-\theta^{-1})(\alpha)), \text{ де } \alpha \in U(K);$$

(iii) матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай p – просте число. Будемо говорити, що група G має *скінченний секційний p-ранг* $r_p(G) = r$, якщо кожна елементарна абелева p-секція U/V групи G буде скінченною і має порядок, що не перевищує p^r, та існує елементарна абелева p-секція A/B групи G, порядок якої точно дорівнює числу p^r.

Будемо говорити, що група G має *скінченний секційний ранг*, якщо вона має скінченний секційний p-ранг для кожного простого числа p.

Будемо говорити, що група G має *скінченний спеціальний ранг* $r(G) = r$, якщо кожна скінченно породжена підгрупа групи G може бути породжена не більше ніж r елементами і r – це найменше натуральне число, що має дану властивість.

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд нормальних підгруп, кожен фактор якого є або локально нільпотентною, або локально скінченною групою.

Нагадаємо тепер деякі необхідні поняття з теорії модулів. Нехай R – комутативне кільце та A – модуль над кільцем R. Покладемо

$$Tor_R(A) = \{a \in A \mid Ann_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Якщо кільце R не має дільників нуля, то підмножина $Tor_R(A)$ буде підмодулем в A. У цьому випадку підмодуль $Tor_R(A)$ будемо називати *R-періодичною частиною модуля A*. Модуль A називається *R-періодичним*, якщо він співпадає зі своєю R-періодичною частиною. Будемо говорити, що модуль A є *вільним від R-скруту*, якщо його R-періодична частина буде нульовою.

Нехай D – дедекіндова область. Покладемо

$$Spec(D) = \{P \mid P - \text{максимальний ідеал } D\}.$$

Якщо I – ідеал D, то нехай

$$A_I = \left\{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Неважко побачити, що підмножина A_I буде D-підмодулем A. Підмодуль A_I будемо називати *I-компонентою* A. Якщо A співпадає зі своєю I-компонентою, то будемо говорити, що A – це *I-модуль над кільцем* D.

Далі, нехай

$$\Omega_{I,n}(A) = \left\{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle\right\}.$$

Неважко упевнитись у тому, що підмножина $\Omega_{I,n}(A)$ також буде D-підмодулем, та що має місце включення $\Omega_{I,n}(A) \le \Omega_{I,n+1}(A)$ для кожного натурального n, так що $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Позначимо тепер через $Ass_D(A)$ підмножину тих максимальних ідеалів кільця D, для яких відповідна P-компонента A_P є ненульовою. Тоді

$$Tor_D(A) = \oplus_{P\in\pi} A_P, \text{ де } \pi = Ass_D(A)$$

(див., наприклад, [1, наслідок 3.8]).

Нехай D – дедекіндова область, C – простий D-модуль, тоді C є ізоморфним до D/P для деякого максимального ідеалу P кільця D. Позначимо D-ін'єктивну оболонку C через C_{p^∞}. Модуль C_{p^∞} будемо називати *прюферовим P-модулем*. Модуль C_{p^∞} буде ін'єктивною границею системи D-модулів $\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$C_{p^\infty} \cong liminj\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(див., наприклад, [1, наслідок 5.21]). За своєю побудовою, прюферовий модуль C_{p^∞} буде P-модулем, причому $\Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong D/P^k$ та мають місце ізоморфізми

$$\Omega_{P,k+1}(C_{p^\infty}) / \Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong (D/P^{k+1}) / (P/P^{k+1}) \cong D/P$$

для кожного натурального числа k. Таким чином, якщо E буде власним D-підмодулем C_{p^∞}, то знайдеться таке натуральне число k, що $E = \Omega_{P,k}(C_{p^\infty})$. Дійсно, якщо елемент b належить до $\Omega_{P,k}(C_{p^\infty})$, але не міститься в $\Omega_{P,k-1}(C_{p^\infty})$, то $E = bD$. Відмітимо, що прюферовий P-модуль C_{p^∞} є монолітичним і його моноліт співпадає з його нижнім шаром $\Omega_{P,1}(C_{p^\infty})$.

Нехай R – комутативне кільце без дільників нуля, x – його ненульовий елемент та A – модуль над кільцем R. Будемо говорити, що модуль A є *x-подільним,* якщо для кожного елемента a модуля A існує елемент c, що має властивість $cx = a$. Інакше кажучи, $Ax = A$.

Модуль A називається *R-подільним*, якщо він є *x-подільним* для кожного ненульового елемента x кільця R.

Нехай D – дедекіндова область та A – модуль над кільцем, x – елемент D. Підмодуль B модуля A будемо називати *x-сервантним*, якщо має місце рівність $Bx = B \cap Ax$.

Якщо L – ідеал D та підмодуль B буде x-сервантним в A для кожного елемента $x \in L$, то B називається *L-сервантним підмодулем*.

Нарешті, B будемо називати *сервантним підмодулем*, якщо B буде D-сервантним.

Нехай G – абелева група, H – її підгрупа та A – $\mathbb{Z}G$-модуль. Покладемо

$$\zeta_{\mathbb{Z}H}(A) = \{a \in A \mid ax = a \text{ для кожного } x \in H\}.$$

Неважко упевнитись в тому, що підмножина $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$ буде $\mathbb{Z}G$-підмодулем A. $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$ називається *H-центром A*. Починаючи з H-центру, ми можемо побудувати *верхній H-центральний ряд A*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots C_\gamma$$

за наступним правилом: $C_1 = \zeta_{\mathbb{Z}H}(A)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \zeta_{\mathbb{Z}H}(A/C_\alpha)$ для всіх порядкових чисел $\alpha < \gamma$, та $\zeta_{\mathbb{Z}H}(A/C_\gamma) = \langle 0 \rangle$. Останній член C_γ цього ряду називається *верхнім H-гіперцентром A.*

Нехай G – абелева група, H – її підгрупа та A – $\mathbb{Z}G$-модуль. Нехай далі B, C – $\mathbb{Z}G$-підмодулі A, причому $B \le C$. Фактор C/B називається *H-центральним* (відповідно, *H-екцентральним*), якщо $C_H(C/B) = H$ (відповідно, $C_H(C/B) \ne H$).

$\mathbb{Z}G$-підмодуль C будемо називати *H-гіперекцентральним*, якщо C має зростаючий ряд $\mathbb{Z}G$-підмодулів

$$\langle 0 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots C_\gamma = C,$$

що задовольняють наступні умови:

(1) $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ – простий $\mathbb{Z}G$-модуль;

(2) $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ – H-екцентральний фактор для кожного порядкового числа $\alpha < \gamma$.

ВСТУП

Вже більше ста років здійснюється інтенсивне дослідження впливу системи нормальних підгруп на будову всієї групи. Якщо G – група, то через $\mathcal{L}_{norm}(G)$ (відповідно, через $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$) будемо позначати систему усіх нормальних підгруп групи G (відповідно, систему всіх підгруп, що не є нормальними). Наявність великої кількості нормальних підгруп і близьких до них типів підгруп дуже сильно впливає на структуру групи. Якщо всі підгрупи групи є нормальними, то її будова була описана досить давно. Цей опис був отриманий для скінченних груп ще Р. Дедекіндом, а трохи згодом був розширений на довільні групи Р. Бером. Групи, всі підгрупи яких є нормальними, були пізніше названі дедекіндовими. Природним наступним етапом стало вивчення груп G, у яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ задовольняє деякому (часто досить сильному) обмеженню. Ця тематика починає інтенсивно розвиватися С.М. Черніковим та його школою, а також багатьма іншими відомими алгебраїстами, зокрема, Р. Бером, Б. Нейманом, Ф.М. Лиманом, М.Ф. Сесєкіним, Д. Робінсоном, Л.А. Курдаченком, М.Ф. Кузенним, М.М. Семком, А. Ремтуллою, С. Франціозі, Ф. де Жиованні, Х. Ленстрою.

Г.М. Ромаліс та М.Ф. Сесєкін почали вивчати групи, в яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається тільки з абелевих підгруп. Такі групи були названі ними *метагамільтоновими*. Природним продовженням цих досліджень є розгляд ситуації, коли підгрупи системи $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ належать до класу груп, що є природним розширенням класу абелевих груп. Так Л.А. Курдаченко, Х. Оталом, А. Руссо та Д. Вінченці вивчалися групи, у яких підгрупи системи $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ мають скінченний комутант або будуть FC-групами. Дана дисертаційна робота продовжує дослідження у цьому напрямку. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп зі скінченним комутантом будуть групи з черніковським комутантом. В даній роботі і проводиться вивчення груп, у яких кожна підгрупа є або нормальною, або має черніковський комутант.

Як ми зазначали вище, групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Нормальні підгрупи мають досить великий вплив на будову групи, тому у багатьох

випадках, коли їх досить багато, структура групи може бути детально вивчена. Образно кажучи, чим більше має група нормальних підгруп, тим ближче група до абелевої. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними (тобто система $\mathcal{L}_{norm}(G)$ містить усі підгрупи групи і відповідно система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є пустою), то вона або абелева, або є прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої 2-групи та періодичної групи без елементів порядку 2. Цей результат був отриманий для скінченних груп ще в роботі Р. Дедекінда [2], а потім був розширений на довільні групи у роботі Р. Бера [3]. Природним наступним етапом стало вивчення груп G, у яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ задовольняє деякому (часто досить сильному) обмеженню. Першими такими роботами були роботи О.Ю. Шмідта [4,5], що вже стали класичними. В них О.Ю. Шмідт вивчав скінченні групи, у яких усі підгрупи системи $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є спряженими або система підгруп $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Але систематичне вивчення груп, у яких система підгруп, що не є нормальними, задовольняє деяку досить сильну умову, починається зі статей С.М. Чернікова [6,7]. Як ми вже зазначали вище, в розвитку цієї тематики брало участь багато відомих алгебраїстів, які збагатили її багатьма глибокими і цікавими результатами. Однією з цікавих ділянок цієї тематики було вивчення груп, у яких кожна підгрупа, що не є нормальною, буде абелевою. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Їх вивчення почалося в роботах М.Ф. Сесєкіна та Г.М. Ромаліса [8-10]. Скінченні метагамільтонові групи вивчалися в роботах В.Т. Нагребецького [11] та А.А. Махньова [12]. Повний опис метагамільтонових груп було отримано у серії робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [13-19]. Клас абелевих груп має багато природних розширень. Одними з них є клас груп зі скінченним комутантом та більш широкий клас FC-груп. У статтях Л.А. Курдаченко, Х. Отала, А. Руссо та Д. Вінченці [20,21] вивчалися групи, у яких підгрупи системи $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ мають скінченний комутант або будуть FC-групами. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп зі скінченним комутантом будуть групи з черніковським комутантом. Дана робота присвячена розгляду груп, у яких кожна підгрупа є або нормальною, або має черніковський комутант.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі дається огляд літератури, присвяченої дослідженням, що пов'язані з результатами даної роботи. Наведемо короткий виклад відомих результатів, які використовуються в подальшому.

1.1. Огляд літератури

Якщо G – група, то через $\mathcal{L}_{norm}(G)$ (відповідно, через $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$) будемо позначати систему усіх нормальних підгруп групи G (відповідно, систему всіх підгруп, що не є нормальними). Групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Нормальні підгрупи мають досить великий вплив на будову групи, тому коли система $\mathcal{L}_{norm}(G)$ є достатньо великою (відповідно, система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є досить малою) досить часто структура групи може бути детально вивчена. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними (тобто система $\mathcal{L}_{norm}(G)$ містить усі підгрупи групи і відповідно система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є пустою), то вона або абелева, або є прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої 2-групи та періодичної групи без елементів порядку 2. Цей результат був отриманий для скінченних груп ще в роботі Р. Дедекінда [2], а потім був розширений на довільні групи у роботі Р. Бера [3]. Природним наступним етапом стало вивчення груп G, у яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ задовольняє деякому (часто досить сильному) обмеженню. Першими такими роботами були роботи О.Ю. Шмідта [4,5], що вже стали класичними. В них О.Ю. Шмідт вивчав скінченні групи, у яких усі підгрупи системи $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є спряженими або система підгруп

$\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Цікаво відмітити, що результати роботи О.Ю. Шмідта [4] були повторені значно пізніше Р. Брандлем [22], а результати роботи О.Ю. Шмідта [5] були повторені значно пізніше Х. Моусаві [23]. Але систематичне вивчення груп, у яких система підгруп, що не є нормальними, задовольняє деяку досить сильну умову, починається С.М. Черніковим. Він написав серію статей, у яких продемонстрував ефективність цього підходу. У першій роботі [6] цієї серії він розглянув нескінченні групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається лише зі скінченних підгруп. У роботі [7] він розглянув нескінченні групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ задовольняє умову мінімальності. У цьому зв'язку слід відмітити, що в 1990 р. Н. Хекстер та Х. Ленстра опублікували роботу [24], де розглянули групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є скінченною. Результати цієї роботи є простим наслідком результатів роботи [7]. У роботах [25-30] С.М. Черніковим були розглянуті деякі узагальнення результатів перших двох робіт. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [31] та у роботі Д. Кутоло [32] було розглянуто нескінченні групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ задовольняє умову максимальності. Ці результати були узагальнені у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького [33].

У відомих роботах Р. Бера та Д.І. Зайцева були введені дуже цікаві нові умови скінченності – слабкі умови максимальності та мінімальності для різних типів підгруп. Ці умови та пов'язані з ними результати виявились настільки цікавими та плідними, що породили велику серію робіт, у яких ці умови розглядались для різних типів підгруп. Ми не будемо розглядати тут всі аспекти досліджень, пов'язаних зі слабкими умовами максимальності і мінімальності для різних типів підгруп, а відмітимо один результат, пов'язаний з нашою тематикою.

Нехай $\mathfrak{M}$ – деяка система підгруп групи G. Будемо говорити, що $\mathfrak{M}$ задовольняє *слабку умову мінімальності* (відповідно, *максимальності*) або

група G задовольняє слабку умову мінімальності для $\mathfrak{M}$-підгруп чи коротше $Min-\infty-\mathfrak{M}$ (відповідно, максимальності для $\mathfrak{M}$-підгруп чи коротше $Max-\infty-\mathfrak{M}$), якщо G не має таких нескінченних спадаючих (відповідно, зростаючих) рядів $\{H_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ підгруп з системи $\mathfrak{M}$, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ (відповідно, $|H_{n+1} : H_n|$) нескінченні для кожного $n\in\mathbb{N}$. Якщо $\mathfrak{M}$ – множина всіх ненормальних підгруп, то маємо групи зі слабкою умовою мінімальності (відповідно, максимальності) для ненормальних підгруп. Вони вивчалися Л.А. Курдаченком та В.Е. Горецьким [33].

Ф.М. Лиман [34,35] розглянув групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається лише з циклічних підгруп. Якщо в групі всі циклічні підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Тому виникає питання про будову груп, всі нециклічні підгрупи яких нормальні, тобто система всіх ненормальних підгруп складається тільки з циклічних підгруп. Це питання було поставлено С.М. Черніковим [26]. Вказані вище роботи і були присвячені розв'язанню цього питання. Якщо в групі всі скінченно породжені підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Природно виникає питання про протилежну ситуацію: що можна сказати про групи, всі підгрупи яких, що не мають скінченної системи породжуючих елементів, нормальні. Групи такого роду розглядались у роботах Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [36] та Д. Кутоло і Л.А. Курдаченка [37]. Слід також відмітити серію статей М.Ф. Кузенного, М.М. Семка [38-67], М.М. Семка, О.А. Ярової [68-74], де були розглянуті групи з іншими природними обмеженнями на систему $\mathcal{L}_{norm}(G)$.

Природним продовженням робіт О.Ю. Шмідта [4,5] стала робота Р. ла Хайє та А. Ремтулли [75], де розглядались групи (як скінченні, так і нескінченні), у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ розпадається у досить малу кількість класів спряженості. У роботі М. де Фалько, Ф. де Жиованні та К. Мюзелли [76] були розглянуті нескінченні групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ є об'єднанням скінченного числа класів спряженості.

Г.М. Ромаліс та М.Ф. Сесєкін [8-10] почали вивчати групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається тільки з абелевих підгруп. Такі групи були названі ними *метагамільтоновими*. Вивчення скінченних метагамільтонових груп було продовжено у роботах В.Т. Нагребецького [11] та А.А. Махньова [12]. Та повний опис метагамільтонових груп був отриманий у серії робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [13-19].

Зазначимо, що клас абелевих груп має багато природних розширень. Одними з них є клас груп зі скінченним комутантом та більш широкий клас FC-груп. У статтях Л.А. Курдаченка, Х. Отала, А. Руссо та Д. Вінченці [20,21] вивчалися групи, у яких підгрупи, що не є нормальними, мають скінченний комутант або будуть FC-групами. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп зі скінченним комутантом будуть групи з черніковським комутантом. Дана дисертаційна робота присвячена розгляду груп, у яких кожна підгрупа є або нормальною, або має черніковський комутант.

1.2. Попередні теоретичні відомості

Наступні результати, що будуть потрібні, відносяться до теорії FC-груп. Перший результат, який ми будемо використовувати – це класична лема Діцмана (див., наприклад, [77, лема II.1.1]).

1.2.1. Лема. *Нехай G – група, M – скінченна підмножина її елементів. Припустимо, що кожний елемент множини M має скінченний порядок і скінченну кількість спряжених. Тоді нормальна підгрупа, породжена підмножиною M, буде скінченною.*

Наступний важливий результат цієї теорії – класична теорема І. Шура (див., наприклад, [77, теорема II.1.4]).

1.2.2. Теорема. *Нехай G – група, центр якої має скінченний індекс c. Тоді комутант $[G,G]$ також скінченний, більш того $[G,G]^c = \langle 1 \rangle$.*

Ця теорема має наступне узагальнення, яке також буде нам потрібне (див., наприклад, [78, теорема 3.9]).

1.2.3. Теорема. *Нехай G – група і припустимо, що її фактор-група по центру є черніковською. Тоді комутант $[G,G]$ також буде черніковською підгрупою.*

Нам також будуть потрібні деякі результати теорії абелевих груп. Перший з них – наступний (див., наприклад, [79, теорема 14.4]).

1.2.4. Теорема. *Нехай G – абелева група, що містить у собі підгрупу H, для якої фактор-група G/H є вільною абелевою. Тоді підгрупа H виділяється у групі G прямим множником, тобто $G = H \times K$ для деякої підгрупи K.*

1.2.5. Пропозиція [80]**.** *Нехай G – гіперцентральна група та нехай A – нормальна абелева p-підгрупа для деякого простого числа p. Якщо фактор-група $G/C_G(A)$ не має власних підгруп індексу p, то центр групи G містить у собі підгрупу A.*

Наступний результат є одним з перших важливих результатів теорії скінченних груп (див., наприклад, [81, теорема A.10.7]).

1.2.6. Пропозиція. *Нехай G – скінченна група. Якщо кожна власна її підгрупа буде абелевою, то група G є розв'язною.*

Нехай G – група. Система $\mathfrak{S}$ її підгруп називається *системою Куроша-Чернікова*, якщо вона задовольняє наступні умови:

(i) впорядкована за включенням множина $\mathfrak{S}$ лінійно впорядкована;

(ii) $G, \langle 1 \rangle \in \mathfrak{S}$;

(iii) $\mathfrak{S}$ є замкненою відносно перетинів та об'єднань своїх підгруп, зокрема разом з кожною своєю підгрупою $H \neq G$ вона містить перетин H^{Λ} усіх тих підгруп системи $\mathfrak{S}$, які містять H та не співпадають з H, а також разом з кожною своєю неодиничною підгрупою K вона містить об'єднання K^{V} тих підгруп системи $\mathfrak{S}$, які містяться в K та не співпадають з K;

(iv) якщо $H \in \mathfrak{S}$ та $H \neq G$, то H є нормальною в H^{Λ}.

Фактор-групи H^{Λ} / H називаються *факторами* системи $\mathfrak{S}$. Система $\mathfrak{S}$ називається *нормальною*, якщо кожен її член є нормальною підгрупою усієї групи G.

1.2.7. Теорема [82, § 58]. *Якщо G – локально розв'язна група, то вона має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть абелевими.*

Також потрібними будуть деякі результати теорії локально скінченних груп. Перший результат, що вже став класичним, це наступна

1.2.8. Теорема [83]. *Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G задовольняє умову мінімальності, то G черніковська. Зокрема, локально скінченна група з умовою мінімальності є черніковською.*

З теореми 4.8 книги [84] та існування класифікації скінченних простих груп випливає наступне твердження.

1.2.9. Теорема. *Нехай G – локально скінченна проста група. Припустимо, що силовські p-підгрупи G розв'язні для кожного простого числа p. Тоді G не може бути скінченновимірною лінійною групою.*

1.2.10. Теорема [85]. *Нехай G – нескінченна локально скінченна проста група. Припустимо, що силовські p-підгрупи G будуть розв'язними для кожного простого числа p. Якщо G не є скінченновимірною лінійною групою, то вона містить у собі таку підгрупу Y, що центральна фактор-група $Y / \zeta(Y)$ є ізоморфною або до $PSL_2(K)$, або до $Sz(K)$ для деякого нескінченного локально скінченного поля K.*

1.2.11. Теорема [86]. *Нехай G – група, кожна власна підгрупа якої є розширенням черніковської підгрупи за допомогою нільпотентної групи. Тоді група G не може бути ізоморфною до груп $PSL_2(K)$ або $Sz(K)$ для будь-якого нескінченного локально скінченного поля K.*

Наступний класичний результат є відомим.

1.2.12. Теорема. *Якщо G – скінченно породжена група, то кожна її підгрупа, що має скінченний індекс, також буде скінченно породженою.*

1.2.13. Теорема (див, наприклад, [87, глава 1, теорема 1]). *Якщо G – майже поліциклічна група, то вона буде резидуально скінченною.*

1.2.14. Теорема (див, наприклад, [88, теорема 3]). *Якщо G – скінченно породжена метабелева група, то вона задовольняє умову максимальності для нормальних підгруп.*

1.2.15. Теорема [2, 3]. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої нормальна. Якщо вона не є абелевою, то G буде прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої 2-групи та періодичної абелевої групи без елементів порядку 2.*

1.2.16. Теорема (див, наприклад, [89, теорема 7.4]). *Нехай група G є об'єднанням скінченної множини абелевих підгруп. Тоді її центр має скінченний індекс.*

1.2.17. Теорема (див, наприклад, [89, теорема 1.6]). *Нехай G – FC-група. Якщо вона є вільною від скруту, то вона буде абелевою.*

1.2.18. Теорема (див, наприклад, [89, теорема 1.6]). *Нехай G – FC-група. Множина всіх її елементів, що мають скінченний порядок, є її характеристичною підгрупою.*

1.2.19. Теорема (див, наприклад, [78, наслідок 5.12]). *Нехай G – скінченна група. Припустимо, що A – $\mathbb{Z}G$-модуль та B – його $\mathbb{Z}G$-підмодуль. Якщо адитивна група модуля A є скінченно породженою, то існує такий $\mathbb{Z}G$-підмодуль E, що перетин $B \cap E$ та фактор-група $A/(B \cap E)$ будуть скінченними.*

1.2.20. Теорема (див, наприклад, [78, наслідок 5.15]). *Нехай G – скінченна група, F – поле та A – FG-модуль. Припустимо, що або $char(F) = 0$, або $char(F)$ не ділить порядок групи G. Тоді A буде напівпростим FG-модулем.*

1.2.21. Теорема (див, наприклад, [1, пропозиція 7.11]). *Нехай D – дедекіндова область, P – максимальний ідеал кільця D та A – P-модуль над D. Модуль A буде артиновим тоді й тільки тоді, коли артиновим буде його нижній шар $\Omega_{P,1}(A)$.*

1.2.22. Теорема (див, наприклад, [1, пропозиція 7.11]). *Нехай D – дедекіндова область та A – модуль над D. Модуль A буде артиновим тоді й тільки тоді, коли*

$$A = a_1 D \oplus \ldots \oplus a_n D \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k,$$

де C_j – прюферовий P_j-підмодуль, $P_j \in Spec(D)$, $1 \le j \le k$, та $Ann_D(a_j) = P_j^{m_j}$, $P_j \in Spec(D)$, $1 \le j \le n$.

1.2.23. Теорема (див, наприклад, [1, теорема 5.26]). *Нехай D – дедекіндова область та A – модуль над D. Якщо A є періодичним та подільним, то A буде розкладатися у пряму суму прюферових підмодулів.*

1.2.24. Теорема (див, наприклад, [1, наслідок 6.5]). *Нехай D – дедекіндова область та A – модуль над D. Якщо $Ann_D(A)$ є ненульовим, то A буде розкладатися у пряму суму циклічних підмодулів.*

1.2.25. Теорема (див, наприклад, [1, теорема 9.15]). *Нехай D – дедекіндова область та A – P-модуль над D для деякого максимального ідеалу P. Тоді A містить у собі такий D-сервантний підмодуль B, що B розкладається у пряму суму циклічних підмодулів, а фактор-модуль A/B буде D-подільним.*

1.2.26. Теорема (див, наприклад, [1, теорема 8.11]). *Нехай D – дедекіндова область та A – модуль над D. Якщо B – сервантний D-підмодуль A, для якого $Ann_D(A)$ є ненульовим, то A буде розкладатися у пряму суму $A = B \oplus C$ для деякого D-підмодуля C.*

1.2.27. Теорема [80, лема 1]. *Нехай G – група, a – її елемент, що має скінченну множину спряжених. Тоді нормальне замикання $\langle a \rangle^G$ буде або скінченним, або розширенням скінченної підгрупи за допомогою вільної від скруту скінченно породженої абелевої групи.*

1.2.28. Теорема (див., наприклад, [79, теорема 23.1]). *Нехай G – періодична подільна абелева група. Тоді вона розкладається у прямий добуток квазіциклічних підгруп.*

1.2.29. Теорема [90]. *Нехай G – локально скінченна група. Припустимо, що силовські p-підгрупи G є черніковськими для кожного простого числа p. Тоді група G буде майже локально розв'язною.*

1.2.30. Теорема [91]. *Нехай G – періодична локально розв'язна група. Припустимо, що силовські p-підгрупи G є черніковськими для деякого простого числа p. Тоді фактор-група $G/O_{p'}(G)$ буде черніковською групою.*

1.2.31. Наслідок. *Нехай G – періодична майже локально розв'язна група. Припустимо, що силовські p-підгрупи G є черніковськими для деякого простого числа p. Тоді фактор-група $G/O_{p'}(G)$ буде черніковською групою.*

1.2.32. Теорема (див., наприклад, [92, теорема 2.4.5]). *Нехай G – локально скінченна група та C – її нормальна черніковська підгрупа. Якщо $\Pi(C)\cap\Pi(G/C)=\varnothing$, то підгрупа C має доповнення і всі ці доповнення спряжені у групі G.*

1.2.33. Теорема (див, наприклад, [78, пропозиція 5.19]). *Нехай G – скінченна група, A – $\mathbb{Z}G$-модуль, адитивна група якого є періодичною. Припустимо, що $\Pi(A)\cap\Pi(G)=\varnothing$. Тоді $A=C_A(G)\oplus[A,G]$.*

РОЗДІЛ 2
ГРУПИ, ВЛАСНІ ПІДГРУПИ ЯКИХ МАЮТЬ ЧЕРНІКОВСЬКИЙ КОМУТАНТ

Нехай G – група, у якої система $\mathcal{L}_{non\text{-}norm}(G)$ складається з підгруп, що мають черніковський комутант. Тут можливі дві крайні діаметрально протилежні ситуації: (а) система $\mathcal{L}_{non\text{-}norm}(G)$ є пустою; та (б) система $\mathcal{L}_{non\text{-}norm}(G)$ складається з усіх власних підгруп групи G. У першому випадку всі підгрупи групи G є нормальними, і структура такої групи давно відома. У другому випадку всі власні підгрупи групи G мають черніковські комутанти, і цей випадок потребує спеціального дослідження. Це важливий перший етап у дослідженні груп, всі підгрупи яких або нормальні, або мають черніковський комутант.

2.1. Попередні результати

Ми почнемо з наступного невеликого узагальнення леми Діцмана.

2.1.1. Лема. *Нехай G – група та F – її скінченна підгрупа. Якщо множина підгруп, спряжених з F, є скінченною, то нормальне замикання F^G підгрупи F також буде скінченним.*

Доведення. Оскільки F має скінченну множину спряжених підгруп, то її нормалізатор $N_G(F)$ має скінченний індекс у групі G. Тоді F буде нормальною скінченною підгрупою в $H = N_G(F)$. Звідси випливає, що централізатор $C_H(x)$ має в підгрупі H скінченний індекс для будь-якого елемента $x \in F$. Оскільки індекс $|G:H|$ є скінченним, то таким же скінченним буде і індекс $|G:C_G(x)|$ для будь-якого елемента x підгрупи F. Застосувавши **лему 1.2.1**, отримаємо той факт, що нормальне замикання $\langle x \rangle^G$ буде скінченним для кожного елемента $x \in F$. Оскільки F є

скінченною, то її нормальне замикання породжується скінченною множиною підгруп $\langle x \rangle^G$, кожна з яких є скінченною. Звідси і випливає скінченність F^G. □

2.1.2. Пропозиція. *Нехай G – група та H – її підгрупа. Далі, нехай $\mathfrak{X}$ – клас груп, що задовольняє наступні умови:*

(*а*) $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$,

(*б*) $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$,

(*в*) *кожне розширення довільної $\mathfrak{X}$-групи за допомогою скінченної групи належить до класу $\mathfrak{X}$.*

Якщо H належить до класу $\mathfrak{X}$ та множина підгруп, спряжених з H, є скінченною, то нормальне замикання H^G підгрупи H також належить до класу $\mathfrak{X}$.

Доведення. Оскільки H має скінченну множину спряжених підгруп, то її нормалізатор $N_G(H)$ має скінченний індекс у групі G. Нехай $\{H_0 = H, H_1, ..., H_n\}$ – множина всіх підгруп, спряжених з H у групі G. Тоді і кожний нормалізатор $L_j = N_G(H_j)$ буде мати в групі G скінченний індекс, $0 \le j \le n$. Слід відмітити, що якщо $H_j = x^{-1}Hx$, то і

$$L_j = N_G(H_j) = N_G(H^x) = N_G(H)^x, 0 \le j \le n,$$

так що множина $\{L_0, L_1, ..., L_n\}$ буде точно класом спряжених підгруп. З того факту, що індекси $|G : L_j|$ є скінченними, $0 \le j \le n$, отримаємо, що і перетин $K = \bigcap_{0 \le j \le n} L_j$ мусить мати в групі G скінченний індекс. Також слід зазначити, що підгрупа K уже буде нормальною в групі G. Включення $K \le N_G(H_j)$ забезпечує рівність $H_j^y = H_j$ для кожного елемента y з підгрупи K та кожного $0 \le j \le n$. Покладемо $T_j = H_j \cap K$, тоді будемо мати

$$T_j^y = (H_j \cap K)^y = H_j^y \cap K^y = H_j \cap K = T_j$$

для кожного елемента y з K та кожного $0 \le j \le n$. Інакше кажучи, підгрупа

T_j буде нормальною в K при кожному $0 \le j \le n$. З рівності $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ отримаємо включення $T_j \in \mathfrak{X}$, $0 \le j \le n$. За нашими умовами $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$, а це тягне за собою той факт, що добуток $T_1 \cdot ... \cdot T_n$ повинен належати до класу $\mathfrak{X}$. Є очевидним той факт, що підмножина $\{T_0, T_1, ..., T_n\}$ утворює клас спряжених підгруп. А це означає, що їх добуток $T = T_1 \cdot ... \cdot T_n$ буде нормальною в G підгрупою.

Маємо тепер ізоморфізм $HT/T \cong H/(H \cap T)$. Далі маємо також включення $T_0 = H \cap K \le H$ та $T_0 \le T$, так що $T_0 \le H \cap T$. З того факту, що K – нормальна в G підгрупа, отримаємо що перетин $H \cap K$ буде нормальною в H підгрупою. Ізоморфізм $H/(H \cap K) \cong HK/K$ разом зі скінченністю фактор-групи G/K показує, що перетин $H \cap K$ має скінченний індекс в H. Оскільки $H \cap K$ міститься в $H \cap T$, то перетин $H \cap T$ має скінченний індекс в H, а оскільки $HT/T \cong H/(H \cap T)$, то це доводить скінченність HT/T. Таким чином, HT/T є скінченною підгрупою фактор-групи G/T, яка має скінченну множину спряжених підгруп. З **леми 2.1.1** отримаємо, що її нормальне замикання $(HT/T)^{G/T} = H^G T/T$ буде скінченною підгрупою. Зазначимо той очевидний факт, що підгрупа T міститься в H^G, так що отримаємо рівність $H^G T = H^G$. Нарешті, скінченність H^G/T та включення $T \in \mathfrak{X}$ разом з умовами цього твердження показують, що H^G належить до класу $\mathfrak{X}$. □

2.1.3. Наслідок. *Нехай G – група та H – її черніковська підгрупа. Якщо множина підгруп, спряжених з H, є скінченною, то її нормальне замикання H^G також буде черніковською підгрупою.*

Очевидно, що клас черніковських груп задовольняє всім умовам **пропозиції 2.1.2.**

2.1.4. Лема. *Нехай G – розв'язна група. Якщо G містить у собі власні підгрупи скінченного індексу і кожна власна підгрупа групи G має черніковський комутант, то $[G,G]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки G є розв'язною, то вона містить у собі таку нормальну підгрупу L, що фактор-група G/L буде скінченною циклічною p-групою для деякого простого числа p. Позначимо через gL породжуючий елемент цієї фактор-групи, тобто $G/L=\langle gL\rangle$. Припустимо спочатку, що елемент g має скінченний порядок. За нашими умовами G/L буде p-групою, тому ми можемо вважати, що g є p-елементом. З вибору L випливає, що її комутант $[L,L]$ буде черніковською підгрупою. Нашою найближчою метою буде показати, що комутант фактор-групи $G/[L,L]$ буде черніковською підгрупою. Застосувавши рівності

$$[G/[L,L],G/[L,L]]=[G,G][L,L]/[L,L]=[G,G]/[L,L],$$

отримаємо тоді, що і $[G,G]$ є черніковською підгрупою. Оскільки всі наступні аргументи будуть застосовуватись до фактор-групи $G/[L,L]$, то, щоб не робити позначень дуже громіздкими, простіше припустити, що підгрупа L має одиничний комутант, тобто є абелевою. Як ми побачимо з подальшого, це не обмежить загальності наших міркувань. З того факту, що L є абелевою зразу випливає, що перетин $S=\langle g\rangle\cap L$ буде нормальною підгрупою усієї групи G. Оскільки вона є скінченною, то буде достатнім довести, що комутант фактор-групи G/S буде черніковською підгрупою. Як це було раніше, щоб не ускладнювати позначень, можемо вважати підгрупу S одиничною. Припустимо, що L містить у собі власні підгрупи скінченного індексу. З того факту, що фактор-група G/L є скінченною, отримаємо тоді, що L містить у собі власну G-інваріантну підгрупу K. Якщо припустити тепер, що G співпадає з добутком підгруп K та $\langle g\rangle$, то отримаємо рівність $L=K\left(L\cap\langle g\rangle\right)=K$, яка приводить до протиріччя з вибором підгрупи K. Отримане протиріччя показує, що добуток $E=K\langle g\rangle$ буде власною підгрупою в G. Це вже тягне за собою той факт, що комутант D підгрупи $K\langle g\rangle$ буде черніковською підгрупою. Оскільки фактор-група G/L є абелевою, то підгрупа L містить у собі комутант $[G,G]$, а значить

отримуємо включення $D \le [G,G] \le L$. Той факт, що фактор-група E/D буде абелевою, тягне за собою рівність $\langle 1 \rangle = [gD, KD/D]$. З іншого боку, підгрупа L також є абелевою, так що взаємний комутант $[L/D, KD/D]$ буде одиничним. Прийнявши до уваги той факт, що група G є добутком підгруп $\langle g \rangle$ та L, отримаємо включення $KD/D \le \zeta(G/D)$. Скінченність фактор-груп G/L та L/K тягне за собою скінченність фактор-групи $(G/D)/(KD/D)$. Інакше кажучи, центр фактор-групи G/D має скінченний індекс. У цьому випадку її комутант $U/D = [G/D, G/D]$ буде скінченною підгрупою за класичною теоремою І. Шура (**теорема 1.2.2**). Але тоді підгрупа U буде черніковською, а отже, і комутант $[G,G]$ також буде черніковською підгрупою.

Тепер необхідно розглянути випадок, коли підгрупа L не містить у собі власних підгруп, що мають в ній скінченний індекс. Оскільки L є абелевою, то вибираємо в ній таку вільну абелеву підгрупу Y, що фактор-група L/Y уже буде періодичною, а у випадку, коли L є періодичною, будемо вважати підгрупу Y одиничною. З **теореми 1.2.28** отримуємо, що L/Y буде прямим добутком квазіциклічних підгруп. Звідси отримуємо, що L містить у собі таку підгрупу V, що L/V – квазіциклічна p-група для деякого простого числа p. Скінченність фактор-групи G/L тягне за собою скінченність множини $\{V^x \mid x \in G\}$. Покладемо

$$\{V^x \mid x \in G\} = \{V_1 = V, V_2, \ldots, V_n\} \text{ та } W = \bigcap_{1 \le j \le n} V_j .$$

Для довільного елемента x групи G будемо мати ізоморфізм $L/V^x = L^x/V^x \cong L/V$, який показує, що фактор-група L/V^x також буде квазіциклічною p-групою. Застосувавши теорему Ремака, отримаємо наступне вкладання

$$L/W \hookrightarrow L/V_1 \times \ldots \times L/V_n ,$$

яке, у свою чергу, свідчить про те, що фактор-група L/W буде черніковською. Слід зазначити, що підгрупа W є G-інваріантною, а

добуток $W\langle g\rangle$ буде власною підгрупою G. Це тягне за собою той факт, що комутант Y підгрупи $W\langle g\rangle$ буде черніковською підгрупою. Застосувавши наведені вище аргументи, ми можемо довести, що має місце включення $WY/Y \le \zeta(G/Y)$. Скінченність фактор-групи G/L і той факт, що L/W є черніковською, дає можливість тепер довести, що фактор-група $(G/Y)/\zeta(G/Y)$ буде черніковською. У цьому випадку комутант $Z/Y=[G/Y,G/Y]$ буде черніковською підгрупою за **теоремою 1.2.3**. Згадаємо, що підгрупа Z є черніковською, а значить і комутант $[G,G]$ також буде черніковською підгрупою.

Припустимо тепер, що елемент g має нескінченний порядок. Як це вже було раніше, ми можемо припустити, що підгрупа L є абелевою. Це припущення тягне за собою той факт, що перетин $S=\langle g\rangle \cap L$ буде вже підгрупою, що нормальна в усій групі G. В фактор-групі G/S образ gS елемента g вже має скінченний порядок, і з розглянутого вище випливає, що комутант G/S буде черніковською підгрупою. Позначимо через T періодичну частину абелевої підгрупи L. Зазначимо, що T буде G-інваріантною підгрупою. Розглянемо фактор-групу G/T.

Нехай $T \ne bT$ – довільний елемент L/T, і покладемо $B/T=\langle bT\rangle^{G/T}=\langle bT\rangle^{\langle gT\rangle}$. Якщо $\langle gT,B/T\rangle$ – власна підгрупа G/T, то її комутант буде черніковською підгрупою. З іншого боку, комутант підгрупи $\langle gT,B/T\rangle$ міститься в B/T, а тому буде вільною від скруту підгрупою. Звідси випливає, що комутант підгрупи $\langle gT,B/T\rangle$ буде одиничним, тобто елементи gT та bT будуть переставними. Припустимо тепер, що $G/T=\langle gT,B/T\rangle$. Тоді має місце рівність $(B/T)\big(L/T\cap\langle gT\rangle\big)=L/T$. Очевидним є включення $L/T\cap\langle gT\rangle \le C_{B/T}(gT)$, яке свідчить про те, що $C_{B/T}(gT)$ є неодиничною підгрупою. Якщо $B/T=C_{B/T}(gT)$, то знову отримуємо, що елементи gT та

bT будуть переставними. Тому залишилось розглянути випадок, коли $B/T \neq C_{B/T}(gT) = C/T$. Оскільки взяття кореня у вільній від скруту абелевій групі є однозначним, то C/T буде сервантною підгрупою B/T. З того факту, що фактор-група G/L є скінченною, випливає, що B/T буде скінченно породженою абелевою підгрупою, а тому B/C є вільною абелевою групою скінченного рангу. Але тоді підгрупа C/T виділяється прямим множником, тобто має місце прямий розклад $B/T = C/T \times R/T$ для деякої підгрупи R/T (див. **теорему 1.2.4**). Маємо тепер $\langle gT \rangle \cap R/T = \langle 1 \rangle$, зокрема, $\langle gT, R/T \rangle$ буде власною підгрупою фактор-групи G/T. Як ми вже бачили раніше, у цьому випадку підгрупа $\langle gT, R/T \rangle$ є абелевою, а тому має місце включення $R/T \leq C_{B/T}(gT) = C/T$. Отримана суперечність показує, що $B/T = C_{B/T}(gT)$. Таким чином, у кожному з випадків фактор-група G/T буде абелевою.

Оскільки підгрупа T є періодичною, то перетин $T \cap S$ буде одиничним. Застосувавши тепер теорему Ремака, отримаємо, що група G буде ізоморфною до деякої підгрупи декартового добутку $G/T \times G/S$. З того факту, що фактор-група G/T є абелевою, а комутант фактор-групи G/S є черніковською підгрупою, отримаємо тепер, що і комутант групи G буде черніковською підгрупою. □

2.1.5. Лема. *Нехай G – розв'язна група і припустимо, що вона не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. Якщо кожна власна підгрупа групи G має черніковський комутант, то $[G,G]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки група G є розв'язною, то вона містить у собі таку нормальну підгрупу B, що відповідна фактор-група G/B буде абелевою. Слід відмітити тепер, що абелева група, яка не має власних підгруп скінченного індексу, буде подільною. Таким чином, фактор-група G/B буде подільною абелевою. Далі зазначимо, що кожна подільна абелева група має квазіциклічну фактор-групу. Таким чином, G містить у

собі таку нормальну підгрупу L, що фактор-група G/L буде квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p. У цьому випадку існує такий зростаючий ланцюжок підгруп

$$L = L_0 \le L_1 \le \ldots \le L_n \le L_{n+1} \le \ldots G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n,$$

що кожний фактор L_{n+1}/L_0 буде циклічною групою порядку p^n при $n \ge 0$. Нехай $L_{n+1}/L_0 = \langle g_{n+1}L_0 \rangle$, $n \ge 0$. З того факту, що L є власною підгрупою випливає, що її комутант $[L,L]$ буде черніковською підгрупою. Покажемо, що фактор-група $G/[L,L]$ має черніковський комутант. Як це було при доведенні попередньої леми, не обмежуючи загальності наших міркувань, можна припустити, що підгрупа $[L,L]$ буде одиничною. Інакше кажучи, ми можемо вважати підгрупу L абелевою. Оскільки і фактор-група G/L є абелевою, то для будь-якого елемента x групи G взаємний комутант $[x,A]$ буде підгрупою, нормальною в усій групі G. Дійсно, якщо y – довільний елемент групи G, то має місце рівність $x^y = xb$ для деякого елемента b з підгрупи L. Врахувавши той факт, що L є абелевою підгрупою, для довільного елемента $a \in L$ будемо мати рівність

$$[x,a]^y = [x^y, a^y] = [xb, a^y] = [x,a^y]^b [b,a^y] = [x,a^y].$$

З того факту, що L_n є власною підгрупою, випливає, що її комутант буде черніковською підгрупою. Зокрема, взаємний комутант $[g_n, L]$ буде черніковською підгрупою для будь-якого $n \ge 0$. Виберемо довільні елементи $x, y \in G, a \in L$. Знову з урахуванням того, що L – абелева підгрупа, маємо

$$[xy,a] = [x,a]^y [y,a] = [x,a^y][y,a] \in [x,A][y,A].$$

Зокрема, $[x^k, A] \in [x,A]$, а тому $\left[\langle x\rangle, A\right] = [x,A]$. Звідси випливають наступні співвідношення

$$[g_n, L] = \left[\langle g_n\rangle, L\right] \le \left[\langle g_{n+1}\rangle, L\right] = [g_{n+1}, L].$$

Таким чином, отримуємо наступну зростаючу послідовність

$$[g_1,L]\le[g_2,L]\le\ldots\le[g_n,L]\le[g_{n+1},L]\le\ldots$$

G-інваріантних черніковських підгруп L. Якщо F є скінченною G-інваріантною підгрупою L, то фактор-група $G/C_G(F)$ буде скінченною. За нашими умовами G не містить у собі власних підгруп, що мають скінченний індекс, і це приводить нас до рівності $G=C_G(F)$, яка показує, що $F\le\zeta(G)$. Нехай тепер C – черніковська G-інваріантна підгрупа L. Оскільки C є абелевою, то вона буде об'єднанням своїх скінченних G-інваріантних підгруп. З доведеного вище випливає наступне включення $C\le\zeta(G)$. Зокрема, центр $\zeta(G)$ містить у собі $[g_n,L]$ для кожного $n\ge0$. Покладемо $K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[g_n,L]$, тоді $K\le\zeta(G)$ і завдячуючи вибору підгрупи K, фактор-група L_n/K буде абелевою групою для кожного $n\ge0$. Враховуючи тепер рівність $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}L_n$, отримаємо, що і вся фактор-група G/L буде абелевою. Таким чином, група G є нільпотентною і її клас нільпотентності не перевищує 2.

Припустимо спочатку, що G буде періодичною групою. Тоді маємо стандартний прямий розклад $G=Dr_{p\in\Pi(G)}G_p$, де G_p – силовська p-підгрупа G. Якщо припустити, що множина $\Pi(G)$ містить не менш ніж два простих числа, то група G буде прямим добутком двох своїх власних підгруп, а в цьому випадку її комутант буде черніковською підгрупою. Припустимо тепер, що $\Pi(G)=\{p\}$ для деякого простого числа p. Застосувавши **пропозицію 1.2.5**, отримаємо включення $L\le\zeta(G)$. Прийнявши тепер до уваги той факт, що G/L – локально циклічна група, отримаємо, що група G буде абелевою.

Залишилось розглянути випадок, коли група G не буде періодичною. Оскільки вона є нільпотентною, то множина T всіх її елементів, що мають скінченний порядок, буде характеристичною підгрупою. Фактор-група G/T вже є вільною від скруту, а тому група G має таку нормальну

підгрупу S, що G/S буде вільною від скруту подільною абелевою групою. У свою чергу, це приводить до існування такої нормальної підгрупи R, що $G/R = U/R \times V/R$, де U/R та V/R є квазіциклічними групами. Зокрема, група G буде добутком двох своїх власних нормальних підгруп U, V, перетин яких дорівнює підгрупі R. З того факту, що U, V – власні підгрупи, випливає що їх комутанти будуть черніковськими підгрупами. Покладемо $D = [U,U][V,V]$. Тепер вже фактор-група G/D буде добутком двох своїх нормальних абелевих підгруп UD/D та VD/D. Тому центр групи G/D містить їх перетин E/D, а оскільки є очевидним включення $RD/D \le E/D$, то фактор-група $(G/D)/\zeta(G/D)$ є черніковською. Але тоді комутант $[G/D, G/D]$ буде черніковською підгрупою за **теоремою 1.2.3**. Оскільки D є добутком двох нормальних черніковських підгруп, то підгрупа D є черніковською, а отже, і комутант $[G,G]$ також буде черніковською підгрупою. □

З **лем 2.1.4** та **2.1.5** безпосередньо випливає

2.1.6. Наслідок. *Нехай G – розв'язна група. Якщо кожна власна підгрупа групи G має черніковський комутант, то комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

2.1.7. Пропозиція. *Нехай G – майже розв'язна група. Якщо кожна власна підгрупа групи G має черніковський комутант, то комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки G – майже розв'язна, то вона має найбільшу нормальну розв'язну підгрупу S (розв'язний радикал групи G). Якщо має місце рівність $S = G$, то з **наслідку 2.1.6** отримаємо, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. Тому припустимо, що S буде власною підгрупою в G. Нехай L/S – довільна власна підгрупа фактор-групи G/S. Тоді L буде власною підгрупою G, а тому її комутант $[L,L]$ буде черніковською підгрупою. Скінченність індексу $|G:L|$ і той факт, що комутант $[L,L]$ є нормальною підгрупою в L, випливає, що індекс

$|G:N_G([L,L])|$ буде скінченним. Інакше кажучи, підгрупа $[L,L]$ має в групі G скінченну множину спряжених. З **наслідку 2.1.3** отримаємо, що нормальне замкнення $[L,L]^G$ буде черніковською підгрупою. Позначимо через $\mathfrak{M}$ систему усіх власних підгруп фактор-групи G/S. Оскільки G/S є скінченною, то ця система також буде скінченною. У цьому випадку скінченною буде і система $\mathfrak{D}=\{[L,L]\,|\,L\geq S, L/S\in\mathfrak{M}\}$. Покладемо $C=\left\langle [L,L]^G\,|\,[L,L]\in\mathfrak{D}\right\rangle$. З доведеного вище випливає, що нормальне замикання кожної підгрупи з системи $\mathfrak{D}$ є черніковською підгрупою, тому з того факту, що система $\mathfrak{D}$ є скінченною, отримаємо, що підгрупа C буде черніковською. Далі, $[S,S]\in\mathfrak{D}$, тому $[S,S]\leq C$, а значить, $[S,S]\leq S\cap C$. Врахувавши ізоморфізм $SC/C\cong S/(S\cap C)$, отримаємо тепер, що SC/C є абелевою. Зокрема, якщо $G=CS$, то все доведено. Тому припустимо, що CS є власною підгрупою групи G. Якщо L/SC – власна підгрупа фактор-групи G/SC, то L/S буде власною підгрупою в G/S. Звідси випливає включення $[L,L]\leq C$, яке показує зокрема, що L/SC – абелева підгрупа G/SC. Таким чином, кожна власна підгрупа G/SC буде абелевою. Але тоді фактор-група G/SC буле розв'язною (див. **пропозицію 1.2.6**). Отже, G/C буде розв'язною групою. Знову використавши **наслідок 2.1.6**, будемо мати, що комутант K/C фактор-групи G/C буде черніковською підгрупою. З того факту, що C – черніковська підгрупа, випливає, що і підгрупа K буде черніковською. З очевидного включення $[G,G]\leq K$ отримаємо, що $[G,G]$ буде черніковською підгрупою. □

2.1.8. Пропозиція. *Нехай G – локально розв'язна група. Якщо кожна власна підгрупа групи G має черніковський комутант, то комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. **Теорема 1.2.7** показує, що група G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть абелевими. Якщо група G містить у собі власну підгрупу скінченного індексу, то вона містить у собі

власну нормальну підгрупу скінченного індексу. Оскільки комутант будь-якої власної підгрупи є черніковською підгрупою, то група G є розв'язною, і тому можна використати **наслідок 2.1.6.** Тому будемо вважати, що група G не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. Якщо F є скінченною нормальною підгрупою G, то фактор-група $G/C_G(F)$ буде також скінченною. Наше припущення приводить тепер до рівності $G=C_G(F)$, яке означає, що центр $\zeta(G)$ містить у собі підгрупу F. Нехай тепер C – черніковська нормальна підгрупа G. Позначимо через D її подільну частину. Оскільки D є абелевою, то вона буде об'єднанням своїх скінченних G-інваріантних підгруп, і з доведеного вище випливає включення $D\le\zeta(G)$. В фактор-групі $G/\zeta(G)$ підгрупа $C\zeta(G)/\zeta(G)$ буде вже скінченною та нормальною, і знову застосувавши наведені вище аргументи, отримаємо включення $C\zeta(G)/\zeta(G)\le\zeta(G/\zeta(G))$. Інакше кажучи, другий гіперцентр $\zeta_2(G)$ групи G містить у собі кожну нормальну черніковську підгрупу. Позначимо тепер через K об'єднання усіх власних підгруп з системи $\mathfrak{S}$. Оскільки $\mathfrak{S}$ є лінійно впорядкованою, то K буде нормальною підгрупою групи G. Якщо $K\ne G$, то із властивостей системи $\mathfrak{S}$ випливає, що фактор-група G/K буде абелевою. Тепер, прийнявши до уваги ту обставину, що $[K,K]$ є черніковською підгрупою, отримаємо, що група G буде розв'язною, а тоді залишається використати **наслідок 2.1.6**. Тому припустимо, що $K=G$. Очевидно, включення $U\le V$ тягне за собою включення $[U,U]\le[V,V]$, а тому система

$$\mathfrak{M}=\{[U,U]\,|\,U\in\mathfrak{S},U\ne G\}$$

також буде лінійно впорядкованою за теоретико-множинним включенням. Звідси випливає, що об'єднання M всіх підгруп системи $\mathfrak{M}$ буде нормальною підгрупою групи G. Для кожної підгрупи U, що належить до системи $\mathfrak{M}$, її комутант $[U,U]$ буде черніковською підгрупою. З доведеного вище отримаємо включення $[U,U]\le\zeta_2(G)$. Інакше кажучи, для кожної підгрупи U, що належить до системи $\mathfrak{M}$, фактор-група

$U\zeta_2(G)/\zeta_2(G)$ буде абелевою. Але тоді фактор-група $G/\zeta_2(G)$ буде об'єднанням лінійно впорядкованої системи, що складається з абелевих підгруп. Тому $G/\zeta_2(G)$ буде абелевою. Це доводить той факт, що група G є нільпотентною. Знову нам залишилось використати **наслідок 2.1.6**.

2.2. Структура груп, всі власні підгрупи яких мають черніковські комутанти

Наша мета тут – з'ясувати будову груп, що належать до досить широкого класу груп і мають власні підгрупи з черніковським комутантом.

2.2.1. Означення. *Група G називається локально ступінчатою, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.*

Клас локально ступінчатих груп є дуже широким, він містить у собі класи всіх локально скінченних груп, локально майже розв'язних груп, локально резидуально скінченних груп.

Наступний результат є відомим, але, оскільки ми не змогли знайти відповідного посилання, то наведемо його тут з доведенням.

2.2.2. Пропозиція. *Нехай G – локально ступінчата група. Якщо G задовольняє умову мінімальності, то G є черніковською групою.*

Доведення. Слід зазначити спочатку, що кожна група, яка задовольняє умову мінімальності, буде періодичною. Таким чином, група G є періодичною. Позначимо через F довільну скінченно породжену підгрупу групи G. Припустимо, що вона може бути нескінченною. Оскільки F є скінченно породженою, то вона містить у собі власну підгрупу F_1 скінченного індексу. Скінченність індексу $|F:F_1|$ тягне за собою той факт, що підгрупа F_1 також буде скінченно породженою. Тому, у свою чергу, F_1 містить у собі власну підгрупу F_2 скінченного індексу. Розмірковуючи подібним чином, ми побудуємо строго спадаючий

ланцюжок підгруп, що суперечить нашій умові. Отримане протиріччя доводить той факт, що підгрупа F мусить бути скінченною. Таким чином, G локально скінченна. Нарешті, локально скінченна група, що задовольняє умову мінімальності, буде черніковською (див. **теорему 1.2.8**). □

2.2.3. Лема. *Нехай G – локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Якщо її комутант $[G,G]$ не буде черніковською групою, то група G є зчисленною.*

Доведення. Припустимо, що $[G,G]$ не є черніковською підгрупою. З **пропозиції 2.2.2** отримуємо, що вона не задовольняє умову мінімальності. Але тоді комутант $[G,G]$ має строго спадаючу систему підгруп

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots.$$

Виберемо елементи $x_1 \in H_1 \setminus H_2, x_2 \in H_2 \setminus H_3, \ldots, x_n \in H_n \setminus H_{n-1}, \ldots$. Покладемо тепер $X_n = \langle x_j \mid j \geq n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Ці підгрупи також утворять строго спадаючу систему $X_1 > X_2 > \ldots > X_n > \ldots$. Це означає, що підгрупа $X = X_1$ не може бути черніковською. Оскільки кожний елемент x_j належить до комутанта $[G,G]$, то знайдеться така скінченна підмножина M_j, що $x_j \in [T_j, T_j]$, де $T_j = \langle M_j \rangle$, $j \in \mathbb{N}$. Покладемо $T = \langle M_j \mid j \in \mathbb{N} \rangle$. Тоді T буде зчисленною підгрупою та $x_j \in [T,T]$ для кожного натурального номеру j. Інакше кажучи, комутант $[T,T]$ містить у собі підгрупу X. Звідси випливає, що $[T,T]$ не може бути черніковською підгрупою. Це означає, що T не може бути власною підгрупою. Отже, $T = G$, а тому G буде зчисленною. □

2.2.4. Лема. *Нехай G – нескінченна група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Припустимо, що G має таку систему власних підгруп*

$$\langle 1 \rangle = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \ldots,$$

що $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$. Тоді $[G,G]$ – черніковська підгрупа.

Доведення. Позначимо комутант $[G_n,G_n]$ через D_n для кожного натурального номера n. Оскільки D_n є черніковською підгрупою, то D_n має максимальну нормальну подільну черніковську підгрупу K_n, $n\in\mathbb{N}$. З включення $G_n\le G_{n+1}$ отримуємо, очевидно, включення $K_n\le K_{n+1}$, що має місце для кожного натурального номера n. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що об'єднання $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n=K$ буде підгрупою групи G. Очевидно, ця підгрупа буде періодичною абелевою, а також вона буде подільною. Якщо $G=K$, то G абелева, і все доведено. Тому припустимо, що K буде власною підгрупою. У цьому випадку вона буде подільною та черніковською. Всі наступні міркування ми будемо проводити у фактор-групі G/K. Тому, щоб не вводити нових позначень, будемо вважати підгрупу K одиничною. Як це буде видно з наступного доведення, це не вплине на загальність наших міркувань.

Наше припущення тягне за собою той факт, що підгрупа D_n буде скінченною для кожного натурального числа n. З включення $G_n\le G_{n+1}$ випливає, очевидно, що має місце включення $D_n\le D_{n+1}$ для кожного натурального числа n. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n=D$ буде підгрупою групи G. Очевидно ця підгрупа є локально скінченною. Якщо $G\ne D$, то D буде черніковською нормальною підгрупою, фактор-група за якою буде абелевою, і все доведено. Тому припустимо, що $G=D$. Інакше кажучи, група G буде зчисленною та локально скінченною. Якщо G містить у собі власну підгрупу скінченного індексу, то наше твердження випливає з **пропозиції 2.1.7.**

Припустимо, що G – проста група. Нехай p – просте число та P – силовська p-підгрупа G. Якщо $P=G$, то G – локально скінченна p-група. Зокрема, група G буде локально розв'язною. Тоді з **пропозиції 2.1.8** випливає, що група G має черніковський комутант. Отже, ми можемо припустити, що G не є p-групою. У цьому випадку кожна силовська p-

підгрупа буде власною, а тому має черніковський комутант. Зокрема, вона розв'язна. З **теореми 1.2.9** випливає тоді, що група G не може бути лінійною. У цьому випадку **теорема 1.2.10** показує, що група G містить у собі таку підгрупу Y, що її центральна фактор-група $Y/\zeta(Y)$ є ізоморфною до $PSL_2(K)$ або до $Sz(K)$ для деякого нескінченного локально скінченного поля K. Однак, це суперечить **теоремі 1.2.11**. Отримана суперечність показує, що група G не може бути простою.

Отже, G містить у собі власну неодиничну нормальну підгрупу A_1. Фактор-група G/A_1 знову буде нескінченною і не простою, а тому містить у собі власну неодиничну нормальну підгрупу A_2/A_1, і т.д. Повторюючи ті ж самі аргументи, отримаємо, що група G має зростаючий ряд нормальних підгруп

$$\langle 1\rangle < A_1 < A_2 < \ldots < A_\alpha < A_{\alpha+1} < \ldots A_\gamma = G,$$

де γ – це зчисленне граничне порядкове число. Комутант D_α кожної з нормальних підгруп A_α є черніковською підгрупою. Позначимо через K_α подільну частину черніковської підгрупи D_α. Слід зазначити, що в групі, яка не має власних підгруп скінченного індексу, кожна скінченна нормальна підгрупа міститься в її центрі. Оскільки підгрупа K_α породжується, очевидно, скінченними G-інваріантними підгрупами, а група G не має власних підгруп скінченного індексу, то для кожного порядкового числа $\alpha < \gamma$ має місце включення $K_\alpha \le \zeta(G)$. Фактор-група D_α/K_α буде скінченною, тому знову маємо $D_\alpha/K_\alpha \le \zeta(G/K_\alpha)$ для кожного $\alpha < \gamma$. Це свідчить про той факт, що другий член верхнього центрального ряду групи G містить у собі комутант $[G,G]$. Зокрема, група G буде нільпотентною. Нарешті, Залишається тепер застосувати **наслідок 1.2.6.** □

Тепер ми вже можемо отримати основний результат цього розділу.

2.2.5. Теорема. *Нехай G – група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Якщо G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими, тоді її комутант $[G,G]$ є черніковською підгрупою.*

Доведення. Припустимо, що G містить у собі таку власну нормальну підгрупу H, що фактор-група $K = G/H$ буде локально ступінчатою групою. Якщо K є скінченно породженою, то вона містить у собі власну підгрупу W скінченного індексу. У цьому випадку W має черніковський комутант, а тому група K буде майже розв'язною, так що ми можемо використати **пропозицію 2.1.7**. Якщо ж K не має скінченної системи породжуючих елементів, то вона буде об'єднанням зчисленної зростаючої послідовності своїх власних підгруп, і ми можемо використати **лему 2.2.4**. В цих випадках G/H має черніковський комутант. Зокрема, фактор-група G/H буде майже розв'язною. Оскільки H – власна підгрупа, то вона також має черніковський комутант, і отже буде майже розв'язною. Звідси випливає, що і вся група буде майже розв'язною, так що можна знову застосувати **пропозицію 2.1.7** і отримати, що G має черніковський комутант.

Припустимо тепер, що G не містить у собі власних нормальних підгруп, що фактор-групи за якими будуть локально ступінчатими. Зокрема, група G не містить у собі власних підгруп, що мають скінченний індекс. Нехай $\mathfrak{S}$ – нормальна система Куроша-Чернікова групи G, фактори якої є локально ступінчаті. З доведеного вище отримуємо, що система $\mathfrak{S}$ не має максимальних елементів. Інакше кажучи, для довільної підгрупи L системи $\mathfrak{S}$ у цій ж системі $\mathfrak{S}$ існує така підгрупа R, що L буде власною підгрупою в R. Оскільки L є власною підгрупою в G, то вона має черніковський комутант $[L,L]$. З того факту, що підгрупа L міститься в R, випливає відповідне включення для їх комутантів: $[L,L] \le [R,R]$. Тому система підгруп $\{[L,L] \mid L \in \mathfrak{S}\}$, як і система $\mathfrak{S}$, буде лінійно

впорядкованою. Рівність $G = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L$ тягне за собою той факт, що об'єднання $Q = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} [L,L]$ буде нормальною підгрупою, яка містить у собі комутант групи G. Позначимо через $d([L,L])$ подільну частину черніковської підгрупи $[L,L]$. Оскільки L є підгрупою в R, то для подільних частин $d([L,L])$ та $d([R,R])$ будемо мати наступне включення $d([L,L]) \le d([R,R])$. Тому система підгруп $\{d([L,L]) \mid L \in \mathfrak{S}\}$, як і система $\mathfrak{S}$, буде лінійно впорядкованою. Це тягне за собою той факт, що об'єднання $D = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} d([L,L])$ буде підгрупою G. Слід зазначити той факт, що центр групи G містить у собі кожну скінченну нормальну підгрупу. Дійсно, група G не містить у собі власних підгруп скінченного індексу, а тому централізатор кожної скінченної нормальної підгрупи повинен співпадати з усією групою. Оскільки подільна черніковська підгрупа $d([L,L])$ буде об'єднанням своїх скінченних G-інваріантних підгруп, то центр $\zeta(G)$ містить у собі $d([L,L])$ для кожної підгрупи $L \in \mathfrak{S}$. Звідси випливає включення $D \le \zeta(G)$. Зазначимо, що D буде періодичною абелевою подільною підгрупою. В фактор-групі G/D розглянемо систему $\mathfrak{S}^{\Lambda} = \{LD/D \mid L \in \mathfrak{S}\}$. З включення $d([L,L]) \le D$ отримаємо ізоморфізм

$$[L,L]/([L,L] \cap D) \cong [L,L]D/D,$$

який показує, зокрема, що фактор-група $[L,L]D/D$ буде скінченною. Знову ми можемо використати той факт, що група G не має власних підгруп скінченного індексу і отримати включення $[L,L]D/D \le \zeta(G/D)$ для кожної підгрупи, що належить до системи $\mathfrak{S}$. Звідси випливає, що другий гіперцентр групи G містить у собі підгрупу Q. Раніше вже було доведено, що Q містить у собі комутант $[G,G]$. А це вказує на той факт, що група G мусить бути нільпотентною. Тепер застосування **наслідку 2.1.6** доводить теорему. □

2.2.6. Наслідок. *Нехай G – група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Якщо G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого будуть локально ступінчатими, то її комутант $[G,G]$ є черніковською підгрупою.*

2.2.7. Наслідок. *Нехай G – група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Якщо G має спадаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого будуть локально ступінчатими, то її комутант $[G,G]$ є черніковською підгрупою.*

2.2.8. Наслідок [93]**.** *Нехай G – локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Тоді і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

2.2.9. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Тоді і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

2.2.10. Наслідок. *Нехай G – локально майже розв'язна група, всі власні підгрупи якої мають черніковські комутанти. Тоді і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

О.Ю. Ольшанський побудував серію екзотичних прикладів нескінченних простих груп, всі власні підгрупи яких будуть абелевими (див. [84, § 28]). Ці приклади доводять, що твердження **теореми 2.2.5** не може бути розширено на довільні групи, всі власні підгрупи яких мають черніковські комутанти.

РОЗДІЛ 3
ГРУПИ, ВСІ ПІДГРУПИ ЯКИХ АБО НОРМАЛЬНІ, АБО МАЮТЬ ЧЕРНІКОВСЬКИЙ КОМУТАНТ

Нехай G – група, у якої система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається з підгруп, що мають черніковський комутант. Позначимо через $\mathfrak{S}$ систему всіх тих підгруп, комутант яких не є черніковським. Тоді кожна з цих підгруп буде нормальною та визначає дедекіндову фактор-групу. Згадаємо, що дедекіндова група є нільпотентною, причому її клас нільпотентності не перевищує 2. Нехай H – перетин усіх підгруп, що належать до системи $\mathfrak{S}$. Тоді фактор-група G/H буде нільпотентною групою, клас нільпотентності якої не перевищує 2. Якщо K – власна підгрупа H, то з вибору H випливає, що $K \notin \mathfrak{S}$, тому її комутант має бути черніковським. Як було доведено у попередньому розділі, при деяких досить загальних умовах підгрупа H також має черніковський комутант. З цього випливає, що вся група G буде майже розв'язною (при тих додаткових умовах, які розглядались у розділі 2). Це показує, що випадок майже розв'язної групи є основним при вивченні груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається з підгруп, що мають черніковський комутант.

3.1. Попередні результати

Ми почнемо з наступного майже очевидного результату.

3.1.1. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді мають місце твердження:*

(*i*) *якщо H – довільна підгрупа групи G, то кожна підгрупа H або нормальна, або має черніковський комутант;*

(*ii*) *якщо L – довільна нормальна підгрупа групи G, то кожна підгрупа фактор-групи G/L або нормальна, або має черніковський комутант;*

(*iii*) *якщо* S *– довільна підгрупа групи* G*, комутант* $[S,S]$ *якої не є черніковською підгрупою, то фактор-група* G/S *буде дедекіндовою.*

3.1.2. Лема. *Нехай* G *– група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що* A *– вільна від скруту абелева підгрупа групи* G*. Якщо її нормалізатор* $N_G(A)$ *містить елемент* g *скінченного порядку, то* $g \in C_G(A)$.

Доведення. Припустимо протилежне, нехай централізатор $C_G(A)$ не містить елемент g. Нехай m – довільне натуральне число. Покладемо $H_m = \langle A^m, g \rangle$. Підгрупа A^m буде характеристичною в A, а тому A^m буде $\langle g \rangle$-інваріантною. Тоді підгрупа $\langle A^m, g \rangle$ буде напівпрямим добутком підгруп A^m та $\langle g \rangle$: $\langle A^m, g \rangle = A^m \leftthreetimes \langle g \rangle$. Звідси випливає включення $[H_m, H_m] \le A^m$. Припустимо, що підгрупа $\langle A^m, g \rangle$ буде абелевою. Тоді будемо мати

$$(a^g)^m = (a^m)^g = a^m$$

для кожного елемента a підгрупи A. Як наслідок, маємо рівність $(a^g a^{-1})^m = 1$. Оскільки A є вільною від скруту, остання рівність тягне за собою рівність $a^g a^{-1} = 1$, а отже $a^g = a$. Це доводить включення $g \in C_G(A)$, і ми отримуємо суперечність з нашим припущенням. Ця суперечність, у свою чергу, показує, що підгрупа $\langle A^m, g \rangle$ не може бути абелевою для будь-якого натурального числа m. Але в цьому випадку її комутант $[H_m, H_m]$ буде неодиничною підгрупою для будь-якого натурального числа m. Включення $[H_m, H_m] \le A^m$ вказує на той факт, що підгрупа $[H_m, H_m]$ є вільною від скруту. Зокрема, вона не може бути черніковською. Але тоді підгрупа $\langle A^m, g \rangle$ мусить бути нормальною для будь-якого натурального числа m. Отже і перетин $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \langle A^m, g \rangle = \langle g \rangle$ буде також нормальною

підгрупою. Оскільки g має скінченний порядок, то $\langle g\rangle \cap A = \langle 1\rangle$, а це тягне за собою включення $g \in C_G(A)$, що і доводить потрібний результат. □

3.1.3. Лема. *Нехай G – скінченно породжена група. Якщо G містить у собі підгрупу L скінченного індексу, комутант якої $[L,L]$ є черніковською підгрупою, то група G буде майже абелевою.*

Доведення. Позначимо комутант підгрупи L через K. Скінченність індексу $|G:L|$ тягне за собою той факт, що підгрупа L також буде скінченно породженою (**теорема 1.2.12**). Позначимо через D подільну частину черніковської підгрупи K. Тоді фактор-група L/D містить у собі нормальну скінченну підгрупу K/D, для якої L/K буде абелевою та скінченно породженою. Зокрема, фактор-група L/D буде майже поліциклічною. Але в цьому випадку L/D буде резидуально скінченною (**теорема 1.2.13**). Звідси випливає, що L/D містить у собі нормальну підгрупу F/D скінченного індексу, що має наступну властивість $(F/D)\cap(K/D) = \langle 1\rangle$. Це показує, що підгрупа F/D мусить бути абелевою. Той факт, що її індекс $|G:F|$ є скінченним разом з **теоремою 1.2.12** показує, що підгрупа F є скінченно породженою. Оскільки вона є метабелевою, то вона задовольняє умову мінімальності для нормальних підгруп (**теорема 1.2.14**). З іншого боку, якщо D буде неодиничною, то вона має нескінченний зростаючий ряд скінченних G-інваріантних підгруп. Ця суперечність показує, що $D = \langle 1\rangle$, і отже $L \cong L/D$ майже абелева. Оскільки $|G:L|$ скінченний, то G майже абелева. □

3.1.4. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що комутант кожної підгрупи скінченного індексу не є черніковською підгрупою. Нехай R – перетин всіх підгруп, що мають скінченні індекси. Тоді фактор-група G/R або буде абелевою, або G має нормальну підгрупу V, що містить у собі R, для якої G/V – це група кватерніонів, а V/R буде абелевою.*

Доведення. Оскільки комутант кожної підгрупи скінченного індексу не є черніковським, то кожна підгрупа H, що має в G скінченний індекс, буде нормальною в G. З **леми 3.1.1** отримаємо, що фактор-група G/H буде дедекіндовою. Нехай

$$\mathfrak{M} = \{X \mid X - \text{підгрупа, що має скінченний індекс в } G\},\ R = \cap\mathfrak{M}.$$

За класичною теоремою Ремака фактор-група G/R буде ізоморфною до деякої підгрупи добутку $Dr_{H\in\mathfrak{M}}G/H$. Припустимо, що G/R не є абелевою. Тоді група G містить у собі таку нормальну підгрупу U скінченного індексу, що фактор-група G/U буде неабелевою дедекіндовою групою. У цьому випадку будемо мати $G/U = Q/U \times V/U$, де Q/U – група кватерніонів, а V/U – прямий добуток елементарної абелевої 2-підгрупи та періодичної абелевої підгрупи без елементів порядку 2 (**теорема 1.2.15**). Нехай W – підгрупа V, що має в ній скінченний індекс. Тоді W має скінченний індекс і в усій групі G, а отже буде нормальною в G. Фактор-група G/W буде дедекіндовою та неабелевою. Якщо тепер припустити, що V/W не є абелевою, то V містить у собі D-інваріантну підгрупу Y, для якої фактор-група V/Y буде групою кватерніонів. Тоді G/Y є розширенням групи кватерніонів за допомогою такої ж групи кватерніонів. Але з іншого боку, підгрупа Y має скінченний індекс в G, а тому за **лемою 3.1.1** фактор-група G/Y мусить бути дедекіндовою. Ця суперечність показує, що група V/W буде абелевою. Нехай

$$\mathfrak{S} = \{X \mid X - \text{підгрупа, що має скінченний індекс в } V\},\ T = \cap\mathfrak{S}.$$

Очевидно, що $\mathfrak{S}$ буде підмножиною $\mathfrak{M}$, так що $T \geq R$. Використовуючи знову теорему Ремака, отримаємо, що фактор-група V/T буде ізоморфною до деякої підгрупи добутку $Dr_{W\in\mathfrak{S}}V/W$. Оскільки остання група є абелевою, то V/T також буде абелевою. Нехай $X \in \mathfrak{M}$, тоді $X \cap V$ має скінченний індекс в підгрупі V, а це показує, що $X \cap V \in \mathfrak{S}$. Звідси випливає рівність $\mathfrak{S} = \{X \cap V \mid X \in \mathfrak{M}\}$. Тоді

$$R = R \cap V = \left(\bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X \right) \cap V = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} (X \cap V) = T .$$

Таким чином, V / R є абелевою. □

3.1.5. Наслідок. *Нехай G – скінченно породжена група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G – майже розв'язна група, то G буде майже абелевою.*

Доведення. Якщо припустити, що група G містить у собі підгрупу L скінченного індексу, комутант якої буде черніковською підгрупою, то з **леми 3.1.3** випливає, що група G буде майже абелевою.

Таким чином, тепер ми можемо припустити, що комутант кожної підгрупа, яка має в групі G скінченний індекс, не є черніковською підгрупою. Позначимо через R перетин всіх підгруп, які мають скінченний індекс в групі G. Застосувавши **лему 3.1.4**, ми отримаємо, що фактор-група G / R є абелевою, або G містить у собі таку нормальну підгрупу V, що $V \geq R$, G / V – група кватерніонів та V / R є абелевою. Той факт, що фактор-група G / V є скінченною, разом з **теоремою 1.2.12** доводить, що підгрупа V буде скінченно породженою. Оскільки вона є ще і майже абелевою, то V має власні підгрупи скінченного індексу. Це тягне за собою наступну нерівність $R \neq V$. Оскільки фактор-група V / R є абелевою, то її комутант $[V,V] = K$ не може співпадати з підгрупою V. Нехай S – найбільша нормальна розв'язна підгрупа K. Очевидно, підгрупа S буде G-інваріантною. Припустимо, що $K \neq S$. Тоді фактор-група K / S буде скінченною та нерозв'язною. Фактор-група V / S буде розширенням скінченної групи за допомогою абелевої. Оскільки вона є скінченно породженою, то V / S буде майже поліциклічною. За **теоремою 1.2.13** фактор-група V / S є резидуально скінченною. У цьому випадку V / S має нормальну підгрупу E / S скінченного індексу, що має наступну властивість $(E / S) \cap (K / S) = \langle 1 \rangle$. Зокрема, E має скінченний індекс в групі G, а отже вона буде нормальною в G. Співвідношення

$$X/S \cong (X/S)/((E/S)\cap(X/S)) \cong (X/S)(E/S)/(E/S) \le (G/S)/(E/S)$$

та $G/E \cong (G/S)/(E/S)$ показують, що G/E містить у собі скінченну нерозв'язну підгрупу. З іншого боку, ми вже вище відмічали, що кожна скінченна фактор-група групи G є дедекіндовою, зокрема, вона буде розв'язною. Ця суперечність доводить рівність $K = S$. Інакше кажучи, підгрупа K є розв'язною. Припустимо, що K неодинична. У цьому випадку $U = [K,K] \neq K$, а фактор-група V/U не є абелевою, але буде метабелевою. Оскільки вона є скінченно породженою, то вона буде резидуально скінченною за **теоремою 1.2.14**. Звідси випливає, що підгрупа U буде перетином деяких підгруп скінченного індексу. З іншого боку, підгрупа R є перетином усіх підгруп, що мають скінченний індекс в V. Тому R міститься в U. Ця суперечність доводить рівність $K = \langle 1 \rangle$, яка показує, що підгрупа V є абелевою. Скінченність фактор-групи G/V доводить тепер той факт, що група G є майже абелевою, що і було потрібно. □

3.1.6. Лема. *Нехай G – скінченно породжена група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що група G є вільною від скруту та містить у собі нормальну абелеву підгрупу A, для якої фактор-група G/A є скінченною та циклічною. Тоді група G буде абелевою.*

Доведення. Нехай x – елемент групи G, що має наступну властивість $G/A = \langle xA \rangle$. За умовою леми G/A є скінченною і тому $x^m \in A$ для деякого натурального числа m. Оскільки G є вільною від скруту, то $1 \neq x^m$. Зокрема, $C = C_A(x)$ – неодинична підгрупа. Неважко упевнитись у тому, що підгрупа C буде сервантною у підгрупі A. Якщо $C = A$, то група G буде абелевою, і все доведено. Тому тепер припустимо, що C є власною підгрупою в A. Очевидно, що підгрупа C буде $\langle x \rangle$-інваріантною. Елемент xC має скінченний порядок в фактор-групі G/C. Використовуючи **лему 3.1.2**, ми отримаємо включення $xC \in C_{G/C}(A/C)$. Але в цьому

випадку фактор-група G/C буде абелевою. Оскільки A є абелевою, то з вибору підгрупи C випливає включення $C \le \zeta(G)$. Зокрема воно свідчить про той факт, що група G є нільпотентною. Оскільки вона є вільною від скруту, то з того факту, що вона майже абелева, випливає, що вона абелева. □

3.1.7. Наслідок. *Нехай G – скінченно породжена група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що група G є вільною від скруту та майже розв'язною. Тоді група G буде абелевою.*

Доведення. За **наслідком 3.1.5** G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A буде скінченною. Так що ми маємо $G = \bigcup_{1 \le j \le k} Ax_j$ для деяких елементів $x_1,\dots,x_k$ групи G. **Лема 3.1.6** показує, що підгрупа $\langle A, x_j \rangle$ є абелевою для кожного $1 \le j \le k$. Рівність $G = \bigcup_{1 \le j \le k} \langle A, x_j \rangle$ доводить тепер, що центр групи G має у ній скінченний індекс (**теорема 1.2.16**). Зокрема, G буде FC-групою. Нам залишається тепер лише відмітити, що вільна від скруту FC-група абелева (**теорема 1.2.17**). □

3.1.8. Наслідок. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що група G є вільною від скруту. Тоді група G буде абелевою.*

3.1.9. Лема. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді множина всіх елементів групи G, що мають скінченний порядок, буде (характеристичною) підгрупою групи G.*

Доведення. Нехай x, y – довільні два елементи скінченного порядку. Позначимо через F підгрупу, породжену елементами x, y. Припустимо, що підгрупа F є нескінченною. За **наслідком 3.1.5** F містить у собі нормальну

абелеву підгрупу A скінченного індексу. З **теореми 1.2.12** отримуємо, що A також буде скінченно породженою. У цьому випадку ми можемо знайти таке натуральне число k, що підгрупа $K = A^k$ буде неодиничною та вільною від скруту. Більш того, фактор-група A / A^k є скінченною, тому скінченною буде також і F / K. **Лема 3.1.2** показує, що $[K, x] = \langle 1 \rangle = [K, y]$. Оскільки елементи x, y породжують F, то звідси випливає, що центр підгрупи F містить K. З іншого боку, оскільки центр F має скінченний індекс, то F буде FC-групою. Однак множина всіх елементів FC-групи, що мають скінченний порядок, є підгрупою (**теорема 1.2.18**). Зокрема, підгрупа $\langle x, y \rangle$ буде скінченною, що і доводить наш результат. □

3.1.10. Наслідок. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді кожна скінченно породжена підгрупа групи G є скінченною над своїм центром. Зокрема, G є локально FC-групою.*

Доведення. Нехай F – довільна скінченно породжена підгрупа групи G. Позначимо через T підмножину всіх тих елементів підгрупи F, що мають скінченний порядок. Відповідно до **леми 3.1.9** підмножина T буде характеристичною підгрупою в F. **Наслідок 3.1.8** свідчить про той факт, що фактор-група F / T буде абелевою. З цього випливає скінченність $[F, F]$. Це означає, що F буде FC-групою. Залишається відмітити, що скінченно породжена FC-група має центр скінченного індексу. □

3.1.11. Наслідок. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді комутант групи G буде періодичною підгрупою.*

Доведення. Позначимо через T підмножину всіх тих елементів групи G, що мають скінченний порядок. Відповідно до **леми 3.1.9** підмножина T буде характеристичною підгрупою G. Фактор-група G / T вільна від скруту а за **наслідком 3.1.8** G / T абелева. Таким чином, $[G, G] \le T$. □

Зібравши разом все доведене, ми отримуємо наступний результат.

3.1.12. Теорема. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді мають місце наступні твердження:*

(*i*) *кожна скінченно породжена підгрупа групи G є скінченною над своїм центром, зокрема, G є локально FC-групою;*

(*ii*) *комутант групи G буде періодичною (і отже, локально скінченною) підгрупою. Зокрема, якщо G є вільною від скруту, то вона буде абелевою.*

Цю теорему можна розширити наступним чином.

3.1.13. Теорема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими, то вона є майже розв'язною. Зокрема, її комутант $[G,G]$ є локально скінченною підгрупою. Отже, якщо G є вільною від скруту, то вона буде абелевою.*

Доведення. Якщо група G містить у собі підгрупу скінченного індексу, що має черніковський комутант, то тоді G буде майже розв'язною і можна застосувати **теорему 3.1.12**. Це показує, що далі ми можемо припустити, що комутант кожної підгрупи скінченного індексу не може бути черніковською підгрупою. Нехай

$$\mathfrak{M} = \{X \mid X - \text{підгрупа, комутант якої не є черніковською підгрупою}\},$$

$$R = \cap\mathfrak{M}.$$

Отже, якщо підгрупа H належить до системи $\mathfrak{M}$, то H буде нормальною в G і фактор-група G/H буде дедекіндовою за **лемою 3.1.1**. За класичною теоремою Ремака, фактор-група G/R є ізоморфною до деякої підгрупи добутку $Dr_{X\in\mathfrak{M}}G/X$. Оскільки кожна дедекіндова група або абелева, або нільпотентна класу 2 (**теорема 1.2.15**), то G/R також або абелева, або нільпотентна класу 2 (слід зауважити тут, що рівність $G = R$ є можливою). Якщо H – власна підгрупа R, то за побудовою R, підгрупа $[H,H]$ мусить

бути черніковською. **Теорема 2.2.5** показує, що комутант підгрупи R також буде черніковською підгрупою. Оскільки фактор-група G/R є нільпотентною, то група G буде майже розв'язною. □

3.1.14. Наслідок. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими, то вона є локально скінченною.*

3.1.15. Наслідок. *Нехай G – скінченно породжена група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими, то вона має центр скінченного індексу. Зокрема, вона буде майже абелевою.*

Доведення. Дійсно, з **теореми 3.1.13** отримуємо, група G буде майже розв'язною. А тепер можна застосувати **теорему 3.1.12**. □

3.1.16. Наслідок. *Нехай G – локально ступінчата група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді група G є майже розв'язною. Зокрема, її комутант $[G,G]$ є локально скінченною підгрупою. Отже, якщо G є вільною від скруту, то вона буде абелевою.*

3.2. Про деякі класи груп, всі підгрупи яких або нормальні, або мають черніковський комутант

У першому параграфі цього розділу ми отримали деякий загальний опис груп, у яких кожна підгрупа або нормальна, або має черніковський комутант. Наступні параграфи присвячені більш детальному вивченню будови таких груп. У цьому параграфі ми розглянемо випадок, коли така група має підгрупу скінченного індексу, комутант якої є черніковською підгрупою.

3.2.1. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – вільна від скруту абелева підгрупа групи G. Якщо нормалізатор $N_G(A)$ містить такий елемент g нескінченного порядку, що $g^k \in A$ для деякого натурального числа k, то $g \in C_G(A)$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай $g \notin C_G(A)$. Оскільки g має нескінченний порядок, то $g^k \neq 1$, так що включення $g^k \in A$ показує, що підгрупа $C = C_A(g)$ буде неодиничною. Нагадаємо, що операція взяття кореня у вільній від скруту абелевій групі є однозначною, тому підгрупа C буде сервантною в A. Із зробленого вище припущення випливає нерівність $C \neq A$. Отже, в підгрупі A ми можемо вибрати елемент b, що не належить до підгрупи C. Покладемо $B = \langle b \rangle^{\langle g \rangle}$. Тоді $Z = B \cap C \neq B$, та підгрупа Z буде $\langle g \rangle$-інваріантною і також із співвідношень $B/Z = B/(B \cap C) \cong BC/C$ випливає, що фактор-група B/Z буде вільною від скруту скінченно породженою абелевою групою. Інакше кажучи, B/Z є вільною абелевою групою скінченного рангу. Але ж в такому випадку підгрупа Z виділяється прямим множником в групі, тобто $B = Z \times R$ для деякої підгрупи R (**теорема 1.2.4**). Застосувавши тепер **теорему 1.2.19**, отримаємо існування у підгрупі B $\langle g \rangle$-інваріантної підгрупи E, яка має наступні властивості: $Z \cap E = \langle 1 \rangle$ та фактор-група B/ZE буде скінченною. Зокрема, звідси отримуємо, що підгрупа E мусить бути неодиничною. З іншого боку, в фактор-групі $\langle gC, A/C \rangle$ елемент gC має скінченний порядок, а тоді з **леми 3.1.2** випливає, що група $\langle gC, A/C \rangle$ є абелевою. Це уже свідчить про той факт, що підгрупа C містить у собі взаємний комутант $[g,E]$. Зауважимо, що E є $\langle g \rangle$-інваріантною, тоді включення $[g,E] \leq E$. Отже, $[g,E] \leq C \cap E$, а це означає, що $[g,E] = \langle 1 \rangle$ і тому $E \leq C_A(g) = C$. Це протиріччя доводить потрібну рівність $A = C_A(g)$. □

3.2.2. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – вільна від скруту абелева підгрупа групи G. Тоді $N_G(A)/C_G(A)$ також буде вільною від скруту.*

3.2.3. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, g – елемент групи G і припустимо, що G містить у собі підгрупу A, що має прямий розклад $A = Dr_{n\in\mathbb{N}} A_n$, де A_n – це неодинична $\langle g\rangle$-інваріантна підгрупа, $n\in\mathbb{N}$. Тоді знайдеться таке натуральне число k, що $[A_n, g] = \langle 1\rangle$ для всіх $n \geq k$.*

Доведення. Припустимо спочатку, що підгрупа $\langle g\rangle$ буде нормальною та позначимо через $\langle x\rangle$ перетин $\langle g\rangle \cap A$. Знайдеться такий номер k, що $\langle x\rangle \cap Dr_{n\geq k} A_n = \langle 1\rangle$. З нашого припущення про нормальність підгрупи $\langle g\rangle$ випливає, що для кожного елемента y групи G має місце включення $\left[\langle g\rangle, y\right] \leq \langle g\rangle$. З іншого боку, виберемо номер n, що має властивість $n \geq k$ та нехай a – довільний елемент підгрупи A_n. З того факту, що підгрупа A_n є $\langle g\rangle$-інваріантною, отримуємо включення $[g,a] \in A_n$, а значить і $[g,a] \in A_n \cap \langle g\rangle = \langle 1\rangle$. Таким чином, у цьому випадку ми приходимо до рівності $[A_n, g] = \langle 1\rangle$ для всіх натуральних чисел $n \geq k$.

Припустимо тепер, що підгрупи $[A_n, g]$ будуть неодиничними для нескінченної множини натуральних чисел n. Щоб не вводити нових позначень, ми можемо вважати, що нерівність $[A_n, g] \neq \langle 1\rangle$ має місце для всіх $n \geq k$. Як це буде видно з подальшого розгляду, це не порушить загальності наших міркувань. Існують дві нескінченні підмножини Δ та Σ, які мають наступні властивості: $\Delta \cup \Sigma = \{n \mid n \geq k\}$, а $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$. Покладемо

$$A(\Delta) = Dr_{n\in\Delta} A_n \text{ та } A(\Sigma) = Dr_{n\in\Sigma} A_n.$$

Зразу слід відмітити, що перетин $A(\Delta) \cap A(\Sigma)$ буде одиничним. Маємо

$$Dr_{n\in\Delta}[g, A_n] \le \left[\langle g\rangle A(\Delta), \langle g\rangle A(\Delta)\right] \text{ та}$$

$$Dr_{n\in\Sigma}[g, A_n] \le \left[\langle g\rangle A(\Sigma), \langle g\rangle A(\Sigma)\right].$$

Ці включення показують, що комутанти $\left[\langle g\rangle A(\Delta), \langle g\rangle A(\Delta)\right]$ та $\left[\langle g\rangle A(\Sigma), \langle g\rangle A(\Sigma)\right]$ не можуть бути черніковськими підгрупами. А це вже означає, що обидві підгрупи $\langle g\rangle A(\Delta)$ та $\langle g\rangle A(\Sigma)$ мусять бути нормальними. Але тоді і їх перетин $\langle g\rangle A(\Delta) \cap \langle g\rangle A(\Sigma)$ також буде нормальною підгрупою. З побудови підгруп $A(\Delta)$ та $A(\Sigma)$ випливає рівність $\langle g\rangle A(\Delta) \cap \langle g\rangle A(\Sigma) = \langle g\rangle$. Таким чином, підгрупа $\langle g\rangle$ є нормальною, а цей випадок вже був розглянутий раніше. □

3.2.4. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева p-підгрупа групи G для деякого простого числа p. Якщо $gC_G(A)$ – q-елемент фактор-групи $N_G(A)/C_G(A)$, де q – просте число, відмінне від p, то взаємний комутант $[A, g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Зразу слід відмітити спочатку, що централізатор $C = C_A(g)$ буде $\langle g\rangle$-інваріантною підгрупою A. Якщо aC – елемент фактор-групи A/C, що має властивість $[g, a] = c \in C$, то $g^{-1}ag = ac$, а тому $g^{-k}ag^k = ac^k$ для будь-якого натурального числа k. Зокрема, якщо $|gC_G(A)| = t$, то $c^t = 1$. З іншого боку, натуральні числа t та p є взаємно простими, а оскільки c буде p-елементом, то звідси отримуємо рівність $c = 1$. Таким чином, має місце наступна рівність $C_{A/C}(g) = \langle 1\rangle$. Позначимо через B/C нижній шар групи A/C. З того факту, що натуральні числа $|gC_G(A)|$ та p будуть взаємно простими, отримаємо прямий розклад $B/C = Dr_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda/C$, де A_λ/C – мінімальна скінченна $\langle g\rangle$-інваріантна підгрупа для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$ (**теорема 1.2.20**). Застосувавши тепер **леми 3.1.1** та **3.2.3** та враховуючи рівність $C_{A/C}(g) = \langle 1\rangle$, отримаємо тепер

скінченність множини індексів Λ. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що група B/C буде скінченною. Скінченність нижнього шару абелевої p-групи A/C означає, що ця p-група буде черніковською.

Розглянемо тепер відображення $\phi_g : a \to [a,g], a \in A$. З того факту, що підгрупа A є абелевою, випливає, що це відображення буде ендоморфізмом підгрупи A. Тоді маємо

$$A/C_A(g) = A/Ker\phi_g \cong \mathrm{Im}\phi_g = [A,g].$$

Тільки що було доведено, що фактор-група $A/C_A(g)$ є черніковською, а це тягне за собою той факт, що і підгрупа $[A,g]$ буде черніковською. □

3.2.5. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева p-підгрупа групи G для деякого простого числа p. Якщо $gC_G(A)$ – p-елемент фактор-групи $N_G(A)/C_G(A)$, то взаємний комутант $[A,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо $[a,g]=1$ для будь-якого елемента a з підгрупи A, то $[A,g]=\langle 1\rangle$, і все доведено. Тому тепер слід припустити, що в підгрупі A існує елемент b_1, який має властивість $[b_1,g]\neq 1$. Покладемо $B_1 = \langle b_1\rangle^{\langle g\rangle}$. Підгрупа B_1 буде скінченною та $\langle g\rangle$-інваріантною. Серед усіх підгруп A, що мають одиничний перетин з B_1 виберемо максимальну і позначимо її через M_1. Тоді нижній шар фактор-групи A/M_1 буде скінченним, а це тягне за собою той факт, що ця фактор-група буде черніковською. Оскільки порядок $|gC_G(A)|$ є скінченним, то система підгруп $\{M_1^x \mid x \in \langle g\rangle\}$ буде скінченною. Нехай

$$\{M_1^x \mid x \in \langle g\rangle\} = \{U_1,\ldots,U_m\}.$$

Тоді перетин $C_1 = \bigcap_{x\in\langle g\rangle} M_1^x = \bigcap_{1\le j\le m} U_j$ є, очевидно, $\langle g\rangle$-інваріантною підгрупою, і застосувавши теорему Ремака, отримаємо наступне вкладання

$$A/C_1 \hookrightarrow Dr_{1\le j\le m} A/U_j.$$

Для кожного елемента x з циклічної підгрупи $\langle g\rangle$ має місце ізоморфізм $A/M_1^x \cong A/M_1^x$, з якого випливає, що фактор-група A/U_j буде черніковською для кожного $1\le j\le m$. Звідси ми отримаємо, що і фактор-група A/C_1 буде черніковською.

Припустимо, що в підгрупі C_1 існує елемент b_2, що має властивість $[b_2,g]\neq 1$. Покладемо $B_2=\langle b_2\rangle^{\langle g\rangle}$. Зазначимо, що підгрупа B_2 буде скінченною та $\langle g\rangle$-інваріантною, а перетин $B_1\cap B_2$ буде одиничною. Серед усіх підгруп A, що мають одиничний перетин з B_1B_2 виберемо максимальну і позначимо її через M_2. Тоді нижній шар фактор-групи A/M_2 буде скінченним, а це тягне за собою той факт, що ця фактор-група буде черніковською. За допомогою наведених вище міркувань побудуємо таку $\langle g\rangle$-інваріантну підгрупу C_2, що фактор-група A/C_1 буде черніковською, а перетин $B_1B_2\cap C_2$ – одиничним. Якщо взаємний комутант $[C_2,g]$ ще неодиничний, то продовжимо розпочатий вище процес. Якщо припустити, що цей процес не є скінченним, то побудуємо нескінченну систему

$$\{B_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

таких скінченних $\langle g\rangle$-інваріантних підгруп, що взаємні комутанти $[B_n,g]$ будуть неодиничними для кожного натурального числа n, а

$$\langle B_n \mid n\in\mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Однак це суперечить **лемі 3.2.3**. Отримана суперечність показує, що вказаний процес не може бути нескінченним. Це означає, що A містить у собі таку $\langle g\rangle$-інваріантну підгрупу E, що фактор-група A/E буде черніковською, а взаємний комутант $[E,g]$ буде одиничним. Звідси, як і у попередній лемі, неважко отримати, що $[A,g]$ черніковська. □

3.2.6. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G. Якщо $gC_G(A)$ – p-елемент фактор-групи $N_G(A)/C_G(A)$, де p – просте число, то взаємний комутант $[A,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Дійсно, маємо стандартний прямий розклад $A = Dr_{q\in\Pi(A)}A_q$, де A_q – силовська q-підгрупа A, $q\in\Pi(A)$. Застосувавши **лему 3.2.3**, отримаємо існування такої скінченної підмножини $\pi\subseteq\Pi(A)$, що взаємний комутант $[A_q,g]$ буде одиничним для всіх простих чисел q з підмножини $\Pi(A)\setminus\pi$. Якщо $q\in\pi$ та $q\neq p$, то з **леми 3.2.4** випливає, що взаємний комутант $[A_q,g]$ буде черніковською підгрупою. Якщо $p\in\pi$, то з **леми 3.2.5** випливає, що підгрупа $[A_p,g]$ буде черніковською. Скінченність множини π забезпечує той факт, що $[A,g]$ також буде черніковською підгрупою. □

3.2.7. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G. Якщо $gC_G(A)$ – елемент скінченного порядку фактор-групи $N_G(A)/C_G(A)$, то взаємний комутант $[A,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки елемент $gC_G(A)$ має скінченний порядок, то розглянемо його стандартний розклад $gC_G(A) = g_1C_G(A)\cdot\ldots\cdot g_mC_G(A)$, де $g_jC_G(A)$ – p_j-елемент для деякого простого числа p_j, $1\le j\le m$. З **наслідку 3.2.6** отримуємо, що взаємний комутант $[A,g_j]$ буде черніковською підгрупою для кожного j, $1\le j\le m$. З очевидного співвідношення $[A,g]\le[A,g_1]\cdot\ldots\cdot[A,g_m]$ випливає тепер, що і $[A,g]$ також буде черніковською підгрупою. □

3.2.8. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G. Якщо $F/C_G(A)$ – скінченна підгрупа фактор-групи $N_G(A)/C_G(A)$, то взаємний комутант $[A,F]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Нехай $\{g_1,...,g_m\}$ – повна підмножина представників всіх суміжних класів підгрупи F за централізатором $C_G(A)$, взятих по одному у кожному класі. **Наслідок 3.2.7** доводить той факт, що комутант $[A,g_j]$ буде черніковською підгрупою для кожного j, $1\le j\le m$. З очевидного співвідношення $[A,F]\le[A,g_1]\cdot...\cdot[A,g_m]$ випливає тепер, що і $[A,F]$ також буде черніковською підгрупою. □

3.2.9. Наслідок. *Нехай G – майже абелева група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G – періодична група, то її комутант буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Позначимо через A нормальну абелеву підгрупу G, яка має скінченний індекс. За **наслідком 3.2.8** взаємний комутант $[A,G]$ буде черніковською підгрупою. Фактор-група $G/[A,G]$ має центр скінченного індексу, а тому за **теоремою 1.2.2** її комутант буде скінченною підгрупою. Але тоді комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. □

3.2.10. Теорема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G містить у собі підгрупу скінченного індексу, комутант якої є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки група G містить у собі підгрупу скінченного індексу, комутант якої є черніковською підгрупою, то вона містить і нормальну підгрупу H, що має ту ж саму властивість. Покладемо $K=[H,H]$, тоді фактор-група H/K буде абелевою, а тому множина T/K всіх її елементів, які мають скінченний порядок, буде її

характеристичною підгрупою. Фактор-група H/T уже буде вільною від скруту і **наслідок 3.2.2** показує, що має місце включення $H/T \le \zeta(G/T)$. Застосувавши тепер **теорему 1.2.2**, отримаємо, що комутант $D/T = [G/T, G/T]$ буде скінченним. У цьому випадку множина P/D всіх елементів G/D, що мають скінченний порядок, буде її характеристичною підгрупою, фактор-група по якій буде вільною від скруту абелевою групою. З такого вибору P/D випливає, що P/K буде періодичною G-інваріантною підгрупою. Припустимо, що T є власною підгрупою H. Це означає, що фактор-група H/K містить елемент x_1K, який має нескінченний порядок. Позначимо нормальне замикання $\langle x_1K\rangle^{G/K}$ через X_1/K, тоді X_1/K буде скінченно породженою абелевою G-інваріантною підгрупою. Тому можна знайти таке натуральне число n, що $Y_1/K = (X_1/K)^n$ буде вільною від скруту підгрупою, зокрема вона буде вільною абелевою. З її побудови також випливає, що вона буде G-інваріантною. Якщо фактор-група H/Y_1 не буде періодичною, то, скориставшись наведеними тільки що міркуваннями, побудуємо в ній G-інваріантну вільну абелеву підгрупу Y_2/Y_1 і т.д. В кінці кінців ми побудуємо в фактор-групі H/K підгрупу U/K, яка має зростаючий ряд G-інваріантних підгруп, фактори якого є вільними абелевими, а відповідна фактор-група H/U уже буде періодичною. Очевидно, підгрупа U також буде G-інваріантною і вільною від скруту. З того факту, що H/U є періодичною, випливає, що і G/U буде періодичною майже абелевою групою. Із **леми 3.1.1** і **наслідку 3.2.9** отримаємо, що комутант фактор-групи G/U буде черніковською підгрупою. Оскільки P/K є періодичною, а U/K є вільною від скруту, то має місце рівність $P \cap U = K$. З теореми Ремака випливає тепер вкладання $G/K \hookrightarrow G/P \times G/U$. Оскільки G/P абелева, $[G/K, G/K]$ черніковська. Оскільки K черніковська, то $[G,G]$ також черніковська. □

3.3. Деякі технічні результати

В цьому параграфі продовжується дослідження груп, кожна підгрупа яких або нормальна, або її комутант буде черніковською підгрупою. В попередніх параграфах було показано, що одним з основних етапів вивчення груп з цією властивістю, є вивчення випадку (майже) розв'язної групи. При вивченні розв'язних груп першим природним кроком є вивчення їх локальної структури. Інакше кажучи, вивчення будови їх підгруп, що мають вигляд $\langle g, A\rangle$, де A – абелева підгрупа, а $g \in N_G(A)$. Основною метою цього параграфа та наступного параграфа і є вивчення підгруп такого типу у групах, кожна підгрупа яких або нормальна, або її комутант буде черніковською підгрупою. Даний параграф містить в основному технічні результати, на яких базується подальше вивчення.

3.3.1. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G має елемент g і містить у собі такі підгрупи A, B, що виконуються наступні умови:*

(1) $[A,B] = \langle 1\rangle$;

(2) A, B є $\langle g\rangle$-*інваріантними;*

(3) $\langle A,B\rangle \cap \langle g\rangle = \langle 1\rangle$;

(4) $A \cap B = \langle 1\rangle$;

(5) $C_A(g) \neq A$.

Тоді комутант підгрупи $\langle B, g\rangle$ є черніковською підгрупою.

Доведення. Оскільки $C_A(g) \neq A$, то в підгрупі A можна знайти елемент a, що має наступну властивість: $[g,a] = d \neq 1$. Тоді $a^{-1}ga = gd \neq g$. Якщо припустити тепер, що $gd \in B\langle g\rangle$, то $gd = g^m b$ для деякого цілого числа m і деякого елемента $b \in B$. Звідси отримуємо рівність $g^{m-1} = db^{-1}$. Із умови (3) випливає тепер рівність $db^{-1} = 1$, звідки, використовуючи (4),

одержимо $d = b = 1$. Отримана суперечність показує, що $gd \notin B\langle g\rangle$. Це означає, що підгрупа $B\langle g\rangle$ не може бути нормальною і тому вона має черніковський комутант. □

3.3.2. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, який не належить до централізатора $C_G(A)$. Якщо підгрупа A має прямий розклад $A = Dr_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, де кожний прямий множник A_λ є $\langle g\rangle$-інваріантною підгрупою, то Λ містить у собі таку скінченну підмножину M, що $A_\lambda \le C_A(g)$ для кожного $\lambda \in \Lambda \setminus M$.*

Доведення. Якщо множина індексів Λ є скінченною, то все доведено. Тому розглянемо випадок, коли множина індексів є нескінченною. Очевидно можна знайти в Λ таку підмножину Δ, що різниця $\Lambda \setminus \Delta$ буде скінченною та прямий добуток $Dr_{\lambda\in\Lambda\setminus\Delta}A_\lambda$ містить у собі перетин $\langle g\rangle \cap A$. Якщо припустити тепер, що $C_A(g)$ містить у собі прямі множники A_λ для кожного $\lambda \in \Delta$, то знову все доведено. Тому припустимо, що існує індекс $\lambda \in \Delta$, що централізатор $C_A(g)$ не містить у собі A_λ. Покладемо тепер $B = Dr_{\mu\in\Delta\setminus\{\lambda\}}A_\mu$. З **леми 3.3.1** можемо отримати, що комутант $B\langle g\rangle$ буде черніковською підгрупою. У цьому випадку нижній шар $\Omega_1\left(\left[B\langle g\rangle, B\langle g\rangle\right]\right)$ цього комутанту буде скінченним, так що можна знайти таку скінченну підмножину $\Sigma \subseteq \Delta$, що $\Omega_1\left(\left[B\langle g\rangle, B\langle g\rangle\right]\right) \cap Dr_{\mu\in\Delta\setminus\Sigma}A_\mu = \langle 1\rangle$. Але тоді одиничним буде і перетин $\left[B\langle g\rangle, B\langle g\rangle\right] \cap Dr_{\mu\in\Delta\setminus\Sigma}A_\mu$. З того факту, що підгрупа $Dr_{\mu\in\Delta\setminus\Sigma}A_\mu$ є $\langle g\rangle$-інваріантною, випливає, що централізатор $C_A(\langle g\rangle)$ містить у собі $Dr_{\mu\in\Delta\setminus\Sigma}A_\mu$, що й було потрібно довести. □

3.3.3. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – елементарна абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що має нескінченний порядок. Припустимо, що A є $\langle g\rangle$-інваріантною та $\langle g\rangle \cap C_G(A) = \langle 1\rangle$. Тоді $F_p\langle g\rangle$-модуль A буде періодичним.*

Доведення. Позначимо кільце $F_p\langle g\rangle$ через J. Припустимо, що наше твердження є невірним. Тоді A містить елемент c, анулятор $Ann_J(c)$ якого буде нульовим. У цьому випадку маємо ізоморфізм $C = cJ \cong J$. Покладемо $x = g^2$, тоді маємо прямий розклад

$$J = F_p\langle x\rangle \oplus \left(F_p\langle x\rangle\right)g,$$

а отже і прямий розклад $C = C_1 \oplus C_1^g$, де $C_1 = cF_p\langle x\rangle$. Обидві підгрупи C_1 та $C_2 = C_1^g$ будуть $\langle x\rangle$-інваріантними. З **леми 3.3.1** отримаємо, що комутант $C_2\langle x\rangle$ буде черніковською підгрупою. Оскільки C_2 є елементарною абелевою, то це означає, що підгрупа $\left[C_2\langle x\rangle, C_2\langle x\rangle\right]$ буде скінченною. Зокрема, $C_2\langle x\rangle$ буде FC-групою. Але в цьому випадку існує таке натуральне число m, що $x^m \in C_G(C_2)$. Однак це суперечить тому факту, що C_2 є вільним від скруту. Отримана суперечність доводить той факт, що $F_p\langle g\rangle$-модуль A буде періодичним. □

3.3.4. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що має нескінченний порядок. Припустимо, що A є $\langle g\rangle$-інваріантною та $\langle g\rangle \cap C_G(A) = \langle 1\rangle$. Якщо $F_p\langle g\rangle$-модуль $A_1 = \Omega_1(A)$ є періодичним, то $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль $C = c\mathbb{Z}\langle g\rangle = \langle c\rangle^{\langle g\rangle}$ буде скінченним для кожного елемента c підгрупи A.*

Доведення. Позначимо кільце $F_p\langle g\rangle$ через J, а кільце $\mathbb{Z}\langle g\rangle$ через R. Оскільки A є p-підгрупою, то порядок елемента c дорівнює p^k для деякого натурального числа k. Якщо $k=1$, то $C=cJ\cong J/I$, де $I=Ann_J(c)$ – ненульовий ідеал. Слід відмітити, що кожний ненульовий ідеал кільця J має в останньому скінченний індекс, а тому C також буде скінченним.

Застосуємо зараз доведення по індукції за числом k. Припустимо, що $k>1$. Відображення

$$\phi: u\to pu, u\in C,$$

очевидно, буде R-ендоморфізмом C і $\mathrm{Im}\phi = pC, Ker\phi = \Omega_1(C)$. Більш того, з рівності $pC=(pc)R$ випливає, що pC буде циклічним R-підмодулем та $|pc|=p^{k-1}$. За індуктивним припущенням підмодуль pC буде скінченним. Більш того, маємо ізоморфізм

$$pC=\mathrm{Im}\phi\cong C/Ker\phi = C/\Omega_1(C),$$

з наявності якого зокрема отримуємо, що фактор $C/\Omega_1(C)$ буде скінченним. Оскільки кільце R є нетеровим, то кожний скінченно породжений R-модуль буде нетеровим. Звідси отримаємо, що підмодуль $\Omega_1(C)$ буде скінченно породженим. Ми вже зазначали вище, що кожний циклічний J-підмодуль $\Omega_1(A)$ буде скінченним, так що $\Omega_1(C)$ є скінченним. Таким чином, C також буде скінченним. □

3.3.5. Лема. *Нехай група G містить у собі таку періодичну абелеву нормальну підгрупу A, що фактор-група G/A також буде абелевою. Якщо підгрупа $\langle g, A\rangle$ є локально нільпотентною для кожного елемента $g\in G$, то і вся група G буде локально нільпотентною.*

Доведення. Нехай p – просте число і позначимо через P силовську p-підгрупу A. Позначимо через B нижній шар підгрупи P, тобто $B=\Omega_1(P)$. Якщо g – елемент групи G, який не належить до підгрупи A, то природним чином ми можемо розглядати B як модуль над груповим кільцем $F_p\langle x\rangle$, де

$\langle x\rangle$ – нескінченна циклічна група, а дія елемента x на A визначена за правилом $ax = a^g$ для кожного елемента a підгрупи B. Тоді $J = F_p\langle x\rangle$ буде областю головних ідеалів. Якщо припустити, що B не буде J-періодичним, то B мусить мати елемент a, який має наступну властивість $Ann_J(c) = \langle 0\rangle$ (слід зазначити тут, що це є можливим тільки у випадку, коли елемент g має нескінченний порядок). Однак у цьому випадку підгрупа $\langle a, g\rangle$ буде ізоморфною до вінцевого добутку $\langle a\rangle wr\langle g\rangle$, а останній не є нільпотентною групою. Отримана суперечність доводить той факт, що B мусить бути J-періодичним модуль. Якщо $b \in B$, то

$$\langle b\rangle^{\langle g\rangle} = bJ \cong J / Ann_J(b) \neq \langle 0\rangle.$$

Кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс, так що підгрупа $\langle b\rangle^{\langle g\rangle}$ буде скінченною. Якщо M – це мінімальний J-підмодуль bJ, то $Q = Ann_J(M)$ буде максимальним ідеалом кільця J. З того факту, що підгрупа $\langle g, M\rangle$ є нільпотентною, отримуємо рівність $\langle 1\rangle = [g, M] = M(x-1)$. Звідси випливає, що ідеал Q мусить співпадати з $(x-1)J$. Остання рівність буде справедливою для довільного простого J-підмодуля, так що отримуємо рівність $Ass_J(B) = \{(x-1)J\}$. Звідси випливає, що B має зростаючий ряд $\langle g\rangle$-інваріантних підгруп

$$\langle 1\rangle = C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_n \leq C_{n+1} \leq \ldots C_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = B,$$

де $C_1 = C_B(g), C_{n+1} / C_n = C_{B/C_n}(g)$ для кожного натурального числа n. Згадавши про те, що G / A – абелева група, отримаємо той факт, що підгрупа C_n буде G-інваріантною для кожного натурального числа n.

Покладемо тепер $B_1 = B, B_n = \Omega_n(P)$ для кожного натурального числа n. Очевидним є той факт, що відображення

$$\phi : b \to pb, b \in B_2$$

буде $\langle g\rangle$-ендоморфізмом. Далі, $\mathrm{Im}\phi \leq B_1, Ker\phi = B_1$, так що фактор-група

B_2 / B_1 буде ізоморфною до деякої $\langle g \rangle$-інваріантної підгрупи B_1. Це тягне за собою той факт, що B_2 / B_1 буде $\langle g \rangle$-гіперцентральною. Застосувавши тепер звичайну індукцію, зможемо показати, що і B_{n+1} / B_n буде $\langle g \rangle$-гіперцентральною для кожного натурального номера n. Звідси випливає, що P також буде $\langle g \rangle$-гіперцентральною. Більш того, довжина верхнього $\langle g \rangle$-центрального ряду P не перевищує першого нескінченного порядкового числа ω. Дійсно, для будь-якого елемента $u \in P$ підгрупа $\langle u \rangle^{\langle g \rangle}$ буде скінченною у відповідності до **леми 3.3.4**. З того факту, що центр $\langle g \rangle$-гіперцентральної групи має неодиничний перетин з кожною неодиничною $\langle g \rangle$-інваріантною підгрупою, випливає, що деякий член верхнього $\langle g \rangle$-центрального ряду, який має натуральний номер, повністю містить у собі $\langle u \rangle^{\langle g \rangle}$.

Оскільки все це буде справедливим для кожної силовської p-підгрупи A, то $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-модуль A також буде $\langle g \rangle$-гіперцентральним з $\langle g \rangle$-центральною довжиною, яка не перевищує ω. Нехай

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_n \le Z_{n+1} \le \ldots Z_\omega = A -$$

верхній $\langle g \rangle$-центральний ряд A.

Виберемо у групі G інший довільний елемент y. Застосувавши наведені вище аргументи, покажемо, що $\mathbb{Z}\langle y \rangle$-модуль Z_1 буде $\langle y \rangle$-гіперцентральним. Нехай

$$\langle 1 \rangle = Y_0 \le Y_1 \le \ldots \le Y_n \le Y_{n+1} \le \ldots Y_\omega = Z_1 -$$

верхній $\langle y \rangle$-центральний ряд Z_1. У відповідності до вибору Z_1 цей ряд також буде $\langle g, y \rangle$-гіперцентральним.

Оскільки фактор-група G / A є абелевою, то відображення

$$\xi : z \to z(g-1), z \in Z_2$$

буде G-ендоморфізмом, причому $\mathrm{Im}\xi \le Z_1, Ker\xi = Z_1$. Таким чином, Z_2 / Z_1

є ізоморфною до деякої G-інваріантної підгрупи Z_1, зокрема, Z_2 / Z_1 буде $\langle g, y \rangle$-гіперцентральною. Застосувавши тепер звичайну індукцію, отримаємо, що Z_{n+1} / Z_n буде $\langle g, y \rangle$-гіперцентральною для кожного натурального номера n. Звідси випливає, що A буде $\langle g, y \rangle$-гіперцентральною. Інакше кажучи, підгрупа $\langle A, g, y \rangle$ буде гіперцентральною. Подібним чином ми можемо довести, що підгрупа $\langle A, g_1, ..., g_m \rangle$ буде гіперцентральною для кожної скінченної підмножини $\{g_1, ..., g_m\}$ елементів групи G. □

3.3.6. Лема. *Нехай G – група і A – її елементарна абелева p-підгрупа, де p – просте число, та нехай g – елемент нескінченного порядку групи G. Припустимо, що підгрупа A є $\langle g \rangle$-інваріантною, а також $\langle g \rangle \cap C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Якщо $F_p\langle g \rangle$-підмодуль A є періодичним та містить у собі ненульовий подільний $F_p\langle g \rangle$-підмодуль, то підгрупа $\langle g \rangle$ містить елемент x, а підгрупа A містить у собі $\langle x \rangle$-інваріантну підгрупу U, для яких $U\langle x \rangle$ не може бути нормальною, а $C_{\langle x \rangle}(U) = \langle 1 \rangle$.*

Доведення. Позначимо через J групове кільце $F_p\langle g \rangle$. Нехай D – J-подільна частина модуля A. З **теореми 1.2.23** отримуємо для підмодуля D наступний прямий розклад: $D = \oplus_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$, де D_λ – прюферовий P_λ-підмодуль для деякого максимального ідеалу P_λ, $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що множина індексів Λ містить хоча б два різних елементи λ та μ. Оскільки D_λ, D_μ подільні, то $Ann_J(D_\lambda) = \langle 0 \rangle = Ann_J(D_\mu)$. Зокрема, $C_{\langle g \rangle}(D_\lambda) = \langle 1 \rangle$. Застосувавши ті ж самі аргументи, що і в **лемі 3.3.1**, ми можемо довести, що підгрупа $D_\mu\langle g \rangle$ не може бути нормальною, так що ми можемо покласти $U = D_\mu, x = g$.

Припустимо зараз, що D – прюферовий P-підмодуль для деякого максимального ідеалу P. Нехай $L = \Omega_{P,1}(D)$, тоді L є ізоморфним до J-

модуля J/P. Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс, то підмодуль L буде скінченним. Покладемо $\langle z\rangle = C_{\langle g\rangle}(L)$. Вибираємо в L ненульовий елемент a_1, тоді $a_1(z-1)=0$. Оскільки D – це J-подільний модуль, то існує елемент a_2, що має властивість $a_2(z-1)=a_1$. Аналогічно ми можемо вибрати множину елементів $\{a_n \mid n\geq 3\}$, які задовольняють наступні умови: $a_{n+1}(z-1)=a_n, n\geq 3$. Інакше кажучи, $Q=\langle a_n \mid n\in\mathbb{N}\rangle$ буде прюферовим Z-підмодулем, де $Z=(z-1)F_p\langle z\rangle$. Покладемо $x=z^p$, тоді маємо $a_2(x-1)=0$. Нехай $u_1=a_1, v_1=a_2$. Знову застосувавши попередні аргументи, ми можемо вибрати підмножини $\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ та $\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, які задовольняють наступні умови: $u_1(x-1)=0=v_1(x-1)$, $u_{n+1}(x-1)=u_n, v_{n+1}(x-1)=v_n$ для всіх натуральних чисел n. Покладемо тепер $U=\langle u_n \mid n\in\mathbb{N}\rangle$, $V=\langle v_n \mid n\in\mathbb{N}\rangle$. Обидві підгрупи U та V будуть $\langle x\rangle$-інваріантними та $C_{\langle x\rangle}(U)=C_{\langle x\rangle}(V)=\langle 1\rangle$. Застосувавши ті ж самі аргументи, що і в **лемі 3.3.1**, ми можемо довести, що підгрупа $U\langle x\rangle$ не може бути нормальною. □

3.3.7. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай далі A – елементарна абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо, що A є $\langle g\rangle$-інваріантною. Тоді максимальний $\langle g\rangle$-гіперцентральний $F_p\langle g\rangle$-підмодуль A буде скінченним.*

Доведення. Припустимо спочатку, що елемент g має нескінченний порядок та перетин $\langle g\rangle\cap A$ є одиничним. Позначимо через J групове кільце $F_p\langle g\rangle$. Застосувавши **лему 3.3.3**, отримаємо що J-модуль A буде періодичним. Нехай P – максимальний ідеал кільця J, та припустимо, що $P\neq(g-1)J$. Позначимо P-компоненту J-модуля A через B та нехай

$C = \Omega_{P,1}(B)$. Для підмодуля C маємо прямий розклад $C = \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, де C_λ – простий J-підмодуль, що має властивість $P = Ann_J(C_\lambda)$. Зокрема, тоді централізатор $C_A(\langle g\rangle)$ не містить у собі C_λ для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. З **леми 3.3.2** випливає той факт, що множина індексів Λ повинна бути скінченною. Звідси отримаємо прямий розклад $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, де або E_λ буде циклічним J-підмодулем, або E_λ – прюферовий P-підмодуль (див. **пропозицію 1.2.21** та **теорему 1.2.22**).

Припустимо, що E_λ – це прюферовий P-підмодуль. З **леми 3.3.6** отримаємо, що підгрупа $\langle g\rangle$ містить такий елемент x, а підгрупа A містить у собі таку $\langle x\rangle$-інваріантну підгрупу U, що $U\langle x\rangle$ не може бути нормальною та $C_{\langle x\rangle}(U) = \langle 1\rangle$. Тоді комутант підгрупи $U\langle x\rangle$ буде черніковською підгрупою, а з того факту, що U є елементарною абелевою, отримаємо, що комутант $[U\langle x\rangle, U\langle x\rangle]$ буде скінченною підгрупою. Зокрема, $U\langle x\rangle$ є FC-підгрупою, а тому можна знайти натуральне число m, що має властивість $x^m \in C_{\langle x\rangle}(U)$. Ця суперечність показує, що E_λ не може бути прюферовим P-підмодулем. Інакше кажучи, E_λ буде циклічним підмодулем, зокрема, E_λ буде скінченним для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. Зі скінченності множини індексів Λ випливає тоді скінченність B.

Далі, з того факту, що A є J-періодичним модулем, отримаємо стандартний примарний розклад $A = \oplus_{P\in\pi} A_P$, де $\pi = Ass_J(A)$, а A_P – P-компонента A. Якщо $P \neq (g-1)J$, то $C = \Omega_{P,1}(A_P) = \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, де C_λ – простий J-підмодуль, що задовольняє умову $Ann_J(C_\lambda) = P$. Зокрема, для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$ має місце рівність $C_C(g)\cap C_\lambda = \langle 0\rangle$. Це тягне за собою рівність $C_A(g)\cap A_P = \langle 0\rangle$ для кожного максимального ідеалу $P \neq (g-1)J$. Покладемо $\Sigma = \pi\setminus\{(g-1)J\}$. Якщо множина Σ складається лише з одного ідеалу P, то з доведеного вище випливає, що A_P буде

скінченною. Тому припустимо, що $\Sigma \neq \{P\}$ та нехай $\Delta = \Sigma \setminus \{P\}$, $L = \oplus_{Q \in \Delta} A_Q$. Оскільки порядок елемента g є нескінченним, то маємо рівність $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. З **леми 3.3.1** отримаємо, що комутант підгрупи $\langle L, g \rangle$ буде черніковською підгрупою. Оскільки L є елементарною абелевою p-підгрупою, то тоді її комутант $\left[\langle L, g \rangle, \langle L, g \rangle\right]$ буде скінченним, а це свідчить про той факт, що $\langle L, g \rangle$ є FC-підгрупою. Це вже тягне за собою скінченність індексу $|L : C_L(g)|$. Врахувавши також рівність $\langle 0 \rangle = C_L(g)$, отримаємо, що підгрупа L буде скінченною. Звідси отримаємо скінченність прямої суми $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$. Слід зазначити тепер, що $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$ – це точно максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $F_p\langle g \rangle$-підмодуль A.

Залишилось розглянути випадок, коли елемент g має скінченний порядок, або порядок $|g|$ є нескінченним, але $g^k \in C_G(A)$ для деякого натурального k. Покладемо $J = F_p\langle y \rangle$, де $\langle y \rangle$ – нескінченна циклічна група, а дія y на A визначається за правилом $ay = a^g$ для кожного $a \in A$. Знову J буде областю головних ідеалів, але вже $Ann_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. Зокрема, A буде J-періодичним модулем, так що маємо стандартний прямий розклад

$$A = \oplus_{P \in \pi} A_P,$$

де A_P – це P-компонента A і множина $\pi = Ass_J(A)$ є скінченною. Покладемо $B = A_P$. Тоді за **теоремою 1.2.24**

$$B = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda,$$

де B_λ – циклічний J-підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Знову застосувавши наведені вище міркування, можемо довести, що нижній шар $\Omega_{P,1}(A_P)$ буде скінченним, а тому множина індексів Λ також є скінченною. Це тягне за собою той факт, що A_P є скінченним. Оскільки $\Sigma = \pi \setminus \{(y-1)J\}$ також є скінченною, то $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$ буде скінченною. Але $\oplus_{P \in \Sigma} A_P$ – це максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $F_p\langle g \rangle$-підмодуль A. □

3.3.8. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай далі A – абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо, що підгрупа A є $\langle g \rangle$-інваріантною. Тоді максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-підмодуль A буде черніковським.*

Доведення. Нехай E – максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-підмодуль A. З **леми 3.3.7** отримуємо, що $\Omega_1(E)$ буде скінченним. А з цього вже випливає той факт, що E буде черніковською підгрупою. □

3.3.9. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо, що підгрупа A є $\langle g \rangle$-інваріантною. Тоді максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-підмодуль A буде черніковським.*

Доведення. Дійсно, нехай E – максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-підмодуль A. Маємо стандартний прямий розклад $E = Dr_{p\in\Pi(E)}E_p$, де E_p – силовська p-підгрупа E. З **наслідку 3.3.8** випливає, що E_p буде черніковською підгрупою. Застосувавши **лему 3.3.1**, можемо довести скінченність множина $\Pi(E)$. Отже, E – черніковська підгрупа. □

3.3.10. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – елементарна абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо, що підгрупа A є $\langle g \rangle$-інваріантною. Якщо C – верхній $F_p\langle g \rangle$-гіперцентр модуля A, то взаємний комутант $[C,g]$ буде скінченною підгрупою.*

Доведення. Припустимо спочатку, що g має нескінченний порядок та перетин $\langle g\rangle \cap A$ буде одиничним. Будемо розглядати A як модуль над груповим кільцем $F_p\langle g\rangle$. Як і раніше, щоб скоротити позначення, покладемо $J = F_p\langle g\rangle$. З вибору підмодуля C випливає, що C співпадає з Z-компонентою A, де $Z = (g-1)J$ (очевидно, що цей ідеал буде максимальним). З **теореми 1.2.25** випливає, що C містить у собі підмодуль B, який задовольняє наступні умови: B – J-сервантний підмодуль, $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, де B_λ – циклічний J-підмодуль для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$, фактор-модуль C/B буде J-подільним.

Припустимо, що $B \neq C_B(g)$. Тоді у множині Λ можна знайти такий індекс ν, що $C_B(g)$ не містить у собі B_ν. Покладемо $E = \oplus_{\lambda\neq\nu} B_\lambda$. Застосувавши знову **лему 3.3.1**, отримаємо, що комутант $\langle E, g\rangle$ буде черніковською підгрупою. З того факту, що E – елементарна абелева підгрупа випливає, що комутант $[\langle E,g\rangle, \langle E,g\rangle]$ буде скінченним, зокрема, підгрупа $\langle E,g\rangle$ буде FC-групою, а в цьому випадку індекс $|E : C_E(g)|$ мусить бути скінченним. Але тоді і індекс $|B : C_B(g)|$ також буде скінченним. А це вже тягне за собою той факт, що $Ann_J(B) \neq \langle 0\rangle$. З **теореми 1.2.26** отримуємо наступний прямий розклад: $C = B \oplus D$. Оскільки D є ізоморфним до фактор-модуля C/B, то D буде J-подільним підмодулем. Але тоді за **теоремою 1.2.23** D розкладається у пряму суму прюферових підмодулів. Як і при доведенні **леми 3.3.7** можна показати, що D мусить бути нульовим, тобто C співпадає з B. Зокрема, індекс $|C : C_C(g)|$ буде скінченним.

Залишилося тільки розглянути випадок, коли або порядок елемента g є скінченним, або $|g|$ буде нескінченним, але ж $g^k \in C_G(A)$ для деякого натурального числа k. Позначимо через J групову алгебру нескінченної циклічної групи $\langle y\rangle$ над простим полем $F_p\langle y\rangle$, і визначимо дію елемента y

на A за правилом $ay = a^g$ для кожного елемента $a \in A$. Ця дія природним чином може бути продовжена до дії усього кільця J на A, тобто A стає модулем над J. Кільце J буде областю головних ідеалів, але вже $Ann_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. Зокрема і $Ann_J(C) \neq \langle 0 \rangle$. Тоді за **теоремою 1.2.24** маємо прямий розклад $C = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, де B_λ – циклічний J-підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Знову застосувавши наведені вище міркування, можемо довести, що індекс $|C : C_C(g)|$ буде скінченним. □

3.3.11. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева p-підгрупа групи G, де p – просте число, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо, що підгрупа A є $\langle g \rangle$-інваріантною. Якщо C – верхній $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-гіперцентр модуля A, то взаємний комутант $[C, g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо g має нескінченний порядок, то перетин $A \cap \langle g \rangle$ буде одиничним. Якщо ж порядок елементу g є скінченним, то і перетин $S = A \cap \langle g \rangle$ також буде скінченним. Очевидно, S буде $\langle g \rangle$-інваріантною підгрупою. Тому в цьому випадку замість підгрупи A будемо розглядати її фактор-групу A / S. Щоб не вводити нових позначень ми можемо просто припустити, що у кожному з випадків перетин $A \cap \langle g \rangle$ є одиничним.

Якщо $[g, C] = \langle 1 \rangle$, то все доведено. Тому можемо припустити, що C містить елемент c, що має властивість $[g, c] \neq 1$. Позначимо нормальне замикання $\langle c \rangle^{\langle g \rangle}$ через C_1, тоді C_1 буде скінченною та взаємний комутант $[g, C_1]$ є неодиничним. Розглянемо нижній шар $L = \Omega_1(C)$ підгрупи C. Знову, щоб дещо скоротити позначення, покладемо $J = F_p\langle y \rangle$, де $\langle y \rangle$ – нескінченна циклічна група, а дію y на A визначимо за правилом $ay = a^g$ для кожного елемента $a \in A$. Кільце J буде областю головних ідеалів. З **леми 3.3.7** випливає, що ідеал $Ann_J(C)$ буде ненульовим. Застосувавши

тепер **теорему 1.2.24**, отримаємо прямий розклад $C=\oplus_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$, де B_λ – циклічний J-підмодуль. **Лема 3.3.10** показує, що знайдеться така скінченна підмножина $\Phi\subseteq\Lambda$, що $B_\lambda(y-1)=\langle 0\rangle$ для всіх індексів λ, що належать до підмножини $\Lambda\setminus\Phi$. Інакше кажучи, $[g,B_\lambda]=\langle 1\rangle$ для кожного $\lambda\in\Lambda\setminus\Phi$. Той факт, що C_1 є скінченною, тягне за собою скінченність перетину $L\cap C_1$. Тому існує така скінченна підмножина $\Psi\subseteq\Lambda$, що прямий добуток $\oplus_{\lambda\in\Psi}B_\lambda$ містить у собі перетин $L\cap C_1$. Покладемо $\Delta=\Phi\cup\Psi$, $Q=\oplus_{\lambda\in\Delta}B_\lambda$, за цим вибором підгрупа Q буде скінченною. Вибираємо тепер $\langle g\rangle$-інваріантну підгрупу E в підгрупі C, яка є максимальною відносно наступних властивостей:

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda\setminus\Delta}B_\lambda\le E \text{ та } Q\cap E=\langle 1\rangle.$$

Покладемо $R/E=\Omega_1(C/E)$. З **леми 3.3.10** можна вивести, що індекс $|R/E:C_{R/E}(g)|$ буде скінченним. Вибір підгрупи E забезпечує тепер той факт, що R/E буде скінченною. Звідси випливає, що фактор-група C/E буде черніковською. Застосувавши знову **лему 3.3.1**, отримаємо, що індекс $|E:C_E(g)|$ буде скінченним. Звідси випливає, що і фактор-група $C/C_C(g)$ буде черніковською.

Відображення $\phi:c\to[g,c],c\in C$ є очевидно $\langle g\rangle$-ендоморфізмом A. У цьому випадку підгрупи $\mathrm{Im}\phi=[g,C]$ та $Ker\phi=C_C(g)$ будуть $\langle g\rangle$-інваріантними в A. Застосувавши тепер ізоморфізм $[g,C]\cong C/C_C(g)$, отримаємо, що комутант $[g,C]$ буде черніковською підгрупою. □

3.3.12. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо також, що підгрупа A буде $\langle g\rangle$-інваріантною. Якщо C – верхній $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-гіперцентр модуля A, то взаємний комутант $[C,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Як і при доведенні попереднього наслідку можна припустити, що g має нескінченний порядок, то перетин $A \cap \langle g \rangle$ є одиничним. Маємо стандартний примарний прямий розклад $C = Dr_{p\in\pi} C_p$, де $\pi = \Pi(C)$ та C_p – силовська p-підгрупа C, $p \in \pi$. Якщо рівність $[g, C_p] = \langle 1 \rangle$ має місце для кожного простого числа p, то взаємний комутант $[g, C]$ буде одиничним, і все доведено. Тому залишається розглянути випадок, коли існує таке просте число q, що $[g, C_q] \neq \langle 1 \rangle$. За **наслідком 3.1.11** взаємний комутант $[g, C_q]$ буде черніковською підгрупою. Покладемо $L = Dr_{p\neq q} C_p$. Застосувавши **лему 3.3.1**, ми отримаємо, що індекс $|L : C_L(g)|$ буде скінченним. У свою чергу, з цього випливає скінченність комутанту $[g, L]$. Прийнявши до уваги існування прямого розкладу $[g, C] = [g, C_q] \times [g, L]$, отримаємо, що взаємний комутант $[g, C]$ буде черніковською підгрупою. □

3.3.13. Лема. *Нехай G – абелева група, A – такий $\mathbb{Z}G$-модуль, що $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Припустимо, що B – $\mathbb{Z}G$-підмодуль A, що задовольняє наступні умови:*

(1) *B та A / B – прості $\mathbb{Z}G$-модулі;*

(2) *B – G-центральний підмодуль, а A / B – G-екцентральний.*

Тоді існує такий $\mathbb{Z}G$-підмодуль C, що має місце наступний прямий розклад $A = B \oplus C$.

Доведення. Виберемо в групі G довільний неодиничний елемент z. З того факту, що група G абелева, випливає, що відображення

$$\phi_z : a \to a(z-1), a \in A$$

буде $\mathbb{Z}G$-ендоморфізмом A. Зокрема звідси випливає, що $\mathrm{Im}\phi_z$ та $Ker\phi_z$ будуть $\mathbb{Z}G$-підмодулями A. З вибору цього відображення випливає, що $Ker\phi_z$ містить у собі B. Якщо тепер припустити, що $Ker\phi_z$ не співпадає з B, то з наших умов випливає рівність $Ker\phi_z = A$, яка тягне за собою

співвідношення $z \in C_G(A) = \langle 1 \rangle$, що приводить до суперечності. Отже, $Ker\phi_z = B$, а тому будемо мати

$$A / Ker\phi_z \cong \mathrm{Im}\phi_z = C,$$

а це показує, що C буде $\mathbb{Z}G$-підмодулем A, який має властивість $C_G(C) \neq G$. Більш того, C – простий $\mathbb{Z}G$-підмодуль, а тому з нерівності $C \neq B$ випливає, що перетин $C \cap B$ мусить бути нульовим. Оскільки фактор-модуль A / B є простим $\mathbb{Z}G$-модулем, то $C + B = A$, а тому маємо прямий розклад $A = B \oplus C$. □

3.3.14. Лема. *Нехай G – абелева група, A – такий $\mathbb{Z}G$-модуль, що $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Припустимо, що B – $\mathbb{Z}G$-підмодуль A, що задовольняє наступні умови:*

(1) *B та A / B – прості $\mathbb{Z}G$-модулі;*

(2) *B – G-екцентральний підмодуль, а A / B – G-центральний.*

Тоді існує такий $\mathbb{Z}G$-підмодуль C, що має місце наступний прямий розклад $A = B \oplus C$.

Доведення. Виберемо в групі G довільний неодиничний елемент z. З того факту, що група G абелева, випливає, що відображення

$$\phi_z : a \to a(z-1), a \in A$$

буде $\mathbb{Z}G$-ендоморфізмом A. Зокрема звідси випливає, що $\mathrm{Im}\phi_z$ та $Ker\phi_z$ будуть $\mathbb{Z}G$-підмодулями A. Оскільки $C_G(A / B) = G$, $\mathrm{Im}\phi_z \leq B$. Якщо ми припустимо, що $\mathrm{Im}\phi_z = \langle 0 \rangle$, тоді $z \in C_G(A) = \langle 1 \rangle$, і ми отримуємо суперечність. Отже, $\mathrm{Im}\phi_z$ – це ненульовий підмодуль. З того факту, що B – простий $\mathbb{Z}G$-підмодуль, випливає тоді рівність $\mathrm{Im}\phi_z = B$. $\mathbb{Z}G$-фактор $A(z-1) / B(z-1)$ буде $\mathbb{Z}G$-гомоморфним образом фактор-модуля A / B. Тоді, врахувавши рівність $C_G(A / B) = G$, будемо мати $C_G(A(z-1) / B(z-1)) = G$. З того факту, що B – простий $\mathbb{Z}G$-підмодуль та співвідношень $A(z-1) = \mathrm{Im}\phi_z = B$ і $C_G(B) \neq G$, отримаємо рівність

$A(z-1)=B(z-1)$. Інакше кажучи, для кожного елемента a модуля A в B існує такий елемент b, що $a(z-1)=b(z-1)$. Звідси випливає, що $(a-b)(z-1)=0$, а тому $a-b\in C_A(z)$. Оскільки a – довільний елемент A, то це означає, що має місце рівність $A=B+C_A(z)$. Зауважимо тепер, що $C_A(z)=Ker\phi_z$, а тому $C_A(z)$ буде $\mathbb{Z}G$-підмодулем. Знову використаємо той факт, що B – простий $\mathbb{Z}G$-підмодуль, і будемо мати, що або перетин $B\cap C_A(z)$ буде нульовим, або $C_A(z)$ містить у собі B. В останньому випадку отримуємо рівність $A=C_A(z)$, яка приводить до співвідношення $z\in C_G(A)=\langle 1\rangle$, а останнє суперечить вибору елемента z. Таким чином, залишається рівність $\langle 0\rangle=B\cap C_A(z)$, яка тягне за собою прямий розклад $A=B\oplus C$, де $C=C_A(z)$. □

3.3.15. Наслідок. *Нехай G – абелева група, A – такий $\mathbb{Z}G$-модуль, що $C_G(A)=\langle 1\rangle$. Припустимо, що A має скінченний $\mathbb{Z}G$-композиційний ряд. Тоді мають місце наступні твердження:*

(1) *$A=C\oplus E$, де C – верхній G-гіперцентр A та E – максимальний G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A;*

(2) *E містить у собі кожний G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A, зокрема, наведений вище прямий розклад є єдиним.*

Доведення. Перше твердження безпосередньо випливає з **лем 3.3.13** та **3.3.14**. Нехай B – G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A. Якщо фактор $(B+E)/E$ є ненульовим, то він містить у собі ненульовий $\mathbb{Z}G$-підмодуль D/E. З ізоморфізму $(B+E)/E\cong B/(B\cap E)$ випливає, що D/E буде G-ізоморфним до деякого простого $\mathbb{Z}G$-фактора підмодуля B. Звідси випливає, що фактор D/E буде G-екцентральним. З іншого боку, співвідношення $(B+E)/E\le A/E\cong C$ показують, що має місце рівність $C_G(D/E)=G$. Отримана суперечність і показує, що E містить у собі підмодуль B. □

3.3.16. Наслідок. *Нехай G – абелева група, A – такий $\mathbb{Z}G$-модуль, що $C_G(A)=\langle 1\rangle$. Припустимо, що кожний скінченно породжений підмодуль A має скінченний $\mathbb{Z}G$-композиційний ряд. Тоді мають місце наступні твердження:*

(1) *$A=C\oplus E$, де C – верхній G-гіперцентр A та E – максимальний G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A;*

(2) *E містить у собі кожний G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A, зокрема, наведений вище прямий розклад є єдиним.*

Доведення. $\mathbb{Z}G$-модуль A має локальну систему скінченно породжених $\mathbb{Z}G$-підмодулів $\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$. Оскільки A_λ має скінченний композиційний $\mathbb{Z}G$-ряд, то **наслідок 3.3.15** доводить існування прямого розкладу $A_\lambda=C_\lambda\oplus E_\lambda$, де C_λ – це верхній $\mathbb{Z}G$-гіперцентр підмодуля A_λ (або інакше $C_\lambda=C\cap A_\lambda$), а E_λ – це максимальний G-гіперекцентральний $\mathbb{Z}G$-підмодуль A_λ для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. Якщо підмодуль A_μ містить у собі підмодуль A_λ, то з співвідношень

$$A_\lambda/(A_\lambda\cap E_\mu)\cong A_\lambda E_\mu/E_\mu\le A_\mu/E_\mu\cong C_\mu$$

отримаємо, що $A_\lambda\cap E_\mu$ буде максимальним G-гіперекцентральним $\mathbb{Z}G$-підмодулем в A_λ, тобто $A_\lambda\cap E_\mu=E_\lambda$. Покладемо тепер $E=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$. Тоді E буде G-інваріантною підгрупою в A, яка має властивість $E\cap A_\lambda=E_\lambda$ для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. За своєю побудовою E буде G-гіперекцентральним $\mathbb{Z}G$-підмодулем модуля A. Тоді з того факту, що має місце прямий розклад

$$A_\lambda=C_\lambda\times E_\lambda=(C\cap A_\lambda)\times(E\cap A_\lambda),$$

випливає існування прямого розкладу $A=C\times E$. Зокрема, E буде максимальним G-гіперекцентральним $\mathbb{Z}G$-підмодулем в A. Доведення другого твердження слово в слово повторює доведення відповідного твердження в **наслідку 3.3.15**. □

3.3.17. Наслідок. *Нехай G – група, A – її нормальна абелева p-підгрупа, де p – просте число. Нехай g – елемент групи G, що має наступну властивість $C_G(A) \neq gC_G(A) \in \zeta(G/C_G(A))$. Якщо $F_p\langle g\rangle$-модуль $\Omega_1(A)$ є періодичним, то A містить у собі такі G-інваріантні підгрупи C, E, що має місце прямий розклад $A = C \times E$, де C – верхній $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-гіперцентр A та E – максимальний $\langle g\rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-підмодуль A.*

Доведення. Якщо елемент g має нескінченний порядок та перетин $\langle g\rangle \cap C_G(A)$ є одиничним, то **лема 3.3.4** показує, що нормальне замикання $\langle a\rangle^{\langle g\rangle}$ буде скінченним для будь-якого елемента a підгрупи A. Якщо ж існує таке натуральне число m, що $g^m \in C_G(A)$, то знову неважко показати, що $\langle a\rangle^{\langle g\rangle}$ буде скінченним. Звідси випливає, що кожний скінченно породжений $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-підмодуль A має скінченний композиційний ряд. Таким чином, ми можемо застосувати **наслідок 3.3.16**. З того факту, що $gC_G(A)$ належить до центру фактор-групи $G/C_G(A)$, випливає, що C буде $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-підмодулем A. З **наслідку 3.3.16** отримуємо, що кожний $\langle g\rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-підмодуль A міститься в E, і це доводить той факт, що підгрупа E також буде G-інваріантною. □

3.3.18. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева періодична підгрупа групи G, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо також, що підгрупа A буде $\langle g\rangle$-інваріантною. Тоді взаємний комутант $[A,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо існує таке натуральне число n, що $g^n \in C_G(A)$ (зокрема, це буде у випадку, коли елемент g має скінченний порядок), то підгрупа $\langle A, g^n\rangle$ буде центральним розширенням підгрупи A за допомогою

циклічної групи. Але тоді підгрупа $\langle A, g^n \rangle$ абелева, а підгрупа $\langle A, g \rangle$ буде майже абелевою. З **теореми 3.2.10** випливає тоді, що комутант $\langle A, g \rangle$ буде черніковською підгрупою, зокрема і взаємний комутант $[g, A]$ також буде такою підгрупою.

Таким чином тепер ми можемо припустити, що перетин $\langle g \rangle \cap C_G(A)$ є одиничним. З **леми 3.3.3** та **наслідку 3.3.17** отримаємо, що A містить у собі такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи C, E, що має місце прямий розклад $A = C \times E$, де C – верхній $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-гіперцентр A, а E – максимальний $\langle g \rangle$-гіперекцентральний $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-підмодуль A. З **наслідку 3.3.9** випливає той факт, що E – черніковська підгрупа. З **наслідку 3.3.12** отримаємо, що і взаємний комутант $[g, C]$ також буде черніковською підгрупою. Звідси і випливає, що і комутант $[g, A]$ буде черніковською підгрупою. □

3.3.19. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева підгрупа групи G, та нехай g – елемент групи G, що не належить до централізатора $C_G(A)$. Припустимо також, що підгрупа A буде $\langle g \rangle$-інваріантною та $[T, g] = \langle 1 \rangle$, де T – періодична частина підгрупи A. Тоді взаємний комутант $[A, g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо існує таке натуральне число n, що $g^n \in C_G(A)$ (зокрема, це буде у випадку, коли елемент g має скінченний порядок), то підгрупа $\langle A, g^n \rangle$ буде центральним розширенням підгрупи A за допомогою циклічної групи. Але тоді підгрупа $\langle A, g^n \rangle$ – абелева, а підгрупа $\langle A, g \rangle$ буде майже абелевою. З **теореми 3.2.10** випливає тоді, що комутант $\langle A, g \rangle$ буде черніковською підгрупою, зокрема і взаємний комутант $[g, A]$ також буде такою підгрупою.

Таким чином тепер ми можемо припустити, що перетин $\langle g\rangle \cap C_G(A)$ є одиничним, зокрема і перетин $\langle g\rangle \cap A$ також є одиничним. Якщо $A = T$, то твердження тривіально виконується. Тому ми можемо вважати, що підгрупа A не буде періодичною. Фактор-група $\langle A, g\rangle / T$ буде розширенням вільної від скруту абелевої підгрупи A/T за допомогою нескінченної циклічної групи. Тому вона також є вільною від скруту. З **теореми 3.1.12** випливає, що фактор-група $\langle A, g\rangle / T$ буде абелевою. Звідси випливає, що для кожного елемента a підгрупи A має місце рівність $a^g = ax$ для деякого елемента $x \in T$. Оскільки елемент x має скінченний порядок, то $g^k \in C_G(a)$, де $k = |x|$. Інакше кажучи, кожний елемент підгрупи A має в $H = \langle A, g\rangle$ тільки скінченну множину спряжених. Застосувавши **теорему 1.2.27** і врахувавши той факт, що $\langle A, g\rangle / T$ є абелевою, отримаємо, що нормальне замикання $\langle a\rangle^H$ буде розширенням скінченної підгрупи за допомогою нескінченної циклічної групи. Зокрема, існує таке натуральне число t, що підгрупа $\langle a^t\rangle$ буде нормальною в H. Нехай елемент a_1 підгрупи A має нескінчений порядок та нехай t_1 – натуральне число, для якого підгрупа $B_1 = \langle a_1^{t_1}\rangle$ буде нормальною в H. Якщо фактор-група A/B_1 має елемент a_2B_1 нескінченного порядку, то знову знаходимо таке натуральне число t_2, що підгрупа $B_2/B_1 = \langle a_2^{t_2}B_1\rangle$ буде нормальною в H/B_1. Застосувавши і далі ті ж самі аргументи, а також трансфінітну індукцію, побудуємо в підгрупі A таку H-інваріантну вільну абелеву підгрупу B, що фактор-група A/B буде вже періодичною. За **наслідком 3.3.18** будемо мати, що комутант H/B буде черніковською підгрупою. Оскільки B є вільною від скруту, то $B \cap T = \langle 1\rangle$. Тепер, застосувавши класичну теорему Ремака, отримаємо вкладання підгрупи H у прямий добуток $H/B \times H/T = L$. Ми вже раніше відмічали, що фактор-група H/T буде абелевою, а комутант фактор-групи H/B є

черніковською підгрупою. Звідси випливає, що і комутант $[L,L]$ також буде черніковською підгрупою. Але в цьому випадку черніковською буде і $[H,H]$, а отже, і взаємний комутант $[A,g]$. □

3.3.20. Теорема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева підгрупа групи G, та нехай $g \in N_G(A) \setminus C_G(A)$. Тоді $[A,g]$ буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Позначимо через T періодичну частину підгрупи A. Застосувавши **наслідок 3.3.18,** отримаємо, що взаємний комутант $B=[g,T]$ буде черніковською підгрупою. В фактор-групі A/B тепер уже будемо мати включення $T/B \le C_{A/B}(gB)$. **Лема 3.3.19** показує, що комутант $[gB, A/B]$ буде черніковською підгрупою. Оскільки і B є черніковською, то звідси отримуємо, що і підгрупа $[A,g]$ буде черніковською. □

3.4. Про будову деяких груп, всі підгрупи яких або нормальні, або мають черніковський комутант

В цьому параграфі ми продовжимо дослідження груп, кожна підгрупа яких або нормальна, або її комутант буде черніковською підгрупою. Ми отримаємо тут опис структури деяких класів майже розв'язних груп, які мають вказану властивість. Почнемо ми з наступного результату.

3.4.1. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A – абелева підгрупа групи G. Якщо B – така підгрупа нормалізатора $N_G(A)$, що $B \ge A$ та фактор B/A буде скінченно породженою абелевою групою, то комутант B буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки фактор-група B/A буде абелевою та скінченно породженою, то вона містить у собі вільну від скруту підгрупу C/A, індекс якої буде скінченним. Покажемо, що комутант C буде черніковською підгрупою. Тоді, застосувавши **теорему 3.2.10**, отримаємо, що і комутант B буде черніковською підгрупою.

Оскільки C/A – вільна від скруту скінченно породжена абелева група, то C/A буде вільною абелевою групою скінченного рангу, тобто $C/A=\langle g_1A\rangle\times\ldots\times\langle g_nA\rangle$. З **теореми 3.3.20** отримаємо, що взаємні комутанти $[g_j,A]$ будуть черніковськими підгрупами для кожного індексу j, $1\le j\le n$. Тоді і їх добуток $D=[g_1,A]\cdot\ldots\cdot[g_n,A]$ також буде черніковською підгрупою. Подальший розгляд ми будемо проводити у фактор-групі B/D, а тому, щоб не робити наших позначень громіздкими, краще вважати, що підгрупа D буде одиничною. У цьому випадку одиничною підгрупою буде і взаємний комутант $[B,A]$. Позначимо періодичну частину підгрупи A через T. Оскільки фактори A/T та B/A є вільними від скруту, то і фактор-група B/T буде вільною від скруту. З **теореми 3.1.12** отримаємо, що вона буде абелевою. У свою чергу, звідси випливає, що взаємні комутанти $[g_j,B]$ будуть періодичними підгрупами для кожного індексу j, $1\le j\le n$. Оскільки підгрупа B є нільпотентною, а її клас нільпотентності не перевищує 2, то маємо стандартний ізоморфізм $[g_j,B]\cong B/C_B(g_j)$ для кожного індексу j, $1\le j\le n$. Очевидно, підгрупа B міститься у кожному з централізаторів $C_B(g_j)$, а це тягне за собою той факт, що фактор-група $B/C_B(g_j)$ буде періодичною. Оскільки вона ще є абелевою та скінченно породженою, то $B/C_B(g_j)$ буде скінченною для кожного індексу j, $1\le j\le n$. Врахувавши тепер **теорему 1.2.27**, отримаємо, що нормальне замикання $\langle g_1,\ldots,g_n\rangle^B$ буде розширенням скінченної підгрупи P за допомогою вільної абелевої групи скінченного рангу. Слід зазначити, що фактор-група B/P буде добутком своєї центральної

підгрупи A/P та вільної абелевої підгрупи. Тому B/P сама буде абелевою. Звідси випливає, що підгрупа P містить у собі комутант $[B,B]$, а це і доводить наше твердження. □

3.4.2. Теорема. *Нехай G – локально ступінчата група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A буде скінченно породженою. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки фактор-група G/A буде скінченно породженою, то в групі G існує така скінченно породжена підгрупа F, що має місце рівність $G = FA$. З **наслідку 3.1.15** отримаємо, що підгрупа F є майже абелевою, а за **теоремою 3.1.12** комутант підгрупи F буде скінченною підгрупою. Ізоморфізм

$$G/A = FA/A \cong F/(F \cap A)$$

показує тепер, що фактор-група G/A має скінченний комутант. У цьому випадку G/A містить у собі скінченно породжену абелеву підгрупу L/A, яка має скінченний індекс. Можна вважати, що підгрупа L буде нормальною в групі G. З **леми 3.4.1** отримаємо, що комутант $[L,L]$ буде черніковською підгрупою. Застосувавши тепер **теорему 3.2.10**, отримаємо, що і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. □

3.4.3. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є абелевою та не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді центр групи G містить її комутант.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{L} = \{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ – така система підгруп групи G, кожна з яких містить у собі A, що $\{L_\lambda / A \mid \lambda \in \Lambda\}$ буде локальною системою всіх скінченно породжених підгруп фактор-групи G/A. З **теореми 3.2.10**

випливає, що комутант D_λ підгрупи L_λ буде черніковською підгрупою для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Оскільки L_λ / A є абелевою, то підгрупа A містить у собі D_λ, зокрема D_λ є абелевою. Тоді D_λ має таку систему $\{D_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ своїх скінчених G-інваріантних підгруп, що D_λ буде породжуватись підгрупами цієї системи. Централізатор кожної з підгруп D_{λ_n} має скінченний індекс в групі G. З іншого боку, кожний такий централізатор містить у собі підгрупу A, а оскільки фактор-група G / A не містить у собі власних підгруп скінченного індексу, то цей централізатор мусить співпадати з усією групою G. Інакше кажучи, центр групи G містить у собі підгрупу D_{λ_n} для кожного натурального числа n. Оскільки підгрупи D_{λ_n} породжують D_λ, то центр групи G містить у собі підгрупу D_λ, і це має місце для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Якщо $L_\lambda \le L_\mu$, то очевидно має місце включення $D_\lambda \le D_\mu$. Оскільки система $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ є локальною, то і система $\{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ буде локальною. Тому об'єднання $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ буде підгрупою групи G. Як ми показали вище, центр групи G містить у собі підгрупу D. З того факту, що група G породжується підгрупами $L_\lambda, \lambda \in \Lambda$, випливає, що комутант $[G,G]$ співпадає з підгрупою D. Але тоді фактор-група $G / \zeta(G)$ буде абелевою. □

3.4.4. Лема. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G / A є абелевою та не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді група G буде абелевою.*

Доведення. З **леми 3.4.3** отримуємо, що група G буде нільпотентною та її клас нільпотентності не перевищує 2. Оскільки вона є періодичною, то маємо стандартний прямий розклад $G = Dr_{p \in \Pi(G)} S_p$, де S_p – силовська p-підгрупа G, $p \in \Pi(G)$. Кожна підгрупа S_p буде розширенням своєї

нормальної абелевої підгрупи $S_p \cap A$ за допомогою абелевої групи $S_p/(S_p \cap A) \cong S_pA/A$. Покладемо $Q = Dr_{q\neq p}S_q$, тоді маємо ізоморфізм $S_p \cong G/Q$, з якого отримуємо ізоморфізм

$$S_pA/A \cong G/QA \cong (G/A)/(QA/A).$$

Таким чином, $S_p/(S_p \cap A)$ буде ізоморфною до деякої фактор-групи групи G/A. Це тягне за собою той факт, що фактор-група $S_p/(S_p \cap A)$ не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. Оскільки ця фактор-група є абелевою, то вона буде подільною. Із **пропозиції 1.2.5** отримаємо тепер, що центр підгрупи S_p містить у собі підгрупу $S_p \cap A = A_p$. Оскільки S_p/A_p є подільною абелевою, то з **теореми 1.2.28** отримуємо, що вона розкладається у прямий добуток квазіциклічних підгруп. Але тоді S_p має зростаючий ряд підгруп

$$A_p = P_0 \leq P_1 \leq \ldots P_\alpha \leq P_{\alpha+1} \leq \ldots P_\gamma = S_p,$$

фактори якого будуть квазіциклічними групами. Розглянемо підгрупу P_1. Оскільки A_p буде її центральною підгрупою, а фактор-група P_1/A_p є квазіциклічною, то P_1 буде абелевою. З того факту, що S_p/A_p є абелевою, випливає, що P_1 буде нормальною підгрупою в S_p/A_p. З доведеного вище отримуємо, що P_1 буде центральною підгрупою S_p. За допомогою попередніх аргументів покажемо, що P_2 буде абелевою. Застосувавши тепер просту трансфінітну індукцію, отримаємо, що S_p є абелевою. Оскільки це має місце для кожного простого числа p з множини $\Pi(G)$, то і група G буде абелевою. □

3.4.5. Наслідок. *Нехай G – періодична метабелева група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді вона буде абелевою.*

3.4.6. Наслідок. *Нехай G – періодична розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді вона буде абелевою.*

Доведення. Припустимо, що група G не є абелевою, та нехай $D=[G,G]$ та $K=[D,D]$. Тоді $G\neq D$ та $D\neq K$. Фактор-група G/K буде метабелевою. Але тоді з **наслідку 3.4.5** випливає, що вона абелева. У цьому випадку K містить D, а оскільки має місце і протилежне включення, то $D=K$. Отримана суперечність показує, що G абелева. □

3.4.7. Наслідок. *Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді вона буде абелевою.*

Доведення. Дійсно, оскільки група G не містить у собі власних підгруп, які мають скінченний індекс, то вона буде розв'язною, а тоді можемо застосувати **наслідок 3.4.6**. □

3.4.8. Теорема. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G має нормальну систему Куроша-Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.*

Доведення. Дійсно, із **теореми 3.1.13** випливає, що група G буде майже розв'язною. Тепер є можливість застосувати **наслідок 3.4.7**. □

3.4.8. Наслідок. *Нехай G – періодична локально ступінчата група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.*

3.4.9. Наслідок. *Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.*

3.4.10. Наслідок. *Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді група G буде абелевою.*

Доведення. З **наслідку 3.4.7** отримуємо, що фактор-група G/A буде абелевою. Тепер залишається застосувати **лему 3.4.4**. □

3.4.11. Теорема. *Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну підгрупу A, що фактор-група G/A не має власних підгруп скінченного індексу. Якщо комутант A є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Нехай $K=[A,A]$, тоді підгрупа K буде черніковською. До фактор-групи G/K можемо тепер застосувати **наслідок 3.4.10** і отримати, що фактор-група G/K буде абелевою. Це означає, що K буде комутантом усієї групи G. □

3.4.12. Наслідок. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну підгрупу A, що фактор-група G/A є черніковською. Якщо комутант A є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Дійсно, позначимо через D/A подільну частину черніковської фактор-групи G/A та нехай $K=[D,D]$. Із **теореми 3.4.11** можна тепер отримати, що K буде черніковською підгрупою. Оскільки D має в групі G скінченний індекс, то **теорема 3.2.10** доводить той факт, що комутант усієї групи G також буде черніковською підгрупою. □

Розглянемо зараз наступне узагальнення резидуально скінченних груп. Нехай $\mathfrak{X}$ – клас груп. Будемо говорити, що група G є *резидуально* $\mathfrak{X}$*-група*, якщо для кожного її неодиничного елемента g існує така нормальна підгрупа H_g, що не містить цього елемента і фактор-група G/H_g належить до класу груп $\mathfrak{X}$.

Якщо $\mathfrak{X}$ – це клас черніковських груп, то будемо говорити про *резидуально черніковські групи.*

3.4.13. Теорема. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G є резидуально черніковською групою. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки G є резидуально черніковською групою, то вона має систему нормальних підгруп $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, що мають наступні властивості: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \langle 1 \rangle$; G/H_λ є черніковською для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$.

Якщо знайдеться такий індекс $\mu \in \Lambda$, що комутант $[H_\mu, H_\mu]$ є черніковською підгрупою, то з **наслідку 3.4.12** отримаємо, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. Таким чином, далі ми можемо вважати, що кожен комутант $[H_\lambda, H_\lambda]$ не буде черніковською підгрупою для будь-якого індексу $\lambda \in \Lambda$. З **леми 3.1.1** отримаємо, що фактор-група G/H_λ буде дедекіндовою для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$.

Припустимо, що група G містить у собі таку нормальну підгрупу U, що фактор-група G/U буде неабелевою дедекіндовою групою. У цьому випадку будемо мати $G/U = Q/U \times V/U$, де Q/U – група кватерніонів, а V/U – прямий добуток елементарної абелевої 2-підгрупи та періодичної абелевої підгрупи без елементів порядку 2 (**теорема 1.2.15**). Розглянемо зараз систему нормальних підгруп $\{V_\lambda = V \cap H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Оскільки підгрупа V має скінченний індекс в усій групі G, то фактор-група G/V_λ (а, отже і

V/V_λ) буде черніковською для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. Припустимо, що знайдеться такий індекс $\nu\in\Lambda$, що фактор-група V/V_ν не є абелевою. Тоді V містить у собі нормальну підгрупу Y, для якої фактор-група V/Y буде групою кватерніонів. Підгрупа Y має, очевидно, скінченний індекс в групі G. Якщо припустити тепер, що її комутант $[Y,Y]$ є черніковською підгрупою, то з **теореми 3.2.10** отримаємо, що і комутант $[G,G]$ буде черніковською підгрупою, і все доведено. Тому зараз будемо вважати, що комутант $[Y,Y]$ не є черніковською підгрупою. Тоді підгрупа Y буде нормальною в групі G, і за **лемою 3.1.1** фактор-група G/Y мусить бути дедекіндовою. З іншого боку, фактори G/V та V/Y ізоморфні до групи кватерніонів, а тому G/Y не може бути дедекіндовою. Отримана суперечність показує, що фактор-група V/V_λ є абелевою для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. З рівності $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda=\langle 1\rangle$ випливає, що і $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=\langle 1\rangle$. Використовуючи теорему Ремака, отримаємо, що підгрупа V буде ізоморфною до деякої підгрупи добутку $Dr_{W\in\mathfrak{S}}V/V_\lambda$. Оскільки кожна з груп V/V_λ є абелевою, то добуток $Dr_{W\in\mathfrak{S}}V/V_\lambda$ буде абелевою групою, а тому і її підгрупа V також буде абелевою. За своїм вибором підгрупа V має скінченний індекс в групі G, і застосувавши знову **теорему 3.2.10,** отримаємо, що і комутант $[G,G]$ буде черніковською підгрупою. □

3.4.14. Наслідок. *Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що силовські p-підгрупи G є черніковськими для кожного простого числа p. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. З **теореми 1.2.29** випливає, що група G буде майже локально розв'язною. З **наслідку 1.2.31** тоді випливає, що фактор-група $G/O_{p'}(G)$ буде черніковською групою для кожного простого числа p. Очевидно, перетин усіх нормальних підгруп $O_{p'}(G)$ є одиничним (тобто

перетин за усіма простими числами p). Це означає, що група G є резидуально черніковською групою. З **теореми 3.4.13** отримаємо тепер, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. □

3.4.15. Наслідок. *Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що група G має скінченний секційний ранг. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Дійсно, з **теореми 1.2.32** випливає, що для кожного простого числа p силовські p-підгрупи групи G будуть черніковськими, так що можемо застосувати **наслідок 3.4.14.** □

3.4.16. Наслідок. *Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що група G має скінченний спеціальний ранг. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

3.4.17. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є квазіциклічною p-групою. Якщо g – елемент групи G, що має нескінченний порядок, то взаємний комутант $[g,G]$ буде квазіциклічною p-групою або одиничною групою.*

Доведення. З **леми 3.4.3** випливає, що комутант групи G міститься в її центрі. Звідси випливає, що відображення $\theta_g : x \to [g,x], x \in G$, буде ендоморфізмом групи G. Також маємо $Ker\theta_g = C_G(g), \operatorname{Im}\theta_g = [g,G]$. Очевидно, що централізатор $C_G(g)$ містить у собі підгрупу A. Оскільки кожна фактор-група G/A або є квазіциклічною p-групою, або буде одиничною, то з ізоморфізму $G/Ker\theta_g = G/C_G(g) \cong \operatorname{Im}\theta_g = [g,G]$ отримаємо, що взаємний комутант $[g,G]$ буде або квазіциклічною p-групою або одиничною групою. □

3.4.18. Наслідок. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є подільною черніковською групою. Якщо g – елемент групи G, що має нескінченний порядок, то взаємний комутант $[g,G]$ буде черніковською групою.*

Доведення. Оскільки фактор-група G/A є подільною черніковською групою, то група G має скінченний ряд підгруп

$$A = A_0 \le A_1 \le \ldots \le A_n = G,$$

фактори A_{j+1}/A_j якого будуть квазіциклічними групами, $0 \le j \le n-1$. Доведення проведемо за допомогою індукції за числом n. Якщо $n=1$, то твердження випливає з **леми 3.4.17** (слід зазначити, що одинична група є черніковською). Припустимо тепер, що $n>1$, та нехай вже доведено, що взаємний комутант $[g,A_{n-1}]$ є черніковською підгрупою. Наступне доведення буде проводитись для фактор-групи $G/[g,A_{n-1}]$. Нашою метою є довести, що взаємний комутант $[g[g,A_{n-1}],G/[g,A_{n-1}]]$ є черніковською підгрупою. З рівності $[g,G]/[g,A_{n-1}]=[g[g,A_{n-1}],G/[g,A_{n-1}]]$ та нашого припущення про те, що $[g,A_{n-1}]$ – черніковська підгрупа, буде випливати тоді, що взаємний комутант $[g,G]$ також буде черніковською підгрупою. Тому, щоб не ускладнювати наші позначення, є доцільним припустити, що підгрупа $[g,A_{n-1}]$ є одиничною. Інакше кажучи, ми будемо вважати, що центр підгрупи A_{n-1} містить елемент g. З **леми 3.4.3** випливає, що комутант групи G міститься в її центрі. Звідси випливає, що відображення $\theta_g : x \to [g,x], x \in G$, буде ендоморфізмом G. З індуктивного припущення випливає, що централізатор $C_G(g)$ містить у собі A_{n-1}. З ізоморфізму $G/Ker\theta_g = G/C_G(g) \cong \mathrm{Im}\,\theta_g = [g,G]$ отримаємо, що взаємний комутант $[g,G]$ буде або квазіциклічною p-групою, або одиничною групою. □

3.4.19. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є абелевою та мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки фактор-група G/A є абелевою та мінімаксною, то вона містить у собі таку вільну від скруту скінченно породжену підгрупу C/A, що фактор-група G/C буде черніковською групою. Позначимо через D/C подільну частину групи G/C. Нашою метою буде довести, що комутант $[D,D]$ буде черніковською підгрупою. Тоді з **теореми 3.2.10** отримаємо, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. Тому, щоб не ускладнювати наші позначення, є доцільним припустити, що фактор-група G/C буде подільною черніковською групою.

З **теореми 3.4.2** випливає, що комутант $[C,C]$ буде черніковською підгрупою. Знову, щоб не ускладнювати наші позначення, ми можемо припустити, що підгрупа $[C,C]$ буде одиничною. Інакше кажучи, ми будемо вважати, що підгрупа C є абелевою. Тоді підгрупа A буде її періодичною частиною. З **теореми 1.2.4** слідує, що підгрупа A виділяється у підгрупі C прямим множником, тобто $C = A \times K$ для деякої підгрупи K. Зазначимо, що із ізоморфізму $C/A \cong K$ випливає той факт, що підгрупа K буде вільною від скруту та скінченно породженою, тобто вона буде вільною абелевою. Отже, K має прямий розклад

$$K = \langle g_1 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle,$$

де кожен з елементів g_j має нескінченний порядок, $1 \le j \le n$. З **леми 3.4.3** випливає, що центр групи G містить її комутант. **Лема 3.4.18** показує, що взаємний комутант $[g_j, G]$ буде черніковською групою для кожного індексу j, $1 \le j \le n$. Позначимо через L добуток цих взаємних комутантів, $L = [g_1, G] \cdot \ldots \cdot [g_n, G]$. Тоді L буде нормальною в G черніковською

підгрупою. В фактор-групі G/L підгрупа KL/L уже міститься в її центрі, зокрема, вона буде нормальною. Фактор-група $(G/L)/(KL/L) \cong G/KL$ буде розширенням своєї періодичної абелевої підгрупи $(CL/L)/(KL/L)$ за допомогою подільної черніковської групи G/CL, а тому буде періодичною. Застосувавши **лему 3.4.4,** ми отримаємо той факт, що $(G/L)/(KL/L)$ буде абелевою. Далі, фактор-група G/L буде розширенням своєї періодичної нормальної підгрупи AL/L за допомогою абелевої групи G/AL. Позначимо через T/AL періодичну частину фактор-групи G/AL. Тоді підгрупа T/L буде нормальною періодичною підгрупою і фактор-група $(G/L)/(T/L) \cong G/T$ буде абелевою групою, вільною від скруту. Оскільки $KL/L \cong K$ є вільною від скруту, то перетин $(T/L) \cap (KL/L)$ буде одиничним. Застосувавши теорему Ремака, отримаємо вкладання групи G/L в прямий добуток

$$(G/L)/(KL/L) \times (G/L)/(T/L).$$

Як ми вже бачили вище, обидва прямих множника цього добутку є абелевими групами. Звідси випливає, що фактор-група G/L також буде абелевою. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що комутант усієї групи G міститься в підгрупі L, а отже співпадає з L. Оскільки підгрупа L є черніковською, то все доведено. □

3.4.20. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що G/A є майже розв'язною та мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. З **теореми 3.1.12** випливає, що множина T всіх елементів скінченного порядку групи G буде характеристичною підгрупою, а фактор-група G/T буде вільною від скруту абелевою групою. Оскільки підгрупа A є періодичною, то вона міститься в підгрупі T. Зазначимо, що періодична майже розв'язна мінімаксна група є черніковською, а отже фактор-група

T/A є черніковською. З **наслідку 3.4.12** випливає, що комутант $[T,T]$ буде черніковською підгрупою. З **леми 3.4.19** тепер отримуємо, що комутант фактор-групи $G/[T,T]$ буде черніковською підгрупою. Нарешті, рівність $[G,G]/[T,T]=[G/[T,T],G/[T,T]]$ доводить той факт, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. □

3.4.21. Теорема. *Нехай G – локально ступінчата група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Слід тільки зазначити, що з **наслідку 3.1.16** випливає, що G буде майже розв'язною, а тому можна застосувати **лему 3.4.20**. □

Розглянемо ще одну із можливих частинних ситуацій.

3.4.22. Теорема. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу, що фактор-група G/A також є абелевою. Якщо $\Pi(A)\cap\Pi(G/A)=\varnothing$, то комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо центр групи містить у собі підгрупу A, то група G буде нільпотентною. У цьому випадку вона буде прямим добутком своєї силовської $\Pi(A)$-підгрупи та силовської $\Pi(G/A)$-підгрупи. Зокрема, вона буде абелевою, так що у цьому випадку все доведено. Тому далі будемо розглядати випадок, коли підгрупа A не є центральною. Тоді знайдеться елемент $a_1\in A$ та елемент $g_1\in G\setminus A$, що мають властивість $[a_1,g_1]\neq 1$. Ми можемо вважати, що $\Pi(\langle g_1\rangle)\cap\Pi(G/A)=\varnothing$. Покладемо $C_1=C_A(g_1)$. Оскільки фактор-група G/A є абелевою, то відображення

$$\theta_1: a\to[g_1,a], a\in A$$

буде G-ендоморфізмом підгрупи A. Звідси випливає, що $Ker\theta_1=C_A(g_1)$ та

$\mathrm{Im}\theta_1 = [g_1, A]$ будуть G-інваріантними підгрупами A. Оскільки підгрупа A має скінченний індекс в $\langle A, g_1 \rangle$, то **теорема 3.2.10** показує, що комутант підгрупи $\langle A, g_1 \rangle$ буде черніковською підгрупою. Зокрема, тоді і взаємний комутант $[g_1, A]$ буде черніковською підгрупою. Із ізоморфізму

$$A / Ker\theta_1 = A / C_A(g_1) \cong \mathrm{Im}\theta_1 = [g_1, A]$$

отримаємо, що фактор-група $A / C_A(g_1)$ буде черніковською. Припустимо, що центр групи G містить у собі підгрупу C_1 і розглянемо фактор-групу G / C_1. З **теореми 1.2.32** випливає, що підгрупа A / C_1 має доповнення: $G / C_1 = A / C_1 \leftthreetimes L / C_1$. Із рівності $\Pi(A) \cap \Pi(G / A) = \varnothing$ та того факту, що A / C_1 – абелева черніковська підгрупа, випливає, що централізатор E / C_1 підгрупи A / C_1 має в групі G / C_1 скінченний індекс. Далі, підгрупа E / C_1 уже має прямий розклад $E / C_1 = A / C_1 \times K / C_1$. Зокрема, вона буде абелевою. З включення $C_1 \le \zeta(G)$ отримаємо, що підгрупа E буде нільпотентною, а отже абелевою. Залишається застосувати **теорему 3.2.10**.

Припустимо тепер, що центр групи G не містить у собі підгрупи C_1. Тоді знайдеться елемент $a_2 \in C_1$ та елемент $x_2 \in G \setminus A$, що мають властивість $[a_2, x_2] \neq 1$. З **теореми 1.2.32** випливає, що підгрупа $\langle g_1, x_2, A \rangle$ має напівпрямий розклад: $\langle g_1, x_2, A \rangle = A \leftthreetimes S$ та всі доповнення до A є спряженими. Зокрема, можна вважати, що підгрупа S містить елемент g_1. Маємо $x_2 = g_2 b$, де $g_2 \in S, b \in A$. Тоді $[a_2, x_2] = [a_2, g_2]$. Зазначимо, що S є абелевою, а тому $S = \langle g_1, g_2 \rangle$. Зазначимо, що підгрупа S є прямим добутком двох циклічних підгруп, а тому можна вважати, що $S = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$. З **теореми 1.2.33** отримуємо прямий розклад

$$A = C_A(\langle g_1 \rangle) \oplus [A, \langle g_1 \rangle] = C_A(g_1) \oplus [A, \langle g_1 \rangle] = C_1 + [A, \langle g_1 \rangle].$$

Оскільки $a_2 \in C_1$, то $\langle g_1, a_1 \rangle \cap \langle g_2, a_2 \rangle = \langle 1 \rangle$. Покладемо $C_2 = C_A(\langle g_1, g_2 \rangle)$. Повторюючи попередні міркування, отримаємо, що фактор- група A / C_2

буде черніковською. Якщо припустити, що центр групи G містить у собі підгрупу C_2, то як і раніше, можна довести, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. Тому будемо вважати, що підгрупа C_2 не є центральною. Тоді знову будемо знаходити елементи g_3, a_3 і т.д. Застосувавши попередні аргументи, знайдемо елементи $g_1,...,g_n,a_1,...,a_n$, які задовольняють наступні умови:

(1) $\langle g_1,...,g_n\rangle = \langle g_1\rangle \times ... \times \langle g_n\rangle$;

(2) $\Pi(\langle g_1,...,g_n\rangle) \cap \Pi(A) = \varnothing$;

(3) $a_1,...,a_n \in A$;

(4) $[a_j, g_j] \neq 1, 1 \leq j \leq n$;

(5) $\langle g_1, a_1,..., g_{j-1}, a_{j-1}\rangle \cap \langle g_j, a_j\rangle = \langle 1\rangle$;

(6) $[g_j, a_k] = 1, k < j, 1 \leq j, k \leq n$.

Якщо процес вибору цих елементів буде скінченним, то, як і вище, можна довести, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. Тому припустимо, що цей процес буде нескінченний. Розглянемо довільний елемент g_j. Множину натуральних чисел $\{n \mid n > j\}$ розіб'ємо на дві нескінченні підмножини Λ та M, що мають пустий перетин. Нехай $U = \langle g_t, a_t \mid t \in \Lambda\rangle$, $V = \langle g_t, a_t \mid t \in M\rangle$. Обидві підгрупи U, V будуть $\langle g_j\rangle$-інваріантними, $U \cap V = \langle 1\rangle$, комутанти $[U,U], [V,V]$ не є черніковськими підгрупами, та $\langle g_j\rangle \cap UV = \langle 1\rangle$. Тоді і комутанти підгруп $\langle g_j\rangle U$ та $\langle g_j\rangle V$ не є черніковськими, а тому ці підгрупи будуть нормальними. Але тоді і їх перетин $\langle g_j\rangle = \langle g_j\rangle U \cap \langle g_j\rangle V$ повинен бути нормальною підгрупою. Звідси випливає, що $[a_j, g_j] \in \langle g_j\rangle$. З іншого боку, оскільки A також є нормальною, $[a_j, g_j] \in A$, а тому $[a_j, g_j] \in \langle g_j\rangle \cap A = \langle 1\rangle$. Але це суперечить вибору елементів a_j, g_j. Ця суперечність доводить результат. □

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Kurdachenko L.A., Semko N.N., Subbotin I.Ya.** *Insight into modules over Dedekind domains*. – Kiev: Institute of Mathematics, 2008. – 119 p.
2. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind* // Math. Annalen. – 1897.– **48**. – P. 548-561.
3. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe* // S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2**. – P. 12-17.
4. **Шмидт О.Ю.** *Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп* // Мат. сб. – 1926. – **33**. – С. 161-172.
5. **Шмидт О.Ю.** *Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп* // Труды семинара по теории групп. – М. – Л.: Наука. – 1938. – С. 7-26.
6. **Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп* // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 6. – С. 111-131.
7. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием миниальности для неинвариантных подгрупп* // Матем. заметки. – 1967. – **6**, № 1. – С. 11-18.
8. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** *О метагамильтоновых группах I* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – **5**, № 3. – С. 45-49.
9. **Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М.** *О метагамильтоновых группах II* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – **6**, № 5. – С. 50-53.
10. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** *О метагамильтоновых группах III* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – **7**, № 3. – С. 195-199.
11. **Нагребецкий В.Т.** *Конечные нильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – **6**, № 1. – С. 80-88.
12. **Махнев А.А.** *О конечных метагамильтоновых группах* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – **10**, № 1. – С. 60-75.

13. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп* // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С.179-188.

14. **Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Будова розв'язних метагамільтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6-9.

15. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О строении непериодических метагамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32-40.

16. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180-185.

17. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170-176.

18. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 168-175.

19. **Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.** *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743-750.

20. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** *The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes* // Advanced in Group Theory 2002. Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May – June 2002. – Roma: Aracne. – P. 93-110.

21. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** *Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes* // Math. Proceedings of the Royal Irish Academy. – December 2004. – **104A**, №2. – P. 177-189.

22. **Brandl R.** *Groups with few non-normal subgroups* // Communications in Algebra. – 1995. – **23**, №6. – P. 2091-2098.
23. **Mousavi H.** *On finite groups with few non-normal subgroups* // Mathematical Communications in Algebra. – 1999. – **27**, №7. – P. 3143-3151.
24. **Hekster N.S., Lenstra H.W.** *Groups with finitely many non-normal subgroups* // Archiv Math. – 1990. – **54**. – P. 225-231.
25. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп* // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**. – С. 786-789.
26. **Черников С.Н.** *Исследование групп с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193-209.
27. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп* // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**. – С. 1280-1283.
28. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы* // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 604-628.
29. **Черников С.Н.** *Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами* // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 47-65.
30. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием минималь-ности для неинвариантных абелевых подгрупп* // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 106-115.
31. **Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Групи з деякими умовами максимальності* // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987. – № 1. – С. 9-11.
32. **Cutolo G.** *On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups* // Rivista Mat. pura ed applicata. 1991. – **91**. P. 49-59.

33. **Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э**. *Группы со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1705-1709.

34. **Лиман Ф.Н.** *Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп* // Алгебра и логика. – 1968. – **7**, № 4. – С. 70-86.

35. **Лиман Ф.Н.** *Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны* // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наукова думка, 1971. – С. 65-95.

36. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР. сер. А. – 1989. – № 10. – С. 21-22.

37. **Cutolo G., Kurdachenko L.A.** *Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups* // Geometriae Dedicata. – 1995. – **55**. – P. 279-292.

38. **Семко М.М.** *Групи з умовами щільності нормальності та їх узагальнень для деяких систем підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.

39. **Семко М.М.** *Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп*. – К.: Ін-т мат-ки НАН України, 1997. – 90 с.

40. **Семко М.М.** *Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.

41. **Семко М.М.** *Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.

42. **Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Про групи, близькі до метациклічних* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, N 6. – С. 782-790.

43. **Семко М.М.** *Будова локально ступінчастих ЩН[ ]-груп* // *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1996. – Вип. 12. – С. 181-186.

44. **Семко М.М.** *Про будову УЩН[ ]-групп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1996. – Вип. 13. – С. 196-203.
45. **Семко М.М.** *Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп* // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – С. 27-41.
46. **Семко М.М.** *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, N 6. – С. 789-798.
47. **Семко М.М.** *Ненільпотентные групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – Вип. 15. – С. 175-187.
48. **Семко М.М.** *Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – Вип. 16. – С. 255-263.
49. **Семко М.М.** *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, N 8. – С. 1148-1151.
50. **Семко М.М.** *Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, N 10. – С. 1396-1403.
51. **Семко М.М.** *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – N 9. – С. 49-53.
52. **Семко М.М.** *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – N 10. – С. 43-46.
53. **Семко М.М.** *Про будову УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, N 9. – С. 1250-1261.

54. **Семко М.М.** *Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[ ]-груп* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 1 (17). – С. 230-237.

55. **Семко М.М.** *Будова локально ступінчастих УЩН( )-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, N 11. – С. 1532-1536.

56. **Семко М.М.** *Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, N 3. – С. 383-388.

57. **Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.** *Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами* // Методы исследований алгебраических и топологических структур. – К.: КГПИ, 1989. – С. 37-45.

58. **Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.** *О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами* // Современный анализ и его приложения. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 173-183.

59. **Семко Н.Н.** *Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных подгрупп* // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 107-117.

60. **Семко Н.Н.** *Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных абелевых подгрупп* // Укр. матем. ж., 1981. – т. 33, № 2. – С. 270-273.

61. **Семко Н.Н.** *Периодические неабелевые группы с заданной системой инвариантных бесконечных неабелевых подгрупп* // Подгрупповая характеризация групп. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 92-98.

62. **Семко Н.Н.** *Непериодические неабелевые группы с заданной системой инвариантных бесконечных неабелевых подгрупп* // Препринт 82.23. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, – 58 с.

63. **Семко М.М., Коваль Т.В.** *Про групи з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп* // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія: Фізико-математичні науки. – 2001.– Вип. 2. – С. 173-179.

64. **Семко М.М., Коваль Т.В.** *Локально ступінчасті групи з різними умовами узагальненої щільності нормальності для нециклічних підгруп* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2004. – № 5. – С. 195-201.

65. **Семко М.М., Кузенний М.Ф.** *Будова нільпотентних УЩН( )-груп* // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – К. : Ін-т математики НАН України. – 1997. – С. 20-27.

66. **Семко М.М., Кузенний М.Ф.** *Будова локально ступінчастих метагімільтонових УЩН[ ]-груп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 14. – С. 211-219.

67. **Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н., Субботин И.Я.** *О некоторых вопросах теории обобщенно разрешимых групп* // Вісник Київського університету. Серія Фізико-математична наука. – 2007.– Вип. № 3.– С. 32-44.

68. **Яровая О.А.** *О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым* / О.А. Яровая // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2008. – Вип. №4. – С.36-39.

69. **Semko N.N., Yarovaya O.A.** *On some generalization of metahamiltonian groups* // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – №2. – P. 16-24.

70. **Ярова О.А.** *Про групи, усі власні підгрупи яких близькі до абелевих* // Доп. НАН України. – 2009. – №7. – С. 34-35.

71. **Яровая О.А.** *О группах, близьких к метагамильтоновым* // Вісник Дніпропетровського ун-у. Математика. – 2009. – Вип. 14. – С. 143-149.

72. **Yarovaya O.A., Semko M.M.** *About groups close to Hamiltonian* // 7-th International Algebraic Conference in Ukraint. – К.: Ін-т математики НАН України, 2009. – С. 123-124.

73. **Яровая О.А., Семко Н.Н.** *О некотором обобщении метагамильтоновых групп* // Международная конференция "Дискретная математика, алгебра и их приложения". – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2009. – С. 12-13.

74. **Ярова О.А., Семко М.М.** *Групи, у яких підгрупи, що не є нормальними, близькі до абелевих груп* // Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю кафедри алгебри і математичної логіки. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2009. – С. 49 – 51.

75. **La Yaye R., Rhemtulla A.** *Groups with a bounded number of conjugacy classes of non-normal subgroups* // Journal of Algebra. – 1999. – **214**. – P. 41-63.

76. **De Falco M., de Giovanni F., Musella C.** *Groups with few conjugacy classes of non-normal subgroups* // Mathematica Slovaca. – 2008. – **58**. – P. 177-184.

77. **Горчаков Ю.М.** *Группы с конечными классами сопряженных элементов.* – М.: Наука, 1978. – 120 с.

78. **Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya.** *Artinian modules over group rings.* – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.

79. **Фукс Л.** *Бесконечные абелевы группы: В 2 т.* – М.: Мир, 1974. – Т.1. –336 с.

80. **Курдаченко Л.А.** *Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп* // Сиб. мат. журн. – 1984. – **25**, №4. – С. 589-594.

81. **Doerk K., Hawkes T.** *Finite soluble groups.* – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

82. **Курош А.Г.** *Теория групп.* – М.: Наука, 1967. – 648 с.

83. **Шунков В.П.** *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп* // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 5. – С. 579-615.

84. **Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F.** *Locally finite groups.* – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.

85. **Shute G.** *Unions of Chevalley groups* // Abstracts Amer. Math. Soc. – 1982. – **3.** – P. 260.

86. **Otal J., Pena J.M.** *Infinite locally finite groups of type PSL(2,K) or Sz(K) are not minimal under certain conditions* // Communications Publicacions Matematiques. – 1988. – **32.** – P. 43-47.

87. **Segal D.** *Polycyclic groups.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. – 289 p.

88. **Hall P.** *Finiteness conditions for soluble group* // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**. – P. 419-436.

89. **Tomkinson M.I.** *FC-groups.* – Boston: Pitman, 1984. – 171 p.

90. **Беляев В.В.** *Локально конечные группы с черниковскими силовскими р-подгруппами* // Алгебра и логика. – 1981. – **20**, №7. – С. 605-619.

91. **Каргаполов М.И.** *Локально конечные группы, имеющие нормальные системы с конечными факторами* // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 6. – С. 853-873.

92. **Dixon M.R.** *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups.* – Singapore: World Scientifik, 1994. – 304 p.

93. **Otal J., Pena J.M.** *Groups, in which every proper subgroups is Chernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Chernikov* // Archiv Math. – 1988. – **51.** – P. 193-197.

94. **Ольшанский А.Ю.** *Геометрия определяющих соотношений в группах.* – М.: Наука, 1989. – 447 с.

Наукове видання

Ярова Оксана Анатоліївна

**ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ПІДГРУПИ,
ЩО НЕ Є НОРМАЛЬНИМИ
(ПРО ДЕЯКІ НАЙСУЧАСНІШІ НАПРЯМИ
НАУКОВИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ЇХ ВПЛИВ
НА ФОРМУВАННЯ ФАХОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ
МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ)**

Монографія

Відповідальний за випуск	*Д. Ф. Салахова*
Редактор	*М. М. Грабарчук*
Форматування та комп'ютерна верстка	*О. В. Лисенко*

Здано до друку 04.03.2019. Формат 60×84/16
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman».
Друк. арк. 11,1.
Тираж 300 примірників. Замовлення № 751.

Підготовлено до друку Видавничо-поліграфічним центром
Університету ДФС України
08200, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область, Україна

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 5104 від 20.05.2016*

GROUPS WITH RESTRICTIONS ON NON-NORMAL SUBGROUPS

The monograph is devoted to the study of locally graded groups, whose subgroups are either normal or have Chernikov derived subgroup. In particular, we investigated the groups in which derived subgroups of all proper subgroups are Chernikov under condition that they possess a normal Kurosh-Chernikov system whose factors are locally graded. The obtained results give the opportunity to obtain information on the basic concepts and the results of some important sections of the theory of infinite groups and can be used in formation of the professional competence of future mathematics teachers.

For scientific and pedagogical workers, university teachers, who train teachers of mathematics, masters, post-graduate students.

9 789663 375038