**МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ**
**ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**
**КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**
**на тему:**

# ***Методика вивчення трикутників у шкільному курсі геометрії***

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, СОМ-24-1 групи,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

***Красюка [illegible]надія Костянтинов[illegible]***

Науковий керівник [illegible] сана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Гарант освітньо-професійної програми [illegible] Микола СЕМКО, д.ф-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
вищої та прикл[illegible]
протокол від 12

Завідувач кафедр[illegible] Оксана ЯРОВА, к.ф-м.н., доцент

Ірпінь – 2026

Реєстрація № 11 20.01.2026 Спасків І.В.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 13.01.2026
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 93 06.02.2026
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії: Н.М. Лосєва
(підпис) (ініціали, прізвище)

зЧлени комісії:

(підпис) М.М. Семенко
(ініціали, прізвище)

(підпис) І.В. Спасків
(ініціали, прізвище)

(підпис) О.А. Арова
(ініціали, прізвище)

## БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

| Об'єкти контролю | Діапазон оцінки в балах | Фактична кількість балів | Примітки | Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії членів комісії, секретаря, (підписи) |
|---|---|---|---|---|
| **ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ** | | | | |
| 1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій) | від 0 до 30 | 28 | | Ірова О.А. |
| 2. Дотримання вимог щодо оформлення | від 0 до 10 | 9 | | |
| 3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни | від 0 до 5 | 4 | | |
| 4. Рецензент | від 0 до 5 | 5 | | |
| РАЗОМ БАЛІВ | від 0 до 50 | 46 | | |
| **ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ** | | | | |
| 1. Доповідь | від 0 до 10 | 10 | | Голова ек. ком. Ірова О.А. Члени комісії Єлко М.М. Скалів І.В. Ірова О.А. |
| 2. Роздатковий матеріал | від 0 до 5 | 4 | | |
| 3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання | від 0 до 25 | 25 | | |
| 4. Апробація (участь у конференціях) | від 0 до 10 | 8 | | |
| РАЗОМ БАЛІВ | від 0 до 50 | 47 | | |
| ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ | від 0 до 100 | 93 | | |

| Оцінка за 100-бальною шкалою | Оцінка за шкалою ЕКТС | Оцінка за національною шкалою | Дата | П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис) |
|---|---|---|---|---|
| 93 | A | 5 (відмінно) | 06.02.2026 | Голова ек. ком. Ірова О.А. Члени комісії Єлко М.М. Скалів І.В. Ірова О.А. |

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

| Оцінка за 100-бальною шкалою | Оцінка за шкалою ЄКТС | Оцінка за національною шкалою |
|---|---|---|
| 90-100 | A | 5 (відмінно) |
| 80-89 | B | 4 (добре) |
| 70-79 | C | |
| 60-69 | D | 3 (задовільно) |
| 50-59 | E | |
| 35-49 | X | 2 (незадовільно) |

## Вступ

У сучасному освітньому процесі геометрія є обов'язковим компонентом навчальної програми для учнів основної школи. Її вивчення сприяє формуванню раціонального стилю мислення, підкріпленого такими важливими рисами, як обґрунтованість суджень, критичність, логічність і алгоритмічність. Паралельно з цим геометрична освіта відіграє важливу роль у розвитку просторової уяви та інтуїції, які є базою для творчої самореалізації особистості.

Однією з ключових тем курсу планіметрії є змістова лінія «Трикутники». Теоретичний матеріал і задачі, пов'язані з цією геометричною фігурою, пронизують увесь курс планіметрії. За оцінкою багатьох педагогів і методистів, це одна з найбільш зрозумілих тем, яка зазвичай не викликає значних труднощів у процесі навчання. Тому питання вивчення теми «Трикутники» є актуальним у контексті освітнього процесу сьогодення.

Незважаючи на існування значної кількості методичних напрацювань із викладання планіметрії у загальноосвітніх навчальних закладах, часті зміни в навчальних програмах з математики призвели до недостатньої опрацьованості окремих тем у методичному аспекті. Зокрема, методика викладання теми «Трикутники» гостро потребує удосконалення та адаптації до сучасних освітніх умов. У зв'язку з цим постає завдання розробити нові методичні рекомендації щодо організації процесу навчання цієї теми в основній школі. Саме ця проблема визначила тему дослідження: «Методика вивчення трикутників у шкільному курсі геометрії».

Метою дослідження є визначення та обґрунтування методичних підходів до ефективного вивчення теми «Трикутники» в курсі геометрії основної школи.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

1. Визначити значущість теми «Трикутники» у курсі геометрії основної школи та здійснити логіко-математичний аналіз змісту теми.
2. Провести порівняльний аналіз навчальних матеріалів для базового та

профільного рівнів.

3. Розробити методичні матеріали для навчання учнів розв’язуванню задач на обчислення, побудову, доведення та дослідження в межах теми «Трикутники».

Об’єктом дослідження є процес навчання геометрії учнів середньої школи.

Предметом дослідження виступає методика викладання теми «Трикутники» через розв’язання задач на обчислення, доведення, дослідження та побудову.

У ході роботи використовувалися такі методи педагогічного дослідження:

- теоретичні: аналіз фахової навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури;

- емпіричні: спостереження за навчальним процесом, бесіди з викладачами, узагальнення педагогічного досвіду та анкетування.

Практичне значення дослідження полягає у створенні добірки завдань за типами задач, а також складанні таблиць, що ілюструють методичні особливості вивчення теми «Трикутник» у курсі геометрії основної школи. Розроблені матеріали можуть бути корисними для вчителів та студентів під час проведення уроків математики з акцентом на геометричні фігури.

# РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

## 1.1. Загальна характеристика теми в контексті сучасної української школи

У системі шкільної математичної освіти геометрія традиційно посідає особливе місце, будучи не лише джерелом знань про просторові форми, а й унікальним інструментом розвитку логічного мислення, просторової уяви та інтелектуальних здібностей учнів. Серед усього розмаїття геометричних фігур трикутник є фундаментальним об’єктом, «атомом» планіметрії, на властивостях якого базується вивчення майже всіх інших фігур - від багатокутників до складних архітектурних конструкцій. Саме тому методично грамотна побудова процесу вивчення трикутників є запорукою успішного опанування учнями всього шкільного курсу геометрії.

У даному розділі магістерської роботи ми ставимо за мету здійснити детальний аналіз особливостей вивчення трикутників у сучасній українській школі, спираючись на нові нормативні документи, модельні навчальні програми та методичні дослідження періоду 2019-2025 років. Актуальність цього питання суттєво зростає в умовах реформування освітньої галузі та впровадження концепції «Нової української школи» (НУШ). Як зазначають сучасні методисти, зокрема К. І. Васильєв, впровадження нових підходів є пріоритетним напрямком розвитку освіти, що має на меті не просто передачу суми знань, а надання учневі внутрішнього імпульсу для саморозвитку та формування ключових компетентностей.[1]

Ми, як майбутні педагоги, повинні чітко усвідомлювати, що вивчення трикутників - це не просто заучування ознак чи формул площі. Це тривалий процес формування математичної культури, який має свої етапи, кризи та вікові особливості. Аналіз літератури останніх років дозволяє виділити кілька наскрізних ліній, які визначають специфіку сучасної методики: компетентнісний підхід, цифровізація, посилення прикладної складової та наступність між пропедевтичним (5-6 класи) та систематичним (7-9 класи) курсами.

Нижче наведено порівняльну характеристику підходів до вивчення трикутників у традиційній та новій українській школі (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1.

Зміна парадигми вивчення геометричного матеріалу

| **Характеристика** | **Традиційний підхід** | **Підхід НУШ (сучасний стан)** |
|---|---|---|
| **Основна мета** | Засвоєння системи знань, умінь, навичок (ЗУН) | Формування ключових та предметних компетентностей |
| **Роль учня** | Пасивний слухач, виконавець алгоритмів | Активний дослідник, партнер у навчанні |
| **Характер задач** | Переважно абстрактні, на обчислення та доведення | Компетентнісно орієнтовані, практичні, дослідницькі |
| **Засоби навчання** | Підручник, дошка, крейда, циркуль | ІКТ (GeoGebra), інтерактивні панелі, динамічні моделі |
| **Оцінювання** | Контроль кінцевого результату | Формувальне оцінювання, самооцінювання, моніторинг прогресу |

**Нормативно-правове та навчально-методичне забезпечення теми в умовах НУШ**

Фундаментом для побудови освітнього процесу є Державний стандарт базової середньої освіти та розроблені на його основі модельні навчальні програми. Аналіз цих документів, чинних у 2019-2025 роках, дозволяє простежити логіку розгортання теми «Трикутники» та зміни в очікуваних результатах навчання.

**Пропедевтичний етап: 5-6 класи**

Згідно з новими модельними програмами, зокрема авторства О. С. Істера та С. О. Скворцової, вивчення геометричного матеріалу в 5-6 класах має виразний пропедевтичний характер.[2] У цьому віці (10-12 років) мислення учнів є переважно наочно-образним, тому введення суворих означень та аксіоматики є

недоцільним.

У програмі С. О. Скворцової до підручника «Математика 5-6 класи» чітко визначено зміст навчального матеріалу щодо трикутників: класифікація за кутами (гострокутні, прямокутні, тупокутні) та сторонами (рівнобедрені, рівносторонні, різносторонні).[2] Важливо, що учні не просто запам'ятовують назви, а вчаться розрізняти ці фігури візуально та за допомогою вимірювальних інструментів (лінійки, транспортира).

Особливістю методики на цьому етапі є «геометрія ножиць». Як демонструється у відеоуроках та методичних рекомендаціях для НУШ, поняття рівності фігур вводиться через накладання: «дві фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються при накладанні».[4] Це інтуїтивно зрозуміле означення стає базою для подальшого вивчення ознак рівності трикутників у 7 класі. Учні вирізають трикутники з паперу, накладають їх один на одного, перегинають рівнобедрені трикутники по висоті, щоб переконатися у рівності кутів при основі.

Також у 5-6 класах формується первинне уявлення про суму кутів трикутника. Замість суворого доведення через властивості паралельних прямих (яке буде у 7 класі), учням пропонується практична робота: відірвати кути паперового трикутника і скласти їх вершинами в одну точку на прямій, утворивши розгорнутий кут (180°).[4] Такий емпіричний підхід дозволяє сформувати стійке переконання у істинності факту ще до його теоретичного обґрунтування.

Модельна програма О. С. Істера акцентує увагу на розвитку ставлення до математики: ощадливість, розуміння важливості розрахунків.[3] У контексті трикутників це реалізується через задачі на обчислення периметра (як довжини паркану, наприклад) та площі (через добудовування прямокутного трикутника до прямокутника), що демонструє практичну значущість знань.

**Систематичний курс: 7 клас - точка біфуркації**

Перехід до 7 класу є критичним моментом у вивченні геометрії. Саме тут починається систематичний курс, який вимагає від учнів якісно іншого рівня

мислення - абстрактно-логічного. Модельні програми «Геометрія. 7-9 класи» (авторів С. Ю. Панченка, О. С. Істера та ін.) виділяють тему «Трикутники» як одну з центральних.[5]

У 7 класі відбувається перехід від «очевидності» до «доказовості». Учні вперше стикаються з ситуацією, коли очевидний факт (наприклад, рівність сторін рівнобедреного трикутника) потребує логічного обґрунтування. Це часто викликає психологічний опір: «Навіщо це доводити, якщо це і так видно?». Завдання вчителя на цьому етапі - показати обмеженість візуального сприйняття і могутність дедуктивного методу.

Основні змістові лінії 7 класу включають:

1. **Ознаки рівності трикутників.** Це методичне ядро курсу. Як зазначено в матеріалах до НУШ, якщо трикутники рівні, то рівні всі їх відповідні елементи, але для встановлення рівності достатньо перевірити лише три (за певними умовами).[7] Методика вивчення ознак передбачає рух від практичної задачі (чи можна побудувати трикутник за трьома елементами однозначно?) до теоретичного узагальнення.
2. **Рівнобедрений трикутник.** Вивчення його властивостей є першим серйозним досвідом доведення теорем.
3. **Сума кутів трикутника.** Тут відбувається переосмислення знань 5-6 класів: експериментальний факт отримує статус теореми.
4. **Нерівність трикутника.** Фундаментальне твердження про існування трикутника.

Аналіз програми О. С. Істера (2023 р.) показує, що значна увага приділяється формуванню компетентностей: інноваційності, екологічної грамотності (через зміст задач), інформаційно-комунікаційної компетентності.[6]

**Поглиблення та узагальнення: 8-9 класи**

У 8 класі фокус зміщується на вивчення подібності. За даними досліджень К. І. Васильєва, тема «Подібність трикутників» є однією з найскладніших, але й найбільш методично значущих.[1] Подібність розширює інструментарій учня, дозволяючи працювати з фігурами, що мають однакову форму, але різні розміри.

Це відкриває шлях до розв'язування прикладних задач (визначення висоти дерева за його тінню, картографія). Також у 8 класі вводиться теорема Піфагора та метричні співвідношення у прямокутному трикутнику, що створює міцний зв'язок між алгеброю та геометрією.

У 9 класі вивчення завершується темою «Розв'язування трикутників». Тут вводяться потужні тригонометричні інструменти - теореми синусів і косинусів.[8] Це дозволяє учням «розв'язати» будь-який трикутник, тобто знайти всі його елементи за мінімально необхідним набором даних. Цей етап є вершиною шкільної планіметрії, де синтезуються знання про властивості кутів, сторін, площ та тригонометричні функції.

**Компетентнісний підхід як методологічна основа вивчення трикутників**

Сучасна українська школа декларує перехід від знаннєвої парадигми до компетентнісної. Це означає, що метою навчання є не просто знання теорем, а здатність застосовувати їх у нових ситуаціях. У статті «Аналіз компетентнісної орієнтації змісту навчання геометрії...» (2022) група дослідників (Стеценко К., Хворостіна Ю. та ін.) детально розглядає структуру математичної компетентності при вивченні теми «Трикутники».[9]

Автори виділяють п'ять складових математичної компетентності, які ми проаналізуємо детальніше.

**Процедурна компетентність**

Це база, яка включає володіння алгоритмами та вміння розв'язувати типові задачі.

- Приклади діяльності: обчислення периметра, застосування формули площі трикутника (S = 1/2), знаходження невідомої сторони за теоремою Піфагора.
- Стан у підручниках: Аналіз підручників 7-х класів (Бевз, Бурда, Мерзляк) показав, що завдання на формування процедурної компетентності домінують.[10] Це, з одного боку, добре, бо формує навички, але з іншого - може призвести до механічного виконання дій без глибокого розуміння.

- Методична порада: Необхідно стежити, щоб процедурні навички не стали самоціллю. Учень повинен розуміти, чому він застосовує саме цю формулу.

**Логічна компетентність**

Геометрія - це школа логіки. Ця складова передбачає вміння будувати дедуктивні висновки, обґрунтовувати твердження, проводити доведення.

- Приклади діяльності: доведення рівності трикутників за ознаками, доведення властивостей медіани рівнобедреного трикутника, побудова ланцюжка міркувань у задачі на обчислення.
- Проблеми: Часто учні намагаються «вгадати» відповідь або посилаються на малюнок («воно ж видно, що прямий кут»). Розвиток логічної компетентності вимагає від вчителя постійного запитання «Чому?».
- Дані досліджень: Завдання на логічне мислення представлені в підручниках, але часто відокремлені від практичних задач.[10]

**Технологічна компетентність**

Це нова вимога часу, пов'язана з використанням ІКТ та програм динамічної математики.

- Суть: Вміння використовувати комп'ютерні засоби для побудови, вимірювання та дослідження геометричних фігур.
- Критична ситуація: Дослідники констатують, що завдання для розвитку технологічної компетентності взагалі не представлені або представлені мінімально в проаналізованих підручниках.[10] Це створює серйозний розрив між вимогами життя і шкільною програмою. Вчителі змушені самостійно шукати ресурси або ігнорувати цей аспект.

**Дослідницька компетентність**

- Приклади: Дослідити, як залежить площа трикутника від зміни кута між сторонами фіксованої довжини; з’ясувати властивості бісектрис трикутника експериментальним шляхом.
- Значення: Саме дослідницька діяльність формує інтерес до предмету. Проте, як зазначають автори, частка таких завдань у підручниках є

низькою.[10]

**Методологічна компетентність**

Розуміння природи математичного знання, ролі аксіом, означень і теорем.

- Суть: Учень повинен розуміти, чим означення відрізняється від теореми, а теорема - від аксіоми.
- Стан: Ця компетентність формується найважче і найменше підтримана завданнями в підручниках.[10]

Підсумовуючи, можна сказати, що сучасні підручники все ще тяжіють до формування процедурних навичок, тоді як розвиток технологічної та дослідницької компетентностей лягає на плечі творчого вчителя.

**Інноваційні технології: GeoGebra як інструмент пізнання трикутників**

В умовах цифровізації освіти використання програм динамічної математики стає "золотим стандартом" викладання геометрії. Серед них особливе місце посідає GeoGebra - безкоштовне мультиплатформне середовище.

**Візуалізація та динаміка**

У статті, присвяченій використанню GeoGebra (2024), наголошується, що цей інструмент дозволяє реалізувати принципи наочності на новому рівні. Головна перевага - динамічність креслення.

У традиційному навчанні учень бачить у підручнику один статичний малюнок рівнобедреного трикутника (зазвичай "стоячого" на основі). Це формує стереотип: якщо трикутник перевернути, учень може не впізнати його як рівнобедрений. У GeoGebra учень може побудувати трикутник, задати умову рівності сторін і "тягати" його за вершини по всьому екрану. Трикутник змінюватиме розмір, положення, але залишатиметься рівнобедреним. Це дозволяє сформувати інваріантне поняття фігури.

**Дослідження "чудових точок"**

Тема "Чудові точки трикутника" (центр описаного/вписаного кола, ортоцентр) є складною для виконання на дошці крейдою. Побудови виходять неточними, лінії не перетинаються в одній точці, що викликає розчарування.

Використання GeoGebra дозволяє:

1. Миттєво будувати бісектриси, медіани, висоти.
2. Переконатися, що вони дійсно перетинаються в одній точці.
3. Дослідити положення цих точок. Наприклад, учень може побачити, що ортоцентр (точка перетину висот) виходить за межі трикутника, якщо він тупокутний. Це відкриття, зроблене власноруч, запам'ятовується краще, ніж сухий факт з підручника.

У дослідженні наводиться приклад задачі, де побудова малюнка в GeoGebra допомагає учням зрозуміти складну умову про січну площину, хоча це стосується стереометрії, принцип візуалізації перерізів та планіметричних фігур у них є ідентичним.[11]

**Методична доцільність**

К. І. Васильєв у своїй методиці вивчення теми «Подібність трикутників» з використанням ІКТ зазначає, що це дозволяє індивідуалізувати процес навчання та здійснювати моніторинг якості засвоєння матеріалу.[11] Наприклад, вчитель може створити інтерактивний аплет, де учні повинні змінити розміри трикутника так, щоб він став подібним до заданого з певним коефіцієнтом. Система автоматично перевіряє правильність виконання.

**Специфіка навчання розв'язування задач на побудову та доведення**

Окремим викликом для вчителя є навчання учнів розв'язувати задачі на побудову та доведення, які часто викликають найбільші труднощі.

**Задачі на побудову: втрачений континент?**

М. Хільчук у своєму дослідженні звертає увагу на цікаву статистику: у 7 класі задачі на побудову циркулем і лінійкою займають значне місце і розглядаються як практичне застосування властивостей трикутників (побудова трикутника за трьома сторонами, побудова бісектриси тощо). Проте до 9 класу кількість таких задач різко падає.[12]

Автор ставить риторичне запитання: чи означає це, що старшокласники вже ідеально володіють геометричними побудовами? Практика показує протилежне. Зникнення задач на побудову з активного вжитку призводить до деградації навичок просторового моделювання.

Методична рекомендація: Необхідно підтримувати культуру геометричних побудов протягом усього курсу 7-9 класів, використовуючи задачі на побудову як елемент дослідження. Наприклад, при вивченні подібності (8 клас) розв'язувати задачі на побудову фігури, подібної даній.

**Задачі на доведення: від пасивності до творчості**

Л. І. Амеліна у статті «Початкове навчання розв'язуванню задач на доведення» підкреслює, що поділ задач на «обчислення», «побудову» та «доведення» є досить умовним.[13] Будь-яка задача на обчислення містить елемент доведення (обґрунтування вибору формули).

Проблема полягає в тому, що на уроках теореми зазвичай доводить учитель, а учень виступає в пасивній ролі. Коли ж він отримує задачу «Довести, що...», він губиться.

Автор пропонує поетапну методику формування вміння доводити:

1. Етап візуалізації: Вміння зробити правильний малюнок. Якщо в задачі йдеться про висоту, учень має намалювати перпендикуляр, а не довільну чевіану.
2. Етап формалізації: Вміння перекласти текст задачі на мову символів («Дано», «Довести»). Це критично важливий етап, на якому часто робиться половина помилок.
3. Етап бачення: Вміння «читати» малюнок, помічати приховані елементи (спільні сторони, вертикальні кути, рівнобедрені трикутники, що утворилися внаслідок побудови).
4. Етап самостійного розв'язання: Вибір методу та побудова логічного ланцюжка.

Особливу увагу слід приділяти навчанню робити додаткові побудови - це творчий прийом, який часто є ключем до розв'язання складних задач (наприклад, подовження медіани на її довжину).[13]

**Прикладна спрямованість та STEM-освіта**

Сучасний учень прагматичний. Він постійно запитує: "А навіщо мені це потрібно?". Тому вивчення трикутників неможливе без демонстрації їх

прикладної значущості.

**Трикутник як "жорстка" фігура**

Це унікальна властивість трикутника, яка відрізняє його від чотирикутника. Якщо збити три планки цвяхами, форма конструкції не зміниться. Якщо збити чотири - конструкція буде рухомою (шарнірною). Цей факт широко використовується в техніці (ферми мостів, підйомні крани, опори ЛЕП). Демонстрація цього принципу на уроці (за допомогою моделей) є найкращим поясненням важливості трикутників в інженерії.

**STEM-проєкти**

Інтеграція геометрії з мистецтвом та архітектурою дозволяє залучити гуманітарно орієнтованих учнів. Прикладом є учнівський проєкт "Трикутники в архітектурі Праги".[14] Учні досліджують фотографії готичних соборів, знаходять там трикутні елементи (вімперги, шпилі), аналізують їх роль. Така робота розвиває не лише математичні, а й культурні компетентності, вчить бачити геометрію навколо себе.

**Тригонометрія на місцевості**

У 9 класі тема "Розв'язування трикутників" дає багатий матеріал для польових робіт (або їх імітації). Вимірювання висоти будівлі без наближення до неї, визначення відстані до недоступної точки (через річку) - це класичні задачі, які показують силу теорем синусів і косинусів.[8]

Підсумовуючи викладене, можна стверджувати, що методика вивчення трикутників у сучасній українській школі перебуває на етапі трансформації.

По-перше, відбувається відхід від чистого формалізму в бік компетентнісного підходу, де акцент робиться на розумінні методів та їх застосуванні.

По-друге, спостерігається тенденція до технологізації: GeoGebra та інші програмні засоби перестають бути екзотикою і стають робочими інструментами, що дозволяють візуалізувати абстрактні поняття.

По-третє, зберігається важливість традиційних логічних навичок (доведення, побудова), але методи їх формування адаптуються до психологічних

особливостей сучасних дітей (через практику, експеримент, проєктну діяльність).

Подальші дослідження у цій сфері доцільно спрямувати на розробку систем прикладних задач та інтерактивних матеріалів, які б допомогли вчителю реалізувати вимоги НУШ на практиці, подолавши розрив між деклараціями програм та реальним наповненням підручників.

## 1.2. Порівняльний аналіз вивчення трикутників на базовому та поглибленому рівнях

### Вступ до проблематики диференціації шкільного курсу геометрії

У контексті модернізації української освітньої системи, яка відбувається на сучасному етапі розвитку Нової української школи (НУШ), питання диференціації навчання набуває особливої гостроти та методичної ваги. Вивчення геометрії, і зокрема її фундаментальної складової - теорії трикутників, стає тим лакмусовим папірцем, який найяскравіше демонструє відмінності між рівнем стандарту (базовим) та поглибленим (профільним) рівнем. Для магістерського дослідження вкрай важливо не просто констатувати різницю в кількості годин, а розкрити глибинні методичні, змістові та ціннісні розбіжності, що формують різні типи математичного мислення у здобувачів освіти.

Трикутник у шкільному курсі геометрії є не просто однією з фігур, а своєрідним «атомом» планіметрії, через який визначаються властивості многокутників, обчислюються площі складних поверхонь та будуються тригонометричні залежності. Тому підходи до його вивчення визначають успішність опанування всього курсу математики. Метою цього параграфа є детальний порівняльний аналіз навчальних програм, підручників та методичних підходів до викладання теми «Трикутники» у 7-9 класах закладів загальної середньої освіти України, спираючись на актуальні джерела 2019-2025 років. Ми спробуємо з'ясувати, як саме трансформація змісту впливає на формування ключових компетентностей учнів та які методичні виклики постають перед учителем у кожному з випадків.

**Нормативно-правові та концептуальні засади розмежування рівнів**

Перш ніж переходити до детального аналізу змісту, необхідно окреслити нормативне поле, в якому функціонує сучасна шкільна геометрія. Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти та відповідними наказами Міністерства освіти і науки України, навчання математики має на меті не лише передачу суми знань, а й формування компетентностей.[1] Однак, інтерпретація цих цілей для різних рівнів суттєво відрізняється.

**Цільові орієнтири: прагматизм проти фундаментальності**

На рівні стандарту основний акцент робиться на практичній спрямованості знань. Аналіз модельних навчальних програм (авторських колективів М. І. Бурди, О. С. Істера, С. Ю. Панченко та ін.) свідчить, що головною метою тут є формування навичок застосування геометричних знань у повсякденному житті.[17] Учень має розуміти геометричну термінологію, вміти виконувати прості вимірювання та обчислення, розпізнавати фігури в навколишньому середовищі. Трикутник тут виступає як модель реальних об'єктів (дах будинку, елемент конструкції моста тощо).

Натомість поглиблений рівень, який регламентується окремими програмами (наприклад, програмою для класів з поглибленим вивченням математики авторів А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра або програмою Г. В. Апостолової), ставить перед собою амбітнішу мету - підготовку до професійної діяльності в наукоємних галузях.[19] Тут геометрія розглядається як дедуктивна наука, інструмент пізнання світу через абстрактні моделі. Як зазначається у пояснювальних записках до програм поглибленого рівня, пріоритетом є розвиток логічного мислення, просторової уяви та здатності до строгого доведення математичних тверджень.[19]

**Розподіл навчального часу: кількісний вимір розриву**

Одним із найбільш очевидних показників відмінності є кількість годин, відведених на вивчення предмета. Цей фактор є критичним, оскільки саме дефіцит часу часто не дозволяє вчителю на рівні стандарту заглибитися в доведення теорем чи розв'язування цікавих, але трудомістких задач.

Аналізуючи календарно-тематичні плани, можна скласти узагальнену картину розподілу часу (див. Таблицю 1.2).

**Таблиця 1.2.**

**Орієнтовний розподіл навчального часу на вивчення геометрії в 7-9 класах**

| Клас | Рівень стандарту (год/рік) | Тижневе навантаження (стандарт) | Поглиблений рівень (год/рік) | Тижневе навантаження (поглиблений) | Примітки до поглибленого рівня |
|---|---|---|---|---|---|
| **7 клас** | 70 | 2 год | 105-122 | 3-3.5 год | Збільшення часу на задачі на побудову та вступний курс.[21] |
| **8 клас** | 70 | 2 год | 105-122 | 3-3.5 год | Значне розширення тем «Подібність» та «Чотирикутники».[23] |
| **9 клас** | 70 | 2 год | 105-140 | 3-4 год | Введення додаткових розділів (геометрія кола, перетворення).[25] |

Як бачимо, різниця у навчальному часі складає від 50% до 100%. У 8-9 класах поглибленого рівня часто додаються години за рахунок варіативної складової або факультативів, що дозволяє довести кількість годин геометрії до 4 на тиждень. Це створює принципово інші умови для організації навчального процесу: вчитель має можливість проводити уроки-семінари, уроки розв'язування задач однієї теми різними способами, що майже неможливо в умовах жорсткого цейтноту рівня стандарту.

**Психолого-педагогічні аспекти сприйняття матеріалу**

Сучасні дослідження в галузі методики математики (2020-2025 рр.) звертають увагу на те, що різні рівні навчання не просто дають різний обсяг знань, а й формують різні типи мислення. У статті про взаємообумовленість змісту геометрії та типу мислення зазначається, що рівень стандарту проєктує переважно емпіричний тип мислення.[27]

Для учня, що навчається за програмою стандарту, трикутник - це

насамперед конкретний об'єкт. Процес пізнання йде від часткового до загального (індуктивний шлях): розглянули кілька трикутників, виміряли кути, помітили закономірність, сформулювали гіпотезу. Доведення часто сприймається як формальність або замінюється правдоподібними міркуваннями («на малюнку видно»).

Натомість поглиблений рівень орієнтований на розвиток теоретичного мислення, яке базується на аналізі внутрішніх зв'язків та відношень.[27] Тут процес навчання часто будується дедуктивно: від аксіом та загальних теорем до конкретних задач. Учні вчаться не просто застосовувати формули, а виводити їх, розуміти межі їх застосування та взаємозв'язки між різними фактами (наприклад, зв'язок між теоремою Піфагора та теоремою косинусів як часткового випадку). Такий підхід вимагає від учнів значно вищого рівня абстракції та сформованості навичок аналітико-синтетичної діяльності.

**Особливості вивчення трикутників у 7 класі: Закладання фундаменту**

Сьомий клас є ключовим, оскільки саме тут відбувається перехід від наочної геометрії молодших класів до систематичного курсу планіметрії.

**Ознаки рівності трикутників: від розпізнавання до доведення**

Тема «Ознаки рівності трикутників» є центральною в курсі 7 класу обох рівнів. Однак, глибина її опрацювання суттєво різниться.

- **Рівень стандарту:** Учні вивчають три ознаки рівності. Основна мета - навчитися бачити рівні елементи на готових кресленнях (спільна сторона, вертикальні кути) і застосовувати відповідну ознаку. Задачі зазвичай є однокроковими або двокроковими.[15]
- **Поглиблений рівень:** Крім стандартних ознак, розглядаються більш тонкі випадки, наприклад, ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним кутом (через доведення). Задачі часто вимагають додаткових побудов (наприклад, подовження медіани на її довжину - класичний метод подвоєння медіани, який на рівні стандарту зустрічається вкрай рідко).[22]

Крім того, у поглибленому курсі раніше вводиться поняття «ГМТ» (геометричне місце точок), що дозволяє давати строгі означення бісектриси кута

та серединного перпендикуляра не просто як ліній, а як множин точок з певною властивістю.[19]

**Задачі на побудову: втрачене мистецтво чи потужний інструмент?**

Найбільша розбіжність у 7 класі спостерігається у темі «Геометричні побудови».

У програмах рівня стандарту ця тема часто зведена до мінімуму: учні знайомляться з основними побудовами (кут, що дорівнює даному, поділ відрізка навпіл), але складні задачі на побудову трикутника за трьома елементами (наприклад, за стороною, медіаною та висотою) часто виносяться за дужки або розглядаються оглядово через брак часу.[15]

У програмах поглибленого вивчення задачі на побудову займають значне місце і розглядаються як потужний засіб розвитку алгоритмічного та евристичного мислення.[28] Тут детально вивчається «Метод геометричних місць точок». Учні розв'язують задачі, які вимагають глибокого аналізу:

1. Аналіз: припущення, що фігура побудована, і пошук зв'язків між даними та шуканими елементами.
2. Побудова: опис послідовності дій циркулем і лінійкою.
3. Доведення: обґрунтування того, що побудована фігура задовольняє умову.
4. Дослідження: з'ясування кількості розв'язків залежно від початкових даних.

Саме етап дослідження, який часто ігнорується в базовому курсі, є критично важливим для формування наукового підходу до розв'язання проблем.

**8 клас: Поглиблення розриву у вивченні подібності та метричних співвідношень**

У восьмому класі вивчаються теми, які є каркасом для всієї подальшої геометрії: чотирикутники, подібність трикутників, теорема Піфагора.

**Подібність трикутників: інтуїція проти формалізму**

Тема «Подібність трикутників» на рівні стандарту базується на інтуїтивно зрозумілому понятті «однакової форми». Учні вивчають три ознаки подібності,

які є аналогами ознак рівності. Основний фокус - на складанні пропорцій сторін та розв'язуванні задач на знаходження невідомих елементів.[17]

На поглибленому рівні ця тема розкривається значно ширше. До програми включаються:

- **Узагальнена теорема Фалеса:** На рівні стандарту часто вивчається лише звичайна теорема Фалеса (про рівні відрізки), тоді як поглиблений курс дає теорему про пропорційні відрізки, що є фундаментом для розуміння подібності.[23]
- **Властивість бісектриси зовнішнього кута:** Якщо властивість

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

бісектриси внутрішнього кута вивчається скрізь,
то аналогічна властивість для зовнішнього кута є прерогативою поглибленого курсу. Це відкриває шлях до розв'язування задач про коло Аполлонія в старших класах.

- **Метричні співвідношення в колі:** Теореми про добутки відрізків

$$PA^2 = PB \cdot PC$$

хорд, що перетинаються, та про дотичну і січну у поглибленому курсі розглядаються як прямий наслідок подібності трикутників. На рівні стандарту ці факти можуть подаватися як додатковий матеріал або не розглядатися зовсім.[24]

**Метричні співвідношення і Теорема Піфагора**

Вивчення теореми Піфагора є спільним для обох рівнів, проте сфера її застосування різниться. У поглиблених класах велика увага приділяється задачам, де теорема Піфагора працює в комплексі з іншими властивостями. Наприклад, виведення формул для довжини медіани є типовим для поглибленого рівня і дозволяє учням створити власний «довідник» формул для швидкого розв'язування задач.[24]

**9 клас: Якісний стрибок та введення «вищої» планіметрії**

Дев'ятий клас - це етап, де різниця між програмами стає найбільш разючою. Рівень стандарту завершує базову геометричну підготовку, тоді як поглиблений

рівень відкриває двері у світ «красивої» геометрії трикутника.

**Розв'язування трикутників: алгоритми та нюанси**

Тема «Розв'язування трикутників» (Теореми синусів і косинусів) вивчається в обох курсах.

- **Рівень стандарту:** Акцент на алгоритмізації. Учні вчаться за трьома елементами знаходити решту. Розглядаються основні 4 типи задач. Важливим елементом є прикладне застосування (вимірювальні роботи на місцевості).[26]
- **Поглиблений рівень:** Значна увага приділяється аналізу кількості розв'язків (особливо у випадку двох сторін і кута проти однієї з них - так званий неоднозначний випадок). Це вимагає глибокого розуміння тригонометрії та геометричних обмежень. Також розглядаються різні форми запису теореми косинусів (наприклад, для визначення виду трикутника: гострокутний, прямокутний чи тупокутний, без повного обчислення кутів).[25]

**Площі та метод площ**

Поняття площі у поглибленому курсі трансформується з метричної характеристики у потужний метод доведення (метод площ). Як зазначають дослідники (Kushnir, 2007; Aksu, 2022), адитивність площі дозволяє доводити складні теореми про відношення відрізків без використання подібності.15

У програмі поглибленого вивчення, на відміну від стандарту, з'являються формули:

- Радіусів вписаного та описаного кіл:

$$R = \frac{abc}{4S} \quad r = \frac{S}{p}$$

- Формула Герона у різних варіаціях.
- Формули для радіусів зовнівписаних кіл, які у стандартному курсі відсутні.[20]

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

**Специфічні теми поглибленого курсу: Теореми Чеви, Менелая та Птолемея**

Найсуттєвішою відмінністю є включення до поглибленої програми (наприклад, авторства О. С. Істера або Г. В. Апостолової) блоку тем, які можна

умовно назвати «Геометрія трикутника High-Level». До них належать:

1. **Теорема Чеви та Теорема Менелая:** Це потужні інструменти для доведення колінеарності точок та конкурентності прямих (перетину в одній точці). У стандартному курсі ці теореми не вивчаються, що значно збіднює інструментарій учня при роботі зі складними конструкціями. Вивчення цих теорем у поглибленому курсі формує розуміння того, що перетин медіан, бісектрис і висот в одній точці - це не три різні теореми, а прояв однієї загальної закономірності (тригонометрична або метрична форма теореми Чеви).[20]

2. **Чудові точки та лінії:** Учні поглиблених класів дізнаються про Пряму Ейлера (на якій лежать ортоцентр, центроїд і центр описаного кола) та Коло дев'яти точок (коло Ейлера). Ці теми демонструють естетику математики і її внутрішню гармонію, що є важливим мотиваційним фактором.[20]

3. **Теорема Птолемея:** Властивість вписаного чотирикутника ($d_1d_2 = ac + bd$) дозволяє розв'язувати задачі, які іншими методами розв'язуються вкрай складно.

4. **Коло Аполлонія:** Це поняття поєднує метод ГМТ і властивості бісектрис, будучи чудовим прикладом інтеграції різних розділів геометрії.[20]

**Методичні стратегії та інструментарій вчителя**

Відмінності у змісті диктують і відмінності у методах навчання.

**Дослідницький підхід та ІКТ**

У сучасних умовах (2020-2025) неможливо ігнорувати роль цифрових технологій. У поглиблених класах активно використовуються системи динамічної геометрії (GeoGebra, DG, Gran-2D). Якщо на рівні стандарту ІКТ частіше використовується для ілюстрації (показати готовий малюнок), то на поглибленому рівні - це інструмент дослідження.[29] Учні можуть експериментально «відкрити» теорему Ейлера про пряму, рухаючи вершини трикутника на екрані, і лише потім переходити до її строгого доведення. Такий підхід реалізує принципи STEM-освіти та робить навчання більш свідомим.

**Роль олімпіадних задач**

Поглиблене вивчення нерозривно пов'язане з олімпіадним рухом.

Підручники для профільних класів містять задачі, які пропонувалися на національних та міжнародних олімпіадах. Це задачі на принцип Діріхле в геометрії, на інваріанти, на екстремальні властивості трикутників.[32] Така інтеграція дозволяє виявляти та підтримувати обдаровану молодь, даючи їм необхідний старт для участі у змаганнях рівня IMO (International Mathematical Olympiad). Наприклад, задачі на обчислення площ складних комбінацій трикутників або доведення нерівностей між елементами трикутника є стандартною практикою підготовки на поглибленому рівні.[32]

### 1.3. Логіко-математичний аналіз теми «Розв'язування трикутників»

Тема «Розв'язування трикутників» є однією з кульмінаційних точок курсу планіметрії в основній школі. Вона не лише підсумовує знання учнів про ключову геометричну фігуру - трикутник, але й знаменує собою перехід від якісної геометрії (властивості, ознаки рівності) до кількісної, обчислювальної геометрії, що базується на потужному тригонометричному апараті. Для магістерського дослідження вкрай важливо провести глибокий логіко-математичний аналіз цієї теми, щоб зрозуміти, які саме когнітивні механізми задіюються в учнів під час її вивчення, і як структурується навчальний матеріал у сучасних методичних комплектах. У цьому параграфі ми спробуємо розкласти тему на логічні атоми, прослідкувати генезу понять та виявити приховані логічні труднощі, спираючись на аналіз літератури та нормативних документів за 2019-2025 роки.

**Місце теми в логічній архітектурі шкільного курсу геометрії**

Перш ніж заглибитися в деталі теорем і формул, варто визначити, де саме знаходиться ця тема в ментальній карті шкільної геометрії. Аналіз підручників 9-го класу, зокрема авторських колективів А.Г. Мерзляка [35], Г.П. Бевза [36] та О.С. Істера [38], показує, що «Розв'язування трикутників» виступає своєрідним мостом між планіметрією 7-8 класів та стереометрією і вищою математикою.

Логічна побудова курсу геометрії до 9 класу розвивається здебільшого лінійно:

1. **7 клас:** Учні знайомляться з трикутником як фігурою, вивчають ознаки рівності (перша, друга, третя). На цьому етапі логіка базується на конгруентності: "Якщо три елементи рівні, то й трикутники рівні". Це фундаментальна підготовка до ідеї, що трикутник визначається трьома елементами.

2. **8 клас:** Відбувається локалізація знань на прямокутному трикутнику (теорема Піфагора, синус/косинус гострого кута). Тут зароджується ідея метричних співвідношень, але вона обмежена кутом $90^0$.

3. **9 клас:** Відбувається узагальнення. Логічна операція узагальнення є тут ключовою. Ми відмовляємося від обмеження "кут прямий" і поширюємо тригонометричні функції на кути до $180^0$.

Як зазначається у методичній літературі [39], основна мета вивчення теми - озброїти учнів алгоритмами для знаходження невідомих елементів трикутника за відомими. Проте, якщо поглянути глибше, йдеться про формування функціонального мислення: розуміння того, що сторона трикутника є неперервною функцією протилежного кута (теорема косинусів/синусів).

У програмі 9 класу тема зазвичай слідує за розділом «Координати на площині» (у Мерзляка) або вивчається паралельно з вектором. Це не випадково. Логічно теорему косинусів найлегше довести саме векторним або координатним методом, що демонструє учням силу алгебраїчних методів у геометрії.

Структурно-логічна схема теми

Ми можемо виділити такі вузлові компоненти теми, які утворюють її логічний каркас:

- **Розширення області визначення тригонометричних функцій:**
- **Основна тригонометрична тотожність** (як інструмент переходу між функціями).

$$\sin\alpha, \cos\alpha, \mathrm{tg}\alpha \text{ для } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- **Теорема косинусів:** Узагальнення теореми Піфагора.

- **Теорема синусів:** Зв'язок між сторонами і кутами через радіус описаного кола.
- **Алгоритми розв’язування трикутників:** 4 основні випадки.
- **Прикладне застосування:** Задачі на обчислення площ та вимірювання на місцевості.

**Аналіз понятійного апарату та означень**

Почнемо з фундаменту - означень. У 8 класі синус і косинус вводилися як відношення сторін прямокутного трикутника. У 9 класі це означення стає логічно неспроможним для тупих кутів, адже в прямокутному трикутнику не може бути кута більше $90^0$.

Тут виникає перший когнітивний бар'єр, який методисти 6 радять долати через введення одиничного півкола.

Логічний перехід виглядає так:

- **Було (8 клас):** $\cos\alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$.
- **Стало (9 клас):** $\cos\alpha = x$, де $x$ — абсциса точки на одиничному півколі.

Цей момент є критичним. Згідно з аналізом типових помилок [41], учні часто плутають геометричний зміст (відношення відрізків, яке завжди додатне) з координатним (яке може бути від’ємним). Поява від’ємного косинуса ($\cos 120^0 = -0{,}5$) є логічним шоком для багатьох школярів. Вчителю важливо акцентувати, що це не "довжина стала від'ємною", а змінилася проекція вектора.

У підручнику А.Г. Мерзляка [35] цей перехід подається дуже строго, з прив'язкою до координат. У підручнику О.С. Істера [38] акцент робиться на формулах зведення що є більш алгоритмічним підходом.

$$(\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha),$$

Обидва підходи мають право на життя, але з точки зору розвитку математичного мислення, координатний метод є більш перспективним, оскільки готує до вивчення тригонометрії в 10 класі.

**Логіко-математичний аналіз Теореми косинусів**

Теорема косинусів ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$)

Теорема косинусів займає центральне місце в темі. Давайте проаналізуємо її структуру.

1. Статус теореми:

Це твердження є необхідною і достатньою умовою зв'язку трьох сторін і одного кута.

- Необхідність: У будь-якому трикутнику виконується ця рівність.
- Достатність: Якщо для трьох відрізків виконується ця рівність, то кут між b і c дорівнює a (з точністю до орієнтації).

2. Генетичний зв'язок з теоремою Піфагора:

Логічно теорема Піфагора є наслідком теореми косинусів. Якщо a= $90^0$, то cos$90^0$ = 0, і доданок -2bc*cos a зникає. Це класичний приклад дедуктивного виведення часткового з загального. Методично дуже корисно показати учням цей перехід, запитавши: "Що станеться з формулою, якщо кут стане прямим?". Це формує цілісність знань.

3. Функціональний аналіз:

Розглянемо вираз $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ як функцію від a при фіксованих b і c.

Оскільки cos a на проміжку [$0^0$; $180^0$] є спадною функцією, то вираз -2bc*cos a є зростаючим. Отже, зі збільшенням кута a сторона a збільшується. Це твердження строго доводить відому з 7 класу теорему: "проти більшого кута лежить більша сторона". Такий аналіз дозволяє поєднати алгебру і геометрію, що є вимогою сучасних стандартів освіти.

4. Способи доведення:

У літературі 2019-2025 років 5 обговорюються різні підходи до доведення:

- **Метод координат:** Вводимо систему координат, вершина A в початку (0;0), точка C на осі x. Знаходимо координати B через (c cos a; c sin a). Записуємо відстань BC. Це доведення є алгоритмічним і "непробивним", воно

працює однаково для гострих і тупих кутів.

- **Векторний метод:** Оскільки скалярний добуток містить косинус кута, одразу отримуємо результат. Цей метод є найбільш елегантним і коротким, проте вимагає доброго знання теми "Вектори".

- **Геометричний метод (через висоту):** Розглядаємо проекції сторін. Цей метод громіздкий, бо вимагає розгляду випадків (гострий/тупий кут, висота падає на сторону чи на продовження). У сучасних підручниках [35] від нього часто відмовляються на користь координат/векторів задля універсальності.

**2. Генетичний зв'язок з теоремою Піфагора:** Логічно теорема Піфагора є наслідком теореми косинусів. Якщо $\alpha = 90^\circ$, то $\cos 90^\circ = 0$, і доданок $-2bc\cos\alpha$ зникає. Це класичний приклад дедуктивного виведення часткового з загального. Методично дуже корисно показати учням цей перехід, запитавши: "Що станеться з формулою, якщо кут стане прямим?". Це формує цілісність знань.

**3. Функціональний аналіз:** Розглянемо вираз $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ як функцію від $\alpha$ при фіксованих $b$ і $c$. Оскільки $\cos\alpha$ на проміжку $[0^\circ; 180^\circ]$ є спадною функцією, то вираз $-2bc\cos\alpha$ є зростаючим. Отже, зі збільшенням кута $\alpha$ сторона $a$ збільшується. Це твердження строго доводить відому з 7 класу теорему: "проти більшого кута лежить більша сторона". Такий аналіз дозволяє поєднати алгебру і геометрію, що є вимогою сучасних стандартів освіти.

**4. Способи доведення:** У літературі 2019–2025 років обговорюються різні підходи до доведення:

- **Метод координат:** Вводимо систему координат, вершина $A$ в початку $(0;0)$, точка $C$ на осі $x$. Знаходимо координати $B$ через $(c\cos\alpha; c\sin\alpha)$. Записуємо відстань $BC$. Це доведення є алгоритмічним і "непробивним", воно працює однаково для гострих і тупих кутів.
- **Векторний метод:** $BC = AC - AB$. Підносимо до скалярного квадрата: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB$. Оскільки скалярний добуток містить косинус кута, одразу отримуємо результат. Цей метод є найбільш елегантним і коротким, проте вимагає доброго знання теми "Вектори".

**Таблиця 1.3.**

**Порівняння методів доведення Теореми косинусів**

| Метод | Переваги | Недоліки | Логічна цінність |
|---|---|---|---|
| **Координатний** | Універсальність (один випадок для всіх кутів). | Потребує введення системи координат, громіздкі викладки. | Демонструє зв'язок алгебри та геометрії. |
| **Векторний** | Стислість, елегантність. | Базується на понятті скалярного добутку, яке має бути засвоєне. | Високий рівень абстракції. |
| **Геометричний (проекції)** | Наочність, геометрична інтуїція. | Необхідність розглядати випадки (гострий/тупий кут). | Розвиває навички додаткових побудов. |

**Логіко-математичний аналіз Теореми синусів**

Теорема синусів вводить у розгляд ще один важливий елемент — радіус описаного кола R.

1. Логічна структура:

Рівність складається з трьох частин.

- Частина 1: Пропорційність сторін синусам кутів. Це дозволяє знаходити сторони за кутами і навпаки.
- Частина 2: Зв'язок з радіусом (= 2R). Ця частина часто ігнорується учнями ("розширена теорема синусів"), але саме вона є ключем до багатьох задач на побудову та знаходження площ.

Теорема синусів ($\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$) вводить у розгляд ще один важливий елемент — радіус описаного кола $R$.

**1. Логічна структура:** Рівність складається з трьох частин.

- Частина 1: Пропорційність сторін синусам кутів ($\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$). Це дозволяє знаходити сторони за кутами і навпаки.
- Частина 2: Зв'язок з радіусом ($= 2R$). Ця частина часто ігнорується учнями ("розширена теорема синусів"), але саме вона є ключем до багатьох задач на побудову та знаходження площ.

**2. Проблема неоднозначності (The Ambiguous Case):** При знаходженні кута за синусом ($\sin x = a$) на проміжку $[0°; 180°]$ рівня
може мати два корені: $\alpha$ і $180° - \alpha$. Наприклад, якщо $\sin A = 0,5$, то кут може бути $30°$ або $150°$. Це створює значні логічні труд
при розв'язуванні трикутників за двома сторонами і кутом не між ними (випадок SSA). Учні часто автоматично пишуть калькулятор
$\arcsin(0,5) = 30°$, гублячи другий розв'язок. Логічний аналіз цього моменту вимагає від учня перевірки: чи можливий тупий кут?

- Якщо трикутник вже має тупий кут, то шуканий кут може бути тільки гострим (сума кутів $180°$).

2. Проблема неоднозначності (The Ambiguous Case):

При знаходженні кута за синусом (sin x = a) на проміжку [$0^0$; $180^0$] рівняння може мати два корені: a і $180^0$ - a. Наприклад, якщо sin A = 0,5, то кут може бути $30^0$ або $150^0$.

Це створює значні логічні труднощі при розв'язуванні трикутників за двома сторонами і кутом не між ними (випадок SSA). Учні часто автоматично пишуть калькулятором arcsin(0,5) = $30^0$, гублячи другий розв'язок.

Логічний аналіз цього моменту вимагає від учня перевірки: чи можливий тупий кут?

- Якщо трикутник вже має тупий кут, то шуканий кут може бути тільки гострим (сума кутів $180^0$).
- Якщо шуканий кут лежить проти меншої сторони, він має бути гострим.

Аналіз типових помилок [43] показує, що саме втрата другого кореня в рівнянні sin x = a є найпоширенішою помилкою в цій темі.

**Класифікація та алгоритмізація задач на розв'язування трикутників**

Логіко-математичний аналіз вимагає чіткої структуризації типів задач. Традиційно виділяють чотири основні типи, які покривають всі можливі випадки визначення трикутника. Ми систематизували їх у Таблиці 1.4, додавши логічні нюанси, які часто опускаються.

**Таблиця 1.4.**

**Логічний аналіз алгоритмів розв'язування трикутників**

| **Тип задачі (Дано)** | **Ключова теорема** | **Логічні підводні камені** | **Кількість розв'язків** |
|---|---|---|---|
| **1. Дві сторони і кут між ними (SAS)** | Теорема косинусів | Однозначність гарантована. Після знаходження 3-ї сторони краще шукати кути теж через косинус, щоб уникнути неоднозначності синуса. | 1 |
| **2. Сторона і два кути (ASA / AAS)** | Теорема синусів | Найпростіший випадок. Спочатку знаходимо 3-й кут через суму кутів ($180^0$). | 1 |
| **3. Три сторони (SSS)** | Теорема косинусів | Необхідно перевірити нерівність трикутника (a+b>c). Спочатку варто шукати кут проти найбільшої сторони, щоб одразу виявити, чи є трикутник тупокутним. | 0 або 1 |
| **4. Дві сторони і кут проти однієї з них (SSA)** | Теорема синусів | **Найскладніший випадок.** Може бути 0, 1 або 2 розв'язки. Потребує аналізу: порівняння сторони з висотою (h = b sin A). | 0, 1 або 2 |

Детальний аналіз випадку SSA (Дві сторони і кут проти однієї)

Цей випадок заслуговує окремого розгляду в магістерській роботі, оскільки він демонструє дослідницький характер геометрії.

Нехай дано сторони a, b і кут A.

Алгоритм дослідження:

1. Знаходимо висоту h = b\sin A.
2. Якщо a < h - трикутник не існує (синус вийде >1).
3. Якщо a = h - трикутник прямокутний (один розв'язок).
4. Якщо a > b - один розв'язок (кут B мусить бути гострим, бо A може бути будь-яким, але проти більшої сторони лежить більший кут, а тупих кутів два бути не може).
5. Якщо h < a < b - два розв'язки. Саме тут виникає "маятниковий ефект": сторона a може перетнути промінь сторони c у двох точках.

У шкільних підручниках [39] цей аналіз іноді спрощується до конкретних числових прикладів, але для формування математичної культури важливо дати учням саме загальну схему дослідження.

**Міжпредметні зв'язки та прикладна спрямованість**

Логічний аналіз теми був би неповним без згадки про її інструментальну роль. Тригонометрія трикутника - це мова фізики та техніки.

Аналіз джерел 9 підтверджує, що засвоєння цієї теми корелює з успішністю у вивченні фізики (розділ «Механіка»).

- **Вектори і сили:** Знаходження рівнодійної двох сил під кутом a - це чиста теорема косинусів $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$ (тут знак плюс, бо кут береться між векторами при додаванні за правилом паралелограма, що відповідає куту $180^0$ - a в трикутнику). Ця розбіжність знаків (+ у фізиці для діагоналі, - у геометрії для сторони) часто плутає учнів і потребує логічного роз'яснення вчителем.
- **Оптика і хвилі:** Теорема синусів має схожу структуру із законом заломлення світла (закон Снеліуса), хоча природа явищ різна.

У статті про міжпредметні зв'язки [44] також згадується креслення та геодезія. Задачі на визначення відстані до недоступної точки (через річку, вимірювання висоти гори) демонструють практичну силу теоретичних теорем. Логіка тут така: ми будуємо математичну модель (трикутник), вимірюємо

доступні елементи (базис і кути), обчислюємо недоступні і повертаємо результат у реальний світ.

**Аналіз методичного забезпечення та підходів у підручниках**

Для повноти картини ми проаналізували, як тема подається у провідних підручниках, що використовувалися в школах у 2019-2025 роках.

А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір «Геометрія. 9 клас» [35]:

- Підхід: Академічний, строгий.
- Логіка: Спочатку теорема косинусів, потім синусів. Багато уваги приділяється доведенням.
- Особливості*:* Чудова добірка задач різної складності (від початкового до олімпіадного рівня). Є задачі на доведення метричних співвідношень у медіанах та бісектрисах, що розвиває дедуктивне мислення.

Г.П. Бевз, В.Г. Бевз «Геометрія. 9 клас» [36]:

- Підхід*:* Прикладний, гуманітарний.
- Логіка*:* Більший акцент на історичні відомості та практичне застосування.
- Особливості*:* Багато задач прикладного змісту (наприклад, про будівництво мостів, навігацію). Це підвищує мотивацію, але іноді теоретичні викладки подаються менш формалізовано.

О.С. Істер «Геометрія. 9 клас» [38]:

- Підхід*:* Алгоритмічний.
- Логіка*:* Матеріал структуровано так, щоб учень міг швидко знайти "рецепт" розв'язання.
- Особливості*:* Чітко виділені опорні задачі. Це допомагає слабшим учням, але може обмежувати розвиток творчого мислення у сильних, якщо вчитель не даватиме додаткових навантажень.

**Типові помилки та шляхи їх попередження**

Логічний аналіз помилок учнів дозволяє виявити "вузькі місця" теми. Спираючись на дані аналізу ЗНО та методичні статті [41], можна виділити такі групи помилок:

1. **Логіко-понятійні помилки:**

- Нерозуміння області значень синуса і косинуса (спроби знайти кут, якщо sin x = 1,5).
- Ігнорування нерівності трикутника (отримання сторін 2, 3, 6).
- Плутанина між теоремою косинусів і теоремою Піфагора (забування подвоєного добутку).

2. **Алгоритмічні помилки:**

- Вибір неправильної пари "сторона-кут" у теоремі синусів.
- Неправильне розкриття дужок при обчисленні cos a для тупого кута (мінус на мінус дає плюс). Наприклад, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-0.5)$. Учні часто пишуть мінус.

3. **Обчислювальні помилки:**

- Проблеми з наближеними обчисленнями. Якщо округлити $\cos 50^0$ занадто грубо на початку задачі, кінцевий результат (наприклад, сторона) може мати велику похибку, що є неприпустимим у геодезичних задачах.

## Висновки до розділу 1

Проведений порівняльний аналіз дозволяє зробити такі висновки, важливі для подальшого дослідження у магістерській роботі:

1. Концептуальна прірва: Відмінність між базовим та поглибленим рівнями вивчення трикутників є системною. Рівень стандарту має на меті формування геометричної грамотності та практичних навичок, тоді як поглиблений рівень спрямований на формування математичної культури та фундаментального теоретичного мислення.

2. Змістове наповнення: Поглиблений курс збагачений фундаментальними теоремами (Чеви, Менелая, Птолемея) та методами (метод площ, метод допоміжного кола, векторно-координатний метод у складних застосуваннях), які перетворюють геометрію з набору формул на цілісну наукову теорію.

3. Методичний виклик: Викладання на поглибленому рівні вимагає від учителя значно вищої кваліфікації, володіння сучасними засобами ІКТ та методами розв'язування нестандартних задач.

Таким чином, при розробці методичних матеріалів для магістерської роботи необхідно чітко диференціювати підходи: для базового рівня — акцент на наочність, прикладний зміст та алгоритмізацію; для поглибленого — на строгість доведень, варіативність методів розв'язання та дослідницьку діяльність. Лише такий диференційований підхід дозволить реалізувати освітній потенціал теми «Трикутники» в повній мірі, відповідаючи на запити та можливості кожного учня.

Проведений логіко-математичний аналіз теми «Розв’язування трикутників» дозволяє зробити такі узагальнення для магістерської роботи:

1. Інтегративна сутність: Тема є синтезом геометрії та алгебри. Успішне її засвоєння неможливе без міцних навичок перетворення виразів, розв’язування рівнянь та розуміння функцій.

2. Розвиток логічного мислення: Тема створює ідеальні умови для

формування навичок дослідження (особливо у випадку SSA) та класифікації задач.

3. Методична варіативність: Існує кілька рівноправних підходів до викладення матеріалу (координатний, векторний, геометричний). Вибір методу має залежати від рівня підготовки класу та профілю навчання.

4. Практична цінність: Це одна з небагатьох шкільних тем, де учні можуть реально застосувати знання на практиці (вимірювання на місцевості), що слід використовувати для підвищення мотивації.

Подальша розробка методики викладання цієї теми має спиратися на подолання виявлених логічних труднощів (робота з тупими кутами, неоднозначність арксинуса) та широке залучення інтерактивних засобів навчання (GeoGebra, Gran-2D) для візуалізації динамічних залежностей між елементами трикутника.

# РОЗДІЛ 2 МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

## 2.1. Методичні прийоми формування вмінь та навичок учнів під час розв'язування задач на обчислення елементів трикутника

Розв'язування задач на обчислення елементів трикутника є важливим етапом вивчення теми «Трикутники» у шкільному курсі геометрії та логічним завершенням формування процедурної компетентності учнів у межах планіметрії. Саме на цьому етапі учні переходять від оперування окремими геометричними фактами до цілісного застосування метричних співвідношень у довільному трикутнику.

Аналіз чинної навчальної програми та змісту підручника Г. П. Бевза і В. Г. Бевза свідчить, що задачі на обчислення елементів трикутника виконують подвійну функцію: з одного боку, вони закріплюють знання теорем синусів і косинусів, з іншого - формують уміння моделювати реальні ситуації за допомогою геометричних понять. Тому методика навчання цієї теми повинна бути спрямована не лише на відпрацювання формул, а й на усвідомлений вибір способу розв'язання.

### Дидактичні цілі та методичні завдання підрозділу

Основною дидактичною метою навчання задач на обчислення є формування в учнів уміння встановлювати залежності між елементами трикутника та застосовувати відповідні метричні співвідношення залежно від умов задачі.

Для досягнення цієї мети вчитель має розв'язувати такі методичні завдання:

- сформувати в учнів уміння аналізувати умову задачі;
- навчити визначати достатність та надлишковість даних;
- розвинути навички вибору оптимальної стратегії розв'язування;

- запобігти типовим логічним і обчислювальним помилкам.

**Місце задач на обчислення у структурі вивчення теми «Трикутники»**

У підручнику Бевза задачі на обчислення елементів трикутника вводяться після вивчення теорем синусів і косинусів та їх наслідків. Така послідовність є методично обґрунтованою, оскільки дозволяє учням одразу застосовувати нові знання на практиці.

Водночас ефективність навчання значною мірою залежить від того, наскільки системно організовано роботу над задачами. Доцільним є перехід від:

- стандартних задач з безпосереднім застосуванням формули;
- до комбінованих задач;
- і далі - до прикладних задач, що моделюють реальні ситуації.

**Методичний конструктор розв’язування задач на обчислення**

З метою формування в учнів усвідомлених навичок розв’язування задач на обчислення елементів трикутника доцільно використовувати методичний конструктор, який складається з таких етапів:

1. Аналіз умови задачі.

Учні визначають, які елементи трикутника відомі, а які потрібно знайти, встановлюють тип трикутника та можливі співвідношення між його елементами.

2. Вибір стратегії розв’язування.

На цьому етапі вчитель спрямовує учнів до вибору відповідної теореми (синусів або косинусів), пояснюючи, чому саме цей інструмент є доцільним.

3. Реалізація обчислень.

Особлива увага приділяється правильному використанню тригонометричних значень та роботі з калькулятором.

4. Інтерпретація результату.

Учні аналізують отримане числове значення, оцінюють його правдоподібність та виконують округлення з урахуванням практичного контексту задачі.

**Типові помилки учнів під час застосування метричних співвідношень**

На основі аналізу навчальної практики можна виокремити типові помилки учнів під час розв’язування задач на обчислення.

Таблиця 2.1

Типові помилки учнів під час розв’язування задач на обчислення елементів трикутника

| **Тип помилки** | **Причина** | **Методичний коментар** |
|---|---|---|
| Неправильний вибір формули | Формальне запам’ятовування | Потрібен аналіз даних |
| Плутанина кутів і сторін | Недостатня робота з рисунком | Акцент на позначення |
| Помилки в обчисленнях | Недостатні навички роботи з калькулятором | Навчання перевірці |
| Ігнорування другого розв’язку | Незнання випадку SSA | Дослідницький підхід |

Систематичне обговорення таких помилок сприяє підвищенню якості навчальних результатів.

Прикладна задача як засіб формування практичної компетентності

Використання прикладних задач є важливим елементом методики Бевза, оскільки дозволяє показати практичну цінність геометричних знань.

Задача 2.1.

Для визначення ширини річки (відстані між точками А та В) геодезист обрав на одному березі базис АС=80 м та виміряв кути $\angle BAC=75^0$ і $\angle ACB=60^0$. Знайти відстань АВ.

Методичний аналіз розв’язування:

1. Математизація ситуації.

Реальна ситуація моделюється довільним трикутником АВ.

2. Вибір стратегії.

Оскільки відома сторона і два кути, доцільно застосувати теорему синусів.

3. Обчислення.

Знаходимо третій кут трикутника та обчислюємо шукану сторону.

4. Інтерпретація результату.

Результат округлюється з урахуванням похибки вимірювань.

**Система опорних задач на обчислення елементів трикутника**

З метою формування стійких умінь розв’язування задач на обчислення елементів трикутника доцільно використовувати систему опорних задач, які відрізняються як характером вхідних даних, так і способом розв’язування. Такі задачі сприяють усвідомленому вибору метричних співвідношень та формують здатність учнів аналізувати умову задачі.

Задача 2.2. (дві сторони і кут між ними)

У трикутнику АВ відомо: АВ=6см, АС=9см, $\angle A=40^0$ Знайти сторону ВС.

Методичний аналіз розв’язування:

1. Аналіз умови.

Відомі дві сторони і кут між ними, що однозначно визначає трикутник.

2. Вибір стратегії.

Доцільно застосувати теорему косинусів, оскільки вона безпосередньо пов’язує дві сторони і кут між ними з третьою стороною.

3. Розв’язання.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

4. Інтерпретація результату.

Отримане значення порівнюється з довжинами інших сторін для перевірки правдоподібності.

Методичний коментар.

Задача формує навички прямого застосування теореми косинусів та вміння працювати з формулами.

Задача 2.3. (дві сторони і кут, що не є між ними)

У трикутнику АВ задано: АВ=7 см, АС=5 см, ∠В=$30^0$. Знайти кути трикутника.

Методичний аналіз розв’язування:

1. Аналіз умови.

Дано дві сторони і кут, що не є між ними, що потребує дослідження можливості існування одного або двох розв’язків.

2. Вибір стратегії.

Застосовується теорема синусів із подальшим аналізом отриманих значень.

3. Дослідницький етап.

Учні з’ясовують, за яких умов можливі два трикутники.

4. Узагальнення.

Формується уявлення про неоднозначність задач типу SSA.

Методичний коментар.

Задача має дослідницький характер і формує критичне мислення.

Задача 2.4. (прикладна задача з навігації)

З корабля в морі одночасно виміряли кути між напрямками на два маяки, що розташовані на березі, та отримали значення $48^0$ і $67^0$. Відстань між маяками становить 12 км. Знайти відстань від корабля до кожного маяка.

Методичний аналіз розв'язування:

1. Моделювання ситуації.

Реальна ситуація зводиться до довільного трикутника, у якому відома сторона і два кути.

2. Вибір інструментарію.

Застосовується теорема синусів.

3. Інтерпретація результату.

Учні обговорюють практичну точність отриманих результатів.

Методичний коментар.

Задача демонструє прикладне застосування геометрії та підвищує мотивацію.

**Альтернативні способи розв'язування та їх обговорення**

Важливим методичним прийомом є обговорення альтернативних шляхів розв'язування задач. Наприклад, у задачі 2.2 після знаходження сторони BC за теоремою косинусів можна запропонувати учням знайти інші кути трикутника за теоремою синусів. Це сприяє формуванню гнучкості мислення та цілісного уявлення про метричні співвідношення.

Диференціація навчальних завдань

Для врахування індивідуальних особливостей учнів доцільно використовувати диференційовані завдання:

- базового рівня - пряме застосування формул;
- достатнього рівня - комбіновані задачі;
- високого рівня - прикладні та дослідницькі задачі.

Узагальнення знань за допомогою алгоритмів і таблиць

Для систематизації знань учнів доцільно використовувати узагальнювальні таблиці, які допомагають обрати правильну стратегію розв’язування. (див таблицю 2.2)

Таблиця 2.2

Алгоритм вибору метричних співвідношень у довільному трикутнику

| Відомі елементи | Шуканий елемент | Рекомендований метод |
|---|---|---|
| Дві сторони і кут між ними | Третя сторона | Теорема косинусів |
| Три сторони | Кут | Теорема косинусів |
| Сторона і два кути | Сторона | Теорема синусів |
| Дві сторони і кут не між ними | Кути | Теорема синусів |

Використання таких таблиць знижує рівень психологічної напруги та формує впевненість учнів.

Роль обчислювальних навичок і використання технічних засобів

Особливу увагу під час навчання задач на обчислення необхідно приділяти формуванню навичок роботи з калькулятором. Часто правильний хід міркувань нівелюється технічними помилками, що призводить до зниження навчальної мотивації.

Доцільно навчати учнів:

- перевіряти результати наближених обчислень;
- оцінювати порядок величин;
- порівнювати отримані результати з геометричним змістом задачі.

## 2.2. Формування вмінь та навичок розв’язувати задачі на побудову з теми «Трикутники»

Задачі на побудову є невід’ємною складовою навчання геометрії в основній школі, оскільки вони сприяють формуванню в учнів умінь аналізувати геометричні умови, планувати послідовність дій, здійснювати контроль правильності побудови та робити обґрунтовані висновки. У темі «Трикутники» такі задачі відіграють особливу роль, адже ґрунтуються на базових властивостях трикутника та є ефективним засобом розвитку просторового і логічного мислення.

У підручнику Г. П. Бевза та В. Г. Бевз задачі на побудову подаються після засвоєння основних понять і властивостей трикутника (рівність трикутників, медіани, бісектриси, висоти), що відповідає принципу поступового ускладнення навчального матеріалу. Водночас методична практика показує, що ефективність засвоєння таких задач значно підвищується за умови переходу від формального відтворення алгоритмів до усвідомленого аналізу кожного етапу побудови.

**Методика організації роботи над задачами на побудову**

Ключовим етапом розв’язування задач на побудову є аналіз умови, під час якого учні з’ясовують, які елементи трикутника задані та які геометричні залежності між ними існують. З методичної точки зору доцільно використовувати спеціальну пам’ятку, що структурує діяльність учнів.

Пам’ятка для учнів «4 кроки аналізу задачі на побудову»:

1. Визначити задані та шукані елементи трикутника.
2. Встановити геометричні зв’язки між ними.
3. Знайти можливі допоміжні побудови.
4. Дослідити можливість існування та кількість розв’язків.

Використання такої пам’ятки сприяє формуванню в учнів умінь самостійного планування побудови та знижує рівень формалізму в навчальній діяльності.

Приклади задач на побудову з методичним аналізом

Нижче наведено приклади задач на побудову трикутників, розроблені за аналогією до вправ підручника Г. П. Бевза та В. Г. Бевз, але доповнені розгорнутим методичним аналізом.

Задача 2.5

Побудувати трикутник ABC, якщо задано сторону AB, кут ∠A та суму сторін AC+BC.

Аналіз умови.
Безпосередньо побудувати сторони AC і BC неможливо, оскільки відома лише їх сума. Це вимагає введення допоміжної побудови, яка дозволяє замінити суму двох відрізків одним.

Побудова.

1. Відкласти задану сторону AB.
2. У точці A побудувати промінь, що утворює з відрізком AB кут ∠A.
3. На цьому промені відкласти відрізок AD, рівний AC+BC.
4. З’єднати точку D з точкою B.
5. На відрізку AD знайти точку C таку, що DC=CB.
6. З’єднати точку C з точками A та B.

Обґрунтування.
Оскільки AD=AC+BC і DC=CB, побудований трикутник ABC задовольняє умову задачі.

Методичний коментар.

Задача формує в учнів уміння застосовувати допоміжні побудови та розуміння ідеї заміни складної умови еквівалентною геометричною конструкцією.

Задача 2.6

Побудувати трикутник ABC, якщо задано сторону AB, висоту hc опущену на цю сторону, та кут ∠C.

Аналіз умови.

Вершина C має знаходитися на відстані hc від прямої AB, тобто на прямій, паралельній AB. Крім того, з точки C відрізок AB має бути видимий під заданим кутом.

Побудова.

1. Відкласти сторону AB.
2. Побудувати пряму, паралельну AB, на відстані hc.
3. Побудувати дугу, з якої відрізок AB видно під кутом ∠C.
4. Точка перетину прямої та дуги визначає положення вершини C.
5. З’єднати точку C з точками A та B.

Обґрунтування.

Побудова гарантує виконання умов щодо висоти та величини кута.

Методичний коментар.

Задача ілюструє застосування методу геометричних місць точок і розвиває просторову уяву учнів.

Задача 2.7

Побудувати трикутник ABC, якщо задано сторону AB, медіану CM та кут між медіаною і стороною AB.

Аналіз умови.

Оскільки M - середина сторони AB, її положення однозначно визначене, що значно спрощує побудову.

Побудова.

- Відкласти сторону AB.
- Знайти середину відрізка AB - точку M.
- Із точки M побудувати промінь, що утворює заданий кут із відрізком AB.
- На цьому промені відкласти відрізок MC, рівний заданій медіані.
- З’єднати точку C з точками A та B.

Обґрунтування.

Побудований трикутник має задану медіану та відповідає умові задачі.

Методичний коментар.

Задача сприяє закріпленню поняття медіани та формує вміння використовувати властивості середини відрізка.

### 2.3. Формування вмінь та навичок учнів під час розв’язування задач на доведення з теми «Трикутники»

Задачі на доведення займають центральне місце у шкільному курсі геометрії, оскільки саме вони забезпечують формування логічної культури мислення, уміння аргументовано обґрунтовувати твердження та послідовно будувати математичні міркування. У межах теми «Трикутники» задачі на доведення охоплюють широкий спектр тверджень - від елементарних властивостей рівнобедреного трикутника до складніших співвідношень між елементами трикутника, що вимагають узагальненого підходу.

Практика викладання геометрії показує, що основні труднощі учнів пов’язані не стільки з незнанням окремих теорем, скільки з невмінням організувати процес доведення: виокремити ключову ідею, визначити, які

твердження можуть бути використані, та обґрунтувати логічний перехід між кроками міркувань. У зв’язку з цим актуальним є впровадження евристичних методів навчання, що сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів.

**Психолого-методичні аспекти навчання доведень**

З погляду психології навчання, доведення є складною інтелектуальною діяльністю, що потребує розвитку операцій аналізу, синтезу, порівняння та узагальнення. Тому методика навчання доведень має враховувати вікові особливості учнів та поступово ускладнювати характер завдань.

На початкових етапах вивчення теми «Трикутники» доцільно пропонувати доведення, які мають виражену наочну опору (симетрія, рівність трикутників, паралельність). Надалі слід переходити до задач, у яких необхідно вводити допоміжні елементи, використовувати відношення відрізків або площ, а також комбінувати кілька відомих теорем.

**Евристичні методи у формуванні доказових умінь**

Евристичний підхід у навчанні геометрії передбачає не подання готового доведення, а організацію пізнавального пошуку, під час якого учні самостійно відкривають шлях до розв’язання. Найбільш ефективними евристичними прийомами у темі «Трикутники» є:

- аналіз геометричного рисунка з варіюванням його елементів;
- введення допоміжних побудов (медіан, висот, паралельних прямих);
- переформулювання твердження у вигляді запитань;
- використання аналогій з уже доведеними властивостями.

Застосування таких прийомів сприяє переходу від репродуктивної діяльності до продуктивної та забезпечує усвідомлення логіки доведення.

**Розширений сценарій евристичної бесіди (теорема Чеви)**

Розглянемо детальніше організацію евристичної бесіди під час доведення теореми Чеви.

**Етап 1. Актуалізація знань.**

Учитель пропонує учням пригадати поняття січної трикутника, відношення відрізків та властивості площ трикутників, що мають спільну висоту.

**Етап 2. Постановка проблеми.**

Учням пропонується питання: за якої умови три січні трикутника перетинаються в одній точці?

**Етап 3. Пошук ідеї доведення.**

Навідні запитання:

- Які трикутники на рисунку мають спільну висоту?
- Як можна виразити відношення відрізків через відношення площ?
- Які множники з’являються під час перемноження отриманих відношень?

**Етап 4. Формулювання висновку.**

Учні разом з учителем формулюють умову теореми Чеви та усвідомлюють необхідність і достатність отриманого співвідношення.

Такий сценарій евристичної бесіди дозволяє учням не лише запам’ятати твердження теореми, а й зрозуміти логіку її доведення.

**Формування вмінь вибору способу доведення**

Важливим компонентом методики навчання доведень є формування в учнів уміння обирати доцільний спосіб доведення залежно від характеру задачі. З цією метою доцільно використовувати порівняльний аналіз різних методів доведення. (див. табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Порівняльна характеристика способів доведення у задачах про трикутники

| **Критерій** | **Пряме доведення** | **Доведення від супротивного** |
|---|---|---|
| Основна ідея | Послідовне використання відомих фактів | Заперечення твердження і виведення суперечності |
| Доцільність | Стандартні властивості | Єдиність, нерівності |
| Рівень складності | Помірний | Високий |
| Методичний ефект | Формування логічної послідовності | Розвиток критичного мислення |

**Типові помилки учнів у задачах на доведення**

У процесі навчання доведень доцільно звертати увагу на типові помилки учнів:

- підміна доведення перевіркою на окремому рисунку;
- пропуск логічних ланок у міркуваннях;
- використання тверджень без обґрунтування;
- плутанина між необхідною та достатньою умовами.

Систематичний аналіз таких помилок сприяє формуванню культури математичного доведення.

## 2.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій та динамічних моделей GeoGebra під час вивчення теми «Трикутники»

Сучасний етап розвитку математичної освіти характеризується активним упровадженням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), що зумовлено необхідністю підвищення наочності навчального матеріалу, активізації

пізнавальної діяльності учнів та формування їхньої дослідницької компетентності. Особливо ефективним засобом навчання геометрії є використання динамічних математичних середовищ, зокрема програмного забезпечення GeoGebra.

Застосування GeoGebra під час вивчення теми «Трикутники» дозволяє поєднати традиційні методи навчання з елементами дослідницької діяльності, оскільки учні мають можливість змінювати положення елементів трикутника та спостерігати збереження або зміну його властивостей у реальному часі. Такий підхід відповідає діяльнісному та компетентнісному підходам, рекомендованим чинними методичними документами.

Методичні засади використання GeoGebra на уроках геометрії

З методичної точки зору використання динамічних моделей GeoGebra є доцільним:

- на етапі вивчення нового матеріалу - для формування первинних уявлень;
- на етапі закріплення знань - для підтвердження теоретичних тверджень;
- на етапі узагальнення та систематизації - для встановлення зв’язків між різними поняттями;
- на етапі дослідження - для самостійного «відкриття» учнями властивостей геометричних фігур.

Використання GeoGebra не замінює класичних геометричних побудов, а доповнює їх, сприяючи глибшому розумінню навчального матеріалу.

**Опис авторських динамічних моделей**

Нижче наведено опис трьох авторських динамічних моделей GeoGebra, розроблених для використання під час вивчення теми «Трикутники» у 7-9 класах.

Модель 1. Інцентр та вписане коло трикутника

Мета використання:
Формування в учнів уявлень про інцентр трикутника та властивість рівновіддаленості цієї точки від сторін трикутника.

Опис моделі:
У середовищі GeoGebra побудовано довільний трикутник ABC. За допомогою інструментів програми проведено бісектриси кутів трикутника, точка їх перетину позначена як інцентр I. Із точки I опущено перпендикуляри до сторін трикутника, які є радіусами вписаного кола.

У моделі передбачено можливість динамічного переміщення вершин трикутника, при цьому учні спостерігають, що інцентр завжди залишається точкою перетину бісектрис, а відстані від цієї точки до всіх сторін трикутника є рівними.

Методичне значення:
Модель дозволяє учням самостійно дійти висновку про існування вписаного кола в будь-якому трикутнику та усвідомити геометричний зміст поняття інцентра. Візуалізація сприяє зменшенню формалізму у сприйнятті відповідних теорем.

Модель 2. Ортоцентр трикутника та залежність його положення від виду трикутника

Мета використання:
Дослідження властивостей ортоцентра трикутника та формування уявлень про залежність його положення від виду трикутника.

Опис моделі:
У GeoGebra побудовано довільний трикутник ABC, у якому проведено три висоти. Точка їх перетину позначена як ортоцентр H. Модель дозволяє змінювати форму трикутника, переходячи від гострокутного до прямокутного та тупокутного.

Під час динамічного дослідження учні спостерігають, що:

- у гострокутному трикутнику ортоцентр розташований всередині трикутника;
- у прямокутному - збігається з вершиною прямого кута;
- у тупокутному - знаходиться поза трикутником.

Методичне значення:

Модель сприяє формуванню причинно-наслідкових зв’язків між видом трикутника та положенням його ортоцентра, а також розвиває в учнів уміння робити узагальнення на основі спостережень.

Модель 3. Пряма Ейлера трикутника

Мета використання:

Дослідження взаємного розташування основних центрів трикутника та формування цілісного уявлення про їхні властивості.

Опис моделі:

У моделі побудовано довільний трикутник ABC, визначено його ортоцентр H, центр описаного кола O та центр мас (перетин медіан) G. За допомогою інструментів GeoGebra через ці точки проведено пряму Ейлера.

Під час переміщення вершин трикутника учні спостерігають, що точки H, G та O завжди лежать на одній прямій, причому точка G ділить відрізок HO у сталому відношенні.

Методичне значення:

Модель дозволяє інтегрувати знання про різні елементи трикутника, формує системне бачення теми та створює умови для організації навчального дослідження.

Методичні переваги використання динамічних моделей

Використання динамічних моделей GeoGebra у навчанні теми «Трикутники» забезпечує:

- підвищення рівня наочності навчального матеріалу;
- активізацію пізнавальної діяльності учнів;
- формування дослідницьких умінь;
- розвиток навичок самостійного відкриття геометричних властивостей.

Крім того, створені в GeoGebra моделі є авторськими цифровими продуктами, що підвищує рівень академічної доброчесності кваліфікаційної роботи.

## 2.5. Факультативний курс «Цікаві властивості трикутника» як форма поглибленого вивчення геометрії

Поглиблення знань учнів з геометрії та розвиток їхніх дослідницьких умінь є одним із пріоритетних завдань сучасної математичної освіти. У цьому контексті особливої актуальності набуває організація факультативних занять і математичних гуртків, які дозволяють розширити зміст навчального матеріалу та реалізувати індивідуальні освітні потреби учнів. Тема «Трикутники» має значний дидактичний потенціал для такої роботи, оскільки поєднує в собі фундаментальні геометричні поняття та широкий спектр нетривіальних властивостей.

Запропонований факультативний курс «Цікаві властивості трикутника» орієнтований на учнів 8-9 класів і покликаний забезпечити логічне продовження вивчення теми «Трикутники» у межах основного курсу геометрії. Його реалізація створює умови для формування в учнів стійкого інтересу до математики та розвитку здатності до самостійної пізнавальної діяльності.

**Дидактичне обґрунтування факультативного курсу**

Необхідність упровадження факультативного курсу зумовлена тим, що обов'язкова навчальна програма з геометрії обмежує можливості детального розгляду низки важливих властивостей трикутника. Водночас саме ці властивості мають значну розвивальну цінність і сприяють формуванню в учнів математичної культури.

Факультативний курс дозволяє:

- реалізувати принцип диференціації навчання;
- організувати навчальний процес на засадах дослідницького підходу;
- поєднати теоретичні знання з практичною та експериментальною діяльністю;
- залучити учнів до елементів проєктної роботи.

Мета, завдання та очікувані результати курсу

Метою факультативного курсу є поглиблення і систематизація знань учнів про трикутник як базову геометричну фігуру та розвиток умінь досліджувати його властивості за допомогою різних методів, зокрема евристичних та цифрових.

Основні завдання курсу:

- поглибити знання учнів про центри трикутника та їхні властивості;
- сформувати вміння застосовувати евристичні методи під час розв'язування задач;
- розвивати навички використання ІКТ, зокрема програмного середовища GeoGebra;
- сприяти формуванню математичної мови та культури доведення.

Очікувані результати полягають у формуванні в учнів:

- здатності аналізувати геометричні ситуації;
- уміння самостійно формулювати гіпотези та перевіряти їх;
- навичок аргументованого доведення геометричних тверджень;
- інтересу до подальшого вивчення математики.

Структура та зміст факультативного курсу

Факультативний курс розрахований на 12 годин і може проводитися у формі гуртка або серії спецзанять. (див. таблицю 2.4)

Таблиця 2.4

План-сітка факультативного курсу «Цікаві властивості трикутника»

| **№** | **Тема заняття** | **Зміст навчальної діяльності** | **Основні методи** |
|---|---|---|---|
| 1 | Центри трикутника | Поняття центру, огляд видів центрів | Евристична бесіда |
| 2 | Інцентр трикутника | Вписане коло, задачі на доведення | Дослідження, GeoGebra |
| 3 | Ортоцентр | Залежність положення від виду трикутника | Практична робота |
| 4 | Центр описаного кола | Геометричні побудови | Моделювання |
| 5 | Пряма Ейлера | Взаємозв’язок центрів | Дослідницька діяльність |
| 6 | Коло дев’яти точок | Побудова та властивості | Проєктна робота |

## Методика проведення окремого факультативного заняття на прикладі теми «Пряма Ейлера трикутника»

Розглянемо методичні особливості проведення одного з факультативних занять курсу - заняття на тему «Пряма Ейлера трикутника», яке має узагальнювальний та дослідницький характер.

Метою заняття є формування в учнів цілісного уявлення про взаємне розташування основних центрів трикутника (ортоцентра, центра описаного кола та центра мас), а також розвиток умінь досліджувати геометричні властивості за допомогою динамічних моделей.

Структура заняття передбачає такі етапи:

1. **Мотиваційний етап.**

Учитель пропонує учням проблемне запитання:
Чи існує зв’язок між різними центрами трикутника і чи можна його описати геометрично?
Це створює пізнавальну мотивацію та налаштовує учнів на дослідницьку діяльність.

2. **Актуалізація опорних знань.**

Учні пригадують означення та властивості ортоцентра, центра описаного кола та точки перетину медіан. На цьому етапі доцільно використати коротку фронтальну бесіду.

3. **Дослідницький етап.**

За допомогою динамічної моделі GeoGebra учні будують довільний трикутник та визначають його основні центри. Переміщуючи вершини трикутника, учні спостерігають, що всі три точки лежать на одній прямій. Учитель спрямовує діяльність учнів навідними запитаннями, не повідомляючи готового результату.

4. **Узагальнення результатів.**

На основі проведеного дослідження учні формулюють властивість прямої Ейлера та обговорюють її геометричний зміст.

5. **Рефлексивний етап.**

Учні обговорюють, які методи дослідження були використані та які труднощі виникали під час роботи.

Такий формат заняття сприяє розвитку самостійності, логічного мислення та навичок математичного дослідження.

**Діяльність учителя та учнів у межах факультативного курсу**

У процесі реалізації факультативного курсу змінюється роль учителя: з носія готових знань він перетворюється на організатора та консультанта навчально-дослідницької діяльності учнів. Основними функціями вчителя є:

- постановка проблемних запитань;
- добір дослідницьких завдань;
- організація групової роботи;
- спрямування учнівських міркувань.

Учні, у свою чергу, виступають активними суб’єктами навчального процесу, що сприяє формуванню відповідальності за результат власної діяльності.

**Методичні рекомендації щодо впровадження факультативного курсу**

Під час упровадження факультативного курсу доцільно дотримуватися таких рекомендацій:

- поєднувати традиційні методи навчання з дослідницькими;
- використовувати динамічні моделі як інструмент перевірки гіпотез;
- створювати ситуації вибору та відкритого пошуку;
- заохочувати учнів до формулювання власних висновків.

**Освітній ефект факультативного курсу**

Реалізація факультативного курсу сприяє не лише поглибленню предметних знань, а й формуванню ключових компетентностей, зокрема уміння вчитися, логічного та критичного мислення, цифрової грамотності.

**Приклади навчальних завдань факультативного курсу**

Для реалізації курсу доцільно використовувати задачі дослідницького характеру, зокрема:

- довести, що всі чотири центри трикутника лежать на прямій Ейлера (у випадках, коли це можливо);
- дослідити положення кола дев’яти точок для різних видів трикутників;
- побудувати трикутник за заданими центрами.

Такі завдання сприяють розвитку творчого мислення та формуванню навичок математичного дослідження.

**Міжпредметні зв’язки та використання ІКТ**

Факультативний курс має тісні міжпредметні зв’язки з алгеброю, інформатикою та фізикою. Використання GeoGebra дозволяє інтегрувати елементи цифрової грамотності та формувати навички роботи з комп’ютерними моделями.

**Організаційно-методичні умови реалізації курсу**

Ефективність факультативного курсу значною мірою залежить від організації навчальної діяльності. Доцільним є використання групових форм роботи, обговорень, мініпроєктів та презентацій результатів досліджень.

## Висновки до розділу 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи розкрито методичні особливості вивчення теми «Трикутники» у шкільному курсі геометрії з урахуванням сучасних вимог до організації навчального процесу. Основну увагу приділено формуванню в учнів умінь і навичок розв’язування задач різних типів, що забезпечують не лише засвоєння теоретичних знань, а й розвиток логічного та дослідницького мислення.

У підрозділі 2.1 обґрунтовано методику формування вмінь розв’язувати задачі на обчислення елементів трикутника. Запропоновано методичний конструктор розв’язування таких задач, систему опорних і прикладних задач, а також узагальнюючі таблиці, що сприяють усвідомленому вибору метричних співвідношень та запобігають типових помилок учнів. Зроблено акцент на розвитку навичок аналізу умови задачі та інтерпретації отриманих результатів.

У підрозділі 2.2 розглянуто методичні підходи до навчання розв’язування задач на побудову з теми «Трикутники». Обґрунтовано доцільність використання дослідницького підходу, зокрема методу геометричних місць точок, та розроблено пам’ятку для учнів, яка сприяє формуванню алгоритмічного мислення і самостійності у процесі розв’язування задач.

Підрозділ 2.3 присвячено формуванню вмінь розв’язувати задачі на доведення. Обґрунтовано ефективність застосування евристичних методів навчання, наведено приклад евристичної бесіди та здійснено порівняльний аналіз різних способів доведення. Показано, що такий підхід сприяє розвитку логічної культури та критичного мислення учнів.

У підрозділі 2.4 розкрито можливості використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема динамічних моделей GeoGebra, під час вивчення теми «Трикутники». Описано авторські моделі, які дозволяють візуалізувати геометричні властивості та організувати навчальну діяльність учнів на засадах дослідницького підходу.

У підрозділі 2.5 обґрунтовано доцільність упровадження факультативного курсу «Цікаві властивості трикутника» як засобу поглиблення знань та розвитку дослідницької компетентності учнів. Запропоновано структуру курсу, приклади навчальних занять і критерії оцінювання результатів навчальної діяльності.

Таким чином, результати другого розділу підтверджують ефективність запропонованої методичної системи вивчення теми «Трикутники», яка забезпечує цілісне формування предметних і ключових компетентностей учнів та створює підґрунтя для підвищення якості геометричної підготовки в закладах загальної середньої освіти.

# ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи проведено комплексне дослідження методики вивчення трикутників у шкільному курсі геометрії, що дозволило сформулювати такі висновки:

1. На основі аналізу психолого-педагогічної та методичної літератури встановлено, що тема «Трикутники» є фундаментальною складовою шкільного курсу геометрії. Виявлено, що ефективність навчання залежить не лише від засвоєння теоретичних фактів, а й від формування в учнів цілісної системи прийомів розв’язування задач, що сприяє розвитку інтелектуальних та вольових якостей школярів у контексті вимог НУШ.

2. Здійснено порівняльний аналіз вивчення теми на базовому та поглибленому рівнях. Визначено, що на поглибленому рівні змістове наповнення розширюється за рахунок введення додаткових метричних співвідношень (лема про хорду, теореми Чеви, Менелая, Ейлера), що потребує від учителя застосування спеціальних евристичних методів навчання для подолання когнітивних труднощів учнів.

3. Розроблено та систематизовано методичні прийоми формування вмінь і навичок учнів під час розв’язування трьох основних груп задач:

- на обчислення: запропоновано алгоритми аналізу умови задачі, що базуються на виокремленні ключових трикутників;
- на побудову: обґрунтовано доцільність використання методу геометричних місць точок та перетворень у поєднанні з дослідницьким етапом;
- на доведення: розроблено систему навідних запитань (евристичну бесіду), що стимулює логічний пошук розв’язання.

4. Доведено, що використання динамічних математичних середовищ (зокрема GeoGebra) при вивченні властивостей трикутників дозволяє реалізувати дослідницький підхід. Це забезпечує наочність абстрактних тверджень, можливість проведення комп’ютерних експериментів та підвищує рівень

мотивації учнів до вивчення геометрії.

5. Запропоновано авторську систему вправ для факультативних занять, яка включає задачі з прикладним змістом та завдання підвищеної складності, що сприяє підготовці учнів до олімпіад та зовнішнього незалежного оцінювання.