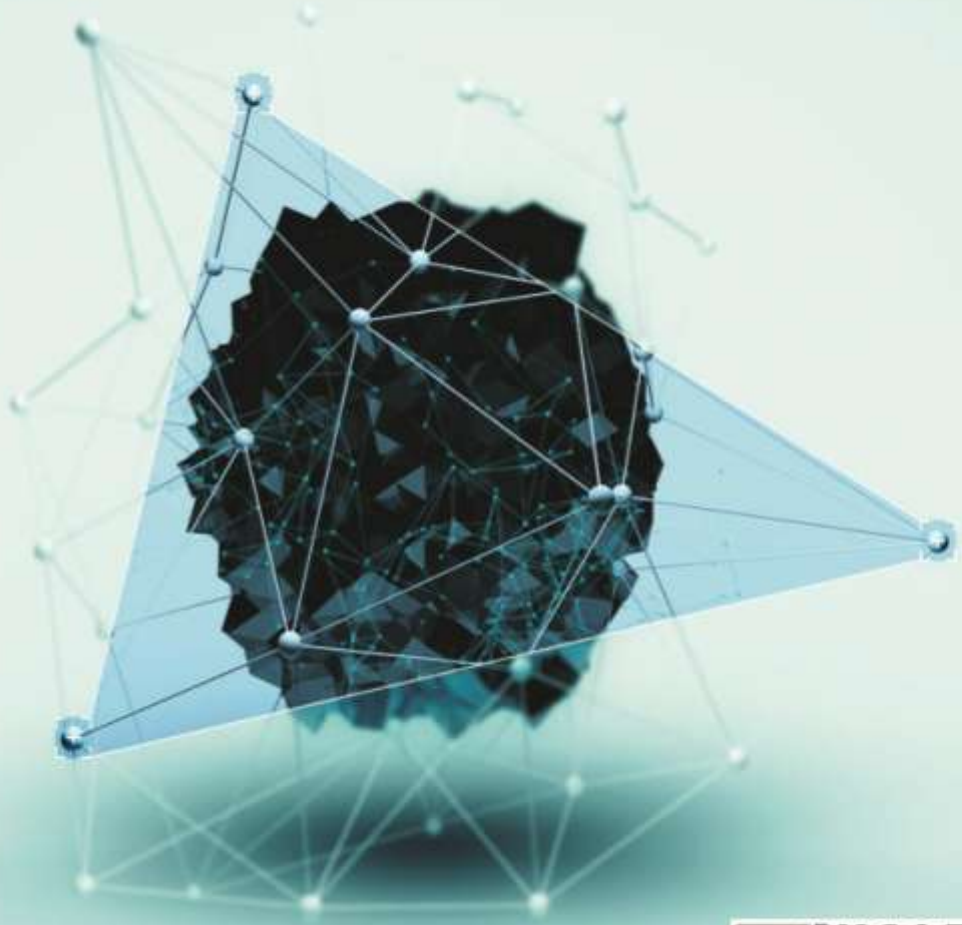
Н. М. Лосєва, Д. Є. Губар

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ІНТЕРАКТИВНІЙ ФОРМІ: ПРАКТИЧНИЙ КУРС



КАФЕДРА
ВИДАВНИЦТВО

Н.М. ЛОСЄВА
Д.Є. ГУБАР

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ІНТЕРАКТИВНІЙ ФОРМІ: ПРАКТИЧНИЙ КУРС

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Київ
«Кафедра»
2014

УДК 514.74(075.8)
ББК 22.151.5 я73
Л79

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист №1/11-18661 від 03.12.2013 р.)

Рецензенти:
Н.А. Тарасенкова, доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького,
О.Л. Зуєв, доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий робітник Інституту прикладной математики і механіки НАН України,
В.К. Кірман, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики й теорії ймовірностей Дніпропетровського національного університету ім. О. Гончара.

Л79 Лосєва Н.М.
Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс: навч. посіб. для студентів / Н. М. Лосєва, Д. Є. Губар. – К.: Кафедра, 2014. – 242 с.

ISBN 978-966-2705-79-9

Навчальний посібник «Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс» створений для бакалаврів напряму підготовки 6.040201 «Математика» і 6.040205 «Статистика». Містить теоретичні матеріали з дисципліни «Аналітична геометрія» у вигляді опорних конспектів, тести актуалізації знань, приклади розв'язування базових задач, завдання для набуття студентами умінь і навичок за основними темами курсу, задачі прикладного змісту, контрольні запитання, детальні інструкції до лабораторних робіт, вправи з використанням можливостей сучасних педагогічних програмних засобів завдання для розвитку творчого потенціалу, а також цікаві факти з навчальної дисципліни.

До складу посібника входять авторські доробки, що покликані зробити процес навчання інтерактивним, а тому й більш ефективним: інструкції до цікавих практичних та лабораторних робіт, дидактичні ігри з дисципліни, ребуси, кросворди, вікторини, математичні екскурсії тощо.

Робота студента з навчально-методичним посібником також передбачає використання інформаційного порталу «Аналітична геометрія» : робота з літературою, проходження інтерактивного тестування, обговорення незрозумілих питань у форумах порталу, онлайн консультація з викладачем в режимі чату тощо.

УДК 514.74(075.8)
ББК 22.151.5 я73

ISBN 978-966-2705-79-9 © Лосєва Н. М., Губар Д.Є., 2014

ПЕРЕДМОВА

Математичні відомості можна вміло і з користю застосовувати лише тоді, коли вони засвоєні студентом творчо – так, щоб він самостійно бачив шлях до них.

А. М. Колмогоров

Аналітична геометрія – одна з найцікавіших математичних дисциплін. Вона вивчається студентами-математиками класичних університетів на першому році навчання як самостійна дисципліна і також є складовою частиною курсу «Вища математика» на різних спеціальностях у ВНЗ. Цей курс тісно пов'язаний з курсами елементарної математики, лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціальної геометрії, фізики, механіки тощо.

Курс «Аналітична геометрія» суттєво розширює знання студентів про методи вивчення геометричних об'єктів саме завдяки опануванню аналітичного методу (запропонованого у XVII ст. П. Ферма і Р. Декартом), що полягає у послідовному застосуванні алгебри до вивчення різних геометричних образів. Синтетичний метод, за допомогою якого проводилося вивчення геометричних об'єктів у елементарній геометрії, виявився недостатнім для розв'язання низки математичних задач (оскільки у зв'язку з розвитком механіки, астрономії перед геометрією постали нові завдання вивчення різних траєкторій руху). В елементарній геометрії за допомогою чисел визначаються лише величини геометричних образів, а не їх взаємне розташування.

Завданням аналітичної геометрії є вивчення геометричних фігур за допомогою алгебри на підставі використання методу координат. З цією метою фігура подається рівнянням або нерівностями в координатах – саме

таке представлення геометричних об’єктів – перше завдання аналітичної геометрії.

У цьому курсі є й інше завдання, обернене до першого: дослідити, які геометричні фігури представлені тими або іншими рівняннями.

Головними цілями курсу «Аналітична геометрія» є:

- оволодіння координатним і векторним методами;
- розуміння ефективності використання цих методів та уміння застосовувати їх до відомих та нових задач;
- розширення геометричних знань та їх зв’язків з іншими розділами математики.

Вашій увазі пропонується посібник «Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс». Він містить авторські розробки, спрямовані на реалізацію ідей інтерактивного навчання під час викладання дисципліни «Аналітична геометрія». Завдяки запропонованим методам, засвоєння матеріалу стає результатом ефективного спілкування між викладачем та студентами, тобто між тим, хто має певні знання й досвід, і тим, хто їх здобуває. Такий тип навчання дозволяє розв'язати декілька завдань: розвиває комунікативні вміння й навички студентів, допомагає встановленню емоційних контактів між учасниками процесу, забезпечує виховне завдання, оскільки пропонує працювати в команді, враховувати думку кожного. Використання інтерактиву знімає нервове напруження, дає можливість змінювати форми діяльності, переключати увагу, краще мотивує навчання студентів.

Посібник містить теоретичні матеріали з дисципліни «Аналітична геометрія» у вигляді опорних конспектів, тести актуалізації знань, приклади розв’язування базових задач, завдання для набуття умінь і навичок за основними темами курсу, задачі прикладного змісту, контрольні запитання, детальні інструкції до лабораторних робіт, вправи з використанням можливостей сучасних педагогічних програмних засобів (Dynamic Geometry, GRAN, Advanced Grapher, Ms Excel тощо), завдання

для розвитку творчого потенціалу студентів, а також цікаві факти, що стосуються навчальної дисципліни.

У посібнику використано такі позначення:

 – основні питання

 – рекомендована література

 – опорний конспект



 – тест актуалізації знань

 – приклади розв'язування деяких задач

 – «Розв’яжіть задачі»

 – питання для обмірковування

 – додаткові задачі

 – «Розширюємо світогляд»

 – «Для майбутніх науковців»

 – «Це цікаво!»

 – «Розгадай ребус»

Курс «Аналітична геометрія» передбачає відповідну підготовку студентів з елементарної математики. Наприклад, у Донецькому національному університеті вона забезпечується корекційним курсом з елементарної геометрії для студентів-першокурсників. У свою чергу курс «Аналітична геометрія» є фундаментом для багатьох професійно-орієнтованих дисциплін. На його основі здійснюється подальше формування професійно-спрямованих видів діяльності студентів, що забезпечують їм виконання основних функцій в якості математика або вчителя математики у подальшій професійній діяльності.

Сподіваємося, що запропонований посібник допоможе студентам розкрити інтелектуальний і особистісний потенціал, поринувши у вихор «Аналітична геометрія» із головою.

ВСТУП

У посібнику **«Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс»** надано всю необхідну інформацію, передбачену робочою програмою навчальної дисципліни.

Кожна тема містить:

1) основні питання (перелік головних понять і тверджень, що стосуються певної теми);

2) список рекомендованої літератури (вказуються розділи, параграфи і вправи, що потрібно опрацювати);

3) теоретичні відомості з теми у вигляді опорних конспектів (студенти можуть використовувати їх під час підготовки до лекції, практичного заняття, модульного контролю, іспиту тощо);

4) тест актуалізації знань, у процесі розв'язання якого студенти можуть швидко повторити основні факти, що необхідні для успішного оволодіння темами дисципліни;

5) приклади розв'язування деяких базових **задач**, що є корисними для тих студентів, які намагаються самостійно вивчати дисципліну;

6) розділ **«Розв'яжіть задачі»**, у якому студентам пропонується набір вправ для здобуття певних умінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темами дисципліни. Виконання більше 80% завдань свідчить про те, що студент здатний безпосередньо переходити до розв'язання прикладних задач. Якщо виконання цих вправ викликало певні труднощі, варто повторити теоретичний матеріал ще раз;

7) питання для обмірковування, що надають студентам можливостей краще зрозуміти сутність процесів і явищ, які розглядаються у роботі, а викладачеві – перевірити якість засвоєння студентами навчального матеріалу;

8) розділ **«Додаткові задачі»,** що містить завдання практичного спрямування (ілюструють можливість реалізації математичних знань у життєвих ситуаціях і покликані зацікавити студентів), завдання, розраховані на застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), вправи на доведення теоретичних фактів;

9) розділ **«Розширюємо світогляд»,** в якому наведено цікаві історичні факти до теми, що вивчається, біографії видатних математиків, стародавні задачі, приклади застосування математичних знань у різних сферах людського життя;

10) рубрику **«Це цікаво!»,** присвячений фактам, що пов'язують математичні об'єкти з різними сферами людського життя, зокрема з гуманітарними науками;

11) розділ **«Для майбутніх науковців»** (для деяких тем), в якому пропонуються творчі завдання (дослідити деякі питання теми, довести певне твердження, підготувати доповідь або презентацію за однією із запропонованих тем, розв'язати кросворд, розгадати анаграми, обрати правильне співвідношення тощо);

12) рубрику **«Розгадай ребус»,** що є корисною для розвитку логічного мислення студентів, а також надає можливості швидкої перевірки їх знань.

Деякі лабораторні роботи, дидактичні ігри, що представлені у посібнику, передбачають використання програмних (середовище GRAN, DG, Advanced Grapher, Microsoft Office, Assistent тощо) та інтерактивних засобів (цифрового проектора, мультимедійної дошки, інтерактивного порталу «Аналітична геометрія»). Розроблений посібник доцільно використовувати як для групової, так і для індивідуальної форм навчання.

Робота студента за навчальним посібником передбачає використання **інформаційного порталу «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua)**: опрацювання літератури, що міститься на порталі, інтерактивне тестування, обговорення незрозумілих питань у форумах

порталу, онлайн консультація з викладачем в режимі чату. Зауважимо, що деякі складові посібника представлені на інтерактивному порталі у вигляді опорних конспектів, кросвордів, аудіо- та відеоматеріалів тощо.

Посібник **«Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс»** покликаний поглибити знання студентів з дисципліни, встановити взаємозв'язок теорії та практики, а тому підвищити пізнавальну мотивацію, розширити світогляд майбутнього фахівця.

Будемо вдячні за запитання, зауваження і побажання, які просимо надсилати на електронну адресу: **darya@agportal.org.ua**.

ТЕМА № 1 "Декартові координати на площині і в просторі. Найпростіші задачі аналітичної геометрії"



Основні питання

Обчислення величини відрізка. Характеристика геометричного розташування точок на осі, координати яких задовольняють вказаним рівнянням або нерівностям. Побудова точок, заданих декартовими координатами на площині і у просторі. Знаходження проекцій точок на вісь і на площину, симетрія відносно площини, відносно осі, відносно точки. Обчислення відстані між точками, заданих декартовими координатами, поділ відрізка у заданому відношенні. Знаходження координат центра мас.



Рекомендована література

[1] Гл. 1, §1-§5 стор. 11-27.

[2] Тема 8, стор 91-94, 99-100.

[4] І. з. №1(1-2), стор. 4-5.

[7] Гл. 1, §1-§3 (стор. 15-21).

[9] №№3, 5, 16, 23, 19, 48, 77, 86, 88, 116, 118, 128 (стор. 6-9, 12-24).

[14] Гл. 1, стор 5-7.

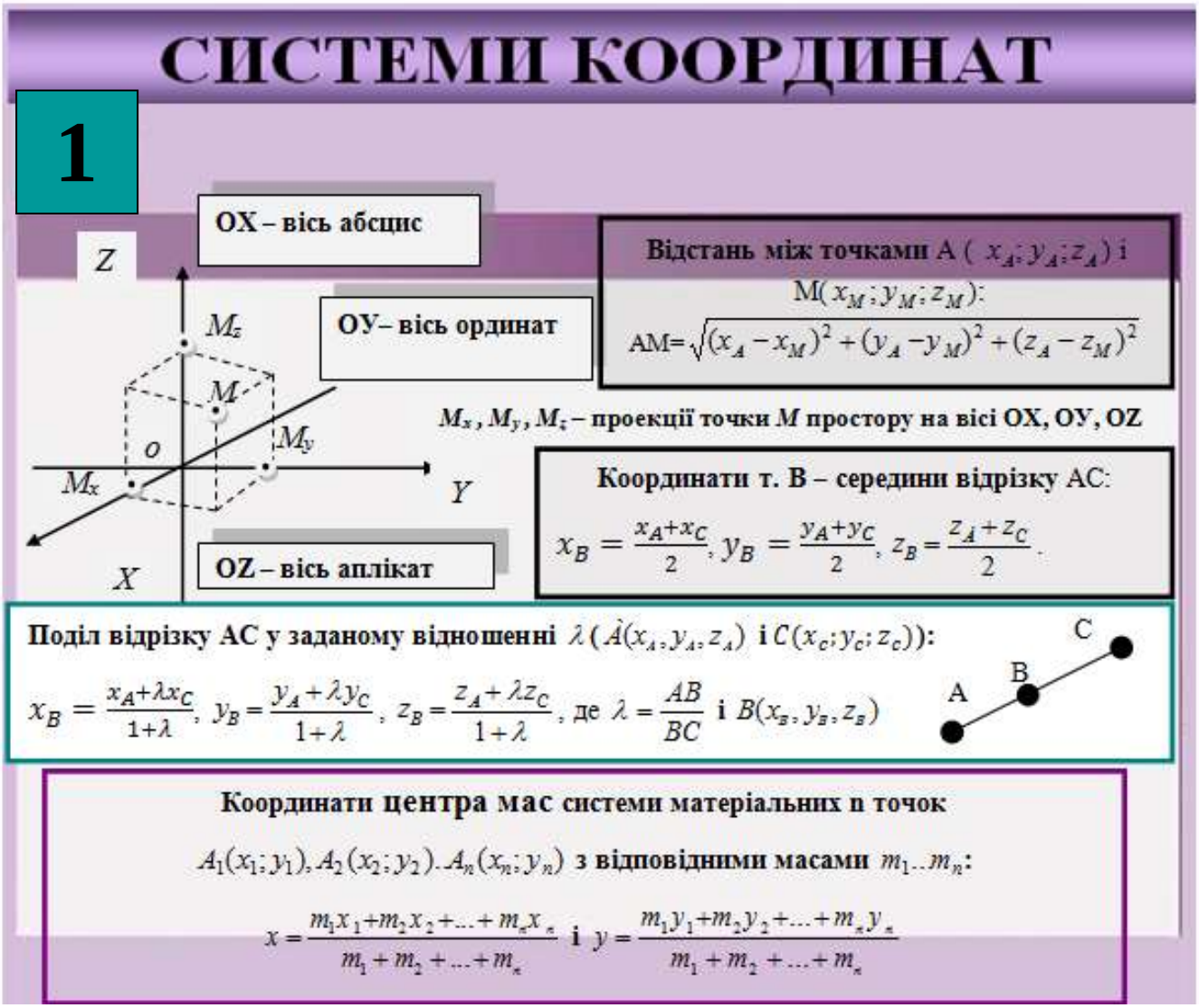
[22] Гл. 1, §1.1 стор. 13-17.

[25] №№ 27, 28, 41, 58, 65, 68, 86 (стор. 20-32, 36-37).

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-1**

Опорний конспект



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Яка з указаних точок лежить у площині zOx?

   А) A(-2;4;0); Б) B(0;0;0);

   В) C(0;-3;0); Г) D(0;1;2).

2. У якому випадку відрізок AB лежить на вісі Oy?

   А) A(1;1;0), B (0;0;1); Б) A(1;0;0), B(-2;0;0);

В) A(0;-1;0), B (0;-4;0); Г) A(0;-6;1), B(0;2;-8).

3. Яка точка є рівновіддаленою від усіх координатних площин?

А) A(2;3;2); Б) B(-4;4;5);

В) C(-6;-6;4); Г) D(-2;-2;2).

4. Відстань між точками A (1;2;3) і B (-1;0;5) дорівнює:

А) $2\sqrt{3}$; Б) 1; В) 2; Г) $\sqrt{3}$.

5. Задано точки $A(-1;4;3)$ і $B(3;-2;-1)$. Точка C – середина відрізка AB має координати:

А) $(1;1;1)$; Б) $(2;-3;-2)$; В) $(1;1;2)$; Г) $(1;-2,1)$.

6. Геометричне місце точок, що задовольняють нерівності $|x-3|\le 2$, належить проміжку:

А) $(1;5)$; Б) $[1;5]$; В) $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$; Г)$[1;5)$.

7. Проекцією точки A (2,-3,5) на площину xOy є точка:

А) (0, 0, 5); Б) (2, -3, 0);

В) (0, -3, 0); Г) (-2, 3, 0).

8. Симетричною відносно осі Oz для точки C(-5,7,1) є точка з координатами:

А) (5, -7, 1); Б) (-5, -7, 1);

В) (-5, 7, -1); Г) (-5, 7, 0).

9. Задано точки A(1, 3, -2) і B (2, 4, 2). Точка C, що лежить на відрізку AB і задовольняє умові $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$, має координати:

А) C ($\frac{2}{5}$, 7, 0); Б) C (-2, $\frac{8}{5}$, 1);

В) C ($\frac{8}{5}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{2}{5}$); Г) C ($\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, 0).

10. Відстань між точками $A(-1;4;3)$ і $B(3;-2;-1)$ дорівнює:

А) $4\sqrt{6}$; Б)$2\sqrt{26}$ В)$16\sqrt{6}$; Г) $2\sqrt{17}$.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Це цікаво!

Нащадок старовинного французького дворянського роду Рене Декарт (1596 – 1650 рр.) був справжнім улюбленцем долі. Про такого говорять, що при народженні його поцілували всі музи. Удача супроводжувала його не тільки в науці. Сміливий і безстрашний, він перемагав не лише інтелектом, ай інколи зі зброєю у руках. Так, якось йому вдалося за допомогою шпаги, якою він володів із д'артаньянівською майстерністю, змусити піратів пристати до берега і дозволити висадитися на берег йому самому та його слузі.



<u>Приклади розв'язування деяких задач:</u>

1. **Побудувати:**

   а) на координатній прямій *Ox* точки $A_1(3)$, $A_2(-2)$;

   б) у прямокутній системі координат на площині *Oxy* точки $B_1(1;2)$, $B_2(2;-3)$, $B_3(-3;0)$;

   в) у прямокутній системі координат у просторі *Oxyz* побудувати точки $C_1(1;2;3)$, $C_2(3;-2;3)$, $C_3(-1;-3;-5)$.

   Побудову точок показано на рис 1.1

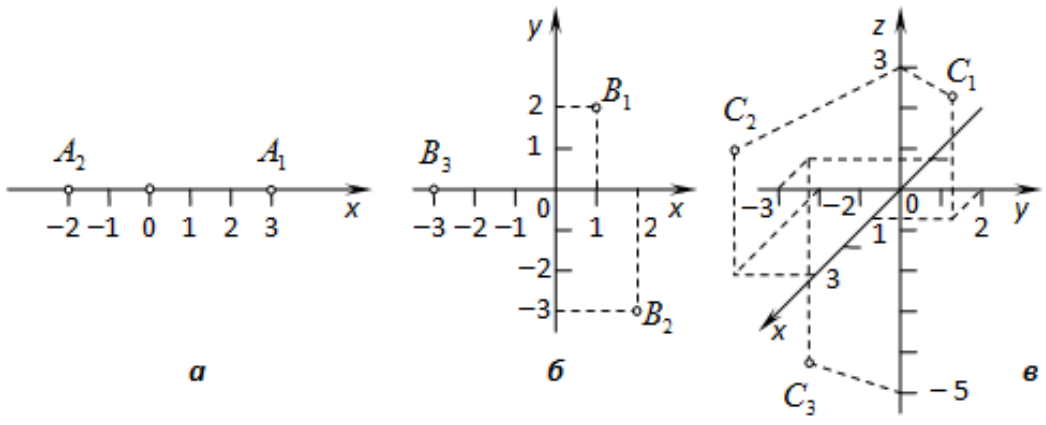


Рис. 1.1

2. **Доведіть, що середина відрізку з кінцями в точках A(a,c,-b) і**

B(-a,d,b) лежить на осі OУ.

Розв'язування.

$$M(\frac{a-a}{2};\frac{c+d}{2};\frac{-b+b}{2}),\ M(0;\frac{c+d}{2};0)\in OY$$

Твердження доведено.

3. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо A(2,0,2), B(2,2,0), C(2,2,2).

Розв'язування.

Спочатку знайдемо координати точки M – середини BC (оскільки AM – медіана трикутника) :

$$M(\frac{2+2}{2};\frac{2+2}{2};\frac{0+2}{2})=M(2;2;1)$$

Відстань від точки A до точки M знаходимо за формулою

$$AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2+(z_A-z_M)^2}$$

Отже, $AM=\sqrt{(2-2)^2+(0-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

Відповідь: $\sqrt{5}$.

3. Задано точки $M_1(2;4;-2)$ і $M_2(-2;4;2)$. На відрізку M_1M_2 знайдіть точку *M*, яка ділить відрізок $[M_1M_2]$ у відношенні $\lambda=3$.

Розв'язування.

Використавши формули, знайдемо координати точки *M*:

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{2+3(-2)}{1+3}=-1,$$

$$y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4,$$

$$z_M=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1.$$

4. Задано трикутник: $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Знайдіть координати точки D перетину бісектриси кута $\angle A$ із стороною CB.

Розв'язування.

За формулою знайдемо довжини сторін трикутника, які утворюють кут $\angle A$:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Оскільки бісектриса ділить сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам, то $|CD| : |DB| = |AC| : |AB| = 10 : 5 = 2$. Таким чином

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2 \cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},\ y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2 \cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2(-2)}{1+2} = -1$$

шукана точка $D\left(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1\right)$.

5. Доведіть, що всі три середні лінії тетраедра проходять через одну точку і діляться в цій точці навпіл (середньою лінією тетраедра називають відрізок, що сполучає середини його протилежних ребер).

Доведення.

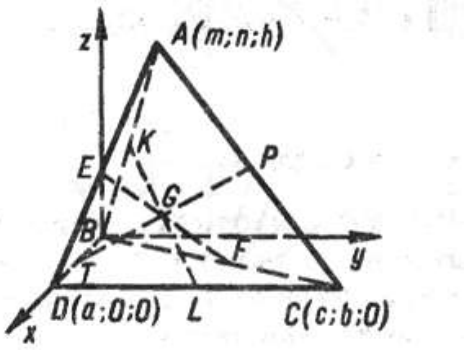


Рис. 1. 2

Нехай *ABCD* – довільний тетраедр, *KL, EF і PT* – це його середні лінії. Розмістимо систему координат, як показано на малюнку 1, і позначимо координати вершин тетраедра*: A (m; n; h), B (0; 0; 0), C (c; b; 0), D (a; 0; 0)*. Тоді координати середин ребер і відповідних середніх ліній тетраедра будуть:

$$K\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2};\frac{h}{2}\right), L\left(\frac{a+c}{2};\frac{b}{2};0\right), G\left(\frac{m+a+c}{4};\frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right),$$

$$E\left(\frac{m+a}{2};\frac{n}{2};\frac{h}{2}\right), L\left(\frac{c}{2};\frac{b}{2};0\right), G_1\left(\frac{m+a+c}{4};\frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right),$$

$$P\left(\frac{m+c}{2};\frac{n+b}{2};\frac{h}{2}\right), L\left(\frac{a}{2};0;0\right), G_2\left(\frac{m+a+c}{4};\frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right).$$

Відповідні координати точок G, G_1 і G_2 є однаковими. Отже, ці точки співпадають. G – це середина кожної середньої лінії заданого тетраедра. Точка G, в якій перетинаються всі середні лінії тетраедра, називається *центроїдом тетраедра.*

Твердження доведено.



Розв’язуємо задачі

Вам пропонується набір вправ для набуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння дисципліною. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Охарактеризуйте геометрично розташування точок на осі, якщо їх координати задовольняють наступним нерівностям:

1) $\frac{2-x}{x-1}<0$;

2) $|x+5|\le 1$.

2. Задано дві суміжні вершини квадрату A(3; -7) і B(-1; 4). Обчисліть його площу.

3. Задано вершини трикутника A(2; -5), B(1; -2), C(4; -1). Знайдіть точку перетину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B зі стороною AC.



Це цікаво!

У поліграфії ***квадрат*** *– це одиниця довжини, що застосовується для вимірювання шрифтів, формату набору, причому 1 квадрат дорівнює 48 пунктам (18,05 мм)*

Чорний квадрат на білому фоні *— картина Казимира Малевича, написана у 1915 році. Зберігається в Державній Третьяковській галереї у Москві. Цю картину, написану у стилі супрематизму, Малевич вважав вершиною своєї творчості.*

4. На прямій, що з'єднує точки A(-3; 5) і B(-1; 2), знайдіть точку, що має абсцису $x = 5$.

5. У трьох точках системи A (7; $1\frac{1}{2}$), B (6; 7) і C (2; 4) розміщені маси відповідно по 60, 100 і 40 г. Визначіть координати центра мас цієї системи.

6. Нехай $\frac{AP}{PB} = \lambda$, $\frac{AQ}{QB} = \mu$, $\frac{AR}{RB} = \nu$, ($\mu \neq \nu$). Знайдіть відношення, у якому точка R поділяє відрізок PQ.

7. З'ясуйте, у якій координатній чверті може бути розташована точка $M(x, y)$, якщо виконуються такі співвідношення:

1) $xy > 0$;
2) $xy < 0$;
3) $x - y = 0$;
4) $x + y > 0$;
5) $x + y < 0$;
6) $x + y = 0$;
7) $x - y > 0$;
8) $x - y < 0$;

8. Відрізок, обмежений точками A(1,-3) і B(4,3), розділено на три рівні частини. Визначіть координати точок ділення.

9. Доведіть, що трикутник з вершинами A(3;-1;2), B(0;-4;2) і C(-3,2,1) рівнобедрений.

10. На осі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки A(-3,4,8) дорівнює 12.

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Системи координат» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у парі зі своїм одногрупником, обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №1 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї індивідуальної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Індивідуальні роботи)****.*

- *відправити електронний лист викладачеві на адресу:* ***admin@agportal.org.ua.***

1. **Горизонтальна балка довжиною 3 метри і масою 80 кг вільно лежить своїми кінцями на двох нерухомих опорах А і В (Рис.1.3). На якій відстані від кінця А треба помістити вантаж 200 кг, щоб тиск на опору В дорівнював 110 кг?**

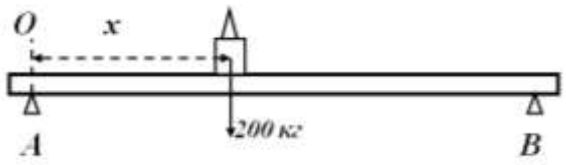


Рис.1.3

2. **Зобразіть графічно залежність між середнім зростом і віком людини, користуючись наступними даними:**

Вік у роках	Зріст у см	Вік у роках	Зріст у см	Вік у роках	Зріст у см
0	50	7	111	14	147
1	71	8	116	15	152
2	80	9	122	16	156
3	87	10	128	17	162
4	93	11	133	18	166
5	99	12	137	19	167
6	105	13	142	20	168

Користуючись Вашим графіком, отриманим за допомогою MS Excel, дайте відповіді на запитання:

1) **Коли спостерігається найбільший "стрибок" зросту? Який він?**
2) **На скільки в середньому збільшується зріст людини за підлітковий вік (12-16 років)?**
3) **У скільки разів збільшується зріст учня (порівнюємо 6 і 17 років)?**
4) **Чи відповідають Ваші дані середнім показникам?**

5) **Отримайте статистичні дані про зріст членів Вашої групи. Побудуйте варіаційний ряд і його зображення у вигляді полігону і гістограми. Знайдіть показники центральної тенденції (мода, медіана, середнє арифметичне) і показники варіації (дисперсія, середнє квадратичне відхилення). Який висновок можна зробити на основі отриманих даних?**



Теоретична підказка:

Мода – це таке значення ознаки, яке найчастіше зустрічається у варіаційному ряді.

Медіана – це таке значення ознаки у варіаційному ряді, яке поділяє всю сукупність навпіл.

Середнє арифметичне n значень позначається через $\bar{x}$ і визначається таким чином:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Дисперсією статистичної сукупності називається середнє арифметичне квадратів відхилень варіант від їх середнього значення, тобто маємо формулу:

$$s_n{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Статистичне середнє квадратичне відхилення дорівнює арифметичному кореню із статистичної дисперсії: $s_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$. Воно відображає типову картину відхилення окремих значень від середнього значення сукупності.

3. **Найпростіший підйомний механізм складається з барабану і колеса, що обертаються на спільній горизонтальній вісі. На барабан намотана мотузка, до кінця якої підвішений вантаж Q, а на колесо намотана мотузка, за яку тягнуть, щоб підняти вантаж. Модуль сили P, яку треба прикласти, обчислюється за формулою:**

$$P = \frac{r}{R} Q,$$

де r – радіус барабану, R – радіус колеса. Зобразити графічно залежність між силою P і радіусом колеса R, якщо r=10 см і Q=12 кг. Порівняйте свої результати з графіком, отриманим за допомогою MS Excel.

4. **Центр тяжіння однорідного стального стрижня знаходиться у точці M(1,4), а один із його кінців – у точці P (-2,2). Визначіть координати точки Q іншого кінця цього стрижня.**

5. **Точка, рухаючись прямолінійно із положення A(-1;- 3) перемістилась у положення B(4; 2). Який шлях пройшла точка і під яким кутом до осі абсцис нахилена траєкторія руху? Побудуйте цю траєкторію за допомогою ППЗ GRAN1.**

6. **Задано вершини однорідної трикутної пластини з чавуна $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ та $C(x_3, y_3)$. Визначіть координати її центра тяжіння (центр тяжіння знаходиться у точці перетину медіан).**

7. **На двох суміжних сторонах квадрату ABCD зовні побудовані рівнобедрені прямокутні трикутники BHC і CED (Рис. 1.4). Знайдіть центр тяжіння отриманої фігури ABHED, якщо сторона квадрата дорівнює *a*.**

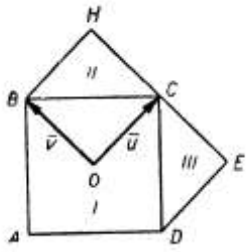


Рис. 1.4

8. З плоскої квадратної пластини ABCD зі стороною *a* вирізали прямокутний трикутник ABE з кутом ABE, рівним 60°. Знайдіть положення центру тяжіння G п'ятикутника AEBCD (рис. 1.5).

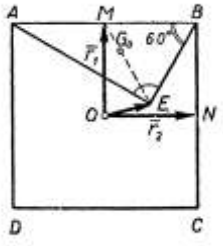


Рис. 1.5



Це цікаво!

Поняття ***медіани*** *(з латинського «mediana» – «середня») широко використовується у статистиці у якості значення ознаки, що поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за об'ємом абсолютних або відносних частот.*



Питання для обмірковування

1. Яким чином можна записати умову розташування трьох точок на одній прямій?
2. Яке співвідношення існує між координатами точки, що лежить на одній із бісектрис координатного кута прямокутної системи координат?
3. Яку властивість має рівняння кривої, що проходить через початок координат?



Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*



І=0

.....



.....

Розширюємо світогляд

Чи знаєте Ви, що аналітична геометрія важливу роль відіграла у розвитку поняття числа. Від'ємні числа, відомі ще індійцям у VI-XI ст., європейські математики вважали абсурдними. Навіть Ф. Вієт не визнавав їх. Тільки завдяки аналітичній геометрії Р. Декарта від'ємні числа повністю утвердилися в математиці.

Цікаво, що відкриття декартових координат не належить Р. Декарту. Так, стародавній математик Олександрійської школи Аполлоній (III-II ст. до н.е.) фактично користувався прямокутною системою координат, але замість алгебраїчної символіки (яка ще не існувала тоді) здійснював опис рівнянь через геометричні поняття.

ТЕМА № 2 "Завдання фігур різними способами. Полярні та інші координати. Рівняння ліній"



Основні питання

Складання рівнянь геометричного місця точок, що задовольняють визначеним умовам. Побудова точок, заданих полярними координатами, симетрія відносно полюса, відносно полярної осі. Обчислення площі трикутника, вершини якого задано у полярних координатах. Застосування формул перетворення координат. Складання рівнянь ліній і поверхонь, що задовольняють визначеним умовам. Установлення геометричних образів, що визначаються заданими рівняннями.



Рекомендована література

[1] Гл. IV, § 1 (с. 66–69);

[3]Тема 8, стор 94-96.

[4] І. з. №1(3-5), стор 5-9.

[9] №№3, 5, 16, 23, 19, 48, 77, 86, 88, 116, 118, 128 (стор. 6-9, 12-24).

[13], стор. 23-50.

[14] Гл. 1, стор 5-7.

[22] Гл. 1, §1.2, стор. 17-20, Гл. 3, стор. 71-79

[25] №№ 27, 28, 41, 58, 65, 68, 86 (стор. 20-32, 36-37).

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-2**

Опорний конспект

2 СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Перетворення координат:

Паралельне перенесення:

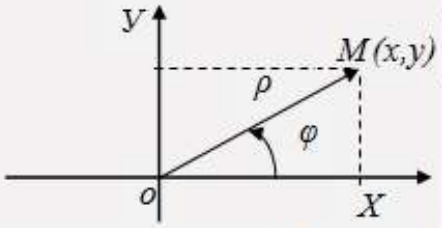
$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Поворот на кут α:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

де (x, y) – координати точки у старій системі координат,
(x', y') - координати точки у новій системі координат,
(a, b) - координати нового початку системи координат,
α - кут повороту.

Полярні координати:



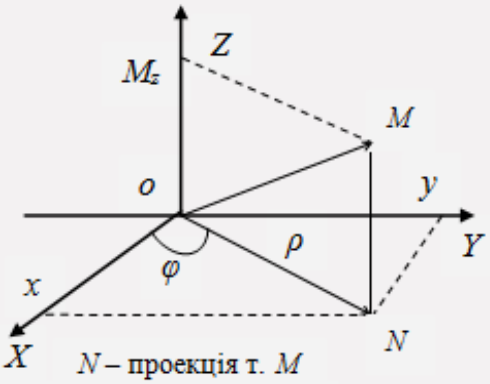
ρ – відстань від полюса до т. M
φ – кут між полярною віссю і вектором OM

$M(x,y) \Rightarrow M=M(\rho,\varphi) \Rightarrow \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix}$

$0<\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Циліндричні координати:

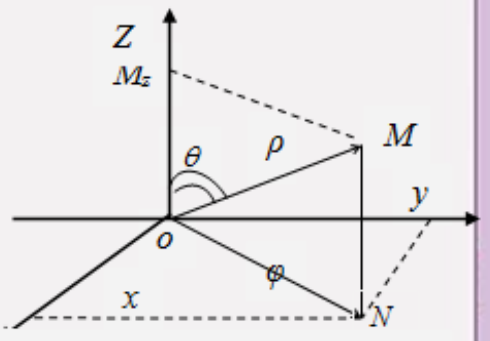


N – проекція т. M

ρ, φ – полярні координати т. N
z – величина відрізка OM_z

$M(x,y,z) \Rightarrow M=M(\rho,\varphi,z) \Rightarrow \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{matrix}$

Сферичні координати:



ρ – відстань M від O; θ, φ-кути

$M(x,y,z) \Rightarrow M=M(\rho,\varphi,\theta) \Rightarrow$

$x=\rho\sin\theta\cos\varphi$	$y=\rho\sin\theta\sin\varphi$	$z=\rho\cos\theta$

$0<\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi$
$0 \le \theta \le \pi$

Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. У полярній системі координат рівняння $\rho = 1$ задає:

А) промінь, Б) коло, В) круг, Г) сектор круга.

2. У полярній системі координат умовам $\rho \in \Re, \rho \geq 0, \varphi = \frac{\pi}{6}$ задовольняє:

А) промінь без початкової точки, Б) коло,

В) промінь, Г) сектор круга.

3. Полярні координати точки, симетричної до $C(2, -\frac{\pi}{6})$ відносно полюса мають вигляд:

А) $(-2, -\frac{\pi}{6})$, Б) $(2, \frac{\pi}{6})$, В) $(2, \frac{5\pi}{6})$, Г) $(2, \frac{7\pi}{6})$.

4. Полярні координати точки, симетричної до $B(\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{4})$ відносно полярної осі мають вигляд:

А) $(\frac{2}{3}, \frac{5\pi}{4})$, Б) $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{4})$, В) $(\frac{2}{3}, -\frac{5\pi}{4})$, Г) $(-\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4})$.

5. Задано точку $A(3, \frac{2\pi}{3})$. Вкажіть координати, що визначають ту ж саму точку в полярній системі:

А) $(-3, -\frac{2\pi}{3})$, Б) $(3, \frac{4\pi}{3})$, В) $(3, \frac{5\pi}{3})$, Г) $(3, -\frac{4\pi}{3})$.

6. Трикутник OAB, вершини якого мають полярні координати $O(0,0)$, $A(3, \frac{\pi}{6})$, $B(4, \frac{2\pi}{3})$ є:

А) рівнобедреним, Б) прямокутним,

В) правильним, Г) гострокутним.

7. Трикутник ОАВ, вершини якого мають полярні координати $O(0,0)$, $A(3,\frac{\pi}{6})$, $B(4,\frac{2\pi}{3})$ має площу:

А) 12 од^2, Б) 10 од^2, В) 6 од^2, Г) 14 од^2.

8. Початок декартової системи координат збігається з полюсом, вісь абсцис спрямована за полярною віссю. Координати точки А(0,-1) у полярній системі координат мають вигляд:

А) $A(1,\frac{\pi}{2})$, Б) $A(1,\pi)$, В) $A(1,\frac{3\pi}{2})$, Г) $A(1,-\frac{3\pi}{2})$

9. Початок декартової системи координат збігається з полюсом, вісь абсцис спрямована за полярною віссю. Координати точки А($\sqrt{2},\frac{\pi}{4}$) у декартовій системі координат мають вигляд:

А) $(1,-1)$, Б) $(1,1)$, В) $(-1,-1)$, Г) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

10. Формули зв'язку точки в декартових координатах з полярними задаються системою:

А) $\begin{cases} x=\rho, \\ y=tg\varphi. \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$ В) $\begin{cases} x=\rho\cos^2\varphi, \\ y=\rho\sin^2\varphi. \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x=\rho^2, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Це цікаво!

З'ясувалось, що слово «лінія» має декілька значень у різних сферах людської діяльності. Так, ***лінія*** *– це одиниця довжини у системі англійських мір, причому, 1 лінія дорівнює* $\frac{1}{12}$ *дюйма (0,21167 см).*

У Росії слово «лінія» також використовувалось у вимірюванні, причому 1 лінія дорівнювала 10 точкам (2,54 мм).

Саме ж слово походить від латинського «linea» – льняна нитка.

Приклади розв'язування деяких задач:

1. Побудувати точки за полярними координатами: $A\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\frac{3\pi}{2}\right)$ і $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$.

Задані точки показано на рисунку 2.1

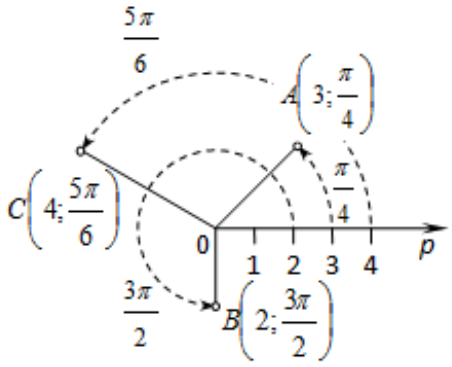


Рис.2.1

2. У полярній системі координат задано точки $A\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ і $B\left(4,\frac{\pi}{12}\right)$.

А) Обчисліть координати точок, симетричних точкам А і В відносно полярної осі; відносно полюса.

Б) Вершина О трикутника ОАВ знаходиться в полюсі. Обчисліть площу цього трикутника.

Розв'язування.

А) Симетричні точки точкам А та В відносно полярної осі позначимо A_1, B_1; а відносно полюса позначимо A_2, B_2.

$A_1\left(5;-\frac{\pi}{4}\right)$, $B_1\left(4,-\frac{\pi}{12}\right)$;

$A_2\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$, $B_2\left(4,\frac{11\pi}{12}\right)$.

Б) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 5$ (од^2).

Оскільки наш досвід свідчить, що найбільші труднощі у студентів викликають задачі на складання рівнянь ліній і поверхонь, що задовольняють визначеним умовам і встановлення геометричних образів, що визначаються заданими в умові рівняннями, ми розглянемо саме цей приклад.

3. Складіть рівняння кривої (**овалу Касіні**), як геометричного місця точок, добуток відстаней яких від двох заданих точок *P* і *Q* є величина стала і дорівнює a^2.

Розв'язування.

Відстань між заданими точками *P* і *Q* позначимо через *2c*. Перш ніж знаходити рівняння кривої, необхідно обрати певну систему координат. Від вибору системи координат залежить більша або менша складність шуканого рівняння. У цьому випадку оберемо за вісь абсцис прямокутної системи координат пряму, що з'єднує задані дві точки *P* і *Q* (щоб координати заданих точок були як можна простішими); початок координат помістимо в середині між ними (рівноправність точок дозволяє розраховувати на симетрію кривої, тому точки *P* і *Q* знаходяться симетрично щодо осі у). Стосовно цієї системи координати постійних точок *P* і *Q* будуть (-*c*, 0) і (*c*; 0).

Нехай точка *M(x, y)* поточна точка, що описує криву; у такому випадку *x* і *y* будуть змінні, вони можуть приймати значення, рівні координатам будь-якої точки кривої.

Рівняння кривої ми одержимо, виражаючи формулою основну властивість овалу Касіні: добуток відстаней точки М від двох точок *P* і *Q* дорівнює a^2, тобто

$$MP \cdot MQ = a^2$$

Або, виражаючи відрізки *MP* і *MQ* через координати їхніх кінців, одержимо:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2$ – це і є рівняння овалу Касіні.

Або, позбавившись від радикалів, отримаємо:

$$(x^2+y^2)^2-2c(x^2-y^2)=a^4-c^4$$

Графік цієї кривої має вигляд:

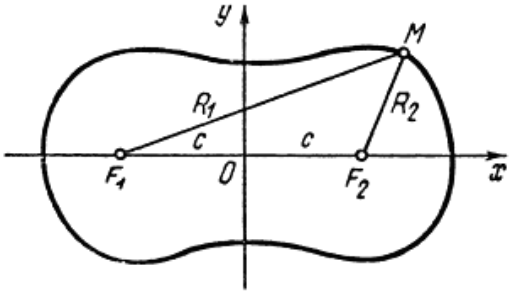


Рис 2.2



Розв’яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. У полярній системі координат побудуйте точки, симетричні точкам $A\left(4;\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2;\frac{5\pi}{2}\right)$ відносно :

1) полюсу;

2) полярної вісі.

2. У полярній системі координат задано точки $A(3,\frac{\pi}{2})$, $B(2,-\frac{\pi}{4})$. Напрям полярної осі змінено на протилежний. Знайдіть полярні координати заданих точок у новій системі.

3. У полярній системі координат задано точки $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ і $B\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$. Вершина О трикутника ОАВ знаходиться в полюсі. Обчисліть площу цього трикутника.

4. У полярній системі координат задано дві вершини $A(3,-\frac{4\pi}{9})$ і $B(5,\frac{3\pi}{14})$ паралелограму ABCD. Точка перетину його діагоналей співпадає з полюсом. Знайдіть координати двох інших вершин цього паралелограму.

5. Одна з вершин трикутника ОАВ знаходиться у полюсі, дві інші – у точках $A(\rho_1,\theta_1)$ і $B(\rho_2,\theta_2)$, де $\theta_1,\theta_2 \in [0,\pi], \theta_2 > \theta_1$. Знайдіть площу цього трикутника.

6. Задано правильний шестикутник ABCDEF, довжина сторони якого дорівнює 1. Прийнявши в якості полюса вершину А, в якості додатного напряму полярної вісі – напрям від А до В, а в якості додатного напряму відліку кутів – напрямок від АВ до АС, визначіть в цій системі полярні координати вершин шестикутника.



Це цікаво!

Не всім відомо, що слово «трикутник» використовується в астрономії. Одне сузір'я північної півкулі називається Сузір'ям Трикутника. З території України найкраще його видно у кінці літа, восени та взимку.

***Бермудський трикутник** – це назва, що зазвичай вживається до території площею 4000 квадратних кілометрів і що на карті формує уявний трикутник з вершинами у Бермудських островах, Пуерто-Ріко і Південній Флориді (США). Існує інформація про те, що в цих межах за незвичайних обставин зникли декілька суден та літаків.*

7. Задано полярні координати точок $A(8;-\frac{2\pi}{3})$ і $B(6;\frac{\pi}{3})$. Обчисліть полярні координати середини відрізку АВ.

8. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат задано точки $M_1(6;\frac{\pi}{2})$, $M_2(5;0)$, $M_3(2;\frac{\pi}{4})$, $M_4(10;-\frac{\pi}{3})$, $M_5(8;\frac{2\pi}{3})$, $M_6(12;-\frac{\pi}{6})$. Визначіть декартові координати цих точок.

9. Точка М рухається таким чином, що для будь-якого моменту t її координати обчислюються за формулами:

1) $x=2t$, $y=\frac{t}{3}$;

2) $x=5t^2-1$, $y=10t^2+4$

3) $x=a\cos t$, $x=a\sin t$;

4) $x=a\cos t$, $x=b\sin t$

Складіть рівняння відповідних траєкторій.

10. З'ясуйте, яку лінію визначає рівняння. Побудуйте графіки цих ліній. Перевірте правильність побудови за допомогою ППЗ «Gran1».

1)	$\rho=cos\varphi$	7)	$\rho=\varphi^{-2}$	13)	$\rho=\varphi^3$
2)	$\rho=\varphi$	8)	$\rho=2-cos^2\varphi$	14)	$\rho=e^{\varphi}$
3)	$\rho=1-cos2\varphi$	9)	$\rho=2^{\varphi}$	15)	$\rho=2-sin^2\varphi$
4)	$\rho=\varphi^{-1}$	10)	$\rho=-3cos\varphi$	16)	$\rho=2^{\varphi}+1$
5)	$\rho=sin\varphi$	11)	$\rho=3\varphi$	17)	$\rho=cos2\varphi$
6)	$\rho=2\varphi$	12)	$\rho=-sin\varphi cos\varphi$	18)	$\rho=1+sin2\varphi$

Питання для обмірковування

1. Яким чином визначається положення точки у циліндричній системі координат?
2. Чи кожне рівняння з двома невідомими вигляду $ax+by+c=0$ є рівнянням деякої прямої на площині?

3. Чи завжди рівняння $x^2 + y^2 = p$ є рівнянням кола?
4. Чи будь-яку лінію можна задати алгебраїчно?



Це цікаво!

Великий давньогрецький математик Аполлоній Пергський визначав коло як геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох заданих точок є величиною сталою. Таке визначення кола дістало назву кола Аполлонія.

Доведіть, що будь-яке коло є колом Аполлонія.

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Системи координат» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №2 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*

- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (**Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)**.*
- *відправити електронний лист викладачеві на адресу: **admin@agportal.org.ua**.*

1. **Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих точок А(-2; 1) і В(-1; 4). Складіть рівняння й визначте вид кривої і побудуйте.**

2. **Виведіть рівняння кола, з центром у початку координат і радіусом R.**

3. **Знайдіть траєкторію точки М, яка при своєму русі весь час залишається удвічі ближчою до точки А(1; 0), ніж до точки В(4; 0) і побудуйте цю лінію. Перевірте себе, побудувавши лінію за допомогою ППЗ Advanced Grapher.**

4. **На прямій лінії закріплено дві точки на деякій відстані $2c$ (Рис. 2.3). Мотузку, довжиною $2a$, також закріпили в цих точках. Яку криву буде описувати олівець, зображений на рисунку? Виведіть рівняння цієї кривої. Побудуйте криву для випадку $a=5$ й $c=3$.**

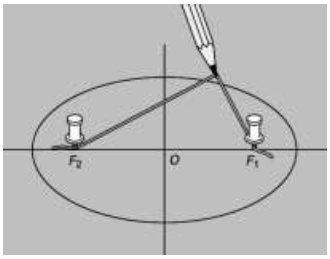


Рис. 2.3

5. **Зневажаючи силою опору повітря, визначіть траєкторію тіла, що кинули зі швидкістю v вгору під кутом α з горизонталлю.**

6. ***Лемніскатою*** **називається частковий випадок овала Касіні** $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$ **за умови, що *a=c*. Знайдіть рівняння лемніскати у декартових і полярних координатах. Побудуйте лемніскату, якщо *a = 5*.**

7. **Виведіть рівняння лінії, що описує точка на колі, яке котиться по горизонтальній поверхні без ковзання.**

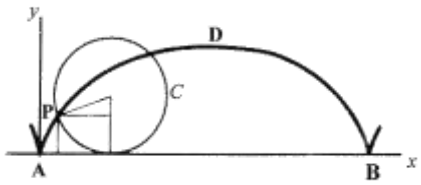


Рис. 2.4

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З'ясуйте, яку лінію визначає ребус, та запишіть її рівняння:


А=О + Ї +

Ф=Д

.....

.....


А=Л +ИК+


.....

.....

Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі

*www.agportal.org.ua у розділі «**Курс АНГ/СРС**» та «**Додатково/Навчальні відеоматеріали**»*

Чи знаєте Ви, *що* циклоїду, яку можна задати таким чином: $\begin{cases} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{cases}$, також називають кривою найскорішого спуску або *брахістохроною*. Ця назва складається із двох грецьких слів, що означають "найкоротший" і "час". Розглянемо таке питання: яку форму треба надати добре відшліфованому металевому жолобу, що з'єднує дві задані точки А і В (Рис. 2.5), щоб відполірована металева кулька рухалась по цьому жолобі із точки А в точку В за найкоротший час? На перший погляд здається, що потрібно зупинитися на прямолінійному жолобі, тому що пряма лінія є найкоротшим шляхом від А до В на площині.

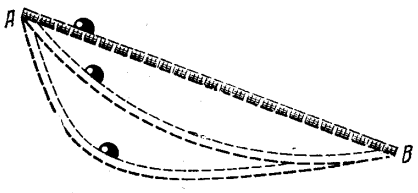


Рис. 2.5

Проте мова йде не про найкоротший шлях, а про найкоротший час; час же залежить не тільки від довжини шляху, але й від швидкості, з якою рухається кулька. Якщо жолоб прогнути донизу, то його частина, починаючи від точки А, буде крутіше опускатися донизу, ніж у випадку прямолінійного жолоба, і кулька, рухаючись по ньому, придбає швидкість більшу, ніж на ділянці такої ж довжини прямолінійного жолоба. Але якщо зробити початкову частину дуже крутою й порівняно довгою, то тоді частина, що примикає до точки В, буде дуже пологою й також порівняно довгою; першу частину кулька пройде швидко, другу дуже повільно й може запізнитися із приходом у точку В. Отже, жолобу, потрібно надати опуклу донизу форму.

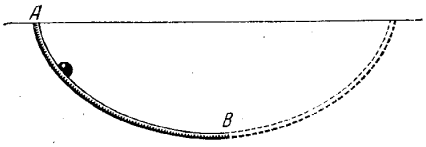


Рис. 2.6

Задача про брахістохрону була першою в історії варіаційною задачею динаміки, і математики і з нею блискуче впоралися. Й. Бернуллі сформулював завдання і опублікував його в якості конкурсної задачі в Acta Eruditorum. На конкурс прийшли три правильних розв'язання: від Г. Лопиталя, Я. Бернуллі та І. Ньютона. Крива виявилася циклоїдою (Рис. 2.6). Своє власне розв'язання Йоганн Бернуллі теж опублікував. Відтоді циклоїда називається брахістохроною, а доведення математиків започаткували нову галузь математики – варіаційне числення.



Для майбутніх науковців

Пропонуємо Вам обрати один або два пункти з цього розділу за бажанням. Ще більше додаткових задач, тем творчих проектів Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

1. Підготуйте доповідь або презентацію на одну із запропонованих тем:

1. Класичні задачі геометрії: трисекція кута, подвоєння куба, квадратура круга.
2. Застосування координат у курсі АНГ.
3. Фігури, що задаються нерівностями.
4. Рене Декарт – видатний математик і філософ 17 століття.
5. Параметричні рівняння кривих. Циклоїда. Гвинтова лінія.
6. Коло Аполлонія.
7. Спіралі.
8. Полярні рівняння кола, прямої тощо.

9. Рівняння деяких кривих, що використовуються в математиці і її застосуваннях.

10. Овали Кассіні.

2. Оберіть правильне співвідношення

a) "рівняння кривої – винахідник"

1) $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$ 2) $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$

3) $\rho=a\varphi$ 4) $(x^2+y^2-ay)^2=l^2(x^2+y^2)$

1) Архімед 2) Якоб Бернулі

3) Блез Паскаль 4) Джованні Касіні

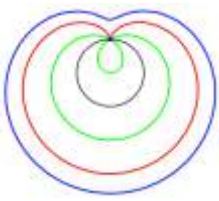
b) "рівняння кривої – її графік"

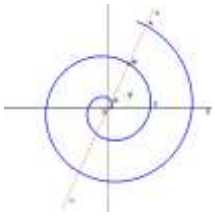
1) $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$

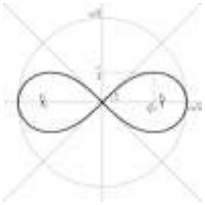
2) $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$

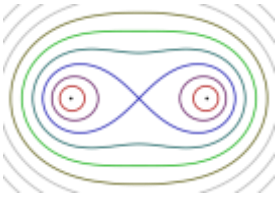
3) $\rho=a\varphi$

4) $(x^2+y^2-ay)^2=l^2(x^2+y^2)$

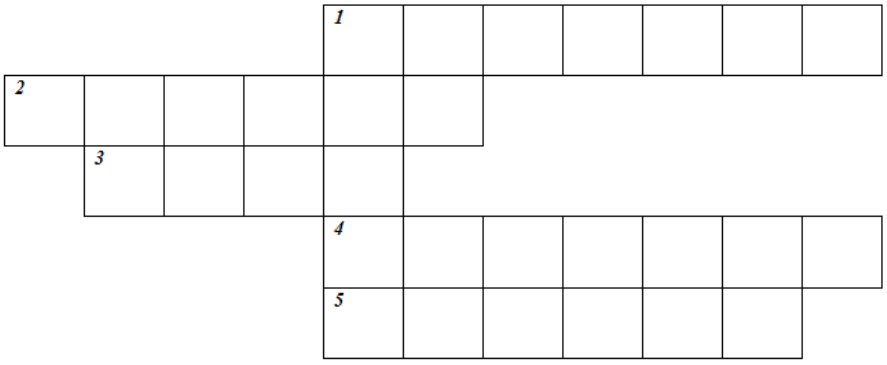
1) 

2) 

3) 

4) 

3. Розв'яжіть кросворд:



Питання:

1. Може задаватися рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, де $A^2+B^2+C^2>0$.
2. Винахідник системи координат.
3. Геометричне місце точок, що задається рівнянням $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2 \leq R^2$.
4. Відрізок, що виходить з вершини трикутника і поділяє протилежну сторону навпіл.
5. Інша назва осі OX – «вісь …»

4. Розгадайте анаграми імен відомих математиків і знайдіть відповідний портрет

АЛЬПАСК	ДІМЕРАХ	РКАДЕТ
КРНЮО	КАІНІС	ФОІГАРП

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 «Різні системи координат. Лінії на площині»

Завдання 1. Дослідження форми черепашки равлика

Мета роботи: встановити математичну залежність між витками черепашки равлика.

Устаткування: декілька видів черепашок равлика, циркуль, транспортир, лінійка, обчислювальний прилад.

Інструкція для студента

Маємо декілька видів черепашок равлика:



Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3



Зробіть такі вимірювання: Уявіть, що вершина черепашки равлика є полюсом полярної системі координат. Оберіть деякі кути $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2})$ і знайдіть відстань між сусідніми витками черепашки ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Заповніть таблицю для кожного об'єкта:

Таблиця 2.1.
Об'єкт 1

Кут / *Відстань*	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
ρ_1					
ρ_2					
ρ_3					



Гіпотеза: Витки черепашки равлика закручені за спіраллю Архімеда.

Перевірка гіпотези: Візьміть рівняння: *Спіраль Архімеда* $\rho = a\varphi$. Підставте відстань ρ_1, ρ_2, ρ_3 і кути $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ і отримайте значення *a* для кожного випадка. Побудуйте варіаційні ряди. Знайдіть середнє, моду, медіану, дисперсію, середнє квадратичне відхилення кожного ряду.



Теоретична підказка.

Дисперсією статистичної сукупності називається середнє арифметичне квадратів відхилень варіант від їх середнього значення, тобто маємо формулу: $s_n^{\,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Статистичне середнє квадратичне відхилення дорівнює арифметичному кореню із статистичної дисперсії: $s_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$. Воно відображає типову картину відхилення окремих значень від середнього значення сукупності.

Зробіть висновки

Завдання 2. Виведення рівняння кривої, отриманої в результаті експерименту

Мета роботи: за результатами експерименту самостійно вивести рівняння кривої і побудувати її графічне зображення.

Устаткування: дошка, залізний обруч з отвором, крейда, лінійка, обчислювальний прилад.

Хід роботи (інструкція для студента)



Проведіть експеримент: Дошку розташуйте вертикально, в отвір залізного обруча встановіть крейду (Рис. 4). При русі обруча крейда буде описувати траєкторію руху точки на колі, що котиться по горизонтальній поверхні без ковзання.

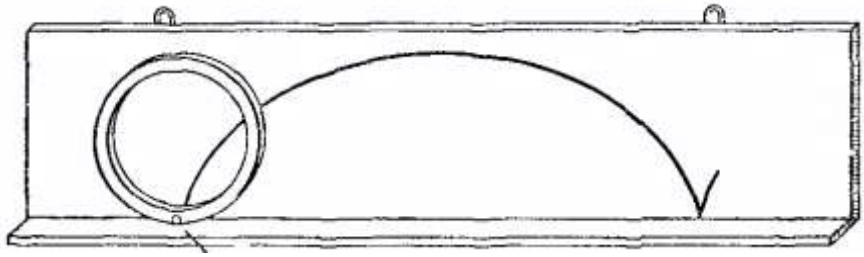


Рис. 4

Отримаємо певну лінію.

Завдання: Виведіть рівняння побудованої кривої. Що це буде за крива? Перевірте здобутий результат за допомогою посібника «Чудові криві». Побудуйте цю лінію самостійно у зошиті і порівняйте свої результати із графіком, побудованим за допомогою ППЗ Gran 1W. Порівняйте результати експерименту з отриманим графіком.

Зробіть висновки

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

"Побудова геометричного місця точок (ГМТ) за допомогою технічних засобів: Advanced Grapher, MS Excel, GRAN 1W"

Головна мета: здобуття студентами навичок побудови графіків функцій за допомогою інформаційних технічних засобів, таких, як Advanced Grapher, DG, Gran, MS Excel. Ці засоби корисно використовувати у тих випадках, коли побудова графіків є допоміжним, а не основним етапом розв'язування задачі.

Устаткування: комп'ютер, ППЗ Advanced Grapher, ППЗ Gran 1W.

Хід роботи (інструкція для студента)

Пропонуємо Вам обрати одну вправу з кожного пункту, номер якої відповідає Вашому номеру у списку академічної групи.

Завдання 1. Визначте і побудуйте ГМТ, що задовольняють наступним рівностям:

1) $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$,	2) $2x^2 - y^2 = 1$	3) $\left(x^2 - 6x\right)^2 - 2(x-3)^2 = 81$	4) $x + \lvert y\rvert = 2$
5) $x^2 + y^2 = 0$	6) $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 0$	7) $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 5$	8) $\lvert x+1\rvert = \lvert y-1\rvert$
9) $x = \lvert y+1\rvert$	10) $\lvert x-5\rvert = \lvert y\rvert$	11) $\lvert x+3\rvert = \lvert y+2\rvert$	12) $\lvert x+3\rvert = y$
13) $\lvert x\rvert + y = 3$	14) $\lvert 2x+1\rvert = \lvert y\rvert$	15) $x^2 + 4y^2 = 4$	16) $x^2 + y^2 = 5$
17) $x^2 + 2 = 0$	18) $x^2 + y = 4$	19) $y^2 - 2x^2 = 3$	20) $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = -1$

Завдання 2. Побудуйте ГМТ, заданих у полярних координатах і напишіть його рівняння в ДСК:

1) $\rho = 10\sin\varphi$,	2) $\rho = \ln 5$	3) $\rho = 3\sin\varphi\cos\varphi$	4) $\rho = 1 - \sin 3\varphi$
5) $\rho = 4 - \cos^2\varphi$	6) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	7) $\sin\varphi = 1$	8) $\rho = \lg 2$
9) $\rho = e^3$	10) $\rho = e^{2\varphi}$	11) $\rho = 2^{\varphi} + 2$	12) $\rho = 2 - \sin^2\varphi$

13) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 14) $\varphi = -\frac{\pi}{2}\rho$ 15) $\rho = 1 - \cos 3\varphi$ 16) $\sin\varphi = \cos\varphi$

17) $\rho = -\cos\varphi$ 18) $\cos 3\varphi = 0$ 19) $\rho = \ln 2$ 20) $\rho = 3\sin^2\varphi$

Завдання 3. Зобразіть на координатній площині ГМТ, заданих нерівностями:

1) $\begin{cases} \left|x^2+5x\right| < 6; \\ \left|x+1\right| \le 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > 0 \\ y \le 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x \ge 0, \\ y \le 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x| \le 2, \\ y < 1 \\ y \ne 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| < 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \le 25, \\ x \ge 0, \\ y < 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} |x| \ge 1 \\ |y| \le 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ne 1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2, \end{cases}$

10) $\begin{cases} x - 2y^2 \le 0 \\ x \le 1 \end{cases},$

11) $\begin{cases} 2x > y^2 + 3 \\ x \le 4 \end{cases},$

12) $\begin{cases} x > 0 \\ y \le 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} |x| \le 2, \\ y < 1 \\ y \ne 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x + 1 \le y^2 \\ x \le 2 \end{cases},$

15) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ne 1. \end{cases}$

16) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \le 25, \\ x \ge 0, \\ y < 1 \end{cases}$

17) $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| < 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ne 1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} \left|x^2+5x\right| < 6; \\ \left|x+1\right| \le 1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| < 1 \end{cases}$

Завдання 4. Зобразіть на координатній площині ГМТ, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x = 5t^2 + 2, \\ y = 3t^2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 3t + 5. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = 2\sin t. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 5\sin t. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = 2t^2 - 3, \\ y = 5t^2 + 1. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = 3t. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t; \\ y = 2 - 2\cos t. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = 3t - 3\sin t; \\ y = 3 - 3\cos t. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2. \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x = 2t^2 - 3, \\ y = 5t^2 + 1. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = 5t - 3, \\ y = 2t^2 - 1. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t; \\ y = 2 - 2\cos t. \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

Завдання 5. З'ясуйте, яку лінію визначає рівняння:

1) $\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = 25\left(x^2 + y^2\right)$

2) $\left(x^2 + y^2 - y\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$

3) $\left(x^2 + y^2 - y\right)^2 - x^2 + y^2 = 0$

4) $\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$

5) $\rho = 5 - 2\sin\varphi$

6) $\rho = 1 - \sin\varphi$

7) $\rho = 4 + 4\cos\varphi$

8) $\rho = 13\varphi$

9) $\rho = \varphi^{\frac{1}{2}}$

10) $\rho = \dfrac{2}{\varphi}$

11) $\rho = 4\varphi$

12) $\rho\varphi = 5$

13) $\dfrac{3}{2}\rho\varphi = 1$

14) $\rho = 3\varphi^{\frac{1}{2}}$

15) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8(x^2 + y^2) = 0$

16) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2(x^2 + y^2)$

17) $\rho = 5 - 2\sin\varphi$

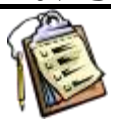
18) $\left(x^2 + y^2 - y\right)^2 - x^2 + y^2 = 0$

19) $\rho\varphi^2 = 5$

20) $\rho = 13\varphi^2$

<u>Зробіть висновки</u>

ТЕМА № 3 "Вектори та дії над ними"



Основні питання

Вектори, рівність векторів, правила «трикутника» і «паралелограма», побудова суми і різниці векторів, множення вектора на число. Колінеарність векторів. Поняття лінійної залежності векторів. Компланарність векторів. Розкладання вектора в лінійну комбінацію двох або трьох векторів. Обчислення проекцій вектора на вісь, застосування властивостей проекцій. Обчислення напрямних косинусів векторів.



Рекомендована література

[1] Глава 3, § 1 – § 6 (с. 57–99).

[2] Тема 7, 79-90, Тема 8, стор 96-99.

[4] І. з. № 2-3, стор. 9-11.

[7] Гл 2, §1 (стор 46-83).

[9] №№748, 750, 754, 762, 775,777, 789,817, 837,841, 857,875.

[12]

[22] Гл. 1, §1.3 стор. 20-23.

[25] №№ 1001, 1044, 1055, 1065, 1073, 1075, 1094, 1099, 1108, 1110.

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-3**

Опорний конспект

3 ВЕКТОРИ

Координати і модуль



$A(x_1, y_1, z_1)\ B(x_2, y_2, z_2)$

$\bar{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Модуль $|\bar{a}|$- довжина вектора:

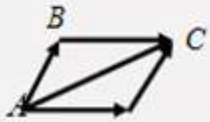
$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

якщо $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$

Нульовий вектор: $|\bar{0}| = 0$

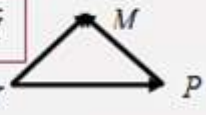
Додавання і віднімання векторів

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$



$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

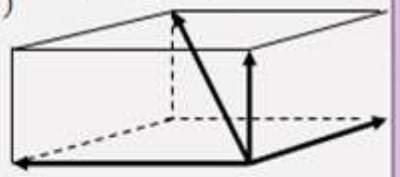
$\overline{KM} - \overline{KP} = \overline{PM}$



$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$

$\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$



$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

Властивості

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

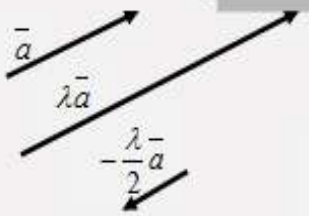
$a + 0 = 0 + a = \bar{a}$

$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Множення вектора на число. Базис.

$\bar{b} = \lambda \bar{a}$

$\lambda \bar{a}(\lambda \bar{a}_1; \lambda \bar{a}_2; \lambda \bar{a}_3)$

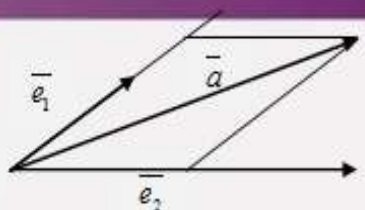


$-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$

$\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$

$\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$

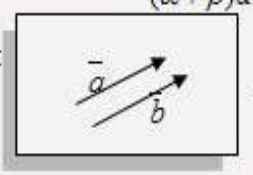
$(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$



$\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2$

$\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 + \alpha\bar{e}_3$

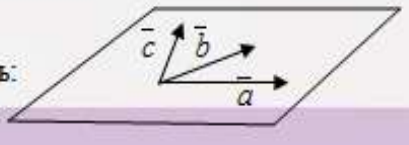
колінеарність:

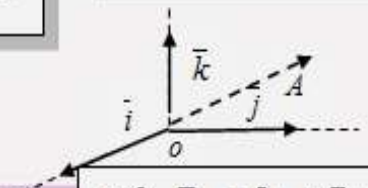


$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow$

компланарність:





$\bar{OA} = \bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Векторною величиною є:

   а) температура тіла; б) напруженість електричного поля;

   в) щільність речовини; г) енергія взаємодії.

2. Вектори $\bar{a},\bar{b}$, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються:

   а) рівними; б) лінійно незалежними;

   в) колінеарними; г) однаково напрямленими.

3. Для заданих векторів $\bar{a}$=(-1,2,5), $\bar{b}$=(0,1,2) вектор $\bar{c}=4\bar{a}-\bar{b}$ має координати :

   а) (-4,7,19); б) (-4,7,18); в) (-4,-7,18); г)інша відповідь.

4. Вектор, отриманий з вектора $\bar{a}$ шляхом розтягання в β разів, називається:

   а) добутком вектора $\bar{a}$ на число β; б) сумою вектора $\bar{a}$ і β;

   в) добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{\beta}$; г) інша відповідь.

5. Задано точки A(-3, 2,1) і B(5, 10, 4) координати вектора $\overline{AB}$ мають вигляд:

   а) (2, 12, 5); б) (8, 8, 3); в) (-8, -8, -3); г) (-2, -12, 5).

6. Модуль вектора $\bar{c}=3\bar{a}+2\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(1;0;4)$ і $\bar{b}=(1;0;0)$ дорівнює:

   а) $\sqrt{17}$; б) 17; в) 13; г) $\sqrt{119}$

7. Проекцією вектора $\bar{a}$=(10,-7,-3) на вісь OX буде вектор:

   а) (10,0,0); б) (10,0,3); в) (0,7,0); г) (0,-7,-3).

8. При яких значеннях α вектор $\bar{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ є одиничним?

а) $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, б) $\alpha \in [0, \pi]$, в) $\alpha \in \Re$, г) таких α не існує.

9. При яких значеннях числа ν вектор $\nu \cdot \bar{a} + \bar{a}$, $(\bar{a} \neq \bar{0})$ протилежно напрямлений до вектора $\bar{a}$?

а) $\nu < 0$, б) $\nu > -1$, в) $\nu < -1$, г) $\nu = -1$.

10. Яким чином розташовані точки А, В і М, якщо виконується рівність $\overline{AM} = -\frac{1}{2}\overline{BA}$?

а) А – середина відрізка МВ, б) В – середина відрізка АМ,

в) М – середина відрізка АВ, г) встановити неможливо.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Це цікаво!

Правила складання швидкостей використовуються при запуску штучних супутників Землі. Для виведення супутника на орбіту, йому необхідно надати відносно центру Землі швидкість близько 8 км/с. Унаслідок обертання Землі супутник, знаходячись на її поверхні, має швидкість $\overline{v_1}$. Ця швидкість дорівнює швидкості руху Землі навколо своєї осі у місці запуску. Якщо супутник запускається у східному напрямі, то його швидкість дорівнює $\overline{v_2}+\overline{v_1}$, де $\overline{v_2}$ – це швидкість, що надають супутнику реактивні двигуни. Тобто, у цьому випадку реактивні двигуни надають йому швидкість $\overline{v_2}$, меншу ніж 8 км/с на величину $|\overline{v_1}|$. При запуску супутника у західному напрямі його швидкість дорівнює $\overline{v_2}-\overline{v_1}$, і реактивні двигуни мають надавати йому швидкість $\overline{v_2}$, більшу ніж 8 км/с на величину $|\overline{v_1}|$. Таким чином, супутники більш доцільно запускати у східному напрямі і з низьких широт (там більше значення $\overline{v_1}$). Саме тому космодроми знаходяться ближче до екватору.



Приклади розв'язування деяких задач

1. Знайдіть вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, якщо $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язування.

За формулою маємо $a_x = 5-1 = 4, a_y = 8-3 = 5, a_x = -1-2 = -3$, тобто $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

2. Задано точки $A(0;-1;2)$ і $B(-1;1;4)$. Знайдіть координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$.

Розв'язування.

З формул маємо: $\overrightarrow{AB} = (-1;2;2)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

3. Знайдіть координати вектора $\bar{b} = (a, 2a, -a)$, якщо його довжина дорівнює $\sqrt{54}$.

Розв'язування.

$\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{54}$, $6a^2 = 54$, $a^2 = 9$, $a = \pm 3$.

Відповідь: $\vec{a}_1 = (3,6,-3)$, $\vec{a}_2 = (-3,-6,3)$.

3. Доведіть, що при будь-яких значеннях чисел $a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3$ три вектори $\bar{a} = (0; a_2; a_3)$, $\bar{b} = (0; b_2; b_3)$ та $\bar{c} = (0; c_2; c_3)$ компланарні.

Розв'язування.

Перші координати заданих векторів – нулі. Тому, якщо відкласти ці вектори від початку координат, усі відповідні їм напрямлені відрізки розміститься у площині *yz*. Отже, задані вектори компланарні.

4. Нехай K, P – середини відрізків AB і CD, що лежать на мимобіжних прямих, а O – середина відрізка KP. Доведіть, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$.

Розв’язування.

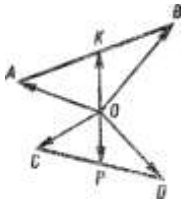


Рис. 3.1

Вектори $\overline{OK}$ і $\overline{OP}$ протилежні. Отже, $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OK}+2\overline{OP}=2(\overline{OK}+\overline{OP})=2\cdot\overline{0}=\overline{0}$.

5. Визначіть початок вектора $\bar{a}=(3,-4,-2)$, якщо його кінець знаходиться в точці *B*(3; -4; 3).

Розв’язування.

Нехай початок вектора знаходиться в точці $A(x,\ y,\ z)$, тоді $\overline{AB}=(3-x,-4-y,3-z)$. Маємо $3-x=3,\ -4-y=-4,\ 3-z=-2$ Звідки знаходимо $x=0,\ y=0,\ z=5$, тобто $A(0;\ 0;\ 5)$.

6. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha=\beta=60°, \gamma=30°$?

Розв’язування.

$\cos^2 60°+\cos^2 60°+\cos^2 30°=\frac{5}{4}\neq 1$, тому дістанемо на це запитання негативну відповідь.

7. Визначіть модулі суми та різниці векторів $\bar{a}=(3,-5,8)$ та $\bar{b}=(-1,1,-4)$.

Розв’язування.

Знаходимо за формулою координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:

$\vec{a}+\vec{b}=(2;-4;4);\quad \vec{a}-\vec{b}=(4;-6;12).$

Дістаємо:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6;$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+12^2}=14.$$

8. Задано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. **Знайдіть довжини ребер** A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 **піраміди.**

Розв'язування.

Знайдемо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Маємо $\overrightarrow{A_1A_2}=(5;3;1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(2;2;3)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(1;4;-2)$. Оскільки $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$, то $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}$.

Аналогічно

$$\left|\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17};\quad \left|\overline{A_1A_4}\right|=\sqrt{1^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{21}.$$

9. Знайдіть вектор $\bar{a}=(a_x;-1;a_z)$, **колінеарний вектору** $\bar{b}=(1,-2,4)$.

Розв'язування.

З умови колінеарності векторів маємо $\frac{1}{a_x}=\frac{-2}{-1}=\frac{3}{a_z}$; $a_x=\frac{1}{2}$; $a_z=\frac{3}{2}$.



Розв'яжіть задачі:

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного розв'язування задач прикладного змісту. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв'язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. У паралелограмі ABCD позначено $\overline{AB}=\bar{a}$ і $\overline{AD}=\bar{b}$. Виразіть через $\bar{a}$ і $\bar{b}$ вектори $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ і $\overline{MD}$, де M – точка перетину діагоналей паралелограму.



Це цікаво!

Діагональ – це щільна тканина із бавовняної або вовняної пряжи. Для цієї тканини характерні різко виражені рубчики на поверхні, розташовані під кутом 45° до окрайки тканини. Діагональ застосовується для пошиття військової уніформи, пальто тощо.

2. Розкласти вектор $\bar{p} = 2 \cdot \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ за векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо відомо, що у базисі $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ розкладання векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ має вигляд: $\bar{a} = 2\bar{e_1} - 2\bar{e_2}$, $\bar{b} = 2\bar{e_1} - \bar{e_2}$, $\bar{c} = 2\bar{e_1} + 4\bar{e_2}$.

3. У паралелепіпеді ABCDA′B′C′D′ позначено $\overline{AB} = \bar{m}$, $\overline{AD} = \bar{n}$, $\overline{AA'} = \bar{p}$. Зобразіть 1) $\bar{m} + \bar{n} + \bar{p}$, 2) $\bar{m} + \bar{n} + \frac{1}{2}\bar{p}$, 3) $\frac{1}{2}\bar{m} + \frac{1}{2}\bar{n} + \bar{p}$, 4) $\bar{m} + \bar{n} - \bar{p}$, 5) $-\bar{m} - \bar{n} + \frac{1}{2}\bar{p}$.

4. Задано точки A (1; 3; 4), B (2; 5; 6), C (3; 2; 6). Знайдіть:

1) Довжину медіани CD трикутника ABC;
2) Довжину вектора $\overline{CP}$, якщо $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{BP}$;
3) Координати і довжину вектора $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

5. Задано абсолютні значення векторів: $|\bar{a}| = 13, |\bar{b}| = 19, |\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Знайдіть величину $|\bar{a} - \bar{b}|$.

6. Знайдіть розкладання за базисом векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектора $\vec{p}$, паралельного вектору $\vec{a}(1; 2; -1)$ і протилежного з ним напряму за умовою, що $|\vec{p}| = 5$.

7. Перевірте, чи будуть вектори $\vec{a}(-1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; -1; 0)$ і $\vec{c}(1; 1; 1)$ лінійно залежними.

8. Задано два відрізка AB і CD й точки $M \in [AB], N \in [CD]$, що поділяють відрізки AB і CD відповідно на відрізки, відношення довжин яких дорівнює k. Виразити $\overline{MN}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

9. Визначіть, при яких значеннях α і β вектори $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ і $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ колінеарні.

10. Знайдіть орт вектора $\bar{a} = (6; -2; -3)$.

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Векторна алгебра» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №3 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

- *відправити електронний лист викладачеві на адресу:* ***admin@agportal.org.ua*****.**

1. **З'ясуйте, які ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задовольняють умовам:**

   1) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$;

   2) $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$;

   3) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$

   4) $|\bar{a}-\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$

2. **Доведіть векторним методом твердження: «Якщо діагоналі чотирикутника *ABCD* перетинаються і у точці перетину поділяються навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом».**

3. **Доведіть, що для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, а також для будь-яких чисел α,β,γ три вектора $\bar{p}=\alpha\cdot\bar{a}-\beta\cdot\bar{b}$; $\bar{q}=\gamma\cdot\bar{b}-\alpha\cdot\bar{c}$; $\bar{r}=\beta\cdot\bar{c}-\gamma\cdot\bar{a}$ лінійно залежні.**

   Вказівка: Коефіцієнти розкладання векторів запишіть у стовбці, з яких складіть матрицю і визначіть її ранг.

4. **Знайдіть геометричне місце точок М площини, для кожної з яких виконується рівність $|\overline{AB}+\overline{AM}|=|\overline{AB}|$, де А і В – це задані точки площини.**

5. **Машиніст мостового крану піднімає деталь на висоту 3 м, одночасно переміщуючи її вздовж цеху на 4 м (Рис. 3.2, Рис. 3.3). Знайдіть величину переміщення деталі відносно стін цеху.**

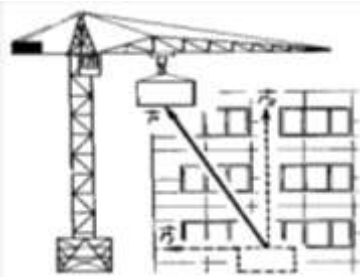


Рис. 3.2

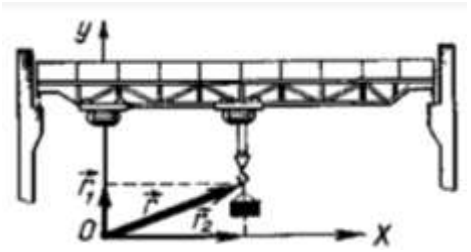


Рис. 3.3

6. **Човен рухається відносно води у річці зі швидкістю 5 м/с під кутом $\alpha = 60°$ до течії, швидкість якої дорівнює 3 м/с. Визначіть швидкість човна відносно берега.**

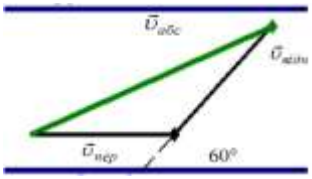


Рис. 3.4

7. **У вершинах квадрата розташовано три додатні заряди *q, 2q, 3q*. Знайти напрям і величину вектора напруженості електричного поля в центрі квадрата, якщо напруженість електричного поля, створюваного зарядом *q* в центрі квадрата дорівнює $\left|\overrightarrow{E_1}\right| = E$.**

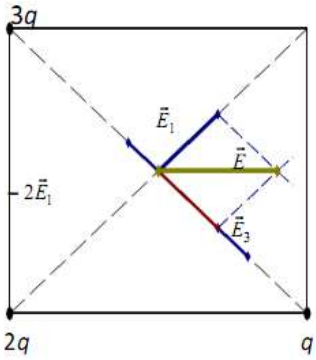


Рис. 3.5

8. **У безвітряну погоду швидкість приземлення парашутиста дорівнює 4 м/с. Якими будуть модуль і напрям вектора швидкості його приземлення, якщо у горизонтальному напрямі віє вітер зі швидкістю 5 м/с (Рис. 3.6)?**

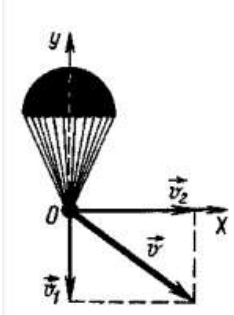


Рис. 3.6

ТЕМА № 4 "Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів та його властивості"



Основні питання

Обчислення скалярного добутку двох векторів, зокрема, заданих своїми координатами. Скалярний квадрат вектора. Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів. Обчислення проекції вектора на вісь і кутів між векторами за допомогою скалярного добутку. Обчислення векторного добутку двох векторів, зокрема, якщо вектори задано координатами. Обчислення площі паралелограма і площі трикутника, побудованих на двох векторах, зведених до спільного початку. Дослідження колінеарності двох векторів за допомогою обчислення їх векторного добутку.



Рекомендована література

[1] Гл. 3, § 1 – § 6 (с. 57–99).

[2] Тема 8, стор 100-104.

[4] І. з. № 2-3, стор. 9-11.

[7] Гл. 2, §2 (стор 46-83).

[9] №№ 757, 770, 792, 810, 826, 845, 846, 863.

[12]

[22] Гл. 1, §1.4 стор. 23-26.

[25] №№ 1006, 1012, 1026, 1030.

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-3**

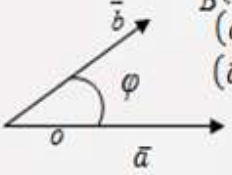
Опорний конспект

4 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

$$B(\bar{a}\cdot\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\angle\bar{a}\,\bar{b})$$

$$(\bar{a}\cdot\bar{b}) = |\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b}$$

$$(\bar{a}\cdot\bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



$$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cdot\cos(\bar{a},\bar{b})$$

Кут між векторами на площині:

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

Кут між векторами у просторі:

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$(\bar{a}\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}, \bar{a}\neq 0, \bar{b}\neq 0$

$(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b}), \forall\ \lambda\in R$

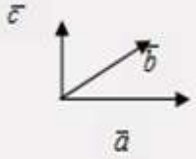
$aa = a = |a| \Rightarrow |a| = \sqrt{a}$

Властивості:

$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ $\quad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

$$\bar{c} = [\bar{a},\bar{b}],\ \bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$$



⇓ умови

Властивості:

$[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$

$\lambda[\bar{a},\bar{b}] = [(\lambda\bar{a}),\bar{b}] = [\bar{a},(\lambda\bar{b})]$

$[\bar{a},(\bar{b}+\bar{c})] = [\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{c}]$

1) трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = [\bar{a},\bar{b}]$ є правою,
2) вектор $\bar{c}\perp$ до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$,
3) $|\bar{c}| = |[\bar{a},\bar{b}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$

$\bar{a}\parallel\bar{b} \Rightarrow [\bar{a},\bar{b}] = 0;\ [\bar{a},\bar{b}] = 0 \Rightarrow \bar{a}\parallel\bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються:
   а) паралельними; б) компланарними;
   в) колінеарними; г) однаково напрямленими.
2. Задано координати двох точок A(1,-2,3) і B(-2,1,6). Координати вектора $\overline{AB}$ мають вигляд:
   а) (-1,-1,9); б) (3,-3, -3); в) (-3,3,3); г) (1,1,-9).
3. Для заданих векторів $\bar{a}$ =(-1,2,5) і $\bar{b}$ =(0,1,2) вектор $\bar{c}=4\bar{a}-\bar{b}$ має координати :
   а) (-4,7,19); б) (-4,7,8); в) (-4,-7,18); г)інша відповідь.
4. При яких значеннях p вектори $\bar{a}=(2;-1;p),\bar{b}=(-4;p;4)$ будуть колінеарні?
   а) -2; б) 6; в) 2; г) таких p не має.
5. Скалярний добуток векторів $\bar{a}=(1;-7;0),\bar{b}=(0;2;7)$ дорівнює:
   а) -12; б) -14; в) 7; г) -13.
6. При яких значеннях p вектори $\bar{a}=(3;-1;p),\bar{b}=(1;p;2)$ будуть ортогональними?
   а) -2; б) -3; в) 3; г) 1.
7. Кут між векторами $\bar{a}=(\sqrt{3};1;0)$ і $\bar{в}=(1;0;0)$ дорівнює:
   а) 0; б) 90; в) 60; г) 30.
8. Абсолютна величина вектора $\bar{c}=3\bar{a}+2\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(1,2,-7)$ і $\bar{b}=(4,7,2)$ дорівнює:

а) 5; б) 10; в) 13; г) інша відповідь.

9. Проекцією вектора $\bar{b}$ =(3,-7,3) на вісь OZ буде вектор:

а) (0,0,3); б) (0,-7,3); в) (-3,-7,-3); г) (0,-7,0).

10. Проекція вектора $\bar{a}$ =(10,-5,10) на вектор $\bar{b}$ = (1,2,2) дорівнює:

а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{20}{3}$; в) $\frac{15}{3}$; г) 20.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Це цікаво!

Слово «вектор» походить від латинського «vector» - той, що переносить. Воно використовується у молекулярній генетиці для означення молекули нуклеїнової кислоти, зокрема молекули ДНК, яку використовують у генній інженерії для передачі генетичного матеріалу іншій клітці.

В епідеміології вектор – це теж саме, що й переносник.



Приклади розв'язування деяких задач:

1. Задано три вектори $\bar{a}=(1;-4;8)$, $\bar{b}(4;4;-2)$, $\bar{c}(2;36)$. Знайдіть проекцію вектора $\bar{b}+\bar{c}$ на вектор $\bar{a}$.

Розв'язування.

Знайдемо вектор $\bar{b}+\bar{c}=(4+2)\bar{i}+(4+3)\bar{j}+(-2+6)\bar{k}=6\bar{i}+7\bar{j}+4\bar{k}.$

Користуємося формулою:

$$np_{\bar{a}}\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\frac{\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}.$$

$$np_{\bar{a}}\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\frac{\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}=\frac{1\cdot6+(-4)\cdot7+8\cdot4}{\sqrt{1+16+64}}=\frac{10}{9};$$

Відповідь: $\frac{10}{9}$.

2. Задано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайдіть кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Розв'язування.

Оскільки $\overline{A_1A_2}=(5;3;1)$ і $\overline{A_1A_4}=(1;4;-2)$, то косинус кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\frac{\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{5\cdot1+3\cdot4+1(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}}=$$

$$=\frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}}=\frac{15}{7\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$. тому

$$\left(A_1A_2\hat{\ }A_1A_4\right)=\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

3. Задано $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$. Визначіть, за яких значень α вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ ортогональні.

Розв'язування.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку. Звідси для α маємо співвідношення:

$$\left\langle\left(\vec{a}+\alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\alpha\vec{b}\right)\right\rangle=0.$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\left\langle \left(\vec{a}+\alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\alpha\vec{b}\right)\right\rangle = \vec{a}^{\,2} - \alpha\left\langle \vec{a}\vec{b}\right\rangle + \alpha\left\langle \vec{b}\vec{a}\right\rangle - \alpha^2\vec{b}^{\,2} =$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 - \alpha\left\langle \vec{a}\vec{b}\right\rangle + \alpha\left\langle \vec{b}\vec{a}\right\rangle - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Оскільки $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, то $9 - 25\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

4. Знайдіть довжину вектора $\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{y}$, якщо $\left|\vec{x}\right| = 1$, $\left|\vec{y}\right| = 2$, кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язування.

Маємо $(\bar{a},\bar{a}) = \left|\vec{a}\right|^2$. Звідси $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. Тому

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{x} - 2\vec{y}\right| = \sqrt{\left(\vec{x} - 2\vec{y}\right)^2} = \sqrt{\vec{x}^{\,2} - 4\vec{x}\vec{y} + 4\vec{y}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{\left|\vec{x}\right|^2 - 4\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos\frac{\pi}{3} + 4\left|\vec{y}\right|^2} = \sqrt{1 - 4\cdot 2\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{13}.$$

5. Знайдіть вектор $\bar{x}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\bar{a} = (2;1;-1)$ і $\left(\bar{x}\,\bar{a}\right) = 3$.

Розв'язування.

Оскільки вектор $\bar{x}$ колінеарний вектору $\bar{a}$, то його координати пропорційні координатам вектора $\bar{a}$. Отже $\bar{x} = (2\lambda;\lambda;-\lambda)$. Залишилося знайти λ. Для цього скористаємось умовою $\left(\bar{x}\,\bar{a}\right) = 3$.

Відомо, що скалярний добуток двох векторів, заданих координатами можна обчислити як суму добутків відповідних координат. Маємо: $4\lambda + \lambda + \lambda = 3$, звідки $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, $\bar{x} = \left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

6. Задано дві точки $M(-5;7;-6)$ і $N(7;-9;9)$. Обчисліть проекцію вектора $\bar{a} = (1;-3;1)$ на вісь, задану вектором $\overline{MN}$.

Розв'язування.

Знайдемо вектор $\overline{MN}$; $\overline{MN} = (12;-16;15)$.

Тоді $np_{\overline{MN}}\bar{a}=\dfrac{\left(\bar{a},\overline{MN}\right)}{\left|\overline{MN}\right|}=\dfrac{12+48+15}{\sqrt{144+256+225}}=\dfrac{75}{\sqrt{625}}=3.$

7. Задано: $\left|\bar{a}\right|=10,\ \left|\bar{b}\right|=2$ **і** $\left(\bar{a}\,\bar{b}\right)=12$**. Обчисліть** $\left|\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\right|$**.**

Розв'язування.

Відомо, що $\left|\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)$. Для того, щоб розв'язати задачу, нам потрібно знайти $\sin(\bar{a},\bar{b})$. З умови $\left(\bar{a}\,\bar{b}\right)=12$ маємо: $(\bar{a}\,\bar{b})=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, звідки $\cos\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{12}{10\cdot 2}=\dfrac{3}{5}$. Оскільки $\cos\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)>0$, то $0<\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)<\dfrac{\pi}{2}$.

З тригонометричної тотожності знаходимо $\sin\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)$: $\sin\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\bar{a}\,\bar{b}\right)}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$.

Отже, $\left|\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=10\cdot 2\cdot\dfrac{4}{5}=16$.

8. Вектори $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ **утворюють з віссю** $\vec{S}$ **кути** 60° **і** 120°**. Знайдіть проекцію суми** $\vec{a}+3\vec{b}$ **на вісь** $\vec{S}$**, якщо** $\left|\vec{a}\right|=6$**,** $\left|\vec{b}\right|=4$**.**

Розв'язування.

Оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$\text{пр}_{\vec{S}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right),$$

то досить знайти проекції на вісь $\vec{S}$ кожного з векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}$. Відповідно до формули дістаємо:

$$\text{пр}_{\bar{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60° = 6\frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{пр}_{\bar{S}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Знаходимо проекцію вектора $3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$:

$$\text{пр}_{\bar{S}}\left(3\vec{b}\right) = 3\text{пр}_{\bar{S}}\vec{b} = 3(-2) = -6.$$

Отже, $\text{пр}_{\bar{S}}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = 3 + (-6) = -3.$

9. Обчислити $\left|\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right|$**, якщо** $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\left(\hat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язування.

$$\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 3\left(\vec{a} \times \vec{a}\right) - 6\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) + 2\left(\vec{b} \times \vec{b}\right) =$$

$$= -6\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \vec{a} \times \vec{b} = -5\left(\vec{a} \times \vec{b}\right); \left|-5\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| = 5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 60$$



Розв'яжіть задачі:

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв'язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Вектор $\bar{c}$ задано точками *M*(4; 2; -1) і *N*(0; 3; 1), де M – початок вектора $\bar{c}$, а N – його кінець). Знайдіть:

1) проекції вектора $\bar{c}$ на вісі координат;
2) його напрямні косинуси**.**

2. Обчислити $\left|\bar{a} + \bar{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\bar{a}\right| = 6, \left|\bar{b}\right| = 8,$ а кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює 60°.

3. Визначіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо вектор $\bar{a}+3\bar{b}$, перпендикулярний до вектора $7\bar{a}-5\bar{b}$, а вектор $\bar{a}-4\bar{b}$ перпендикулярний до вектора $7\bar{a}-2\bar{b}$.

4. Вектор $\bar{a}$ утворює з координатними осями *Oy і Oz* кути $\beta=120^\circ$ і $\gamma=45^\circ$. Знайдіть його координати за умови, що $|\bar{a}|=6$.

5. Відомо, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Визначіть, при якому значенні α вектори $\bar{a}+\alpha\bar{b}$, $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

6. Знайдіть проекцію вектора $\vec{a}(-2;6;0)$ на вісь вектора $\vec{a}+2\vec{b}$, якщо вектор $\bar{b}$ має координати $\vec{b}(5;0;4)$.

7. Трикутник задано вершинами *A*(1; -1; 2), *B*(5; -6; 2), *C*(0; -2; 2). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини *B* на сторону *AC*.

8. Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб вектори $3\bar{a}+\bar{b}$ і $\bar{a}-3\bar{b}$ були колінеарними?

9. Вектори $\vec{a}(-1;6;9)$ і $\vec{b}(5;0;2)$ зведені до спільного початку. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

10. Знайдіть площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Векторна алгебра» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у парі зі своїм одногрупником, обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №3-4 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. **Координати сили, що діє на точку: $F_x = 3H$, $F_y = 4H$. Координати переміщення точки $S_x = 7$ м, $S_y = 1$ м. Обчислити роботу сили $\vec{F}$, що діє на точку й кут між вектором сили $\vec{F}$ і вектором переміщення $\vec{S}$.**

2. **Довести, що при будь-якому розташуванні точок A, B, C, D має місце рівність $(\overline{BC} \cdot \overline{AD}) + (\overline{CA} \cdot \overline{BD}) + (\overline{AB} \cdot \overline{CD}) = 0$.**

3. **Силу $\vec{F} = (5, 4, -1)$ прикладено до точки A(-1;1;5). Визначіть величину і напрям моменту цієї сили відносно точки $O(0;-1;2)$.**

4. **В однорідному магнітному полі з індукцією $|\vec{B}| = 3,2$ Тл рухається протон зі швидкістю $|\vec{v}| = 3 \cdot 106$ м/с. Під яким кутом вектор швидкості протона напрямлений до індукції магнітного поля,**

якщо на нього діє сила Лоренца, величиною $\left|\overrightarrow{F_л}\right| = 8 \cdot 10^{-2}$ Н , а величина заряду дорівнює 1,9·10^{-7} *Кл.*

5. **Катер, що рухається зі швидкістю $|\overrightarrow{v_1}|$= 30 км/год, буксує спортсмена на водних лижах (Рис. 4.1). Трос, за який тримається спортсмен, складає з напрямком руху катера кут $\boldsymbol{\beta = 150°}$. Напрямок руху спортсмена утворює з тросом кут $\boldsymbol{\alpha = 60°}$. Чому дорівнює швидкість спортсмена $|\overrightarrow{v_2}|$ в цей момент часу?**

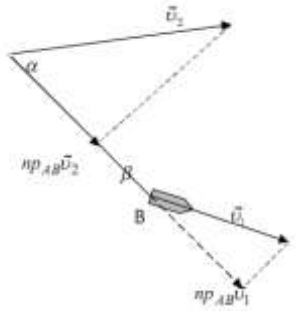


Рис. 4.1

6. **Доведіть, що для довільних точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ виконується співвідношення $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$.**

7. **Вантаж $\overline{P}$, вагою в 1 т підтримується двома стрижнями АВ і СВ, що прикріплені до стіни за допомогою шарнірів. Якими будуть вектори, що зображають зусилля у стрижнях. Якщо кути САВ=90°, АСВ=60° (Рис. 4.2).**

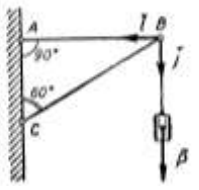


Рис. 4.2

6. **Вантаж $\overline{P}$ підвішений усередині тросу АВС, що прикріплений до гаків А і С. Визначіть вектори $\overline{T_1}$ і $\overline{T_2}$, які зображають натяжіння**

T_1 і T_2 **на ділянках AB і BC, якщо довжина тросу дорівнює** ***2a*****, а** $AC = a\sqrt{2}$ **(Рис. 4.3)**

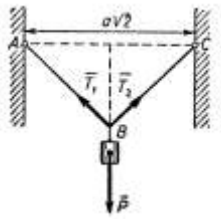


Рис. 4.3

7. Знайдіть положення центру тяжіння G плоскої стрижневої ферми ABCD, що складається з п'яти стрижнів (Рис. 4.4), якщо AB=AC=BC, кут BAD=90°.

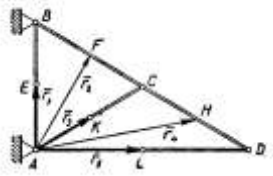


Рис. 4.4

8. Задано трикутник ABC. Вектор $\overline{CA}$ **повернули навколо точки C на кут 90°, а вектор** $\overline{CB}$ **– на кут 90° (Рис. 4.5). Довести, що медіана** CC_1 **трикутника** CA_1B_1 **перпендикулярна стороні AB.**

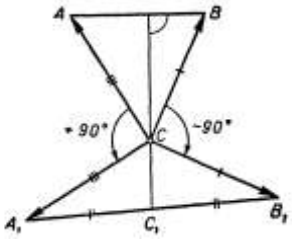


Рис. 4.5

9. Довести, що відстань між основами A_1 **і** B_1 **двох висот** AA_1 **і** BB_1 **трикутника ABC дорівнює** $AB \cdot |\cos C|$ **(Рис. 4.6)**

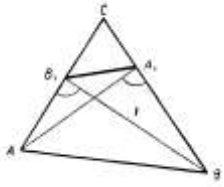


Рис. 4.6

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, які лінії визначають ребуси, та запишіть їх рівняння:




.....
.....




.....
.....

ТЕМА № 5 "Мішаний добуток векторів, подвійний векторний добуток"



Основні питання

Обчислення мішаного добутку трьох векторів, застосування його для знаходження об'єму паралелепіпеда і тетраедра, побудованих на цих векторах, зведених до спільного початку. Обчислення подвійного векторного добутку, застосування його властивостей.



Рекомендована література

[1] Гл. 3, § 1 – § 6 (с. 57–99).

[2] Тема 8, стор 104-110.

[4] І. з. № 2-3, стор. 9-11.

[7] Гл 2, §2 (стор 46-83).

[9] №№ 789,817, 837,841, 857,875.

[12]

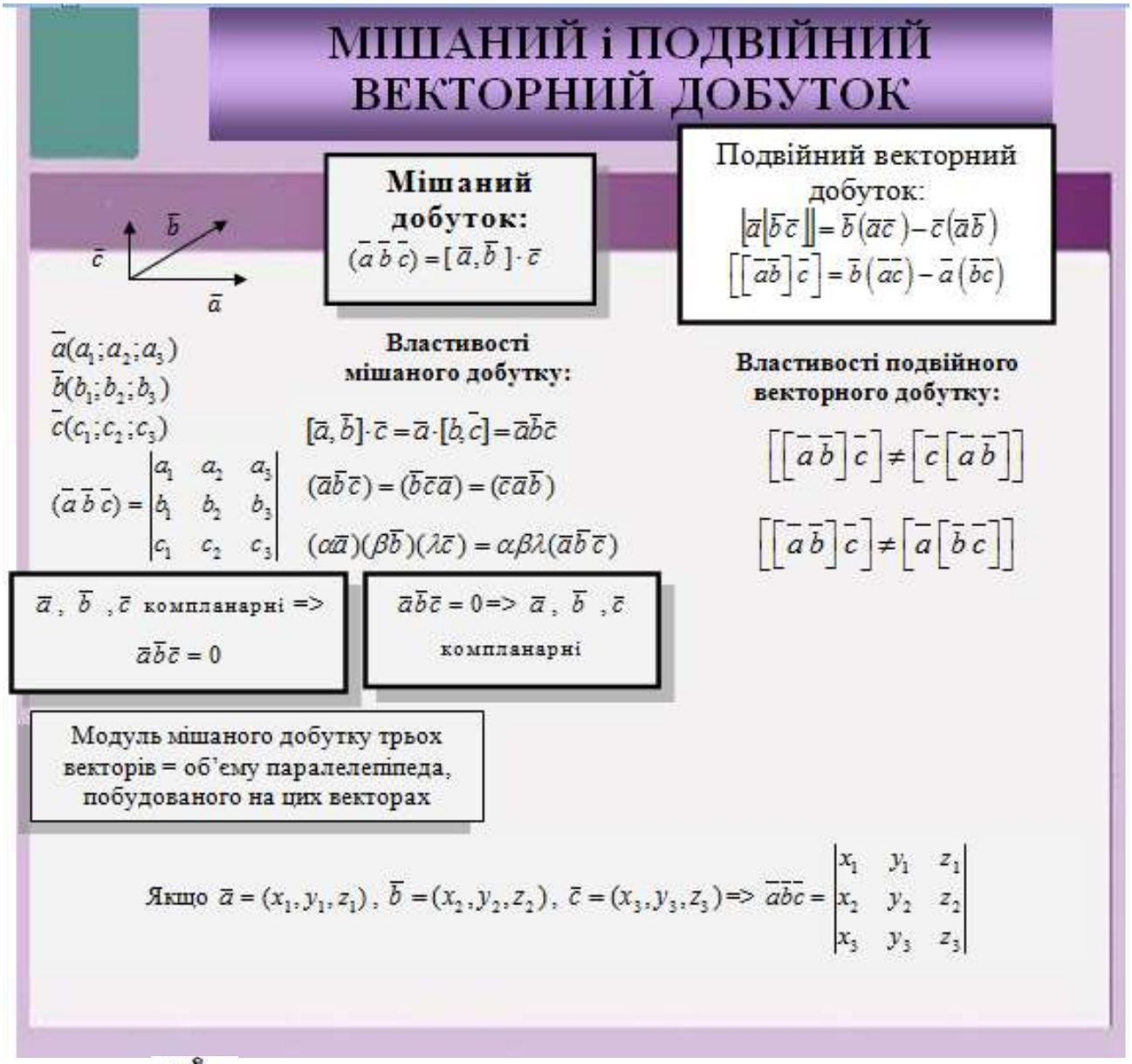
[22] Гл. 1, §1.5-§1.6 стор. 26-36.

[25] №№ 1033, 1058, 1061, 1092, 1099*, 1104.

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-3**

Опорний конспект



Приклади розв'язування деяких задач:

1. Задано піраміду з вершинами в точках *A*(1; 2; 3), *B*(-2; 4; 1), *C*(7; 6; 3), *D*(4; -3; -1). Знайдіть:

а) довжину ребер $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$**;**

б) площу грані *ABC*;

в) кут між ребрами $\overline{AD}$ **і** $\overline{AC}$**;**

г) об'єм піраміди;

д) довжину висоти, опущеної на грань *ABC*.

Розв'язування.

а) Знайдемо вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = -3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}; \quad \overline{AC} = 6\bar{i} + 4\bar{j}; \quad \overline{AD} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Знайдемо модулі цих векторів:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}; \quad \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{9+25+16} = 5\sqrt{2}.$$

б) Площа грані ABC буде дорівнювати:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}\overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}^2} = 14 \text{ кв.од.}$$

в) Кут між ребрами $\overline{AD}$ і $\overline{AC}$ знайдемо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{18-20}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}} = -\frac{1}{5\sqrt{26}}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right).$$

г) Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(48+60+24+48\right) = 30 \text{ куб.од.}$$

д) Довжину висоти h, опущеної на грань ABC, можна знайти, користуючись формулою: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$, звідки $h = \frac{3V}{S}$. Таким чином

$h = \frac{3\cdot 30}{14} = 6\frac{3}{7}$ лін.од.

2. Довести, що точки $A(0;1;2)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8)$, $D(1;6;11)$ лежать в одній площині.

Розв'язування.

Точки A, B, C, D, лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\overline{AB} = (-2;-1;-3)$, $\overline{AC} = (-1;4;6)$, $\overline{AD} = = (1;5;9)$.

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

то за властивістю мішаного добутку вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині.

3. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-1;0;2)$, $\vec{c}=(1;-2;5)$?

Розв'язування.

Оскільки мішаний добуток

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=24>0,$$

то за властивістю мішаного добутку задані вектори утворюють праву трійку.

4. Довести тотожність $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$

Розв'язування.

Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином: вісь *Ox* спрямуємо вздовж вектора $\bar{a}$, а вісь *Oy* помістимо в площині $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (вважаючи, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ зведені до спільного початку). У такому випадку матимемо:

$\vec{a}=(x_1;0;0)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;0)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$.

Знайдемо $\vec{d}$. Маємо

$$\left[\vec{b}\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=y_2z_3\vec{i}-x_2z_3\vec{j}+(x_2y_3-x_3y_2)\vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{d}=\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & 0 & 0\\ y_2z_3 & -x_2z_3 & x_2y_3-x_3y_2\end{vmatrix}=-\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right)\vec{j}-x_1x_2z_3\vec{k}=$$

$$=\left(0;-\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right);-x_1x_2z_3\right)=\left(0;\left(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3\right);-x_1x_2z_3\right).$$

Знайдемо $\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$. Маємо

$$\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle=x_1x_3;\ \vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle=\left(x_1x_2x_3;\ x_1x_3y_2;\ 0\right),$$

$$\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=x_1x_2;\ \vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=\left(x_1x_2x_3;\ x_1x_2y_3;\ x_1x_2z_3\right).$$

Звідси

$\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=\left(0;\left(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3\right);-x_1x_2z_3\right)$, що збігається з виразом для $\vec{d}$.



Це цікаво!

Поняття вектора з'явилося в середині XIX століття в працях декількох учених майже одночасно. Перше векторне числення було створене італійським математиком Д. Беллавітісом (1803-1880). У своїй праці «Метод еквіполенцій» (1854)він розглянув своєрідну аналітичну геометрію на площині, об'єктами дослідження якої були напрямлені відрізки. Термін «вектор» був запропонований у 1845 році англійським математиком У. Гамільтоном (1805-1865). Загальноприйняте зараз позначення вектора в математиці стрілкою або рискою над буквою запровадив на початку XIX століття швейцарський математик Ж. Р. Арган (1768-1822), а «жирними» літерами в друкованому тексті майже через 100 років – англійський учений Олівер Гевісайд (1850-1925).



Розв'яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння цією темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв'язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ задовольняють умові $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ Довести, що $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]=\left[\bar{c}\,\bar{a}\right]=\left[\bar{b}\,\bar{c}\right]$.

2. Три вершини тетраедра знаходяться в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;-1;\ 3)$. Знайдіть координати четвертої вершини D, що лежить на осі Oy, якщо об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од.

3. Визначіть, якою є трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (правою або лівою), якщо:

1) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{k},\bar{b}=\bar{j},\bar{c}=\bar{k}$;

2) $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j},\bar{b}=\bar{j},\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}$;

4. Задано тетраедр з вершинами A(3; 3; 3), B(6; 0; 6), C(6; 6; 6), D(9; 12; -9). Обчислити його висоту $H=\left|\overline{DE}\right|$.

5. Задано вектори $\overline{a_1}=(1;\ 0;\ 0)$, $\overline{a_2}=(1;\ 1;\ 0)$, $\overline{a_3}=(1;\ 1;\ 1)$. Чи утворюють ці вектори базис у просторі?

6. З'ясуйте, чи компланарні вектори $\vec{a}\left(0;5;-2\right)$, $\vec{b}\left(8;-4;1\right)$ і $\vec{c}\left(1;1;1\right)$.

7. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}\left(3;5;-2\right)$, $\vec{b}\left(2;4;-1\right)$ та $\vec{c}\left(1;1;1\right)$.

8. Знайдіть об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$ і $D(4;1;2)$.

9. Обчисліть висоту тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}\left(5;3;1\right)$, $\vec{b}\left(-2;4;1\right)$ і $\vec{c}\left(1;1;1\right)$, що зведені до початку координат, яка проведена з вершини $O\left(0;0;0\right)$.

10. Обчисліть $\left[\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right]$, де $\vec{a}\left(1;-3;2\right)$, $\vec{b}\left(6;1;-1\right)$ та $\vec{c}=(1,0,3)$.

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Векторна алгебра» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ*

*посібника «**Приклади розв'язування деяких задач**» або звернутися за **консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №4 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі **«Онлайн-консультація»**;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (**Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)**.*
- *відправити електронний лист викладачеві на адресу: **admin@agportal.org.ua**.*

1. **На тіло діють три сили:** $\overline{F_1}=(3;2;6)$, $\overline{F_2}=(1;-3;2)$, $\overline{F_3}=(-5;2;7)$. **Знайдіть величину і напрям рівнодіючої сили і роботу, що виконується при переміщенні точки, яка рухається прямолінійно з положення К(0;2; 4) в положення М(7; 8; 9).**
2. **На точку А(4; 2; -3) діють дві сили** $\overline{F_1}=(-1;3;-1)$ **і** $\overline{F_2}=(3;-1;10)$ **Знайдіть момент рівнодіючої цих сил відносно точки В(2; 4; 0), його величину і напрямні косинуси.**
3. **Будова найдавнішої споруди, яка збереглася до нашого часу, піраміди "Achete-Chufu" (Хеопса) відбувалася майже двадцять**

років. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо при введенні певної прямокутної декартової системи координат вершинам піраміди відповідають такі точки: A (0; 0; 0), B (0; 230,4; 0), C (230,4; 0; 0), D (230,4; 230,4; 0), E (115,2; 115,2; 138,8) (з точністю до 10^{-1} м).



Рис. 5.1

4. **Доведіть, що рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0, y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, має вигляд $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.**
5. **Доведіть, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.**
6. **Із однорідного куба К вирізали тетраедр Т (ABCD) таким чином, як показано на рисунку 5.2. Визначіть положення центру тяжіння тіла М, що утворилось.**

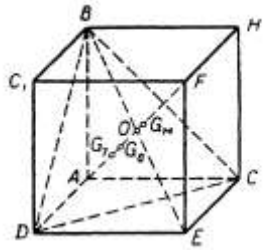


Рис. 5.2

7. **Вантаж Q вагою в 100 кг підтримується брусом АО, що шарнірно закріплений у точці А і нахилений під кутом 45° до горизонту, і двома горизонтальними ланцюгами ВО і СО однакової довжини (Рис. 5.3). Знайдіть вектори, які визначають зусилля $\overline{S}$ у брусі і натяжіння $\overline{T_1}$ і $\overline{T_2}$ ланцюгів, якщо кути СВО і ВСО рівні і дорівнюють 45°.**

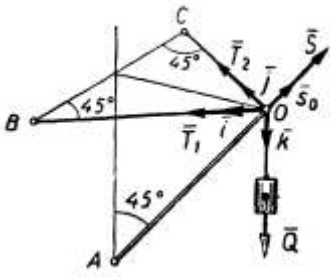


Рис 5.3

8. До вершини триніжка підвисили вантаж $\bar{P}$. Знайдіть вектори $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$ і $\overline{T_3}$, що визначають зусилля в ніжках триніжка, якщо всі ніжки, які мають однакову довжину, утворюють попарно рівні кути. До того ж мотузка, що підтримує вантаж, утворює з ніжками кути по 45° (Рис. 5.4).

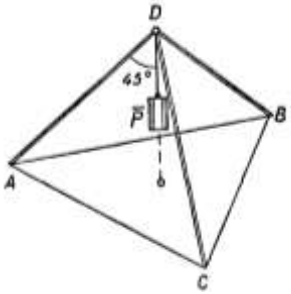


Рис. 5.4

Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі* ***«Курс АНГ/СРС»*** *та* ***«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Із двох труб іде дим. Підхоплений вітром, він тягнеться довгим шлейфом від кожної труби. Чи можуть два димових шлейфи перетинатися?

Розв'язування

1) Якщо два димових шлейфи перетинаються, то це означає, що в точці перетину вітер віє відразу у двох напрямках. Але це неможливо.

2) Розглянемо питання: чи обов'язково напрямок димового шлейфу збігається з напрямком вітру? Два димових шлейфи можуть перетинатися, якщо хоча б одне із джерел диму рухається.

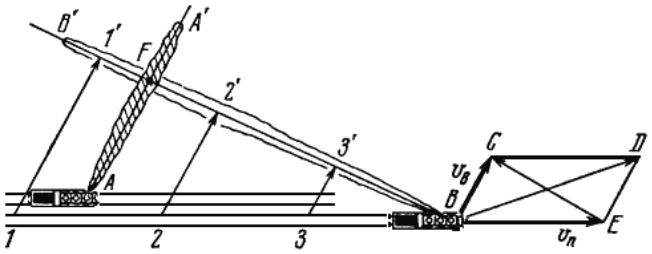


Рис. 5.5 Схема руху паротягів

На рис. 5.5 показано два паротяги, нерухомий А, від якого йде дим вздовж прямої АА' і В, який рухається вправо (дим від якого йде вздовж прямої ВВ'). Дим нерухомого паротяга йде за напрямком вітру. Дим паротяга, що рухається, робить те ж саме, але ж на відміну від першого, дим другого паротяга виходить із труби, що рухається. Окремі клуби диму ВВ', позначені точками 1', 2', 3', були випущені трубою В з різних положень – 1, 2, 3. Вітер, напрямок якого показано стрілками 11', 22', 33', до даного моменту відніс ці клуби на лінію ВВ'. Надалі він буде переносити лінію ВВ' паралельно початковому положенню. Неважко зрозуміти, що напрямок прямої ВВ' можна одержати як одну з діагоналей ЕС паралелограма BCDE, побудованого на векторах швидкості вітру $\bar{v}_в$ і швидкості паротяга $\bar{v}_п$. Зверніть увагу: ця діагональ збігається не з вектором суми BD, а з вектором різниці ЕС. Цікаво, що точка перетину димових шлейфів F із часом переміщується в напрямку АА' зі швидкістю вітру. При цьому частини диму в точці F, що належать різним димовим шлейфам є взаємно нерухомими, якщо не враховувати випадкові завихрення. Отже, у такому випадку два димових шлейфа будуть перетинатися.



Для майбутніх науковців

Пропонуємо Вам обрати один або два пункти з цього розділу за бажанням. Ще більше додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

1. **Доведіть знайомі шкільні теореми** (теорема Піфагора, теорема косинусів, теорема синусів тощо) **векторним методом.**
2. **Доведіть тотожність** $\boldsymbol{sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+sin\beta\cdot cos\alpha}$ **векторним методом.**

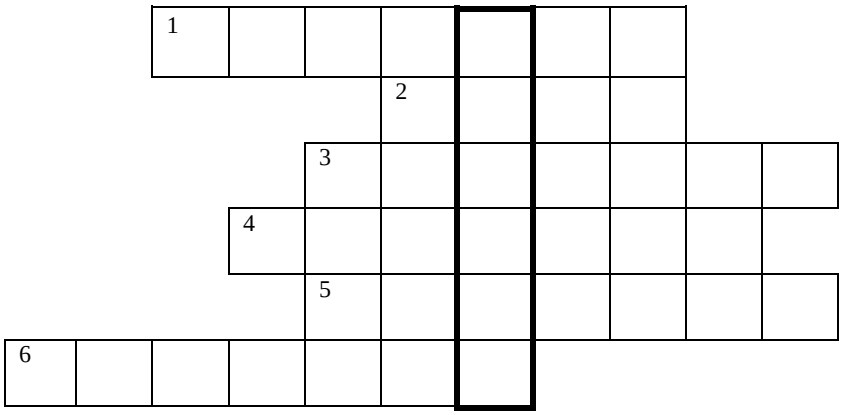
3. **Розв'яжіть задачу механіки:**

Човен переправляє людей з одного берегу річки на інший. Власна швидкість човна дорівнює 10 *км/год* , а швидкість течії – 5 *км/год*.

А) Знайдіть початкову швидкість човна, якщо корпус човна спрямований перпендикулярно до берегу річки;

Б) Яким чином варто спрямувати човен, щоб забезпечити поперечну переправу людей?

3. Розв'яжіть кросворд і дайте означення для отриманого словосполучення.



«… вектора»

Питання:

1. «Власник» спіралі.
2. Лінія, що може задаватися рівнянням $\rho = R$.
3. Вісь ОУ.
4. Результат множення.
5. Система координат, що має полюс.
6. Може бути й гіперболічна, й логарифмічна.

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, яку лінію визначає ребус, та запишіть її рівняння:

Г +  ’+  ’ + лінія

.....
.....

Розширюємо світогляд

Деякі фізичні векторні величини та закони фізики сформульовані за допомогою апарату векторної алгебри

Векторні величини та закони фізики	**Математичний запис**	**Визначення, формулювання**
Кінематичне рівняння руху матеріальної точки	$\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$	$\vec{r}$ — радіус-вектор матеріальної точки, який вказує на її положення в будь-який момент часу.
Переміщення	$\vec{s}$	*Переміщенням* називається вектор, проведений з початкового положення матеріальної точки, що рухається, в її кінцеве положення у даний момент часу.
Швидкість при прямолінійному русі	$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$	*Швидкість* — просторово-часова міра механічного руху, що відображає зміну положення точки в даний момент часу.
Прискорення при прямолінійному русі	$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	*Прискорення* — просторово-часова міра механічного руху, яка характеризує зміну швидкості точки у даний момент часу в даній системі відліку.
Лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається	$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$	$\vec{v}$ — лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі; $\vec{r}$ — радіус-вектор точки тіла відносно довільної точки на осі обертання.
Сила	$\vec{F}$	*Сила* — векторна величина, що характеризує дію на дане тіло інших тіл. Під час визначення руху тіла точку прикладання сили можна переносити вздовж її напряму.
Принцип суперпозиції сил	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$	Якщо на тіло діють кілька зовнішніх $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ сил, то їхня рівнодійна $\vec{F}$ дорівнює векторній сумі всіх сил.
Імпульс тіла	$\vec{p} = m\vec{v}$	*Імпульс тіла* — це векторна величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.
Закон збереження імпульсу системи	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{0}$, *або* $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i$ *де* $m_i\vec{v}_i$ *— імпульс* i*–го тіла до взаємодії,* $m_i\vec{u}_i$ *— імпульс* i*–го тіла після взаємодії тіл системи.*	Повний імпульс замкненої системи матеріальних точок зберігається. Система матеріальних точок називається замкненою, якщо рівнодійна зовнішніх сил, прикладених до системи, дорівнює нулеві.

Векторні величини та закони фізики	Математичний запис	Визначення, формулювання
Робота сили по переміщенню тіла	$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$	*Робота* сталої за величиною сили за прямолінійного переміщення тіла дорівнює скалярному добутку сили на переміщення тіла.
Потужність	$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$	*Потужність,* яку розвиває двигун, дорівнює скалярному добутку сили на швидкістьточки прикладання сили.
Умова рівноваги тіл	$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \vec{0}$	Щоб тіло залишалось у стані спокою (відносно інерціальної системи відліку), необхідно, щоб векторна сума всіх прикладених до тіла сил дорівнювала нулю.
Момент сили відносно точки	$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$	*Момент сили* відносно точки *0* — векторний добуток сили $\vec{F}$ на радіус-вектор $\vec{r}$ точки прикладання цієї сили. Момент сили — міра взаємодії системи, яка може обертатися, з навколишніми тілами.
Момент імпульсу відносно центра обертання	$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$, *або* $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{v}]$	*Моментом імпульсу* матеріальної точки маси m відносно точки *0* називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$ точки маси m на її імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Момент імпульсу — міра механічного руху матеріальної точки або тіла.
Напруженість електричного поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$; $\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{r}$	*Напруженість електричного поля* — силова характеристика електричного поля, яка чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, вміщений в дану точку поля. Вектор напруженості напрямлений вздовж прямої, яка проходить через заряд і дану точку поля, від заряду, якщо він додатний, і до заряду, якщо він від'ємний.
Принцип суперпозиції електричних полів	$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$	Результуюча напруженість $\vec{E}$ електричного поля системи зарядів дорівнює векторній сумі $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_n$ напруженостей окремих полів, створюваних у цій точці кожним із зарядів системи.
Потужність	$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$	*Потужність,* яку розвиває двигун, дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки прикладання сили.

ТЕМА № 6 "Рівняння прямої на площині"

Основні питання

Загальне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Встановлення перпендикулярності і паралельності прямих, заданих загальними рівняннями і рівняннями з кутовими коефіцієнтами. Обчислення кута між прямими. Рівняння прямої «у відрізках». Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння до нормального вигляду. Обчислення відстані і відхилення від точки до прямої.

Рекомендована література

1. **[7], Гл. 4, §4.1-4.4 (стор. 104-117)**.
2. **[6], Гл. 5, §1-2 (стор. 110-126).**
3. **[8], №№ 210, 214, 216, 220, 229, 231, 242, 262,289,290.**
4. **[24], №№ 183, 186, 196, 204, 214, 224, 230, 237, 239, 269, 272, 279.**
5. **[33].**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-4**

Опорний конспект

6 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$

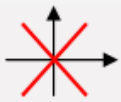
A, B, C – будь-які сталі такі, що: $A^2 + B^2 \neq 0$

$\bar{n} = \{A, B\}$ – координати нормального вектора

Рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і перпендикулярна вектору $\bar{n} = \{A, B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

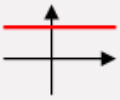
Неповні рівняння прямої:



C=0, $Ax + By = 0$



B=0, $Ax + C = 0$



A=0, $By + C = 0$

C=0,B=0 $Ax = 0$



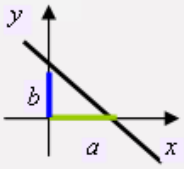
C=0,A=0 $By = 0$

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a = -C / A,$

$b = -C / B$



Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$$

$\bar{q} = \{l, m\}$ – напрямний вектор

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

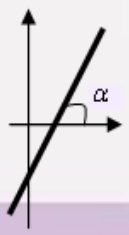
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Параметричне рівняння прямої:

$x = x_1 + lt$, $y = y_1 + mt$

t – параметр $-\infty < t < +\infty$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\,\alpha$:



$y = kx + b$

$y - y_1 = k(x - x_1)$

де $M_1(x_1, y_1)$ – це координати точки, через яку проходить пряма

Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Нормальний вектор прямої $3x + 4y - 5 = 0$ має координати:

   А) (3;5), Б) (3;4), В) (4;5), Г) (0,0).

2. Кутовий коефіцієнт прямої $5x - 6y + 7 = 0$ дорівнює:

   А) $\frac{7}{6}$, Б) $\frac{5}{7}$, В) $\frac{5}{6}$, Г) $-\frac{6}{5}$.

3. На осі ординат пряма $y = 5x - 2$ відтинає відрізок, довжиною…

   А) 2, Б) -2, В) $\frac{2}{5}$, Г) $\frac{1}{2}$.

4. Прямій $2x + 3y = 8$ належить точка:

   А) (1;-2), Б) (3;1), В) (1;2), Г) (-1,3).

5. Рівняння прямої, що проходить через точку (-1,2) паралельно вектору з координатами (5,-3) має вигляд:

   А) $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-3}$, Б) $5(x + 1) - 3(y - 2) = 0$,

   В) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3}$, Г) $5(x - 1) - 3(y + 2) = 0$.

6. Нормальним рівнянням прямої не є рівняння:

   А) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 5 = 0$, Б) $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1$,

   В) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 = 0$, Г) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 2 = 0$.

7. Відстань між точками перетину прямої $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$ з осями координат дорівнює:

   А) 5, Б) 25, В) 12, Г) 4.

8. Кут між прямими $5x - 2y + 7 = 0$ і $4x + 10y - 5 = 0$ дорівнює:

   А) 0°, Б) 90°, В) 45°, Г) 30°.

9. Рівняння прямої, що проходить через точку (2,-3) перпендикулярно до прямої $x - 4 + 7 = 0$ має вигляд:

А) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-4}$, Б) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-4}$,

В) $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{1}$, Г) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{4}$.

10. Відстань між двома прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ та $5x-12y-13=0$ дорівнює:

А) 1, Б) 3, В) 4, Г) $\sqrt{2}$.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Приклади розв'язування деяких задач:

1. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точки *$M_1(1;-2)$* і *$M_2(3;-2)$*.

Розв'язування.

Напрямним вектором шуканої прямої є вектор $\overline{M_1M_2}(2;0)$. Отже, параметричні рівняння цієї прямої мають вигляд:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2 \end{cases}$$

2. Складіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точки з координатами (1; 3) та (1; -1).

Розв'язування.

Напрямним вектором шуканої прямої є вектор $\bar{a}(0;-4)$.

Складемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4t-3 \end{cases}.$$

3. Запишіть рівняння прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}$ у параметричному вигляді.

Розв'язування.

Позначимо $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=t$, звідси знайдемо *x*, *y*:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t \end{cases}$$

4. Рух матеріальної точки *M(x; y; z)* задано параметричним рівнянням: *x = 2 + 2t, y = –2 – 2t.* Обчислити відстань, що пройшла точка *M* за проміжок часу від $t_1=1$ до $t_2=6$.

Розв'язування.

Визначимо початок і кінець прямолінійного шляху точки *M*. При *t* = 1 знаходимо:

$$x = 2 + 2\cdot 1 = 4, \quad y = -2 - 2\cdot 1 = -4,$$

тобто $M_1(4; -4; 2)$.

Аналогічно при *t* = 6 одержимо другу точку $M_2(14;-14; 7)$.

Відстань дорівнює довжині відрізка M_1M_2:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(14-4)^2+(-14+4)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Відповідь: $10\sqrt{2}$**.**

5. У декартовій системі координат задано точки: A(-1;2;1), B(2;3;-2), C(1;4;-3). Складіть рівняння ребер тетраедра OABC.

Розв'язування.

Рівняння прямої, яка містить ребро *OA*, має вигляд: $\frac{x-x_O}{x_A-x_O}=\frac{y-y_O}{y_A-y_O}=\frac{z-z_O}{z_A-z_O}$, $\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{1-0}$,

остаточно: $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$.

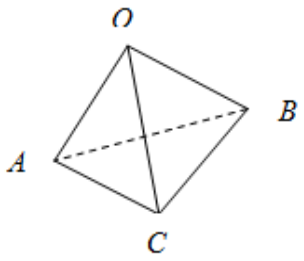


Рис. 6.1

Аналогічно:

OB: $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}$, OC: $\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}$.

Складемо рівняння AB, AC, BC.

AB: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-1}{-2-1}$, або остаточно $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

AC: $\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z-1}{-3-1}$, або остаточно $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-4}$.

BC: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{4-3}=\frac{z+2}{-3+2}$, або остаточно $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-1}$.



Розв'яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для набуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння цією темою дисципліни. Виконання більше 60% завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв'язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, варто повторити теоретичний матеріал ще раз.

1. Задано дві точки P(2;3) і Q(-1;0). Складіть рівняння прямої, що проходить через точку Q перпендикулярно відрізку PQ.



Це цікаво!

У будівництві для перевірки перпендикулярності стін і стелі використовуються так звані прямовисні схили, а слово «перпендикуляр» походить від грецького слова «perpendicularis» - «прямовисний».

2. Задано дві суміжні вершини A(-3; -1) і B(2; 2) паралелограму ABCD і точка Q(3;0) перетину його діагоналей. Складіть рівняння сторін паралелограма.
3. Обчисліть площу трикутника, сторони якого лежать на координатних осях і прямій $3x+4y-12=0$.
4. Визначіть, при якому значенні a три прямі $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$ і $ax+y-13=0$ перетинаються в одній точці.

5. Встановіть, чи знаходяться точка М (1;-3) і початок координат по один бік від прямих:

1) $2x - y + 5 = 0$,
2) $x - 3y - 5 = 0$,
3) $10x + 24y + 15 = 0$,
4) $x + 4y + 2 = 0$.

6. Знайдіть кут між прямими:

1) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y = 0$,
2) $3x - 2y + 5 = 0$ і $2x + 3y - 3 = 0$,
3) $x - 2y - 4 = 0$ і $2x - 4y + 5 = 0$.

7. Складіть рівняння висоти CF трикутника ABC, заданого вершинами $A(2;-1)$, $B(-7;3)$, $C(-1;-5)$. Обчисліть довжину висоти CF трикутника ABC і відхилення точки C від прямої AB.

8. Визначіть, при яких значеннях m і n прямі $mx + 8y + n = 0$ і $2x + my - 1 = 0$:

1) перпендикулярні,
2) паралельні,
3) співпадають.

9. Знайдіть пряму, що належить одночасно двом жмуткам прямих $(x + y + 5) + q(x - 1) = 0$ $(2x - 3y) + p(y + 1) = 0$.

10. Складіть рівняння прямої, що належить пучку прямих AB та OC (де $A(5;-1)$, $B(1;6)$, $C(-3;-3)$, $O(0;0)$) і яка відсікає на осі ординат відрізок $b = -1$.

Питання для обмірковування

1. Який геометричний зміст мають коефіцієнти рівняння прямої, заданої у загальному вигляді?

2. Як розміщена пряма відносно системи координат, якщо у рівнянні відсутній вільний член? Один із коефіцієнтів при змінній? Один із коефіцієнтів при змінній і вільний член?
3. Чи завжди рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$ є рівнянням прямої лінії?
4. Чи співпадає кут між прямими з кутом між напрямними векторами цих прямих?
5. Яким чином можуть відрізнятися рівняння паралельних прямих?

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Пряма на площині» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №5 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. **Із точки М (-2;3) під кутом β ($tg\beta = 3$) до осі Ох падає промінь світла. Дійшовши до осі Ох, промінь світла відбивається від неї. Складіть рівняння прямих, на яких лежать проміні.**

2. **Потяг рухається прямолінійно за законом (у м/с):**

$$\begin{cases} x = 8 - 6t; \\ y = -10 + 8t. \end{cases}$$

Яку швидкість він має? Чи вчасно він прибуде до станції, що знаходиться на відстані 250 м. від нього, якщо згідно з графіком йому залишилося лише півхвилини?

3. **Довести, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_1; y_1)$ паралельно до прямої $Ax + By + C = 0$, може бути записано у вигляді $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.**

4. **Довести, що формула для визначення кута φ між прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ має вигляд:**

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

5. **Необхідно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпами: одним у центрі ділянки і по одному на двох протилежних межах. На плані положення стовпів визначено координатами: центрального М(1;6) і двох інших А(5;9) і В(3;0). Складіть рівняння прямих, що обмежують ділянку.**

6. **Виведіть полярне рівняння прямої, знаючи відстань від полюса ρ і полярний кут φ нормалі.**

7. **Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох прямих:**

$3x - y + 7 = 0$ **і** $3x - y - 3 = 0$,

$x - 2y + 3 = 0$ **і** $x - 2y + 7 = 0$,

$$5x - 2y - 6 = 0 \text{ і } 10x - 4y + 3 = 0.$$

8. **Попит населення певної країни на товар є сталим і становить 500 одиниць. Постачальники погоджуються привезти 1200 одиниць товару, якщо ціна становитиме 12 гривень за одиницю. Та якщо ціна знизиться до 9 гривень за одиницю, постачальники привезуть на продаж лише 150 одиниць товару.**

   Визначіть:

   1) **Скільки товару мають привезти та продати постачальники, щоб ринок цього товару для даної країни перебував у стані рівноваги;**
   2) **Функцію пропозиції товару, за умов її лінійності;**
   3) **Чому дорівнює рівноважна ціна одиниці товару? Знайти відповідь аналітично й графічно;**
   4) **Які економічні наслідки матиме примусове встановлення ціни на товар на рівні 11 гривень за одиницю? Зробіть відповідні розрахунки.**

9. **Зі станції щоденно можна відправляти пасажирські та швидкі потяги. Запишіть у математичній формі умови, які не дозволяють перевищити існуючий парк вагонів при формуванні пасажирських і швидких потягів, які щоденно відправляються зі станції. Побудуйте на площині *Oxy* область припустимих варіантів формування потягів.**

   Дані наведені в таблиці.

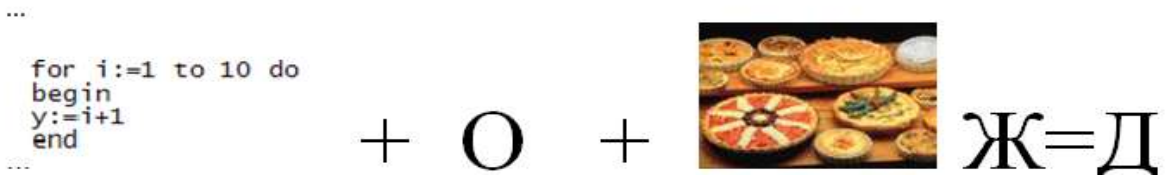
Таблиця 6.1

Тип потягу	Кількість вагонів в потязі		
	плацкартних	купейних	м’яких
Пасажирський	5	6	3
Швидкий	8	4	1
Резерв вагонів	80	72	21

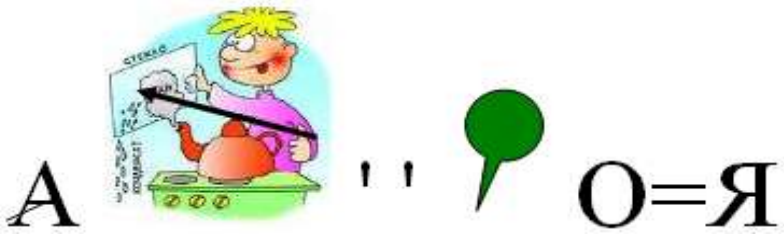
Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, яку лінію визначає ребус, та запишіть її рівняння:



.....



.....



.....

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 "Розв'язування задач економічного змісту"

Цілі роботи:

- обчислювати загальну суму витрат та обсяги виробництва, знаючи математичну залежність між певними економічними показниками;
- знаходити економічно найвигідніший варіант побудови дороги, що з'єднує конкретні пункти.

Устаткування: теоретична підказка, обчислювальний прилад, комп'ютер, ППЗ GRAN.



Теоретична підказка:

Якщо через k позначити тариф перевезення вантажу на одиницю відстані, b – витрати при перевезенні вантажу, що не залежать від відстані x, то загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за допомогою формули $y=kx+b$;

Якщо позначити через y витрати підприємства впродовж місяця при випуску x одиниць однорідної продукції, то y може бути визначено за формулою $y=kx+b$, де величина kx буде визначати змінні витрати, що залежать від обсягу випуску (де k – витрати підприємства впродовж місяця на одиницю продукції). Величина b визначає постійні витрати підприємства, які не залежать від обсягу продукції, що випускається (витрати за рахунок амортизації обладнання, заробітної платні охорони, службовців і допоміжних робітників, опалення приміщення тощо).

Інструкція для студента

Задача 1. Витрати y (грн) на виготовлення партії деталей визначаються за формулою $y = ax + b$, де x – обсяг партії. Для першого варіанту технологічного процесу $y = 1{,}45x + 20$.

Для другого варіанту відомо, що $y=157{,}5$ (грн) при $x=100$ (дет.) та $y=452{,}5$ (грн) при $x=300$ (дет.). Провести оцінку двох варіантів технологічного процесу і знайти собівартість продукції для обох варіантів при $x=200$ (дет.).

Розв'язування

Для другого варіанту знайдемо функцію витрат. Складемо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $(100;157{,}5)$ і $(300;452{,}5)$:

$$\frac{x-100}{300-100}=\frac{y-157{,}5}{452{,}5-157{,}5} \Rightarrow \frac{x-100}{200}=\frac{y-157{,}5}{295} \Rightarrow y=1{,}475x+10.$$

Знайдемо точку перетину двох прямих $y=1{,}45x+20$ та $y=1{,}475x+10$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=1{,}45x+20, & (1)\\ y=1{,}475x+10, & (2)\end{cases}$$

Маємо точку $(400;600)$.

Побудуємо графіки функцій (1) і (2) (рис.8 1).

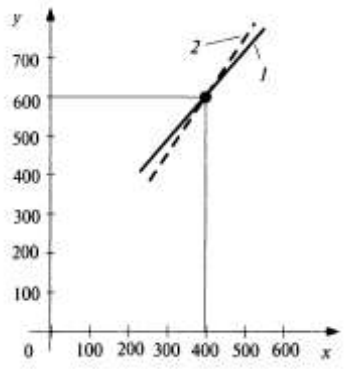


Рис. 1

З графіка видно, що при обсязі партії $x<400$ вигіднішим є другий варіант технологічного процесу, а при $x>400$ – перший варіант. Собівартість продукції при $x=200$ за першим варіантом дорівнює $y=1{,}45\cdot 200+20=310$ (грн), а за другим варіантом $y=1{,}475\cdot 200+10=305$ (грн).

Задача 2. Відомо, що зміна обсягу виробництва y зі зміною продуктивності праці x відбувається за лінійною залежністю. Складіть

рівняння цієї залежності, якщо при $x=3,\ y=185$, а при $x=5,\ y=305$. Знайти обсяг виробництва при $x=20$.

Розв'язування

Знайдемо функцію, що виражає обсяг виробництва. Для цього складемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $(3;185)$ і $(5;305)$:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-185}{305-185} \Rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y-185}{120} \Rightarrow y=60x+5.$$

Знайдемо обсяг виробництва при $x=20$. Підставимо це значення у рівняння $y=60x+5$. Таким чином, обсяг виробництва дорівнює $y=60\cdot 20+5=1205$.

Задача 3. Через пункти $A(3;2)$ і $B(11;6)$ проходить прямолінійна ділянка шосе (розміри ділянок у десятках кілометрів). У пункті $C(7;9)$ відкрито родовище, від якого потрібно провести найкоротшу дорогу до шосе. Обчисліть координати точки D, у якій дорога повинна з'єднатися з шосе. Яка довжина цієї дороги? Складіть рівняння шосе та рівняння дороги.

Розв'язування

Найкоротша відстань від родовища до дороги – це перпендикуляр, який провели з точки $C(7;9)$ до прямої AB (рис. 2). Складемо рівняння прямої AB та перпендикуляра CD.

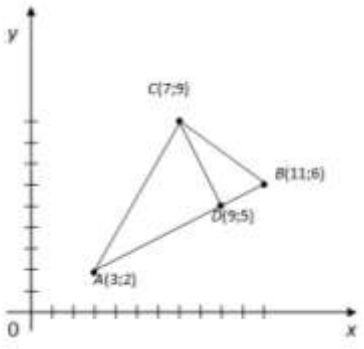


Рис. 2

Вектор $\overline{AB} = \overline{(11-3;6-2)} = \overline{(8;4)}$ є напрямним вектором прямої AB (шосе) та нормаллю прямої CD (дорога). Рівняння шосе

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{4} \text{ або } y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Рівняння дороги:

$$8(x-7) + 4(y-9) = 0 \text{ або } y = -2x + 23.$$

Обчислимо координати точки D, в якій шосе поєднується з дорогою. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \\ y = -2x + 23. \end{cases}$$

Отримаємо точку $D(9;5)$.

Довжина $CD = \sqrt{(9-7)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$. Оскільки розміри задано у десятках кілометрів, то довжина CD складає приблизно 45 кілометрів.

Задача 4. За умови задачі 3 будемо вважати, що дорога від пункту C до шосе проведена через пункт A. Який кут вона утворює з шосе? На скільки кілометрів ця дорога є довшою за найкоротшу? Складіть рівняння прямої, що задає дорогу AC.

Розв'язування

Вектор $\overline{AC} = \overline{(7-3;9-2)} = \overline{(4;7)}$ є напрямним вектором прямої AC. Рівняння прямої AC:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{7} \text{ або } 7x - 4y - 13 = 0.$$

Пряма AC утворює з прямою AB кут, що дорівнює куту між векторами $\overline{AB} = \overline{(8;4)}$ і $\overline{AC} = \overline{(4;7)}$, отже

$$\cos\alpha = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 7}{\sqrt{8^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 7^2}} = 0{,}832.$$

Звідки $\alpha = 33^\circ 41'$.

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}1$. Довжина дороги AC приблизно дорівнює 81 км, що на 36 км довше найкоротшої дороги CD.

Задачі лабораторної роботи

1. Ви – директор фірми транспортних перевезень. Відомо, що витрати на транспортні перевезення y двома різними видами транспорту задаються функціями $y = 150 + 50x$ (для першого виду транспорту) та $y = 250 + 25x$ (для другого виду транспорту), де x – відстань у сотнях кілометрів, y – транспортні витрати. Для перевезення на які відстані економніше користуватися другим видом транспорту?

Зробіть висновки

2. Ви – директор кондитерної фабрики. Відомо, що витрати на виробництво *a* одиниць шоколадних цукерок складають *c* грошових одиниць, витрати на виробництво *b* одиниць цієї ж продукції складають *d* грошових одиниць. Обчисліть витрати на виробництво *p* одиниць шоколадних цукерок, за умови, що функція витрат має вигляд:

R (x) = ax + b. Проілюструйте на графіку, побудованого за допомогою ППЗ Gran. Оберіть варіант, що відповідає залишку ділення на 4 вашого номера у списку групи.

1. *a* = 100, b = 80, c = 1500, d = 1280, p = 110.
2. *a* = 260, b = 200, c = 5250, d = 4050, p = 210.
3. *a* = 190, b = 210, c = 1350, d = 1450, p = 240.
4. *a* = 80, b = 100, c = 1160, d = 1350, p = 105.

Зробіть висновки

3. Ви – менеджер фірми-перевізника. Витрати при перевезенні 1т. сировини двома засобами транспорту (автомобілем та потягом) виражаються функціями

$R_1(x) = a_1x + b_1$ і $R_2(x) = a_2x + b_2$

де x – відстань в сотнях кілометрів. Починаючи з якої відстані економічніше перевезення потягом? Розв'язання проілюструйте графічно. Побудуйте графік за допомогою ППЗ Gran.

1. $R_1(x) = 20 \cdot x + 40$; $R_2(x) = 10 \cdot x + 100$.
2. $R_1(x) = 25 \cdot x + 140$; $R_2(x) = 100 \cdot x + 290$.
3. $R_1(x) = 45 \cdot x + 180$; $R_2(x) = 10 \cdot x + 390$.
4. $R_1(x) = 40 \cdot x + 160$; $R_2(x) = 12 \cdot x + 300$.

Зробіть висновки

4. Через пункти $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ проходить прямолінійна ділянка шосе. Розміри ділянок в десятках кілометрів. У пункті *C* відкрито родовище, від якого потрібно провести найкоротшу дорогу до шосе. Обчисліть координати точки *D*, у якій дорога повинна з'єднатися з шосе. Яка довжина цієї дороги? Складіть рівняння шосе і рівняння дороги. Проілюструйте відповідь на графіку, побудованому за допомогою ППЗ Gran.

1. A(3; 2), B(11; 6), C(7; 9).
2. A(2; 3), B(10; 7), C(4; 9).
3. A(21; 25), B(69; 49), C(33; 73).
4. A(20; 40), B(60; 20), C(50; 50).

Зробіть висновки

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 «Використання програмного засобу Gran 2D для розв'язання задач з теми «Пряма на площині»»

Головна мета: здобуття студентами навичок побудови розв'язання геометричних задач за допомогою педагогічного програмного засобу Gran 2D.

Устаткування: комп'ютер, ППЗ Gran 2 D, MS Power Point.

Хід роботи (інструкція для студента)

У роботі вправи позначено таким чином:

° – *вправа обов'язкова, виконується цілком за допомогою ППЗ Gran 2d,*

• – *вправа на вибір, необхідно обирати **2** із 3 вправ і, розв'язавши їх у зошитах, порівняти свої результати з результатами, отриманими за допомогою ППЗ Gran 2d,*

∗ – *додаткова творча вправа, одна з трьох на Ваш вибір.*

Задачі лабораторної роботи

1° . Задано точки A(1,1), B(2,6), C(6,2). За допомогою ППЗ Gran 2d :

1) побудуйте трикутник з вершинами в цих точках, запишіть рівняння прямих, на яких лежать сторони трикутника;
2) обчисліть його кути і площу;
3) побудуйте рівнобедрений трикутник з основою AB.
4) побудуйте висоти AM, BD, CE трикутника, запишіть рівняння прямих, на яких лежать ці висоти;
5) через вершини трикутника побудуйте прямі, паралельні його протилежним сторонам і запишіть їх рівняння;
6) знайдіть кути і площу отриманого трикутника.

2°. Задано дві суміжні вершини квадрату A(2,0) і B(-1,4). За допомогою ППЗ Gran 2d :

1) побудуйте цей квадрат, запишіть рівняння прямих, що задають сторони квадрату;

2) знайдіть рівняння прямих, на яких лежать діагоналі квадрату;

3) обчисліть площу отриманого квадрату.

3• . Задано вершини трикутника А (-1;1), В (-2,1) і С (3,5). Запишіть рівняння перпендикуляра, опущеного із вершини А на медіану ВЕ. Зробіть самоперевірку за допомогою ППЗ Gran 2d.

4• . Задано вершини трикутника А (2;-2), В (3;-5) і С (5;7). Запишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини С на бісектрису АЕ. Зробіть самоперевірку за допомогою ППЗ Gran 2d.

5•. Складіть рівняння сторін і медіан трикутника з такими вершинами А(3;2), В(5,-2) і С (1,0). Зробіть самоперевірку за допомогою ППЗ Gran 2d.

Зробіть презентацію в MS Power Point на тему: «Пряма на площині», використовуючи рекомендовану літературу і можливості Internet.

6∗. Складіть навчальний тренувальний тест на тему: «Пряма на площині» в MS Power Point.

7∗. Запропонуйте набір задач (5-7 штук) прикладного змісту з теми «Пряма лінія на площині».

Зробіть висновки

ТЕМА №7 "Пряма і площина у просторі"



Основні питання

Складання загального рівняння площини і рівняння площини, що проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор. Зведення загального рівняння площини до рівняння площини «у відрізках» і його застосування. Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду, обчислення відхилення і відстані від точки до площини. Пучок площин.

Складання рівняння прямої в просторі як лінії перетину двох площин. Рівняння прямої, що проходить через дві точки, канонічне рівняння. Умова паралельності і перпендикулярності прямих. Обчислення кутів між прямими. Необхідна і достатня умова перетину двох прямих у просторі. Взаємне розташування прямої і площини в просторі, знаходження точки перетину прямої і площини, кута між прямою і площиною.



Рекомендована література

1. **[7], Гл. 5, § 5.1-5.5 (стор. 119-153).**
2. **[9], І.з № 5 стор. 16-22.**
3. **[6], Гл. 5, § 3, 4 (стор. 126-139).**
4. **[8], №№ 921, 923, 932, 940, 944, 946, 956, 961, 966, 988, 998, 1007, 1010, 1011, 1019, 1038.**
5. **[24], №№ 753, 756, 757, 764, 782, 790, 807, 813, 817, 848, 854.**
6. **[36]**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-4**

Опорний конспект

7

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$

A, B, C і D – будь-які сталі або A≠0 або B ≠0 або D≠0

Рівняння, що визначає площину π, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Якщо т. М лежить на площині π => вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ і $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ортогональні

Якщо т. М не лежить на площині π => вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ і $\overline{M_0M}$ не є ортогональним

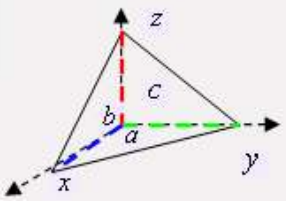
РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Неповні рівняння площини:

D=0,	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок коорд.
A=0,	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
B=0,	$Ax + Cz + D = 0$	паралельна осі Oy
C=0,	$Ax + By + D = 0$	паралельна осі Oz
A=0, B=0	$Cz + D = 0$	паралельна площині Oxy
A=0, C=0	$By + D = 0$	паралельна площині Oxz
B=0, C=0	$Ax + D = 0$	паралельна площині Oyz
A=0, B=0, D=0	$Cz = 0$	задає площину Oxy
A=0, C=0, D=0	$By = 0$	задає площину Oxz

Рівняння площини «у відрізках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



$a = -D/A$ $b = -D/B$ $c = -D/C$

Нормоване рівняння площини:

$$x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Рівняння площини, що проходить через три точки, які не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

точки $M(x,y,z)$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$

Кут між двома площинами:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Умова паралельності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Умова перпендикулярності:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

Точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і напрямлюючий вектор $\bar{q} = \{l,m,n\}$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$

$M_2(x_2,y_2,z_2)$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Параметричне рівняння прямої у просторі:

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$$

t – параметр $\quad -\infty < t < +\infty$

Кут між двома прямими:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \qquad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Умова паралельності: $l_1 / l_2 = m_1 / m_2 = n_1 / n_2$

Умова перпендикулярності: $l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Умова того, що дві прямі належать одній площині:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Кут між прямою і площиною:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Умова паралельності прямої L та площини π:

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Умова перпендикулярності L та π:

$$A / l = B / m = C / n$$

Умова того, що пряма $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

належить площині $Ax + By + Cz + D = 0$**:**

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad Al + Bm + Cn = 0$$

Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Напрямний вектор прямої $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ має координати:

   А) (2;-1;-5), Б) (-2;1;5), В) (0;1;0), Г) (0;-1;0).

2. На осі Oz площина $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}-\frac{z}{5}=1$ відтинає відрізок, довжиною:

   А) 3, Б) -5, В) 5, Г)4.

3. Рівняння прямої, що проходить через точку (2,-3, -1) перпендикулярно до площини $2x-y+3z-7=0$ має вигляд:

   А) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{3}$, Б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{3}$,

   В) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-3}$, Г) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

4. Рівняння площини, паралельної до векторів $\bar{n}=(-1;0;1)$ і $\bar{m}=(0;2;-1)$, має вигляд:

   А) $x-3y+z-2=0$ Б) $x+2y+z-4=0$,

   В) $x-3y-z+1=0$ Г) інша відповідь.

5. Задано точки A(1;2;3), B(3;2;1), C(-1;2;-3), D (-5;2;-7). Прямі AB і CD:

   А) перетинаються, Б) перпендикулярні,

   В) паралельні, Г) мимобіжні.

6. Площини $2x-y+3z-2=0$ і $x+y-z+2=0$…

   А) перетинаються, Б) співпадають,

   В) паралельні, Г) перпендикулярні.

7. Укажіть всі значення p, при яких прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ паралельні.

   А) -4, Б) -2, В) 2, Г)4.

8. Укажіть всі значення a, при яких пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ паралельна площині $3a^2x+ay+4z-4=0$.

   А) 0,-1; Б) -1,1; В) 1; Г) -1.

9. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ і $x+3y-z+3=0$ дорівнює:

   А) 0°, Б) 90°, В) 60°, Г) $arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$.

10. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ і площиною $x+3y-7z+2=0$ дорівнює:

    А) 0, Б) $\sqrt{59}$, В) $\sqrt{17}$, Г) $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Приклади розв'язування деяких задач:

1. **Знайдіть рівняння площини, знаючи, що точка А(1;-1;3) є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат до цієї площини.**

   Розв'язування.

За умовою вектор $\overline{OA}=(1;-1;3)$ є нормальним вектором заданої площини. Площина проходить через точку А, а тому її рівняння має вигляд: $(x-1)-(y+1)+3(z-3)=0$, або $x-y+3z-11=0$.

Відповідь: $x-y+3z-11=0$.

2. **Складіть рівняння площини, що проходить через вісь Oz і утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ кут 60°.**

   Розв'язування.

Площина, що проходить через вісь Oz задається рівнянням $ax + by = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$. Нехай для визначеності $b \neq 0$, тоді $\frac{a}{b}x + y = 0$. За формулою косинуса кута між площинами маємо: $\frac{2\frac{a}{b}+1}{\sqrt{10}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}} = cos60° = \frac{1}{2}$. Розв'язуючи квадратне рівняння $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8\frac{a}{b} - 3 = 0$, дістаємо рівняння двох площин:

$$-3x + y = 0 \text{ і } \frac{1}{3}x + y = 0.$$

Відповідь: $-3x + y = 0$ і $\frac{1}{3}x + y = 0$.



Розв'яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння цією темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв'язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Задано точку A(1;2;3).

1. Складіть рівняння площин, що проходять через цю точку і паралельні до координатних площин;
2. Складіть рівняння прямих, що проходять через цю точку і паралельні до координатних осей;
3. Складіть рівняння прямої, що проходять через цю точку і початок координат;
4. Складіть рівняння перпендикулярів, опущених з цієї точки на координатні площини.

2. Запишіть загальне рівняння площини за її параметричними рівняннями: $x = 2 + 3u - 4v,\ y = 4 - v, z = 2 + 3u$.

3. Встановіть, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$

3) $x-3z+2=0$, $2x-6y+4=0$.

4. Привести кожне з наступних рівнянь площин до нормального вигляду:

1) $2x-2y+z-18=0$;

2) $4x-6y-12z-11=0$;

3) $5y+12z+26=0$;

4) $y+2=0$;

5) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$.

5. Довести, що пряма $\begin{cases}2x-3y+5z-6=0,\\ x+5y-7z+10=0.\end{cases}$ перетинає вісь Oy.

6. Знайдіть точку перетину прямої у просторі, що проходить через дві точки $A(2;-1;3)$ та $B(-2;1;1)$ і площини $x-2y+2z-4=0$. При якому значенні параметра a пряма AB і площина $ax+3y-5z+12=0$ паралельні? При яких значеннях параметрів a і b пряма AB і площина $ax+by-3z+4=0$ перпендикулярні?

7. Задано рівняння руху точки $M(x;y;z)$: $x(t)=3-4t, y(t)=5+3t, z(t)=2-12t$. Знайдіть модуль її швидкості $|\bar{v}|$ і обчисліть відстань d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=6$.

8. Довести, що пряма $x=3t-2, y=-4t+1, z=4t-5,$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0.$

9. Задано площини і прямі своїми рівняннями, а саме:

$\alpha: 2x-y+z+3=0,\quad \beta: 3x-2y-z-1=0,\quad \gamma: -4x+2y-2z+1=0,$

$l_1: \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1},\quad l_2: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$

1) При яких значеннях параметра k прямі l_1 і $\frac{x-k}{2}=\frac{y-2}{k}=\frac{z-1}{2}$ є мимобіжними?
2) Знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.
3) Знайдіть точку, симетричну точці (1;-1;0) відносно площини α.

10. Дано точки $A(1;-1;1)$, $B(1;3;1)$, $C(4;3;1)$, $D(4;-1;1)$, $F(2;0;1)$.

1) Складіть рівняння площин, яка проходить через точку A на відстані 2 від початку координат.
2) Складіть рівняння площини, яка проходить через точку A і утворює з осями координат кути $45^o, 30^o, 150^o$.
3) Складіть рівняння площини, відносно якої симетричні точки A і C.



Це цікаво!

У географії паралель – лінія перерізу поверхні земної кулі площиною, паралельною площині екватору. На глобусі паралель зображується у вигляді кола, усі точки якого рівновіддалені від екватору.
З іншого боку, паралель – це термін, що позначає аналогічність у науках, літературознавстві тощо.



Питання для обмірковування

1. Чи правильно, що рівняння $ax+by+cz+d=0$ є рівнянням деякої площини у просторі?
2. Як упевнитись у тому, що задана точка $M(x_1,y_1,z_1)$ належить деякій площині?
3. Як розміщені площини, якщо векторний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулеві?

4. Якій умові повинні задовольняти координати чотирьох точок, щоб вони належали одній площині?
5. Як визначити кут між двома просторовими прямими?
6. Який геометричний зміст сталих a, b, c і m, n, p, що входять до канонічного рівняння прямої у просторі $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$?

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Лінійні образи у просторі» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у парі зі своїм одногрупником, обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №6-7 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»;***
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. **Запишіть рівняння ребер тетраедра, вершини якого задано координатами A(0;0;2), B(4,0,5), C(5,3,0), D(-1,4,-2). Знайдіть його об'єм і площу повної поверхні.**

2. **Матеріальна точка рухається паралельно осі *y* від початкового положення M_0 (6,-1,2). Знайдіть точку її зустрічі з площиною, заданою рівнянням $x - 2y - 3z + 7 = 0$.**

3. **Складіть рівняння руху матеріальної точки M(x,y,z), що, рухаючись прямолінійно і рівномірно, пройшла відстань від точки M_1 (-7,12,5) до точки M_2 (9,-4,-3) за проміжок часу від t_1 =0 до t_2 =4.**

4. **Дві матеріальні точки M(x,y,z) і $N(x_1,y_1,z_1)$ рухаються прямолінійно і рівномірно: перша з початкового положення M_0 (-5,4,-5) зі швидкістю $v_M = 14$ у напрямку вектора $\bar{s} = (3; -6; 2)$, друга з початкового положення N_0 (-5,16,-6) зі швидкістю $v_N = 13$ у напрямі, протилежному до вектора $\bar{r} = (-4; 12; -3)$. Складіть рівняння руху кожної із точок і, впевнившись, що їх траєкторії перетинаються, знайдіть:**
   1) **точку P перетину їх траєкторій;**
   2) **час, витрачений на рух точки M від положення M_0 до точки перетину P;**
   3) **час, витрачений на рух точки N від положення N_0 до точки перетину P;**
   4) **довжини відрізків M_0 P і N_0 P.**
5. **Матеріальна точка *M (x,y,z)* рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення M_0 (11,-21,20) зі швидкістю $v_M = 12$ у напрямку вектора $\bar{s} = (-1; 2; -2)$. Визначіть за який час вона**

пройде відрізок своєї траєкторії, що знаходиться між двома паралельними площинами:

$2x + 3y + 5z - 41 = 0, 2x + 3y + 5z + 31 = 0$.

6. **Довести, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом векторам $\overline{a_1}(l_1, m_1, n_1)$ і $\overline{a_2}(l_2, m_2, n_2)$ можна представити у вигляді:**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$



Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З'ясуйте, яку лінію визначає ребус, та запишіть її рівняння:



О=Я +А

.....

З'ясуйте, яке рівняння площини визначає ребус і запішіть його:



, +



Ю=Ь ' ' е

.....

Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі* ***«Курс АНГ/СРС»*** *та* ***«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Чи знаєте Ви, що рівняння площини вперше зустрічається у працях французького математика, геометра й астронома А. К. Клеро (Рис. 7.1) у 1731 році.



Рис. 7.1

Рівняння площини «у відрізках» уперше зустрічається у праці французького математика, фізика та інженера Г. Ламе (Рис.7.2) у 1816-1818 роках.





Рис. 7.2 Рис. 7.3

Нормальне рівняння площини увів німецький математик Л.О. Гесе (Рис. 7.3) у 1861 році.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 «Використання програмного засобу Gran 3D для розв'язання задач з теми «Лінійні образи у просторі»»

Головна мета: здобуття студентами навичок побудови розв'язання геометричних задач за допомогою інформаційно- технічного засобу Gran 3D.

Устаткування: комп'ютер, ППЗ Gran 3D, MS Power Point.

Хід роботи (інструкція для студента)

У роботі вправи позначено таким чином:

° – *вправа обов'язкова, виконується цілком за допомогою ППЗ Gran 2d,*

∗ – *додаткова творча вправа, одна з трьох на Ваш вибір.*

Задачі лабораторної роботи

1° . Задано точки A(3;-1;0), B(1;0;-3), C(1;-1;-3). За допомогою ППЗ Gran 3d :

1) Побудуйте пряму, що проходить через точки A і B, запишіть її рівняння у канонічному або параметричному вигляді;
2) Побудуйте пряму, що проходить через точку C і має напрямний вектор $\bar{s} = (2; -3; 4)$, запишіть її рівняння у канонічному вигляді;
3) Знайдіть відстань і кут між отриманими прямими;

2° . Задано точки A(3;-1;2), B(4;-1;-1), C(2;0;2), D(2;1;-1). За допомогою ППЗ Gran 3d :

4) Побудуйте площину, що проходить через точки A, B і C, запишіть рівняння цієї площини;
5) Побудуйте площину, що проходить через точку D і має нормальний вектор $\bar{n} = (1; -2; 3)$, запишіть рівняння цієї площини;
6) Побудуйте площину, знаючи її рівняння $x + 3y - z + 3 = 0$;
7) Знайдіть відстані і кути між отриманими площинами;

3*. Зробіть презентацію в MS Power Point на тему: «Пряма у просторі» або «Площина», використовуючи рекомендовану, додаткову літературу і можливості Internet.

4*. Складіть навчальний тренувальний тест на тему: «Пряма у просторі» або «Площина» в MS Power Point.

5*. Запропонуйте набір задач (з розв'язанням) прикладного змісту з теми «Пряма лінія у просторі» або «Площина».

Зробіть висновки



Для майбутніх науковців

Розв'яжіть кросворд та для виділеного слова дайте його означення з позиції геометрії.

«…векторів»

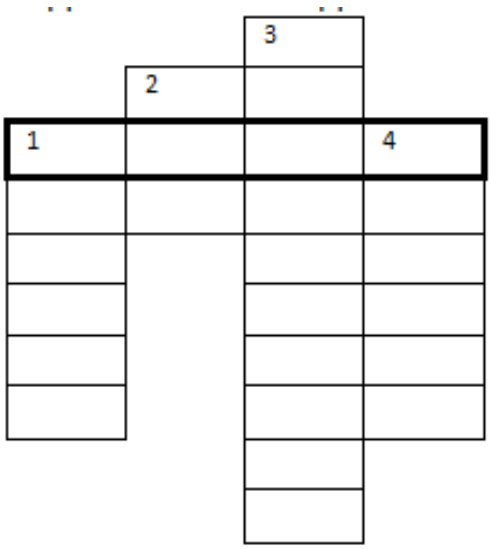
Питання до кросворду:

1. Він визначається лише своїм числовим значенням.

2. У полярній системі координат кожна точка задається через полярний радіус і полярний …

3. Лінія Бернуллі.

4. Вісь Ох.



Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*


"+

В'+'

Л=НН

……

Ж + Б=М

’ +

”

……

’

Т=Д”+

І=А Л=Н+Ь

……

П +

’ +


……

П +

’ Ш=Щ + ’ ’ ’


……

ТЕМА № 8 "Канонічні рівняння ліній ІІ порядку"



Основні питання

Лінії ІІ порядку. Розв'язання задач на складання канонічних рівнянь еліпса, гіперболи і параболи.



Рекомендована література

1. **[6], Гл. 6, §1-§4 (стор. 141-168).**
2. **[7], Гл. 11, §11.1-§11.4 (стор. 294-335).**
3. **[8], №№ 385, 389, 412, 445, 447, 462, 517, 527, 533, 584, 589, 601, 629, 633, 665, 675, 680**.
4. **[24], №№ 375, 377, 378, 381, 434, 439, 441, 480, 481, 497, 523, 524.**
5. **[35].**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

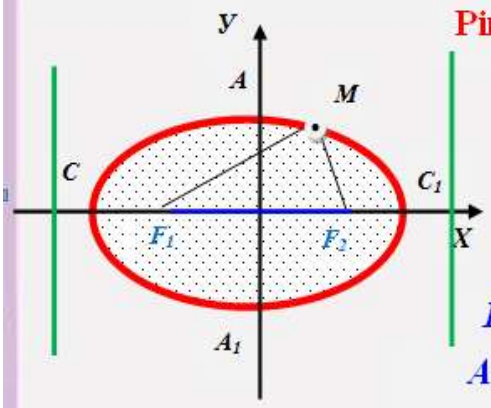
- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-5**

Опорний конспект

8

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

ЕЛІПС



Рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ексцентриситет => $e=\frac{c}{a}$

$b^2=a^2-c^2$

Рівняння директрис:

$D_2: x=a/e$

$D_1: x=-a/e$

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$-**фокуси еліпса**

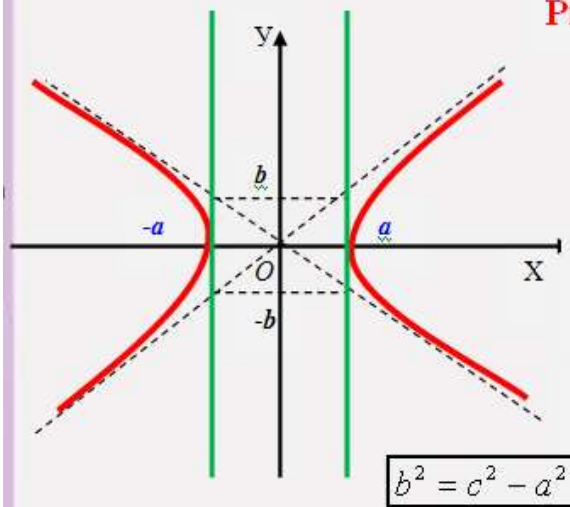
$A(0,b)$, $A_1(0,-b)$, $C(-a;0)$, $C_1(a,0)$ **–вершини**

$m.M(x,y)$

AA_1, CC_1 –піввісі

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

ГІПЕРБОЛА



Рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рівняння асимптот:

$y=\frac{b}{a}x$ $y=-\frac{b}{a}x$

Ексцентриситет => $e=\frac{c}{a}$

***a, -a* – вершини гіперболи**

OX* – *головна вісь

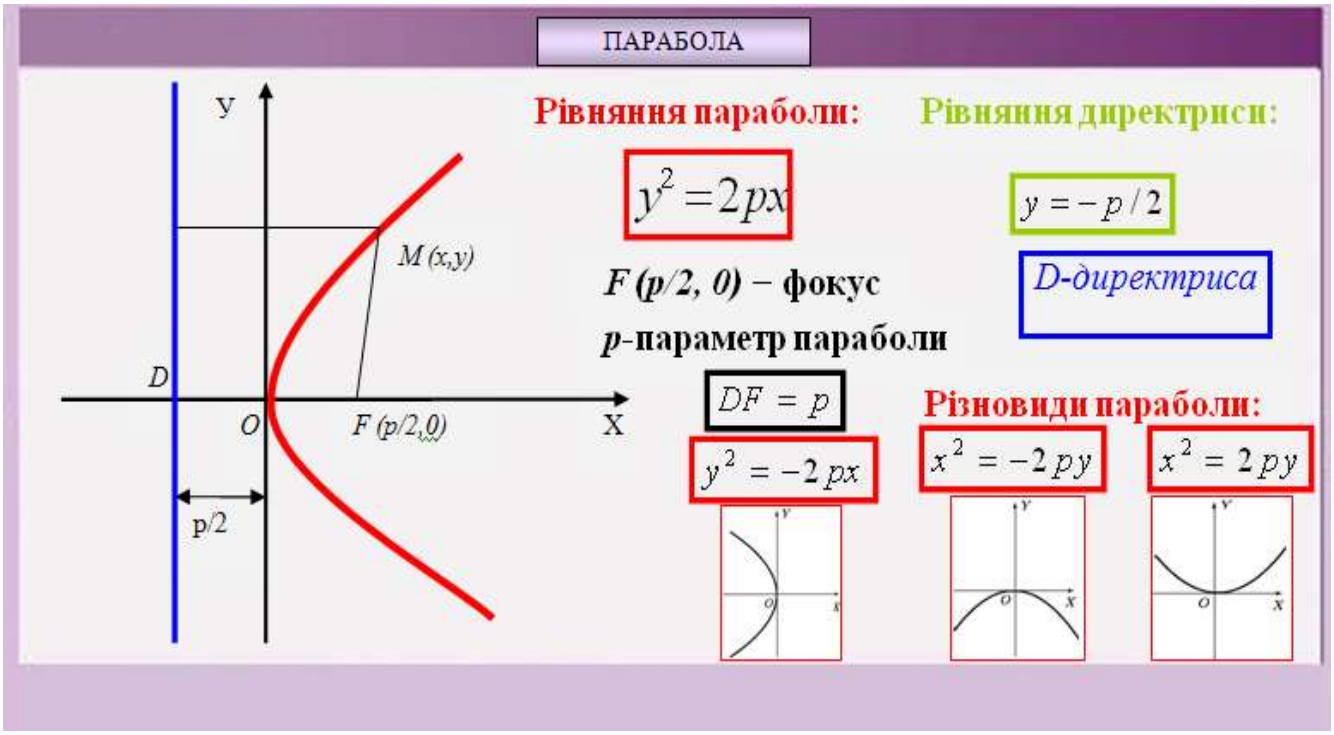
OY* – *побічна вісь

$b^2=c^2-a^2$

Рівняння директрис:

$D_1: x=a/e$

$D_2: x=-a/e$



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Ексцентриситет еліпса, піввісі якого 10 і 8, дорівнює …

   А) $\frac{4}{5}$; Б) $\frac{3}{5}$; В) $\frac{8}{5}$; Г) $\frac{1}{2}$.

2. Параболу, гілки якої напрямлені донизу, задає рівняння …

   А) $y^2 = 2x$; Б) $y^2 = -6x$; В) $x^2 = -y$; Г) $x^2 = \frac{2}{3}y$

3. Як розташовані пряма й еліпс $2x + y - 10 = 0$ і $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$?

   А) пряма проходить поза межами еліпса;

   Б) пряма дотикається до еліпса;

   В) пряма перетинає еліпс;

   Г) пряма проходить через фокус еліпса.

4. Піввісі гіперболи $4x^2-9y^2=25$ дорівнюють…

А) a=$\frac{2}{5}$, b=$\frac{3}{5}$; Б) a=$\frac{5}{2}$, b=$\frac{1}{5}$;

В) a=$\frac{5}{2}$, b=$\frac{5}{3}$; В) a=$\frac{3}{5}$, b=$\frac{1}{5}$.

5. Яке з наступних рівнянь визначає гілку гіперболи?

А) $x=\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$; Б) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

В) $y=3-4\sqrt{x-1}$; Г) $y=-3\sqrt{x^2+1}$.

6. Чи буде точка (6;2) перетином прямої $2x-y-10=0$ і гіперболи $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$?

А) так; Б) ні;

В) вони не перетинаються взагалі;

Г) перетинаються в іншій точці.

7. Рівняння $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ на площині визначає…

А) параболу; Б) еліпс;

В) гіперболу; Г) коло.

8. Еліпс можна задати рівнянням…

А) $y^2=2x^2$; Б) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{16}=1$;

В) $y^2=-\frac{1}{5}x^2+1$; Г) $\frac{x^2}{4}-\frac{3y^2}{17}=1$.

9. Якщо піввісі еліпса дорівнюють 4 і 2, то рівняння його має вигляд…

А) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; Б) $\frac{3x^2}{19}+\frac{y^2}{25}=-1$;

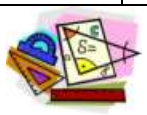
В) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}=25$; Г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

10. Рівняння $16x^2-9y^2=144$ на площині визначає…

А) параболу; Б) еліпс; В) гіперболу; Г) коло.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Розв’яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного виконання лабораторної роботи. Виконання більше 60% завдань свідчить про те, що Ви в змозі переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі, варто повторити теоретичний матеріал ще раз.

1. Складіть рівняння еліпса, знаючи, що його фокуси лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат і:

1. Його піввісі дорівнюють 5 і 2;
2. Його більша вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8;
3. Його менша вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
4. Відстань між його директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами – 4.

2. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ знайдіть точки, абсциса яких дорівнює -3.

3. Обчисліть відстань від фокуса $F(c, 0)$ еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ до директриси, що знаходиться з цим фокусом по один бік від осі еліпса.

4. Складіть рівняння гіперболи, знаючи, що:

1) Відстань між її вершинами дорівнює 24 і фокуси знаходяться у точках $F_1(-12,2)$ і $F_2(16,2)$;
2) Відстань між її директрисами дорівнює 3,6 і фокуси знаходяться у точках $F_1(3,4)$ і $F_2(-3,-4)$.

5. Складіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = \frac{13}{12}$, фокус $F(0,13)$ і рівняння відповідної директриси $13y - 144 = 0$.

6. Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ і параболи $y^2=24x$.

7. Складіть рівняння параболи, що має фокус $E(0,-3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Оу.

8. Задано вершину параболи $A(6,-3)$ і рівняння її директриси $3x-5y-1=0$. Знайдіть фокус цієї параболи.

9. Задано рівняння еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ і гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Знайдіть точки перетину еліпса і гіперболи.

10. Проведіть дотичну до параболи $y^2=12x$ паралельно прямій $3x-2y+30=0$ і обчисліть відстань d між цією дотичною і заданою прямою.



Питання для обмірковування

1. Чи можуть бути рівними ексцентриситети еліпса і гіперболи?
2. Яким чином еліпс $4x^2+y^2=9$ можна отримати з кола, рівняння якого $x^2+y^2=9$?
3. Яке співвідношення повинно існувати між коефіцієнтами рівняння лінії другого порядку, щоб це рівняння було рівнянням параболи?
4. Чому дорівнює відстань від фокуса параболи до її директриси?
5. Чи можуть довільні точки бути фокусами деякого еліпса?

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Криві другого порядку» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №8-9 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»;***
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. ***Рівномірним стисканням*** **(або рівномірним розтягненням) площини до осі абсцис називається таке перетворення точок площини, при якому довільна точка $M(x,y)$ переміщується у точку $M'(x',y')$ таким чином, що $x'=x$; $y'=qy$, де $q>0$ – стала, що називається *коефіцієнтом рівномірного стискання*.**

   Аналогічно визначається рівномірне стискання площини до осі Оу за допомогою рівнянь $x'=qx, y'=y$.

   Визначіть, у яку лінію перетвориться коло $x^2+y^2=25$, якщо коефіцієнт рівномірного стискання до осі абсцис $q=\frac{4}{5}$.

2. **З правого фокусу гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ під кутом $\beta, (\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi)$ до осі Ох спрямований промінь світла. Відомо, що $tg\beta=2$.**

Дійшовши до гіперболи, промінь відбився від неї. Складіть рівняння прямих, на яких лежить промінь, що відбився від гіперболи та промінь, за яким спрямоване світло.

3. **Довести, що еліпс і гіпербола, які мають спільні фокуси, перетинаються під прямим кутом.**

4. **Стальний трос підвішений за два кінці. Точки кріплення розташовані на однаковій висоті, відстань між ними дорівнює 20 м. Величина його прогину на відстані 2 м від точки кріплення, рахуючи по горизонталі, дорівнює 14,4 см. Визначіть величину прогину цього тросу всередині між точками кріплення, вважаючи, що трос має форму дуги параболи. Побудуйте цю параболу у середовищі ППЗ Advanced Grapher.**

5. **З'ясуйте, чи залишить галактику комета, що рухається у космосі за законом $13x^2 - 8y^2 - 6xy + 2(2y^2 - 5x^2 + 3xy - 4) - 4 = 0$? Доведіть свою точку зору за допомогою ППЗ GRAN 1.**

6. **Запишіть траєкторію точки М, яка при своєму русі весь час залишається удвічі ближчою до точки А (1; 0), ніж до В (4; 0) і побудуйте її. Перевірте себе за допомогою ППЗ Advanced Grapher**.

7. **Довжина еліптичної актової зали 14 м, ширина – 10 м. У якому місці має бути сцена, щоб зала мала найкращу акустику? Чому?**

8. **На шкільному майданчику Вам потрібно зробити клумбу у вигляді еліпса площею $1{,}5\pi$ м^2 і шириною 0,5 м. Побудуйте цей еліпс у середовищі ППЗ Advanced Grapher.**

9. **Функція витрат при виробництві товару має вигляд $C = 6Q + 10$, де Q – обсяг продукції, що випускається (кількість товару). Причому, $P_D = -4Q + 26$ – лінійне наближення функції попиту на даний товар. Визначте максимальний прибуток, який може отримати виробник.**



Це цікаво!

*Цікаво, що слово **«гіпербола»** походить з грецької мови (hyperbole — перебільшення) і часто використовується в літературі.*

Гіпербола – це стилістична фігура явного і навмисного перебільшення для посилення виразності і підкреслення сказаної думки. Наприклад: «я говорив це тисячу разів» або «височенний як дуб». Літературна гіпербола закорінена в первісній міфології. Ознаки первісного світобачення відбилися певними гранями у фольклорі («Кирило Кожум'яка», «Котигорошко» тощо, у народній пісні: «А з тої могили видно всі країни, сиз орел літає»).

Світова література знає чимало прикладів гіперболічних тропів («Гаргантюа і Пантагрюель» Ф. Рабле; «Мандри Гуллівера» Дж. Свіфта; «Легенда про Уленшпігеля» Ш. де Костера; «Сон», «Великий льох», Тараса Шевченка; «Кола Бруньйон» Р. Ролана тощо).



<u>Розширюємо світогляд</u>

*Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі www.aqportal.org.ua у розділі **«Курс АНГ/СРС»** та **«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Чи знаєте Ви, що траєкторії деяких космічних тіл (комет, астероїдів тощо), що проходять поблизу зірки або іншого масивного об'єкту (нейтронної зірки, чорної діри або планети) на чималій швидкості мають форму параболи. На ці тіла унаслідок їхньої великої швидкості і

малої маси не діє гравітаційне поле зірки і вони продовжують вільний рух. Це явище використовується для гравітаційних маневрів космічних кораблів (зокрема апаратів «Вояджер»).

Безліч траєкторій польоту деякого об'єкту (м'яча, артилерійського снаряду) в однорідному гравітаційному полі без опору повітря відповідає параболі.



Рис. 8.1 Падіння баскетбольного м'яча

При обертанні тонкої прямокутної судини з рідиною довкола його горизонтального центру поверхня рідини в судині набуває форми параболи.

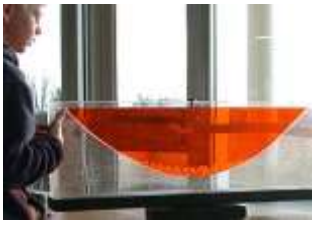


Рис. 8.2 Судина, що обертається, з рідиною

Властивість параболи фокусувати паралельний пучок прямих використовується в конструкції прожекторів, фар, а також телескопів-рефлекторів (оптичних, інфрачервоних, радіаційних), в конструкції вузько спрямованих (супутникових та інших) антен, необхідних для передачі інформації на великі відстані, сонячних електростанцій і в інших галузях.



Рис. 8.3 Параболічна сонячна електростанція в Каліфорнії

Форма параболи інколи використовується в архітектурі для будівництва дахів і куполів.



Рис. 8.4 Бібліотека з дахом у формі параболи в норвезькому місті Тромсе

З еліпсом доводиться мати справу і в техніці. Розглянемо для прикладу еліптичний циркуль для креслення еліпса. На його зворотній дії побудовано патрон Леонардо да Вінчі для верстатів, за допомогою яких обробляються деталі з перерізом еліптичної форми. У конструкціях ряду верстатів застосовуються зубчасті еліптичні передачі

Загальновідомо також, що від прожектора світлові промені йдуть паралельним пучком, а їх дзеркала параболічні, тобто будь-який їх осьовий переріз є параболою. І навпаки, лінза з осьовим параболічним перерізом збирає паралельні промені в одну точку. На основі цієї властивості можна одержувати високі температури у фокусі лінзи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6 «Побудова кривої за результатами експерименту»

Мета роботи: за результатами експерименту самостійно вивести рівняння кривої і побудувати її графічне зображення.

Устаткування: інтерактивна дошка, комп'ютер, слайд-лекція з відеороликом експерименту.

Хід роботи (інструкція для студента)

Прогляньте відеоролик експерименту: Уведено декартову систему координат. На прямій лінії закріплено два цвяхи на деякій відстані $2c$ (Рис.1). Мотузку, довжиною $2a$, $(a > c)$, також закріпили в цих цвяхах.

Завдання: З'ясуйте, яку криву у цьому відеоролику буде описувати олівець? Виведіть рівняння цієї кривої. Запишіть рівняння цієї кривої, якщо $a = 5$ й $c = 3$.

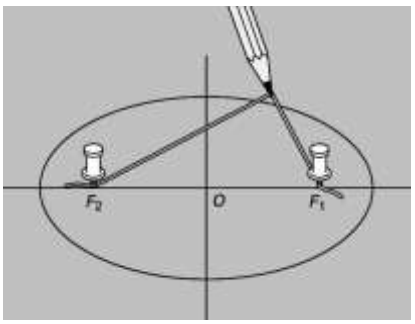


Рис.1 Скрін відеоролика експерименту

Зробіть висновки

ТЕМА № 9 «Дослідження ліній ІІ порядку»



План заняття

Дослідження форми кривих ІІ порядку. Властивості директрис, ексцентриситет, їх застосування до розв'язання задач. Інші означення кривих ІІ порядку. Складання рівнянь кривих ІІ порядку у полярній системі координат. Дотичні до кривих ІІ порядку. Задачі практичного змісту.



Рекомендована література

1. **[1], Гл. 2, §7 (стор. 53-57).**
2. **[6], Гл. 6, §5 (стор. 168-184).**
3. **[8], №№ 665, 668, 669, 672, 677, 679, 689,697.**
4. **[24], №№ 534, 540, 543, 544, 550, 551, 567, 573, 585.**
5. **[35].**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-6**

9 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

$\boldsymbol{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{32}y + a_{33} = 0}$ – загальне рівняння кривої 2 порядку.

Три групи кривих:

1. **Еліптична група**

1) Дійсний еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
2) Уявний еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$;
3) Вироджений еліпс (точка) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

2. **Гіперболічна група**

1) Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
2) Вироджена гіпербола (дві прямі, що перетинаються) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

3. **Параболічна група**

1) Парабола $y^2 = 2px$;
2) Дві дійсні паралельні прямі $y^2 = a^2$;
3) Дві уявні паралельні прямі $y^2 = -a^2$;
4) Дві співпадаючі прямі (одна пряма) $y^2 = 0$.

Також криві 2 порядку **поділяються на**:

1. **Центральні** – мають 1 центр симетрії (еліптична, гіперболічна групи)

$\begin{cases} 2a_{11}a + 2a_{12}b + 2a_{13} = 0 \\ 2a_{12}a + 2a_{22}b + 2a_{23} = 0 \end{cases}$ – формула для знаходження координат центра

2. **Нецентральні** – не мають центра симетрії або мають безліч центрів симетрії (параболічна група).

$\boldsymbol{ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}}$ – формула для знаходження кута повороту

ТЕОРІЯ ІНВАРІАНТІВ

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\ I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$k_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$I_2 > 0$	$I_1 I_3 < 0$		Дійсний еліпс
	$I_1 I_3 > 0$		Уявний еліпс
	$I_1 I_3 = 0$		Вироджений еліпс
$I_2 < 0$	$I_3 \neq 0$		Гіпербола
	$I_3 = 0$		Вироджена гіпербола
$I_2 = 0$	$I_3 \neq 0$		Парабола
	$I_3 = 0$	$k_2 < 0$	Дві дійсні паралельні прямі
	$I_3 = 0$	$k_2 > 0$	Дві уявні паралельні прямі
	$I_3 = 0$	$k_2 = 0$	Дві прямі, що співпадають

Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Після паралельного перенесення кривої 2 порядку в її центр нульові значення приймає:

   А) коефіцієнт перед старшим членом Б) лінійна частина,

   В) вільний член, Г) нічого не змінюється.

2. Центром кривої $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ є точка:

   А) (0,-1), Б)(-1,1), В) (1,-1), Г) (-2,1).

3. Для того, щоб привести криву $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 228 = 0$ до канонічного виду, необхідно повернути її на кут…

А) 30º, Б) 45º, В) 90º, Г) 60º.

4. Рівняння $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ визначає на площині…

А) гіперболу, Б) еліпс, В) параболу, Г) коло.

5. До якого типу відноситься крива, задана рівнянням:

$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$?

А) параболічного, Б) еліптичного,

В) гіперболічного, Г) не можливо визначити.

6. Який геометричний образ задає крива $(x-2)^2 + y^2 = 5$?

А) уявний еліпс; Б) дійсний еліпс;

В) вироджена гіпербола; Г) вироджений еліпс.

7. Криву якої групи задає рівняння $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$?

А) еліптичну; Б) гіперболічну;

В) параболічну; Г) встановити неможливо.

8. Центром кривої $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ є точка з координатами

А) (5;-2); Б) (-2;5);

В) (2;-5); Г) (-5;2).

9. Для того, щоб крива відносилася до еліптичного типу, необхідно і достатньо, щоб…

А) $I_2=0$; Б) $I_2<0$;

В) $I_2>0$; Г) $I_3<0$.

10. Для того, щоб привести рівняння кривої $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$ до канонічного виду, необхідно повернути криву на кут…

А) 30^0; Б) 60^0; В) 90^0; Г) 45^0.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Приклади розв'язування деяких задач:

1. Приведіть рівняння кривої другого порядку $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ до канонічного вигляду, побудуйте її графік.

Розв’язування.

1 спосіб

Запишемо систему для знаходження центру

$$\begin{cases} 4x_0 + 0 \cdot y_0 + 16 = 0 \\ 0 \cdot x_0 + 9y_0 - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

крива є центральною.

Отримаємо координати нового центру:

O'=(-4;3)

Підставимо

$a_{33}'=4\cdot16 + 9\cdot9 + 32\cdot(-4) - 54\cdot3 + 109 = -36$

Дістанемо

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$4x^2+9y^2=36$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ – рівняння еліпса з піввісями a=3; b=2.

2 спосіб

Маємо рівняння кривої:

$4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$

Виділяємо повні квадрати

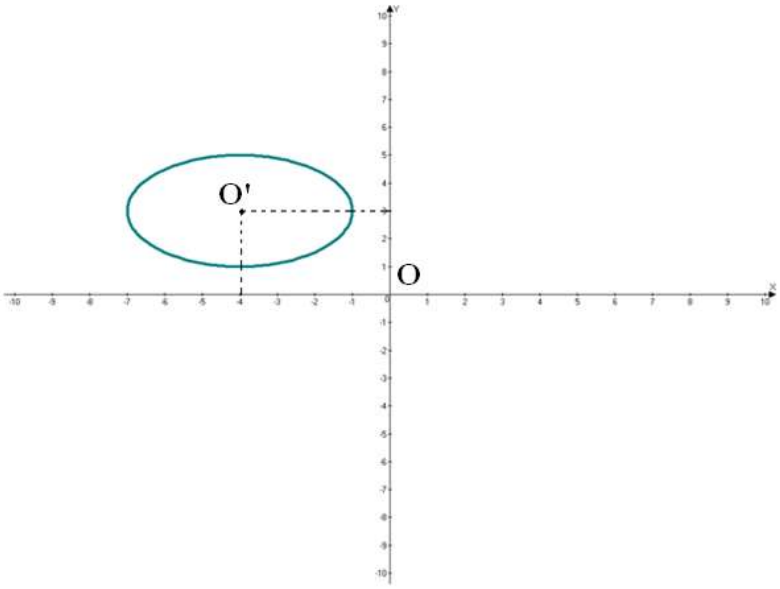
$4(x^2+8x+16) - 64 + 9(y^2-6y+9) - 81 + 109 = 0$

$4(x+4)^2 + 9(y-3)^2 = 36$

Поділимо обидві частини рівняння на 36,

отримаємо

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$



x'=x+4 x_0*= -4*

y'= y-3 y_0*= 3*

O' (x_0;y_0) – новий центр

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$$

Будуємо графік.

Рис. 9.1

2. Спростіть рівняння кривої другого порядку $x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0$, визначіть її тип та побудуйте її графік.

Розвязування.

Повернемо вісі координат на кут **α**, знайдемо $ctg2\alpha$ користуючись формулою. У даному випадку a_{11}=1, a_{22}=1, $a_{12}=\frac{1}{2}$. Значить

$$ctg2\alpha=\frac{1-1}{1}=0$$

$2\alpha=90^{\circ}$.

Звідси $\alpha=45^{\circ}$.

Оскільки $\sin 45^{\circ}=\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то формули перетворення системи координат матимуть вигляд:

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

Підставляючи отримані *x* та *y* в початкове рівняння, отримаємо:

$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2-3\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)-6\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)+3=0$$

Після спрощення матимемо

$$3X^2+Y^2-9\sqrt{2}X-3\sqrt{2}Y+6=0.$$

Бачимо, що рівняння не містить члена з добутком змінних. Виділивши повні квадрати матимемо рівняння:

$$3\left(X-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(Y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=12$$

Або

$$\frac{\left(X-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\frac{\left(Y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12}=1$$

Таким чином отримали рівняння еліпса з піввісями 2 і $\sqrt{3}$. Щоб знайти координати центра цього еліпса в системі координат xOy, підставимо координати $X=\frac{3}{\sqrt{2}}$ і $Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ точки O_1 в формули перетворення. Отримаємо:

$$x=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=0,\ y=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=3$$

Таким чином центр еліпса має координати (0,3).

Побудуємо графік.

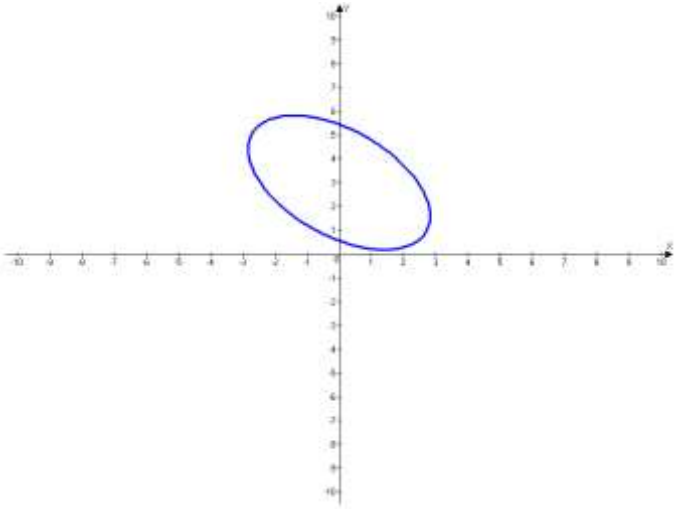


Рис. 9.2

3. Визначіть тип кривої: $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$, запишіть її канонічне рівняння і побудуйте її графік.

Розв'язування.

Для визначення типу кривої скористаємось інваріантами.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}$$ – парабола

Знайдемо параметр:

$$p = \sqrt{\frac{25}{4 \cdot 5^3}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Запишемо канонічне рівняння параболи:

$$Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} X$$

Знайдемо рівняння осі:

$$x - 2y - \frac{1 \cdot 2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+4} = 0 \text{ або } x - 2y + 1 = 0$$

Запишемо рівняння для визначення вершини параболи:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ (x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

Отримаємо координати вершини параболи: $O'(3,2)$

Запишемо формули паралельного переносу.

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Знайдемо вектор осі, спрямований в сторону опуклості:

$\left\{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}\right\} = \left\{-5, \quad -\frac{5}{2}\right\} \downarrow\downarrow \{-2, \quad -1\}$. Знайдемо кут повороту системи координат: $tg2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$, $tg2\varphi = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$, $cos2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$, $cos\varphi = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$sin\varphi = -\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Запишемо формули повороту.

$$\begin{cases} x' = x''\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - y''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ y' = x''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y''\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

Побудуємо графік.

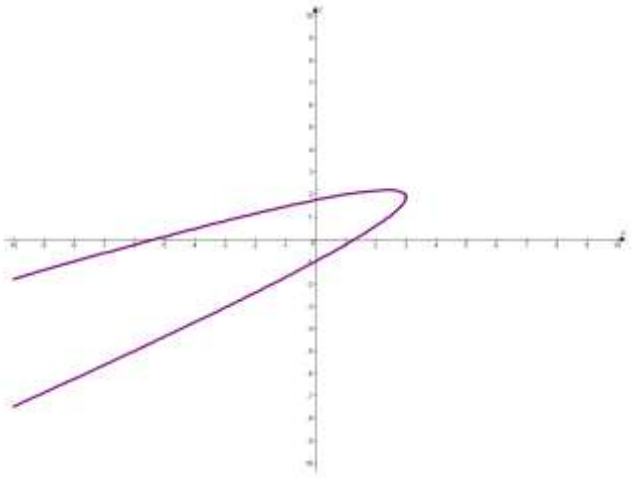


Рис. 9.3

4. Визначіть тип кривої: $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$, запишіть характеристичне рівняння цієї кривої і побудуйте її графік.

Розв'язування.

Для визначення типу кривої скористаємось інваріантами.

$I_1 = 5 + 5 = 10$

$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0 -$ еліптичний тип

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-9) \cdot (-9) + 4 \cdot (-9) \cdot (-9) — 9 \cdot 5 \cdot (-9) - 4 \cdot 4 \cdot 9 - 5 \cdot (-9) \cdot (-9) =$$

$$= 225 + 324 + 324 - 405 - 144 - 405 = -81 \neq 0 - \text{еліпс}$$

Знайдемо λ_1 і λ_2

λ^2-10λ+9=0

$\lambda_1=9$, $\lambda_2=1$

Обчислимо вільний член рівняння: $\frac{I_3}{I_2}=\frac{-81}{9}=-9$.

Запишемо характеристичне рівняння еліпса:

$9x''^2+y''^2+9=0$

$9x''^2+y''^2=9$

Поділимо ліву і праву частини рівняння на 9 і отримаємо рівняння еліпса у канонічному вигляді.

$$\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{9}=1$$

Побудуємо графік.

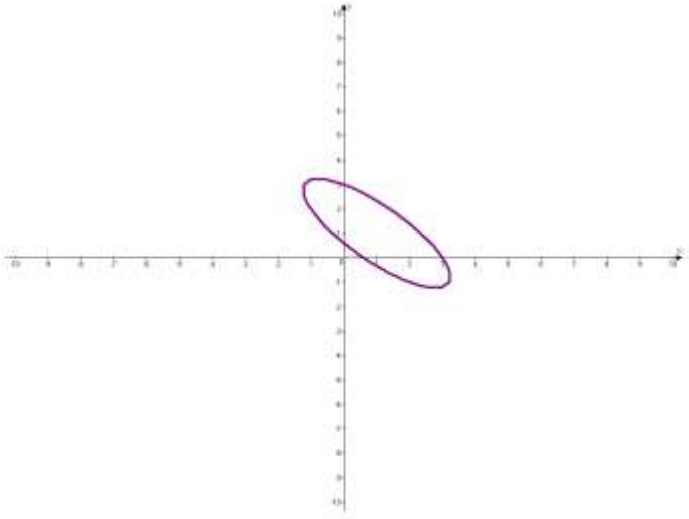


Рис. 9.4

5. Спростіть рівняння кривої $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$ і визначте її вид.

Розв'язування.

1 спосіб

Перепишемо рівняння у такому вигляді:

$$4(x^2-6x)-25(y^2-2y)=89$$

і вирази у кожній дужці доповнимо до повного квадрата:

$$4(x^2-6x+9)-25(y^2-2y+1)=89+36-25$$

Після перетворень отримаємо:

$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці (3,1). Дійсна піввісь гіперболи дорівнює 5, а уявна дорівнює 2.

2 спосіб

$\mathrm{I}_1 = 4 - 25 = -21$

$\mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-25) - 0 = -100 < 0 -$ гіперболічний тип

$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 0 & -25 & 25 \\ -12 & 25 & -89 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-25) \cdot (-89) + 0 \cdot 25 \cdot (-12) + 0 \cdot 25 \cdot$

$(-12) - (-12) \cdot (-25) \cdot (-12) - 0 \cdot 0 \cdot (-89) - 25 \cdot 25 \cdot 4 = 8900 + 0 +$

$0 + 3600 - 0 - 2500 = 10000 \neq 0 -$ гіпербола

Знайдемо λ_1 і λ_2

λ^2+21λ-100=0

D=441+400=841, $\sqrt{\mathrm{D}} = 29$

$\lambda_1 = \frac{-21+29}{2} = 4, \lambda_2 = \frac{-21-29}{2} = -25$

Обчислимо вільний член рівняння: $\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_2} = \frac{10000}{-100} = -100$

Запишемо характеристичне рівняння еліпса

$-25x''^2 + 4y''^2 - 100 = 0$

$-25x''^2 + 4y''^2 = 100$

Поділимо ліву і праву частини рівняння на -100 і отримаємо рівняння гіперболи у канонічному вигляді.

$\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{25} = -1$

Знайдемо центр кривої і перенесемо початок координат у цю точку.

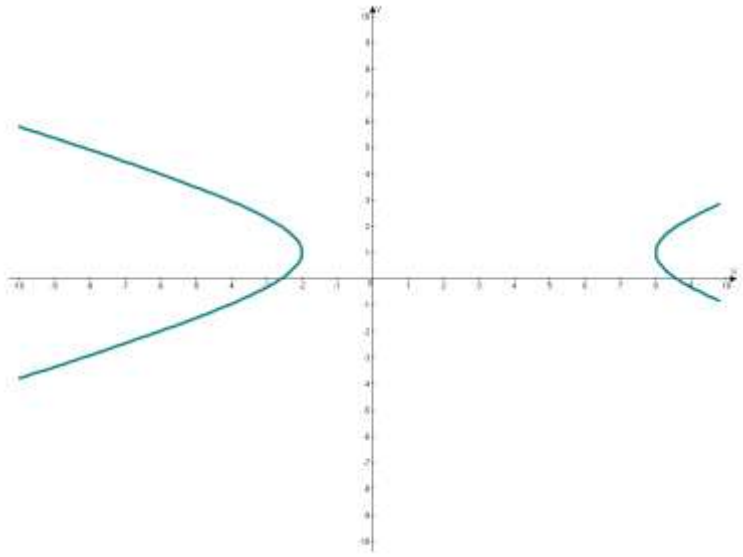


Рис. 9.5

Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$\begin{cases} 4a + 0b - 12 = 0 \\ 0a - 25b + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$

O′(3,1) – новий центр кривої. Побудуємо графік (Рис. 9.5).



Розв’яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Визначіть тип кривої, що описує кожне з наступних рівнянь; спростіть рівняння шляхом паралельного переносу осей координат; встановіть, які геометричні образи вони визначають і зобразіть розташування цих образів відносно старих і нових осей координат:

1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0;$
2) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0;$
3) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0;$
4) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0;$
5) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0.$

2. Не проводячи перетворення координат, встановіть, які геометричні образи визначаються наступними рівняннями:

1) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0;$
2) $17x^2 - 18xy - 7y^2 + 34x - 18y + 7 = 0;$
3) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 10y = 0;$
4) $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0;$
5) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0.$

3. Знайдіть центри кривих, що задані рівняннями:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0;$

3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;

4) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$.

4. Користуючись розкладанням на множники лівої частини рівняння, визначіть геометричний зміст рівнянь:

1) $xy - bx - ay + ab = 0$;

2) $x^2 - 2xy + 5x = 0$;

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

5. За допомогою інваріантів з'ясуйте, які криві задаються наступними рівняннями:

1) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 29 = 0$;

3) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + \frac{13}{3} = 0$;

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

6. Визначіть, які лінії задаються наступними рівняннями в полярних координатах:

1) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$;

2) $\rho = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta}$;

3) $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\theta}$;

4) $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$;

5) $\rho = \dfrac{12}{2 - \cos\theta}$;

6) $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\theta}$.

7. Доведіть, що рівняння $\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\theta}$ визначає еліпс та знайдіть його піввісі.

8. Доведіть, що рівняння $\rho = \dfrac{18}{4 - 5\cos\theta}$ задає праву гілку гіперболи та знайдіть її піввісі.

9. Доведіть, що еліпс має таке параметричне рівняння: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}$, де a, b – піввісі, $0 \le t \le 2\pi$.

10. Задано точку $M_1(2;-\frac{5}{3})$ на еліпсі $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M_1.

11. Обчислити площу трикутника, який отриманий асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ і прямою $9x+2y-24=0$.

12. На еліпсі $16x^2+25y^2=400$ знайдіть точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази менша за відстань від лівого фокуса.

13. Знайдіть відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її асимптоти $y=\left(\frac{b}{a}\right)x$.

14. Складіть рівняння параболи, симетричної відносно осі OY, якщо вона проходить через точки перетину прямої $x+y=0$ і кола $x^2+\left(y+4\right)^2=16$.

15. Парабола дотикається осі Ox у двох точках, відстань між якими дорівнює 20 м. На відстані 2 м від точки дотику (якщо рухатись до центру параболи) відстань від параболи до осі дорівнює 14,4 см. Знайдіть відстані від центру параболи до осі Ox.

Питання для обмірковування

1. Яку класифікацію кривих другого порядку Ви знаєте?
2. Чи змінюється значення інваріантів при паралельному перенесенні системи координат? При повороті системи координат?
3. Які оптичні властивості має еліпс? Гіпербола?
4. Які геометричні образи кривих параболічного типу Ви знаєте?

Перед розв'язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Криві другого порядку» у

розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв'язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв'язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №9-10 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв'язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»;***
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. **Довести, що будь-яке однорідне рівняння другого степеня, тобто рівняння виду $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ описує дві прямі, що проходять через початок координат.**

2. **З'ясуйте при яких значеннях параметрів a і b наступне рівняння $x^2 - 4xy + ay^2 - 3x + 2by = 0$ задає дві паралельні прямі. Побудуйте геометричний образ, що відповідає отриманим Вами значенням параметрів a і b, за допомогою ППЗ Andvanced Grapher.**

3. **Приведіть рівняння кривої $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ до канонічного вигляду за допомогою перетворення координат. Визначіть тип кривої. Побудуйте геометричний образ, який вона визначає за допомогою ППЗ Gran1.**

4. **За допомогою інваріантів встановіть тип кривої $25x^2 - 14xy + +25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ і побудуйте її геометричний образ за допомогою ППЗ Gran1 або Andvanced Grapher.**

5. **Знайдіть і побудуйте допомогою ППЗ GRAN1 геометричне місце центрів кривих $x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay + 1 = 0$, якщо $a -$ змінний параметр.**

6. **Планета рухається навколо Сонця по еліптичній орбіті з ексцентриситетом ε. На скільки її швидкість у перигелііі відрізняється від швидкості в афелії? Як це пояснити?**

Теоретична підказка. **Перицентр і апоцентр** (точки орбіти небесного тіла) – найближча до центрального тіла і найбільш віддалена від центрального тіла, навколо якого здійснюється рух. Для орбіт тіл, що рухаються навколо Сонця (наприклад, планет, астероїдів, комет тощо), перицентр і апоцентр називаються, відповідно, **перигелій** і **афелій**.

7. **Знаючи, що відстань між центрами Сонця і Землі у точці перигелію дорівнює 147 млн. км, а у точці афелію – 152 млн. км, знайдіть довжину великої осі, а також величину ексцентриситету орбіти Землі (Рис. 9.6).**

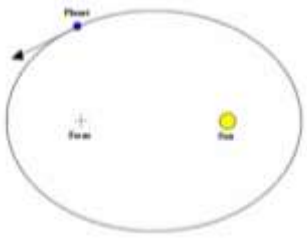


Рис. 9.6

8. **Уявіть, що в неглибокий еліптичний бак налита вода. Якщо опустити палець у те місце, де знаходиться фокус еліпса, то через декілька секунд біля другого фокусу зійдуться кругові хвилі. Поясніть, чому так відбувається? (Цей експеримент проведіть дома самостійно).**

9. **Із лівого фокусу еліпса** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$**, під тупим кутом** α **до осі** Ox **спрямований промінь світла. Відомо, що** $tg\alpha=-2$**. Дійшовши до еліпса, промінь від нього відбився. Складіть рівняння прямої, дотичної до еліпса у точці, від якої відбивається промінь.**

10. **Доведіть, що добуток відстаней від фокусів до будь-якої дотичної еліпса завжди дорівнює квадрату меншої півосі.**

11. **Відрізок** BC **довжини** l **рухається своїми кінцями по сторонах прямого кута** BOC**. Яку лінію опише на цьому відрізку точка** A**, що поділяє його у відношенні** λ **(**$\frac{BA}{AC}=\lambda$**)?**

Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі* ***«Курс АНГ/СРС»*** *та* ***«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Механізм (антипаралельний кривошип) складається з чотирьох попарно рівних ланок:

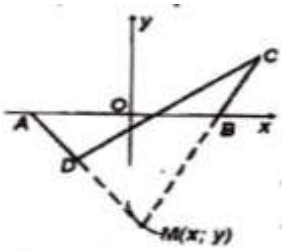


Рис. 9.7

AB = CD і *AD* = *BC,* шарнірно з'єднаних між собою, як показано на рис. 9.7. Ланку *AB* закріплено нерухомо, а ланки *AD* і *BC* обертаються навколо центрів *A* і *B*. Визначіть траєкторію руху точки *M (x; y)* перетину малих ланок. Оберемо систему координат таким чином, щоб вісь *Ox* пройшла через точки *A і B, а* вісь *Oy* – через середину відрізку *AB*.

Легко бачити, що різниця відстаней до точки *M* від точок *A* і *B* є величина стала, що дорівнює довжині малої ланки. Позначаючи цю довжину через *2a,* а довжину ланки *AB* через *2c,* будемо мати:

AM - BM = ±*2a,* або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Спрощуючи це рівняння, одержимо, що точка *M* рухається по дузі кривої, що називається ***гіперболою***, для якої *A* і *B* є фокусами.

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, які лінії визначають ребуси, та запишіть їх рівняння:



.....



.....



.....



.....



Для майбутніх науковців

Ще більше цікавих додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі www.agportal.org.ua *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

Розглянемо цікаву задачу:

Довести, що в еліпс не можливо вписати жодний правильний многокутник з кількістю сторін, більшою, ніж у квадрата, таким чином, щоб вершини цього многокутника належали еліпсу.

Доведення.

Це твердження легко довести, знаючи, що вершини усіх правильних многокутників лежать на колі. Коло не може мати з еліпсом більш ніж чотири точки перетину.

З цього випливає, що не існує правильного многокутника з кількістю сторін, більшою за чотири, вершини якого належали б еліпсу.

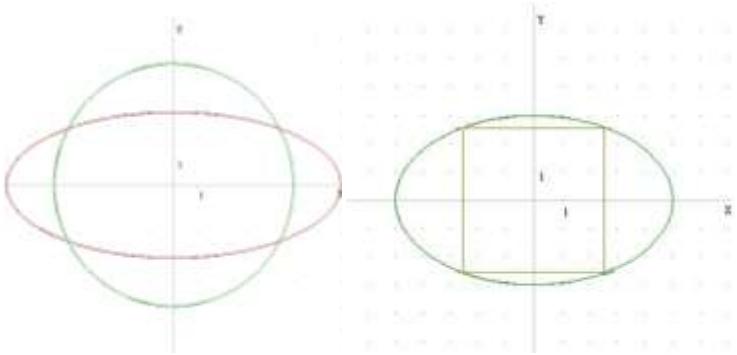
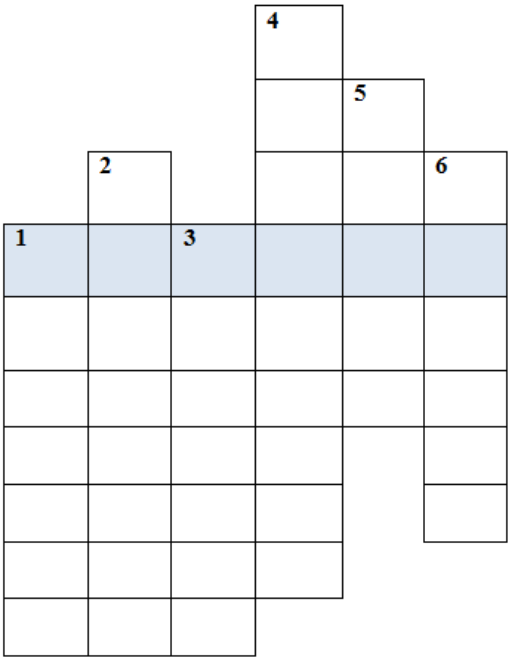


Рис. 9.8

Твердження доведено.

1. Розв’яжіть кросворд та для виділеного слова дайте його означення з позиції геометрії.



«… вектора»

Питання:

1. Для загального рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, *(A,B,C)* – координати вектора …
2. $Ax + By + Cz + D = 0$ – … рівняння площини.
3. Інша назва двовимірного простору.
4. Пряма може бути задана рівнянням "у …"
5. Перетин двох площин.
6. …площин (може задаватися таким рівнянням: $\alpha(2x-3y+z-5)+\beta(2x-3y-z-4)=0$).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7 "Побудова і дослідження кривих другого порядку за допомогою інваріантів у MS Excel"

Головна мета: здобуття студентами навичок дослідження кривих другого порядку за допомогою інваріантів, обчислених у програмному середовищі MS Excel. Ці засоби корисно використовувати у тих випадках, коли обчислення визначників є допоміжним, а не основним етапом розв'язування задачі.

Устаткування: комп'ютер, MS Excel, ППЗ Gran 1W.

Хід роботи (інструкція для студента)

Пропонуємо Вам обрати одну вправу з кожного пункту, номер якої відповідає Вашому номеру у списку академічної групи.

1. Знайшовши за допомогою MS Excel значення інваріантів кривої другого порядку, визначіть її тип і геометричний образ. Побудуйте графік у ППЗ Gran 1W.

1. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0;$

2. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0;$

3. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0;$

4. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0;$

5. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0;$

6. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$

7. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0;$

8. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0;$

9. $3x^2 - 8xy + 7y^2 + 8x - 15y + 20 = 0;$

10. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0;$

11. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0;$

12. $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0;$

13. $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0;$

14. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0;$

15. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0;$

16. $2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0;$

17. $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0;$

18. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0;$

19. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0;$

20. $5x^2 + 14xy + 11y^2 + 12x - 7y + 19 = 0.$

2. Знайшовши за допомогою MS Excel значення інваріантів кривої другого порядку, знайдіть корені характеристичного рівняння і запишіть зведене рівняння кривої другого порядку.

1. $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0;$

2. $3x^2 - 8xy + 5y^2 + 8x + 15y - 20 = 0;$

3. $3x^2 - 2xy - 3y^2 + 12y - 15 = 0;$

4. $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0;$

5. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0;$

6. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0;$

7. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x + 42y + 51 = 0;$

8. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 0;$

9. $11x^2 + 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$

10. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0;$

11. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0;$

12. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0;$

13. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0;$

14. $50x^2 - 8x + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0;$

15. $9x^2 + 4xy + 41y^2 + 4x - 2y + 1 = 0;$

16. $2x^2 + 24xy + 6y^2 + 28x - 4y + 56 = 0;$

17. $13x^2 + 6xy + 34y^2 - 42x - 2y + 5 = 0;$

18. $25x^2 + 10xy + 3y^2 + 24x - 2y + 210 = 0;$

19. $2x^2 + 4xy + 15y^2 - 8x + 6y - 1 = 0;$

20. $15x^2 + 4xy + 7y^2 + 6x + 32y = 0.$

3. Знайшовши за допомогою MS Excel значення інваріантів кривої другого порядку, приведіть рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду.

1. $5x^2 + 12xy - 12y^2 + 8x + 15y - 2 = 0;$

2. $3x^2 - 12xy + 5y^2 + 7x + 14 = 0;$

3. $19x^2 - 12xy - 7y^2 + 12y + 4 = 0;$

4. $41x^2 - 4xy - 3y^2 + 15 = 0;$

5. $9x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x - 2y + 6 = 0;$

6. $7x^2 + 4xy + 5y^2 + 14x + 12y + 1 = 0;$

7. $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 32x + 16y + 7 = 0;$

8. $7x^2 + 62xy + 13y^2 + 13 = 0;$

9. $18x^2 + 26xy - 4y^2 + 2x - 1 = 0;$

10. $15x^2 + 16xy + 25y^2 + 18 = 0;$

11. $14x^2 + 4xy + 5y^2 - 7 = 0;$

12. $5x^2 + 12xy - 12y^2 - 9 = 0;$

13. $4x^2 + 4xy + 7y^2 + 1 = 0;$

14. $11x^2 + 4xy + 13y^2 - 7 = 0;$

15. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 2y = 0;$

16. $x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x - 4y = 0;$

17. $3x^2 + 2xy + 4y^2 - 25 = 0;$

18. $5x^2 + 10xy + 13y^2 + 5 = 0;$

19. $2x^2 + 14xy + 5y^2 - 3 = 0;$

20. $9x^2 + 14xy + 11y^2 + 7 = 0.$

<u>Зробіть висновки</u>

ТЕМА № 10 "Канонічні рівняння поверхонь ІІ порядку"



План заняття

Складання канонічних рівнянь поверхонь ІІ порядку: еліпсоїдів, гіперболоїдів, параболоїдів. Застосування їх властивостей до розв'язання задач.



Рекомендована література

1. **[1], Гл 5, §1 (стор.122-133).**
2. **[7], Гл 12 (стор. 339-373).**
3. **[18], Розділ 5 §5.2-§5.3 (стор.102-111).**
4. **[8], №№ 1153, 1156, 1172, 1173, 1184, 1188, 1199, 1202.**
5. **[24], №№ 939, 941, 944, 948, 965, 970, 980, 989, 994.**
6. **[37].**

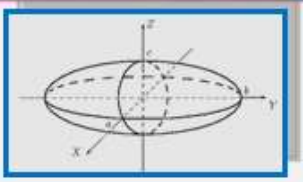
Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-7**

Опорні конспекти

10 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпсоїд:

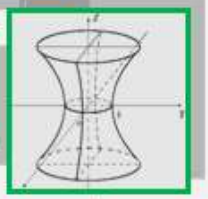


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уявний еліпсоїд:

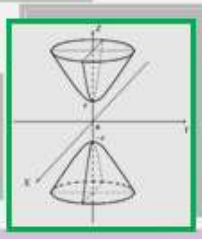
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Однопорожнинний гіперболоїд:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

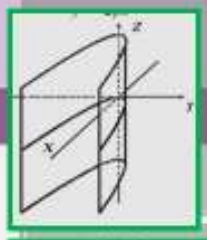
Двопорожнинний гіперболоїд:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

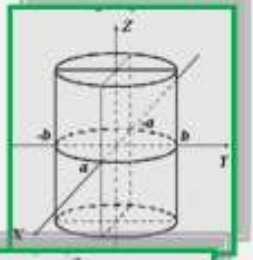
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Параболічний циліндр:



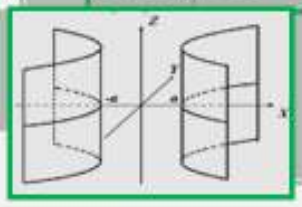
$$y^2=2px$$

Еліптичний циліндр:

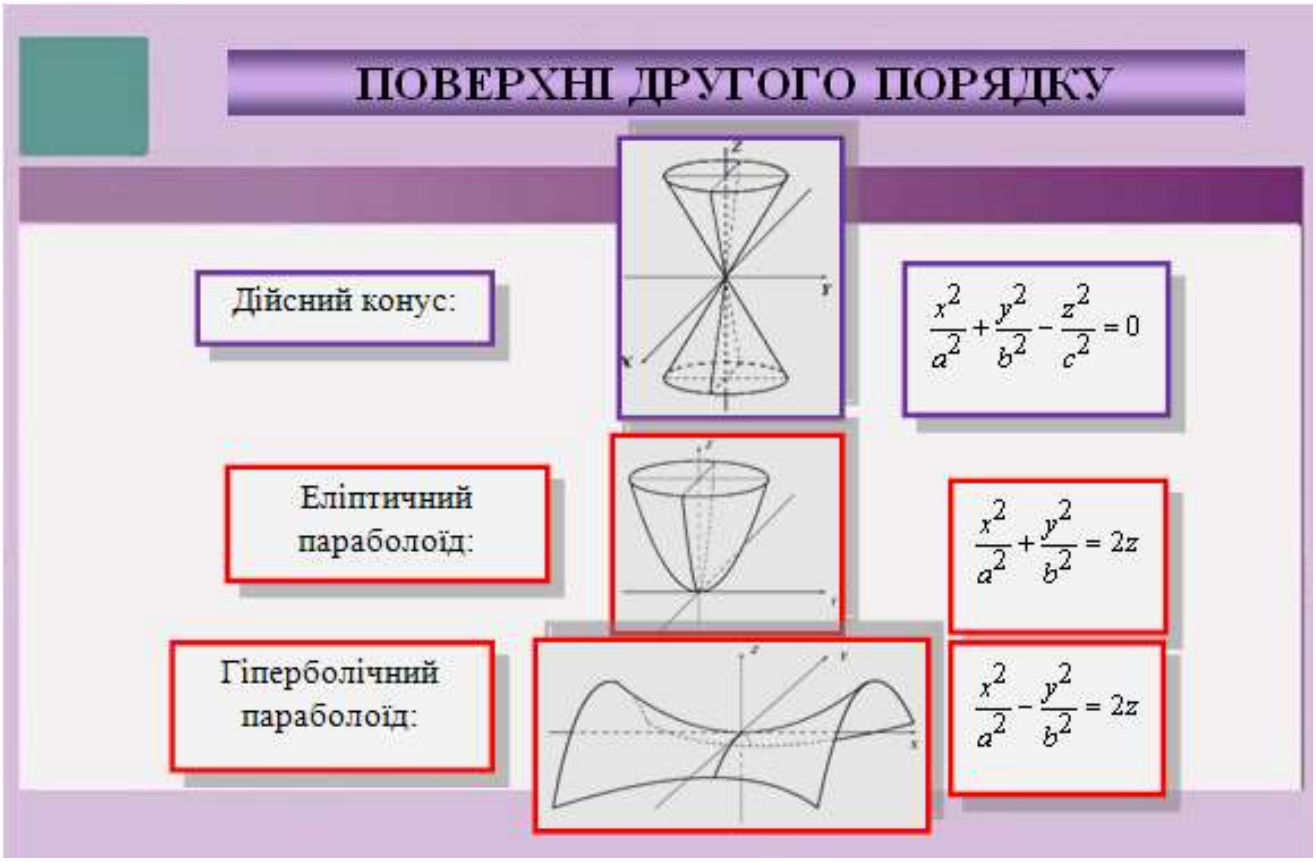


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Гіперболічний циліндр:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Рівняння $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{4}=y^2$ у просторі визначає

   А) гіперболічний циліндр; Б) конус другого порядку;

   В) еліптичний параболоїд; Г) однопорожнинний гіперболоїд.

2. Гіперболічний циліндр у просторі можна задати рівнянням

   А) $\frac{x^2}{9}+y^2=0$, Б) $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{36}+y^2=9$,

   В) $\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{9}=1$, Г) $\frac{x^2}{9}=1$.

3. Рівняння $x-2y^2+5z^2=0$ визначає

   А) ніперболічний параболоїд; Б) гіперболічний циліндр;

В) еліптичний параболоїд; Г) однопорожнинний гіперболоїд.

4. Однопорожнинний гіперболоїд можна задати рівнянням

А) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}-y^2=-1$, Б) $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{36}+y^2=-9$,

В) $\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{9}=1$, Г) $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}-y^2=1$,

5. Якщо обертати навколо осі z гіперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, то отримаємо

А) гіперболічний параболоїд; Б) гіперболічний циліндр;

В) двопорожнинний гіперболоїд; Г) однопорожнинний гіперболоїд.

6. Яка поверхня задається рівнянням $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$?

А) гіперболічний циліндр; Б) конус другого порядку;

В) еліптичний циліндр; Г) еліптичний параболоїд;

7. Яке з наступних рівнянь визначає еліпсоїд?

А) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}+y^2=1$, Б) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{36}+y^2=0$,

В) $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$, Г) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}+y^2=1$,

8. Рівняння $\frac{x^2}{25}=z$ у просторі визначає

А) еліптичний циліндр; Б) гіперболічний циліндр;

В) двопорожнинний гіперболоїд; Г) параболічний циліндр.

9. Яке з наступних рівнянь визначає еліптичний параболоїд?

А) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}+y=0$, Б) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{36}-y=0$,

В) $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$, Г) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$,

10. Рівняння $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ у просторі визначає

А) еліптичний циліндр; Б) конус другого порядку;

В) сфера Г) двопорожнинний гіперболоїд;

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Це цікаво!

Конуси – це сімейство морських молюсків-хижаків. Існує більше 500 видів, розповсюджені у тропіках і субтропіках.

Мушля конусів високо оцінюється колекціонерами. Конус Глоріамаріс (Conus gloriamaris) так звана «Слава морів» вважається найгарнішою мушлею у світі.





Приклади розв'язування деяких задач:

1. Визначіть вид поверхні шляхом перетворення лівої частини рівняння $9x^2+16y^2+36z^2-18x+64y-216z+253=0.$

Розв'язування.

Доповнюючи відповідні члени в лівій частині рівняння до повних квадратів, маємо:

$$9\left(x^2-2x+1-1\right)+16\left(y^2+4y+4-4\right)+36\left(z^2-6z+9-9\right)+253=0,$$

$$9(x-1)^2+16(y+2)^2+36(z-3)^2=144.$$

Поділивши обидві частини рівності на 144, одержимо

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{4}=1.$$

Отже, маємо рівняння трьохосьового еліпсоїда з півосями $a=4$, $b=3$, $c=2$ і центром у точці $M_0(1; -2; 3)$.

2. З'ясуйте яку поверхню визначає рівняння:

$4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x + 54y - 72z - 65 = 0$?

Розв'язування.

Виділивши у лівій частині рівняння повні квадрати, одержимо

$$4(x-2)^2 - 9(y+3)^2 + 36(z-1)^2 = 36.$$

Поділивши обидві частини рівності на 36, одержимо поверхню другого порядку з центром симетрії в точці M_0 (2; -3; 1):

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

Таким чином, ми отримали однопорожнинний гіперболоїд з центром в точці (2,-3,1). Проведемо дослідження цієї поверхні методом перерізів.

У перерізі поверхні площиною *z=1* одержимо гіперболу: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$

У перерізі площиною *x=2* – гіперболу: $-\frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$

А у перерізі площиною *y=-3* – еліпс: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$

3. Складіть рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є парабола $y^2 = 4x, z = 0$, а твірні паралельні вектору $\bar{s}(2, 1, 1)$.

Розв'язування.

Канонічні рівняння твірних мають вигляд:

$$\frac{X - x}{2} = \frac{Y - y}{1} = \frac{Z - z}{1}$$

Враховуючи, що $z = 0$, маємо: $= X - 2Z, y = Y - Z.$

Підставивши ці значення x і y у рівняння напрямної, отримаємо шукане рівняння циліндричної поверхні: $(Y - Z)^2 = 4(X - 2Z)$.

4. Складіть рівняння конуса з вершиною у початку координат і напрямною $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = c$.

Розв’язування.

Канонічне рівняння твірних, що проходять через початок координат і точку (x, y, z) напрямної, має вигляд:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

Враховуючи, що $z = c$, маємо: $x = \frac{cX}{Z}, y = \frac{cY}{Z}$.

Підставивши ці значення x і y у рівняння напрямної, отримаємо шукане рівняння конуса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$



Підготовка до лабораторної роботи

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних умінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Запишіть рівняння сфери, що має центр у точці:

1) A(2,-1,3) і радіус $R = 6$;
2) O(0,0,0) і проходить через точку (0,-2,3).

2. Задано точки A(2,-3,6), B(0,7,0), C(3,2,-4), D(1,-4,-5). Встановіть, які з цих точок належать поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 49$? Яку поверхню задано цим рівнянням?

3. На поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ знайдіть точку, для якої:

1. Абсциса дорівнює 1, ордината – 2;
2. Абсциса дорівнює 2, ордината – 5;
3. Абсциса дорівнює 2, апліката – 2;
4. Ордината дорівнює 2, апліката – 4.

4. Дослідіть перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ площинами, паралельними координатним площинам. Знайдіть його вершини і довжину осей.

5. Задано однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$. Знайдіть лінії його перетину з координатними площинами.

6. Яким чином треба перетворити координати точок двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, щоб після рівномірного стиснення вздовж осі *Oz* він перетворився у двопорожнинний гіперболоїд обертання?

7. Складіть рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є коло $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ z=0 \end{cases}$, а твірні паралельні вектору $\bar{s}=(5,3,1)$.

8. Складіть рівняння конічної поверхні з вершиною у точці (4,5-3) і напрямною $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$.

9. Складіть рівняння еліпсоїда з вершинами A(0,0,6) і B(0,0,-2), якщо відомо, що координатна площина π = OXY перетинає його по колу радіуса R = 3.

10. Складіть рівняння двопорожнинного гіперболоїда з вершинами A(0,0,9) і B(0,0,-9), якщо відомо, що координатні площини π_1 = OXZ і π_2 = OYZ є його площинами симетрії і перетинають його по гіперболам, асимптоти яких утворюють з віссю l = OZ кути, які дорівнюють відповідно $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Питання для обмірковування

1. Чи правильно, що рівняння $x^2+y^2+z^2=p$ є рівнянням сфери?
2. Яким рівнянням може задаватись гіперболічний параболоїд?

3. Якими рівняннями у просторі може задаватись циліндрична поверхня?
4. Який геометричний об’єкт задається рівнянням $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}+\frac{y^2}{36}=0$?
5. Які поверхні обертання Вам відомі?

Перед розв’язанням додаткових задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Поверхні другого порядку» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «****Приклади розв’язування деяких задач****» або звернутися за* ***консультацією до викладача.***



Додаткові задачі

Пропонуємо роботу у такий спосіб: Ви працюєте у групі (3-4 студента), обговорюєте розв’язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №11-13 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв’язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв’язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. **Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала *80 см*, глибина *10 см*. Складіть рівняння поверхні, обравши систему координат таким**

чином, щоб її початок збігався з вершиною параболи, вісь ординат пройшла по дотичній до неї, а вісь абсцис – через фокус параболи в напрямку від вершини.

2. **Резервуар охолоджувальної башти має форму кулі, що описується рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Промені Сонця, що висвітлюють резервуар, паралельні прямій $x = 0, y = z$. Знайдіть форму тіні резервуара на площині *xOy*.**

3. **Напишіть рівняння прямолінійних твірних, на яких розташовані балки металевої опори, виконаної у вигляді однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, якщо ці твірні перетинаються в точці А (2, 4, 4).**

4. **Визначте, при якому значенні *m* площина $x - 2y - 2z + m = 0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$.**

5. **Доведіть, що двопорожнинний гіперболоїд, який задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, може бути отриманий внаслідок обертання гіперболи $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, y = 0$ навколо вісі Oz і наступного рівномірного стискання простору до площини Oxz.**

6. **Запишіть рівняння поверхні, яка отримана обертанням еліпса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1, x = 0$ навколо вісі Oy.**



Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі

*www.agportal.org.ua у розділі «**Курс АНГ/СРС**» та «**Додатково/Навчальні відеоматеріали**»*

Чи знаєте Ви, що…

поверхні другого порядку знаходять широке застосування у техніці, багато об’єктів навколишнього світу (астрономічних, архітектурних) мають форму таких поверхонь.

Усім відомо, що Земля має форму еліпсоїда обертання.

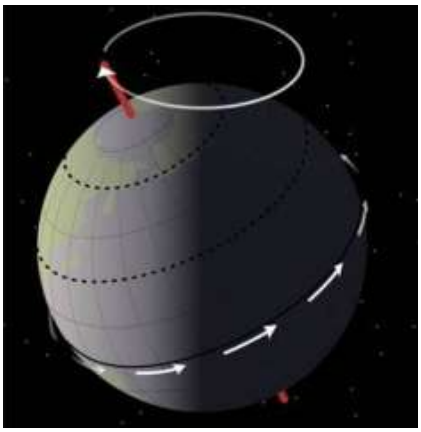


Рисунок 10.1 – Планета Земля

Крім того, еліпсоїди застосовуються у медицині при визначенні поглиненої радіаційної дози. Еліпсоїдна форма була обрана у зв'язку з тим, що вона дозволяє утворювати численні геометричні комбінації для відображення конкретної тканини, усього тіла або анатомічної області. Представляючи масиви тканини як еліпсоїди, можна покращити оцінку розсіяння енергії у конкретних органах, органелах або у сукупностях тканин.

Багато споруд мають форму циліндрів, зокрема, у Донецьку. Дах однієї з будівель готелю Вікторія (м. Донецьк) має форму параболічного циліндру (рис. 10.2).



Рисунок 10.2 – Готель Вікторія (м. Донецьк)

Зараз багато споруд будують у вигляді еліптичного та кругового циліндру (рис. 10.3).



Рисунок 10.3 – Золоте кільце (м. Донецьк)

Також велику кількість будівель прикрашено колонами, що мають форму еліптичних циліндрів (рис. 10.4).



Рисунок 10.4 – Будівля на центральній площі Донецька

Конуси також знаходять широке застосування. Наприклад, деталь у формі конуса присутня у конусній дробарці — машині для дроблення твердих матеріалів за допомогою розчалення грудок всередині нерухомої

конусоподібної чаші конусом, що здійснює кругове гойдання (гіраційний рух) (рис. 10.5).



Рисунок 10.5 – Загальний вигляд конусної дробарки

Однопорожнинні гіперболоїди використовуються при побудові веж Шухова (сітчастих вежевих конструкцій, утворених прямолінійними стрижнями, що містяться вздовж поверхні однопорожнинного гіперболоїда). Першу таку вежу спроектував російський інженер В. Г. Шухов (1853 – 1939) у січні 1896 року для Всеросійської промислової виставки у Нижньому Новгороді (рис. 10.6). Пізніше за системою Шухова було побудовано більш ніж 200 сталевих споруд: водонатискні вежі, морські маяки, радіовежі, опори ліній електропередач, вежі на кораблях військового флоту, пожежні та сигнальні вежі. Вежі Шухова складаються з декількох гіперболоїдних секцій, які монтують одна на одну «телескопічним методом», розробленим Шуховим. Всередині нижньої частини вежі, що змонтована у проектному становищі, послідовно складають, а потім піднімають наступні секції.



Рисунок 10.6 – Перша у світі гіперболічна вежа на виставці у Нижньому Новгороді



Рисунок 10.7 – Сіднейська телевежа

Двопорожнинний гіперболоїд знаходить застосування у науці і техніці завдяки своїй властивості відбивати промені, спрямовані в один з фокусів, в інший фокус. Зокрема, двопорожнинний гіперболоїд використовується в телескопах системи Кассегрена і в антенах Кассегрена (рис. 10.8).



Рисунок 10.8 – Антена АДУ-1000, виконана за схемою Кассегрена

Форму параболоїду обертання мають параболічні рефлектори, дзеркала, антенні тарілки тощо. Форма рідини, що обертається в рідинно-дзеркальних телескопах, також є параболоїдом обертання.



Рисунок 10.9 – Супутникові антени

Форму гіперболічного параболоїду мають сідлові висячі покриття будинків (так званих ролі-арен), що складаються з системи пересічних

тросів, утворюючих сітку. Перша будівля з подібною конструкцією з'явилася у 1953 році у США (штат Північна Кароліна) за проектом архітектора М. Новицького. Сідлові висячі покриття (рис. 10.10) зводять без використання лісів (за допомогою легких підйомних механізмів), дозволяючи тим самим знизити вартість будівництва і скоротити його терміни.

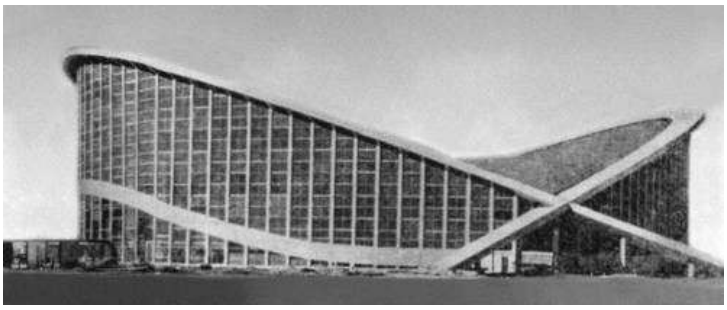
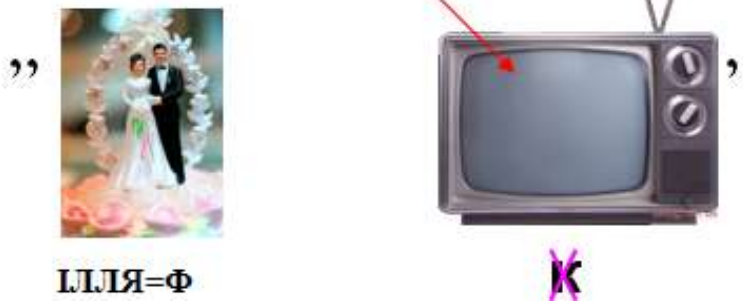


Рисунок 10.10 – Загальний вигляд ролі-арени

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З'ясуйте, яку поверхню визначає ребус, та запишіть її рівняння:



.....

ТЕМА № 11 *"Дослідження поверхонь ІІ порядку"*



Основні питання

Дослідження поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів. Знаходження центру поверхні другого порядку. Характеристичне рівняння поверхні другого порядку. Приведене рівняння поверхні другого порядку.



Рекомендована література

1. **[1], Гл 5, §3- §4 (стор.135-146).**
2. **[6], Гл 7, §2- §3 (стор.189-205).**
3. **[18], Розділ 6 §6.2 (стор.125-128).**
4. **[24], №№ 980, 981, 984, 986, 987, 988, 990, 991, 994.**
5. **[37].**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

- **http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/**
- **http://www.agportal.org.ua/kurs-ang/kurs/lektsionnye-zanyatiya/konspekty-lektsij/66-konspekt-lektsij-losevoji-nm-tema-7**

11 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ 2 ПОРЯДКУ

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

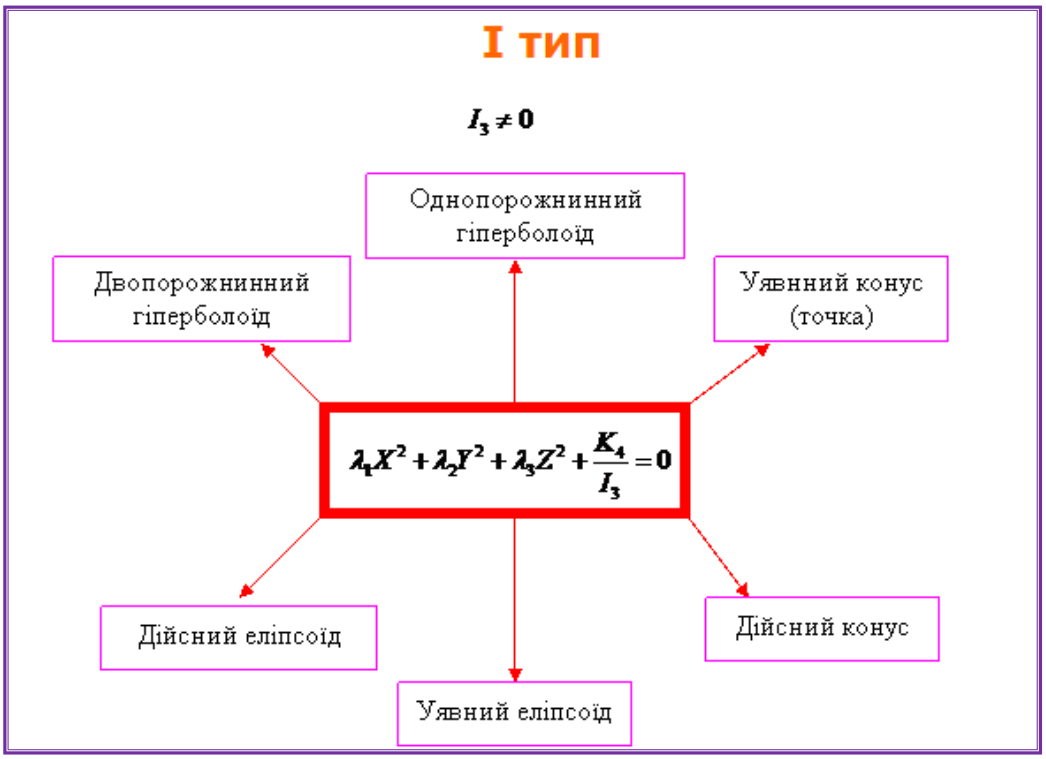
– загальне рівняння поверхні другого порядку, за умови, що хоча б один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнює 0.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \quad K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & a_{24} \\ a_{123} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Класифікація поверхонь другого порядку



II тип

$$I_3 = 0, K_4 \neq 0$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}} Z = 0$$

- Еліптичний параболоїд
- Гіперболічний параболоїд

III тип

$$I_3 = 0, K_4 = 0$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$$

- Дві уявні площини, що перетинаються (пряма)
- Гіперболічний циліндр
- Дійсний еліптичний циліндр
- Дві дійсні площини, що перетинаються
- Уявний еліптичний циліндр

IV тип

$$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0$$

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} Y = 0$$

- Параболічний циліндр

V тип

$$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0$$

$$X^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0$$

- Дві дійсні паралельні площини
- Дві площини, що співпадають
- Дві уявні паралельні площини



Розв’яжіть задачі

Вам пропонується набір вправ для здобуття певних вмінь і навичок, що необхідні для успішного оволодіння темою дисципліни. Виконання не менше 60% *усіх завдань свідчить про те, що Ви можете переходити до розв’язування задач прикладного змісту. Якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні труднощі – Вам варто повторити теоретичний матеріал ще раз.*

1. Визначте тип поверхні, заданої рівнянням $z = xy$.

2. Визначте вид поверхні, використовуючи інваріанти, складіть її канонічне рівняння і знайдіть канонічну систему координат.

1) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$

2) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8zx - 4x - 8y + 3 = 0$

3) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$

4) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y + 2z + 4 = 0$

3. Складіть рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої лежить у площині OXY і визначає рівняння $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а твірні паралельні вектору $\overline{p}(1;0;1)$.

4. Складіть рівняння конічної поверхні з вершиною у точці $M_0(1;0;1)$ і напрямною L, що лежить у площині OXY і задається рівнянням $x^2 + y^2 - y = 0$.

5. Складіть рівняння конуса, описаного навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, якщо відомо, що вершина конуса знаходиться в точці $M_0(0;0;8)$.

6. Запишіть канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо він перетинає площину OXY по колу $x^2 + y^2 = 9$, а площину OXZ – по гіперболі $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$.

7. На гіперболічному параболоїді $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}$ знайдіть прямолінійні твірні, що паралельні до площини $3x + 2y - 4z = 0.$

8. Складіть рівняння еліптичного параболоїда з вершинами A(2,3,6) і віссю симетрії, паралельною до осі OZ, якщо відомо, що площина OXY перетинає його вздовж еліпсу, вісі якого паралельні осям OX і OY, причому еліпс їх дотикається.

9. Складіть рівняння гіперболічного параболоїда, якщо відомо, що він проходить через задану гіперболу $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 4 \end{cases}$, його площинами симетрії є декартові площини OXZ і OYZ, а площина OXY перетинає його по двом прямим.

10. Складіть рівняння еліптичного параболоїда, якщо відомо, що площини π_1: $x = 3$ і π_2: $z = 4$ перетинають його по параболам з вершинами A(3,5,0) і B(0,5,4), площина OXZ дотикається параболоїда в його вершині, а площини OXY та OYZ є його площинами симетрії.

Після розв'язанням задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Поверхні другого порядку» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у*

Щодо проблемних питань, які виникли при розв'язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»****;*
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

Розгадай ребус

Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, яку поверхню визначає ребус, та запишіть її рівняння:

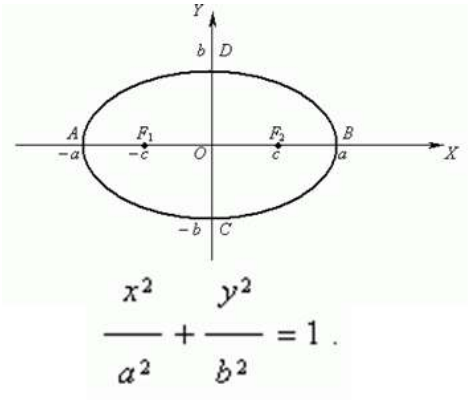
С  , , вера

.....

 , Н  ,

I=O

.....

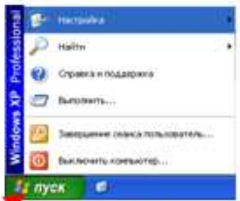


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

+ ,,,, 

.....






Б=Ї

Д ↔ О

.....



ТА=ПЕ




Ж=Д

.....

5=Б



О

Ж=Д



.....



Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі* ***«Курс АНГ/СРС»*** *та* ***«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Чи знаєте Ви, що …

у світі багато споруд у світі мають незвичну форму поверхонь обертання та поверхонь другого порядку.



Музей-панорама "Сталінградська битва" у Волгограді, Росія
(має форму гіперболоїда обертання)



Нова Александрійська бібліотека, Єгипет
(у вигляді усіченого циліндра)



«Донбас Арена» у Донецьку, Україна



Театр Опери у Пекіні, Китай
(має форму усіченого еліпсоїда)



Будинок у вигляді головки сиру, Японія



Будинок-кокос, США



Для майбутніх науковців

Пропонуємо Вам обрати один або два пункти з цього розділу за бажанням.

1. Венгерський кросворд «Аналітична геометрія»

У кросворді зашифровані 19 понять аналітичної геометрії. Знайдіть їх, викреслюючи літери в будь-якому напрямку, окрім діагоналі.

К	О	О	І	З	Ц	И	О	Ї	П	Л	О
И	Д	Р	Р	О	К	К	Л	Д	А	И	Щ
Н	В	І	Д	О	Р	Ф	С	А	В	Н	А
А	Т	И	К	Т	К	О	П	Е	И	Р	К
Р	И	В	Е	С	У	Л	І	К	С	Ц	Е
Т	С	А	Е	Р	Я	Е	Е	В	Р	Т	Н
К	Е	Е	Р	І	Н	Х	Р	О	И	Д	Ї
И	Р	П	І	З	Р	І	А	П	С	И	О
Д	Р	Б	Н	В	А	Т	Н	Н	Ь	Т	Л
П	Е	О	І	П	О	К	Т	А	Т	Е	О
І	А	Л	Р	С	Н	В	С	А	Р	А	Б
Г	Ь	Л	А	С	У	І	Д	П	О	Р	Т

Підказка: КООРДИНАТИ, ВІДРІЗОК, ЦИКЛОЇДА, ВЕКТОР, ПЛОЩИНА, ОРТ, КРИВА, ЕЛІПС, ПЕРЕРІЗ, ФОКУС, ДИРЕКТРИСА, ЕКСЦЕНТРИСИТЕТ, ІНВАРІАНТ, ПОВЕРХНЯ, ПАРАБОЛОЇД, ВІДСТАНЬ, ГІПЕРБОЛА, СПІРАЛЬ, КОНУС

2. Оберіть правильне співвідношення «геометричне тіло обертання – інтерпретація в архітектурі або природі»

a) параболоїд b) циліндр

c) конус d) гіперболоїд

А. 

Б. 

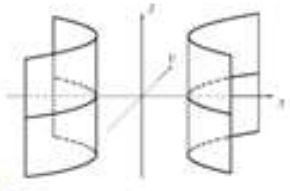
В. 

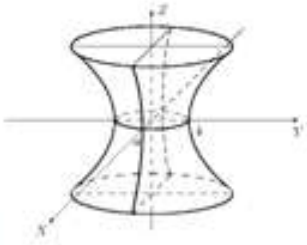
Г. .

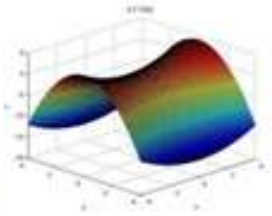
Оберіть правильне співвідношення «геометричне тіло обертання – геометричний образ»

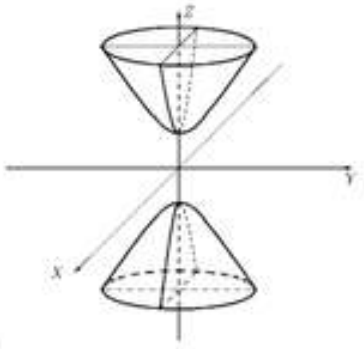
a) гіперболічний параболоїд b) однопорожнинний гіперболоїд

c) двопорожнинний гіперболоїд d) гіперболічний циліндр

А. 

Б. 

В. 

Г. 

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №8

"Дослідження поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів у MS Excel"

Головна мета: здобуття студентами навичок дослідження поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів, обчислених у програмному середовищі MS Excel. Ці засоби корисно використовувати у тих випадках, коли обчислення визначників є допоміжним, а не основним етапом розв'язування задачі.

Устаткування: комп'ютер, MS Excel, ППЗ Gran 3D.

Хід роботи (інструкція для студента)

Пропонуємо Вам обрати одну вправу з кожного пункту, номер якої відповідає Вашому номеру у списку академічної групи.

1. Знайшовши за допомогою MS Excel значення інваріантів поверхні другого порядку, визначіть її тип і геометричний образ.

1. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 14zy - 13z^2 = 0;$

2. $14x^2 + 24z^2 + 21y^2 - 4xz + 18yz - 139y = 0;$

3. $4x^2 + 24y^2 + 11z^2 + 64xz + 42xy + 51zy = 0;$

4. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20z^2 + 110yz - 50z = 0;$

5. $25x^2 - 14z^2 + 25y^2 + 64xz - 64yz - 224 = 0;$

6. $11x^2 - 20zy - 4y^2 - 20xz - 8y + z^2 = 0;$

7. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24zx - 16z^2 + 3z = 0;$

8. $7x^2 + 60xy + 32z^2 - 14x - 60y + 7 = 0;$

9. $3z^2 - 8xz + 7y^2 + 8x - 15yz + 20z = 0;$

10. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160z^2 + 120z + 425 = 0;$

11. $7x^2 + 6xy - z^2 + 28z + 12y + 28 = 0;$

12. $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100xz - 8yz + 67z^2 = 0;$

13. $41z^2 + 24xy + 9y^2 + 24zx + 18yz - 36 = 0;$

14. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18z^2 + 226zy + 209 = 0;$

15. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38z^2 + 6y + 29z = 0;$

16. $2x^2 + 10xz + 12z^2 - 7x + 18y - 15 = 0;$

17. $x^2 - 2xy + z^2 - 12x + 12z - 14 = 0;$

18. $5x^2 - 2z^2 + 5y^2 - 4zx + 20yz + 20 = 0;$

19. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + z^2 + 82zx - 96zy - 91z = 0;$

20. $5x^2 + 14xy + 11y^2 + 2z^2 + 12xz - 7yz + 19z = 0.$

2. Знайшовши за допомогою MS Excel значення інваріантів поверхні другого порядку, знайдіть корені характеристичного рівняння і запишіть зведене рівняння поверхні другого порядку.

1. $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 18z^2 = 0;$

2. $3x^2 - 8xy + 5y^2 + 8xz + 15y - 20z = 0;$

3. $3x^2 - 2z^2 - 3y^2 + 12y - 15 = 0;$

4. $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 5z^2 = 0;$

5. $29x^2 - 24zy + 36y^2 + 82xz - 96z^2 - 91 = 0;$

6. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34z - 112y + 129 = 0;$

7. $25x^2 - 14xy + 25z^2 + 64z^2 + 42y + 51 = 0;$

8. $17y^2 + 12xy + 8z^2 = 0;$

9. $11x^2 + 20z^2 - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$

10. $5x^2 - 6zy + 5y^2 + 8 = 0;$

11. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8xz - 22zy - 5z^2 + 4x - 6y + 2z - 4 = 0;$

12. $5x^2 + 12xy - 22z - 12zy - 19 = 0;$

13. $41x^2 + 24z^2 + 34y^2 + 34xz - 112zy + 129xy = 0;$

14. $50x^2 - 8xy + 35z^2 + 100x - 8y + 67 = 0;$

15. $9x^2 + 4xz + 41z^2 + 4x - 2y + 10z = 0;$

16. $2x^2 + 24xy + 6y^2 + 28x - 4y + 56 = 0;$

17. $13z^2 + 6xy + 34y^2 - 42xz - 2zy + 5z = 0;$

18. $25x^2 + 10xy + 3z^2 + 24x - 2z^2 + 210 = 0;$

19. $2x^2 + 4xy + 15y^2 + 15z^2 - 8x + 6y - 14z + 5 = 0;$

20. $15x^2 + 4xy + 7y^2 + 6z^2 + 32yz + 2xz + 3z + 4x - 5y + 2 = 0.$

ТЕМА № 12 *"Геометричні перетворення"*



Основні питання

Визначення геометричних перетворень. Типи геометричних перетворень. Основні формули. Розв'язання геометричних задач за допомогою геометричних перетворень



Рекомендована література

1. **[6], Гл 3, §1- §3 (стор.76-92).**
2. **[18], Розділ 8, (стор.155-165).**
3. **[8], №№ 127, 128, 130, 131, 132, 134, 139, 140, 142, 143, 144, 145.**

Посилання на інтерактивний портал «Аналітична геометрія»:

http://agportal.org.ua/kurs-ang/vspomogatelnye-sredstva/uchebniki/

12 ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Паралельне перенесення $T_{\overrightarrow{(a,b,c)}}$ **на вектор** $\overrightarrow{(\mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c})}$**:**

$$\begin{cases} x_1 = x + a; \\ y_1 = y + b; \\ z_1 = z + c; \end{cases}$$

Поворот на площині R_O^{α} **на кут α:**

$$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ \tilde{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Симетрія відносно Z_0 **точки** $(\mathbf{x_0};\mathbf{y_0};\mathbf{z_0})$:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_0 - x_1; \\ y_2 = 2y_0 - y_1; \\ z_2 = 2z_0 - z_1. \end{cases}$$

Симетрія S_l **відносно прямої** l: $\mathbf{ax + by + c = 0}$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2}; \\ y' = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2bc}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Гомотетія H_0^k **з центром у точці** $O(\mathbf{x_0};\mathbf{y_0};\mathbf{z_0})$ **і коефіцієнтом подібності k:**

$$\begin{cases} x'' = k(x - x_0) + x_0; \\ y'' = k(y - y_0) + y_0; \\ z'' = k(z - z_0) + z_0. \end{cases}$$

№	Перетворення	Позначення	Означення
1.	Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$	$T_{\vec{a}}$	$T_{\vec{a}}(M)=M' : \overrightarrow{MM'}=\vec{a}$
2.	Центральна симетрія відносно точки O	Z_0	$Z_0(M)=M'$: $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OM'}$,
3.	Симетрія відносно прямої l	S_l	$S_l(M)=M'$: $MM' \perp l$, $MO=OM'$, $де\ O=MM' \cap l$
4.	Симетрія відносно площини α	S_α	$S_\alpha(M)=M'$: $MM' \perp \alpha$ $MO=OM'$, $де\ O=MM' \cap \alpha$
5.	Поворот навколо точки O площини на кут α	R_O^α	$R_O^\alpha(M)=M'$: $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}\right)=\alpha$, $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$
6.	Поворот навколо прямої l простору на кут α	R_l^α	$R_l^\alpha(M)=M'$: $M \in \alpha,\ \alpha \perp l,\ O=\alpha \cap l$ $M'=R_O^\alpha(M)$
7.	Гомотетія з центром в точці O і коефіцієнтом k	H_0^k	$H_0^k(M)=M'$: $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$
8.	Стиснення до прямої l з коефіцієнтом k	H_l^k	$H_l^k(M)=M'$: $\rho(M',l)=k\,\rho(M,l)$
9.	Тотожнє перетворення	E	$E(M)=M$



Тест актуалізації знань

Правильні відповіді на тест Ви можете знайти на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія» (www.agportal.org.ua) *у розділі «**Курс АНГ/Практичні заняття**».*

1. Початок координат переноситься в точку $O_1(3;-4)$. Знайдіть координати точки А у початковій системі, якщо координати в новій системі $A_1(1; 3)$ мають вигляд:

   А) (4,7); Б) (4,-1); В) (2,-7); Г)інша відповідь.

2. Формули перетворення координат задано рівняннями $x=x_1+3$; $y=y_1+5$. «Старі» координати початку O_1 нової системи мають вигляд:

   А) (3,5); Б) (-3,-5); В)(0,0); Г) інша відповідь.

3. Вісі координат повернули на кут –45 °. Координати точки А(3; 1) у новій системі координат мають вигляд:

   А) (2,2); Б) $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; В) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; Г)інша відповідь.

4. Перетворення координат задано таким чином: $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$. Вісі координат були повернуті на кут:

   А) $\frac{\pi}{4}$; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) $\frac{\pi}{6}$; Г) $-\frac{\pi}{3}$.

5. Полярна вісь полярної системи координат паралельна вісі абсцис ДСК та однаково напрямлена з нею. Координати полюса О (1; 2). Координати точки$(7; \frac{\pi}{2})$ в ДСК має вигляд:

   А) (8,2); Б) (3,4); В)(1,9); Г) інша відповідь.

6. Полюс полярної системи координат співпадає з початком координат ДСК. Полярна вісь направлена за бісектрисою I координатного кута. Полярні координати точки (-1; 1) мають вигляд:

   А) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$ Б)$(2, \frac{\pi}{6})$; В)$(1, -\frac{\pi}{2})$; Г)(0,0).

7. В результаті декількох послідовних паралельних перенесень ми отримаємо перетворення подібності, яке називається:

А) тотожнім перетворенням; Б) паралельним перенесенням;

В) поворотом Г) симетрією відносно площини.

8. Послідовно застосовані паралельні перенесення на вектори $\bar{a}(-1;0;4)$, $\bar{b}\,(0;1;-2)$ і $\bar{c}\,(1;-1;-2)$ задають в результаті …

А) тотожнє перетворення; Б) паралельне перенесення;

В) поворот Г) симетрію відносно площини.

9. Послідовно застосовані повороти на 73^0, 75^0, 50^0, 82^0, 80^0 зададуть в результаті ...

А) тотожнє перетворення; Б) паралельне перенесення;

В) поворот Г) симетрію відносно площини.

10. До класу фігур, гомотетічних заданому колу, входить:

А) еліпс; Б) коло;

В) циклоїда Г) парабола.

Відповіді:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10



Приклади розв'язування деяких задач:

1. Доведіть, що дві площини конгруентні між собою.

Доведення.

Якщо площини перетинаються, то поворот навколо лінії перетину на кут, рівний куту між площинами, відображає одну площину на другу.

Якщо площини паралельні, то їх можна сумістити паралельним перенесенням на вектор, який визначається двома точками, взятими на кожній з площин.

2. Дві сторони квадрата ABCD спочатку співпадали з осями координат (AB = 5). Потім квадрат був пересунутий так, що вершина A, яка збігалася раніше з початком координат, перешла в точку $A_1(2,2)$, а сторона AB, яка лежала на осі *x*, виявилася поверненою на кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Визначіть нове положення інших трьох вершин.

Розв'язування.

Точка A внаслідок переміщення була перенесена на вектор $\bar{a}(2,2)$, а відрізок AB повернений на кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Внаслідок таких двох перетворень точки площини перетворюються за законом:

$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\frac{\pi}{4} + y\sin\frac{\pi}{4}, \\ \tilde{y} = -x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4}, \end{cases}$ $\begin{cases} x' = \tilde{x} + 2, \\ y' = \tilde{y} + 2, \end{cases}$ де (x', y') – нові координати.

Тоді маємо:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2, \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2. \end{cases}$$

Старі координати: B(5,0), C(5,5), D(0,5).

Нові: $B\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2,\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2\right)$; $C\left(5\sqrt{2} + 2,\ 2\right)$; $D\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2,\ \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2\right)$

3. Доведіть, що парабола і гілка гіперболи не конгруентні.

Доведення.

Доведення від супротивного. Нехай парабола і гілка гіперболи конгруентні, тобто існує переміщення, яке відображає гілку гіперболи на параболу. Образом асимптот гіперболи при переміщенні є дві прямі. Що перетинаються. З означень переміщень і асимптоти випливає, що парабола теж повинна мати асимптоти. Це протиріччя властивостям параболи.

4. Обчисліть координати точки, симетричної до точки A (2,1) відносно прямої *y = 3x +1*.

Розв'язування.

Запишем рівняння прямої у загальному виді 3x–y+1=0, тоді a=3, b= –1, c =1.

Згідно з формулою знаходження координати точки, симетричної відносно прямої, маємо:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-3^2}{3^2+1}\cdot 2 - \dfrac{2\cdot 3\cdot(-1)}{3^2+1}\cdot 1 - \dfrac{2\cdot 3\cdot 1}{3^2+1} = -\dfrac{4}{5}\cdot 2 + \dfrac{3}{5}\cdot 1 - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{8}{5}; \\ y' = \dfrac{3^2-1}{3^2+1}\cdot 1 - \dfrac{2\cdot 3\cdot(-1)}{3^2+1}\cdot 2 - \dfrac{2\cdot(-1)\cdot 1}{3^2+1} = \dfrac{4}{5}\cdot 1 + \dfrac{3}{5}\cdot 2 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{5}. \end{cases}$$

Відповідь:$\left(-\frac{8}{5};\ \frac{11}{5}\right)$

5. Доведіть що дві довільні сфери подібні.

Доведення.

За допомогою параллельного перенесення сумістимо центри заданих сфер. Нехай O – їх спільний центр. За допомогою гомотетії з центром у точці O і коефіцієнтом гомотетії, що дорівнює відношенню радіусів цих сфер, відобразимо отримані сфери одна на одну. Композиція параллельного перенесення і гомотетії є перетворенням подібності. Таким чином, одна сфера відобразилась на другу за допомогою перетворення подібності.

6. Знайдіть симетрії відрізка на площині.

Доведення.

Існує чотири переміщення площини, які відображають відрізок AB на себе: S_{AB}, S_l, Z_0 і E. Відсутність інших переміщень випливає з твердження: якщо відрізки AB і A_1B_1 рівні, то існує рівно два переміщення, кожне з яких відображає точку A в точку A_1, а точку B в точку B_1. Це твердження іноді розглядають як аксіому при аксіоматичній побудові геометрії.



Розгадай ребус

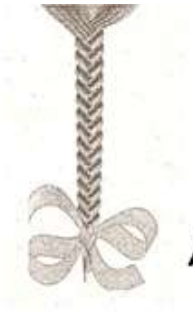
Правильні відповіді на ребуси Ви можете дізнатися на інтерактивному порталі ***www.aqportal.org.ua*** *у розділі «**Курс АНГ/СРС**».*

З’ясуйте, яку систему координат визначає ребус, та напишіть міні-твір про неї.

А + Ф=ФФ  + НА

.....

.....

 , +  , +  Р=Т

.....

.....

 Е=Я + ,,  Т=Н

.....

.....

Перед розв’язанням задач рекомендуємо пройти інтерактивне тестування на порталі з теми «Геометричні перетворення» у розділі ***«АНГ онлайн/Онлайн тестування»*** *і, якщо розв'язання цих вправ викликало у Вас певні утруднення, пропонуємо ще раз опрацювати розділ посібника «**Приклади розв’язування деяких задач**» або звернутися за **консультацією до викладача.***



Розв’язуємо задачі

Розв’язання задач пропонуємо у такий спосіб: Ви працюєте у парі зі своїм одногрупником, обговорюєте розв’язання запропонованих задач, висуваєте свої ідеї, користуючись опорними конспектами посібника, слайд-лекцією №15 або літературою, наявною на інтерактивному порталі «Аналітична геометрія». Ваша задача – розв’язати якомога більше задач.

Щодо проблемних питань, які виникли при розв’язанні додаткових задач, Ви можете:

- *проконсультуватись з викладачем в режимі чату ви зможете щотижня у назначений час за допомогою панелі* ***«Онлайн-консультація»;***
- *обговорити з іншими студентами і викладачем у блоці «Коментарі» для цієї лабораторної роботи (****Курс АНГ/Практичні заняття/Лабораторні роботи)****.*

1. Побудуйте прямокутник. Перевірте за допомогою перегинання аркушу, чи буде диагональ прямокутника його віссю симетрії? Якщо так, то з’ясуйте за яких умов.
2. Задано вершини прямокутного трикутника АВС: А(0,0), В(8,0), С(0,6). Ці вершини симетрично відобразили відносно медіани, опущеної на гіпотенузу. Знайдіть координати вершин отриманого трикутника.
3. Задано вершини трикутника АВС: А(2,1), В(-3,2), С(-2,3). Обчисліть координати вершин трикутника $A_1B_1C_1$ симетричного заданому відносно точки М – точки перетину медіан ΔАВС.
4. Побудуйте центр симетрії таких фігур:

   а) двох рівних кутів (в яких випадках розв’язання цього завдання можливо),

б) двох рівних кіл (розгляньте всі можливі випадки),

в) двох рівних трикутників (в яких випадках вони можуть бути центрально симетричні?)

5. Які точки при симетрії відносно вісі l переходять самі в себе? Які прямі при симетрії відносно вісі l переходять самі в себе?

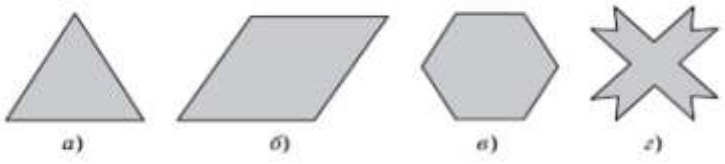
6. Дано точки, координати (x, y) яких задовольняють рівнянню $y^2 + 2x + 2y + 5 = 0$. Знайдіть множину точок, що гомотетичні заданими точкам з центром гомотетії (0, -1) і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$.

7. Скільки вісей симетрії мають: а) промінь; б) пряма; в) площина?

8. У якому випадку трикутник має одну вісь симетрії? Чи може трикутник мати більше ніж одну вісь симетрії?

9. Геометричне місце точок, заданих рівнянням $x+2y^2+3y+4=0$ симетрично відобразили відносно бісектриси 2 і 4 квадрантів, а потім застосували гомотетію з центром у початку координат і коефіцієнтом k= 4. Знайдіть рівняння, що задає отримане ГМТ.

10. На маляюнках *а–г* зображені різні фігури. Чи мають ці фігури вісі симетрії? Скільки вісей симетрії має кожна фігура? Побудуйте ці вісі симетрії.



11. Побудуйте фігуру, гомотетичну до квадрата, прийнявши за центр гомотетії центр квадрата. Чи може при різних центрах гомотетии вийти один і той же квадрат?

12. Трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC. Доведіть, що медіани, бісектриси та висоти трикутника $A_1B_1C_1$ гомотетичні медіанам, бісектрисам та висотам трикутника ABC.

13. Задано дві гомотетії з коефіцієнтами k та $\frac{1}{k}$, і різними центрами. Яке перетворення являє собою послідовне виконання цих гомотетій?

14. Доведіть, що послідовне виконання паралельного перенесення і гомотетії є гомотетія з тим же коефіцієнтом. Побудуйте центр цієї гомотетії.

15. За допомогою якого паралельного перенесення можна отримати точку *A(-3;-5)* з точки *B(-3;-7)*? Запишіть формули паралельного перенесення.

16. Задано дві паралельні прямі. Чи можна за допогою паралельного перенесення відобразити одну з них в іншу?

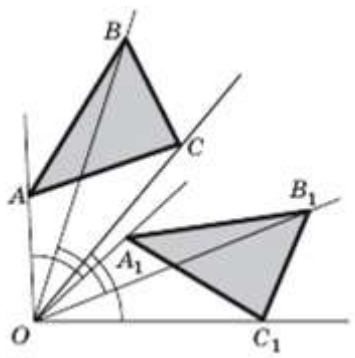
17. Задано дві прямі a та b, що перетинаються. Побудуйте пряму c, паралельну до третьої прямої d так, щоб відрізок AB, де $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, мав певну довжину.

18. Побудуйте трапецію за її діагоналями, куту між ними і однією зі сторін.

19. Два рівних кола дотикаються зовнішнім чином в точці K. Січна, паралельна лінії центрів, перетинає кола послідовно в точках A,B,C,D. Доведіть, що величина кута AKC не залежить від вибору січною.

20. На малюнку зображено поворот трикутника ABC на кут $50°$ навколо точки O за годинниковою стрілкою. Дайте відповідь на наступні питання:

1. У яку точку при цьому повороті перейдуть: вершина A трикутника ABC, вершина B, вершина C?



2. У який відрізок переходять при цьому повороті: сторона AB трикутника ABC, сторона BC, сторона CA?
3. У яку фігуру при повороті переходять: кут ABC, кут BCA, кут CAB?
4. У яку фігуру при повороті переходить трикутник ABC?
5. Назвіть відстані, що зберігаються при заданому повороті.

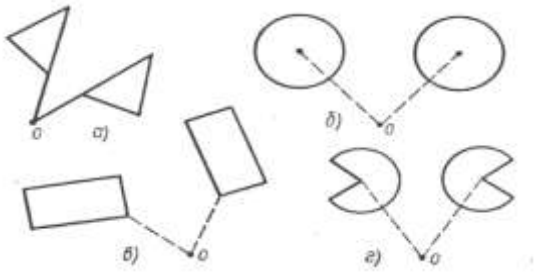
21. Яким поворотом можна перетворити правильну п'ятикутну зірку в себе?

22. Задано два кола. Поворотом на кут $45°$ одне коло перетвориться в інше. Побудуйте центр цього повороту.

23. Задано два рівних відрізка AB та A_1B_1. Побудуйте центр M поворота, при якому точка A перейде в точку A_1, а точка B в точку B_1. Чи завжди можно знайдіть центр такого повороту?

24. На прямій a задана точка A, а на прямій b точка B. Поворотом перетворіть пряму a в пряму b так, щоб точка A перейшла в точку B.

25. У яких парах, зображених на малюнку одну фігуру можна відобразити в іншу поворотом відносно точки O?





Це цікаво!

*Слово «**симетрія**», як і багато інших математичних термінів, прийшло до нас із Стародавньої Греції. Воно, як і слово «гармонія», означає «відповідність», «наявність певного порядку, закономірності у розташуванні частин».*

Питання для обмірковування

1. Яке перетворення подібності отримаємо в результаті декількох послідовних поворотів?
2. В яку фігуру перейде коло при стисненні до прямої?
3. Якими є дві фігури: довільна і отримана з неї за допомогою паралельного перенесення і повороту на 180^0?
4. Чи існують перетворення площини, які відображають пряму на параболу?
5. Чи є стиснення до прямої перетворенням подібності?
6. Чи подібні довільні дві площини?
7. Чи можуть дві фігури бути подібними, але не гомотетичними?
8. За яких умов подібні два еліпсоїди?
9. Чи існує геометричне перетворення, яке переводить сферу в еліпсоїд?
10. Що можна сказати про центр фігури, якщо вона має дві перпендикулярні осі симетрії?

Розширюємо світогляд

Ще більше цікавої інформації, навчальних відеороликів, додаткових задач Ви можете знайти на інтерактивному порталі ***www.agportal.org.ua*** *у розділі* ***«Курс АНГ/СРС»*** *та* ***«Додатково/Навчальні відеоматеріали»***

Нестандартне розв'язання стандартної задачі. У басейн проведено дві труби. Через одну трубу басейн може наповнитися за 4 години, а через другу – за 12 годин. За який час наповниться басейн, якщо будуть відкриті одночасно дві труби?

Розв’язування.

Стандартне (алгебраїчне) розв’язання цього завдання: за одну годину перша труба наповнює $\frac{1}{4}$, а друга – $\frac{1}{12}$ частину всього басейну. Обидві труби за одну годину наповнять $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ басейну, тому весь басейн буде наповнений за 3 години. А тепер виконаємо наступне: з кінців довільного відрізка АВ проведемо по один бік від нього два перпендикуляри: $|AA_1| = 4$, $|BB_1| = 12$. З точки C_1 перетину відрізків A_1B і AB_1 опустимо перпендикуляр C_1C на пряму АВ, тоді $|CC_1| = 3$, що дорівнює знайденому вище значенню (Рис 1).

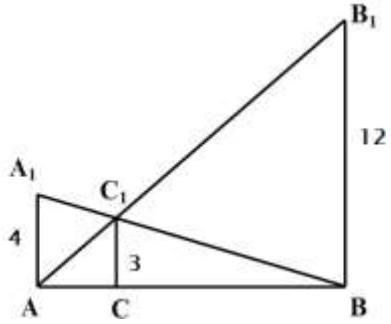


Рис.1

Доведемо цей факт. Розглянемо загальний випадок (Рис.2): нехай перша труба наповнює басейн за *x* годин, а друга – за *y* годин.

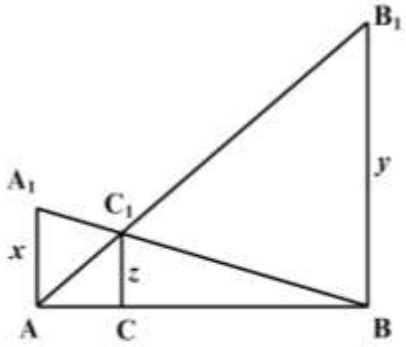


Рис.2

Обидві труби при спільній роботі наповнять басейн за *z* годин, причому $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. При будь-яких допустимих значеннях *x* і *y* трикутник

CBC_1 подібний трикутнику ABA_1, а трикутник ACC_1 подібний трикутнику ABB_1, тому, $\frac{z}{x}=\frac{|BC|}{|AB|}, \frac{z}{y}=\frac{|AC|}{|AB|}$, звідки $\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Зауважимо, що знаючи логіку геометричного розв'язання цього завдання, дуже легко розв'язати таку ***фізичну задачу***.

Фізична задача. Два провідники, підключені паралельно, мають опір 4 Ом і 3 Ом відповідно. Знайдіть повний опір електричного ланцюга, складеного з цих провідників (Рис 3).

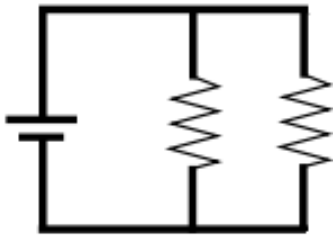


Рис 3

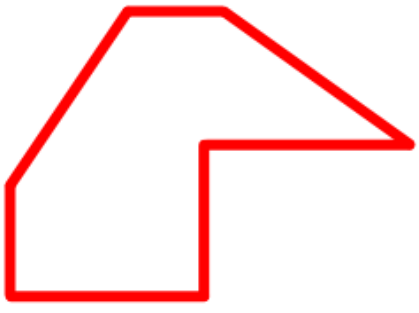
Аналогічно можна знайти опір z ланцюга, складеного з двох провідників, величини опору яких дорівнюють x і y, включених паралельно, оскільки й у цьому випадку $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

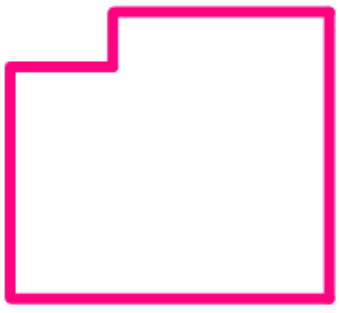


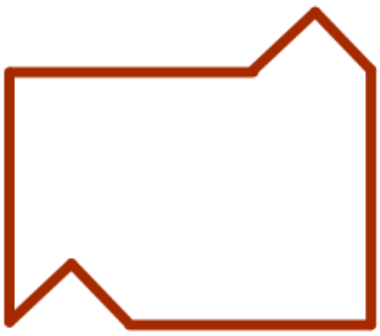
Для майбутніх науковців

Пропонуємо Вам обрати пункт з цього розділу за бажанням.

1. Розділіть на дві однакові частини наступні фігури:

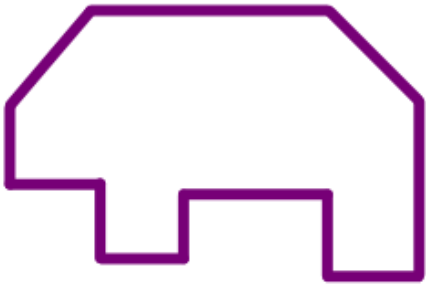
1. 

2. 

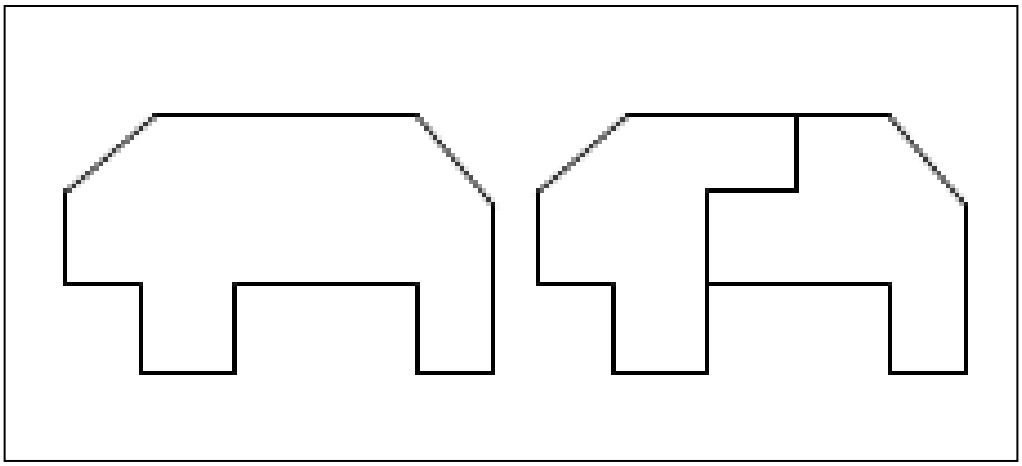
3. 

4. 

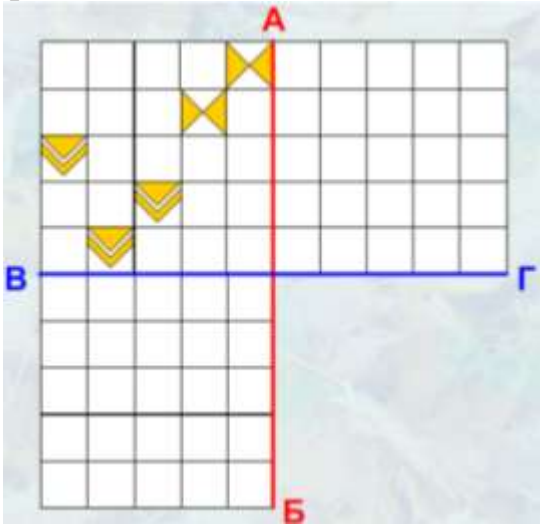
5. 

6. 

Наприклад, розділимо на дві однакові частини фігуру 6:



2. Завершіть малюнок, зобразивши фігури, симетричні відносно лінії АБ, а потім – фігури, симетричні відносно лінії ВГ.



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №9 "Перетворення координат"

Головна мета: здобуття студентами навичок використання геометричних перетворень геометричних об'єктів, побудованих у ППЗ GRAN.

Устаткування: комп'ютер, ППЗ Gran 1W.

Хід роботи (інструкція для студента)

Пропонуємо Вам обрати одну вправу з кожного пункту, номер якої відповідає залишку ділення на 5 Вашого номеру у списку академічної групи.

1. Приведіть до канонічного виду рівняння $y = ax^2 + bx + c$ і побудувати за допомогою ППЗ GRAN.

2. Паралельним переносенням осей доведіть, що рівняння $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ задає рівнобічну гіперболу. Перевірте цей факт за допомогою ППЗ GRAN.

3. Доведіть, що при повороті осей на будь-який кут рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$ не змінюється.

4. Спростіть рівняння шляхом поворота на 45° рівняння $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ і побудуйте його геометричний образ за допомогою ППЗ GRAN.

Варіант	**Номер завдання**								
	1			**2**				**3**	**4**
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*a*
1	0,25	3	-2	-1	6	2	5	1	5
2	0,5	2	5	2	4	3	-2	2	4
3	0,25	4	1	3	2	4	3	3	3
4	0,5	-2	-2	7	1	2	-3	4	2
5	0,25	-1	5	3	3	2	4	5	1

Зробіть висновки

ТВОРЧІ ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Творча лабораторна робота №1

"Дослідження правильних многогранників"

Головна мета: здобуття студентами навичок дослідження правильних многогранників за допомогою конструювання розгорток.

Устаткування: розгортки правильних многогранників, комп'ютер, презентація MS Power Point, додаткова література або доступ до мережі Internet.



Інструкція для студента

Завдання 1.

Перед Вами розгортки правильних многогранників: тетраедра (Рис.1), гексаедра (Рис. 2), октаедра (Рис. 3), ікосаедра (Рис. 4) і додекаедра (Рис. 5).



Рис. 1

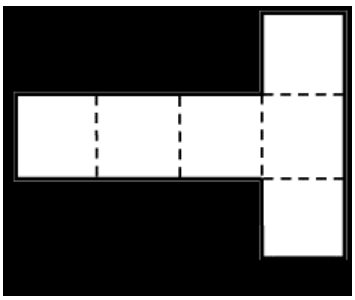


Рис. 2

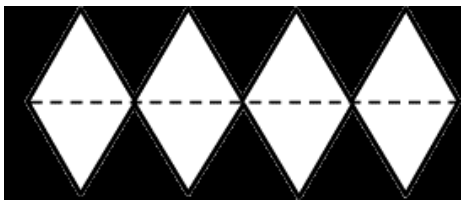


Рис. 3

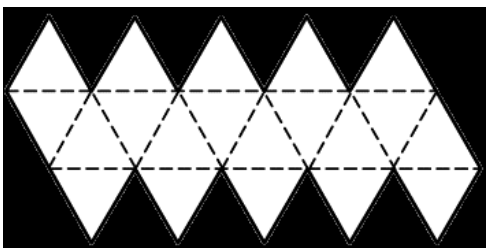


Рис. 4

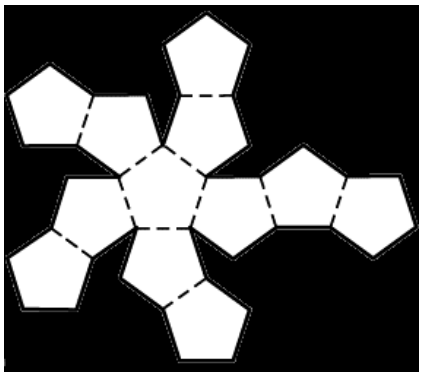


Рис. 5

Зробіть самостійно моделі (з картону чи твердого папіру) цих правильних многогранників.

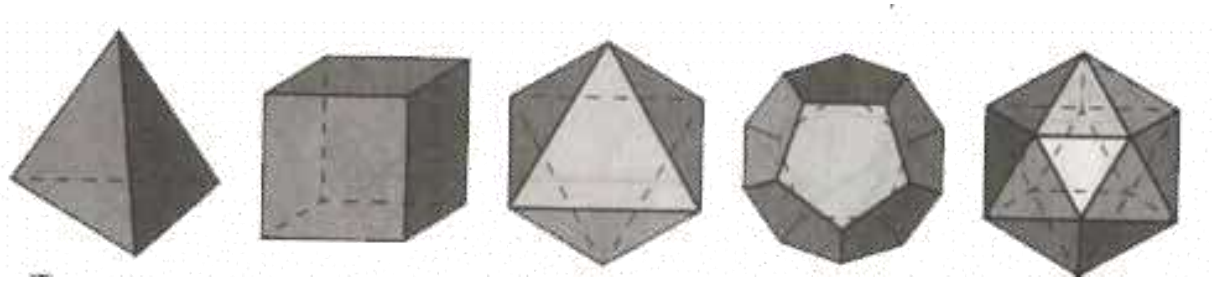


Рис.6

Завдання 2.

Заповніть таблицю:

Многогранник	Кількість вершин	Кількість граней	Кількість ребер
Тетраедр			
Гексаедр			
Октаедр			
Ікосаедр			
Додекаедр			

Яку залежність між вершинами гранями і ребрами правильного многогранника ви виявили? (запишіть формулу)

Чи буде ця формула вірною для будь-якого многогранника? Доведіть свою точку зору.

Завдання 3.

Візьміть участь у грі «Вірю – Не вірю!», користуючись додатковою літературою.

Чи вірите Ви, що…

- Октаедр має 6 граней?
- Додекаедр в давнину називали «quinta essential»?
- Правильні многогранники ще називають «платоновськими тілами»?

- Структура ДНК генетичного коду життя уявляє собою чотирьохвимірну розгортку (за віссю часу) додекаедра, яких обертається?
- Молекула NaCl має форму куба?
- Ікосаедр має найбільший об'єм на найменшу площу серед усіх правильних многогранників?
- Молекули вірусів мають форму кулі? Кристал сурьменістого сірчастокислого натрію має форму додекаедра?
- Сніжинки – це зірчасті многогранники?
- У Давній Греції тетраедр уособлював землю?
- Земля, за деякими припущеннями, має ікосаедро-додекаедрову структуру?

Завдання 4.

Теоретичний матеріал

Існує гіпотеза, згідно з якою ядро Землі має форму й властивості кристала, саме це впливає на розвиток всіх природних процесів, що йдуть на планеті. «Промені» цього кристалу, а точніше його силове поле, обумовлюють ікосаедро-додекаедричну структуру Землі, це полягає у тому, що в земній корі проступають проекції вписаних у земну кулю правильних многогранників: ікосаедра та додекаедра. Було встановлено, що їхні вершини й середини ребер, що називаються вузлами, мають специфічні властивості, які дозволяють пояснити багато незрозумілих явищ.

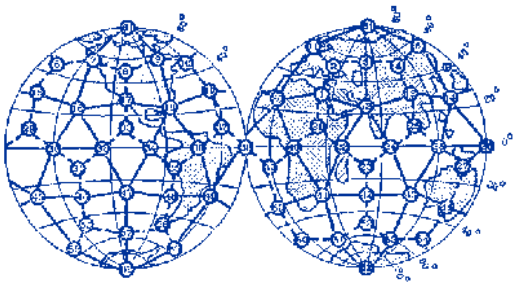


Рис. 7 «Вузли» Землі

Якщо нанести на глобус центри найбільших великих культур і цивілізацій Стародавнього Світу, можна помітити закономірність у їхньому розташуванні щодо географічних полюсів і екватора планети. Багато покладів корисних копалин розташовані уздовж ікосаедрово-додекаедрової сітки. Ще більш дивні речі відбуваються в місцях перетинання цих ребер: тут знаходяться центри найдавніших культур і цивілізацій: Перу, Північна Монголія, Гаїті, Обська культура й інші. У цих точках спостерігаються максимуми й мінімуми атмосферного тиску, гігантські вихори Світового океану, до того ж, тут розташовані шотландське озеро Лох-Несс і Бермудський трикутник.



Рис. 8

Озеро Лох-Несс



Рис. 9

Бермудський трикутник

Подальші дослідження Землі, визначать правильність або хибність цієї цікавої наукової гіпотези, у якій, правильні многогранники займають важливе місце.

<u>Завдання</u>

Зробіть творчий проект «Невідомі факти про правильні многогранники» у формі презентації MS Power Point, використовуючи додаткову літературу або інформацію з мережі Internet.

<u>Зробіть висновки</u>



Творча лабораторна робота №2

Математична екскурсія "Дослідження архітектурної споруди рідного міста"

Головна мета: здобуття студентами навичок розрізняти та досліджувати різні види симетрії на прикладах архітектурних споруд.

Устаткування: план роботи, фотографії та план певної архітектурної споруди, додаткова література або доступ до мережі Internet.

Завдання: Обрати і дослідити архітектурні споруди міста Донецька (Будівля національного театру опери і балета ім. В. Солов'яненка, Ворошиловський виконком, Готель "Великобританія", Часовня Святої Великомучениці Варвари, Свято-Покровський храм тощо).



План роботи (інструкція для студента):

1. **Моє перше враження**

Опишіть своє перше враження про обрані об'єкти, їх математичні особливості. Сформулюйте питання (якщо вони виникли), на які Ви б хотіли отримати відповіді. Спробуйте знайти на них відповіді (використовуйте словники, книги, мережу Інтернет).

2. **Факти з історії**

Спробуйте зібрати всю можливу інформацію про об'єкти, яку Ви можете отримати за допомогою книг, які є у Вас або в бібліотеці університету, інших джерел інформації (мережа Інтернет).

У результаті виконання роботи Ви можете зібрати такий матеріал: назва об'єкту (її пояснення); якщо це культова споруда, відомості про святих, на честь яких воно зведене; час зведення, на честь якої події; перебудови (дати, фотографії, опис попередніх видів); сучасний вигляд;

опис архітектури; фотографії сучасного вигляду будівлі з різних ракурсів, план будівлі.

Під час збору матеріалу робіть нотатки, які Вас найбільш зацікавили і видаються значущими. Прагніть виписувати з літературних джерел лише те, що Ви добре зрозуміли і в чому розібралися. Матеріал викладайте коротко, зрозуміло.

3. Фотогалерея

Зробіть підбір фотографій (зарисовок, зображень), необхідних для вашої роботи. Можна розглянути фотографії сучасного вигляду будівлі і окремих її частин з різних боків, плана будівлі, тощо.

4. Аналіз

Основні напрями аналізу:

1. Проаналізуйте симетрію плану, окремих частин і будівлі в цілому (розгляньте наявність різних видів симетрії, елементів симетрії), перевірте, наскільки точно дотримано симетрію в різних частинах будівлі;
2. Вичленуйте у будівлі геометричні фігури, плоскі і просторові, розгляньте їх симетрію, виділіть фігури, що мають однакову симетрію;
3. Якщо в архітектурних елементах присутні бордюри або орнаменти, дослідіть їх симетрію;
4. Проаналізуйте будівлю на наявність в ній композиції класичних видів симетрії (як в цілому будівлі, так і її окремих частин);
5. Що порушує загальну симетрію будівлі і як це впливає на гармонійність будівлі?
6. Проаналізуйте будівлю на наявність в її композиції некласичних видів симетрії, спробуйте знайти причини того або іншого порушення симетрії.
7. Чи можна знайти таку точку огляду, з якої будівля (або якась його частина) виглядатиме симетричною?

8. Спробуйте співвіднести симетрію храму з його історією, перебудовами, функціональним призначенням окремих його частин.

9. Дослідіть числові закономірності у розмірах споруди і його частин.

5. Проблемні області

Виділіть ті питання і проблеми (якщо є), що виникли у Вас у процесі виконання роботи, які Вас цікавлять. Крім того, визначте питання, на які Ви не змогли знайти відповіді.

6. Результати дослідження і висновки

Проаналізуйте своє дослідження і зробіть основні висновки щодо виконання цієї роботи.

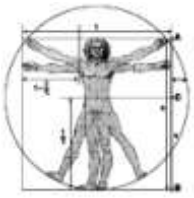
7. Це цікаво

Включіть у дослідження той матеріал (якщо він є), який здався Вам найцікавішим у Вашій роботі (відомості, люди, з якими спілкувалися, щось цікаве, що відбулося під час Вашого дослідження тощо)

8. Самоаналіз роботи

Проведіть аналіз усієї виконаної роботи.

Зробіть висновки



Творча лабораторна робота №3

«Дослідження золотої пропорції»

Мета роботи: навчитись знаходити і застосовувати поняття золотої пропорції, експериментально перевірити пропорції власного тіла на відповідність до значення золотого перерізу.

Устаткування: задачі лабораторної роботи, лінійка, калькулятор, додаткова література або доступ до мережі Internet.



Інструкція (для студента)

Теоретичні відомості.

Золота пропорція (золотий переріз) – це такий поділ цілого на дві нерівні частини, при якому ціле відноситься до більшої частин так, як більша частина до меншої.

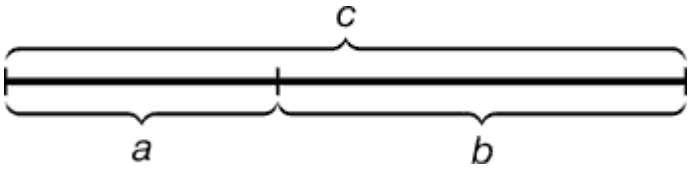


Рис. 1

Відрізок ділиться у співвідношенні: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = x$. Маємо рівняння: $bx = b + \frac{b}{x}$. Тобто, $x = 1 + \frac{1}{x}$, $x^2 - x - 1 = 0$.

Це рівняння має два корені:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Геометричний зміст має лише додатний корінь.

Таким цином, ми довели таке твердження: **точка заданого відрізка ділить його за принципом золотого перерізу тоді і тільки тоді, коли відношення більшої його частини до меншої дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.**

Саме це число називають золотою пропорцією і позначають літерою φ. Це число ірраціональне і наближено дорівнює $\varphi \approx 1,6803398$.

Літера φ, якою позначають золоту пропорцію, – це перша літера імені давньогрецького скульптора Фідія (приблизно 430 р. до н.е.), який у своїх скульптурах часто застосовував золоту пропорцію.

Теорема 1. Відношення радіуса кола R до сторони a_{10} правильного десятикутника, вписаного в це коло, є золотим перерізом.

Доведення

Скористаємося формулою, яка пов'язує сторони правильного n-кутника з довжиною радіуса кола, описаного навколо нього із значенням синуса 18°.

Маємо: $a_{10} = 2Rsin\ 18°$,

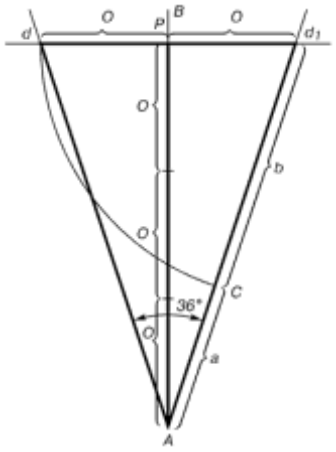
$$\frac{R}{a_{10}} = \frac{1}{2sin\ 18°} = \frac{1}{2(\frac{\sqrt{5}-1}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1} = \frac{1}{\varphi - 1} = \varphi$$

Теорему доведено.

Рівнобедренний трикутник називається **золотим**, якщо відношення бічної сторони до основи цього трикутника дорівнює золотому перерізу.

Теорема 2. Рівнобедренний трикутник із кутом 36° при вершині є золотим.

Доведення



Завдання 1. Доведіть теорему:

Якщо від золотого прямокутника відрізати квадрат, то прямокутник, який залишився, також буде золотим.

<u>Зробіть висновки</u>



Творча лабораторна робота №4

«Застосування поняття золотої пропорції у кінематографі, мистецтві фотографії й автомобільній справі»

Мета роботи: навчитись знаходити і застосовувати поняття золотої пропорції у практичній діяльності людини, зокрема у мистецтві фотографії і кінематографі, автомобільній справі.

Устаткування: кінострічки, відеороліки, фотографії, камера, додаткова література або доступ до мережі Internet.



Інструкція (для студента)



У кінематографі:





Рис.1 Рис.2

Відомо, що Сергій Ейзенштейн (1898 – 1948) (Рис. 1) змонтував фільм «Броненосець Потьомкін» (1925 р.) (Рис. 2) за правилом золотої пропорції. Він розбив стрічку на п'ять частин. У перших трьох частинах дія розгортається на кораблі. У двох останніх – в Одесі, де проходить повстання. Цей перехід в місто з’являється точно в точці золотої пропорції. У кожній частині є свій перелом, що відбувається за законом золотої пропорції. У кадрі, сцені, епізоді відбувається якийсь стрибок в розвитку теми: сюжету, настрою. Ейзенштейн вважав, що, оскільки такий перехід близький до точки золотої пропорції, він сприймається як найбільш закономірний і природний.

У мистецтві фотографії:

Прикладом використання правила золотої пропорції у фотографії є розташування основних компонентів кадру в особливих точках – зорових центрах. Таких точок всього чотири, і розташовані вони на відстані 3/8 і 5/8 від відповідних країв кадру. Людина завжди акцентує свою увагу на цих точках, незалежно від формату кадру або картини (Рис. 3).

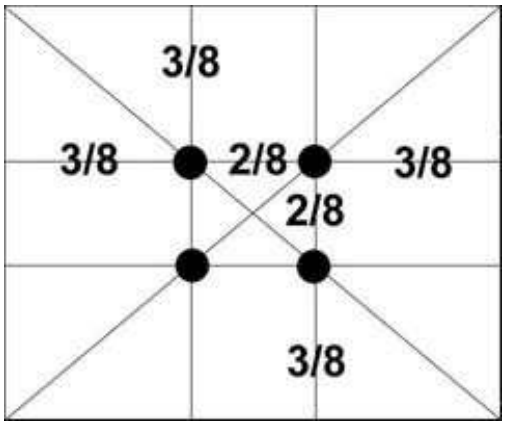


Рис. 3

Прикладом може служити така фотографія (Рис.4):

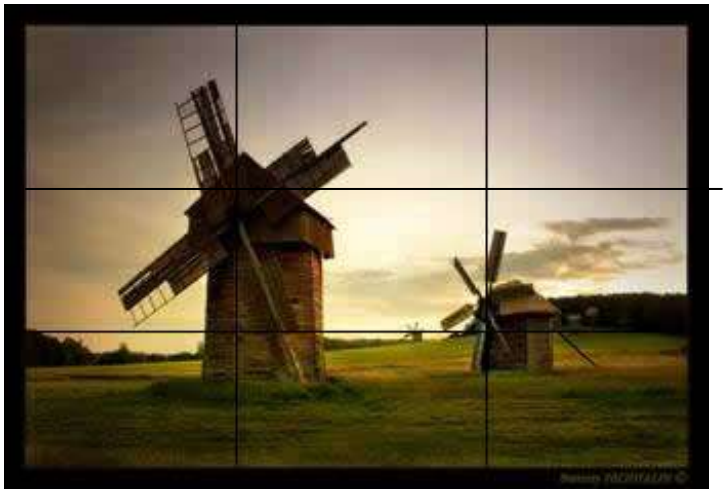


Рис. 4

Вона є ідеальним прикладом побудови композиції: лінія горизонту проходить по нижній третині золотої пропорції, а обидва млини відповідно по лівій і правій лінії. У результаті ми бачимо дуже гармонійний знімок.

У автомобільній справі:

Для керованості автомобіля велике значення мають такі характеристики як колісна база (відстань між передньою і задньою осями) і колія (поперечний відстань між серединами відбитків шин на дорозі) (рис. 5).



Рис. 5

На перший погляд може здатися, що співвідношення між колією та базою визначається тільки рівнем комфорту в салоні, але це не відповідає дійсності. Конструктори мають визначати оптимальні значення цих параметрів, щоб в результаті машина маневрувала з мінімальними затратами потужності і мінімальним зносом шин, зберігаючи високу стійкість для забезпечення безпечного водіння. Від бази залежить стійкість автомобіля на дорозі, а від колії стійкість при маневруванні.

Цікаво, що відношення бази до колії практично у всіх автомобілів за величиною близько до золотого перерізу (1.61803399). Єдиний сучасний автомобіль, який порушує ці принципи – короткий міський Smart City, при проектуванні якого конструктори прагнули витримати жорсткі обмеження розміру. Але цьому автомобілю не допомогли навіть великі колеса та істотне обмеження по швидкості – погана керованість, особливо на слизькій дорозі, змусила виробників замислитися і про варіант з більш довгою базою.

У аеродизайні:

Золота пропорція широко використовується в дизайні автомобілів. У наш час виробники приділяють особливу увагу зовнішньому вигляду своєї продукції, щоб покупець отримував не просто автомобіль з хорошими технічними характеристиками, але і результат дизайнерської думки. Існують чіткі пропорційні залежності в створенні кожної деталі машини. Зокрема, близько до золотої пропорції відношення ширини і висоти вікон сучасних автомобілів. Наприклад, проектуючи LIFAN Solano, конструктори подбали про те, щоб вікно відповідало сучасним естетичним стандартам, тому його дизайн розроблений за принципом класичної золотої пропорції 1:1,618.

Якщо ж власник бажає зробити свій автомобіль неповторним, він звертається до аерографії (створення зображень на автомобілі). Вважається, що малюнок повинен підкреслювати дизайн кузова. Виникає питання: куди помістити малюнок, щоб він гармоніював з формою машини. У наш час автомобільна аерографія знаходиться на етапі становлення, але художники вже знайшли закономірність, що дозволяє визначати місця для нанесення малюнка. Примітно, що ця закономірність базується на правилі золотої пропорції.

Для початку художники-аерографісти знаходять на автомобілі точки золотої пропорції за допомогою комп'ютерної програми Atrise Golden Section. На рисунку 6 показані точки золотої пропорції (позначені хрестиками) і «третини» (позначені лініями) автомобіля Ferrari. Як видно на малюнку, основні опорні лінії лежать у точках золотої пропорції або на третинах.

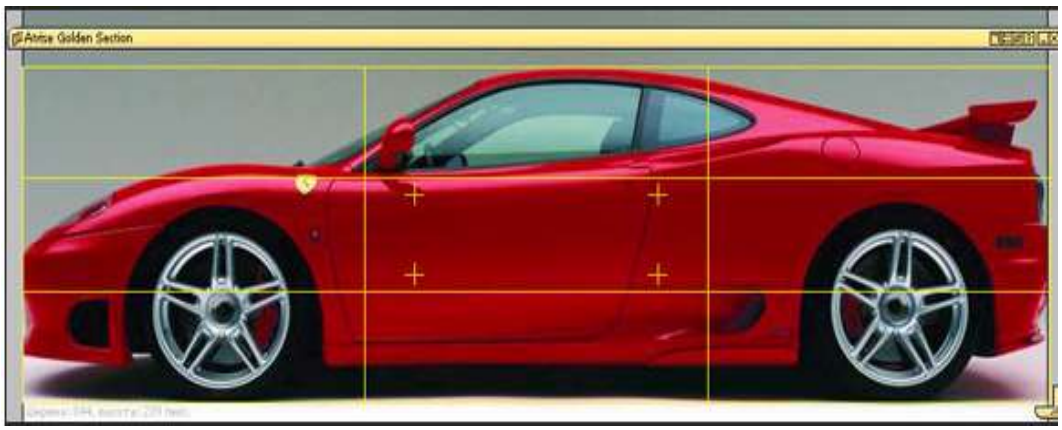


Рис. 6

Зазначимо, що самі точки золотої пропорції лежать на вільному просторі кузова. Це дозволяє використовувати їх для нанесення елементів малюнка в простір кузова, не порушуючи основної композиції елементів.



Рис. 7

Завдання:

1. Проаналізуйте свій улюблений фільм. Чи відповідає його конструкція правилу золотої пропорції? Наведіть приклад фільму або відеоролика, який зроблений за правилом золотої пропорції. Як він Вами сприймається? Змонтуйте самостійно невеликий відеоролик або демонстрацію MS Power Point, керуючись правилом золотої пропорції.
2. Проаналізуйте фотографії, зроблені Вами, або позичені у Ваших друзів. Чи відповідають композиції на них правилу золотої пропорції? Зробіть декілька знімків, причому як керуючись правилом золотої пропорції, так і не керуючись ним. Проведіть невелике дослідження сприйняття (свого або іншої людини) цих

фотографій. Чи Вірно, що фотографії, зроблені за правилом золотої пропорції "приємніші" для людського ока?

3. Задано таблицю з відомостями про величини колісної бази та колії декількох моделей автомобілів. Порахуйте відношення між цими величинами і порівняйте це значення зі значенням золотої пропорції. Дослідіть це питання, додавши у таблицю інформацію про інші моделі автомобілів.

Марка автомобиля	**База, мм**	**Колія (передня), мм**	**Відношення база/колія, *k***	**Відхилення від золотої пропорції (*k*-1,61)**
Гоночні автомобілі				
LADA Revolution	2400	1545		
Racing Lancer від Mitsubishi Motors	2900	1750		
Негоночні автомобілі				
Nissan Qashqai	2631	1540		
Mazda Cx7	2750	1530		
Lada Priora	2492	1410		

Зробіть висновки



Творча лабораторна робота №5

«Конструювання листа Мьобіуса і експериментальна перевірка його властивостей»

Мета роботи: познайомитись з прикладом неорієнтованої поверхні – Листом Мьобіуса, навчитись конструювати цю поверхню і експериментально перевірити її властивості.

Устаткування: лист паперу, ножиці, клій, ручка, олівець, додаткова література або доступ до мережі Internet.



Інструкція для студента

Теоретичні відомості. Лист Мьобіуса або Смужка Мьобіуса є поверхнею лише з однією стороною і лише однією границею. Вона має математичну властивість неорієнтованості і є лінійчастою поверхнею. Була незалежно відкрита двома німецькими математиками А. Ф. Мьобіусом (Мебіусом) (Рис.1) і Дж. Лістінгом (Рис.2) у 1858 році.



Рис. 1



Рис.2

Цікаво, що на честь математика А.Ф. Мьобіуса названо кратер на зворотній стороні Місяця та астероїд 28516 Мьобіус.

Одним із способів подання листа Мебіуса як підмножини $\mathbb{R}^3$ є параметризація:

$$x(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2} cos\frac{u}{2}\right) cosu$$

$$y(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2} cos\frac{u}{2}\right) sinu$$

$$z(u,v) = \frac{v}{2} sin\frac{u}{2}$$

де $0 \leqslant u < 2\pi$ та $-1 \leqslant v \leqslant 1$. Ці формули задають лист Мьобіуса ширини 1, з центральним колом радіусу 1, з центром в $(0,\ 0,\ 0)$. Параметр u пробігає вздовж стрічки, в той час як v задає відстань від краю.

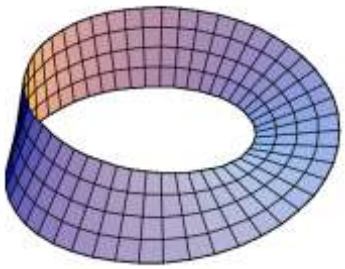


Рис. 3. Лист Мьобіуса

Властивості листа Мьобіуса:

1. **Однобічність**. У листа Мьобіуса – всього одна сторона.
2. **Неперервність**. На листі Мьобіуса будь-яка точка може бути з'єднана з будь-якою іншою точкою й при цьому жодного разу не доведеться перетинати край "стрічки". Розривів немає – поверхня неперервна повністю.
3. **Зв'язність**. Лист Мьобіуса двозв’язний, тому якщо розрізати його уздовж, він перетвориться не у два окремих кільця, а в одну цілу стрічку.
4. **Неорієнтованість**. Так, якби людина змогла промандрувати по всім вигинам листа Мьобіуса, то коли вона повернулася б у вихідну точку, перетворилася на своє дзеркальне відображення.

Цікаво, що у Середньовіччя паризькі кравці, приймаючи в свій цех новачка, давали йому жартівливе «екзаменаційне завдання»: пришити до подолу спідниці тасьму, зшиту у формі листа Мьобіуса. Історія замовчує про те, як кандидати справлялися з цим завданням.

Відомо, що учені виявили в невеликому музеї французького міста Арля давньоримську мозаїку початку нашої ери (Рис. 4). У центрі мозаїчної плити зображений легендарний Орфей, який зачаровував диких звірів грою на арфі. У орнаменті двічі використаний малюнок перекрученої замкнутої стрічки.



Рис. 4



Рис. 5

Існує гіпотеза, що спіраль ДНК сама по собі теж є фрагментом листа Мьобіуса і тільки завдяки цьому генетичний код такий складний для розшифровки і сприйняття. Більш того, така структура цілком логічно пояснює причину настання біологічної смерті: спіраль замикається сама на собі і відбувається самознищення.

Використання у мистецтві. Лист Мьобіуса слугував натхненням для скульптур і для графічного мистецтва. Відомий голандський художник М.К. Ешер був одним з тих, хто присвятив кілька своїх робіт цьому математичному об'єкту. Одна з відомих – це «Лист Мьобіуса II», на якій зображено червоних мурах, що рухаються по поверхні листа Мьобіуса (Рис. 6).



Рис.6

Використання у техніці. Властивість однобічності листа Мебіуса широко використовується в техніці: у матричних принтерах кольорова стрічка має форму листа Мьобіуса для збільшення терміну її придатності.

Завдання лабораторної роботи:

Експеримент 1. Конструювання листа Мьобіуса. Візьміть полоску паперу і зробіть стрічку Мьобіуса, з'єднавши її кінці, але перед цим повернувши один з них на 180^o (Рис. 7).

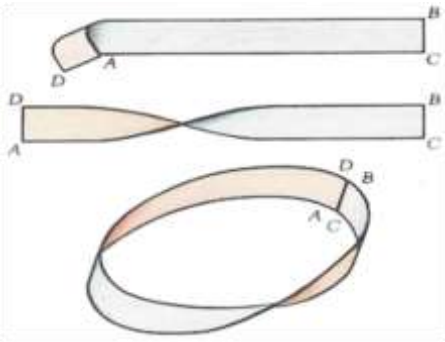


Рис. 7



Рис. 8

Експеримент 2. Поставте точку на одній стороні отриманого листа Мьобіуса і накресліть неперервну лінію вздовж нього, поки не повернетесь у задану точку (Рис. 8).

Експеримент 3. Розріжте стрічку вздовж і навпіл (Рис. 9).

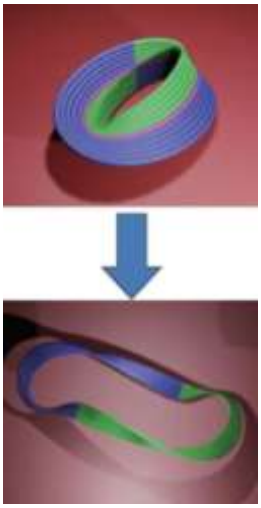
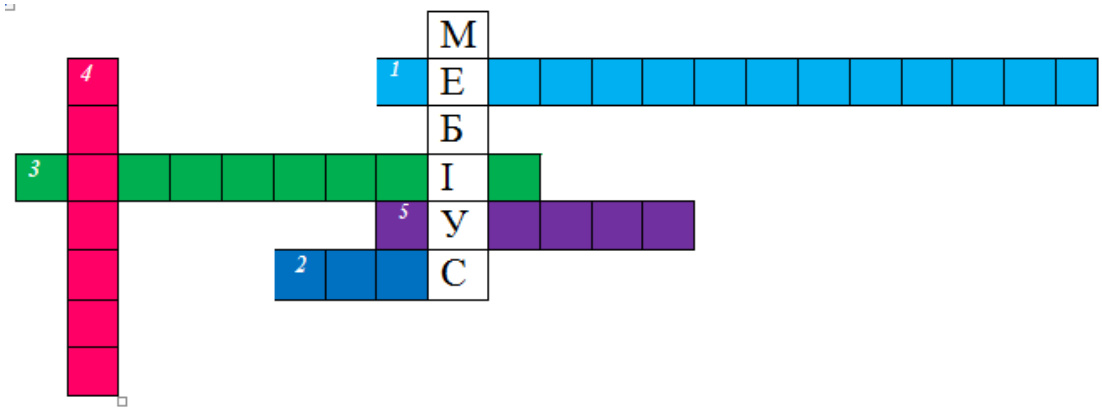


Рис. 9

Розвяжіть кросворд:



Питання до кросворду:

1. Математичний знак, схожий на лист Мьобіуса.
2. Науковий керівник А.Ф. Мьобіуса.
3. Наука, якою також займався А.Ф. Мьобіус.
4. Він одночасно з А.Ф. Мьобіусом відкрив цю поверхню.
5. Комахи у праці М.К. Ешера.

Зробіть висновки

ДИДАКТИЧНА ГРА «ПОДОРОЖ ДО ОСТРОВА СКАРБІВ»

«Декартові системи координат»

Хід заняття

1. Організаційний момент

Привітання. Вибір капітана.

2. Постановка теми та цілей заняття.

Сьогодні ми наштовхнулися на таємну записку, вона зашифрована за спеціальним правилом – шифром Цезаря (кожна буква замінюється на третю після неї в абетці). Спробуємо розшифрувати її! *(3 хвилини)*.



Рис. 1 – Записка

Тобто, записка нам говорить: "УПЕРЕД!" Нам треба скористайтись підказками та знайти математичний скарб.



Рис. 2 – Запрошення до гри

Ви хочете знайти скарб на Острові Скарбів? Тоді сьогодні ми з вами здійснимо захоплюючу подорож. Наша каравела стоїть біля причалу та чекає на сигнал до від'їзду.



Рис. 3 – Наш корабель

На каравелах видатний мореплавець Христофор Колумб перетнув океан та відкрив невідому на той час землю – Америку у 1492 році.



Рис. 4 – Христофор Колумб

Відкривати нові континенти ми не будемо, наша мета – просуватися за підказками до острову скарбів. Запевняю вас, подорож буде цікавою, але небезпечною. Та впоратися з цими небезпеками й перепонами вам допоможуть знання з аналітичної геометрії. У кожному пункті слідування ви заробите математичні гроші та знайдете коди, за допомогою комбінації цих кодів ви видкриєте скриню зі скарбом.



Рис. 5 – Скарб

Якщо ви не зможете розгадати підказку, ви можете підняти білий прапор та попросити про допомогу, за яку повинні заплатити 10 математичних грошей.



Рис. 6 – Білий прапор

Якщо ви розгадаєте підказку неправильно, то опинитесь у Бермудському трикутнику. Щоб вибратись із нього, вам треба виконати додаткові завдання.



Рис. 7 – Бермудський трикутник

3. Гра

А тепер вирушаймо у подорож!

Першу підказку та 20 математичних грошей ви отримаєте, якщо кожен із команди розкаже, для чого потрібно вивчати курс АНГ *(на підготовку 5 хвилин).*

Заробивши початковий капітал, можемо рушати у подорож!

Підказка №1. Місто, з якого ми почнемо наш вояж – це один із чорноморських портів України. Його географічні координати:

Широта: 48º28' N; довгота: 30º44' E.



Рис. 8 – Карта України

Отже, ми в Одесі. Дізнаймося більше про це цікаве місто.



Рис. 9 – Одеса

Одеса – одне із найколоритніших міст України. Серед пам’яток Одеси обов'язково варто відмітити Привіз і Дерибасівську, Потьомкінські сходи (найбільші в країні), госпіталь, Приморський бульвар і Напівкруглу площу (1826-1829 рр.) з пам'ятником Рішелье, палаци Воронцова, Потоцького, Успенський монастир (1824 р.) і Духовну семінарію, Стару біржу, Одеський морський порт (найбільший на Чорному морі) тощо. Не менший інтерес викликають першокласні музеї – це Археологічний (найбагатша колекція єгипетських, скіфських і античних стародавностей), Художній, Музей морського флоту, Літературний, Музей західного і східного мистецтва, Історико-краєзнавчий, літературно-меморіальний музей А.С. Пушкіна та інші. Не останнє місце у культурному житті країни займає Державний академічний театр опери та балету. Він побудований у 1884-1887 роках, та являється однією з найкрасивіших у Європі архітектурних споруд. Портал будівлі прикрашений скульптурними групами, що алегорично зображують муз – покровительок театру, музики, танцю, комедії і трагедії. Відвідування театру залишає незабутнє враження. Театр славиться своєю історією. У ньому бували видатні письменники і композитори, на його сцені виступали великі співаки: Ф. Шаляпін, Е. Карузо, Л. Собінов та ін.

А щоб дізнатися наш наступний пункт призначення та отримати код, треба допомогти одеським метеорологам складіть графічне зображення температури повітря у Одесі у різні місяці року, користуючись даними таблиці 1 *(10 хвилин)*.

Таблиця 1 – Дані про температуру повітря

Місяць	**Абсолют. мінімум**	**Середній мінімум**	**Середня**	**Середній максімум**	**Абсолют. максімум**
Січень	-26,2(1940)	-3,5	-1,1	1,6	15,1(2005)
Лютий	-28,0(1929)	-2,9	-0,5	2,3	18,9(1990)
Березень	-16,0(1929)	0,5	2,9	5,8	24,1(1847)
Квітень	-5,9(1923)	6,4	9,2	12,6	28,5(1909)
Травень	0,3(1915)	11,9	15,2	18,9	33,3(2007)
Червень	5,2(1913)	16,0	19,6	23,5	35,6(1963)
Липень	7,5(1908)	17,9	21,7	25,9	39,3(2007)

Серпень	7,9(1906)	17,5	21,4	25,5	36,8(1998)
Вересень	-0,8(1906)	13,2	16,8	20,6	32,4(1929)
Жовтень	-13,3(1920)	8,2	11,2	14,4	30,5(1928)
Листопад	-14,6(1920)	3,1	5,6	8,3	26,0(1926)
Грудень	-19,6(1895)	-1,0	1,4	3,9	16,3(2008)
Рік	-28,0(1929)	7,2	10,3	13,6	39,3(2007)

Тепер давайте перевіримо, чи правильно ви підказали метеорологам.

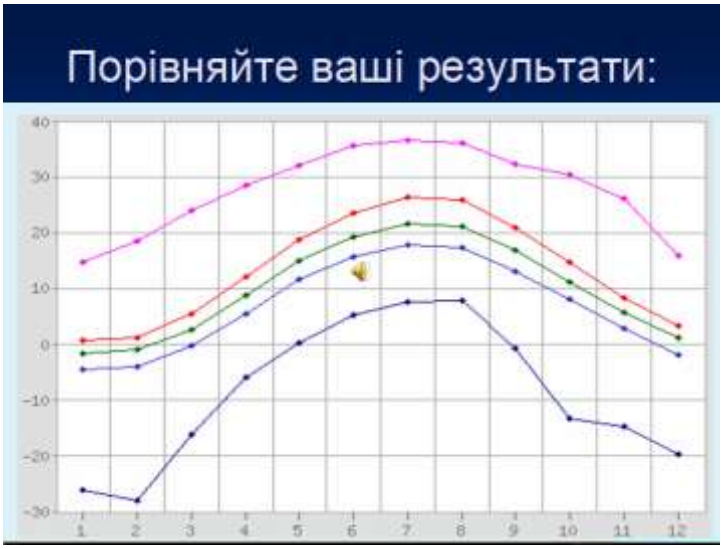


Рис. 10 – Графічне зображення температури повітря

Молодці, ви гарно попрацювали. Метеорологи у знак подяки дарують вас ще одну підказку та 20 математичних грошей.

Код: Абсолютний максімум в останньому осінньому місяці 26.

Підказка№2.

Продовження логічного ряду:

Ленінград – Санкт-Петербург, Сталіно-Донецьк, Константинополь - ... *(3 хвилини)*.

Отже, ми вирушаємо у Стамбул. Але спочатку згадаємо, що ми знаємо про це місто? Давайте дізнаємось більше!



Рис. 11 – місто Стамбул

Стамбул — єдине місто у світі, що розташоване на стику двох континентів: Азії та Європи. Головним чином, місто складається із трьох частин: на Європейській стороні – історичний півострів, розташований на півдні Халича, а на півночі Халича – Галата, на азіатській стороні – Нове Місто. На Європейському континенті знаходяться численні торгівельні і службові центри, на Азіатському – здебільшого житлові райони. Стамбул, що розділяє Азію з Європою і поєднує Чорне море з Мармуровим, розташований на двох берегах Босфору. Крім того, невелика затока довжиною у 7 км., що отримала назву Халич, розділяє Європейський континент міста на дві частини. Місто, внаслідок географічного розташування між Азією і Європою, протягом багатьох століть мало особливе геополітичне положення. Число туристів, що відвідують Стамбул протягом року, досягає 1,5 млн. Стамбул – місто, в якому поєднуються Схід із Заходом, Азія з Європою, іслам із християнством, місто, у якому співіснують різні культури й релігії. У різні часи Стамбул був столицею трьох великих імперій: Римської, Візантійської, а також Османської. За часів кожної з них тут будувалися грандіозні архітектурні споруди. Найважливіші історичні й туристичні багатства Стамбула знаходяться у центрі Історичного Півострова, у таких районах міста як Сарайбурну й Султанахмед. Щоб оглянути такі пам'ятники культури як Музей Айя-

Софія, Блакитну мечеть, Палац Топкапи, Музей археології, Музей Турецької і Ісламської культури, Музей мозаїки буде потрібно кілька днів.

Ось таке цікаве місто. Отже, теперь і ми опинилися тут, щоб знайти третю підказку, код та 20 математичних грошей, але це досить складно. Для цього треба допомогти турецькому купцеві *(10 хвилин)*.



Рис. 12 – Завдання від купця

Турецький купець повинен перевезти свій товар із дому до крамниці. У певній системі координат дом та крамниця знаходяться відповідно у точках

(-6,3,-5) та (4,-2,5) (у км.). Скільки монет він має заплатити перевізникові, який отримує по 3 монети за кожний кілометр шляху?

Відповідь є кодом. 45

Ви допомогли купцеві і тепер отримали наступну підказку. Якщо Ви відповісте на питання тесту, то дізнаєтесь, яким буде наступний пункт нашої подорожі.

Підказка №3.

Назва цього міста пов'язана з іменем великого полководця. Також, це місце відоме своєю бібліотекою. Спробуйте знайти його на карті чи глобусі!

Широта: 31°12' N

Довгота: 29°55' E

Це місто Александрія! Вирушаймо! Що ви про нього знаєте?



Рис. 13 – Олександрійська бібліотека

Бібліотека Олександріна, або Нова Олександрійська Бібліотека - з одного боку це меморіал Олександрійської бібліотеки, загубленої у стародавності, з іншого боку — спроба відновлення грандіозного центра науки й освіти.

Розмах проекту вражає: у бібліотеці є місце для восьми мільйонів книг, головний зал для читання займає 70,000 м? (11 каскадних рівнів). Є також конференц-центр; спеціалізовані бібліотеки для сліпих, для молодих людей і для дітей; музеї; галереї мистецтв; планетарій; лабораторія по відновленню рукописів.

Фасад головної будівлі бібліотеки облицьований вапняковими плитами з висіченими буквами різних алфавітів світу. Будівля виконана у формі величезного циліндра діаметром 160 м, зі «зрізаним» верхом зі скла й алюмінію, зверненим до моря.

На цей час нова Олександрійська бібліотека ще дуже далека від того, щоб стати найбільшою у світі, її збори не перевищують одного мільйона носіїв. Проте вже зараз новоявлене чудо світу є безпрецедентним сховищем рідких арабських манускриптів, а за популярністю у туристів може стати конкурентом пірамід.

Четверту підказку ще треба знайти. Відомо, що вона знаходиться у центрі мас однорідної стальної балки, кінці якої закріплені у точках (-5, 7) та

(-1,1) (у метрах.) Ви знаходитесь у початку координат. Скільки метрів вам треба пройти, щоб дістатися підказки? *(10 хвилин)*.

Відповідь є кодом 5. Перший, хто дасть вірну відповідь, отримає 20 математичних грошей.

Отже, ми дісталися підказки №4. Відгадаємо наступний пункт призначення.

Підказка №4.

Розв'язавши тест, дістати ключове слово:

ТЕСТ *(10 хвилин)*

1. Яка з точок симетрична точці (1; -2, 0) відносно осі ординат?

К. (-1; 2, 0) Т. (1; 2, 0) В. (-1; -2,0) О. (-2; 1, 0)

2. Відстань від початку координат до проекції точки А(-2; 3; 1) на вісь абсцис дорівнює...

О. $\sqrt{14}$; Л. 3; Е. 2; С. -2.

3. Точка В площини має абсцису 4 і віддалена від початку координат на відстань 5. Які координати має точка В?

Р. (4; 3). А. (3; -4).

Н. (4; 3) або (4; -3). Д. (2; 3) або (-2; 3).

4. Укажіть всі значення параметра *m*, за яких точки Р(m; 1) і Q(-1; 5) розміщені на однаковій відстані від початку координат.

К. 26. Л. 5. Е. ±5. І. ±1.

5. Яка з точок А(5; -2), В(-4; 3), С(2; -5), D)(-3; 4) розміщена найближче до осі абсцис?

О. С. Н. В. Ц. А Д. D.

6. Точка В симетрична точці А(x; y) відносно точки М(a; b). Координати точки В дорівнюють...

М. (a + x; b + y); У. (2a+x, 2b+y),

І. (2a - x; 2b - y), А. (a+x, b+y).

7. Точка (1,5) належить прямій x + y – d= 0, якщо d= ...

А. -6; Н. 7; О. 2; Я. 6.

Відповідь до тесту: В Е Н Е Ц І Я

Отже, ми у Венеції.



Рис. 14 – Венеція

Венеція – це одне з найкрасивіших міст у світі. Унікальне місто на воді, схоже на чарівну театральну декорацію, Венеція вже багато століть є джерелом натхнення для художників і поетів. Вузенькі вулички, маленькі канали й розкішні, прикрашені елементами венеціанської готики, палаци, романтичні прогулянки на гондолах по Гранд каналу, головній вулиці Венеції, а також гостинність мешканців манять у Венецію туристів із усього світу. Туристів в історичному центрі Венеції буває часом у сто разів більше, ніж самих мешканців.

Важко собі уявити більш прекрасний міський канал, ніж Великий канал у Венеції. Цей широкий канал з дивним обрамленням мальовничими палацами й будинками, є центральною транспортною артерією Венеції у формі переверненої латинської букви "S". Канал, довжина якого становить 3.800 м, ширина коливається від 30 м до 70 м, а глибина близько 5 м, поділяє Венецію на дві нерівні частини, упадаючи в широкий канал Св. Марка.

У одній з гондол знаходимо завдання за яке ви можете отримати 20 математичних грошей.



Рис. 15 – Завдання з гондоли

КОД:

Циклоїда= 108

Отже, ми маємо код від скрині, але скриню стереже пірат. Щоб він віддав вам скиню, треба заплатити йому 90 математичних грошей. Якщо вам не вистачає грошей, можна влаштуватися на роботу до пірата.

Завдання пірата: треба з'ясувати, яку лінію визначає рівняння:

1) $x^2 - y^2 = 0$ (10 математичних грошей),

2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ (10 математичних грошей),

3) $\rho = 3\varphi$ (10 математичних грошей),

4) $\rho = 2cos\varphi$ (20 математичних грошей),

5) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$ (20 математичних грошей),

6) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) = 0$ (20 математичних грошей).

Якщо ви маєте більше, ніж 90 математичних грошей та правильно розгадали код скрині, то ви можете її відкрити.

У скрині – шифрограма.

16	1	5	2	7	9	10	20	5	5	3	19	1	8	2	–	12	16	1	16	16	14

И=Й

Питання:

Координата точки по осі ОХ:

1	2	3	4	5	3	1

Лінія Архімеда:

3	6	7	8	1	9	10

Яким українським словом можна перекласти російське «Процесс решения»:

8	1	2	3	4	5	2	1	6	6	4

Двовимірний простір:

17	9	11	18	5	16	1

Французький математик Огюстен-Луї ..., теорему якого ви вивчали у математичному аналізі:

19	11	20	7

Шифрограма: ***Найбільший скарб – знання!*** Ви згодні? Що ми повторили? Чого навчилися?

На зворотньому шляху ми потрапили у Бермудський трикутник. Шляхом до порятунку може бути таке завдання:

1. Оскільки у Бермудському трикутнику трапляються незвичайні речі, то й Вам, щоб із нього вийти, треба придумати задачу, відповіддю до якої буде точка (-7, 1, 4).

2. Оскільки у Бермудському трикутнику трапляються загадкові речі, то й Вам, щоб із нього вийти, треба придумати загадку про будь-яке поняття з АНГ.

3. Оскільки із Бермудського трикутника можна вибратись лише завдяки своїй витримці та сміливості, придумайте девіз, з яким треба як вирушати у небезпечні подорожі, так і вивчати аналітичну геометрію.

4. Оскільки у Бермудському трикутнику трапляються незвичайні речі, то й Вам, щоб із нього вийти, треба придумати вірш про аналітичну геометрію.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ

Тема 1. «Декартові координати на площині і в просторі. Найпростіші задачі аналітичної геометрії»

1. 1) $x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$, 2) $x \in [-6;-4]$; **2.** 137 од^2; **3.** (3;-3); **4.** (5;-7); **5.** (5,5; 4,75); **6.** $h = \dfrac{(1+\mu)(\lambda-\nu)}{(1+\lambda)(\nu-\mu)}$; **8.** (2,-1) і (3,1); **10.** (-11,0,0) і (5,0,0).

Тема 2. «Завдання фігур різними способами. Полярні та інші координати. Рівняння ліній»

2. $\left(3;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2;\dfrac{3\pi}{4}\right)$; **4.** $A'(3,\dfrac{5\pi}{9})$, $B'(5,\dfrac{17\pi}{14})$; **5.** $S = \dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$; **6.** $B(1;0)$, $C\left(\sqrt{3};\dfrac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2;\dfrac{\pi}{3}\right), E\left(\sqrt{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $F\left(1;\dfrac{2\pi}{3}\right)$; **7.** $\left(1;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; **8.** $(0;6)$, $(5;0)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\left(5;-5\sqrt{3}\right)$, $\left(-4;4\sqrt{3}\right)$, $\left(6\sqrt{3},-6\right)$; **9.** 1) $x = 6y$, 2) $y = 2x + 6$, 3) $x^2 + y^2 = a^2$, 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Тема 3. «Вектори та дії над ними»

1. $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{MC} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{MB} = -\frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b})$, $\overline{MD} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b})$; **2.** $\bar{p} = -3 \cdot \bar{a} + 5 \cdot \bar{b}$; **4.** $\sqrt{7,5}$; $\sqrt{17,25}$; $(4;-7;2)$; **5.** $\left|\bar{a} - \bar{b}\right| = 22$; **8.** $\overline{MN} = \dfrac{k}{k+1}\overline{DB} + \dfrac{1}{k+1}\overline{CA}$; **9.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$; **10.** $\overline{a_0} = \left(\dfrac{6}{7};\dfrac{-2}{7};\dfrac{-3}{7}\right)$.

Тема 4. «Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів та його властивості»

1. (-4,0,0), (0,1,0), (0,0,2), $\frac{-4}{\sqrt{21}}$, $\frac{1}{\sqrt{21}}$, $\frac{2}{\sqrt{21}}$; **2.** $\sqrt{148}$; **3.** $\varphi = 60^\circ$; **4.** $\overline{a_1}(3;-3;3\sqrt{2}), \overline{a_1}(-3;-3;3\sqrt{2})$; **7.** $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$; **6.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Тема 5. «Мішаний добуток векторів, подвійний векторний добуток»

2. $D_1(0;-4;0); D_2(0;5;0)$; **4.** $6\sqrt{2}$; **8.** 3 од^2.

Тема 6. «Рівняння прямої на площині»

1. $x+y+1=0$; **2.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{3}$, $\frac{x-9}{5}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x+3}{7}=\frac{y+1}{-1}$, $\frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{-1}$; **3.** 6 од^2; **4.** -7; **6.** $45°, 90°, 180°$; **8.** $m=0, n\epsilon\mathcal{R}$; $m=\pm4, n\epsilon\mathcal{R}/\{-4,4\}$; $m=\pm4$, $n=\mp2$; **9.** $2x+y+4=0$.

Тема 7. «Пряма і площина у просторі»

2. $x-4y-z+16-0$; **3.** 1) паралельні, 2) перетинаються, 3) співпадають; **4.** 1) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0$, 2) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{3}=0$, 5) $\frac{3}{-7}x-\frac{6}{-7}y+\frac{2}{-7}z+\frac{3}{-7}=0$.

Тема 8. «Канонічні рівняння ліній ІІ порядку»

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; **2.** $\left(-3,-\frac{16}{5}\right)$, $\left(-3,\frac{16}{5}\right)$; **3.** $\frac{b^2}{c}$; **7.** $y=-12x^2$;

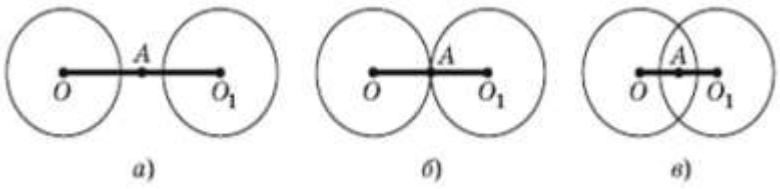
Тема 10. «Канонічні рівняння поверхонь ІІ порядку»

1. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$, $x^2+y^2+z^2=13$; **2.** сферу;

5. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{36}-\frac{z^2}{4}=1$;

Тема 12. «Геометричні перетворення»

1. Діагональ буде віссю симетрії у випадку, коли прямокутник буде квадратом; **4.** б) У всіх випадках центром симетрії буде середина відрізку, що з'єднує центри цих кіл (рис *а-в*).



а) *б)* *в)*

5. У випадку осьової симетрії з віссю l точки вісі l переходять самі у себе. Також в себе переходять прямі, перпендикулярні до вісі l; **7.** Трикутник має одну вісь симетрії, якщо він рівнобедрений. Правильний трикутник має трі вісі симетрії; **12.** Скористайтеся властивостями гомотетії.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Александров А. Д. Геометрия: учеб. пособие / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990. – 672 с.

2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. – М.: Наука, 1979. – 512 с.

3. Бакланова М.Л. Лінійна і векторна алгебра та аналітична геометрія: Навчально-методичний посібник/ М.Л. Бакланова. – Черкаси, 2003. – 208 с.

4. Гриньов Б. В. Аналітична геометрія: підручник для вищих техн. навч. закладів / Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко. – Х.: Гімназія, 2008. – 340 с.

5. Гриньов Б.В. Векторна алгебра: підручник для вищих техн. навч. закладів / Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко; за ред. О. М. Литвина. – Х.: Гімназія, 2008. – 164 с.

6. Ильин В. А Аналитическая геометрия. Учеб. для студентов вузов, обучающ. по спец. «Физика» и «Приклад. Математика». 5-е изд/ В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Физматлит, 1999. – 224 с.

7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия:Учебю для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 388 с.

8. Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы., 1956. – 240 с.

9. Лосєва Н.М. Варіанти індивідуальних завдань з курсу «Аналітична геометрія» і приклади їх розв'язування / Н.М. Лосєва, О.В. Зиза. – Донецьк: ДонНУ, 2005. – 36 с.

10. Лосєва Н.М. Вектори в елементарній математиці: Навчально-методичний посібник. Вид.2-е, випр. / Н.М. Лосєва, Г.В. Горр, З.О. Брусило. – Київ: Освіта України, 2009. – 209 с.

11. Лосєва Н.М. Геометричні тіла: Навчальний посібник/ Н.М. Лосєва. –

Донецьк: ДонНУ, 2006. – 235 с.

12. Лосєва Н. М Чудові криві: навчальний посібник для студентів математичного факультету/ Н.М. Лосєва, А.Ю. Панова. – Донецьк: ДонНУ. – 2009. – 52 с.

13. Лосєва Н.М. Методичні поради, вказівки, питання і завдання до самостійної роботи з курсу «Аналітична геометрія» для студентів 1 курсу математичного факультету/ Лосєва Н.М., Зиза О.В. – Донецьк: ДонНУ, 2006. – 40 с.

14. Лосєва Н.М. Інтерактивні технології навчання математики: навчально-методичний посібник для студентів / Н.М. Лосєва, Т.В. Непомняща, А.Ю. Панова. – К.: Кафедра, 2012. – 228 с.

15. Морозова Е.А. Аналитическая геометрия: Методическое пособие / Е. А. Морозова, Е.Г. Скляренко. – М.: Издание МГУ мехмат, 2004. – 103 с.

16. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – Изд. 4-е. – М.: Высш. школа, 1967. – 255с

17. Олексенко В.М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підручник / В.М. Олексенко. – Харків: НТУ"ХПІ", 2006. – 372 с.

18. Павлов О.Л. Аналітична геометрія: Навчальний посібник / О.Л. Павлов. – Донецьк: ДонНУ, 2007. – 175 с.

19. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: Учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – Изд. 2-е, доп. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009. – 208 с.

20. Резниченко С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах (Алгебраические главы) / С.В. Резниченко. – М.: Изд-во МФТИ, 2001. – 576 с.

21. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах. Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків:

ХТУРЕ, 2002. – 552 с

23. Федотов А.Г. Аналитическая геометрия: Учебное пособие / А.Г. Федотов, Б.В. Карпов. – М.: МГИЭМ, 2005. – 158 с.

24. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – Изд. 31-е. – Спб.: Издательство "Лань" 2003. – 336 с.

Додаткова:

25. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.

26. Борисенко О. А. Аналітична геометрія: навч. посібник для університетів / О. А. Борисенко, Л. М. Ушакова. – Х.: Вид-во «Основа», 1993. – 192 с.

27. Бортаковский А.С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.

30. Дадаян А. А. Алгебра и геометрия: учеб. пособие / А. А. Дадаян , В. А. Дударенко. – Минск.: «Высшая школа», 1989. – 288 с.

31. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебн. пособие / Н. В. Ефимов. – 13-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2005. – 240 с.

32. Кадомцев С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С. Б. Кадомцев. – М.: Физматлит, 2003. – 160 с.

33. Тарасенкова Н.А. Аналітична геометрія в таблицях / Н.А. Тарасенкова, О.М. Коломієць. – Черкаси: ЧНУ, 2007. – 75с.

35. Тарасенкова Н. А. Лінії другого порядку : навч.-метод. посіб. для організації самостійної роботи студентів / Н. А. Тарасенкова, О. М. Коломієць. – Черкаси : Сіяч, 2000. – 80 с.

36. Тарасенкова Н. А. Площина і пряма у просторі : навч.-метод. посіб. для організації самостійної роботи студентів / Н. А. Тарасенкова,

О. М. Коломієць. – Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2003. – 68 с.

37. Тарасенкова Н. А. Вивчення поверхонь другого порядку за канонічними рівняннями : навч.-метод. посіб. для організації самостійної роботи студентів / Н. А. Тарасенкова, О. М. Коломієць. – Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2003. – 68 с.

38. Працьовитий М.В. Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр). – К.: НПУ імені. М.П.Драгоманова, 2004. – 92 с.

39. Размыслович Г.П. Сборник задач по геометрии и алгебре: Учебное пособие / Под ред. В.М. Ширяева. – Минск: Універсітєцкае, 1999. – 383 с.

40. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2005. – 308 с.

41. Троян Л.Ф. До питання реалізації між предметних зв'язків під час вивчення модуля «Елементи векторної алгебри в просторі» / Л.Ф.Троян // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. –2010. –№8 (10) – С. 304- 313.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

А
абсолютна величина вектора 52,58
асимптоти гіперболи 119,143,161

В
вектор 45,47,51,59,63,73
вектори колінеарні 45,46,47,53,58,61,64
вектори компланарні 45,46,49,70,74
вектори ортогональні 60,103
векторний добуток 56,57
відстань між точками 9,10,11,28
вісь абсцис 10,26,28,162,228
вісь ординат 10,162
вісь аплікат 10
вісь полярної системи координат 24,184

Г
геометричне місце точок 6,23,28,33,42,43,44,54
геометричні перетворення 180,181,183,234
гіпербола 119,125,126,131,132,133,140,143,161
гіперболічний циліндр 154,155,156,170,177
гіперболічний параболоїд 156,161,170,176
гіперболоїд однопорожнинний 154,169
гіперболоїд двопорожнинний 154,169
гомотетія 181,182,183,191

Д
декартова система координат 9,26,42,72,76,87,129
директриса 119,120
двопорожнинний гіперболоїд 154,169

Е
екцентриситет 119
еліпс 118,119,121,123,139,149,185,
еліпсоїд 154,175
еліптичний циліндр 154,156
еліптичний параболоїд 155,156,170

Ж
жмуток прямих 89
жмуток площин 102

З
загальне рівняння прямої на площині 102
загальне рівняння площини 102,103
загальне рівняння лінії другого порядку 131
загальне рівняння поверхні другого порядку 169

І
інваріант кривої другого порядку 135,138,142,168
інваріант поверхні другого порядку 171,174,178,181,182

К
канонічна система координат 174
канонічне рівняння прямої 86,103,104,106
канонічне рівняння гіперболи 120,121
канонічне рівняння еліпса 120,121
канонічне рівняння параболи 120,122,139
канонічне рівняння поверхонь другого порядку 155
крива другого порядку 132,134,135
коло 37,125,159,161,194,207
конус другого порядку 156,157,160,166,172
координати вектора за базисом 47

координатні площини 10
кут між векторами 58,59,61,62,64,65
кут між площинами 103,105
кут між прямими 103,106
кут між прямою і площиною 103,106

Л
лінійна комбінація векторів 47
лінійна залежність векторів 46,47
лінія гіперболічного типу 132
лінія еліптичного типу 132
лінія параболічного типу 132

М
мішаний добуток векторів 70,71
модуль вектора 47,48,56

Н
нормальне рівняння прямої 84,85
нормальне рівняння площини 104,115
нормальний вектор площини 103,104
нуль-вектор (нульовий вектор) 47

О
одиничний вектор 10
однопорожнинний гіперболоїд 155,156,157,159,161
орієнтована трійка векторів 58,75
орт 10

П
парабола 121,132,133,138,144,159,187
параболічний циліндр 155
паралельне перенесення 24,182,183
параметричне рівняння прямої 85,87,106,110,116
параметр параболи 121
переміщення 55,66,81,186,187
перетворення подібності 182,183
площина 103,108,109,117
поворот 57, 182, 183
поверхня другого порядку 154,155,156
поділ відрізка у заданному відношенні 9,10
полюс полярної системи координат 24
полярний кут 24
полярний радіус 24
полярні координати 24
протилежний вектор 10
пряма 84,85,86,91,101,103

Р
радіус-вектор точки 24
рівняння кривої другого порядку 136,153
рівняння поверхні другого порядку 154,158,159
рівняння площини 103,104,105
рівняння прямої 84,85,103,105,106
рівняння жмутка площин 89
рівняння жмутка прямих 102
розклад вектора за базисом 46,47

С
сферичні координати 24
система векторів 46
симетрія 9,23,182,183
скалярний добуток векторів 57,58,59,62,231
сума векторів 46,47
спіраль Архімеда 41

У
умова паралельності прямих 103,105
умова перпендикулярності прямих 103,105
уявна вісь гіперболи 120
уявний еліпс 132,133,134
уявний еліпсоїд 155,170
уявний еліптичний циліндр 156,171
уявний конус 156,170

Ф

фокальна вісь кривої другого порядку 120,121
фокальні властивості кривих другого порядку 120,121
фокальний параметр 120,121
фокус параболи 121,124
фокуси еліпса 120,123
фокуси гіперболи 120,123,126,144
фокусна відстань 120,121,144

Ц

центральні криві другого порядку 132
центральні поверхні другого порядку 170,171
центр лінії другого порядку 132,133,135
центральна симетрія 183
циклоїда 36,37,185,229
циліндричні координати 24

Навчальне видання

ЛОСЄВА Наталія Миколаївна
ГУБАР Дар'я Євгенівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
В ІНТЕРАКТИВНІЙ ФОРМІ:
ПРАКТИЧНИЙ КУРС

Навчальний посібник

Головний редактор Наталія Перинська
Випусковий редактор Світлана Головченко

Підписано до друку 14.08.2014.
Формат 60x84/16.

Ум. друк.арк 6,86. Наклад 300 прим.

Видавництво «Кафедра»
04136, м.Київ, вул. Маршала Гречка 13, оф 117
e-mail: kafedra.druk@gmail.com
тел../факс: (044) 501-18-30
(067) 442-98-78

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК№4175 від 20.10.2011 р.

«Друкарня Гордон»
03179, м. Київ, вул. Котельникова, 95
Тел./факс (044) 501-35-69
Свідотцтво про державну реєстрацію
ДК №1422 від 08.07.2003