НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ

ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ

СЕМКО М.М.
ПИСКУН М.М.
СКАСКІВ Л.В.

ГРУПИ, У ЯКИХ СИСТЕМА НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП МАЄ ВИМІРНІСТЬ КРУЛЛЯ

(частина 1)

Ірпінь – 2007

УДК 519.41/47

Групи, у яких система наближено нормальних підгруп має вимірність Крулля /*Семко М.М., Пискун М.М., Скасків Л.В. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 40с.*

Нехай G – група та $\boldsymbol{S}$ – деяка система її підгруп. Тоді $\boldsymbol{S}$ *є* частково впорядкованою множиною за включенням. Якщо впорядкована множина $\boldsymbol{S}$ має відхилення, то будемо говорити, що *система* $\boldsymbol{S}$ *має вимірність Крулля.*

Вивчаються групи, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ всіх підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля. Підгрупу H групи G будемо називати наближено нормальною (в G), якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні H^G.

Для фахівців у галузі алгебри та студентів математичного фаху.

Бібліогр.: 75 назв.

Рецензенти: Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор **Л.А. Курдаченко** (Дніпропетровський національний університет);

доктор фізико-математичних наук, професор **М.Ф. Кузенний** (Інститут математики НАН України)

Всі права належать авторам. Будь-яке використання цього видання або його частин (фрагментів), такі як копіювання, тиражування, розповсюдження і т.п. можливе тільки при наявності попередньої письмової згоди авторів.

All rights belong to the authors. No part of this issue may be reproduced by any mechanicai, photographic or electronic process or the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted or otherwise copied for public or private use without written permission of the authors.

Затверджено до друку вченою радою
Національного університету державної податкової служби України

ISBN 966-02-057856-1

© М.М. Семко, М.М. Пискун, Л.В. Скасків, 2007

Наукове видання

Микола Миколайович Семко
Михайло Михайлович Пискун
Ліля Василівна Скасків

ГРУПИ, У ЯКИХ СИСТЕМА НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП МАЄ ВИМІРНІСТЬ КРУЛЛЯ

(частина 1)

Підписано до друку 17.01.2007. Формат 60 ×90/16. Папір друк. Офсет. друк.
Умовн. друк. арк. 1,68. Тираж 300 прим. Зам.29.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
01004, м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З М І С Т

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. **ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ** 10

1.1. Відомі результати 10

РОЗДІЛ 2. **ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ**. 15

2.1. Попередні результати ……15

2.2. Абелеві секції груп, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ має вимірність Крулля ……..22

2.3. Будова груп, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ має вимірність Крулля ……28

Цитована література . ……. 35

ВСТУП

Нормальні підгрупи групи та їх узагальнення мають досить вагомий вплив на структуру групи. Чим більшою буде система таких підгруп, тим цей вплив буде більш вирішальним. Образно кажучи, чим більше має група узагальнено нормальних підгруп, тим її будова стає більш прозорою. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то вона або абелева, або є прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої 2-групи та періодичної групи без елементів порядку 2. Цей результат був отриманий для скінченних груп ще в роботі Р. Дедекінда [1], а потім був розширений на довільні групи у роботі Р. Бера [2]. Однією з цікавих ділянок цієї тематики було вивчення груп, у яких кожна підгрупа, що не є нормальною, буде абелевою. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Їх вивчення почалося в роботах М.Ф. Сесєкіна та Г.М. Ромаліса [3 – 5]. Скінченні метагамільтонові групи вивчалися в роботах В.Т. Нагребецького [6] та О.О. Махньова [7]. Повний опис метагамільтонових груп було отримано у серії робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [8 – 18]. Узагальненню гамільтонових і метагамільтонових груп присвячено багато робіт різних авторів. Зокрема, А. Манн [19] узагальнював названі групи завдяки дослідженню скінченних груп з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Група G називається групою з умовою щільності нормальності для всіх підгруп, якщо для будь-якої пари підгруп A та B із G таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$. Результати цієї роботи були узагальнені в багатьох роботах різних авторів, зокрема, у роботах [20 – 39].

В процесі розвитку теорії нескінченних груп виникло досить багато типів підгруп, в тому чи іншому сенсі близьких до нормальних. Одні з перших таких цікавих узагальнень розглянув Б. Нейман у своїй роботі [40],

що вже стала класичною. Зокрема, він почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Такі підгрупи будемо називати далі наближено нормальними. Систематичне вивчення впливу системи наближено нормальних підгруп на будову групи розпочато досить недавно. Л.А. Курдаченко, М.Ф. Кузенний та М.М. Семко у роботі [41] вивчали групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [42] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $L_{non\text{-}nn}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи G задовольняє умову мінімальності, а у роботі А. Галоппо [43] були розглянуті групи, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [44] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [45, де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп. Суттєвий внесок у цю проблематику був здійснений у роботах [46 – 48], де були вивчені досить широкі класи груп, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ складається з підгруп того чи іншого скінченного рангу.

Таким чином, вивчення властивостей систем наближено нормальних підгруп та їх впливу на структуру усієї групи є актуальною задачею, що має свою історію та своє специфічне коло питань. Ця тематика розглядається і в даній роботі. В роботі запропоновано наступний новий підхід, витоки якого знаходяться у теорії кілець і який був там досить ефективним. Розглянемо наступну умову скінченності, яка є душе широким узагальненням як умови мінімальності, так і умови максимальності. Нашою метою тут є застосування цієї умови для вивчення впливу на структуру групи такої її важливої системи узагальнено нормальних підгруп як системи всіх її наближено нормальних підгруп. Теорія кілець була першою, де почалися розглядатись різні природні обмеження на системи лівих (відповідно правих) ідеалів. Теорія артинових кілець (тобто кілець з умовою мінімальності для лівих ідеалів) та теорія

нетерових кілець (тобто кілець з умовою максимальності) є одними з найбільш розвинених. У теорії кілець виникло досить багато цікавих природних узагальнень артинових та нетерових кілець. Одним з таких узагальнень є кільця, що мають вимірність Крулля.

Нехай A – частково впорядкована множина. Для елементів $a, b \in A$ визначимо *замкнений інтервал з кінцями* a, b як підмножину

$$[a, b] = \{ x \in A \mid a \leq x \leq b \}.$$

Визначимо тепер *відхилення* $\mathbf{dev}(A)$ *частково впорядкованої множини* A (див., наприклад, [49, 6.1]) за наступним правилом.

Якщо порядок на частково впорядкованій множині A *є тривіальний, то покладемо* $\mathbf{dev}(A) = -\infty$.

Якщо порядок на частково впорядкованій множині A *нетривіальний, а такий, що* A *задовольняє умову мінімальності, то покладемо* $\mathbf{dev}(A) = 0$.

Тепер за індукцією для порядкового числа α *визначимо* $\mathbf{dev}(A) = \alpha$ *у випадку, коли* $\mathbf{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ *та для кожного спадаючого ланцюжка*

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$$

елементів множини A *усі, за виключенням скінченної множини замкнених інтервалів* $[a_n, a_{n+1}]$ *мають відхилення, яке є строго меншим ніж* α.

Будемо говорити тепер, що *частично частково впорядкована множина* A *має відхилення, якщо знайдеться порядкове число* α, *для якого* $\mathbf{dev}(A) = \alpha$.

Образно кажучи, відхилення частково впорядкованої множини показує, наскільки вона є віддаленою від множини з умовою мінімальності, зокрема і від цілком впорядкованих множин. Слід також відмітити, що частково впорядковані множини, що мають відхилення, можна розглядати також як і

узагальнення частково впорядкованих множин з умовою максимальності (див., наприклад, [49, 6.1.8]).

Поняття відхилення знайшло корисні застосування в теорії кілець та модулів, само його виникнення пов'язано з цією теорією. Нагадаємо, що *кільце* R *має вимірність Крулля*, якщо впорядкована за включенням система всіх його лівих ідеалів має відхилення (див, наприклад, [49, 6.2.2]). Вказане відхилення і називається *вимірністю Крулля кільця* R та позначається символом $\boldsymbol{K(R)}$.

Нехай тепер G – група та $\boldsymbol{S}$ – деяка система її підгруп. Цю множину $\boldsymbol{S}$ можна розглядати як частково впорядковану множину відносно теоретико-множинного включення. Оскільки в теорії груп позначення $[a, b]$ є стандартним та зарезервовано для комутатору елементів a, b, то для замкненого інтервалу впорядкованої множини $\boldsymbol{S}$, що утворюють її підгрупи A, B, будемо використовувати наступне позначення: $[[A, B]]$, тобто

$$[[A, B]] = \{ C \,/\, C \in \boldsymbol{S} \text{ та } A \leq C \leq B \}.$$

Якщо частково впорядкована система підгруп $\boldsymbol{S}$ має відхилення, то у цьому випадку будемо говорити, що *система* $\boldsymbol{S}$ *має вимірність Крулля* та будемо розуміти під цією вимірністю *відхилення частково впорядкованої системи* $\boldsymbol{S}$ і відповідно використовувати для нього наступне *позначення* $\boldsymbol{K_S(G)}$. Якщо тепер розглянути деяку теоретико-групову властивість $\boldsymbol{\nu}$ та визначити за нею наступну систему підгруп

$$\boldsymbol{S} = \{ H \,/\, H \text{ є підгрупою, що має властивість } \boldsymbol{\nu} \},$$

То замість $\boldsymbol{K_S(G)}$ будемо писати $\boldsymbol{K_\nu(G)}$.

Нагадаємо, що група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи $\boldsymbol{S}$, якщо для кожного спадаючого ланцюжка

$$H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_n \geq \ldots$$

підгруп системи $\boldsymbol{S}$ знайдеться такий номер $\boldsymbol{m}$, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ будуть скінченними при $n \geq \boldsymbol{m}$. У цьому випадку кожен замкнений інтервал $[[\, H_n, H_{n+1} \,]]$ є скінченним і, зокрема, задовольняє умову мінімальності. Таким чином, якщо група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи $\boldsymbol{S}$, то ця система $\boldsymbol{S}$ має вимірність Крулля, більш того $\boldsymbol{K_S}\,(G) \leq 1$. Отже це показує, що ми отримали не тільки узагальнення звичайної умови мінімальності, а і слабкої умови мінімальності для підгруп системи $\boldsymbol{S}$.

Повернемось зараз до систем підгруп, що є узагальненнями нормальних. У якості $\boldsymbol{S}$ розглянемо систему $L_{\boldsymbol{поп\text{-}пп}}(G)$ всіх підгруп групи G, які не є наближено нормальними, та будемо вивчати групи, у яких ці впорядковані системи підгруп мають вимірність Крулля. Цю вимірність ми будемо позначати через $\boldsymbol{K_{поп\text{-}пп}}\,(G)$. Як ми бачили вище, групи, що мають вказані вимірності Крулля, мусять мати досить великі системи наближено нормальних. Вивченню цих груп присвячена дана робота.

Р О З Д І Л 1

ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Відомі результати

Наведемо у цьому розділі деякі поняття та результати, що будуть використовуватись у наших подальших розглядах.

Наведемо спочатку один технічний результат Б. Неймана, який буде далі потрібен при вивченні властивостей наближено нормальних підгруп.

1.1.1. Пропозиція [50]. *Нехай G – група, $H_1, \ldots, H_n$ – такі її підгрупи, що $G = H_1 g_1 \cup \ldots \cup H_n g_n$ для деяких елементів $g_1, \ldots, g_n$. Тоді хоча б одна з підгруп $H_1, \ldots, H_n$ має скінченний індекс.*

Наступний результат – це класична теорема І. Шура, одна з перших теорем теорії FC-груп.

1.1.2. Теорема [51]. *Нехай G – група, центр якої має скінченний індекс c. Тоді комутант $[G, G]$ також скінченний, більш того $[G, G]^c = \langle 1 \rangle$.*

1.1.3. Наслідок. *(1) Нехай g – елемент групи G, що має скінченний порядок. Якщо клас спряжених елементів g^G є скінченним, то підгрупа $\langle g^G \rangle$ також буде скінченною (лема Діцмана).*

(2) Нехай G – така група, що $G/\zeta(G)$ – локально скінченна група. Тоді комутант $[G, G]$ також локально скінченний, більш того $\Pi([G, G]) \subseteq \Pi(G/\zeta(G))$.

1.1.4. Теорема. *Нехай G – FC-група.*

(1) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є періодичною [52].

(2) Комутант $[G, G]$ також періодичний. Зокрема, множина T всіх елементів, що мають скінченні порядки, є (характеристичною) підгрупою і G/T – абелева група без скруту [53].

(3) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є резидуально скінченною. Зокрема, центр групи G містить у собі кожну $\boldsymbol{F}$-досконалу підгрупу.

Наступні теореми описують деякі важливі підкласи класу FC-груп.

1.1.5. Теорема. *(1) Нехай G – група, кожна підгрупа якої майже нормальна. Тоді її центр має скінченний індекс* [54].

(2) Нехай G – група, кожна абелева підгрупа якої майже нормальна. Тоді її центр має скінченний індекс [54].

(3) Нехай G – група, кожна підгрупа якої наближено нормальна. Тоді її комутант $[G, G]$ буде скінченним [40].

(4) Нехай G – група, кожна абелева підгрупа якої наближено нормальна. Тоді її комутант $[G, G]$ буде скінченним [55, теорема 7.17].

Першими природними розширеннями класу скінченних груп були класи $\boldsymbol{M}^{\blacktriangle}$ груп, що задовольняють умову максимальності для всіх підгруп та $\boldsymbol{M}^{\blacktriangledown}$ груп, що задовольняють умову мінімальності для всіх підгруп. Обидва ці класи є одними з найстаріших об'єктів вивчення у теорії груп. Однак приклади груп з умовами мінімальності та максимальності для всіх підгруп, що були побудовані О.Ю. Ольшанським та його учнями (див., [56**,** глави 28, 35, 38]) показують, що такі групи можуть мати властивості, які дуже далекі від властивостей скінченних груп. Майже розв'язні групи з умовою максимальності (тобто групи з класу $\boldsymbol{SF} \cap \boldsymbol{M}^{\blacktriangle}$) або мінімальності (тобто групи з класу $\boldsymbol{SF} \cap \boldsymbol{M}^{\blacktriangledown}$) є досить близькими до скінченних. Це є точно клас $\boldsymbol{P}$ усіх майже поліциклічних груп та клас $\boldsymbol{C}$ усіх черніковських груп відповідно. Більш того, мають місце наступні теореми.

1.1.6. Теорема [57, теорема 1.1**].** *Локально розв'язна група тоді і тільки тоді задовольняє умову мінімальності, коли вона черніковська.*

1.1.7. Теорема [57, теорема 4.3**].** *Якщо кожна абелева підгрупа локально розв'язної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

1.1.8. Теорема [58**]**. *Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

Властивості майже поліциклічних груп та черніковських груп були розглянуті дуже детально в багатьох книгах, наприклад, в [57**,** 59 – 65].

Класи $\boldsymbol{M}^{\blacktriangle}$ та $\boldsymbol{M}^{\blacktriangledown}$ можуть бути природно об'єднані у класі мінімаксних груп.

Група G називається мінімаксною, якщо вона має скінченний субнормальний ряд, фактори якого належать до класів $\boldsymbol{M}^{\blacktriangle}$ або $\boldsymbol{M}^{\blacktriangledown}$.

Клас розв'язних мінімаксних груп позначається через $\boldsymbol{S}_2$ [61]. Зокрема, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{F}$ – це клас груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого – черніковська або майже поліциклічна група.

Теорія майже розв'язних мінімаксних є дуже розвиненою, ці групи вивчались багатьма авторами з різноманітних точок зору (див., наприклад, книгу [63, 10.3, 10.4].

Деяке розширення класу мінімаксних груп дає наступний клас груп. Нехай A – абелева група. Покладемо $\boldsymbol{r}_0(A) = dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Це число $\boldsymbol{r}_0(A)$ називається *0-рангом абелевої групи A.* Абелева група A тоді і тільки тоді має скінчений *0*-ранг, коли $A/\boldsymbol{t}(A)$ ізоморфна деякій підгрупі адитивної групи $\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}$ (у цій сумі точно r копій $\mathbb{Q}$) (див., наприклад, [66, лема 24.3]). Також відмітимо, що $\boldsymbol{r}_0(A)$ співпадає з $\mathbb{Z}$ -рангом $\mathbb{Z}$**-**модуля $A/\boldsymbol{t}(A)$.

Клас розв'язних груп скінченного *0*-рангу співпадає з класом розв'язних A_1 -груп, які були введені А.І. Мальцевим **[**67**].**

Нехай A – абелева група, p – просте число, P – силовська p-підгрупа A. Підгрупу $\boldsymbol{\Omega}_1(P)$ можна розглядати як векторний простір над простим полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Покладемо

$$r_p(A) = \dim_{Z/pZ} \Omega_1(P).$$

Число $r_p(A)$ *називається* p*-рангом абелевої групи* A.

Абелева група A тоді і тільки тоді має скінчений p-ранг, коли її силовська p-підгрупа P буде черніковською (див., наприклад, [66, теорема 25.1]).

Наслідуючи Д. Робінсона [61, 6.1] визначимо наступним чином класи $\boldsymbol{A}_0$ та $\boldsymbol{S}_0$:

Абелева група A *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{A}_0$, *коли* $r_0(A)$ *є скінченним і* $r_p(A)$ *– також скінченні для всіх простих чисел* p.

Розв'язна група G *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{S}_0$, *коли* G *має скінченний субнормальний ряд, кожен фактор якого є абелевою* $\boldsymbol{A}_0$ *-групою.*

Будемо говорити, що група G *має скінченний спеціальний ранг* $r(G) = r$, *якщо кожна її скінченно породжена підгрупа може бути породжена не більше ніж* r *елементами* [68].

Спеціальний ранг називають також *рангом Мальцева-Прюфера*.

Клас розв'язних груп скінченного спеціального рангу співпадає з класом розв'язних $\boldsymbol{A}_2$-груп, які були введені А.І. Мальцевим [67].

Наслідуючи Д. Робінсона [61, 6.1] визначимо наступним чином класи $\boldsymbol{A}_1$ та $\boldsymbol{S}_1$:

Нехай A – абелева група. Визначимо *тотальний ранг* A *за наступним правилом*

$$r_{tot}(A) = r_0(A) + \sum_{p \in \Pi(A)} r_p(A).$$

Абелева група A *належить до класу* $\boldsymbol{A}_1$ *тоді і тільки тоді, коли її тотальний ранг* $r_{tot}(A)$ *є скінченним.*

Зокрема, це означає, що множина $\Pi(A)$ – скінченна. Далі $A \in \boldsymbol{A}_1$ тоді і тільки тоді, коли A має скінченний 0-ранг і періодична частина A є черніковською підгрупою.

Розв'язна група G тоді і тільки тоді належить до класу $\boldsymbol{S_1}$, коли G має скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого є $\boldsymbol{A_1}$-групою.

Клас $\boldsymbol{S_1}$ співпадає з класом розв'язних $\boldsymbol{A_3}$-груп, які були введені А.І. Мальцевим [67]. Відмітимо також, що А.І. Мальцев розглянув підклас *розв'язних A_4-груп, який складається з груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого є $\boldsymbol{A_1}$-групою зі скінченною періодичною частиною.*

Нам будуть потрібні наступні важливі результати відносно абелевих підгруп радикальних груп.

1.1.9. Теорема. *(1) Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи G є A_3-группою, то G буде розв'язною A_3-групою* **[**69**].**

(2) Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи групи G будуть мінімаксними, то G буде розв'язною мінімаксною групою **[**70, 71**].**

Наведемо також потрібні нам твердження з теорії абелевих груп.

1.1.10. Пропозиція [72]. *Нехай A – абелева група. Якщо її фактор-група A/A^p є скінченною для деякого простого числа p і P – силовська p-підгрупа A, то $P = K \times D$, де K – скінченна підгрупа, а D – ділима підгрупа.*

1.1.11. Пропозиція (див., наприклад**, [**66, теорема 23.1]). *Нехай A – ділима абелева група. Тоді $A = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, де або A_λ ізоморфна до адитивної групи раціональних чисел, або A_λ є квазіциклічною p-підгрупою для деякого простого числа p.*

1.1.12. Пропозиція (див., наприклад, **[**66, теорема 14.5]). *Нехай A – вільна абелева група. Тоді кожна неодинична підгрупа A також буде вільною.*

1.1.13. Пропозиція (див., наприклад**,** [73, лемма 5.6]). *Нехай D – дедекіндова область, P – її максимальний ідеал та A – P-модуль над кільцем D. Модуль A буде артиновим тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{\dim}_{D/P} \boldsymbol{\Omega}_1(A)$ є скінченною.*

1.1.14. Теорема (див., наприклад**,** [74, теорема 6.14]). *Нехай D – дедекіндова область та A – P-модуль над кільцем D. Якщо $\mathbf{Ann}_J(A)$ є ненульовим, то модуль A розкладається у пряму суму циклічних підмодулів.*

Р О З Д І Л 2

ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ

У цьому розділі викладаються результати про будову груп, у яких система підгруп, які не є наближено нормальними (відповідно майже нормальними), мають вимірність Крулля. Як ми вже зазначали, ці групи мусять мати досить великі системи наближено нормальних та майже нормальних підгруп. Це робить можливим досить детально дослідити їх будову, що ми і будемо робити на протязі цього розділу.

2.1. Попередні результати

2.1.1. Означення. *Підгрупу H групи G будемо називати наближено нормальною (в G), якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні H^G.*

Як вже відмічалось раніше, підгрупи такого роду вперше почав розглядати Б. Нейман у статті [53]. Нам будуть необхідні деякі властивості таких підгруп.

2.1.2. Лема. *Якщо H, L – наближено нормальні підгрупи групи G, то підгрупи $K = < H, L >$ та $H \cap L$ також будуть наближено нормальними.*

Доведення. Дійсно, маємо $H^G = x_1H \cup \ldots \cup x_nH$, $L^G = Ly_1 \cup \ldots \cup Ly_m$. Якщо $u \in H^G$, $v \in L^G$, то $u \in x_jH$, $v \in Ly_t$ для деяких $1 \le j \le n$, $1 \le t \le m$, так що $uv \in x_jH\,Ly_t$, а тому

$$H^G L^G = \cup_{1 \le j \le n,\, 1 \le t \le m}\ x_jH\,Ly_t.$$

Далі, з включення $HL \le K$ отримуємо, що $x_jHLy_t \le x_jKy_t = x_jy_t\,(y_t^{-1}Ky_t)$, отже

$$H^GL^G = \cup_{1 \le j \le n,\, 1 \le t \le m}\ x_jy_t\,(y_t^{-1}Ky_t).$$

З пропозиції 1.1.1 випливає, що хоча б одна з підгруп $y_t^{-1}Ky_t$ має скінченний індекс в H^GL^G, а тому і підгрупа K має скінченний індекс в H^GL^G. З очевидного включення $K^G \le H^GL^G$ випливає, що підгрупа K є наближено нормальною в G. Розглянемо тепер перетин $H \cap L$. Маємо $|H^G \cap L^G : H \cap L| = |H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L|\,|H^G \cap L^G \cap L : H \cap L|$, і тепер, використовуючи властивості індексів, отримаємо, що

$$|H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L| = |(H^G \cap L^G)L : L| \le |L^G : L|,$$
$$|H^G \cap L^G \cap L : H \cap L| = |(H^G \cap L)H : H| \le |H^G : H|.$$

З цих співвідношень і випливає скінченність індексу $|H^G \cap L^G : H \cap L|$. З очевидного включення $(H \cap L)^G \le H^G \cap L^G$ випливає тепер, що підгрупа $H \cap L$ наближено нормальна в G. Лема доведена.

2.1.3. Лема. *Якщо g – такий елемент групи G, що підгрупа $\langle g \rangle$ – наближено нормальна в G, то $g \in \mathbf{FC}(G)$.*

Доведення. Дійсно, якщо $g \in FC(G)$ і елемент g має скінченний порядок, то зі скінченності індексу $|\langle g \rangle^G : \langle g \rangle|$ отримуємо, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є скінченним, і тоді $g \in FC(G)$. Нехай тепер елемент g має нескінченний порядок. Зі скінченності індексу

$|< g >^G : < g > |$ отримаємо, що $L = < g >^G$ – майже абелева підгрупа. Знайдеться таке число $k \in \mathbb{N}$, що підгрупа $< g^k > = K$ – нормальна в L і має в ній скінченний індекс. Нехай $C = C_L(K)$, тоді $|L : C| \leq 2$ та C – скінченна над центром. З класичної теореми І. Шура (теорема 1.1.2) випливає скінченність [C, C]. У свою чергу, звідси випливає той факт, що сукупність T усіх елементів скінченного порядку підгрупи C буде (характеристичною) підгрупою C. Оскільки абелева група C/T без скруту містить у собі нескінченну циклічну підгрупу скінченного індексу, то вона сама буде нескінченною циклічною. Отже, L/T містить у собі нормальну циклічну підгрупу C/T, індекс якої не перевищує числа 2. Якщо L/T не має скруту, то, очевидно, кожен її елемент має в ній скінченну множину спряжених, тобто L/T – FC-група. Але ж FC-група без скруту є абелевою (теорема 1.1.4), а тому L/T – нескінченна циклічна група. Якщо припустити, що L/T має елементи скінченного порядку, то L/T – нескінченна діедральна група. У цьому випадку, очевидно, C/T буде локально нільпотентним радикалом L/T. Оскільки $g \in C$, то і $< g >^G \leq C$, і отже $L/T = C/T$. Таким чином, у кожному випадку L/T – нескінченна циклічна група, а тому $L/T = < gT >$. Для довільного елемента $x \in G$ маємо тепер $x^{-1}gx = g^t y$, *де* $t \in \{ -1, 1 \}, y \in T$. Зі скінченності T випливає, що елемент g має в групі G скінченну множину спряжених, тобто $g \in FC(G)$. Лема доведена.

2.1.4. Лема. *Нехай G – група, для якої $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(G)$ існує.*

(1) Якщо H – підгрупа групи G, то $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(H)$ існує.

(2) Якщо L – нормальна підгрупа групи G, то $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(G/L)$ існує.

(3) Якщо U, V – підгрупи групи G, причому U – нормальна в V, то $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(V/U)$ існує.

Ці твердження є майже очевидними.

2.1.5. Означення. *Нехай G – група, H – її підгрупа. Будемо говорити, що H є рівномірним добутком підгруп H_λ, $\lambda \in \Lambda$, якщо виконуються наступні умови:*

(U 1) *$H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda$ для кожної пари індексів $\lambda, \mu \in \Lambda$;*

(U 2) *$H_\lambda \cap < H_\mu / \mu \neq \lambda > = <1>$.*

Той факт, що підгрупа H є рівномірним добутком набору підгруп H_λ, $\lambda \in \Lambda$, будемо позначати за допомогою наступного символу $H = \mathbf{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

.

Якщо M – підмножина Λ, то символом $H(M)$ будемо позначати підгрупу $< H_\lambda \ / \ \lambda \in M > = \mathbf{Un}_{\lambda \in M} H_\lambda$. Також через $L_{Un}(H)$ будемо позначати систему $\{ H(M) / M \subseteq \Lambda\}$. Система підгруп $L_{Un}(H)$ є частково впорядкованою відносно теоретико-множинного включення. Позначимо також через $[[K, L]]_{Un}$ замкнений інтервал з кінцями K, L впорядкованої множини $L_{Un}(H)$.

2.1.6. Лема. *Нехай G – група та нехай H – її підгрупа, що розкладається в рівномірний добуток $H = \mathbf{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.. Якщо система $L_{Un}(H)$ має відхилення, то відповідна множина індексів Λ є скінченною.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай множина Λ буде нескінченною. Далі позначимо через α порядкове число, що задовольняє умову $\mathbf{dev}(L_{Un}(H)) = \alpha$. Наше твердження будемо доводити, застосувавши індукцію за числом α. Нехай спочатку $\alpha = 0$. З нашого припущення про нескінченність множини Λ випливає існування нескінченного спадного ланцюжка

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots ,$$

що складається з нескінченних підмножин Λ. Однак існування такого ланцюжка тягне за собою існування нескінченного ланцюжка підгруп

$$H(\Lambda_1) > H(\Lambda_2) > \ldots > H(\Lambda_n) > \ldots .$$

З іншого боку, рівність $\mathbf{dev}(L_{Un}(H)) = 0$ означає, що впорядкована за включенням множина $L_{Un}(H)$ задовольняє умову мінімальності. Отже

отримано протиріччя, що доводить наше твердження для випадку, коли $\mathbf{dev}(L_{Un}(H)) = 0$.

Припустимо тепер, що $\alpha > 0$ та що наше твердження вже доведено для всіх порядкових чисел, які є строго меншими, ніж α. Використовуючи той факт, що за нашою гіпотезою множина індексів Λ є нескінченною, знайдемо в ній нескінченну спадаючу послідовність

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots .$$

таких нескінченних підмножин Λ, що і різниці $M_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n+1}$ також є нескінченними для кожного номера $n \in \mathbf{N}$. Знову приходимо до нескінченного спадаючого ланцюжка підгруп

$$H(\Lambda_1) > H(\Lambda_2) > \ldots > H(\Lambda_n) > \ldots .$$

Знайдеться такий номер $k \in \mathbf{N}$, що $\mathbf{dev}([[H(\Lambda_n) >, H(\Lambda_{n+1})]]_{Un}) < \alpha$ для всіх $n \geq k$. Проте

$$H(\Lambda_n) = H(M_n)\, H(\Lambda_{n+1}) \quad \text{та} \quad H(M_n) \cap H(\Lambda_{n+1}) = \langle 1 \rangle .$$

Неважко довести той факт, що замкнені інтервали $[[H(\Lambda_n) >, H(\Lambda_{n+1})]]_{Un}$ та $L_{Un}(H(M_n))$, які розглядаються як впорядковані за включенням множини, є ізоморфними. Звідси випливає, що остання множина $L_{Un}(H(M_n))$ має відхилення, більш того, $\mathbf{dev}(L_{Un}(H(M_n))) < \alpha$. Враховуючи нашу індуктивну гіпотезу, ми бачимо, що це означає, що підмножина M_n мусить бути скінчеуною для номерів $n \geq k$. Це останнє протиріччя і завершує доведення нашого результату. Лема доведена.

2.1.7. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G, що задовольняють наступні умови:*

(i) L є нормальною підгрупою в K;

(ii) $H \cap K \leq L$;

(iii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, *де* $K_\lambda \neq L$ *та* K_λ *є* H*-інваріантною підгрупою для всіх індексів* $\lambda \in \Lambda$ *(звідси випливає зокрема, що підгрупи* K, L *також будуть* H*-інваріантними);*

(iv) множина індексів Λ *є нескінченною.*

Тоді підгрупа HL *буде наближено нормальною в* G.

Доведення. Той факт, що множина Λ є нескінченною, тягне за собою існування таких нескінченних підмножин Δ, Σ в Λ, що $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$ та $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Припустимо, що підгрупа $H\,K(M)$ не є наближено нормальною в G для будь-якої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$. Звідси вже буде випливати, що впорядкована за включенням система підгруп $\{ H\,K(M) \mid M \subseteq \Delta \}$ мусить мати відхилення. Неважко упевнитись у тому, що ця впорядкована множина є ізоморфною до впорядкованої множини $L_{Un}(K(\Delta)/L)$ (відмітимо, що $K(\Delta)/L = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, а прямий добуток є частинним випадком рівномірного добутку). Наявність такого ізоморфізму вказує на ту обставину, що відхилення має і впорядкована множина $L_{Un}(K(\Delta)/L)$. **Лема 2.1.6** показує, що у цьому випадку підмножина індексів Δ повинна бути скінченною, що суперечить її вибору. Отримана суперечність доводить існування такої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$, що підгрупа $H\,K(M)$ буде наближено нормальною в G. Застосувавши ті ж самі аргументи, покажемо, що і підмножина Σ містить у собі нескінченну підмножину Γ, для якої підгрупа $H\,K(\Gamma)$ є наближено нормальною в G. З такого вибору підмножин Δ, Σ випливає, що має місце рівність $HL = H\,K(M) \cap H\,K(\Gamma)$. Оскільки перетин двох наближено нормальних підгруп також є наближено нормальною підгрупою за **лемою 2.1.2**, то HL є наближено нормальною підгрупою G. Лема доведена.

2.1.8. Наслідок. *Нехай* G *– група, для якої існує вимірність Крулля* $\mathbf{K}_{non\text{-}nn}(G)$. *Припустимо, що* L, K, H *– підгрупи* G, *що задовольняють наступні умови:*

(i) L є нормальною підгрупою в K;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H-інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H-інваріантними;

(iii) підмножина $\Lambda \setminus \mathbf{Supp}\,(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде наближено нормальною в G.

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \setminus \mathbf{Supp}\,(HL/L \cap K/L)$ та нехай $T/L = \bigtimes_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Застосувавши тепер **лему 2.1.7** до підгруп H, T, L, отримаємо необхідний результат. Наслідок доведений.

2.1.9. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\mathbf{non\text{-}nn}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G, що задовольняють наступні умови:*

(i) L є нормальною підгрупою в K;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H-інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H-інваріантними;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $< h >L$ буде наближено нормальною в G.

Доведення. Оскільки підгрупа K_λ є H-інваріантною, то вона буде і $< h >$-інваріантною. Очевидно, що підмножина $\mathbf{Supp}\,(< h >L/L \cap K/L)$ є скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \mathbf{Supp}\,(< h >L/L \cap K/L)$ буде нескінченною, так що є можливим застосувати зараз **наслідок 2.1.8**. Наслідок доведений.

2.1.10. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\mathbf{non\text{-}nn}}(G)$. Припустимо, що K, H – підгрупи G, що задовольняють наступні умови:*

(i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодинична H-інваріантна підгрупа для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді $H \leq \mathbf{FC}(G)$.

Доведення. Дійсно, з **наслідку 2.1.9** отримаємо, що для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $< h >$ буде наближено нормальною в G. Залишається лише відмітити, що за **лемою 2.1.3** кожна циклічна наближено нормальна підгрупа групи міститься в її FC-центрі. Наслідок доведений.

2.1.11. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо K – така підгрупа G, що $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де підгрупи K_λ є неодиничними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то $K \leq \mathbf{FC}(G)$.*

2.1.12. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\text{non-nn}}(G)$. Припустимо, що L, K – підгрупи G, що задовольняють наступні умови:*

(i) L є нормальною підгрупою в K;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупи K, L будуть наближено нормальними в G.

Доведення. З того факту, що множина індексів Λ є нескінченною, випливає існування в ній таких нескінченних підмножин Δ, Σ, що $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U = \bigtimes_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, $V = \bigtimes_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$, тоді є очевидними рівності $K = UV$ і $U \cap V = L$. Більш того, будемо мати $K/U \cong \bigtimes_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$ та $K/V \cong \bigtimes_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$. З **леми 2.1.7** отримуємо, що підгрупи U, V будуть наближено нормальними. Оскільки перетин двох наближено нормальних підгруп та підгрупа, ними породжена, також є наближено нормальними підгрупами за **лемою 2.1.2**, то наше твердження і буде випливати з рівностей $K = UV$ і $U \cap V = L$. Наслідок доведений.

2.2. Абелеві секції груп, у яких система $L_{\text{non-nn}}(G)$

має вимірність Крулля

2.2.1. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{поп\text{-}пп}(G)$. Якщо підгрупа H не є наближено нормальною в G, то фактор-група $H/[H, H]$ буде мінімаксною.*

Доведення. Виберемо у абелевій фактор-групі $H/[H, H]$ таку вільну абелеву підгрупу $F/[H, H]$, що фактор-група H/F буде періодичною. З **наслідку 2.1.12** випливає, що множина $\Pi(H/F)$ повинна бути скінченною. Вільна абелева група $F/[H, H]$ є добутком нескінченних циклічних підгруп C_λ, $\lambda \in \Lambda$: $F/[H, H] = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$.. Нехай тепер p – просте число, що не належить до $\Pi(H/F)$. Маємо

$$D/[H, H] = (F/[H, H])^p = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^p.$$

Якщо припустити тепер, що множина індексів Λ є нескінченною, то у цьому випадку фактор-група F/D буде нескінченною елементарною p-групою. З нашого вибору простого числа p отримуємо, що F/D буде силовьскою p-підгрупою H/D, і тому маємо прямий розклад $H/D = F/D \times Q/D$, де Q/D – силовська p'-підгрупа H/D. Тоді секція $H/Q \cong (H/D)/(Q/D) \cong F/D$ буде нескінченною елементарною абелевою p-групою. Однак для цього випадку **наслідок 2.1.12** забезпечує той факт, що підгрупа H мусить бути наближено нормальною. Отримана суперечність показує у свою чергу, що множина індексів Λ повинна бути скінченною, а значить, відповідна фактор-група $F/[H, H]$ буде скінченно породженою.

Нехай $r \in \Pi(H/F)$ і позначимо через R/F силовську r-підгрупу H/F. Оскільки R/F є ізоморфною до деякої фактор-групи H, то, застосувавши знову **наслідок 2.1.12** отримаємо, що фактор-група $(R/F)/(R/F)^p$ повинна бути скінченною. У свою чергу разом з **пропозицією 1.1.10** це приводить до прямого розкладу $R/F = K/F \times C/F$, де підгрупа K/F є скінченною, а

підгрупа C/F є ділимою. Тепер ми можемо побачити, що H має ділиму r-фактор-групу, яка є ізоморфною до C/F. За **пропозицією 1.1.11** ця фактор-група буде прямим добутком квазіциклічних r-груп. Приймаючи до уваги **наслідок 2.1.12,** отримаємо, що кількість цих квазіциклічних множників мусить бути скінченною. Це означає, що підгрупа C/F буде черніковською. Скінченність K/F тягне за собою той факт, що R/F є черніковською. Оскільки це є справедливим для кожної силовської підгрупи H/F та, як ми вже зазначили вище, множина $\Pi(H/F)$ є скінченною, то і вся фактор-група H/F буде черніковською. Таким чином, абелева група $H/[H, H]$ є розширенням скінченно породженої підгрупи $F/[H, H]$ за допомогою черніковської групи H/F. Це і показує, що фактор-група $H/[H, H]$ буде мінімаксною. Лема доведена.

2.2.2. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{non\text{-}nn}(G)$. Якщо абелева підгрупа H не є наближено нормальною в G, то вона буде мінімаксною.*

2.2.3. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{non\text{-}nn}(G)$. Якщо g – елемент групи G, для якого існує $< g >$-інваріантна нескінченна елементарна абелева p-підгрупа A, то A містить у собі $< g >$-інваріантну підгрупу B, кожна підгрупа якої буде $< g >$-інваріантною.*

Доведення. Нехай $J = \mathbb{F}_p < x >$ – групове кільце нескінченної циклічної групи $< x >$ над простим полем $\mathbb{F}_p$. Дію елементу x на A визначимо за правилом $ax = g^{-1}ag$, $a \in A$. Ця дія може бути розширена природним чином до дії на A усього кільця J. Так визначена дія задає на A структуру модуля над кільцем J. Зазначимо, що групове кільце J є областю головних ідеалів, зокрема, воно буде дедекіндовою областю. Припустимо спочатку, що A не є J-періодичним. Тоді знайдеться такий елемент $a \in A$, що $Ann_J(a) = <0>$. У цьому випадку маємо

$$S = \langle a \rangle^{\langle g \rangle} = aJ \cong_J J.$$

Покладемо $K = \mathbb{F}_p\langle x^p \rangle$, тоді

$$J = K \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus \ldots \oplus Kx^{p-1}.$$

Нехай $C = aK$. Зазначимо, що C має нескінченний індекс в A та $CJ = S$ або, в мультиплікативних позначеннях, $C^{\langle g \rangle} = S$. З **наслідку 2.1.12** випливає, що кожна підгрупа A є наближено нормальною в G. Зокрема, підгрупа C є наближено нормальною в $\langle A, g \rangle$. Це означає, що індекс $|C^{\langle g \rangle} : C| = |S : C|$ мусить бути скінченним. Отримане протиріччя показує, що модуль A буде J-періодичним. Позначимо через π множину $\mathbf{Ass}_D(A)$, тоді маємо прямий розклад $A = \oplus_{P \in \pi} A_P$, де через A_P позначено P-компоненту A. Покладемо

$$\sigma = \pi \setminus \{(x-1)J \cup \ldots \cup (x-p+1)J\}, E = \oplus_{P \in \sigma} \Omega_{P,1}(A).$$

Тоді $E = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, *де* C_λ – простий J-підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Більш того, маємо ізоморфізм $C_\lambda \cong_J J/P_\lambda$,, де P_λ є простим ідеалом кільця J та $P_\lambda \neq (x-k)J$, $1 \leq k \leq p-1$, $\lambda \in \Lambda$. Звідси випливає, що C_λ буде скінченним, а також $|C_\lambda| > p$. Припустимо тепер, що множина індексів Λ є нескінченною. У кожному підмодулі C_λ виберемо неодиничний (чи ненульовий, якщо застосовуються адитивні позначення) елемент c_λ та покладемо $U = \langle c_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$. За таким вибором U має нескінченний індекс в E та $UJ = E$ (в адитивних позначеннях) або $U^{\langle g \rangle} = E$ (в мультиплікативних позначеннях). Як уже зазначалось вище, кожна підгрупа A буде наближено нормальною в G. Зокрема, і підгрупа U є наближено нормальною в $\langle A, g \rangle$. А це означає, що індекс $|U^{\langle g \rangle} : U| = |E : U|$ повинен бути скінченним. Отримана суперечність показує, що множина індексів Λ є скінченна. Беручи до уваги **пропозицію 1.1.13**, бачимо, що E –

артиновий J-модуль. Тоді або E буде скінченним, або E містить у собі прюферовий P-модуль V для деякого $P \in \sigma$. У другому випадку з того факту, що адитивна група V є нескінченною елементарною абелевою, отримаємо існування в V такої нескінченної підгрупи W, що індекс $|V : W|$ також є нескінченним. У той же час кожний власний J-підмодуль V буде скінченним, а це тягне за собою рівність $WJ = V$ або, в мультиплікативних позначеннях, $W^{< g >} = V$. Як вже відмічалось раніше, підгрупа W є наближено нормальною в $< A, g >$. Це означає, що індекс $|W^{< g >} : W| = |V : W|$ повинен бути скінченним. Отримана суперечність і доводить скінченність E.

Знайдемо тепер простий ідеал P з множини $\pi \setminus \sigma$ та припустимо, що фактор-модуль $\Omega_{P, 2}(A)/\Omega_{P, 1}(A)$ є нескінченним. Та обставина, що адитивна група $\Omega_{P, 2}(A)$ є елементарною абелевою дає можливість отримати прямий розклад $\Omega_{P, 2}(A) = \Omega_{P, 1}(A) \oplus Y$ для деякої підгрупи Y. Зокрема, Y буде нескінченною та має нескінченний індекс в $\Omega_{P, 2}(A)$, а також має місце рівність $YJ = \Omega_{P, 2}(A)$ або, в мультиплікативних позначеннях, $Y^{< g >} = \Omega_{P, 2}(A)$. Як і раніше, індекс $|Y^{< g >} : Y| = |\Omega_{P, 2}(A) : Y|$ мусить бути скінченним, і знову отримуємо протиріччя, яке доводить скінченність $\Omega_{P, 2}(A)/\Omega_{P, 1}(A)$. У свою чергу, якщо припустити тепер, що нескінченною буде секція $A_P/\Omega_{P, 1}(A)$, то, використавши аргументи, які вже наводились вище, отримаємо, що $A_P/\Omega_{P, 1}(A)$ містить у собі прюферовий P-підмодуль, що знову приводить до протиріччя. Отже, скінченність $A_P/\Omega_{P, 1}(A)$ є доведеною. Зокрема, $\mathbf{Ann}_J(A_P) \neq <0>$. У цьому випадку, як показує **теорема 1.1.14**, будемо мати прямий розклад $A_P = \oplus_{\mu \in M} L_\mu$, *де* L_μ – циклічний J-підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Покладемо

$$M_P = \{ \mu \in M / |L_\mu| > p \}.$$

Із скінченності фактора $A_P/\Omega_{P, 1}(A)$ випливає тепер скінченність підмножини M_P. Але тоді має місце прямий розклад $A_P = X_P \oplus Z_P$, *де* X_P, Z_P – це

J-підмодулі (тобто вони будуть $< g >$-інваріантними), X_P є скінченним, а Z_P – це однорідний напівпростий J-підмодуль, кожний простий підмодуль якого має простий порядок p. Нехай тепер $B = \oplus_{P \in \pi \setminus \sigma} Z_P$. Завдячуючи такому вибору, B буде $< g >$-інваріантною підгрупою, що має в A скінченний індекс. Більш того, кожна підгрупа B, очевидно, буде $< g >$-інваріантною. Лема доведена.

2.2.4. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}$ (G). Якщо H – підгрупа групи G, для якої існує H-інваріантна нескінченна елементарна абелева p-підгрупа A, p – просте число, то FC-центр групи G містить у собі H.*

Доведення. Нехай h – довільний елемент підгруппи H. Оскільки A є H-інваріантною, то вона буде також і $<h>$-інваріантною. З **леми 2.2.3** випливає, що A містить у собі $<h>$-інваріантну підгрупу B скінченного індексу, кожна підгрупа якої також є $<h>$-інваріантною. Зокрема B – нескінченна елементарна абелева підгрупа. **Наслідок 2.1.9** показує тепер, що має місце включення $h \in \boldsymbol{FC(G)}$. Оскільки таке включення є справедливим для кожного елемента $h \in H$, то для підгрупи H отримуємо включення $H \leq \boldsymbol{FC(G)}$. Наслідок доведений.

2.2.5. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}$ (G). Якщо G містить у собі нескінченну нормальну елементарну абелеву p-підгрупу для деякого простого числа p, то G – FC-група.*

2.2.6. Лема. *Нехай G – група, H – її підгрупа. Припустимо, що G містить у собі H-інваріантну абелеву підгрупу A без скруту. Якщо B – сервантна наближено нормальна в G підгрупа A, то B буде H-інваріантною.*

Доведення. Нехай $D = B^H$. Оскільки A є H- інваріантною, то $D \leq A$. З того факту, що B є наближено нормальною в G, випливає, що B також буде наближено нормальною в підгрупі $<A, H>$. Звідси випливає, що фактор-група D/B є скінченною. З іншого боку, сервантність підгрупи B в A

тягне за собою той факт, що фактор-група A/B не має скруту. Це і доводить рівність $D = B$, яке і показує, що B буде H-інваріантною підгрупою. ■

2.2.7. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}(G)$. Якщо H – підгрупа G, для якої існує H-інваріантна вільна абелева підгрупа F нескінченного рангу, то $H \leq \boldsymbol{FC}(G)$.*

Доведення. Підгрупа F розкладається у прямий добуток нескінченних циклічних підгруп C_λ, $\lambda \in \Lambda$: $F = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. З **наслідку 2.1.12** випливає, що кожна з підгруп C_λ буде наближено нормальною в G. Кожна з цих підгруп також є сервантною в F. **Лема 2.2.6** вказує тепер на те, що підгрупа C_λ буде H-інваріантною для кожного $\lambda \in \Lambda$. Застосовуючи тепер **наслідок 2.1.10,** отримаємо потрібне нам включення $H \leq \boldsymbol{FC}(G)$. Лема доведена.

2.2.8. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}(G)$. Якщо G містить у собі нормальну вільну абелеву підгрупу нескінченого рангу, то G – FC-група.*

2.3. Будова груп, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ має вимірність Крулля

2.3.1. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}(G)$. Якщо G – FC-група, то вона має скінченний комутант.*

Доведення. Нехай A – довільна абелева підгрупа G. Якщо A не є мінімаксною, то з **наслідку 2.2.2** випливає, що A буде наближено нормальною в G. Розглянемо тепер випадок, коли A не буде мінімаксною. Нехай $B = A \cap \zeta(G)$. За теоремою Р. Бера (**теорема 1.1.4**), фактор-група $G/\zeta(G)$ буде періодичною. Оскільки періодична абелева мінімаксна група є черніковською, то такою буде фактор-група A/B. Позначимо через D/B максимальну ділиму підгрупу A/B. Оскільки G – FC-група, то її центр містить у собі кожну ділиму підгрупу за **теоремою 1.1.4**, так що

$D/B \le \zeta(G/B)$. Підгрупа D/B має в A/B скінченний індекс, тому існує така скінченна підгрупа K/B, що задовольняє наступну умову $A/B = (D/B)(K/B)$. Застосовуючи той факт, що G – FC-група, отримаємо скінченність нормального замкнення $L/B = (K/B)^{G/B}$. Разом з включенням $D/B \le \zeta(G/B)$ це показує, що $(D/B)(L/B)$ буде нормальною підгрупою в G/B. Маємо тепер

$$|L : A| = |LD : KD| = |LD/B : KD/B| = ||(LD/B)(KD/B) : (KD/B)| =$$
$$|L/B : (L/B) \cap (KD/B)| = |L/B : (K/B)(L/B \cap D/B)| \le |L/B : K/B|.$$

Останній індекс є скінченним, а це тягне за собою скінченність індексу $|A^G : A|$. Таким чином, кожна абелева підгрупа буде наближено нормальною в групі G. У цьому випадку **теорема 1.1.5** свідчить про те, що група G має скінченний комутант. Лема доведена.

2.3.2. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K_{поп\text{-}пп}}$ (G). Якщо G містить у собі нескінченну елементарну абелеву p-підгрупу для деякого простого числа p, то G має скінченний комутант.*

Доведення. Нехай A – нескінченна елементарна абелева p-пігрупа G. **Наслідок 2.2.2** свідчить про те, що A буде наближено нормальною в G підгрупою. Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи A, тоді індекс $|K : A|$ буде скінченним. За класичною теоремою Пуанкаре, підгрупа A містить у собі нормальну в K підгрупу B скінченного індексу. Зокрема, B буде нескінченною елементарною абелевою p-підгрупою. Знайдемо в підгрупі K скінченну підгрупу F, що задовольняє умову $K = FA$. Очевидно, підгрупа B є F-інваріантною, тому за **наслідком 2.2.4** будемо мати включення $F \le \mathbf{FC}(G)$. Враховуючи тепер лему Діцмана (**наслідок 1.1.3**), отримаємо скінченність нормального замкнення $E = F^G$. В фактор-групі G/E нормальна підгрупа $K/E = FA/E = EA/E \cong A/(A \cap E)$ є нескінченною елементарною абелевою і **наслідок 2.2.5** показує, що G/E буде FC-групою. Застосування **леми 2.3.1** доводить скінченність комутанта фактор-групи G/E.

З того факту, що підгрупа E є скінченною, отримаємо тепер скінченність коммутанта усієї групи G. Лема доведена.

Наступна лема є відомою, але оскільки ми не змогли найти відповідних посилань, то наведемо її тут з доведенням.

2.3.3. Лема. *Нехай G – локально скінченна група, силовські підгрупи якої є скінченними для кожного простого числа p. Якщо множина $\Pi(G)$ є скінченною, то вся група G буде скінченою.*

Доведення. Для кожного простого числа $p \in \Pi(G)$ вибираємо в G силовську p-підгрупу S_p і породжуємо ними підгрупу H: $H = \langle S_p \mid p \in \Pi(G) \rangle$. Локально скінченність групи G тягне за собою скінченність підгрупи H. Нехай $|H| = p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}$. Припустимо, що $G \neq H$ і знайдемо елемент $x \in G \setminus H$. Не зменшуючи загальності нашого розгляду, можемо припустити, що x є p-елементом для деякого простого числа p. Тоді підгрупа $K = \langle H, x \rangle$ буде скінченною та з її побудови випливає, що вона не співпадає з H. Рівності

$$\Pi(G) = \Pi(H) = \Pi(K) = \{p_1, \ldots p_t\},$$

показують, що $|H| = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$, де $m_j \geq k_j$ для усіх $1 \leq j \leq t$. Більш того, якщо $p = p_s$, то $m_s > k_s$. Тоді $p_s^{m}s$ дорівнює порядку силовської p_s-підгрупи K і $p_s^{k}s$ дорівнює порядку силовської p_s-підгрупи H. Таким чином, можна побачити, що порядок силовської p_s-підгрупи K є строго більшим, ніж порядок силовської p_s-підгрупи H. З іншого боку, скінченність силовських p-підгруп G тягне за собою їх спряженість для кожного простого числа p. За своєю побудовою силовські p-підгрупи H будуть силовськими p-підгрупами усієї групи G. Зокрема, силовські p_s-підгрупи K будуть спряженими з силовськими p_s-підгрупами H, а тому вони мусять мати однакові порядки. Ця суперечність доводить рівність $H = G$, а значить, і скінченність групи G. Лема доведена.

2.3.4. Наслідок. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\text{пол-пп}}(G)$. Якщо G містить у собі періодичну абелеву підгрупу, що не є черніковською, то G має скінченний комутант.*

Доведення. Нехай A – періодична абелева підгрупа, що не є черніковською. Припустимо, що для деякого простого числа p силовська p-підгрупа P з підгрупи A також не буде черніковською. Така ситуація обов'язково виникає у випадку, коли множина $\boldsymbol{\Pi}(A)$ є скінченною. Тоді нижній шар S підгрупи P буде нескінченним. Інакше кажучи, S є нескінченною елементарною абелевою p-підгрупою G. З **леми 2.3.2** можна отримати тепер, що G має скінченний комутант.

Розглянемо тепер інший з можливих випадків, тобто випадок, коли для будь-якого простого числа p силовська p-підгрупа A буде черніковською. Оскільки A не є черніковською, то це означає нескінченність множини $\boldsymbol{\Pi}(A)$. У свою чергу, з цього випливає, що A містить у собі підгрупу $B = \times_{p \in \Pi(A)} B_p$, де B_p – це скінчена неодинична p-підгруппа, $p \in \boldsymbol{\Pi}(A)$. З самої структури підгрупи B можемо побачити, що вона не є мінімаксною, а тому **наслідок 2.2.2** показує, що B буде наближено нормальною в G. Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи B, тоді індекс $|K : B|$ буде скінченним. В такому разі підгрупа B містить у собі нормальну в K підгрупу C скінченного індексу. Нехай $|K : C| = d$ та покладемо $D = K^d$. Оскільки силовські підгрупи K є скінченними, то фактор-група K/D також буде скінченною за **лемою 2.3.3**. Підгрупа D, яка є характеристичною в K, є нормальною в G. Із скінченності K/D випливає нескінченність множини $\boldsymbol{\Pi}(D)$. З **наслідку 2.1.10** отримаємо, що G – FC-група, а застосування **леми 2.3.1** доводить скінченність коммутанту групи G. Наслідок доведений.

2.3.5. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $\mathbf{K}_{\text{пол-пп}}(G)$. Якщо G містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу, то G має скінченний комутант.*

Доведення. Нехай F – вільна абелева підгрупа нескінченного рангу. З **наслідку 2.2.2** випливає, що F буде наближено нормальною в G. Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи F, тоді індекс $|K : F|$ буде скінченним. У цьому випадку підгрупа B містить у собі нормальну в K підгрупу C скінченного індексу. Нехай $|K : C| = d$ та $D = K^d$. Порядки елементів фактор-групи K/D є дільниками натурального числа d, зокрема ця фактор-група буде періодичною. Це означає, що підгрупа D – неодинична і тому, враховуючи **пропозицію 1.1.12**, вона сама буде вільною абелевою. Знову враховуючи ту обставину, що K/D є періодичною, отримаємо нескінченність рангу підгрупи D. Підгрупа D, бувши характеристичною в K, є нормальною в G. Із **наслідку 2.2.8** отримаємо, що G – FC-група, а застосування **леми 2.3.1** доводить скінченність коммутанта групи G. Лема доведена.

Тепер уже є можливим отримати опис груп, для яких існує вимірність Крулля $\boldsymbol{K_{non\text{-}nn}}\ (G)$ у наступному досить широкому класі груп. Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні. Таким чином, або G має зростаючу неодиничну локально нільпотентну підгрупу, або вона має зростаючу неодиничну локально скінченну підгрупу. У першому випадку G має нормальну неодиничну локально нільпотентну підгрупу і її найбільша нормальна локально нільпотентна підгрупа (локально нільпотентний радикал) є неодиничним. У другому випадку G містить у собі нормальну неодиничну локально скінченну підгрупу. Майже очевидним також є той факт, що в будь-якій групі G підгрупа, породжена усіма нормальними локально скінченними підгрупами є (найбільшою) нормальною локально скінченною підгрупою. Її називають локально скінченним радикалом групи. Таким чином, узагальнено радикальна група має зростаючий ряд *нормальних* підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні.

2.3.6. Теорема. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3-групою.*

Доведення. Припустимо, що група G має нескінчений комутант. Нехай A – довільна абелева підгрупа з G та позначимо через T максимальну періодичну підгрупу A. Якщо підгрупа T не є черніковською, то з **наслідку 2.3.4** отримаємо, що G має скінченний комутант. Отримана суперечність показує, що T буде черніковською підгрупою. Припустимо тепер, що підгрупа A має нескінченний 0-ранг. У цьому випадку A містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу. З **леми 2.3.5** знову випливає скінченність коммутанта групи G, тобто знову отримаємо протиріччя. Це протиріччя показує, що $r_0(A)$ є скінченним. У свою чергу це свідчить про той факт, що A буде абелевою A_3 -групою.

Позначимо через R – максимальну нормальну радикальну подгрупу G. З **теореми 1.1.9** отримаємо, що R буде розв'язною A_3-групою. Нехай L/R – максимальна нормальна локально скінчеуна підгрупа G/R. Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, яка не є черніковською, то тоді **наслідок 2.3.4** забезпечує той факт, що G/R має скінченний комутант D/R. Його централізатор $C_{G/R}(D/R)$ буде мати тоді скінченний індекс в G/R. Якщо припустити тепер, що G/R є нескінченною, то, приймаючи до уваги ту обставину, що $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, отримаємо, що $C_{G/R}(D/R)$ буде неодиничною нільпотентною нормальною підгрупою G/R. Однак це суперечить вибору підгрупи R. Таким чином, у цьому випадку фактор-група G/R повинна бути скінчеуною, і цим все доведено. Тому на черзі постає розгляд випадку, коли всі абелеві підгрупи L/R будуть черніковськими. У цьому випадку група L/R також буде черніковською за теоремою В.П. Шункова (**теорема 1.1.8**). Знову з вибору підгруп L, R, випливає скінченність L/R. Припустимо, що фактор-група G/R є нескінченною та позначимо через U/L локально нільпотентний радикал G/L. З наших умов

випливає, що U/L буде вільною від скруту локально нільпотентною підгрупою. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Як і раніше, звідси випливає співвідношення $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Враховуючи той факт, що G/R не може містити у собі нормальних локально нільпотентних підгруп, отримуємо рівність $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Але ж у такому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Ці співвідношення свідчать про той факт, що V/R буде неодиничною нормальною локально нільпотентною підгрупою G/R, а це суперечить властивостям, що має фактор-група G/R. Отримане протиріччя доводить її скінченність, а з цим і всю теорему. Теорема доведена.

2.3.7. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3-групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G, яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними, система підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, яка не перевищує 1. Наслідок доведений.

2.3.8. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є наближено нормальними, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3-групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G, яка задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є наближено нормальними, система підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля. Наслідок доведений.

Цитована література

1. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind //* Math. Annalen.–1897.–**48.–** S. 548 – 561.
2. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //*S.-B. Heidelberg Akad.–1933.– **2.–** S. 12 – 17.
3. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – Т.5, № 3. – С. 45 – 49.
4. **Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М.** О метагамильтоновых группах II // Там. же. – 1968. – Т.6, № 5. – С. 50 – 53.
5. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** О метагамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – Т.7, № 3. – С. 195 – 199.
6. **Нагребецкий В.Т.** Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – Т.6, № 1. – С. 80 – 88.
7. **Махнев А.А.** О конечных метагамильтоновых группах // Там же. – 1976. – Т.10, № 1. – С. 60 – 75.
8. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп* // Мат. заметки. –1983.–**34**, № 2.–С.179 – 188.
9. **Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф**. *Строение метациклических метагамильтоновых групп.*– К.: Киев. пед. ин-т, 1983.– 22с.
10. **Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.** *О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп* // Строение групп и их подгрупповая характеризация. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101 – 111.
11. **Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Будова розв'язних метагамільтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.

12. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении непериодических метагамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика.– 1986. – № 11.– С. 32 – 40.

13. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.

14. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180 – 185.

15. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743 – 750.

16. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170 – 176.

17. *Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф*. *Строение метациклических метагамильтоновых групп* // Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173 – 183.

18. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 168 – 175.

19. Mann A. *Groups with dense normal subgroups* // Israel J. Math. – 1968. – 6, №1. – P. 13 – 25.

20. Kurdachenko L.A, Kuzennyi N.F., Semko M.M. *Groups with dense systems of infinite subgroups //* Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A. 1985, 3, P. 7 – 9.

21. Kurdachenko L.A, Kuzennyi N.F., Semko N.N. *Groups with a dense system of infinite almost normal subgroups //* Ukrainian Math. J. 1991, 42(7 – 8), P. 904 – 908.

22. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих ЩН[ ]–груп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 181 – 186.

23. Семко М.М. *Про будову УЩН[ ]–групп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1996. – Вип. 13. – С. 196 – 203.

24. Семко М.М. *Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп*.– К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 90 с.

25. Семко М.М. *Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.* – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.

26. Семко М.М. *Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.

27. Семко М.М. *Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп* // Класи груп з обмеженнями для підгруп.– К.: Ін–т математики НАН України, 1997.– С. 27 – 41.

28. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн.– 1997. – Т. 49, № 6.– С. 789 – 798.

29. Семко М.М. *Ненільпотентные групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1997. – Вип. 15. – С. 175 – 187.

30. Семко М.М. *Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.– К.: Ін–т математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 255 – 263.

31. Семко М.М. *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8.– С. 1148 – 1151.

32. Семко М.М. *Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10.– С. 1396 – 1403.

33. Семко М.М. *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997.– № 9. – С. 49 – 53.

34. Семко М.М. *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997.– № 10.– С. 43 – 46.

35. Семко М.М. *Про будову УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. –1998.– Т.50, № 9. – С. 1250 – 1261.

36. Семко М.М. *Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[ ]-груп* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1 (17).– С. 230 – 237.

37. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих УЩН( ]-груп* // Укр. мат. журн.– 1998. – Т.50, № 11. – С. 1532 – 1536.

38. Семко М.М. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.

39. Семко М.М. *Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, № 3. – С. 383 – 388.

40. Neumann B.H. *Groups with finite classes of conjugate subgroups //* Math. Z.– 1955.–**63**, № 1.– P. 76 – 96.

41. Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М. *Групи з щільною системою нескінченних підгруп* // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1985.– № 3. – С. 7 – 9.

42.Franciosi S., de Giovanni F. *Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups //* "Groups – Korea 94".– 1995.–Berlin: Walter de Gruyter.– P. 107 – 118.

43. Galoppo A. *Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups* // Ricerche Mat.–2000.– **49,** №2.–P. 213 – 220.

44. Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A. *Groups with restrictions on non-subnormal subgroups* // Ricerche di Matematica.– 1997.– **46**, № 2.– P. 307 – 320.

45. Musella C. *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups //* Note di Matematica.– 2000/2001.– **20,** № 1.– P. 43 – 52.

46. Кучменко С.Н. *Группы с широким множеством обобщенно нормальных подгрупп* //Вісник Дніпропетровського університету. Математика.–2003.– Вип. 8.– С. 44 – 53.

47. Кучменко С.Н. *Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга* //Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.– 2004.– Вип. № 1.– С. 21 **–** 33.

48. Semko M.M., Kuchmenko S.M. *Groups in which almost all subgroups are near to normal* // J. "Algebra and Discrete mathematics".–2004.–№2.– C. 92 – 113.

49. McConnel J.C., Robson J.C. *Noncommutative noetherian rings.*– New York: Wiley, 1987.– 597 p.

50.Neumann B.H. *Groups covered by permutable subsets* // J. London Math. Soc.–1954.– **29,** № 114.**–** P. 236 – 248.

51. Schur I. *Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution* // J. reine andew. Math. – 1904.– **127**.– S. 20 – 50.

52. Baer R. *Finiteness properties of groups* // Duke Math. J.–1948.– **15**.– P. 1021 – 1032.

53. Neumann B.H. *Groups with finite classes of conjugate elements* // Proc. London Math. Soc. –1951.–**1,** №3.– P. 178 – 187.

54. Еремин И.И. *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп* // Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.

55. Tomkinson M.I. *FC-groups.* – Boston: Pitman, 1984.–171 p.

56.Ольшанский А.Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах*. – М.: Наука, 1989. – 447 с.

57.Черников С.Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* – М.: Наука, 1980.–384 с.

58.Шунков В.П. *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп* // Алгебра и логика.–1970.– **9**, № 5.– С. 579 – 615.

59.Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F. *Locally finite groups.*– Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.–210 p.

60. Курош А.Г. *Теория групп.* – М.: Наука, 1967.– 648 с.

61. Robinson D.J.S. *Infinite soluble and nilpotent groups.*– London: Queen Mary College Mathematics Notes, 1968.–210 p.

62. Robinson D.J.S. *Finiteness conditions and generalized soluble groups: Part 1*.– Berlin: Springer, 1972.– 210 p.

63. Robinson D.J.S. *Finiteness conditions and generalized soluble groups : Part 2*.– Berlin: Springer, 1972.– 254 p.

64. Robinson D.J.S. *A course in the theory of groups*.–New York: Springer, 1982.–481 p.

65. Segal D. *Polycyclic groups*.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.– 289 p.

66.Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы: В 2 т.*– М.: Мир, 1974.– Т.1.– 336 с.

67.Мальцев А.И. *О некоторых классах бесконечных разрешимых групп //* Мат. сб.–1951.– **28**, № 3 .– С. 567 – 588.

68.Мальцев А.И. *О группах конечного ранга //* Мат. сб.–1948.–**22**, № 2.– С. 351 – 352.

69.Чарин В.С. *О разрешимых группах типа A_3* // Мат. сб. –1961.–**54**, № 3.– С. 489 – 499.

70.Baer R. *Polyminimaxgruppen //* Math. Annalen.– 1968.– **175,** № 1.– S. 1 – 43.

71.Зайцев Д.И. *О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности //* Мат. сб.–1969.–7**8**, № 3 .– С. 323 – 331.

72.Курдаченко Л.А. *Непериодические FC-группы и связанные с ними классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения //* Сиб. мат. журн.– 1986. – **27**, № 2.– С. 104 – 116.

73.Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya. *Groups with prescribed quotient groups and associated module theory*. – New Jersey: World Scientific**,** 2002. – 227 p.

74.Sharpe D.W. and Vamos P. *Injective modules*. – Cambridge: Cambridge Univ., 1972.– 190 p.

75.Wehrfritz B.A.F. *Infinite linear groups*.– Berlin: Springer, 1973.– 229 p.