

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

СКАСКІВ Лілія Василівна



УДК 512.54+512.554

ГРУПИ, БАГАТІ БЛИЗЬКИМИ
ДО НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДГРУПАМИ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 2012

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки

Львівського національного університету імені Івана Франка

Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Артемович Орест Демянович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
професор кафедри алгебри та геометрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Семко Микола Миколайович,
Національний університет державної
податкової служби України,
завідувач кафедри вищої математики.

доктор фізико-математичних наук, доцент
Олійник Андрій Степанович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри алгебри та математичної логіки.

Захист відбудеться "11" ВЕРЕСНЯ 2012 р. о 15 год. 00 хв. на
засіданні Спеціалізованої Вченої Ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "17" ЛИПНЯ 2012 р.

Вчений секретар

Спеціалізованої Вченої Ради С.І. Фединяк Фединяк С.І.

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**

СКАСКИВ Лілія Василівна

УДК 512.54+512.554

**ГРУПИ, БАГАТІ БЛИЗЬКИМИ
ДО НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДГРУПАМИ**

01.01.06 - алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 2012

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки

Львівського національного університету імені Івана Франка

Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Артемович Орест Дем'янович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
професор кафедри алгебри та геометрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Семко Микола Миколайович,
Національний університет державної
податкової служби України,
завідувач кафедри вищої математики.

доктор фізико-математичних наук, доцент
Олійник Андрій Степанович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри алгебри та математичної логіки.

Захист відбудеться "___"_____ 2012 р. о ___ год. ___ хв.
на засіданні Спеціалізованої Вченої Ради Д 35.051.18 у Львівському національному
університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м.Львів, вул.Університетська, 1,
аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського
національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул.
Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "___" _____ 2012 р.

Вчений секретар

Спеціалізованої Вченої Ради _____ Фединак С.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Починаючи з робіт Р. Дедекінда про скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, Г. Міллера і Х. Морено про скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві, О.Ю. Шмідта про скінченні групи, всі власні підгрупи яких нільпотентні, ведуться дослідження груп із системами підгруп, які мають важливі природні властивості. На цьому шляху, прокладеному від скінченних груп до нескінченних, виділено і охарактеризовано багато важливих класів груп, введено нові важливі поняття, що суттєво вплинули на подальші напрямки досліджень в теорії груп.

Систематичне вивчення нескінченних груп з умовами скінченності, зініційоване професором С.М. Черніковим і підсумоване в його монографії¹, інтенсивно проводилось ним та його учнями, починаючи з 50-тих років минулого століття.

Цією тематикою, яка виявилась перспективною і плідною, зацікавилось багато різних дослідників із різних країн; вони опублікували результати своїх пошуків у значному числі праць, впроваджуючи при цьому в математику нові фундаментальні поняття і змінюючи погляди на предмет і методи досліджень.

Один із підходів полягає у вивченні груп з "малою" (або "великою" у певному сенсі) системою підгруп, що мають (або не мають) деяку властивість X . Так, С.М. Черніков започаткував дослідження нескінченних груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для системи не X -підгруп (тобто системи всіх підгруп групи, які не мають властивості X), серед яких варто нагадати про дослідження С.М. Чернікова груп з умовою мінімальності для неабелевих підгруп, дослідження Д.І. Зайцева і Л.А. Курдаченка груп з умовою максимальності для неабелевих підгруп. За цей час вивчалися групи з різноманітними умовами мінімальності та відповідно максимальності для різних систем підгруп; серед яких вкажемо на публікації М.Р. Діксона та Л.А. Курдаченка, С. Фраціозі, Ф. де Джованні і Я.П. Сисака, Х. Отала та Х. Пени, М.М. Семка, В.С. Чаріна, М.С. Чернікова, О.Д. Артемовича та інших. Подібні дослідження груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для певних систем узагальнено нільпотентних підгруп проведено в даній дисертаційній роботі.

До груп з "малою" системою не X -підгруп відносяться нескінченні мінімальні не X -групи, тобто нескінченні групи, які не є X -групами в той час,

¹ Черников Н.С. Группы с заданными свойствами систем подгрупп // М.: Наука, 1980. – 384 с.

як всі їхні власні підгрупи є X -групами. Перший такий приклад (а саме, нескінченної мінімальної нільпотентної групи із субнормальними власними підгрупами) побудували Г. Хайнекен та І. Мохамед² в 1968 році (в їх честь такі групи названо групами типу Хайнекена-Мохамеда). Такі групи виявились нерозкладними (тобто групами, в яких будь-які дві власні підгрупи знову породжують власну підгрупу). В. Мирес в низці робіт (див. його підсумкову роботу³) встановив, що групи із субнормальними підгрупами завжди розв'язні. За пройдений період опубліковано біля двох десятків робіт про групи типу Хайнекена-Мохамеда, але вони все ще залишаються недослідженими.

Систематичне вивчення мінімальних не X -груп започаткував В. Беляєв, досліджуючи мінімальні не FC-групи і мінімальні не BFC-групи. Пізніше він та, незалежно, Б. Бруно вивчали мінімальні не майже абелеві групи^{4,5}, а Б. Бруно та Р. Філіпс^{6,7,8} – мінімальні не майже нільпотентні групи. Різними авторами вивчались також мінімальні не CC-групи. М. Ксу⁹ розглядав групи, всі власні підгрупи яких берові, та групи¹⁰, всі власні підгрупи яких є FN-групами (тобто групами, що є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп), а О.Д. Артемович вивчав властивості мінімальних не майже гіперцентральных груп. Із результатів Ф. Наполітано, Е. Пегораро¹¹ та Х. Отала, Х. Пени¹² випливає, що якщо X – це властивість "бути розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи", то в класі локально ступінчатих груп мінімальних не X -груп не існує. В даній дисертації встановлено, що якщо X – це властивість "бути розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи", то існує

² Heineken H., Mohamed I.J. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. – 1968. – V.10. – P. 368-376.

³ Möhres W. Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind // Archiv Math. – 1990. – V.54. – S.232-235.

⁴ Беляєв В.В. Локально конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы // Сиб. мат. ж. – 1983. – Т.24, №3. – С.11-17.

⁵ Bruno B. On groups with "abelian-by-finite" proper subgroups // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – V.3-B. – P.797-807.

⁶ Bruno B. Gruppi i cui sottogruppi propri contengono un sottogruppo nilpotente di indice finito // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – (6)3-D. – P.179-187.

⁷ Bruno B. Special q -groups and C_p^∞ -groups of automorphisms // Archiv Math. – 1987. – V.48. – P.15-24.

⁸ Bruno B., Phillips R.E. A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups // Archiv Math. – 1995. – V.65. – P.369-374.

⁹ Xu M. Groups whose proper subgroups are Baer groups // Acta Math. Sinica. – 1996. – V.12. – P.10-17.

¹⁰ Xu M. Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent// Archiv Math. - 1996. - V. 66. - P. 353-359.

¹¹ Napolitani F., Pegoraro E. On groups with nilpotent-by-Cernikov proper subgroups// Archiv Math. - 1997. - V. 69. - P. 89-94.

¹² Otal J., Peña J. M. Groups in which every proper subgroup is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernikov// Archiv Math. - 1988. - V. 51. - P. 193-197.

недосконала мінімальна не X -група і вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда.

Важливий напрямок застосування теорії груп – це дослідження груп одиниць (та груп квазірегулярних елементів) асоціативних кілець. Алгебраїчні одиниці вперше зустрічаються у Ф. Гаусса. Першим важливим результатом про групи одиниць, напевно, є теорема Діріхле про одиниці кільця цілих алгебраїчних чисел. Початкові результати в цьому напрямку описано в монографії¹³. Квазірегулярні елементи ввів С. Перліс з метою характеристики радикала Джекобсона асоціативного кільця. Якщо асоціативне кільце має одиницю, то його група одиниць і приєднана група (тобто група, яка складається із елементів, оборотних стосовно операції приєднаного множення) ізоморфні. Радикальні кільця вивчалися в роботах Б. Амберга та О. Дікеншіда, Дж. Воттерса, Я.П. Сисака, Ю.М. Рябухіна та багатьох інших. Я.П. Сисак¹⁴ побудував асоційовану групу $G(R)$ радикального кільця R , а О.Д. Артемович¹⁵ розширив цю конструкцію і розглядав групу $H(I, T)$, асоційовану з підмодулем I модуля над довільним асоціативним кільцем R та підгрупою T приєднаної групи R° цього кільця. Ю.Б. Ішук¹⁶ досліджував властивості асоційованої групи $G(R)$ для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця R . В. Румп¹⁷ зовсім недавно ввів в розгляд поняття брейса, який, як виявилось, насичений різними підгрупами. В дисертації вводиться група $H(L, T)$, яка асоційована з підмодулем L модуля, що розглядається над довільним брейсом A , та підгрупою T приєднаної групи A° . Зокрема, розглядається група $H(A)$, асоційована з брейсом A , і досліджуються деякі її властивості, пов'язані з нільпотентністю.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації – складова частина досліджень із держбюджетної теми № 0104 U 002129, яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження. *Мета дисертації* – дослідження груп, насичених підгрупами, близькими до нільпотентних і їх узагальнень.

¹³ Фуке Л. Бесконечные абелевы группы, Том 2// М.: Мир, 1974. - 416 с.

¹⁴ Сысак Я. П. Произведения групп, связанные с радикальными кольцами// В кн.: Произведения бесконечных групп. Препринт 82.53: Институт математики АН УССР, 1982. - С. 21-35.

¹⁵ Artemovych O. D. On groups associated with Frobenius groups// Demonstratio Math. - 1998. - V. 21. - P.875-878.

¹⁶ Ishchuk Yu. On associated groups of rings// In: Groups St. Andrews 2001 in Oxford. Vol. I. London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 304. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. - P. 284-293.

¹⁷ Rump W. Braces, radical rings, and quantum Yang-Baxter equations// J. Algebra. - 2007. - V. 307. - P. 153-170.

Об'єкт дослідження – групи з умовами мінімальності (відповідно максимальності) для певних систем підгруп, близьких до нільпотентних, а також групи, пов'язані з брейсами.

Предмет дослідження – особливості будови груп, які задовольняють певні умови скінченності, а також дослідження груп, асоційованих з брейсами.

Задачі дослідження:

- охарактеризувати групи із умовами мінімальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;
- дослідити періодичні групи із умовами максимальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;
- вивчити певні зв'язки груп із брейсами.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії груп та теорії кілець і модулів.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, нові і є такими:

- доведено, що недосконала локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою;
- охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп;
- встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп в той час, як кожна їхня власна підгрупа є такою, і в недосконалому випадку доведено, що така група є групою типу Хайнекена-Мохамеда;
- встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральных) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в групі;
- охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є майже абелевими;
- побудовано групу, асоційовану з брейсом, і досліджено деякі її властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях в теорії груп.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних статтях (див. [3], [4], [5], [6], [8]) співавтору, який є науковим керівником, належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

- 4-та міжнародна алгебраїчна конференція (2003, Львів);
- A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70th Birthday (2005, Debrecen, Hungary);
- 6-та міжнародна алгебраїчна конференція (2007, Кам'янець-Подільський);
- 2-а міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (2008, Львів);
- 7-ма міжнародна алгебраїчна конференція (2009, Харків);
- 8-ма міжнародна алгебраїчна конференція (2011, Луганськ);
- на львівському міському алгебраїчному семінарі під керівництвом професора М.Я. Комарницького (2007, 2012, Львів).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 11 працях (6 без співавторів), з яких 6 (2 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку фахових видань.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 108 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 140 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 15 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність тематики дисертаційної роботи, сформульовано мету, завдання та основні задачі, які розглядаються в даній роботі, вказано на наукову новизну отриманих результатів та зазначено інформацію про їх апробацію.

Перший розділ допоміжний, він не містить нових результатів. У ньому викладено основні поняття і сформульовано результати, що використовуються в дисертації. Також коротко наведено основні результати даної дисертаційної роботи.

Нехай X – теоретико-групова властивість. Якщо група G не має властивості X , то коротко будемо говорити, що $G \in$ не X -група. Кажуть, що G – *майже X -група*, якщо G містить таку підгрупу H скінченного індексу, що H має властивість X . Група G називається *мінімальною не X -групою*, якщо кожна власна підгрупа із $G \in X$ -групою в той час, як сама G не $\in X$ -групою.

В **розділі 2** вивчаються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не $\in$ узагальнено нільпотентними. В **підрозділі 2.1** встановлено, що кожна локально ступінчата група, яка не $\in$ розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не $\in$ розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Аналогічним чином доведено, що кожна локально ступінчата група, яка не $\in$ розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не $\in$ розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1).

Нагадаємо, що $A\check{C}$ -групою (відповідно $N\check{C}$ -групою) називається група, яка $\in$ розширенням абелевої (відповідно нільпотентної) групи за допомогою черніковської групи. Один із результатів Х. Отала і Х. Пени¹² узагальнює таке

Твердження 2.2. *Нехай G - недосконала¹⁸ локально ступінчата група. Тоді справджуються такі властивості:*

(1) *якщо група G періодична і всі її власні нормальні підгрупи $\in A\check{C}$ -групами, то G – $A\check{C}$ -група;*

(2) *якщо всі власні нормальні підгрупи із $G \in N\check{C}$ -групами, то G – $N\check{C}$ -група.*

¹⁸ Якщо група G співпадає з своїм комутантом G' , то G називається *досконалою*; якщо ж – ні, то кажуть, що група G *недосконала*.

Із отриманих результатів випливає, що не існує груп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими.

В підрозділі 2.2 охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій¹⁹, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп. Нагадаємо, що групу, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної групи, прийнято скорочено називати *FN-групою*. Якщо G – недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є *FN-групами*, то група G задовольняє умову *Min-FN* в тому і тільки тому випадку, коли вірне одне із тверджень: (1) G – *FN-група*; (2) G – майже нільпотентна група; (3) G – мінімальна не *FN-група* (див. лему 2.4). М. Ксу¹⁰ досліджував мінімальні не *FN-групи*, а Х. Отал і Х. Пена¹² розширили розглядуваний клас заміною терміну "скінченна група" на термін "черніковська група"; вони розглядали локально ступінчаті групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп. В¹² встановлено, що локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп класу нільпотентності c (де c - фіксоване натуральне число), сама є такою. Із результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро та Х. Отала, Х. Пени випливає, що не існує локально ступінчатих груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими (тобто не існує мінімальних не *NČ-груп*).

Одним із центральних результатів дисертації є така характеристика груп з умовою мінімальності *Min-FN* для не *FN-підгруп*.

Теорема 2.1. *Нехай G – група, яка не має неединичних досконалих секцій. Тоді група G задовольняє умову мінімальності *Min-FN* для не *FN-підгруп* в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:*

- (1) G – *FN-група*;
- (2) G – майже нільпотентна група;
- (3) G має таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \ (n > 1),$$

¹⁹ Якщо H - яка-небудь підгрупа із G , K - нормальна підгрупа в H , то фактор-група H/K називається *секцією* групи G .

де A_i – група з нільпотентним комутантом $A_i = A' \leq A_0$ і подільною черніковською p_i -групою A_i/A'_i ($i = 1, \dots, n$), A_0 – нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою A_0/A' (зокрема, A_0/A' – одинична) і, крім того, $p_1, \dots, p_n$ – попарно різні прості числа.

В підрозділі 2.3 встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими (тобто існують мінімальні не $\check{S}N$ -групи). Нагадаємо, що $\check{S}N$ -група – це група, яка є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи. Одним із головних результатів роботи є така

Теорема 2.2. *Нехай G – недосконала група. Тоді G – мінімальна не $\check{S}N$ -група в тому і тільки тому випадку, коли G – мінімальна ненільпотентна група із субнормальними власними підгрупами.*

В низці робіт Х.Сміта, Л.А.Курдаченка, В.Миреса, К.Касоло, Б.Брукса та інших досліджувався вплив субнормальності на будову групи. Нами в підрозділі 2.4 доведено таку теорему.

Теорема 2.3. *Нехай G – локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:*

(i) *якщо G задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, субнормальна в G ;*

(ii) *якщо G задовольняє умову мінімальності для негіперцентральных підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, субнормальна в G .*

В третьому розділі досліджено періодичні групи без неединичних досконалих секцій з умовою максимальності Max-AF для не майже абелевих підгруп. Нагадаємо, що група G задовольняє умову максимальності для підгруп, які не є майже абелевими (скорочено умову Max-AF), якщо кожен строго зростаючий ланцюг

$$G_1 < G_2 < \dots < G_n < \dots$$

її підгруп G_i , які не є майже абелевими, через скінченне число кроків обривається. Кожна мінімальна не майже абелева група (тобто не майже абелева група, всі власні підгрупи якої майже абелеві) задовольняє умову *Max-AF*. Д.І. Зайцев і Л.А. Курдаченко вивчали локально майже розв'язні групи з умовою максимальності для неабелевих підгруп. Зазначимо також, що дослідження груп з різними умовами максимальності проводяться надалі.

В підрозділі 3.1 описано групи без неединичних досконалих секцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1). Охарактеризовано також групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольняють умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

Нагадаємо одну конструкцію, яка називається *групою Чаріна*. Нехай p і q – різні прості числа, F_q – скінченне поле із q елементів. Покладемо

$$F_i = F_q(\varepsilon_i)$$

та

$$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$$

де ε_i – примітивний корінь степеня p^i із одиниці 1 ($i = 0, 1, 2, \dots$). Якщо A – адитивна група поля F , а B – мультиплікативна підгрупа, яка складається із всіх коренів степенів p^i із одиниці 1, де $i = 0, 1, 2, \dots$, то правило

$$b^{-1}ab = b^{p^m} \cdot a,$$

де $a \in A$, $b \in B$, $m \in N_0$, а $b^{p^m} \cdot a$ – добуток елементів b^{p^m} та a в полі F , визначає дію групи B на групі A . Напівпрямий добуток груп

$$G = A \rtimes B$$

називається *групою Чаріна* (див. ⁴). Для $m = 0$ така група вперше побудована в роботі В.С. Чаріна²⁰.

Як уже зазначалося раніше, мінімальні не майже абелеві групи охарактеризовано В. В. Беляєвим⁴ та, незалежно, Б. Бруно і Р. Філіпсом (^{4,5,8}).

²⁰ Чарин В. С. Замечание об условии минимальности для подгрупп // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, №4. – С.575-576.

Зокрема, із ^(4,8) випливає, що мінімальна не майже абелева група періодична і є групою Чаріна або нерозкладною метабелевою групою.

В підрозділі 3.2 досліджено будову періодичних розв'язних груп з умовою максимальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою скінченних груп. Базуючись на результатах (І. Капланського, Дж. фон Неймана, М. Ауслендера, Дж. Маклафліна, О. Вільямаєра та інших) із теорії кілець і модулів, отримано таку основну (в третьому розділі) теорему²¹.

Теорема 3.1. *Нехай G – періодична розв'язна група. Тоді G задовольняє умову Мах-АФ в тому і тільки в тому випадку, коли вона майже абелева група або $G = HF$ – локально майже абелева група, де $H'F$ – майже абелева підгрупа, $|G : H| < \infty$ і H належить до одного із типів:*

(i) H – мінімальна не майже абелева група;

(ii) $H = H' \times P$, де P – квазіциклічна p -група,

$$H' = Q_1 \times \dots \times Q_s$$

– p' -група, яка є прямим добутком своїх силовських p_i -підгруп Q_i експоненти $p_i^{n_i}$, причому

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \times P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна ($n_i \in N; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i$);

(iii) $H = A \times P$, де P – мінімальна не майже абелева група, $H = A \times P'$ та H/P' – група типу (ii).

Нагадаємо, якщо $(R, +, \cdot)$ – асоціативне кільце, то приєднане множення "o", визначається за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b,$$

де $a, b \in R$. Тоді (R, o) – напівгрупа з нейтральним елементом $0 \in R$. Якщо (R, o) – група, то кільце R називається *радикальним*. Поняття приєданого множення в 40-вих роках минулого століття ввів С.Перліс з метою характеристики радикала Джекобсона в асоціативному кільці.

²¹ Тут $\Omega_k(P) = \{x \in P | x^{p^k} = 1\}$ – це k -тий прошарок p -групи P .

В четвертому розділі розглядаються брейси A , введені В.Румпом²². Нагадаємо, що непорожня множина A , на якій визначено дві алгебраїчні операції " $+$ " та " $\cdot$ ", називається *брейсом* (=brace), якщо виконуються такі умови:

- i) $A^+ = (A, +)$ – абелева група (з нулем 0);
- ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для будь-яких елементів $a, b, c \in A$;
- iii) A – група стосовно операції приєднаного множення " $\circ$ ", визначеної за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для елементів $a, b \in A$ (яка позначається символом A°).

Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс асоціативний (стосовно операції множення " $\cdot$ ") тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. Я. П. Сисак у 1982 році побудував групу¹⁴, асоційовану з радикальним кільцем. В **підрозділі 4.1** дисертаційної роботи ця конструкція розширена на випадок модулів над брейсами, тобто побудовано групу $H(L, T)$, асоційовану з підмодулем L модуля, який розглядається над довільним брейсом A , та підгрупою T приєднаної групи A° .

Нехай A – брейс, L – підмодуль A -модуля M^{23} , T – підгрупа із приєднаної групи A° . На множині пар

$$H(L, T) = \{(l, t) | l \in L, t \in T\}$$

визначимо операцію множення за правилом

$$(x, y)(u, v) = (xv + x + u, yov) \quad (1)$$

для елементів $x, u \in L$ та $y, v \in T$.

Лема 4.1. *Нехай M – модуль над брейсом A . Якщо L – підмодуль із M , а T – підгрупа із A° , то*

$$H(L, T) = E \times F$$

– група стосовно операції, визначеної за правилом (1), причому група $E = \{(l, 0) | l \in L\}$ ізоморфна адитивній групі $(L, +)$, а $F = \{(e, t) | t \in T\}$ ізоморфна групі T .

²² Rump W. Modules over braces// Algebra and Discrete Math. - 2006. - No 2. - P. 127-137.

²³ Абелева група $(M, +)$ із нейтральним елементом e називається *модулем над брейсом A* (з нулем 0), якщо існує відображення $M \times A \ni (x, a) \rightarrow xa \in M$, яке для будь-яких елементів $x, y \in M$ та $a, b \in A$ задовольняє такі умови:
 $m_1) (x + y)a = xa + ya$;
 $m_2) x(a \circ b) = (xa)b + xa + xb$;
 $m_3) xe = e$.

Як звичайно²², непорожня підмножина S із брейса A називається *підбрейсом*, якщо виконуються такі умови:

- $s_1) (S, +) - \text{підгрупа в } (A, +);$
- $s_2) u, v \in S \text{ для будь-яких } u, v \in S.$

Зрозуміло, що брейс A є модулем над самим собою²⁴. Тому кожен підмодуль I з A -модуля A називається *правим ідеалом* в A . Правий ідеал в A є підбрейсом. Якщо, крім того, виконується умова $ai \in I$ для довільних $i \in I$ та $a \in A$, то I називається *двобічним ідеалом* брейса A .

Лема 4.3. Нехай A – брейс з асоційованою групою $H(A) = E \times F$. Якщо S – підбрейс в A із асоційованою групою $H(S) = U \times W$, то справджуються такі властивості²⁵:

- (a) $H(S) \leq H(A), U \leq E, W \leq F;$
- (b) якщо S – правий ідеал в A , то U – нормальна підгрупа в $H(A)$;
- (c) якщо S – двобічний ідеал в A , то $U < H(A)$ та $H(S) < H(A)$;
- (d) Якщо $U < H(A)$, то $SA \subseteq S$;
- (e) Якщо $H(S) < E \times W$, то $AS \subseteq S$;
- (f) $C_E(F) = \{(a, 0) \in E \mid a \in \text{ann}_l A\},$
 $C_F(E) = \{(0, u) \in F \mid u \in \text{ann}_r A\};$
 зокрема, якщо A не має дільників нуля, то
 $C_E(F) = C_F(E) = \langle (0, 0) \rangle.$

Досліджено інші зв'язки між асоційованими групами брейса, його підбрейса та фактор-брейса (див. леми 4.2, 4.4-4.6).

В підрозділі 4.2 доведено теорему, яка встановлює необхідну і достатню умову, за якої група $H(L, T)$ є групою Фробеніуса²⁶.

²⁴ Домовимось групу $H(A, A^\circ)$ коротко позначати символом $H(A)$ і називати асоційованою групою брейса A .

²⁵ $\text{ann}_l A = \{u \in A \mid uA = \{0\}\}$ – лівий анулятор, $\text{ann}_r A = \{v \in A \mid Av = \{0\}\}$ – правий анулятор брейса A та $\text{ann} A = \text{ann}_l A \cap \text{ann}_r A$

²⁶ Нагадаємо, що група $H = E \times F$ називається групою Фробеніуса із ядром E і доповненням F , якщо виконуються дві такі умови:

- a) $F \cap F^g = \langle 1 \rangle$ – одинична група для всіх $g \in H \setminus F$
- b) справджується рівність

$$E \setminus \langle 1 \rangle = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h$$

Теорема 4.1. Нехай M – модуль над брейсом A , L – ненульовий підмодуль із M , T – ненульова підгрупа приєднаної групи A° . Тоді

$$H = H(L, T) = E \times F$$

– група Фробеніуса із ядром E і доповненням F тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

- i. $L = Lh$ для будь-якого ненульового елемента $h \in T$;
- ii. $\text{ann}_T(l) = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$ для кожного ненульового елемента $l \in L$.

Побудовано приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (див. приклад 4.1).

Я.П. Сисак¹⁴ встановив, що радикальне кільце R нільпотентне тоді і тільки тоді, коли його асоційована група $G(R) = R^+ \times R^\circ$ нільпотентна. В **підрозділі 4.3** введено в розгляд поняття нільпотентного зліва (відповідно справа) брейса A і досліджено умови періодичності його адитивної A^+ та приєднаної A° груп. Нагадаємо, що $A^{n+1} = A(A^n)$ та $A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$ для будь-якого натурального числа n . Брейс A називатимемо нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), якщо $A^{(n)} = \{0\}$ (відповідно $A^n = \{0\}$) для певного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $A^{(n+1)}$ – ідеал в $A^{(n)}$ (лема 4.7).

В дисертації розглядаються брейси A з періодичною приєднаною групою A° та встановлюється, за яких умов адитивна група A^+ і відповідно приєднана група A° нільпотентного справа (відповідно зліва) брейса A буде p -групою чи групою без скруту.

Лема 4.8. Нехай A – брейс, p – просте число. Тоді справджуються такі властивості:

- (1) $H(A)$ – періодична група в тому і тільки тому випадку, коли групи A^+ і A° періодичні;
- (2) $H(A)$ – p -група в тому і тільки тому випадку, коли A^+ та A° – p -групи.

Твердження 4.1. Нехай A – брейс, який є нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), p – просте число. Тоді мають місце такі властивості:

- (i) A^+ – p -група тоді і тільки тоді, коли A° – p -група;

(ii) A^+ – група без скруту тоді і тільки тоді, коли A° – група без скруту.

Також досліджується зв'язок між нільпотентністю брейса A та його асоційованої групи $H(A)$ (див. також лему 4.9 і наслідок 4.2), який описується такою теоремою.

Теорема 4.2. *Вірні такі твердження:*

(1) якщо A – ненульовий нільпотентний зліва брейс, то справджуються такі властивості:

(i) $H(A)$ – нільпотентна група;

(ii) анулятор $\text{ann } A \neq \{0\}$ ненульовий;

(2) якщо A – ненульовий нільпотентний справа брейс, то $H(A)$ – розв'язна група.

Наведено приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (див. приклад 4.2).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню груп, насичених підгрупами, близькими за своїми властивостями до нільпотентних і їх узагальнень. В дисертації отримано такі нові результати:

- встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської (відповідно абелевої) групи за допомогою абелевої (відповідно черніковської) групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями черніковських (відповідно абелевих) груп за допомогою абелевих (відповідно черніковських);
- доведено, що недосконала локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою;
- охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп;
- встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп в той час, як кожна власна їхня підгрупа є такою, і в недосконалому випадку доведено, що така група є групою типу Хайнекена-Мохамеда;
- встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральных) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в групі;
- охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є майже абелевими;
- побудовано групу, асоційовану з брейсом, і досліджено деякі її властивості, пов'язані з нільпотентністю.

Авторка висловлює щире подяку своєму науковому керівнику, професору Артемовичу Оресту Дем'яновичу, за постійну увагу та підтримку в роботі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Йоник Л. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних / Л. В. Йоник // Мат. методи і фіз.-мех. поля. - 2006. - Т. 49, № 2. - С. 12-16.
2. Йоник Л. В. Групи, багаті на АЇ-підгрупи або ЇА-підгрупи / Л. В. Йоник // Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат. - 2007. - Вип. 67. - С. 149-152.
3. Скасків Л. В. Періодичні групи з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп / О. Д. Артемович, Л. В. Скасків // Прикладні проблеми механіки і математики. - 2007. - Вип. 5. - С. 1-5.
4. Yonyk L. V. Groups with many hypercentral subgroups / О. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Bul. Acad. Sci. Stiinte Rep. Moldova. Matematica. - 2008. - No 2(57). - P. 106-109.
5. Skaskiv L. V. Groups associated with braces / О. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Carpathian Math. Publ. - 2011. - V. 3, No 1. - P. 4-14.
6. Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups / О. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Математичний вісник Наукового Товариства імені Шевченка. - 2011. - № 8. - С. 328-334.
7. Yonyk L. V. Groups with many finite-by-nilpotent subgroup / L. V. Yonyk // In: A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70th Birthday (18-23 November 2005, Debrecen, Hungary). - Debrecen, 2005. - P. 46.
8. Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups / L. V. Skaskiv, О. D. Artemovych // In: 6th International Algebraic Conference in Ukraine (1-7 July 2007, Kamyanets-Podilsky). Abstracts of Talks. – Kamyanets-Podilsky, 2007. - P. 23.
9. Yonyk L. V. Groups with minimal condition on non-nilpotent subgroups / L. V. Yonyk // In: II International Conference on Problems of Mechanics and Mathematics (25-28 May 2008, Lviv), Vol. 3. Lviv Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics. - Lviv, 2008. -P. 218-219.
10. Skaskiv L. V. On HM*-groups / L. V. Skaskiv // In: 7th International Algebraic Conference in Ukraine (18-23 August 2009, Kharkov). Abstracts of Talks. - Kharkov, 2009. - P. 130-131.
11. Skaskiv L. V. Groups and braces / L. V. Skaskiv // In: 8th International Algebraic Conference in Ukraine (5-12 July 2011, Lugansk). Abstracts of Talks. - Lugansk, 2011. - P. 132.

АНОТАЦІЇ

Скасків Л.В. Групи, багаті близькими до нільпотентних підгрупами. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 - алгебра та теорія чисел. - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2012.

У дисертаційній роботі досліджуються групи які мають багато підгруп, що за своїми властивостями в певному сенсі близькі до нільпотентних підгруп. Встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської (відповідно абелевої) групи за допомогою абелевої (відповідно черніковської) групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями черніковських (відповідно абелевих) груп за допомогою абелевих (відповідно черніковських). Доведено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою. Охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп. Встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими (тобто існують мінімальні не $\check{S}N$ -групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не $\check{S}N$ -групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (тобто ненільпотентною групою з нільпотентними і субнормальними власними підгрупами). Доведено, що в групі G , яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральної) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в G . Досліджено також будову періодичних розв'язних груп з умовою максимальності $Max - AF$ для не майже абелевих підгруп. Вивчено зв'язки властивостей брейса з властивостями його адитивної і приєднаної груп. Введено в розгляд групу, яка асоційована з брейсом, та встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою самого брейса. Знайдено необхідну і достатню умову, за якої група, яка асоційована з модулем над брейсом, буде групою Фробеніуса. Для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса A встановлено, що адитивна група A^+ є p -групою (відповідно групою без

скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група A° є р-групою (відповідно групою без скруту). Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група нільпотентна, а для нільпотентного справа бреса його асоційована група розв'язна.

Ключові слова: локально ступінчата група, нільпотентна група, гіперцентральна група, локально нільпотентна група, умова мінімальності, умова максимальності, черніковська група, група типу Хайнекена-Мохамеда, брейс, асоційована група брейса, радикальне кільце, група Фробеніуса.

Скасик Л.В. Группы, богатые близкими до нильпотентных подгруппами. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. - Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2012.

В диссертационной работе исследуются группы, содержащие много подгрупп, которые своими свойствами близки в некотором смысле до нильпотентности. Установлено, что локально ступенчатая группа, не являющаяся расширением черниковской (соответственно абелевой) группы при помощи абелевой (соответственно черниковской) группы, содержит бесконечный строго убывающий ряд подгрупп, не являющихся расширениями черниковских (соответственно абелевых) групп при помощи абелевых (соответственно черниковских). Показано, что несовершенная локально ступенчатая группа с собственными нормальными подгруппами, являющимися расширениями нильпотентных групп при помощи черниковских групп, сама является такой же. Охарактеризованы группы, не имеющие неединичных совершенных секций, которые удовлетворяют условию минимальности для подгрупп, не являющихся расширениями конечных групп при помощи нильпотентных групп. Установлено, что существуют группы, не являющиеся расширениями черниковских групп при помощи нильпотентных групп в то время, когда все их собственные подгруппы таковыми являются (то есть существуют минимальные не $\check{S}N$ -группы). Доказано, что несовершенная группа является минимальной не $\check{S}N$ -группой тогда и только тогда, когда она является группой типа Хайнекена-Мохамеда (то есть ненильпотентной группой с нильпотентными и субнормальными собственными подгруппами). Доказано, что в группе G с условием минимальности для ненильпотентных (соответственно негиперцентральных) подгрупп, каждая подгруппа,

являющаяся минимальной ненильпотентной (соответственно минимальной негиперцентральной) группой, субнормальна в G . Исследовано также строение периодических разрешимых групп с условием максимальности $Max - AF$ для не почти абелевых подгрупп. Изучено связи между свойствами брейса и свойствами его аддитивной и присоединенной групп. Введено в рассмотрение группу, ассоциированную с брейсом, и установлено зависимости между ассоциированной группой идеала в брейсе и ассоциированной группой самого брейса. Найдено необходимое и достаточное условие, когда группа, ассоциированная с брейсом, будет группой Фробениуса. Для нильпотентного слева (соответственно нильпотентного справа) брейса A установлено, что аддитивная группа A^+ будет p -группой (соответственно группой без кручения) тогда и только тогда, когда присоединенная группа A° будет p -группой (соответственно группой без кручения). Доказано, что для нильпотентного слева брейса его ассоциированная группа нильпотентна, а для нильпотентного справа брейса его ассоциированная группа разрешима.

Ключевые слова: локально ступенчатая группа, нильпотентная группа, гиперцентральная группа, локально нильпотентная группа, условие минимальности, условие максимальности, черниковская группа, группа типа Хайнекена-Мохамеда, брейс, ассоциированная группа брейса, радикальное кольцо, группа Фробениуса.

Skaskiv L.V. Groups with many subgroups related to nilpotent. - Manuscript.

Thesis of dissertation for obtaining the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06 - algebra and number theory. - Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2012.

The thesis is devoted to groups with many subgroups related to nilpotent groups. It is proved that a locally graded non-"Černikov-by-abelian" (respectively non-"abelian-by-Černikov") group contains an infinite properly descending chain of non-"Černikov-by-abelian" (respectively non-"abelian-by-Černikov") subgroups and a non-perfect locally graded group with nilpotent-by-Černikov proper normal subgroups is also too. It is characterized groups without non-trivial perfect sections with the minimality condition on non-"finite-by-nilpotent" subgroups. It is shown that there exist non-"Černikov-by-nilpotent" groups with proper Černikov-by-nilpotent subgroups (i.e., there exist minimal non-ČN-groups) and it is proved that

a non-perfect group is a minimal non-ČN-group if and only if it is a Heineken-Mohamed type group (i.e. a non-nilpotent group with nilpotent and subnormal proper subgroups). In a group G with the minimality condition on non-nilpotent (respectively non-hypercentral) subgroups every subgroup that is a minimal non-nilpotent (respectively minimal non-hypercentral) group is subnormal in G .

It is described torsion soluble groups with the maximality condition on non-"abelian-by-finite" subgroups.

The connection of properties of a brace with properties of its additive and adjoint groups are described. It is introduced the group associated with a brace and it is investigated its properties. Necessary and sufficient condition for the associated group of a brace to be a Frobenius group is determined. For a left nilpotent (respectively right nilpotent) brace A it is proved that the additive group A^+ is a p -group (respectively a torsion-free group) if and only if its adjoint group A° is a p -group (respectively a torsion-free group). Moreover, the associated group of a left nilpotent brace is nilpotent, but the associated group of a right nilpotent brace is soluble.

Key words: locally graded group, nilpotent group, hypercentral group, locally nilpotent group, the minimality condition, the maximality condition, Černikov group, Heineken-Mohamed type group, brace, associated group of brace, Jacobson radical ring, Frobenius group.