АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ

М. М. СЕМКО

КЛАСИ ГРУП З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Київ 1997

УДК 519.41/47
Класи груп з деякими умовами шільності нормальності для підгруп /
Семко М. М. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.

Вводяться поняття УЩН( )-групи (УЩН( )- та УЩН( )-групи) – такої групи G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$ ($A < N \le B$ чи $A \le N < B$). Описані локально ступінчасті класи груп такого роду.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів і студентів старших курсів університетів.

Бібліогр.: 44 назв.

Відповідальний редактор доктор фізико-математичних наук
М. Ф. Кузенний

Рецензенти доктор фізико-математичних наук,
професор *І. В. Протасов*
доктор фізико-математичних наук,
професор *Л. А. Курдаченко*

Затверджено до друку вченою радою
Інституту педагогіки АПН України

ISBN 966 - 02 - 0291 - 1

© М. М. Семко, 1997

В С Т У П

У багатьох роботах (див., наприклад, [1 - 39]) вивчались групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leqslant N \leqslant B$. Групи такого роду, де V - властивість нормальності, вивчались, наприклад, у роботах [9 - 39]. У роботах [9 - 14] A завжди була власною немаксимальною підгрупою з B, $A \leqslant N \leqslant B$, або $A < N < B$. Зрозуміло, що ці умови при вивченні таких груп необов'язкові (див., наприклад, [17, 19, 26, 28 - 30]).

В даній роботі також вивчаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які становлять значні і самостійні підкласи груп класу УШН( )-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа в B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leqslant N \leqslant B$. Зауважимо, що клас локально ступінчастих УШН( )-груп описаний у роботах [17, 19 - 23, 25, 27, 31, 32, 35 - 39]. Деякі результати цієї роботи опубліковані і анонсовані в [28 - 30, 33, 34]. Зауважимо також, що дана робота безпосередньо продовжує роботу [39] і тому для зручності посилань використовується тройна нумерація результатів.

Робота складається з п'яти параграфів: 3.0; 3.1; 3.2; 3.3; 3.4. В параграфі 3.0 наведено результати про УШН[ ]-групи, доведення яких можна знайти у [17, 19 - 22, 27, 31, 32, 37 - 39] і які суттєво використовуються в даній роботі.

Параграф 3.1. присвячений опису УШН( )-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$. Доведено, що існує 10 типів нільпотентних неодекіндових (теорема 3.1.1) та 4 типи ненільпотентних (теорема 3.1.2) УШН( )-груп.

У параграфі 3.2 описані локально ступінчасті УШН( )-групи, тобто групи G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N \leqslant B$. Одержано 13 типів нільпотентних неодекіндових (теорема 3.2.1) та 9 типів ненільпотентних (теорема 3.2.2) груп такого роду.

Параграф 3.3. присвячений опису УШН[ )-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leqslant N < B$. Доведено, що існує 6 типів нільпотентних неодекіндових (теорема 3.3.1) та 6 типів ненільпотентних (теорема 3.3.2) УШН[ )-груп.

У параграфі 3.4 встановлено деякі структурні властивості введених класів груп. Зокрема, в теоремі 3.4.1 описаний клас груп, який належить перетину класів локально ступінчастих УШН[ )- та УШН( ]-груп. Теорема 3.4.2 описує локально ступінчасті УШН[ ]-групи, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих УШН( )- та УШН( ]-груп.

3.0. ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ

Доведення результатів цього параграфа можна знайти у роботах [17 - 22, 27, 31, 32, 37 - 39]. Для зручності посилань, нумерація нижченаведених результатів така ж, як і у роботах [38, 39].

Т е о р е м а 1.1.1. Локально ступінчасті групи G, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p - просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, в яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M і G ізоморфна групі одного з типів:

1) G - циклічна група порядку p^{α}, p - просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ - 2-максимальна підгрупа з G;

2) $|G| = pq$, p і q - необов'язково різні прості числа, $M = 1$ - 2-максимальна підгрупа з G;

3) G - група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G;

4) G - циклічна група порядку $p^{\alpha}q$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, M - максимальна підгрупа з G, $|M| = p^{\alpha-1}q$;

5) $G = \langle x\rangle \lambda \langle z\rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x,z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}}\rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x^{p}\rangle \times \langle z\rangle$ - максимальна підгрупа з G;

6) $G = R \lambda \langle x\rangle$, $|R| = r^{\alpha} > 2$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta > 2$, r і q - різні прості числа, $\langle x\rangle$ - максимальна підгрупа з G, $M = R \lambda \langle x^{q}\rangle$ - максимальна підгрупа з G.

Т е о р е м а 1.1.4. Метациклічні 2-групи з трьома інволюціями мають вигляд $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{r}$ (r -ціле непарне число) і вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $r = 1$;

2) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $\alpha > 1, \beta > 1$, $r = -1$;

3) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $\alpha > 2, \beta > 1$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha, \beta \geq \alpha - k$;

4) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$;

5) $G = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^{l}}\rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < l < \alpha < \beta$, $|d| = 2^{l}$;

6) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\alpha > 2, \beta > 2$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $r = -1$;

7) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha - 1$, $\beta > \alpha - k + 1$.

Н а с л і д о к 1.1.1. Група G тоді і тільки тоді не містить

власних немаксимальних підгруп, коли $/G/ \in \{1,p\}$, p – просте число.

Наслідок 1.1.7. Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:

1) G – нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку 8, $G' \leqslant Z(G)$;

2) $G = U \setminus X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою, чи групою кватерніонів, $/U/ > 1$, $/X/ > 1$, $w(X) \leqslant Z(G)$, $[U,X] \leqslant w(U)$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2$, $[a,x] = a^2b^2$, $[b,x] = b^2$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$.

Означення 1.2.1. Нехай G – група, A та B – її підгрупи, $A \leqslant B$. Відрізком (інтервалом) $[A;B]$ ($(A;B)$) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A \leqslant X \leqslant B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $(A;B]$ чи $[A;B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A < X \leqslant B$ чи $A \leqslant X < B$.

Проміжком $\{A;B\}$ називається відрізок, інтервал чи півінтервал.

Означення 1.2.2. Модулем проміжку $/\{A;B\}/$ називається число його елементів.

Лема 1.2.1. Для понять, введених в означенні 1.2.1, справедливі твердження:

1) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ = 1$, чи $/(A;B]/ = 0$, чи $/[A;B)/ = 0$, коли $A = B$;

2) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ = 2$, чи $/(A;B]/ = 1$, чи $/[A;B)/ = 1$, коли A – максимальна підгрупа в B;

3) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ > 2$, чи $/(A;B]/ > 1$, чи $/[A;B)/ > 1$, коли A – власна немаксимальна підгрупа в B;

4) тоді і тільки тоді $/(A;B)/ = 0$, коли $A = B$ або A – максимальна підгрупа в B.

Означення 1.2.3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A;B]$, де A та B $\mathfrak{T}$-підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

1) при $/[A;B]/ \geqslant 1$: 1.1) $N \in [A;B]$;

2) при $/[A;B]/ > 1$: 2.1) $N \in (A;B]$; 2.2) $N \in [A;B)$; 2.3) $N \in \in [A;B]$;

3) при $/[A;B]/ > 2$: 3.1) $N \in (A;B)$; 3.2) $N \in (A;B]$; 3.3) $N \in [A;B)$; 3.4) $N \in [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: H- , ШН($\mathfrak{T}$]- , ШН[$\mathfrak{T}$)- , ШН[$\mathfrak{T}$]- , УШН($\mathfrak{T}$)- , УШН($\mathfrak{T}$]- , УШН[$\mathfrak{T}$)- , УШН[$\mathfrak{T}$]-групою.

Якщо $\mathfrak{T}$ - властивість бути будь-якою підгрупою групи G, то в позначеннях відповідних класів груп буква $\mathfrak{T}$ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як H- , ШН( )- , ШН[ )- , ШН( ]- , УШН( )- , УШН( ]- , УШН[ )- , УШН[ ]-групи.

Вісім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через K(H), K(ШН( ]), K(ШН[ )), K(ШН[ ]), K(УШН( )), K(УШН( ]), K(УШН[ )), K(УШН[ ]).

Л е м а 1.2.2. Нехай G - група. Тоді справедливі твердження:

1) група G тоді і тільки тоді H-група, коли вона дедекіндова група;

2) група G тоді і тільки тоді є ШН( ]- ,ШН[ )- , ШН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ існує нормальна підгрупа N групи G, що відповідно $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

3) група G тоді і тільки тоді є УШН( )- , УШН( ]- , УШН[ )- , УШН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ таких, що A немаксимальна в B, існує нормальна підгрупа N групи G і відповідно $N \in (A;B)$, $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

4) $K(H) \leqslant K(ШН(\ ]) \leqslant K(ШН[\ ]) \leqslant K(УШН[\ ])$,
$K(H) \leqslant K(ШН[\ )) \leqslant K(ШН[\ ])$,
$K(ШН(\ ]) \leqslant K(УШН(\ ]) \leqslant K(УШН[\ ])$,
$K(ШН[\ )) \leqslant K(УШН[\ )) \leqslant K(УШН[\ ])$,
$K(H) \leqslant K(УШН(\ )) \leqslant K(УШН(\ ]) \cap K(УШН[\ ))$.

Т е о р е м а 1.3.3. Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УШН[ ]-групи G мають вигляд $G = AX$, де $A = \langle a,b \rangle$ - нормальна в G p-підгрупа, $a \neq 1$, X - q-група, p і q - прості числа та вичерпуються групами типів:

1) $/G/ = p^3$, $\exp(G) = p$;

2) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$;

3) $G = A \times X$, A - група кватерніонів порядку 8, $/X/ = 2$;

4) A - група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;

5) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

6) $G = A \lambda X$ – група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, $/A/ = p^2$, $/x/ \in \{q, q^2\}$;

7) $G = A \lambda X$ – група Шмідта типу 4 теореми 1.3.1, A – група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3, 9\}$;

8) $G = A \lambda X$, $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне число, $X = \langle x\rangle$, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $\langle b^q\rangle = Z(G)$;

9) $G = A \lambda X$, $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне число, $X = \langle x\rangle$, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $\langle b^q\rangle = Z(G)$, A – квазіцентральна підгрупа з G;

10) $G = A \lambda X$, $/A/ = p$ – непарне число, $X = \langle x\rangle \lambda \langle z\rangle$, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ – непарне число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[A, \langle x\rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q\rangle \times \langle z\rangle$;

11) G – квазіциклічна p-група.

Наслідок 1.3.5. Всі: Н- , ШН( )- , ШН( )- , УШН( )-групи є розв'язними гіперциклічними групами.

Теорема 2.1.2. Локально ступінчасті неделекіндові метагамільтонові УШН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) G – неделекіндова УШН( )-група з комутантом порядку p, p – просте число (теорема 2.1.1 з [39]);

2) G – неделекіндова метациклічна метагамільтонова УШН( )-група з комутантом непростого порядку (наслідок 1.3.6 з [39]);

3) $G = (P \lambda \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^2, $/x/ = q^\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$, p і q – різні прості числа, $P \lambda \langle x\rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число; при $/z/ = r$ $\beta = 1$;

4) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^\beta$, $/z/ \in \{1, r\}$, $3 \neq r$ – просте число;

5) G – група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p, p), p – непарне просте число;

6) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ – непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

7) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

8) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$ – непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = 1$;

9) $G = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a, b] =$

$= a^{p}$, $[a,x] = b^{p}$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

10) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

11) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $/a/ = /x/ = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число;

12) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ – непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c\rangle \times \langle b^{p}\rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^{\varepsilon} b^{p}$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^{p} = c^{1+\varepsilon t}\, b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

13) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

14) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^{p}\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = p^2$, p – непарне просте число, $[b,x] = a^{sp} b^{tp} x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^{p}$, $[a,x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

15) $G = P \lambda \langle x\rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3, 9\}$;

16) $G = P \lambda \langle x\rangle$ – група Шмідта, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = p$, $/x/ = q$;

17) $G = P \lambda \langle x\rangle$, $/P/ = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{2,3\}$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, $\alpha + \beta < 6$, $P \lambda \langle x^{\frac{1}{q}}\rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено, α – показник p за модулем q;

18) $G = P \lambda \langle x\rangle$ – група Фробеніуса, P – елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha \in \{2,3\}$, $/x/ = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, α – показник p за модулем q і дорівнює показнику p за модулем r.

Т е о р е м а 2.2.2. Неметагамільтонові УШН[ ]-групи G порядку p^{α}, що мають підгрупи типу (p,p,p), p – довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$, $/a/ \in \{p^2, p^3\}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $X \neq 1$ та вичерпуються групами типів:

1) $G = U \lambda X$, $U = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle$, $/x/ = p$, $/a/ = p^2$, $\beta > 2$, $[a,b] = a^{p}$, $[b,x] = 1$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$;

2) $U = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle \times \langle z\rangle$, $/b/ = /z/ = 3$, $/a/ = /x/ = 9$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^{6}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] \in \langle x^3\rangle$;

3) $G = U \lambda X$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = |x| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $[b,x] = 1$, $[a,x] \in \langle a^4 \rangle$.

Т е о р е м а 2.2.3. Нільпотентні неабелеві УШН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $|v| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $[u,v] = u^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[u,v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v \rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; при $|z| = r$ $|u| = |v| = p$;

4) $G = ((\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|u| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u,v] = [a,b] = u^{p^{\alpha-1}}$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

5) $G = CF$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $C \cap F = \langle c \rangle$, $F = (((\langle e \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

6) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

8) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

10) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \lambda \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] \in \langle a^4 \rangle$; при $|z| = r$ $\beta \in \{2,3\}$; при $\beta = 2$ $[a,x] = 1$;

11) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a,z] \in \langle a^3 \rangle$;

12) G – група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p), p – непарне просте число;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a,x] = b^{p}$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний вишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

15) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$; $|a| = p^2$, $|b| = p^{\beta}$, $|x| = p$, $p\beta > 4$, p-просте число, $[a,b] = a^{p}$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b,x] = 1$;

16) $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

17) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2 b^2$;

18) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2 b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

19) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ – непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^t b^p$, $0 \leqslant t < p$, $a^p = c^{\frac{p(p-1)}{2}} b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

20) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2 x^2$;

21) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p$, p – непарне просте число, $[b,x] = a^{sp} b^{tp} x^{kp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant i < p$, $[a,b] = x^p$, $[a,x] = b^{ip} x^{kp}$, $0 < i < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4is$, $i^2 + 4i$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

22) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

23) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{3,4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^\alpha$;

24) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

25) $G = (\langle a,b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a,b \rangle$ – група кватеріонів, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = a$;

26) $G = U \leftthreetimes X$, U – циклічна 2-група, чи група кватеріонів порядку 8, X – група кватеріонів порядку 8, $[U,X] \leqslant w(U)$; при $U' = X$ $[U,X] = w(U)$;

27) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a,b] = x^2 = a^4$, $[a,x] = b$, $[b,x] = 1$.

28) $G = (\langle a \rangle\langle b \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a \rangle\langle b \rangle) \cap \langle x \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2 b^2$.

Т е о р е м а 2.3.1. Нільпотентні локально ступінчасті УШН[ ]-групи G є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами типів:

I) Метагамільтоні групи:

i) Метациклічні:

1) $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ \in \{1,r\}$, q і r - прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^{q}\rangle \times \langle z\rangle$; при $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/b/ = qr$, q і r - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) Мінімальні неметациклічні ненадрозв'язні групи Шмідта:

3) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - група Шмідта, P - група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3,9\}$;

4) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - нільпотентна група Міллера - Морено, P - група типу (p,p), $/x/ \in \{q,q^2\}$, $Z(G) = \langle x^{q}\rangle$, 2 - показник p за модулем q, p і q - різні прості числа;

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

5) $G = P \setminus \langle x\rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha \in \in \{2,3\}$, $/x/ = qr$, p, q, r - попарно різні прості числа, α - показник p за модулем q, α - показник p за модулем r, $P \setminus \langle x^{r}\rangle$ та $P \setminus \langle x^{q}\rangle$ - групи Міллера - Морено;

6) $G = P \setminus \langle x\rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha \in \in \{2,3\}$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, α - показник p за модулем q, p і q - різні прості числа, $P \setminus \langle x^{q}\rangle$ - група Міллера - Морено, $\alpha + \beta < 6$;

7) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - група Шмідта, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = p$, $/x/ = q$, p і q - різні прості числа;

8) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = p$, $/x/ = q$, $/z/ = r$, p, q, r - прості числа, $p \neq q$, $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$ - група Міллера - Морено, 2 - показник p за модулем q, $p \neq 3$, $q > 2$;

II) Неметагамільтонові групи:

1) Метациклічні:

9) $G = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $/a/ = pr$, p і r - необов'язково різні прості числа, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q - просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle b^{q}\rangle$;

10) $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $\langle z,x\rangle$ - група кватерніонів порядку 8, $x^{-1} a x = a^{-1}$;

11) $G = \langle a\rangle \setminus (\langle x\rangle \setminus \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $/z/ = q$ - просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a,x^{q}] = [a,z] = 1$;

ii) Надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи:

I12) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle$;

I13) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – квазіцентральна підгрупа з G;

I14) $G = \langle a\rangle \lambda (\langle x\rangle \lambda \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^q$, $[a,x^q] = [a,z] = 1$.

iii) Групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

I15) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, p – просте число, $p \neq 3$, $/x/ = q$ – просте число, 2 – показник p за модулем q, $(\langle a^p\rangle \times \langle b^p\rangle) \lambda \langle x\rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено;

I16) $G = (R \times P) \lambda \langle x\rangle$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, 2 – показник p за модулем q, $q > 2$, $R \lambda \langle x\rangle$ і $P \lambda \langle x\rangle$ – нільпотентні групи Міллера – Морено;

I17) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, $/a/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $/x/ = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^q\rangle$ та $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x^r\rangle$ – мінімальні неметациклічні групи.

3.1. БУДОВА УЦН( )-ГРУП

Лема 3.1.1. Нехай G – довільна УЦН( )-група. Тоді справедливі наступні твердження:

1) для будь-якого неодиничного елемента g групи G справедливо $\langle g\rangle \geq N \lhd G$, $[\langle g\rangle : N]$ – просте число;

2) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2, p – довільне просте число.

Доведення. Нехай G – досліджувана група і g – її довільний неодиничний елемент. Якщо $/g/$ – просте число, то $\Phi(\langle g\rangle) = N = 1 \lhd G$. Нехай $/g/$ – добуток не менше ніж двох простих чисел. Якщо $\langle g\rangle \lhd G$, то будь-яка максимальна підгрупа N з $\langle g\rangle$ характеристична в $\langle g\rangle$ і

тому $N \lhd G$, $[\langle g\rangle : N]$ – просте число. Нехай $\langle g\rangle \not\lhd G$. Зрозуміло, що $\langle g\rangle$ містить підгрупу A таку, що $[\langle g\rangle : A] = pq$, де p і q – необов'язково різні прості числа. За означенням УШН( )-груп $(A;\langle g\rangle) \ni N \lhd G$. Оскільки $\langle g\rangle \not\lhd G$ і $A < N$, то $[\langle g\rangle : N]$ – просте число. Твердження 1 леми доведене повністю.

Нехай P – мінімальна нормальна підгрупа з G порядку p^{α}, $\alpha > 2$. Тоді в силу твердження 1 леми P – елементарна абелева група, $P > B$, $/B/ = p^2$. Зрозуміло, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(1;B] \ni N \lhd G$ і, значить, $/N/ \in \{p, p^2\}$, що суперечить мінімальності P в G. Твердження 2 доведене. Лема доведена.

Лема 3.1.2. Нехай G – довільна УШН( )-група. Тоді справедливі наступні твердження:

1) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2, p – довільне просте число;

2) якщо $G = P \setminus \langle x\rangle$ – скінченна група Шмідта, P – силовська p-підгрупа з G, $\langle x\rangle \not\lhd G$, $\langle x\rangle$ – силовська q-підгрупа з G, p і q – різні прості числа, то $\langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з G, P – елементарна абелева група порядку p чи p^2;

3) G не містить p-підгрупи виду $Z\langle x\rangle$, де Z – група типу (p,p), $Z \leq G'$, $[\langle x\rangle, G] = G'$, $Z \cap \langle x\rangle = 1$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Припустимо, що G містить елементарну абелеву мінімальну нормальну підгрупу P і $/P/ > p^2$. Тоді P містить A і $[P:A] = p^2$. Зрозуміло, що $/[A;P]/ > 2$ і $/A/ > 1$. За означенням УШН( )-груп $[A;P) \ni N \lhd G$. Звідси $P > N$ і $N \neq 1$, що суперечить мінімальності P в G. Твердження 1 доведено.

Нехай $G = P \setminus \langle x\rangle$ – скінченна група Шмідта. За властивістю груп Шмідта (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [40]) G містить підгрупу $M = \Phi(P) \times \langle x\rangle$, яка максимальна в G і $[P,\langle x\rangle] = P$. Нехай $\langle x\rangle$ – немаксимальна підгрупа з G. Тоді $/\langle x\rangle;G)/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $[\langle x\rangle;G) \ni N \lhd G$, $N < G$ і $G = PN$, $P \not\leq N$, $[P,\langle x\rangle] \leq [P,N] < P \cap N < P$, що неможливо. Отже, $\langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з G і тому $\Phi(P) = 1$. За твердженням 1 леми $/P/ \in \{p, p^2\}$. Твердження 2 леми доведене.

Нехай G містить підгрупу $B = Z\langle x\rangle$ з умовами твердження 3 леми. Тоді $/\langle x\rangle;B]/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $[\langle x\rangle:B) \ni N \lhd G$ і N

$< B$. Звідси $Z \not< N$. За умовою твердження 3 леми $[\langle x\rangle, G] = G' \leqslant [N, G] = G' \leqslant N$, що суперечить співвідношенням $Z \leqslant G'$ і $Z \not< N$. Твердження 3 леми доведено. Лема доведена.

Наслідок 3.1.1. Всі УШН( )-групи G є нільпотентними або скінченними надрозв'язними групами, для яких справедливі твердження:

1) для будь-якого p-елемента g з G справедливо $\langle g^p\rangle \lhd G$, p – довільне просте число;

2) мінімальна нормальна підгрупа групи G має порядком просте число.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 1.3.5 G – локально надрозв'язна, а тому локально ступінчаста група, яка за лемою 1.2.2 є УШН( )-групою.

Якщо G – нільпотентна група, то її мінімальні нормальні підгрупи мають простий порядок [41].

Нехай G – ненільпотентна група. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми, і тому G – скінченна надрозв'язна група. Відомо [41], що мінімальні нормальні підгрупи з G мають простий порядок. Твердження 2 наслідку доведене.

Завдяки лемі 1.2.2 УШН( )-група є УШН( )-групою і тому твердження 1 наслідку випливає з твердження 1 леми 3.1.1. Наслідок доведений.

Теорема 3.1.1. Нільпотентні неабелеві УШН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle u\rangle \lambda \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, $|u| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $|v| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $[u,v] = u^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = Q \times Q \times \langle z\rangle$, Q – локально циклічна 2-група, $|Q| > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

3) $G = ((Q \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, Q – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[u,v] = c \in Q$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[Q, \langle v\rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $|Q'|\,|u|\,|v| \neq 32$; при $|z| = r$ $|u|\,|v| \neq p^2$;

4) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

5) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число;

6) $G = A \setminus \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p^\beta$, $\beta > 1$, $/x/ = p$ – просте число, $p\beta > 4$, $[a,b] = a^{p^{\beta-1}}$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b,x] = 1$;

7) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

8) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число;

9) $G = U \setminus X$, U – циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, $/U/ > 2$, X – група кватерніонів порядку 8, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$;

10) $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = 8$, $/x/ = 4$, $/b/ = 2$, $[a,b] = x^2 = a^4$, $[a,x] = b$, $[b,x] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. За лемою 1.2.2 УШН( )-група G є УШН[ ]-групою, яка задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Якщо G – група одного з типів: 1 – 3; 10, $/b/ \in \{2,4\}$, $z \in Z(G)$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$; 27 згаданої теореми, то G – група одного з типів 1 – 10 розглядуваної теореми відповідно.

В групі G кожного з типів 4 та 5 теореми 2.2.3 $G' = w(Z(G))$, $/G'/ = p$, G містить підгрупу $B = \langle v\rangle \times \langle a\rangle$, $/v/ = /a/ = p$, $B \cap G' = 1$. Зрозуміло, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(1;B) \ni N \lhd G$. Звідси $/N/ = p$, $N \leqslant Z(G)$ і $N \leqslant w(Z(G))$, що неможливо. Отже, група G не може бути групою типу 4 чи 5 теореми 2.2.3.

Припустимо, що G – група одного з типів 6 – 8 згаданої теореми. Тоді $G' = \langle u\rangle$, $/u/ = p^2$, $G\setminus\Phi(G)$ містить елемент d, $[\langle d\rangle, G] = G'$ і G містить підгрупу $B = \langle u\rangle \setminus \langle d\rangle$. Ясно, що $/[\langle d\rangle;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(\langle d\rangle;B) \ni N \lhd G$, а тому $N = w(\langle u\rangle) \setminus \langle d\rangle$ і, значить, N не містить $\langle u\rangle = G'$. Але $[\langle d\rangle, G] = [N,G] = G' \leqslant N$, що неможливо. Отже, група G не може бути групою жодного з типів 6 – 8 згаданої теореми.

Нехай G – група типу 10 тієї теореми. Покажемо, що G – група типу 4 розглядуваної теореми. Дійсно, $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \setminus \langle z\rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$. Покажемо, що $\beta <$

< 4. Нехай це не так, тобто $\beta \geq 4$. Тоді $\langle a\rangle\langle b\rangle = U = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $d = ab^{2^{\beta-3}}$, $/d/ = 4$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$. В силу наслідку 3.1.1 $\langle d^2\rangle \lhd G$, а тому $d^2 \in Z(G)$. З іншого боку, $d^2 = a^2b^{2^{\beta-2}}$, $a^2 \notin Z(G)$, $b^{2^{\beta-2}} \in Z(G)$. Суперечність. Отже, $\beta < 4$. Покажемо далі, що $z \in Z(G)$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $/z/ = r$. Оскільки G – нільпотентна група і U – 2-група, то $r = 2$. При $\beta = 2$ для груп G розглядуваного типу $z \in Z(G)$ і тому будемо вважати, що $\beta = 3$. Покладемо $d = a^2b^2$. Тоді $/d/ = 2$, $d \notin Z(G)$. Для груп G розглядуваних типів $[a^2,z] = [b,z] = 1$. Звідси $[d,z] = 1$ і тому G містить $B = \langle d\rangle \times \langle z\rangle$. Ясно, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(1;B) \ni N \lhd G$, $/N/ = 2$ і $N \leqslant Z(G)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $N = \langle z\rangle$, що й треба було довести.

Нехай G – група типу 11 теореми 2.2.3. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Нехай це не так. Тоді $/z/ = 3$, G містить підгрупу $B = \langle b\rangle \times \langle z\rangle$, $b \notin Z(G)$. Ясно, що $/[1;B]/ > 2$ і за означенням УЩН( )-груп $(1;B) \ni N \lhd G$, $/N/ = 3$, $N \leqslant Z(G)$. Отже, можна вважати, що $N = \langle z\rangle$ і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді G – неметациклічна p-група порядку p^4, p – непарне просте число, G' – нецентральна підгрупа з G типу (p,p). Легко бачити, що G не містить підгрупу порядку p^3 і експоненти p. З цього випливає, що G – мінімальна неметациклічна група, яка при $p > 2$ може бути лише групою типу 2 теореми 1.3.3. Звідси G – група типу 5 розглядуваної теореми.

В групі G кожного типів 13, 14, 16, 19 – 21 є підгрупа $Z\langle x\rangle$, $Z = G'$, $x \in G\setminus\Phi(G)$, і задовольняє умову твердження 3 леми 3.1.2 і за яким G не може бути УЩН( )-групою.

Нехай G – група одного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ містить підгрупу $B = \langle a^2\rangle\langle b\rangle$, $G' = \langle a^2\rangle$, $/[\langle b\rangle;B]/ > 2$, $[\langle b\rangle,G] = G'$. За означенням УЩН( )-груп $(\langle b\rangle;B) \ni N \lhd G$ і $N = \langle a^4\rangle\langle b\rangle$. Але $[\langle b\rangle,G] \leqslant [N,G] \leqslant \langle a^4\rangle$, що неможливо. Отже, G не може бути групою одного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3.

Нехай G – група типу 25 теореми 2.2.3. Тоді G містить підгрупу $B = \langle a\rangle \setminus \langle x\rangle$, $/[\langle x\rangle;B]/ > 2$, $[\langle x\rangle,G] = \langle a\rangle$. За означенням УЩН( )-груп $(\langle x\rangle;B) \ni N \lhd G$ і $N \leqslant \langle a^2\rangle \setminus \langle x\rangle$. Але $[N,G] = [\langle x\rangle,G] = \langle a\rangle \leqslant N$, що неможливо. Отже, G не може бути групою типу 25.

Нехай G – група типу 9 теореми 2.2.3. Тоді $/[\Phi(X);X]/ > 2$. За означенням УЩН( )-груп $(\Phi(X);X) \ni N \lhd G$. Ясно, що $/N/ = 4$, $[U,N] = 1$, $N \leqslant C_X(U)$, G містить підгрупу $B = \langle u\rangle \setminus X$, де $/u/ = 4$,

$\Phi(\langle u\rangle) = \Phi(U)$. Оскільки $/[X;B]/ > 2$, то за означенням УШН( )-груп $(X;B) \ni N_4 \lhd G$. Зрозуміло, що $N_4 = \langle u^2\rangle \setminus X$. Тоді $[X,U] \leqslant N_4 \cap U = \langle u^2\rangle = w(U)$. Ясно, що $G = V \times \langle z\rangle$, де $V = U \setminus X$ і V – недедекіндова група. Нехай $/z/ = r$ і $B = X \times \langle z\rangle$. Для будь-якого елемента $d \in X\setminus\Phi(X)$ маємо $/[\langle d\rangle;B]/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $(\langle d\rangle;B) \ni N_2 \lhd G$, тому $[U,\langle d\rangle] \leqslant U \cap N_2 = 1$ і, значить, $[U,X] = 1$. Звідси $G = U \times X \times \langle z\rangle$ і при циклічності U G – група типу 2 розглядуваної теореми. Припустимо, що U – нециклічна група. Тоді U – група кватерніонів порядку 8. Нехай $U = \langle a,b\rangle$, $X = \langle x,y\rangle$, $Q = \langle ax,by\rangle$. Ясно, що Q – група кватерніонів порядку 8, Q міститься в V і $U \cap Q = 1$. Розглянемо підгрупу $B_1 = Q \times \langle z\rangle$. Як і для підгрупи B, покажемо, що $[U,Q] = 1$. Але $[ax,b] \neq 1$, що неможливо. Отже, U – не є групою кватерніонів і в подальшому $z = 1$.

Якщо $[U,X] = 1$, то при циклічності U G – група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай U – нециклічна група, тобто U – група кватерніонів порядку 8. Тоді $G = U \times X$, і як раніше, G містить підгрупу $Q = \langle ax,by\rangle$; $/[\Phi(Q);Q]/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $(\Phi(Q);Q) \ni N_3 \lhd G$. Зрозуміло, що $/N_3/ = 4$, $G = U \setminus Q$, $[U,Q] = \Phi(U)$, $/C_Q(U)/ = 4$. Позначивши Q на X одержимо, що G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Якщо $[U,X] \neq 1$, то $[U,X] = \Phi(U)$ і G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 26 теореми 2.2.3. Якщо U – циклічна група і $[U,X] = 1$, то G – група типу 2 розглядуваної теореми. Якщо $[U,X] \neq 1$, то $[U,X] = \Phi(U)$ і G – група типу 9 розглядуваної теореми. Якщо тепер U – група кватерніонів, то, як і раніше, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$ і знову G – група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо $A = \langle x\rangle$, $B = \langle x\rangle\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle = \langle x\rangle G'$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(A;B) \ni N \lhd G$. Але $[\langle x\rangle,G] = G'$, що суперечить умові $N \neq G'$. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Для доведення достатності теореми установимо спочатку справедливість наступної леми.

Л е м а 3.4.3. Нехай G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1. Тоді $G = P \times R$ – періодична недедекіндова нільпотентна не більше ніж біпримарна скінченна над центром група з комутантом по-

рядку p чи p^2 (p – просте число), P – силовська p-підгрупа з G, $/R/ \in \{1,r\}$, r – просте число, $R \leqslant Z(G)$ і справедливі наступні твердження:

1) група G тоді і тільки тоді є нескінченною групою, коли G – група типу 2 чи 3, у якої C – центральна в G квазіциклічна 2-група;

2) $G' = P'$ тоді і тільки тоді не належить $Z(G)$, коли $p \in \{2,3\}$: G – група типу 4, G' – група типу (4); G – група типу 5, G' – група типу (3,3); G – група типу 10, G' – група типу (2,2). Тільки в групі G типу 4 комутант G' є неелементарною абелевою групою;

3) будь-яка циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ з G має вигляд $\langle g \rangle = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, $\langle g \rangle \cap P = \langle f \rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $\Delta \geqslant 0$, $\langle g \rangle \cap R = \langle h \rangle$, $/h/ \in \{1,r\}$, $\langle g^p \rangle = \langle f^p \rangle \times \langle h \rangle \lhd G$. Співвідношення $g^p \notin Z(G)$ може виконуватися лише коли $/g/$ ділиться на 8, $\exp(P) = 8$ і G – група одного з типів 4 та 10;

4) будь-яка максимальна цілком факторизована підгрупа M з G містить $w(Z(G))$ і її порядок є добутком двох чи трьох простих чисел, $M' = 1$ і $[M:w(Z(G))] \in \{1,p\}$;

5) будь-яка підгрупа B з G, для якої $G' \cap B = 1$, має вигляд $B = F \times H$, де F – локально циклічна p-група, $/H/ \in \{1,r\}$ і для всякої власної немаксимальної підгрупи A з B знайдеться власна нормальна в G підгрупа N така, що $A < N < B$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $G = P \times R$ і очевидні загальне твердження і твердження 1 леми, $G' = P'$. В групі G кожного з типів 1 – 3 та 6 – 9 G' – центральна в G елементарна абелева p-група. В групі G типу 4 G' – нецентральна підгрупа типу (4). В групі G типу 5 G' – нецентральна підгрупа типу (3,3). В групі G типу 10 G' – нецентральна підгрупа типу (2,2). З цього випливає, що лише в групі G типу 4 G' – неелементарна абелева група. Твердження 2 леми доведено.

Нехай g – елемент з G. Тоді $\langle g \rangle = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, де $\langle f \rangle = P \cap \langle g \rangle$, $\langle h \rangle = R \cap \langle g \rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $\Delta \geqslant 0$, $/h/ \in \{1,r\}$, $h \in Z(G)$. Можна вважати, що $g = fh$ і тоді $\langle g^p \rangle = \langle f^p \rangle \times \langle h \rangle$. Якщо $f^p \in Z(G)$, то $g^p \in Z(G)$ і тому $\langle g^p \rangle \lhd G$. Нехай $f^p \notin Z(G)$. Тоді $\Delta > 1$. За твердженням 2 леми та відомими комутаторними співвідношеннями [44] в групі G кожного з типів 1 – 3 і 6 – 9 $f^p \in Z(G)$. В групі G типу 5 $p = 3$, $\exp(P) = 9$ і будь-яка циклічна підгрупа порядку 9 міс-

тить центральний в G елемент порядку 3 і, значить, $\Delta = 2$, $w(\langle f\rangle) = \langle f^3\rangle \leqslant Z(G)$. З цього випливає, що G може бути лише групою типу 4 та 10 і тому $\exp(P) = 8$, $p = 2$. В групі G кожного з цих типів циклічна підгрупа порядку 4 містить $w(\langle a\rangle)$, $w(\langle a\rangle) \leqslant Z(G)$. Тому при $\Delta = 2$ $f^2 \in Z(G)$, що суперечить вибору f^p. Отже, $\Delta > 2$. Але тоді $\Delta = 3$ і $/g/$ ділиться на 8, тобто $/f/ = 8$. Очевидно, що P містить $N = \langle a^2\rangle \times \langle d\rangle$, $/d/ = 2$, $N \lhd G$, $\langle a^2\rangle \lhd G$ і G/N – абелева цілком факторизована група. Звідси $f^2 \in N$, $/f^2/ = 4$. Тому $\langle f^2\rangle \in \{\langle a^2\rangle, \langle a^2d\rangle\}$. Оскільки $\langle a^2\rangle \lhd G$, $N \lhd G$ і в N тільки дві різні циклічні підгрупи порядку 4, то $\langle a^2d\rangle \lhd G$. Звідси $\langle f^2\rangle \lhd G$. Таким чином, $\langle g^p\rangle \lhd G$ і твердження 3 леми доведене.

Зрозуміло, що $w(G) = w(P) \times w(R) = P(P) \times R \leqslant M$, де M – довільна максимальна цілком факторизована підгрупа з G. Оскільки G – нільпотентна група, то в силу [1] $M' = 1$. Очевидно, що $R \leqslant w(Z(G))$, $Z(G) \cap M = w(Z(G))$.

Покажемо, що $/M/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. Група G кожного з розглядуваних типів має вигляд $G = G_1 \times \langle z\rangle$ і завжди G_1 доповнення $\langle z\rangle$ в G подане в опису груп G кожного типу, де при відсутності z в опису групи G вважати $z = 1$, $z \in Z(G)$, $/z/ \in \{1, r\}$, r – просте число. Звідси $M = M_1 \times \langle z\rangle$, де $M_1 = M \cap G_1$. Зауважимо, що G_1 завжди p-група, яка містить елементарні абелеві підгрупи порядку p^2. Звідси M_1 – елементарна абелева p-група, $/M_1/ > p$, M_1 – максимальна цілком факторизована підгрупа з G_1, $M_1 < G_1$.

Якщо M_1 – метациклічна група, то M_1 – група типу (p,p) і тому в цьому випадку $/M/ = /M_1//z/$ – добуток двох чи трьох простих чисел.

Нехай M_1 – неметациклічна група. Тоді G_1 містить власні неметациклічні підгрупи. Оскільки в групі G кожного з типів 1, 4, 5, 7, 8 G_1 – група, у якої всі власні підгрупи метациклічні, то G не може бути групою цих типів. Очевидно, в групі G типу 2 G_1 містить точно три центральні в G інволюції. В групі G типу 9 за наслідком 1 1.7 G_1 теж містить три центральні в G інволюції. За теоремою 2.2.2 в групі G типу 10 точно три інволюції. З цього випливає, що в групах G кожного з типів 2, 9, 10 M_1 – група типу (2,2), а тому G не може бути групою цих типів. Отже, G – група одного з типів 3 чи 6. В групі G типу 6 $G_1 = G = A \lambda \langle x\rangle$ і тому $M_1 = M$. З опису випливає, що $w(A) = w(\langle a\rangle) \times w(\langle b\rangle) = G' \leqslant Z(G) \cap M$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$. Оскільки G/A циклічна група, то і M/G' – циклічна гру-

ма. Звідси $/M/ = p^5$.

Нехай G – група типу 3. Покладемо $A = C \times \langle u \rangle$. Тоді $G_1 = A\lambda \lambda \langle v \rangle$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$. Можна вважати, що $/u/ \geq /v/$. Нехай $/u/ = p^2$. Тоді $z = 1$, $G_1 = G$ і $M_1 = M$. Покладемо $A_1 = A \cap M$. Тоді M/A_1 – підгрупа циклічної групи G/A і тому M/A_1 – циклічна група. Зрозуміло, що $w(A) \cong w(C) \times w(\langle u \rangle) \leqslant Z(G)$. Ясно, що $A_1 \leqslant w(A)$ і тому $A_1 = w(A)$. Звідси A_1 – група типу (p,p) і $/M/ = p^3$. Нехай тепер $/u/ = p$ і тому за вибором $/v/ = p$. За результатом з [42,43] G_1 – недедекіндова група, у якої нормальні всі нециклічні підгрупи. Припустимо, що G_1 містить підгрупи типу (p,p,p). Тоді G_1 містить підгрупу M_2 типу (p,p), для якої $C \cap M_2 = 1$ і, значить, $G_1 = C \times M_2$ – дедекіндова група, що неможливо. Отже, всі елементарні абелеві підгрупи з G_1 мають порядок p чи p^2. Але тоді M_1 – метациклічна група, що не так. Таким чином, $/M/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. Легко бачити, що $[M:w(Z(G))] \in \{1, p\}$. Твердження 4 леми повністю доведене.

Нехай B – довільна підгрупа з G і $B \cap G' = 1$. Тоді $B' = 1$. Покажемо спочатку, що $B = F \times \langle h \rangle$, де F – локально циклічна p-група, $/h/ \in \{1, r\}$. Покладемо $P_1 = P \cap B$. Оскільки $[G:P] \in \{1, r\}$, то $[P:P_1] \in \{1, r\}$. Якщо P_1 – локально циклічна група, то $B = P_1 \times \langle h \rangle$, $/h/ \in \{1, r\}$. Покладемо $P_1 = F$ і одержимо шуканий розклад B.

Нехай P_1 – не локально циклічна група. Тоді $w(P_1)$ – нециклічна група. Оскільки G – нільпотентна група, то $G' \cap Z(G)$ містить с і $/c/ = p$. Ясно, що G містить цілком факторизовану підгрупу $M = \langle c \rangle \times w(P_1)$. За твердженням 4 леми M – максимальна цілком факторизовна підгрупа групи G і $/M/ = p^3$. Звідси $z = 1 = R$, $G = P$ і $w(P_1)$ – група типу (p,p). Легко бачити, що $P_1 = B = F \times H$, де F і H – неодиничні локально циклічні p-групи. Можна вважати, що $/F/ \geq /H/$. В групі G типу 1 $/z/ = p$ і B – підгрупа абелевої групи $G/\langle u \rangle$ типу (p^y, p). Звідси $/H/ = p$ і F – локально циклічна p-група. В групі G типу 2 $/z/ = 2$ і B підгрупа з $G/G \cong C \times \langle z \rangle$. Звідси F – локально циклічна група і $/H/ = p$. Отже, для груп G кожного з типів 1, 2 шуканий розклад для B знайдеться.

Нехай далі G – група одного з типів 3 – 10. Тоді $/B/ < \infty$ і $F = \langle f \rangle$, $H = \langle h \rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ = p^{\gamma}$, $\Delta > 0$, $\gamma > 0$, $\Delta \geq \gamma$. В групі G кожного з типів 4 – 10 існує така нормальна підгрупа A, що $w(A) = G'$ і P/A – циклічна чи цілком факторизовна група, або P/A –

група типу (p^{α},p). Ясно, що $A\cap B = 1$ і B – підгрупа з G/A. Але тоді $\Delta = \gamma = 1$, або $\Delta > 1$, $\gamma = 1$. Отже, для груп G типів 4 – 10 шуканий розклад для B знайдено.

Нехай G – група типу 3. Тоді $C\cap B = 1$ і B підгрупа з G/C. Якщо G/C – цілком факторизована група, то $\Delta = \gamma = 1$ і знову шуканий розклад для B знайдено.

Нехай G/C – не цілком факторизована група. Тоді $/z/ = 1$, $/u/ = p^2$, $/v/ \in \{p,p^2\}$. Звідси B – група типу (p^2,p) чи типу (p^2,p^2). Без порушення загальності можна вважати, що $/F/ = p^2$ і $\gamma \in \{1,2\}$. Якщо $\gamma = 1$, то шуканий розклад для B знайдено. Нехай $\gamma = 2$. Тоді $/u/ = /v/ = p^2$, $G' = 1$, $C \leqslant Z(G)$, $[G:C] = p^4$, $/B/ = p^4$, а тому $G = C \times B$ і, значить, $G' = 1$, що неможливо. Отже, для всіх випадків шуканий розклад для B знайдено.

Покажемо, що для будь-якої власної немаксимальної підгрупи A з B існує нормальна в G підгрупа N така, що $A < N < B$. Нехай $B = \langle g\rangle$. Тоді $/g/ = p^{\alpha}r^{\gamma}$, $\Delta \geqslant 0$, $\gamma \in \{0,1\}$, p і r – різні прості числа. Завдяки наслідку 1.1.1 $\Delta + \gamma > 1$. За попереднім, $\langle g\rangle = \langle f\rangle \times \langle h\rangle$, де $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ = r^{\beta}$. Можна вважати, що $g = fh$. За твердженням 3 леми $\langle g^{p^{\Delta}}\rangle = \langle f^{p^{\Delta}}\rangle \times \langle h\rangle = N \lhd G$. В силу теореми 1.1.1 N – максимальна підгрупа $\langle g\rangle$, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з $\langle g\rangle$. Оскільки A – власна немаксимальна з B, то $A < N < B$ і твердження 6 леми у цьому випадку доведене.

Нехай B – нециклічна підгрупа. Припустимо, що $/B/ = \infty$. Тоді G – група типу 2, $w(G) = w(C) \times w(D) \times \langle z\rangle \leqslant Z(G)$. Звідси $w(B) \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $C \leqslant B\cap Z(G)$ і $B = Cw(B) \leqslant Z(G)$. Оскільки A – власна немаксимальна підгрупа з B, то існує N така, що $A < N < B$. Зрозуміло, що $N \lhd G$. Нехай тепер $/B/ < \infty$. За попереднім і в силу нециклічності B маємо $B = \langle f\rangle \times \langle h\rangle$, $/f/ = p^{\Delta}$, $/h/ = p$, $\Delta > 0$, $w(B)$ – група типу (p,p). За твердженням 4 леми G' не може бути центральною в G підгрупою типу (p,p). Звідси G – не є групою жодного з типів 6 – 9. За теоремою 2.2.2 в групі G типу 10 точно три інволюції, які належать G'. Отже, G – не є група типу 10. Зрозуміло, що $G'\cap Z(G)$ містить c, $/c/ = p$ і, значить, G містить цілком факторизовну підгрупу $\langle c\rangle \times w(B)$ порядку p^{β}. Звідси $G = P$.

Нехай B – цілком факторизовна група. Тоді B належить деякій максимальній цілком факторизовній підгрупі M з G. За твердженням 4 леми $[M:w(Z(G))] \leqslant p$. Звідси $B\cap w(Z(G))$ містить c і $/c/ = p$. З розкладу B випливає, що $/B/ = p^{\Delta}$ і, значить, $/A/ = 1$. Покладемо

$N = \langle a \rangle$. Тоді $A < N < B$ і $N \lhd G$.

Нехай тепер B – не цілком факторизовна підгрупа. Тоді $\Delta > 1$. При цих умовах в групі G кожного з типів 1, 2 $w(G) \leqslant Z(G)$. Тому $h \in Z(G)$. За твердженням 3 леми $\langle f^p \rangle \lhd G$. Ясно, що $\langle f^p \rangle \times \langle h \rangle = N \lhd G$. Оскільки A – власна немаксимальна підгрупа в B, то за теоремою 1.1.1 $A < N < B$. В групі G кожного з типів 4 та 5 будь-яка циклічна підгрупа порядку p^2 має неодиничний перетин з $P' = G'$. Виділи G – може бути лише групою типу 3. З опису цих груп і оскільки $B \cap G' = 1$, $|f| > p$ випливає, що G/C – не цілком факторизовна група. Тоді $|z| = 1$ і без порушення загальності можна вважати, що $|u| = p^2$, $|v| \in \{p, p^2\}$. Нехай $|v| = p^2$. За твердженнями 3 та 4 леми $w(G) = w(C) \times w(\langle u \rangle) \times w(\langle v \rangle) = w(Z(G))$. Звідси $h \in Z(G)$. Як і раніше, $A < N = \langle f^p \rangle \times \langle h \rangle < B$.

Нехай $|v| = p$. Тоді $G = C \lambda B$. Покладемо $U = C \times \langle v \rangle$. Зрозуміло, що $v \notin Z(G)$, $w(U) = w(C) \times \langle v \rangle \leqslant Z(U)$ і $w(U) \not\leqslant Z(G)$. Оскільки $[G:U] = p^2$, $[G:C] = p^3$ і $G = C \lambda B = UB$, то $U \cap B = \langle d \rangle$, $|d| = p$. Очевидно, що $d \in Z(U)$, $d \in Z(B)$ і тому $d \in Z(G)$, $\langle d \rangle \cap C = 1$. Звідси $w(U) = w(C) \times \langle d \rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, для всіх випадків інтервал $(A;B) \ni N \lhd G$. Твердження 5 леми доведене. Лема доведена.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай G – група одного з типів 1 – 10 теореми. Тоді $G = P \times R$ – група, що задовольняє умову леми 3.1.3. Звідси для групи G справедливі всі твердження згаданої леми. Отже, для завершення доведення достатності залишається показати, що G – УШН( )-група.

Нехай $|[A;B]| > 2$. Покажемо, що $(A;B) \ni N \lhd G$. Дійсно, при $A \lhd G$ і $B \lhd G$ в силу [41] $(A;B) \ni N \lhd G$. Тому в подальшому будемо вважати, що або $A \not\lhd G$, або $B \not\lhd G$. З цього випливає, що $G' \not\leqslant A$. Нехай $G' \cap B = 1$. Тоді за твердженням 5 леми 3.1.3 $(A;B) \ni N \lhd G$. Тому в подальшому $G' \cap B \neq 1$. Припустимо, що $B = \langle g \rangle$. Зрозуміло, що $B = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$, де $\langle f \rangle = B \cap P$, $\langle h \rangle = B \cap R$, $|f| = p^\Delta$, $|h| \in \{1, r\}$, $\Delta > 0$, p і r – різні прості числа. За твердженням 3 леми 3.1.3 $\langle g^p \rangle = \langle f^p \rangle \times \langle h \rangle = N \lhd G$. Завдяки теоремі 1.1.1 $N \in (A;B)$, що й треба було довести. Отже, B – нециклічна група. Для груп G кожного з типів 1 – 3 $|G'| = p$, $G' \leqslant B$ і $G' \cap A = 1$. Покладемо $N = G' \lambda A$. Тоді $(A;B) \ni N \lhd G$ і достатність для цих типів груп доведена.

За твердженням 2 леми 3.1.3 $|G'| = p^2$. Очевидно, що $|G| < \infty$. Припустимо, що $|A| = 1$. Якщо B містить власну неодиничну нормальну

в G підгрупу N, то $(A;B) \ni N \lhd G$. Нехай B не містить власних неодиничних нормальних в G підгруп. Тоді B не містить нормальних в G підгруп простого порядку. Звідси G' – нециклічна і нецентральна в G підгрупа і тому G – може бути групою одного з типів 5 чи 10. В групах G кожного з цих типів G' – група типу (p,p) і будь-яка циклічна підгрупа з G порядку p^2 містить центральну в G підгрупу порядку p. Звідси $\exp(B) = p$ і $/G' \cap B/ = p$. Легко бачити, що в групах G кожного з розглядуваних типів існує єдина максимальна цілком факторизовна підгрупа $M = w(G)$ порядку $\cdot p^2$ чи p^3 і $w(Z(G))$ містить $w(\langle a\rangle)$. Звідси $(A;B) \ni N \lhd G$, де $N = w(\langle a\rangle)$.

Припустимо тепер, що $/A/ \neq 1$. Нехай $P_1 = B \cap P$. Тоді P_1 – нециклічна силовська p-підгрупа з B. Можливі випадки: 1) $G' \leqslant P_1$; 2) $G' \not\leqslant P_1$.

Випадок 1. У цьому випадку при $G'A < B$ покладемо $N = G'A$. Тоді $(A;B) \ni N \lhd G$, що й треба було довести. Тому можна вважати, що $G'A = B$. Оскільки A – немаксимальна в B, то $G' \cap A = 1$ і $A \not\lhd G$. Нехай $D = P_1 \cap A$. Тоді D – силовська p-підгрупа з A, $D \not\lhd P$, $/D/ > 1$, $P_1 = P' \setminus D$ і $/[D;P_1]/ > 2$. Якщо $(D;P_1) \ni N_1 \lhd P$, то $N_1 \lhd G$. Покладемо $N = N_1A$. Тоді $(A;B) \ni N \lhd G$, що й треба було довести. Отже, можна вважати, що $B \leqslant P$.

Нехай G – група типу 4. Легко бачити, що будь-яка циклічна підгрупа порядку p^2 з P містить $w(G')$. Звідси $\exp(D) = p$. Для груп цього типу $[w(P),P] \leqslant w(P')$. Тоді $[D,P] \leqslant w(P')$ і тому $w(P') \times D = N_1 \lhd G$. Оскільки P' – циклічна група порядку 4, то $(D;P_1) \ni N_1$. За попереднім, $(A;B) \ni N \lhd G$.

Нехай G – група одного з типів 5 – 10. Тоді будь-яка підгрупа порядку p^2 з P має з P' неодиничний перетин, G' – група типу (p,p), $w(G)$ – група типу (p,p) чи типу (p,p,p). Звідси $/D/ = p$ і P_1 – група типу (p,p,p). В групі G кожного з типів 5, 6 $P_1 = w(P)$ і $w(P)$ містить елемент c, $/c/ = p$, $[w(P),P] \leqslant \langle c\rangle$. Таким чином, $(D;P_1) \ni N_1 = \langle c\rangle \times D \lhd P$. За попереднім, $(A;B) \ni N \lhd G$.

В групі G кожного з типів 7 та 8 $w(P) = P = w(Z(P))$. Звідси $(D;P) \ N < P$. За попереднім, $(A;B) \ N < G$.

В групі G кожного з типів 9 та 10 підгрупа P не містить підгруп типу (p,p,p). Тому в цьому випадку G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Отже, у випадку 1 G – УШН( )-група

Випадок 2. У цьому випадку $G' \cap B = \langle c\rangle$, $/c/ = p$. Можливі випад

ки: 2.1) $\langle c\rangle \lhd G$; 2.2) $\langle c\rangle \not\lhd G$.

Випадок 2.1. Припустимо, що $c \in A$. Тоді $/[A/\langle c\rangle; B/\langle c\rangle]/ > 2$. Для груп G типу 4 $G/\langle c\rangle$ – група типу 1 розглядуваної теореми. Для груп G кожного з типів 5 та 10 $G/\langle c\rangle$ – група типу 3 розглядуваної теореми. В групі G кожного з типів 6 – 9 G' – центральна в G підгрупа типу (p,p) і $G/\langle c\rangle$ – група одного з типів 1, 3 розглядуваної теореми, або $G/\langle c\rangle$ – гамільтонова група. За попереднім, чи гамільтоновістю групи $G/\langle c\rangle$ $(A/\langle c\rangle; B/\langle c\rangle) \ni N/\langle c\rangle \lhd G/\langle c\rangle$. Але тоді $(A;B) \ni N \lhd G$. Нехай $c \notin A$. Тоді $\langle c\rangle \cap A = 1$. Для групи G типу 4 $p = 2$, кожна підгрупа порядку 4 з P має неодиничний перетин з P'. Звідси A – цілком факторизована абелева група. Якщо $[A,G] \leqslant \langle c\rangle \setminus A$, то $(A;B) \ni N = \langle c\rangle \setminus A \lhd G$.

Нехай $[A,G] \not\leqslant \langle c\rangle \setminus A$. Тоді $A \not\lhd G$. Оскільки в групі G $\langle c\rangle = w(G')$ і для будь-якої цілком факторизовної підгрупи X з G $[X, G] \not\leqslant \langle c\rangle$, то для групи G типу 4 випадок 2.1 розглянули повністю.

Для груп G кожного з типів 5 – 9 $[A,G] \not\leqslant \langle c\rangle$. Тоді $(A;B) \ni N = \langle c\rangle \setminus A \lhd G$.

В групі G типу 10 немає неодиничних цілком факторизованих підгруп X, для яких $G' \cap X = 1$. Тому G не є групою типу 1 0. Випадок 2.1 розглянули повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку G не може бути групою жодного з типів 4, 6 – 9. В групі G типу 10 немає неодиничних цілком факторизовних підгруп, що мають з G' одиничний перетин. Звідси G не може бути групою типу 10. В групі G типу 5 всяка неодинична підгрупа з G непростого порядку має з G' неодиничний перетин. Звідси $/A/$ – просте число, $a^3 \in Z(G)$, $/a^3/ = 3$, $\langle c\rangle \cap \langle a^3\rangle = 1$. За твердженням 4 леми 3.1.3 будь-яка максимальна цілком факторизована підгрупа M з G містить $w(Z(G))$, $M = w(G)$, $/M/$ – добуток двох чи трьох простих чисел і $/B/$ – ділиться на добуток трьох простих чисел. В групі G типу 5 маємо $a^3 \in Z(G)$, $a^3 \in G'$. Звідси $\langle a^3\rangle \cap B = 1$ і тому $/B/$ – добуток двох простих чисел, що не так. Випадок 2.2 розглянутий повністю. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.1.2. Нецильпотентні УШН( )-групи G є скінченними надрозв'язними групами та вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ \in \{1, r\}$, q і r - прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle b^{q^{\alpha}}\rangle \times \langle z\rangle$; при $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $\langle z, x\rangle$ - група кватеріонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

3) $G = \langle a\rangle \setminus (\langle x\rangle \setminus \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^{\Delta}$, $\Delta > 2$, $/z/ = q$ - просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^{q^{\Delta-1}}$, $[a, x^{q^{\alpha}}] = [a,z] = 1$;

4) $G = \langle a\rangle \setminus (\langle x\rangle \setminus \langle z\rangle)$, $/a/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ - непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x,z] = x^{q}$, $[a, x^{q^{\alpha}}] = [a,z] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді за наслідком 1.3.5 G - локально надрозв'язна, а тому локально ступінчаста група, яка, очевидно, задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 - 17 згаданої теореми. З цього випливає, що G - скінченна надрозв'язна група. Зрозуміло, що G задовольняє умову леми 3.1.1, за твердженням якої для будь-якого елемента g з G, $/g/ = r^{\gamma}$, $\Phi(\langle g\rangle) \lhd G$. Звідси в групі G типу 1 теореми 2.3.1 $Z(G) = \langle x^{q^{\alpha}}\rangle \times \langle z\rangle$. Нехай в групі G згаданого типу $/z/ = p$. Покладемо $A = \langle az\rangle$, $B = \langle x^{q^{\alpha}}\rangle \times A$. Зрозуміло, що $[A,G] = \langle a\rangle$. З цього випливає, що B не містить нормальних в G підгруп N, для яких $A \not\leqslant N$. За означенням УШН( )-груп $/[A;B]/ \not< 2$, що можливо при $\beta < 3$. Отже, G - група типу 1 розглядуваної теореми.

З леми 3.1.1 та надрозв'язності G випливає, що G не може бути групою жодного з типів 2 - 8 теореми 2.3.1. Група G кожного з типів 10 та 11 згаданої теореми є відповідно групою 2 та 3 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 9, 12, 13 теореми 2.3.1 не існує нормальної підгрупи N з інтервала $(0;G)$, де 0 - силовська q-підгрупа групи G і тому G не може бути групою жодного з цих типів. Група G типу 14 є групою типу 4 розглядуваної теореми. Оскільки група G кожного з типів 15 - 17 теореми 2.3.1 є ненадрозв'язною групою, то G не може бути групою цих типів. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 4 розглядува-

ної теореми. Зрозуміло, що G – нільпотентна скінченна надрозв'язна група. Покажемо, що G – УЩН( )-група, тобто для $|[A;B]| > 2$ $(A;B)\ni N \lhd G$. Якщо $G' \leqslant A$, то, очевидно, $(A;B)\ni N \lhd G$. Тому в подальшому будемо вважати, що $G' \not\leqslant A$. Легко бачити, що підгрупи Фраттіні всякої циклічної підгрупи з G нормальні в G. Зрозуміло, що $G = \langle a\rangle \setminus Q$, де $Q = \langle x\rangle\langle z\rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $[\langle a\rangle, Q] = \langle a\rangle$. Покладемо $A_1 = \langle a\rangle \cap A$. Можливі випадки: 1) $A_1 = \langle a\rangle$; 2) $A_1 \neq \langle a\rangle$.

Випадок 1. У цьому випадку $|[A/\langle a\rangle;B/\langle a\rangle]| > 2$ і $G/\langle a\rangle \cong Q$. Якщо Q – дедекіндова група, то $(A/\langle a\rangle;B/\langle a\rangle)\ni N/\langle a\rangle \lhd G/\langle a\rangle$. Але тоді $(A;B)\ni N \lhd G$. Нехай Q – недедекіндова група. Тоді G – група типу 3 чи 4 розглядуваної теореми, у якої Q – силовська q-підгрупа з G. Очевидно, що всяка підгрупа порядку q^2 з Q містить Q'. Оскільки $A \not\ni G' = \langle a\rangle \times Q'$, то $A \cap Q' = 1$. Звідси $|A/\langle a\rangle| \leqslant q$. Ясно, що $|B/\langle a\rangle| \geqslant q^2$. З цього випливає, що підгрупа $B/\langle a\rangle$ строго містить $G'/\langle a\rangle$. Тому $G' < B$. При $|A/\langle a\rangle| = 1$ $(A;B)\ni N = G' \lhd G$. Нехай $|A/\langle a\rangle| \neq 1$. Тоді $|A/\langle a\rangle| = q$ і $A = \langle a\rangle \setminus \langle a_2\rangle$, $|a_2| = q$, $\langle a_2\rangle = A \cap Q$. За попереднім, $Q' \cap \langle a_2\rangle = 1$. Оскільки $|Q'| = q$, то $(A;B)\ni N = AQ' \lhd G$. Отже, у випадку 1 достатність доведена.

Випадок 2. У цьому випадку без порушення загальності можна вважати, що $A \leqslant Q$. Ясно, що $C_Q(\langle a\rangle)$ нормальна в G максимальна підгрупа з Q, що містить Q'. Нехай $A \lhd G$. Якщо $a \in B$, то $(A;B)\ni N = \langle a\rangle \setminus A \lhd G$. Можливі випадки: 2.1) $A \lhd G$, $a \notin B$; 2.2) $A \not\lhd G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $\langle a\rangle \cap B = 1$ і, значить, без порушення загальності, $B \leqslant Q$ і $|B|$ – ділиться на добуток двох простих чисел. Очевидно, що B містить $\langle c\rangle$ і $\langle c\rangle$ містить Q', де $|c|$ – просте число, $c \in Z(G)$. При $|A| = 1$ $(A;B)\ni N = \langle c\rangle \lhd G$. Нехай $|A| \neq 1$. Тоді $|B|$ – ділиться на добуток трьох простих чисел. Звідси в групі G кожного з типів 2 та 4 $|A| = q$, $B = Q$ і $|B| = q^3$. Оскільки $A \not\leqslant C_Q(\langle a\rangle)$ – максимальна підгрупа з Q, то $(A;B)\ni N = C_Q(\langle a\rangle) \lhd G$.

В групі G кожного з типів 1 та 3 Q' належить B і $Q'A \lhd G$. Якщо $Q'A > A$, то $(A;B)\ni N = Q'A \lhd G$. Нехай $Q'A = A$. В групі G типу 1 $A \not\leqslant C_Q(\langle a\rangle) = Z(G)$ – максимальна підгрупа з Q. Звідси $B \cap Z(G) = N$ – максимальна підгрупа з B. Тому $(A;B)\ni N \lhd G$.

В групі G типу 3 завдяки теоремі 1.1.1 підгрупа $C_Q(\langle a\rangle) = \langle x^q\rangle \times \langle z\rangle$ строго містить A і $\langle x^p\rangle \times \langle z\rangle$ – максимальна підгрупа з Q. Звідси $B \cap (\langle x^q\rangle \times \langle z\rangle) = N$ – максимальна підгрупа з B. Тому

$(A;B) \ni N$. Зрозуміло, що $/N/ > q$. Але тоді $Q^1 \leqslant N$. Звідси $N \lhd Q$ і тому $N \lhd G$. Достатність у випадку 2.1 доведена.

Випадок 2.2. У цьому випадку $/A/ \neq 1$, $/B/$ - ділиться на добуток трьох простих простих чисел. Якщо $[\langle a\rangle, A] \neq 1$, то $[\langle a\rangle, A] = \langle a\rangle$ і A містить q-елемент u, $u \in Q$, $\langle u\rangle$ - максимальна підгрупа з Q і $Q^1 \leqslant \langle u\rangle$. Зрозуміло, що $\langle a\rangle \rangle \langle u\rangle$ - максимальна підгрупа в G. Оскільки $\langle u\rangle \leqslant A$ - власна немаксимальна підгрупа з B, то $a \notin B$. Тому $\langle a\rangle \cap B = 1$ і, значить, $\langle u\rangle$ - максимальна підгрупа з B, що неможливо. Випадок 2.2 неможливий. Всі випадки розглянуті. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.1.1. Всяка нільпотентна УЦЦН( )-група G є скінченною надрозв'язною не більше ніж трипримарною групою з циклічним комутантом порядку p чи pq, p і q - різні прості числа. Комутант G^1 тоді і тільки тоді має простий порядок, коли G - група типу 1 теореми 3.1.2, групи G тільки цього типу можуть бути трипримарні.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 3.1.2.

Н а с л і д о к 3.1.2 Всі недедекіндові УЦЦН( )-групи G вичерпуються групами типів 1 - 10 теореми 3.1.1 та групами типів 1 - 4 теореми 3.1.2 або названими нижче 14 типами груп, що співпадають з відповідними типами груп теореми 2.2.3 та теореми 2.3.1 :

1. Нільпотентні групи (теореми 2.2.3):
1) G - група типу 1;
2) G - група типу 2;
3) G - група типу 3;
4) G - група типу 10, $/b/ \in \{4,8\}$, $z \in Z(G)$;
5) G - група типу 11, $z \in Z(G)$;
6) G - група типу 15;
7) G - група типу 17;
8) G - група типу 19;
9) G - група типу 26, $[U,x] = w(U)$, $/C_x(U)/ = 4$;
10) G - група типу 27
11. Нільпотентні групи (теорема 2.3.1):
11) G - група типу 1;
12) G - група типу 10;

13) G – група типу 11;
14) G – група типу 14.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки наслідку 1.3.5 G – локально надрозв'язна, а тому локально ступінчаста група, для якої за лемою 1.2.2 можливі випадки: 1) G – нільпотентна УШН( )-група; 2) G – локально ступінчаста ненільпотентна УШН( )-група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів згаданої теореми. За доведенням тієї теореми G – група одного з типів 1 – 10 розглядуваного наслідку.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів згаданої теореми. За доведенням тієї теореми G – група одного з типів 11 – 14 розглядуваного наслідку. Наслідок доведений.

3.2. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УШН( )-ГРУП

Т е о р е м а 3.2.1. Нільпотентні неодедекіндові УШН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) G – нільпотентна неодедекіндова УШН( )-група, тобто група G одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1;

2) $G = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = p^2$, $|x| = |b| = p$ – непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

5) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

6) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – просте число, $[a,x] = b^{p}$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

7) $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – просте число, $[a,b] = a^{p}$, $[a,x] = b^{p}$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

8) $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| =$

= p – непарне просте число, [a,b] = x, [b,x] = c, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle$ = = Z(G), $[a,x] = c^{\varepsilon} b^{p}$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^{p} = c^{\mu\varepsilon\ell} b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

9) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

10) $G = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^2$, $M = (\langle a^p\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = /x/ = p$, p – непарне просте число, $[b,x] = a^{sp} b^{tp} x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^{p}$, $[a,x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p^2 з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

11) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{9}$;

13) $G = (\langle a,b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $\langle a,b\rangle$ – група кватерніонів, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = a$;

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 група G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Нехай G – група одного з типів: 1 – 3; 10, $/b/ \in \{4,8\}$, $z \in Z(G)$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $[U,X] = \Phi(U)$, $/G_X(U)/ = 4$; 27 теореми 2.2.3. Тоді G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 4 чи 5 теореми 2.2.3. Тоді $w(Z(G)) = G'$, $/G'/ = p$ і G містить підгрупу $B = \langle v\rangle \times \langle a\rangle$, $/v/ = /a/ = p$, $B \cap$ $\cap Z(G) = B \cap G' = 1$. Покладемо $A = 1$. Ясно, що $/[A;B]/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $N \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай G – група типу 6 чи 7 теореми 2.2.3. Припустимо, що $\beta > 3$. Тоді $b^2 \in Z(G)$. Покладемо $d = ab^2$. Ясно, що $G' \cap \langle d\rangle = \langle a\rangle \cap \langle d\rangle =$ $= 1$. За лемою 3.1.1 $\langle d^2\rangle \lhd G$. Очевидно, що $d^2 = a^2b^8$. Зрозуміло, що $d^2 \in Z(G)$, $b^2 \in Z(G)$, а $a^2 \notin Z(G)$, що неможливо. Отже, $\beta < 4$. Тоді G – група типу 2 та 3 згаданої теореми відповідно.

Нехай G – група типу 8 чи 9 теореми 2.2.3. Покладемо в групі G типу 8 $g = b$, а в групі G типу 9 $g = d$. В силу леми 3.1.1 $\langle g^p\rangle \lhd$ $\lhd G$, що в групах G розглядуваних типів неможливо і тому G не може

бути групою цих типів.

Припустимо, що G – група типу 10 теореми 2.2.3. Покажемо, що G – група типу 4 теореми 3.1.1. Для цього досить показати, що $/b/ \in \{4,8\}$, $z \in Z(G)$. Покажемо спочатку, що $z \in Z(G)$. Оскільки $/z/ \in \{1,r\}$, то при непарному r це очевидно. Нехай $/z/ = 2$. Тоді $/b/ \in \{4,8\}$ і при $/b/ = 4$ $z \in Z(G)$. Якщо $/b/ = 8$, то G містить підгрупу $B = \langle d \rangle \times \langle z \rangle$, де $d = a^2b^2$, $/d/ = 2$, $d \notin Z(G)$. Покладемо $A = 1$. Тоді, очевидно, $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $B \cap G' = B \cap \langle a \rangle = N \cap G' = 1$ і тому $N \leqslant Z(G)$, $/N/ > 1$. Ясно, що $N < B$ і B – група типу $(2,2)$. Отже, без порушення загальності можна вважати, що $N = \langle z \rangle$ і тому завжди $z \in Z(G)$.

Припустимо, що $/b/ = 2^\beta$ і $\beta > 3$. Тоді $b^2 \in Z(G)$. Покладемо $d = ab^{2^{\beta-2}}$. Легко бачити, що $/d/ = 4$, $\langle d \rangle \cap G' = \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Завдяки лемі 3.1.1 $\langle d^2 \rangle \lhd G$, $d^2 = a^2 b^{2^{\beta-2}} \in Z(G)$, що неможливо, оскільки $a^2 \notin Z(G)$. Отже, $\beta < 4$ і G – група типу 4 теореми 3.1.1, а тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 11 теореми 2.2.3. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Оскільки $/z/ \in \{1,r\}$, то при $r \neq 3$ це очевидно. Нехай $r = 3$. Тоді в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. Покладемо $A = 1$. Тоді, очевидно, $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $B \not\leqslant Z(G)$, $\langle b \rangle \not\lhd G$, $G' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$, $B \cap G' = \langle b \rangle$. Звідси $B \not\lhd G$ і тому $/N/ = 3$. Ясно, що $N \cap G' = \langle b \rangle \cap N = 1$. Отже, $N \leqslant Z(G)$ і можна вважати, що $N = \langle z \rangle$. Звідси G – група типу 5 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $/c/ = /b/ = p$ – непарне просте число, $c \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$ і G – неметациклічна група. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G група типу 2 теореми 1.3.3, а тому G – група типу 5 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми. Нехай M – власна неметациклічна підгрупа з G. Тоді M може бути лише групою типу 1 теореми 1.3.3. Звідси M містить елемент x, $/x/ = p$, $\langle x \rangle \cap G' = 1$. Ясно, що $[G:M] = p$, $G' \not\leqslant M$ і $M = G' \lambda \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $x \in G \setminus \Phi(G)$ і G – 2-породжена група і тому $x \notin Z(G)$. Припустимо, що $x \in Z(M)$. Покладемо $A = 1$, $B = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$. Оскільки $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$ і $G' \cap B = \langle b \rangle$, то $\langle b \rangle \not\lhd G$ і $B \not\lhd G$. Ясно, що $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $/N/ = p$, $N \leqslant Z(G)$. Без порушення загальності можна вважати,

що $N = \langle x \rangle$, що не так. Отже, $x \notin Z(M)$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $G' \leqslant Z(G) \leqslant C \lhd G$, $C \cap \langle x \rangle = 1$, G/C – підгрупа з $AutG'$. Відомо [44], що $AutG' \cong GL(2,p)$ і силовська p-підгрупа з $GL(2,p)$ має порядок p. Звідси $[G:C] = p$ і, значить, $/C/ = p^3$, $G = C \lambda \langle x \rangle$, $C' = 1$. За попереднім, C – не може бути групою типу (p,p,p). Але тоді $C = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p^2$, $/b/ = p$, $a^p = c \in Z(G)$. Оскільки $x \notin Z(M)$, то $[b, x] = c^s$, $0 < s < p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[a, x] = b$. Звідси G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 13; 14; 16; 19; 20; 21; 22, $/b/ \in \{4, 8\}$; 23, $/b/ = 8$; 25 теореми 2.2.3 є відповідно групами кожного з типів 5 – 13 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. Покажемо, що $\beta < 4$. Нехай це не так. Тоді G містить елемент $d = a^2 b^2$, $[a^2, b^2] = 1$. Звідси $/d/ = 4$ і $\langle d \rangle \cap G' = 1$. В силу леми 3.1.1 $d^2 \in Z(G)$ і $d^2 = a^4 b^4$. В групах G розглядуваних типів $b^4 \in Z(G)$, $a^4 \notin Z(G)$. Суперечність. Отже, G – не може бути групою типу 24 теореми 2.2.3, а група G типу 22 чи 23 теореми 2.2.3 може бути лише групою типу 11 чи 12 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 26 теореми 2.2.3. Тоді $G = U \lambda X$. При циклічності U $[U,X] = w(U) \leqslant Z(G)$. Нехай $C = C_X(U)$. Тоді $C \lhd G$ і X/C – підгрупа з $AutU$. При $/U/ = 4$ $/AutU/ = 2$. Звідси $[X:C] = 2$. Нехай $/U/ > 4$. Тоді $AutU$ – абелева група і, значить, $X' \leqslant G$. З цього випливає, що $G' \leqslant Z(G)$ і G' – група типу $(2,2)$. Легко бачити, що $\Phi(U) \leqslant Z(G)$. За попереднім, $[X:C] \in \{2,4\}$. Припустимо, що $[X:C] = 4$. Тоді $C = X'$ і X/C – група типу $(2,2)$ з $AutU$. Але тоді X/C містить інвертуючий автоморфізм Cz з $AutU$. Звідси z індукує на U теж інвертуючий автоморфізм і, значить, $[U,\langle z \rangle] = \Phi(U)$, $/\Phi(U)/ > 2$, що суперечить співвідношенню $[U,X] = \Phi(U)$. Отже, $[X:C] = 2$. Тоді $/C/ = 4$ і G – група типу 9 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай U – нециклічна група. Тоді U – група кватерніонів порядку 8. Якщо $/C_X(U)/ = 4$, то G – група типу 9 теореми 3.1.1 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $C_X(U) = X$. Тоді $U = \langle a,b \rangle$, $X = \langle x,y \rangle$. $G = U \times X$. Покладемо $Q = \langle ax, by \rangle$. Тоді $G = U \lambda Q$, де Q – група кватерніонів порядку 8. Покладемо $A = \Phi(U)$, $B = Q$. Зрозуміло, що $B \not\lhd G$. За означенням УЦП( ) груп $(A;B) \ni N \lhd G$. Звідси $/N/ = 4$. Замінивши X на Q

одержимо, що $/C_Q(U)/ = /N/ = 4$ і тому G – група типу 9 теореми 3.1.1 і, значить, G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай, далі $[X:C_X(U)] < 4$. Тоді поклавши $X = Q$ одержимо, що $G = U \setminus Q$, і як раніше, $/C_Q(U)/ = 4$. Звідси знову G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо $A = 1$, $B = \langle ax \rangle$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(A;B] \ni N \lhd G$. Легко бачити, що $/N/ = 2$ і тому $N \leqslant Z(G)$, що не так. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 13 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – недедекіндова нільпотентна група. Покажемо, що G – УШН( )-група. Для груп G типу 1 в теоремі 3.1.1 установлено, що G – УШН( )-група. За лемою 1.2.2 G – УШН( )-група, що й треба було довести. Отже, в подальшому G – група одного з типів 2 – 13 розглядуваної теореми. Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $(A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $B \lhd G$, то $N = B$ і все доведено. Тому $B \not\lhd G$. Звідси $G' \not\leqslant B$, B – власна немаксимальна підгрупа з G і $B \not\leqslant Z(G)$.

Для завершення доведення достатності теореми доведемо наступну лему.

Л е м а 3.2.1. Нехай G – група одного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1. Тоді G – скінченна недедекіндова p-група з комутантом порядку p^2 чи p^3, p – просте число і справедливі наступні твердження:

1) для будь-якого елемента g з G $\langle g^p \rangle \lhd G$. Співвідношення $g^p \notin Z(G)$ може мати місце лише при $p = 2$, G' – циклічна група порядку 4 чи 8, тобто коли G – група одного з типів 2, 3, 11 – 13;

2) в групі G типів: $2,\beta > 1$; 3; 11 – 13 точно три інволюції;

3) комутант G' групи G є або нецентральною циклічною підгрупою порядку 4 чи 8, або групою типу (p,p) чи типу (p,p,p). Комутант G' тоді і тільки тоді є центральною підгрупою G, коли G – група одного з типів 6 чи 7, G' – група типу (p,p), або G – група одного з типів 9 чи 10, G' – група типу (p,p,p);

4) для будь-якої нециклічної підгрупи B з G підгрупа $B \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Лише в групі G типу 5 c може не належати G'.

Доведення. Ясно, що G – недедекіндова скінченна p-група з кому

тантом G' порядку p^2 чи p^3. Очевидно також, що в групі G кожного з типів 2, 3, 11 – 13 $p = 2$, G' – нецентральна в G циклічна підгрупа порядку 4 чи 8. В усіх інших випадках G' – група типу (p,p) чи типу (p,p,p).

Нехай G – група з циклічним комутантом. Тоді за попереднім, G – група одного з типів 2, 3, 11 – 13.

Нехай G – група типу 2 чи 3. Очевидно, що $\Phi(G) = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle$. Нехай $g \in G\setminus\Phi(G)$. Тоді $g \in \{a^i b^{2j}, a^{2i} b^k, a^k b^{2l}\}$, де ik – непарне число.

Нехай $g = a^i b^{2j}$. Тоді $g^2 = a^{2i} b^{4j}$ і при $\beta < 3$ $\langle g^2\rangle = \langle a^{2i}\rangle = \langle a^2\rangle \lhd G$ і $g^2 \notin Z(G)$. При $\beta = 3$ $g^4 = a^{4i} b^{8j} = a^4$. Зрозуміло, що $[\langle a^{2i}\rangle, G] = \langle a^4\rangle$. Звідси $[\langle g^2\rangle, G] = \langle a^4\rangle = \langle g^4\rangle$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$.

Нехай $g = a^{2k} b^l$. Тоді $\langle g^2\rangle = \langle b^{2l}\rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$.

Нехай $g = a^k b^l$. Тоді $\langle g^2\rangle = \langle b^{2l}\rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$. Отже, при $g \in G\setminus\Phi(G)$ $\langle g^2\rangle \lhd G$.

Нехай тепер $g \in \Phi(G)$. Тоді $g = a^{2i_1} b^{2j_1}$. Ясно, що $\exp(\Phi(G)) = 4$ і, значить, $|g| = 4$. Якщо $\beta < 3$, то $|a^{2i_1}| = 4$ і $\langle g^2\rangle = \langle a^4\rangle \leqslant Z(G)$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$. При $\beta = 3$ завдяки теоремі 1.1.4 в G точно три інволюції і, значить, $g^2 \in Z(G)$, $\langle g^2\rangle \lhd G$. Отже, твердження 1 леми для груп G типу 2 чи 3 доведене.

Нехай G – група типу 11 чи 12. Тоді $[G:\langle a\rangle] \leqslant 4$. В силу теореми 1.2.2 з [16] підгрупа $\langle a\rangle$ недоповнюється в G. Оскільки $|g| > 8$, то $\langle a\rangle \cap \langle g\rangle \leqslant \langle c\rangle = w(\langle a\rangle) \leqslant Z(G)$. Якщо $|g| = 4$, то $\langle g^2\rangle = \langle c\rangle \lhd G$. Нехай $|g| > 4$. Припустимо, що $|g| = 8$. Тоді при $g^2 \in \langle a\rangle$ $\langle g^2\rangle \leqslant \langle a^2\rangle$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$. Нехай $g^2 \notin \langle a\rangle$. Тоді $\langle a\rangle \cap \langle g\rangle = \langle c\rangle$, $|c| = 2$ і $G = \langle a\rangle\langle g\rangle$. Звідси $g^2 \in Z(G)$ і знову $\langle g^2\rangle \lhd G$.

Нехай тепер $|g| > 8$. Оскільки $\exp(G) = 16$ то $|g| = 16$. Зрозуміло, що $g^4 \in \langle a\rangle$ і тому $\langle g^4\rangle \geqslant \langle a^4\rangle$. Оскільки $a^4 \notin Z(G)$, то $\langle a\rangle\langle g\rangle < G$. Але тоді $[\langle a\rangle\langle g\rangle:\langle a\rangle] < 4$ і, значить, $g^2 \in \langle a\rangle$, $\langle g^2\rangle \lhd G$. Таким чином, твердження 1 для груп G типів 11 чи 12 доведене.

Нехай G – група типу 13. Тоді $|bx| = 8 = \exp(G)$. Завдяки теоремі 2.2.3 в G три центральні інволюції. Якщо $|g| = 4$, то $g^2 \in Z(G)$ і, значить, $\langle g^2\rangle \lhd G$. Нехай $|g| = 8$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $g = dx$, де d належить групі кватерніонів $\langle a,b\rangle$ порядку 8. Оскільки $|g| = 8$, то $|d| = 4$. Ясно, що $g^2 = dxdx = dx(d^{-1}x^{-1}dx) = dx^2d[d,x] = d^2x^2[d,x] = fa^4$, де $f \in Z(G)$, $f = d^2x^2$. Оскільки $|g| = 8$, то $|a^4| = 4$. Ясно, що $g^4 = g^2g^2 = a^{2i} = a^2$. Зрозуміло, що $[\langle a\rangle, G] = [\langle g^2\rangle, G] = \langle a^2\rangle$ і тому $\langle g^2\rangle \lhd G$. Твердження 1

для груп G типу 13 доведене.

Легко бачити,що в групі G кожного з типів 4 - 10 $g^p \in Z(G)$ і тому $\langle g^p \rangle \lhd G$. Отже, твердження 1, а із ним твердження 2 леми доведені повністю. За попереднім і співвідношенням для розглядуваних типів груп випливає справедливість твердження 3 леми.

Доведемо, нарешті, твердження 4 леми. Нехай B – нециклічна підгрупа з G. Тоді $/B/ > p$. Якщо $G' \leqslant B$, то $G' \cap B \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Нехай $G' \not\leqslant B$. Якщо G - група одного з типів 2, 3, 11 - 13, то вона містить таку нормальну підгрупу U, що $w(U) = w(G') \leqslant Z(G)$ і G/U - циклічна група. Оскільки B – нециклічна група, то $B \cap U$ містить $w(U) = \langle c \rangle \leqslant Z(G)$, $/c/ = p$. В групі G кожного з типів 4 - 10 w(G) – група порядку p^2 чи p^3 і має експоненту p, $G' \leqslant w(G)$. Крім того, B містить підгрупу типу (p,p). В групі G типу 4 кожна підгрупа типу (p,p) містить $a^p = c \in Z(G)$, $/c/ = p$. В групі G кожного з типів 6 - 10 $[w(G):(G' \cap Z(G) \wedge w(G))] \leqslant p$. Звідси $w(B) \cap Z(G) = Z$ і $[w(B):Z] \leqslant p$. Оскільки $/w(B)/ > p$, то Z містить c і $/c/ = p$. Тоді $w(G) = Z \times \langle b \rangle$, де $Z = \langle a^p \rangle \times \langle x^p \rangle \leqslant Z(G)$. Звідси $Z \cap w(B) \neq 1$. Але тоді $Z \cap w(B)$ містить c і $/c/ = p$. Твердження 4 леми доведене. Лема доведена.

Продовжимо доведення достатності теореми. Нехай $B = \langle g \rangle$. Тоді $(A;B] \ni N = \langle g^p \rangle$. За твердженням 1 леми 3.2.1 $N \lhd G$, що й треба було довести. Нехай B – нециклічна група. Припустимо, що $A = 1$. Тоді за твердженням 4 леми 3.2.1 $B \cap Z(G)$ містить c і $/c/ = p$. Звідси $(A;B] \ni N = \langle c \rangle \lhd G$ і все доведено. Тому в подальшому $/A/ > 1$ і $/B/ > p^2$.

В групі G кожного з типів 2, 3, 6, 7, 13 за вибором B і твердженням 4 леми 3.2.1 $B \cap G' = \langle c \rangle$, $/c/ = p$, $c \in Z(G)$, G містить таку нормальну підгрупу U, що $U \cap B = \langle c \rangle$ і G/U – циклічна група. Звідси B/<c> – циклічна група. Оскільки B – нециклічна група, то $B = \langle c \rangle \times \langle u \rangle$, $/u/ > p$. За твердженням 1 леми 3.2.1 $u^p \in Z(G)$. Покладемо $N = \langle c \rangle \times \langle u^p \rangle$. Тоді $N \lhd G$. Зрозуміло, що N – максимальна підгрупа з B і за теоремою 1.1.1 N містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Звідси $(A;B] \ni N \lhd G$. Отже, достатність для розглядуваних типів груп доведена.

Оскільки $/B/ \geqslant p^3$ і B – власна немаксимальна підгрупа з G, то G не може бути групою типу 4.

Нехай G – група типу 5. Тоді $p > 2$, $w(G) = G' \times \langle x^p \rangle$, де G'

$= \langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$, $\langle a^p \rangle \times \langle x^p \rangle \leqslant Z(G)$, $\exp(G) = p^2$. За припущенням $G' \not\leqslant B$. Припустимо, що $B \cap G' = 1$. Тоді $B \cap (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) = 1$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \lhd G$ і $G/(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ – циклічна група, що суперечить нециклічності B. Отже, $B \cap G' = \langle d \rangle = B \cap (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $/d/ = p$, $d \in Z(B)$. Оскільки $G/(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ – циклічна група, то і $B/\langle d \rangle$ – циклічна група. З нециклічності підгрупи B і циклічності $B/\langle d \rangle$ маємо, що $B = \langle u \rangle \times \langle d \rangle$, де $/u/ > p$. Зрозуміло, що $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \setminus \langle u \rangle$ і тому $d \in Z(G)$. Як і раніше, $(A;B] \ni N = \langle d \rangle \times \langle u^p \rangle \leqslant Z(G)$ і $N \lhd G$. Таким чином, достатність для груп G типу 5 доведена.

Нехай G – група одного з типів 8 – 10. Завдяки теоремі 2.1.2 G – метагамільтонова група, у якої $G' = w(G)$ – група типу (p,p,p). В силу вибору B $B' = 1$. За твердженням 1 леми 3.2.1 для будь-якого елемента g з G $g^p \in Z(G)$. Зрозуміло, що $B = \langle u \rangle \times \langle v \rangle$, $/u/ \geqslant /v/ > 1$, $/u/ > p$. Зауважимо, що $\exp(G) = p^2$ і будь-який елемент з G порядку p^2 не належить $Z(G)$.

Нехай $v \in Z(G)$. Тоді $/v/ = p$. Покладемо $N = \langle u^p \rangle \times \langle v \rangle$. Ясно, що $N \leqslant Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $(A;B] \ni N \lhd G$

Нехай $v \notin Z(G)$. Припустимо, що $/v/ = p$. Тоді G - група типу 8. Ясно, що $v \in G'$ і G містить підгрупу $V = \langle d \rangle \times \langle b \rangle$, де $/d/ = p$, $d \in Z(G) \cap G'$, $[G:V] = p$ і $G = V\langle h \rangle$. Оскільки $v \notin Z(G)$, то $[v,h] = f \neq 1$, $f \in Z(G)$, $/f/ = p$. В G точно p спряжених з v елементів і вони мають вигляд vf^i. Звідси G містить нормальну підгрупу $K = \langle f \rangle \times \langle v \rangle$. Легко бачити, що $[\langle v \rangle, G] = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leqslant Z(G)$, $/a^p/ = /b^p/ = p$, що неможливо, оскільки $[K,G] \leqslant (\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \cap K < K$, $[K,G] = K$. Отже, $/v/ > p$. Тоді $/B/ > p^3$. Звідси G – група типу 9 чи 10, $\exp(G) = p^2$, $G' = \Phi(G) = w(G) = Z(G)$ і G – 3-породжена група, де u та v – деякі два з них. Звідси $G = \langle h, u, v \rangle$. Зрозуміло, що $G' = \langle [h,u], [h,v], [u,v] \rangle = \langle [h,u], [h,v] \rangle$. Оскільки $G' \leqslant Z(G)$ і $\exp(G') = p$, то $/G'/ \leqslant p^2$, що суперечить умові $/G'/ = p^3$. Ця суперечність і завершує доведення достатності для розглядуваних типів груп.

Нехай G – група типу 11 чи 12. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ \in \{4,8\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. При $/b/ = 4$ G – група кватерніонів порядку 32 і, значить, G – група типу 11. Зрозуміло, що $/B/ = 8$ і тому B – група кватерніонів порядку 8. Звідси $G = \langle a \rangle \cdot B$, де $\langle a \rangle \cap B = \langle z \rangle$, $[G:\langle a \rangle] = 2$, $[B:\langle z \rangle] = 2$ і $/z/ = 4$. Ясно, що $/A/ = 2$ і $\langle z \rangle \lhd G$. Отже, $(A;B] \ni N = \langle z \rangle \lhd G$

Нехай $/b/ = 8$. Тоді $b^2 \in Z(G)$ і G містить три максимальні під-

групи $M_i \in \{\langle a\rangle \times \langle d\rangle, \langle b\rangle \setminus \langle d\rangle, \langle ab\rangle \setminus \langle d\rangle\}$, де $d = a^q b^2$. $i \in \{1,2,3\}$. В силу теореми 1.1.4 в G точно три інволюції, які складають підгрупу $w(G) = w(\langle a\rangle \times \langle d\rangle) = w(\langle a\rangle) \times \langle d\rangle$ і $\langle a\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$. Звідси $w(\langle a\rangle) \times \langle d\rangle = w(\langle b\rangle \setminus \langle d\rangle) = w(\langle ab\rangle \setminus \langle d\rangle)$. Зрозуміло, що $B \leqslant M_i$, G не містять підгруп кватерніонів порядку 8. Тому $w(B) = w(G)$ і B - не діедральна метациклічна абелева група, чи група Міллера - Морено з циклічною максимальною підгрупою $\langle g\rangle$, тобто B - група типу 5 теореми 1.1.1. Покладемо $N = \Phi(B)w(B)$. Зрозуміло, що $\Phi(B) = \langle g^p\rangle$. Оскільки $w(B) \lhd G$ і за твердженням 1 леми 3.2.1 $\langle g^p\rangle \lhd G$, то $N \lhd G$. За теоремою 1.1.1 N - максимальна підгрупа з B, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Тому $(A;B]^G \leqslant N \lhd G$. Отже, група G типу II чи 12 є УШН( )-групою. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.2.2. Ненільпотентні локально ступінчасті УШН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) G - ненільпотентна УШН( )-група, тобто група G одного з типів 1 - 4 теореми 3.1.2;

2) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - група Шмідта, P - група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3,9\}$;

3) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $/P/ = p^2$, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$, 2 - показник p за модулем q, $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \setminus \langle x\rangle$ - група Шмідта, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = /P'/ = p$ - просте число, $p > 3$, $/x/ = q$ - непарне просте число, 2 - показник p за модулем q;

5) $G = (P \setminus \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $P \setminus \langle x\rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, $p \neq 3$, $q > 2$, $/z/ = r$ - просте число, $r \neq p$, 2 - показник p за модулем q;

6) $G = \langle a\rangle \setminus \langle x\rangle$, $/a/ = pr$, p і r - необов'язково різні непарні прості числа, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$;

7) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle$;

8) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = p$ - непарне просте число, $/x/ = q^\beta$, $\beta \geqslant 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ - квазінентральна підгрупа з G;

9) $G = (R \times P) \lambda \langle x \rangle$, $/R/ = r$, $/P/ = p^2$, $/x/ = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod q$, 2 – показник p за модулем q, $p \neq 3$, $q > 2$, $R \lambda \langle x \rangle$ і $P \lambda \langle x \rangle$ – нільпотентні групи Міллера – Морено.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді завдяки лемі 1.2.2 G – нільпотентна локально ступінчаста УЦН[ ]-група, яка задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. Ясно, що нільпотентна УЦН( )-група є нільпотентною локально ступінчастою УЦН( ]-групою.

Нехай G – нільпотентна УЦН( )-група. Тоді G задовольняє умову теореми 3.1.2 і є групою одного з типів 1 – 4 згаданої теореми. Звідси G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів теореми 2.3.1: 1; 10; 11; 14. Тоді G – група одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2 відповідно і знову G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 3; 4; 7, $/P'/ = p$; 8, $/z/ = r \neq p$; 9; 12; 13; 16 теореми 2.3.1 є відповідно групою одного з типів 2 – 9 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 2, 5, 6, 17 теореми 2.3.1 існує ненормальна в G підгрупа $\langle x \rangle$ порядку qr чи q^β, $\beta > 1$, яка не має нормальних в G максимальних підгруп, тобто $\langle x^{q^{\beta-1}} \rangle \not\lhd G$, що суперечить лемі 3.1.1. Отже, G не може бути групою згаданих типів.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.3.1 і $/P'/ \neq p$. Тоді $P' = 1$ і P – мінімальна нормальна підгрупа в G типу (p,p,p), що суперечить лемі 3.1.1. Отже, група G типу 7 теореми 2.3.1 при $/P'/ = p$ не може бути УЦН( ]-групою.

Нехай G – група типу 8 теореми 2.3.1. За попереднім, $/z/ = r \neq p$. Тоді $G' = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – мінімальна нормальна підгрупа в G, $/a/ = /b/ = p$ і G містить ненормальну в G підгрупу $B = \langle a \rangle \times \langle bz \rangle$, яка має з $Z(G)$ одиничний перетин. Покладемо $A = 1$. Тоді $\langle A;B] \ni N \lhd G$. Очевидно, що $/N/ = p$. Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle a \rangle \not\lhd G$. Звідси $N \cap \langle a \rangle = 1 = G' \cap N$. Але тоді $N \not\leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, група G не може бути УЦН( ]-групою.

Нехай, нарешті, G – група типу 15 теореми 2.3.1. Тоді $G = P \lambda \langle x \rangle$, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – силовська p-підгрупа з G, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = q$, $w(P) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \lhd G$, $w(P) \lambda \langle x \rangle$ – нільпотен-

тна група Міллера - Морено. Завдяки лемі 3.1.1 $\langle a^p \rangle \lhd G$. Очевидно, що $\langle a^p \rangle \leqslant w(P)$ - мінімальна нормальна підгрупа типу (p,p) як в $w(P) \lambda \langle x \rangle$, так і в G, що неможливо. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Для доведення достатності установимо спочатку справедливість наступної леми.

Лема 3.2.2. Нехай G - група одного з типів 2 - 9 теореми 3.2.2. Тоді G - нільпотентна скінченна не більше ніж трипримарна група з нормальною силовською p-підгрупою порядку p^2 чи p^3 і не більше ніж біпримарним холлівським комутантом G' порядку p^2, pr чи p^2r, p і r - необов'язково різні прості числа і справедливі наступні твердження:

1) для будь-якого простого s з $\pi(G)$ і s-елемента g з G $\langle g^s \rangle \lhd G$. Співвідношення $g^s \notin Z(G)$ можливе лише в групі G типу 6 при $s = p = r$;

2) група G тоді і тільки тоді трипримарна, коли вона група одного з типів: 5; 6, $r \neq p$; 13;

3) комутант G' групи G є циклічною групою, коли G - група типу 6; G' тоді і тільки тоді непримарна група, коли G група типу 6, $p \neq r$; G' тоді і тільки тоді неабелева група, коли G - група типу: 2, тобто G' - група кватерніонів порядку 8; 4, тобто G' - неабелева група порядку p^3 і експоненти p, $p > 3$;

4) група G містить нормальну в G нільпотентну підгрупу M, $[G:M] = q$, $M = G' \times \langle z \rangle$, $z \in Z(G)$, $G = M\langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $x^q \in \langle z \rangle$, $q \notin \pi(G)$;

5) $G = G' \lambda \langle g \rangle$, де $|g| = q^\beta r^\gamma$, $\beta > 0$, $\gamma \in \{0, 1\}$ і $g^{q^\beta} \in Z(G)$.

Доведення. Загальне твердження леми випливає із безпосереднього розгляду наведених в лемі типів груп.

Нехай s - просте число з $\pi(G)$ і g - s-елемент з G. При $|g| \in \{1, s\}$ легко бачити, що $g^s \in Z(G)$ і тому $\langle g^s \rangle \lhd G$. Нехай $|g| > s$. Тоді, очевидно, в групі G кожного з типів 2 - 5, 7 - 9 $g^s \in Z(G)$ і тому $\langle g^s \rangle \lhd G$. В групі G типу 6 при $p \neq r$ $s = q$ і $g^q \in Z(G)$ і, значить, $\langle g^q \rangle \lhd G$. При $p = r = s$ $g = a$ і $\langle g^p \rangle \lhd G$. Отже, твердження 1 леми доведене.

Твердження 2, 4 і 5 леми очевидні. Ясно, що лише в групі G типу

б G' – циклічна група, а G' – неабелева група тільки в групах G типів 2 чи 4. Комутант G' є непримарною групою, лише в групі G типу 9 і може бути таким в групі G типу 6 при $r \neq p$. Твердження 3 леми доведене. Лема доведена.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай G – група типу 1 розглядуваної теореми. Тоді за лемою 1.2.2 G – УЩН( )-група одного з типів. 1 – 4 теореми 3.1.2. За твердженням згаданої теореми G – локально ступінчаста. Отже, достатність для груп типу 1 доведена.

Нехай далі G – група типу 2 – 9 розглядуваної теореми. Завдяки лемі 3.2.2 G – скінченна нільпотентна, а тому і локально ступінчаста група. Залишається показати, що G – УЩН( )-група. Дійсно, нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $\langle A;B\rangle \ni N \lhd G$. Якщо $B \lhd G$, то $N = B$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $B \not\lhd G$. Звідси $B \not\lhd G$ і $G' \not< B$. Завдяки лемі 3.2.2 $/G'/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. Покладемо $T = G' \cap B$. Тоді $T \lhd B$ і $T < G'$. В силу леми 3.2.2 T – холлівська підгрупа з B. Оскільки $G' \not< B$, то $/T/$ – одиниця, просте число чи добуток двох простих чисел.

Нехай G – група типу 4 чи 2 при $\beta = 1$ розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^3q$ і $/B/$ – добуток двох чи трьох простих чисел. З вибору B $/B/ \neq p^3$. Оскільки G – група Шмідта з $/P'/ = p$, то в силу теореми 2.1.1 з [40] G не містить підгруп порядку p^2q. З цього випливає, що $/B/ \in \{pq, p^2\}$ і тому $/A/ = 1$. Ясно, що підгрупа B порядку p^2 містить $\Phi(P)$. В групі Шмідта G підгрупа B порядку pq теж містить $\Phi(G)$. Звідси $\langle A;B\rangle \ni N = \Phi(P) \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група одного з типів: 6; 8; 2 при $\beta = 2$ і $/B/$ – ділиться на 9. В групі G кожного з типів 6 та 8 підгрупа $M = G' \times \langle x^q\rangle$ – максимальна квазіцентральна підгрупа з G і, значить, $B \not< M$. Звідси B містить силовську q-підгрупу з G. Отже, в групі G кожного із розглядуваних типів груп без порушення загальності можна вважати, що $x \in B$ і тому $B = T \times \langle x\rangle$, де T – власна підгрупа силовської p-підгрупи $G' = P$ з G. В групі G кожного з типів 6 та 8 розглядуваної теореми $/P/ = p^2$ і, значить, $/T/ < p^2$. В групі Шмідта G типу 2 при $\beta = 2$ розглядуваної теореми завдяки теоремі 2.1.1 з [40] немає підгруп порядку $p^2/x/$ і тому теж $/T/ < p^2$. Покладемо $N = T \times \langle x^q\rangle$. Ясно, що N – максимальна підгрупа з B. В силу теореми 1.1.1 N містить всі власні немаксимальні підгрупи з B. Об-

кільки $/T/ < p^2$, то, очевидно, $T \lhd G$. Звідси $(A;B] \ni N = T \times \langle x^{p^2} \rangle \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група типу 2 при $p = 2$ і $/B/$ – не ділиться на 9. Тоді $B < M = P \times \langle x^3 \rangle$, $\Phi(P) \times \langle x^3 \rangle \leqslant Z(G)$. Очевидно, що $B = \langle g \rangle$, $g^2 \in Z(G)$ і B – підгрупа типу 4 теореми 1.1.1. Звідси $(A;B] \ni N = \langle g^2 \rangle \lhd G$, що й треба було довести.

Отже, достатність для груп кожного з типів 2, 4, 6, 8 доведена.

Нехай G – група одного з типів 3 чи 7 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ \in \{p^2q, p^2q^2\}$ і силовська p-підгрупа $P = G^1$ має порядок p^2. Звідси $/T/ < p^2$. За вибором B $/B/ \in \{pq, pq^2, q^2\}$.

Нехай $/x/ = q$. Тоді $/B/ = pq$, $/A/ = 1$, $G = PB$ і, значить, $T \lhd G$. Звідси $(A;B] \ni N = T \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $/x/ = q^2$. Тоді $B \cap Z(G) = \langle x^{q^2} \rangle$. При $/B/ = pq$ чи $/B/ = q^2$ маємо $/A/ = 1$ і $(A;B] \ni N = \langle x^{q^2} \rangle \lhd G$. Нехай $/B/ = pq^2$. Тоді $G = PB$ і $T \lhd G$. Покладемо $N = T \times \langle x^{q^2} \rangle$. Тоді завдяки теоремі 1.1.1 $(A;B] \ni N = T \times \langle x^{q^2} \rangle \lhd G$. Отже, достатність для груп кожного з типів 3, 7 розглядуваної теореми доведена.

Нехай, нарешті, G – група одного з типів 5 чи 9 розглядуваної теореми. Тоді $/G/ = p^2qr$, p, q і r – різні прості числа, силовські p-підгрупа P та r-підгрупа R нормальні в G і G не містить підгруп порядку pq. За вибором B $/B/ \in \{qr, p^2q, pr\}$.

Нехай $/B/$ – ділиться на r. Тоді $/B/ \in \{pr, qr\}$, $/A/ = 1$, $(A;B] \ni N = R \lhd G$. Нехай, нарешті, $/B/ = p^2q$. Тоді B – нільпотентна група Міллера – Морено з нормальною в G силовською p-підгрупою P порядку p^2 і максимальною в B силовською q-підгрупою порядку q. Звідси $A \leqslant P$. Оскільки P – максимальна підгрупа з B і $A < P$, то $(A;B] \ni N = P \lhd G$. Достатність для розглядуваних типів груп доведена. Теорема доведена.

Наслідок 3.2.1. Локально ступінчасті неделекіндові УШН( )-групи G вичерпуються групами типів 1 – 13 теореми 3.2.1 та групами типів 1 – 9 теореми 3.2.2. Локально ступінчасті УШН( )-групи, що не є УШН( )-групами, вичерпуються групами типів 2 – 13 теореми 3.2.1 та групами типів 2 – 9 теореми 3.2.2.

Всі групи такого роду можуть бути 20 вищенаведеними типами груп, вибраних з теорем 2.2.3 та 2.3.1 відповідно:

I. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.2.3):

1) G – група типу 6;

2) G – група типу 7;

3) G – група типу 12. G містить неабелеву підгрупу порядку p^3 і експоненти p;

4) G – група типу 13;

5) G – група типу 14;

6) G – група типу 16;

7) G – група типу 19;

8) G – група типу 20;

9) G – група типу 21;

10) G – група типу 22, $/G/ \in \{2^5, 2^6\}$;

11) G – група типу 23, $/G/ = 2^6$;

12) G – група типу 25.

II. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них в теоремі 2.3.1);

13) G – група типу 3;

14) G – група типу 4;

15) G – група типу 7, $/P^1/ = p$;

16) G – група типу 8, $r \neq p$;

17) G – група типу 9;

18) G – група типу 12;

19) G – група типу 13;

20) G – група типу 16.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Можливі два випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – неінільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.2.1 і може бути групою одного з типів 1 – 13 згаданої теореми. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.2.2 і може бути групою одного з типів 1 – 9 згаданої теореми. Перша частина наслідку доведена.

Нехай G – група, що задовольняє другу частину наслідку. Тоді, як і раніше, G – група одного з типів 2 – 13 та 2 – 9 теорем 3.2.1 та 3.2.2 відповідно. Зрозуміло, що група G кожного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1 є групою деякого з типів теореми 2.2.3 з певними обмеженнями чи без них, а група G кожного з типів 2 – 9 теореми 3.2.2 є групою деякого з типів теореми 2.3.1 з певними обме-

женнями чи без них.

При розгляді груп G кожного з типів 2 – 13 теореми 3.2.1 легко бачити, що вони будуть відповідно групами типів 1 – 12 розглядуваного наслідку.

При розгляді груп G кожного з типів 2 – 9 теореми 3.2.2 одержимо, що G – група одного з типів 13 – 20 розглядуваного наслідку відповідно. Наслідок доведений.

3.3. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЦН( )-ГРУП

Т е о р е м а 3.3.1 Нільпотентні неабелеві УЦН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) G – нільпотентна неабелева УЦН( )-група, тобто G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1;

2) $G = ((\langle u\rangle \setminus \langle v\rangle) \times \langle a\rangle) \setminus \langle b\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = [a,b] = u^{p^{\Delta-1}}$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

3) $G = CF$, C – локально циклічна p-група, чи група кватріоніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $C \cap F = \langle c\rangle$, $F = (((\langle a\rangle \times \langle u\rangle) \setminus \langle v\rangle) \times \langle x\rangle) \setminus \langle b\rangle$, $/u/ = /v/ = /c/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[u,b] = [v,b] = 1$;

4) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \setminus \langle z\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = /z/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] = \langle a^4\rangle$;

5) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle z\rangle)$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = /z/ = 3$, $[a,x] = b$, $[a,z] = [b,x] = a^3 = x^6$, $[b,z] = 1$;

6) $G = U \times X$, U і X – групи кватріоніонів порядку 8.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Якою G – група одного з типів: 1 – 3; 10, $x \in Z(G)$, $/b/ < 16$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, U – циклічна група; 27, то G – група одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1 відповідно і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 4 чи 5 теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 2 чи 3 розглядуваної теореми відповідно.

Група G кожного з типів 6 – 9 теореми 2.2.3 має циклічний комутант G' порядку p^2 і такий породжуючий елемент d, що G містить

підгрупу $B = G^1 \setminus \langle d \rangle$. Зрозуміло, що $/[\langle d \rangle; B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[\langle d \rangle; B) \ni N \lhd G$. Звідси $[\langle d \rangle, G] \leqslant \Phi(G^1) \setminus \langle d \rangle$. В групі G кожного із розглядуваних типів $[\langle d \rangle, G] = G^1$. Суперечність. Отже, розглядувані типи груп не можуть бути УШН( )-групами.

Якщо G – група типу 10, $z \in Z(G)$, $/b/ < 16$ чи G – група типу 11, $z \in Z(G)$, то за попереднім, G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Припустимо, що G – група типу 10, $/b/ > 8$. Тоді $z = 1$ і G містить породжуючий елемент $d = ab^{2^{n-3}}$, G^1 – циклічна група порядку 4, $G^1 \cap \langle d \rangle = 1$. Тепер, як і для груп типу 6 – 9 теореми 2.2.3, одержимо суперечність. Таким чином, $/b/ < 16$.

Нехай G – група типу 10, $/b/ < 16$ чи 11, $z \notin Z(G)$ теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 4 та 5 даної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 12 теореми 2.2.3. Зрозуміло, що G – неметациклічна група. Нехай всі власні підгрупи з G метациклічні. Тоді G задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою типу 2 згаданої теореми. Звідси G – група типу 5 розглядуваної теореми. Припустимо, що G містить власну мінімальну неметациклічну підгрупу M. Завдяки теоремі 1.3.3 $/M/ = p^3$, $\exp(M) = p$, $M = G^1 \setminus \langle y \rangle$, $/y/ = p$, $y \in G \setminus \Phi(G)$. Ясно, що $/[\langle y \rangle; M]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[\langle y \rangle; M) \ni N \lhd G$. Оскільки G – 2-породжена група, то $y \notin Z(G)$. Звідси $/N/ > p$ і, значить, $/N/ = p^2$. Зрозуміло, що G/N – абелева група і тому $G^1 \leqslant N$, що неможливо. Отже, група G типу 12 теореми 2.2.3 є групою типу 5 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 13, 14, 16, 19 – 21, 25 теореми 2.2.3 містить підгрупу $B = U\langle x \rangle$, де $U = G^1$, $[\langle x \rangle, G] = G^1$ і $/[\langle x \rangle; B]/ > 2$. За означенням УШН( )-груп $[\langle x \rangle; B) \ni N \lhd G$ і $G^1 \nleqslant N$, що неможливо. Тому G не може бути групою жодного із розглядуваних типів.

В групі G кожного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3 покладемо $t = b$, $B = \langle a^2 \rangle\langle x \rangle$ і як і вище, прийдемо до суперечності.

Нехай G – група типу 26, U – циклічна група чи типу 27 теореми 2.2.3. Тоді G – група типу 1.

Нехай G – група типу 28 і U – група кватерніонів порядку 8. Якщо $[U, X] = 1$, то G – група типу 6 розглядуваної теореми. Нехай $[U, X] \neq 1$. Тоді як і при доведенні необхідності теореми 3.1.1 для груп цього типу одержимо, що G – група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 28 теореми 2.2.3. Покладемо $A = \langle x \rangle$, $B =$

$= \langle x\rangle\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle = \langle x\rangle G'$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[A;B) \ni N \lhd G$. Ясно, що $N \not\leq G'$. Але $[\langle x\rangle, G] = G'$, що суперечить умові $N \not\leq G'$. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 6 теореми. Очевидно, що G - нільпотентна неделекіндова група. Покажемо, що G - УШН( )-група, тобто $[A;B) \ni N \lhd G$ для $/[A;B]/ > 2$. Для груп G типу 1 це встановлено в теоремі 3.1.1. Тому в подальшому G - група типу 2 - 9 розглядуваної теореми. Якщо $A \lhd G$, то $N = A$ і все доведено. Отже, $A \not\lhd G$. Звідси $/A/ > 1$ і $A \not\leq G'$. При $B = G$ в нільпотентній p-групі G завжди знайдеться така нормальна підгрупа N, що $[A;B) \ni N$ [41]. Тому в подальшому $B < G$.

Нехай G - група одного з типів 2 чи 3 теореми. Тоді $/G'/ = p$, $G' \cap A = 1$. Якщо $G' \leqslant B$, то $[A;B) \ni N = G'$ і $A \lhd G$, що й треба було довести. Отже, $B \cap G' = 1$ і тому $B' = 1$, $/B/ \in \{p^3, p^4\}$. В G існує підгрупа V, яка містить G', така, що $w(V) = G'$ і G/V - елементарна абелева група. Ясно, що $V \cap B = 1$ і, значить, B - теж елементарна абелева група. Зауважимо, що $w(Z(G)) = G' = w(V)$, V - локально циклічна p-група чи група кватеріонів порядку 8.

Припустимо, що $V \setminus B = G$. Оскільки B - елементарна абелева група порядку p^3 чи p^4, V - локально циклічна p-група чи група кватеріонів порядку 8, то B не може бути підгрупою з AutV [41]. З цього випливає, що $z \in B \cap Z(G)$ і $/z/ = p$. Тому $w(Z(G))$ містить $G' \times \langle z\rangle$, що неможливо. Отже, $V \setminus B < G$ і, значить, G - група типу 3, $/B/ = p^3$. Зрозуміло, що G містить підгрупу $U = V \times \langle u\rangle \times \langle a\rangle$, $[G:U] = p^2$. Оскільки $/B/ = p^3$, то $G = UB$. Очевидно, що $w(U) \leqslant Z(G)$, тому $z \in U \cap B \cap Z(G)$, $/z/ = p$ і, значить, $w(Z(G))$ містить $G' \times \langle z\rangle$, що неможливо. Таким чином, група G кожного з типів 2 чи 3 є УШН( )-групою.

Нехай $G = U \setminus \langle z\rangle$ - група типу 4 теореми. Тоді $U = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $/a/ = /b/ = 8$, $/\langle a\rangle \cap \langle b\rangle/ = /z/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b,z] = 1$, $[a,z] = a^4$, $w(G) = \langle c\rangle \times \langle d\rangle \times \langle z\rangle$, $c = a^4 \in Z(G)$, $d = a^2b^2$ і для будь-якого елемента u з $w(G)$ маємо $\langle c\rangle\langle u\rangle \lhd G$. Зауважимо, що $c \in V$, де V - будь-яка підгрупа V з U і $/V/ > 2$. Ясно, що $/G/ = 2^6$ і $\exp(G) = 8$. Звідси $/B/ \in \{2^3, 2^4, 2^6\}$. Нехай $X = U \cap B$. Тоді $/X/ > 2$ і за попереднім $c \in X$. Припустимо, що $/A/ = 2$. Оскільки $A \not\leq G$, то $\langle c\rangle \cap A = 1$. Тоді $[A;B) \ni N = \langle c\rangle \times A \lhd G$, що й треба було довести. Отже, в подальшому $/A/ > 2$. Тоді $/B/ \in \{2^4, 2^6\}$ і оскільки $\exp(G) =$

= 8, то B - нециклічна група. Зауважимо, що G не містить підгрупи кватерніонів порядку 8, D = <c> x <d> ◁ G і G/D - гамільтонова група. Зрозуміло, що /X/ > 4.

Нехай exp(A) = 2. Тоді <c>A = N ◁ G і N ∈ [A:B), що й треба було довести. Отже, в подальшому exp(A) > 2. За попереднім, c ∈ A. Якщо $a^2 \in B$, то $\langle a^2\rangle = G'$. Покладемо $N = \langle a^2\rangle A$. Тоді N ◁ G і [A; B)∋ N, що й треба було довести. Отже, можна вважати, що $B \cap \langle a\rangle =$ = <c>. Оскільки /G/<a>/ = 8, /B∩<a>/ = 2 і /B/ > 8, то /B/ = 16, /X/ = 8, [B:X] = 2 і <a>∩ X = <c>.

Припустимо, що d ∈ A. Тоді, за попереднім, D = <c> x <d> ◁ G, D ⩽ A, G/D - гамільтонова група і, значить, A ◁ G, що не так. Таким чином, d ∉ A. Припустимо, що d ∈ B. Тоді N = DA = A(<c> x x <d>) = A ⟩ <d> ◁ G і тому [A;B)∋ N, що й треба було довести. Нехай тепер d ∉ B. Звідси X має тільки одну інволюцію. Завдяки теоремі 12.5.1 з [44] X = <x>, /x/ = 8, v(<x>) = <c>. Без порушення загальності можна вважати, що B = <x> ⟩ <z>. Зрозуміло, що $x^{-1}ax = a^{-1}$, $\langle x^2\rangle = Z(G)$. Нехай $\langle x^2\rangle$ x <z> = N = $\langle x^2\rangle$w(B) = $\langle x^2\rangle$(<c> x x <z>). Тоді, за попереднім, <c> x <z> ◁ G і тому N ◁ G. Завдяки теоремі 1.1.1 [A;B)∋ N. Отже, група G типу 4 є УШН( )-групою.

Нехай G = (<a> x <b>)(<x> x <z>) - група типу 5 теореми. Тоді /G/ = 3^6, $a^3 = x^6$, /x/ = 9, $G' = \langle a^3\rangle$ x <b>, w(G) = G' x <z>, Z(G) = w(Z(G)) = <c> = $\langle a^3\rangle$, для будь-якого елемента v з w(G) <c>. <v> ◁ G, exp(G) = 9 і для будь-якого елемента u з G, /u/ = 9 маємо w(<u>) = <c>. Зрозуміло, що /B/ ∈ $\{3^3, 3^4\}$ і c ∈ B. Нехай /A/ = 3. За попереднім, <c>A = N ◁ G і тому [A;B)∋ N, що й треба було довести. Припустимо, що /A/ > 3. Тоді /A/ = 9, /B/ = 3^4, $G' \not\leqslant B$. Якщо c ∈ A, то покладемо N = G'A. Звідси [A;B)∋ N ◁ G, що й треба було довести. Нехай c ∉ A. Тоді exp(A) = 3. Покладемо <c> x A = = N. Звідси [A;B)∋ N = w(G) ◁ G і таким чином, група G типу 5 теореми є УШН( )-групою.

Нехай G = U x X - група типу 6 теореми. Тоді U і X - група кватерніонів порядку 8, /G/ = 2^6, Z(G) = w(G) = Φ(G) = w(U) x w(X) = = G', exp(G) = 4. За вибором A exp(A) > 2. Звідси /A/ > 2 і /B/ > > 8. Оскільки exp(G) = 4, то B містить G'. Знову в силу вибору A G' ∉ A. Але A містить u і /u/ = 4. Очевидно, що $\langle u^2\rangle = G' \cap A$ і тому [A;B)∋ N = G'A ◁ G. Отже, група G типу 6 є УШН( )-групою. Достатність доведена. Теорема доведена.

Т е о р е м а 3.3.2. Нільпотентні локально ступінчасті УШН( )-групи G вичерпуються групами типів:

1) G – нільпотентна УШН( )-група, тобто група G одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2;

2) $G = \langle a \rangle \setminus \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

3) $G = P \setminus \langle x \rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено, P – група типу (p,p), $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \setminus \langle x \rangle$, P – група типу (p,p), $|x| = qr$, $P \setminus \langle x^q \rangle$ та $P \setminus \langle x^r \rangle$ – нільпотентні групи Міллера – Морено;

5) $G = P \setminus \langle x \rangle$, P – група типу (p,p), $|x| \in \{q^2, q^3\}$, $P \setminus \langle x^q \rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено;

6) $G = (P \setminus \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – група типу (p,p), $P \setminus \langle x \rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено, $|x| = q$, $|z| = r$, $p \neq r$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми.

Якщо G – група одного з типів: 1; 10; 11; 14 теореми 2.3.1, то G – група одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2 і тому G – група типу 1 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 2 чи 4 теореми 2.3.1 є групою типу 2 чи 3 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай G – група типу 5 теореми 2.3.1 і $|P| = p^3$. Тоді $|[A;P]| > 2$, де $|A| = p$ і за означенням УШН( )-груп $[A;P] \ni N \lhd G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G. З цього випливає, що P – група типу (p,p) і G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 6 теореми 2.3.1. Як і вище, маємо, що P – група типу (p,p) і G – група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.3.1. Тоді, як і в групі G типу 5, $[A;P] \ni N \lhd G$, $|A| = p$, $A \not\lhd G$. Але тоді $|N| = p^2$ і P – нормальна силовська p-підгрупа експоненти p групи Шмідта G. За будовою груп Шмідта (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [40]) P не містить нормальних в G підгруп порядку p^2. Отже, G не може бути групою типу 7 теореми 2.3.1.

Нехай G – група типу 8 теореми 2.3.1. Припустимо, що $|z| = p$. Позначимо через $B = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. При цьому B – група типу

(p,p,p). Нехай $A = \langle az\rangle$. Ясно, що $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[A;B)\ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $/N/ \in \{p, p^2\}$. З будови груп Міллера – Морено $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$ (див., наприклад, твердження 1.1.1 з [16]) випливає, що 2 – показник p за модулем q, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – мінімальна нормальна підгрупа з G. Легко встановити, що $N \not\leqslant \langle a\rangle \times \langle b\rangle$. Тоді $/(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\cap N/ \leqslant p$. Оскільки $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – мінімальна нормальна підгрупа з G, то $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\cap N = 1$ і тому $/N/ = p$. Отже, $N = A = \langle az\rangle$. Далі легко встановити, що $[A,\langle x\rangle] \leqslant \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ і $[A,\langle x\rangle] \neq 1$. З іншого боку, $[A,\langle x\rangle] \leqslant G'\cap A = 1$, що неможливо. Це означає, що $/z/ = r \neq p$ і, значить, G – група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай G – група одного з типів 9, 12, 13, 15 – 17 теореми 2.3.1. Тоді $G = G' \lambda \langle x\rangle$, $\langle x\rangle$ містить ненормальну в G силовську q-підгрупу A, $[G',A] = G'$. Покладемо $B = G' \lambda A$. Тоді $/[A;B]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[A;B)\ni N \lhd G$. З цього випливає, що $[N, G']$ містить $[A,G']$ і строго належить G', що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай, нарешті, G – група типу 3 теореми 2.3.1. Тоді $/[\langle x\rangle;G]/ > 2$ і за означенням УШН( )-груп $[\langle x\rangle;G)\ni N \lhd G$, що в групі Шмідта G неможливо (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [40]). Отже, G не може групою типу 3 теореми 2.3.1. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 6 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – нільпотентна скінченна, а тому локально ступінчаста група. Покажемо, що G – УШН( )-група. Дійсно, для груп G типу 1 це встановлено в теоремі 3.1.2 Тому в подальшому будемо вважати, що G – група одного з типів 2 – 6 розглядуваної теореми. Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B)\ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, то покладемо $N = A$ і все доведено. Тому $A \not\lhd G$. Звідси $A \neq 1$, $G' \not\leqslant A$ і $/B/$ – ділиться на добуток трьох простих чисел.

В групі G типу 2 розглядуваної теореми $B = G$, $/A/$ – просте число. Покладемо $N = G'A$. Тоді $[A;B)\ni N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G – група одного з типів 3 – 6 розглядуваної теореми. Тоді G' – мінімальна нормальна підгрупа з G типу (p,p), G' – силовська p-підгрупа з G і $G = G' \lambda X$, де $X = \langle x\rangle$ – холлівська підгрупа з G. Без порушення загальності можна вважати, що $A = P_1 \lambda \langle x_1\rangle$ і $B = P_2 \lambda \langle x_2\rangle$, де $P_1 = A\cap G'$, $\langle x_1\rangle = A\cap X$, $P_2 = B\cap G'$,

$\langle x_2 \rangle = B \setminus X$.

Нехай $P_2 = 1$. Тоді $B = \langle x_2 \rangle$ і $[G:G^1]$ – ділиться на добуток трьох простих чисел. А це можливо лише в групі G типу 5; у якої $B = \langle x \rangle$, $/x/ = q^3$ і $A = \langle x^{q^2} \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A. Отже, $P_2 \neq 1$. Зрозуміло, що $/P_2/ \in \{p, p^2\}$. Ясно, що кожний елемент із X індукує на G^1 незвідний або тотожний автоморфізм.

Припустимо, що $/P_2/ = p$. Тоді x_2 індукує на P тотожний автоморфізм і тому $x_2 \in Z(G)$. Але тоді $/x_2/ \in \{1, q, r\}$ і $/B/$ – не ділиться на добуток трьох простих чисел, що не так. Отже, $/P_2/ = p^2$. Ясно, що $/P_1/ \in \{1, p\}$.

Нехай спочатку $/P_1/ = 1$. Якщо $G^1 \setminus A < B$, то $G^1 \setminus A = N$ і $[A;B) \ni N \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $G^1 \setminus A = B$. Тоді $A = \langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle$. Оскільки $A \not\lhd G$, то x_1 індукує на G^1 незвідний автоморфізм. Звідси A – максимальна підгрупа з B, що не так. Таким чином, $/P_1/ = p$. Як і раніше, $x_1 \in Z(G)$. Якщо $/x_1/ = 1$, то $[A;B) \ni N = G^1 \lhd G$, що й треба було довести. Нехай $/x_1/ \neq 1$. Тоді $/x_1/ \in \{r, q\}$ і $/B/$ – ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Покладемо $N = G^1 \times \langle x_1 \rangle$. Тоді $[A;B) \ni N \lhd G$. Отже, група G кожного із розглядуваних типів є УШН( )-групою. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.3.1. Локально ступінчасті неделекіндові УШН( )-групи G вичерпуються групами типів 1 – 6 теореми 3.3.1 та групами типів 1 – 6 теореми 3.3.2. Локально ступінчасті УШН( )-групи, що не є УШН( )-групами, вичерпуються групами типів 2 – 6 теореми 3.3.1 та групами типів 2 – 6 теореми 3.3.2.

Всі групи такого роду можуть бути 10 нижченаведеними типами груп, вибраних з теорем 2.2.3 та 2.3.1 відповідно:

I. Нільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.2.3):

1) G – група типу 4;

2) G – група типу 5;

3) G – група типу 10, $z \notin Z(G)$;

4) G – група типу 11, $z \notin Z(G)$;

5) G – група типу 26, U – група кватеріонів, $[U,X] = 1$.

II. Неянільпотентні групи (відповідні групи з обмеженнями чи без них з теореми 2.3.1):

6) G – група типу 2;

7) G – група типу 4;
8) G – група типу 5, G^1 – група типу (p,p);
9) G – група типу 6, G^1 – група типу (p,p);
10) G – група типу 8, $p \neq r$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Можливі два випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 6 згаданої теореми. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.2 і може бути групою одного з типів 1 – 6 згаданої теореми. Перша частина наслідку доведена.

Нехай G – група, що задовольняє другу частину наслідку. Тоді, як і раніше, G – група одного з типів 2 – 6 та 2 – 6 теорем 3.3.1 та 3.3.2 відповідно. Зрозуміло, що група G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.1 є групою деякого з типів теореми 2.2.3 з певними обмеженнями чи без них, а група G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.2 є групою деякого з типів теореми 2.3.1 з певними обмеженнями чи без них.

При розгляді типів груп G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.1 легко бачити, що вони будуть відповідно групами типів 1 – 5 розглядуваного наслідку.

При розгляді типів груп G кожного з типів 2 – 6 теореми 3.3.2 одержимо, що G – група одного з типів 6 – 10 розглядуваного наслідку відповідно. Наслідок доведений.

3.4. ДЕЯКІ НАСЛІДКИ

Т е о р е м а 3.4.1. Всі не УЦН( )-групи, які належать перетину класів локально ступінчастих УЦН( )- та УЦН( )-груп вичерпуються групами типів:

1) $G = P \setminus \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Мілера – Морено, P – група типу (p,p), $/x/ \in \{q, q^2\}$;

2) $G = (P \setminus \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \setminus \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Мілера – Морено, P – група типу (p,p), $/x/ = q$, $/z/ = r$, $r \neq p$

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Оскільки G не УЩН( )-група, то G - неделекіндова група. Можливі випадки: 1) G - нільпотентна група; 2) G - ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.1 і може бути групою одного з типів 2 - 6 згаданої теореми.

Група G кожного з типів 2 - 5 згаданої теореми містить підгрупу B типу (p,p), для якої $G' \cap B = B \cap Z(G) = 1$. Оскільки G - УЩН( )-група, то покладемо $A = 1$ і за означенням УЩН( )-груп $(A;B)^{\mathfrak{N}} N \lhd G$. Звідси $/N/ > 1$ і за попереднім, $N \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $B \cap Z(G) = 1$. Тому G не може бути групою згаданих типів.

Нехай G - група типу 6 теореми 3.3.1. Тоді $G = U \times X$, де $U = \langle a,b \rangle$ та $X = \langle x,y \rangle$ - групи кватерніонів порядку 8. Покладемо $Q = \langle ax,by \rangle$. Легко бачити, що Q - група кватерніонів порядку 8 і Q не містить нормальних в G підгруп порядку більше 2. Оскільки за умовою теореми G - УЩН( )-група і $/[\Phi(Q);Q]/ > 2$, то $(\Phi(Q);Q]^{\mathfrak{N}} N \lhd G$, що суперечить властивості підгрупи Q. Отже, G не може бути групою типу 6 теореми 3.3.1.

Таким чином, G не може бути нільпотентною групою. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.2 і може бути групою одного з типів 2 - 6 згаданої теореми. Якщо G група одного з типів 3 чи 6 згаданої теореми, то G - група типу 1 чи 2 розглядуваної теореми відповідно.

В групі G кожного з типів 2, 4, 5 є циклічна холлівська ненормальна в G підгрупа $\langle x \rangle$, $\langle x \rangle$ містить власну немаксимальну підгрупу A, що породжується всіма нормальними в G підгрупами з $\langle x \rangle$. За умовою теореми $(A;\langle x \rangle]^{\mathfrak{N}} N \lhd G$, що суперечить властивостям підгруп A та $\langle x \rangle$. Отже, G не може бути групою жодного із розглядуваних типів. Випадок 2 розглянутий. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G - ненільпотентна скінченна, а тому локально ступінчаста ненадрозв'язна група. За теоремою 3.1.2 G не може бути УЩН( )-групою. Оскільки група G типу 1 чи 2 розглядуваної теореми є групою відповідно типу 3 та 6 теореми 3.3.2, то G - УЩН( )-група. Група G кожного з розглядуваних типів є групою одного з типів 3 та 5 теореми 3.2.2 відповідно і тому G - УЩН( ) група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.4.1. Класи довільних і навіть локально ступінчастих УШН( )- і УШН[ )-груп не співпадають і не містяться один в одному. Їх перетин містить клас всіх УШН( )-груп, але ним не вичерпується. Перетин нільпотентних класів УШН( )- та УШН[ )-груп співпадає з класом нільпотентних УШН( )-груп.

Доведення. За теоремою 3.4.1 $К(УШН(\ ]) \cap К(УШН[\ )) \subseteq К(УШН(\ ))$. Попереднє співвідношення справедливе навіть при умові локальної ступінчастості розглядуваних груп. За згаданою теоремою для нільпотентних груп $К(УШН(\ ]) \cap К(УШН[\ )) = К(УШН(\ ))$. Група G типу 2 теореми 3.2.2 належить $К(УШН(\ ])$, але не належить $К(УШН[\ ))$. Група G типу 2 теореми 3.3.2 належить $К(УШН[\ ))$, але не належить $К(УШН(\ ])$. Звідси $К(УШН(\ ])$ не належить $К(УШН[\ ))$ і навпаки. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 3.4.2. Клас УШН[ ]-груп містить об'єднання класів УШН[ )- та УШН( ]-груп, але ним не вичерпується.

Локально ступінчасті УШН[ ]-групи, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих УШН[ )- та УШН( ]-груп вичерпуються групами типів:

I. Нільпотентні групи:

1) $G = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-2}}$;

2) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = p$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-2}}$, $\langle a\rangle \lhd G$;

3) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 3$, $|d| = 4$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

4) $G = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|c| = |b| = |a| = |x| = p$, $p > 3$, $[a,b] = b$, $[b,x] = c$, $[c,x] = 1$;

5) $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = |x| = p$, p - непарне просте число, $[a,b] = a^{sp}$, $0 < s < p$, $[a,b] = b$, $[b,x] = 1$;

6) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{9}$;

8) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{9}$;

9) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap \langle x\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$.

II. Ненільпотентні групи:

10) $G = P \setminus \langle x\rangle$, P - група типу (p,p,p), $|x| = qr$, p, q, r -

попарно різні прості числа, $P \lambda \langle x^{q^2} \rangle$ та $P \lambda \langle x^{r^2} \rangle$ - групи Міллера - Морено;

11) $G = P \lambda \langle x \rangle$, P - група типу (p,p,p), $/x/ = q^2$, p і q - різні прості числа, $P \lambda \langle x^{q^2} \rangle$ - група Міллера - Морено;

12) $G = P \lambda \langle x \rangle$ - нециклотентна група Міллера - Морено, P - група типу (p,p,p), $/x/ = q$;

13) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \lambda \langle x \rangle$ - нециклотентна група Міллера - Морено, P - група типу (p,p), $/x/ = q$, $/z/ = r$;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = q$, $(\langle a^p \rangle \times \times \langle b^p \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - нециклотентна група Міллера - Морено;

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - ненадрозв'язна група Фробеніуса, P - група типу (p,p), $/x/ = qr$, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $P \lambda \lambda \langle x^{q^2} \rangle$ та $P \lambda \langle x^{r^2} \rangle$ - мінімальні неметациклічні групи.

Доведення. Необхідність. Нехай $X = K(\text{УЦН}(\ )) \cup K(\text{УЦН}(\ ))$. Зрозуміло, що $K(\text{УЦН}(\ )) \in X$. Легко довести, що група G типу 5 теореми 2.3.1, у якої P - група типу (p,p,p), не належить X. Звідси $K(\text{УЦН}[\ ]) > X$. Отже, перша частина теореми доведена.

Нехай S та Σ - всі локально ступінчасті групи із $K(\text{УЦН}[\ ])$ та X відповідно. Для завершення доведення необхідності теореми залишається знайти всі типи груп, що належать класу $\mathfrak{Z}$, де $\mathfrak{Z} \cup \Sigma = S$ і $\mathfrak{Z} \cap \Sigma = \emptyset$. Ясно, що досліджувана група G не може бути УЦН( )-групою. Можливі випадки: 1) G - нільпотентна група; 2) G - нециклотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.2.3 і може бути групою одного з типів 1 - 28 згаданої теореми. Оскільки група G кожного з типів: 1 - 3; 10, $z \in Z(G)$, $/b/ \in \{4,8\}$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $[U,X] = \Phi(U)$, $/C_X(U)/ = 4$; 27 є групами типів 1 - 10 теореми 3.3.1 відповідно, то G не може бути групою згаданих типів теореми 2.2.3

Група G кожного з типів: 6; 7; 12, $P' \neq 1$; 13; 14; 16; 19 - 21; 22, $/G/ \in \{2^5, 2^6\}$; 23, $/G/ = 2^6$; 25 теореми 2.2.3 є групами типів 1 - 12 наслідку 3.2.1 відповідно, за твердженням якого всі типи груп є УЦН( )-групами. Отже, G не може бути групою жодного із цих типів.

Група G кожного з типів: 4; 5; 10, $z \notin Z(G)$; 11, $z \notin Z(G)$; 26, U - група кватерніонів, $[U,X] = 1$ теореми 2.2.3 є групами типів 1 - 5 наслідку 3.3.1 відповідно, за твердженням якого всі типи

груп є УЩН( )-групами. Отже, G не може бути групою жодного із цих типів.

За попереднім, G не може бути групою жодного з типів: 1 - 7; 13 - 21; 25; 27 теореми 2.2.3.

Група G кожного з типів 8, 9 та 28 теореми 2.2.3 є відповідно групою типу 1, 2 та 9 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 10 теореми 2.2.3. Тоді, за попереднім, $z \in Z(G)$. При $\beta < 4$ за твердженням теореми 3.3.1 G - УЩН( )-група типу 4 теореми 3.1.1, що не так. Звідси $\beta > 3$, $|z| = 1$ і G - група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 11 теореми 2.2.3. За попереднім, $z \in Z(G)$ і G - група типу 5 теореми 3.1.1, що неможливо.

Нехай G - група типу 12 теореми 2.2.3. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $|c| = |b| = p$ - непарне просте число, $c \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$, $|G| = p^4$. Якщо G - мінімальна неметациклічна група, то G - група типу 2 теореми 1.3.3 і, значить, G - група типу 5 теореми 3.1.1, що не так. Звідси G містить власну мінімальну неметациклічну підгрупу M, яка може бути лише групою типу 1 теореми 1.3.3. Отже, $|M| = p^3$, $\exp(M) = p$, M - максимальна підгрупа в G, $G' \leq M$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $C \lhd G$, G/C - підгрупа в $\mathrm{Aut}G'$, $C < G$. Відомо [41], що силовські p-підгрупи в $\mathrm{Aut}G'$ мають порядок p. З цього випливає, що $[G:C] = p$, $|C| = p^3$, $C' = 1$. Таким чином, C - група типу (p^2,p) чи (p,p,p).

Припустимо, що $M' \neq 1$. Тоді $M = G' \setminus \langle x \rangle$, $|x| = p$ і без порушення загальності можна вважати, що $[b,x] = c$. Зрозуміло, що $G = C \setminus \langle x \rangle$. Якщо C - група типу (p,p,p) то $C = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a \rangle$. Без порушення загальності вважаємо, що $[a,x] = b$ і тому при $p > 3$ G - група типу 4 розглядуваної теореми. Легко бачити, що при $p = 3$ G - група типу 5 розглядуваної теореми. Нехай тепер C - група типу (p^2,p). Тоді $\Phi(C) \cap \langle b \rangle = 1$, $|\Phi(C)| = p$ і, значить, $\Phi(C) \leq Z(G)$. Ясно, що $C = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^2$. Очевидно, що $\langle a^p \rangle = \langle c \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a,x] = b$. Зрозуміло, що $c = a^{sp}$, $0 < s < p$ і G - група типу 4 теореми 3.2.1, що неможливо.

Нехай тепер $M' = 1$. Тоді $M = C$ - група типу (p,p,p). Якщо $G \setminus C$ містить x і $|x| = p$, то $G = C \setminus \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $C = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a_1 \rangle$. Якщо $G' \setminus \langle x \rangle$ - неабелева група, то можна вважати, що $M = G' \setminus \langle x \rangle$ і прийдемо до розглядуваного випадку. Якщо ж $G' \setminus \langle x \rangle$

абелева група, то $G' \leqslant Z(G)$, що не так. Отже, для a із $G \setminus C$ маємо $|a| > p$, $G = C\langle a\rangle$ і $C \cap \langle a\rangle = \langle a^p\rangle$. Звідси $|a| = p^2$ і $a^p \in Z(G)$.

Нехай $G' \cap \langle a\rangle = 1$. Тоді $G = G' \setminus \langle a\rangle$. Оскільки $G'/\langle c\rangle \leqslant Z(G/\langle c\rangle)$, то $[a,b] \in \langle c\rangle$ і тому $G' \leqslant \langle c\rangle$, що неможливо. Таким чином, $a^p \in G'$ і, значить, $\langle a^p\rangle = \langle c\rangle$. Зрозуміло, що $C = G' \times \langle x\rangle$, G містить підгрупу $\langle a\rangle G' = \langle a\rangle \setminus \langle b\rangle$ і $G = (\langle a\rangle \setminus \langle b\rangle) \setminus \langle x\rangle$. Оскільки $[b,x] = 1$ і $b \in G'$, то без порушення загальності вважаємо, що $[a,x] = b$. При $[a,b] = 1$ одержимо, що G – група типу 4 теореми 3.2.1, що не так. Таким чином, $[a,b] = a^{sp}$, $0 < s < p$ і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 22 чи 23 теореми 2.2.3. Тоді $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$. При $\beta < 4$ G – УШН( )-група одного з типів 11 та 12 теореми 3.2.1 відповідно. Отже, в групах G кожного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3 $\beta = 4$ і G – група одного з типів 6 – 8 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай $G = U \setminus X$ – група типу 26 теореми 2.2.3. Якщо U – циклічна група, то $[U,X] \neq 1$, $|C_X(U)| = 4$ і G – УШН( )-група типу 9 теореми 3.1.1, що неможливо. Отже, U – група кватеріонів порядку 8 і при $[U,X] = 1$ G – УШН( )-група типу 6 теореми 3.3.1, що знову неможливо. Звідси $[U,X] = \Phi(U)$. Зрозуміло, що $|C_X(U)| = 4$ і G – УШН( )-група типу 9 теореми 3.1.1, що знову неможливо. Всі випадки розглянули. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. Група G кожного з типів: 1; 10; 11; 14 теореми 2.3.1 за наслідком 3.1.2 є УШН( )-групою. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Група G кожного з типів: 3; 4; 7, $|P'| = p$; 8, $r \neq p$; 9; 12; 13; 16 теореми 2.3.1 за наслідком 3.2.1 є УШН( )-група. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Група G кожного з типів: 2; 5, G' – група типу (p,p); 6, G' – група типу (p,p) теореми 2.3.1 за наслідком 3.3.1 є УШН( )-група. Отже, G не може бути групою розглядуваних типів.

Таким чином, G не може бути групою жодного з типів: 1 – 4; 9 – 14; 16 теореми 2.3.1.

Нехай G – група типу 5 згаданої теореми. Тоді $G = P \setminus \langle x\rangle$, $|P| \in \{p^2, p^3\}$, $|x| = qr$. При $|P| = p^2$ G – УШН( )-група типу 3 теореми 3.3.2, що не так. Отже, $|P| = p^3$ і G – група типу 10 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 6 теореми 2.3.1. Тоді, як і раніше, $/P/ = p^3$ і, значить, G - група типу 11 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 7 теореми 2.3.1. Тоді $G = P \setminus \langle x \rangle$, $/P/ = p^3$, $\exp(P) = p$. При $P' \neq 1$ G - УШН( )-група типу 4 теореми 3.2.2, що неможливо. Звідси $P' = 1$ і G - група типу 12 розглядуваної теореми.

Нехай G - група типу 8 теореми 2.3.1. Тоді $G = (P \setminus \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/z/ = r$, $/P/ = p^2$. При $p \neq r$ G - УШН( )-група типу 2 теореми 3.1.2, що не так. Отже, $p = r$ і G - група типу 13 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 15 та 17 теореми 2.3.1 є групою кожного з типів 14 та 15 розглядуваної теореми відповідно. Всі можливі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 15 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G - локально ступінчаста недедекіндова група. Покажемо, що G - УШН( )-група, що не належить $К(\text{УШН}( )) \cup \cup К(\text{УШН}( ))$.

Група G кожного з типів 1 - 9 розглядуваної теореми є відповідно УШН( )-групою кожного з типів: 8; 9; 10; 12; 22; 23; 24; 28 теореми 2.2.3.

Група G кожного з типів 10 - 15 розглядуваної теореми є відповідно УШН( )-групою кожного з типів: 6; 6; 7; 8; 15; 17 теореми 2.3.1.

Покажемо, що $G \notin К(\text{УШН}( )) \cup К(\text{УШН}( ))$. Група G кожного з типів 10, 11, 12, 14, 15 містить мінімальну нормальну підгрупу порядку p^3. Звідси завдяки лемам 3.1.1 та 3.1.2 $G \notin К(\text{УШН}( )) \cup К(\text{УШН}( ))$. Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що в G не виконується жодне із співвідношень $[A;B) \ni N \lhd G$ чи $(A;B] \ni N \lhd G$.

Нехай G - група типу 13 розглядуваної теореми. Тоді G - нільпотентна група, яка не може бути групою жодного із типів теорем 3.1.2, 3.2.2 та 3.3.2 і тому достатність для цього типу груп доведена.

Нехай G - група одного з типів 1 - 9 розглядуваної теореми. Тоді G - нільпотентна група. В групі G кожного з типів 1 - 3, 5 - 8 є елемент g такий, що $\langle g^p \rangle \lhd G$. Завдяки лемі 3.1.1 G не УШН( )-група.

В групі G кожного з типів 4 та 5 розглядуваної теореми існує підгрупа B типу (p,p) така, що $B \cap Z(G) = 1$ і $B \lhd G$. Припустимо, що

G - УШН( )-група. Покладемо A = 1. Тоді (A;B] ∋ N ◁ G, що неможливо за попереднім. Отже, G не може бути УШН( )-групою.

Група G кожного з типів 4 та 5 розглядуваної теореми містить підгрупу із твердження 3 леми 3.1.2 і тому G не може бути УШН( )-групою.

В групі G кожного з типів 1 - 3 розглядуваної теореми є така неномальна підгрупа <g>, що <g> ∩ G' = 1, [<g>,G] = G' = <u>, /u/ = p^2. Покладемо B = <u> ⅄ <g>, A = <g>. Якщо УШН( )-група, то [A;B) ∋ N ◁ G і N ⩽ v(<u>) x <g>, що суперечить умові [<g>,G] = = <u>.

Нехай G - група одного з типів 6 - 8 розглядуваної теореми. Покладемо A = <b>, B = $<a^2><b>$. Тоді /[A;B]/ > 2, [<b>,G] = $<a^2>$ = = G'. Припустимо, що G - УШН( )-група. Тоді [A;B) ∋ N ◁ G і N ⩽ ⩽ $<a^4><b>$, що суперечить умові [<b>,G] = $<a^2>$.

Нехай G - група типу 9 розглядуваної теореми. Покладемо A = = <x>, B = $<x><a^2><b^2>$ = <x>G'. Тоді /[A;B]/ > 2. Якщо G - УШН( )-група, то [A;B) ∋ N ◁ G. Ясно, що N ⊄ G', що суперечить умові [<x>, G] = G'. Нехай далі G - УШН( )-група. Покладемо A = 1, B = <ax>. Тоді /[A;B]/ > 2 і (A;B] ∋ N ◁ G. Звідси, очевидно, /N/ = 2 і N ⩽ Z(G), що не так.

Отже, група G не може бути ні УШН( )- ні УШН( )-групою і тому G ∉ К(УШН( ))∪К(УШН( )). Достатність доведена. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.– М.:Наука.– 1980.– 384 с.
2. Best E. and Taussky O. A class of groups //Proc.PJA.–XLXII,sect A.– 1942.– P.55–62.
3. Абрамовский И.Н.,Каргаполов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи матем. наук.– 1958.– XIII, вип. 3(81).– С. 242–243.
4. Robinson D. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.– 1964.– 60.– P.21–38.
5. Пилаев В.В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп.– Киев,Ин–т математики АН УССР, 1976.– с. 111–139.
6. Курдаченко Л.А.,Горецкий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр.мат.журн.–1983.–35, N1.– С.42–46.
7. Горецкий В.Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариатных абелевых подгрупп // Теоретико–групповые исследования.– Киев, Ин–т математики АН УССР, 1978.– С.127–138.
8. Курдаченко Л.А.,Кузенный Н.Ф.,Пилаев В.В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субинвариантных подгрупп // Укр.мат. журн.– 1981.–33, N3.– С.407–410.
9. Mann A. Groups with dense normal subgroups.– Israel J. Math.– 1968.–v.6, N1.– с.13–25.
10. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп.– Киев, 1980.– 17 с.– Деп. в ВИНИТИ, N 19–25–80.
11. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XIY Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.– Новосибирск:Ин–т математики СО АН СССР, 1977.–С.57–58.
12. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы со

строго плотной системой инвариантных подгрупп //VI Всесоюз.симп. по теории групп: Тез. докл.- Киев:Наукова думка, 1978.- С.49-50.

13.Кузенний Н.Ф.,Пилаев В.В.Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XY Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск:Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С.84-85.

14.Пилаев В.В.,Кузенний Н.Ф. Конечные нильпотентные группы с строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 //XY Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С. 126.

15.Семко М.М.,Кузенний М.Ф. Будова деяких груп, близьких до метациклічних.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1995.-25 с.- Деп. ДНТБ України, N2508 - Ук95.

16.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення - Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 232 с.

17.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 61 с.

18.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Про групи, близькі до метациклічних //Укр. мат. журн.- 1996.- 48, N6.- С.782 - 790.

19.Семко М.М. Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп .- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 67 с.- Деп. в ДНТБ України 12.03.96, N743 - Ук96.

20.Семко М.М. Будова локально ступінчастих нескінченних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 24 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2326 - Ук96.

21.Семко М.М. Про будову груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 41 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2340 - Ук96.

22.Семко М.М. Будова нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.. Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 55 с.- Деп. в ДНТБ України 12.12.96, N2370 - Ук96.

23.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Будова УШН[ ]-груп з комутантом простого порядку//Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ, 1996.- С.249.

24.Семко М.М.,Кузенний М.Ф. Будова ШН[ ]-груп //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18

трав. 1996 р.- Київ, 1996.- С.390.

25.Семко М.М. Будова деяких УШН( )-груп з нециклічним комутантом //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ, 1996.- С.389.

26.Семко М.М. Будова локально ступінчастих ШН( )-груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1996.- Вип.12.- С. 181 - 186.

27.Семко М.М. Про будову УШН( )-груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1996.- Вип. 13.- С. 196 - 203.

28.Семко М.М. Про будову УШН( )-груп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997.- 31 с.- Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N295 - Ук97.

29.Семко М.М. Про будову локально ступінчастих УШН( )-груп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997.- 27 с.- Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N297 - Ук97.

30.Семко М.М. Про будову локально ступінчастих УШН( )-груп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1997.- 17 с.- Деп. в ДНТБ України 21.04.97, N296 - Ук97.

31.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова локально ступінчастих метагамільтонових УШН( )-груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1997.- Вип. 14.- С. 211 - 219.

32.Семко М.М. Будова нільпотентних УШН( )-груп //Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук.пр.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1997.- С. 27 - 41.

33.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Будова нільпотентних УШН( )-груп //Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук.пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1997.- С. 20 - 26.

34.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Будова нільпотентних неледекіндових УШН( )-груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім.акад. М.Кравчука, Київ, 15 - 17 трав. 1997 р.- Київ, 1997.- С. 231.

35.Семко М.М.,Кузенний М.Ф. Про будову ненільпотентних УШН( )-груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 15 - 17 трав. 1997 р.- Київ, 1997.- С. 347.

36.Семко М.М. Будова нільпотентних неледекіндових УШН( )-груп //Тези УІ Міжнародної наукової конференції ім.акад. М.Кравчука,

Київ, 15 - 17 трав. 1997 р.- Київ, 1997.- С. 346.
37.Семко М.М. Будова локально ступінчастих ненільпотентних УШН[ ]-груп // Укр. мат. журн.- 1997.- 49, №6.- С.789 - 798.
38.Семко М.М. Про будову груп деякими умовами щільності нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1997.- 90 с.
39.Семко М.М. Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1997.- 63 с
40.Левищенко С.С.,Кузенний Н.Ф. Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997.- 230 с.
41.Курош А.Г. Теория групп.- М.:Наука, 1967.- 648 с.
42.Ліман Ф.М. Групи з інваріантними нециклічними підгрупами / Доп. АН УРСР.- 1967.- 12.- С.1073-1075.
43.Лиман Ф.Н. 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки.- 1968.- 4, №1.- С.74-83.
44.Холл М. Теория групп.- М.:Изд-во иностр. лит.,1962.-468 с.

З М І С Т

ВСТУП 3

3.0. ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ 5
3.1. БУДОВА УШН( )-ГРУП 13
3.2. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УШН( )-ГРУП 29
3.3. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УШН( )-ГРУП 43
3.4. ДЕЯКІ НАСЛІДКИ 50

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 58

Наукове видання

СЕМКО МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ

КЛАСИ ГРУП З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Підп. до друку 07.97. Формат . Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,72
Ум. фарбо-відб. 3,72 Обл.-вид. арк 3,15 Тираж 1000 пр. Зам. 131

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3