

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

Методика вивчення квадратичної функції та її
застосувань у курсі математики основної школи

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, групи СОМ-24-1,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

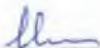
Литвина Володимира Сергійович

Науковий керівник



Микола СЕМКО, д-р фіз.-мат. наук, професор

Гарант освітньо-професійної програми



Микола СЕМКО, д-р фіз.-мат. наук,
професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
вищої та прикладної математики
протокол від 29.12

Завідувач кафедри



Ясана ЯРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ірпінь – 2025

Реєстрація № 2 20.01.2026 Скасків А.В.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 13.01.2026 [підпис]
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 90 06.02.2026 [підпис]
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії: [підпис] Н.М. Лосева
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії:
[підпис] М.М. Сенико
(підпис) (ініціали, прізвище)
[підпис] А.В. Скасків
(підпис) (ініціали, прізвище)
[підпис] О.А. Ярова
(підпис) (ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	28		Голова М.М. М.
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	8		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	46		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	8		Голова ек. ком. Госева Н.М. Члени комісії Голова М.М. М. Госев І.В. Гр. Грова О.А. Гр.
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	4		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	24		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	8		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	44		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	90		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
90	A	5 (відмінно)	06.02.2026	Голова ек. ком. Госева Н.М. Члени комісії Голова М.М. М. Госев І.В. Гр. Грова О.А. Гр.

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	
50-59	E	3 (задовільно)
35-49	X	2 (незадовільно)

ВСТУП

Актуальність теми дослідження обумовлена ключовою роллю квадратної функції в системі математичної освіти основної школи та необхідністю вдосконалення методики її викладання відповідно до сучасних освітніх вимог. Квадратична функція посідає центральне місце в курсі алгебри дев'ятого класу, оскільки об'єднує в собі алгебраїчні, геометричні та функціональні аспекти математики, створюючи фундамент для подальшого вивчення більш складних функцій у старшій школі. Проте аналіз практики викладання засвідчує, що багато учнів відчують значні труднощі в засвоєнні цієї теми, не розуміють зв'язку між різними представленнями квадратичної функції, не бачать її практичного застосування в реальному житті. Традиційна методика викладання часто зосереджується на формальному засвоєнні алгоритмів побудови графіків та розв'язування рівнянь, не приділяючи достатньої уваги розвитку функціонального мислення, формуванню здатності до математичного моделювання реальних процесів.

Сучасна Концепція Нової української школи та Державний стандарт базової середньої освіти орієнтують на компетентнісний підхід до навчання, який передбачає не лише засвоєння предметних знань, а й формування здатності застосовувати ці знання для розв'язування практичних задач, критичного мислення, комунікативних навичок, уміння вчитися впродовж життя. У контексті математичної освіти це означає необхідність переходу від механічного відтворення алгоритмів до глибокого розуміння математичних понять, від розв'язування абстрактних завдань до математичного моделювання реальних ситуацій, від пасивного сприйняття інформації до активної дослідницької діяльності. Вивчення квадратної функції має значний потенціал для реалізації цих завдань, однак потребує розробки нових методичних підходів, які органічно поєднують традиційні методи з інноваційними освітніми технологіями.

Мета дослідження полягає в теоретичному обґрунтуванні та розробці методики викладання квадратної функції та її застосування в курсі математики

основної школи, яка забезпечує формування математичної компетентності учнів через оптимальне поєднання традиційних та інноваційних методів навчання, систематичне використання практико-орієнтованих задач, активне застосування інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації та дослідження властивостей функції, диференційований підхід до організації навчальної діяльності з урахуванням індивідуальних особливостей учнів.

Для досягнення поставленої мети було визначено наступні завдання дослідження. По-перше, здійснити історико-генетичний аналіз поняття квадратної функції та її властивостей, По-друге, проаналізувати математичний зміст квадратної функції в єдності алгебраїчних, геометричних та функціональних аспектів. По-третє, розробити теоретичні засади формування математичної компетентності учнів через вивчення квадратної функції, конкретизувати зміст кожного компонента компетентності стосовно даної теми, визначити оптимальні методи та форми навчання для формування предметно-логічного, операційно-діяльнісного, комунікативного, рефлексивно-оцінного та мотиваційно-ціннісного компонентів. По-четверте, здійснити порівняльний аналіз традиційних та сучасних методів викладання квадратної функції. По-п'яте, дослідити можливості використання візуалізації та інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні квадратичної функції. По-шосте, проаналізувати типові помилки учнів при вивченні квадратної функції. По-сьоме, розробити систему задач для вивчення квадратної функції та її властивостей, структуровану за дидактичною метою, типами діяльності, рівнями складності, ступенем практичної спрямованості. По-восьме, систематизувати практичні застосування квадратної функції в різних сферах життєдіяльності. По-дев'яте, організувати та провести педагогічний експеримент для перевірки ефективності запропонованої методики, здійснити діагностику навчальних досягнень та рівня сформованості математичної компетентності учнів експериментальної та контрольної груп, проаналізувати отримані результати за допомогою методів математичної статистики.

Об'єкт дослідження становить процес навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження складає методика викладання квадратної функції та її застосування в курсі математики основної школи.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи 62 сторінки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ КВАДРАТНОЇ ФУНКЦІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

1.1. Історико-генетичний аналіз поняття квадратної функції та її властивостей

Квадратна функція посідає особливе місце в історії розвитку математичної науки. Її вивчення розпочалося задовго до того, як було сформульоване саме поняття функції. Аналіз історичного шляху становлення цього математичного об'єкта дозволяє краще зрозуміти його сутність та методичні особливості викладання в сучасній школі.

Перші спроби розв'язування квадратних рівнянь датуються приблизно 2000 роком до нашої ери. Вавилонські математики вже володіли алгоритмами знаходження коренів квадратних рівнянь, хоча й формулювали їх виключно словесно, без використання алгебраїчної символіки. Глиняні таблички з клинописними текстами свідчать про те, що вавилоняни могли розв'язувати різноманітні практичні задачі, які в сучасній термінології зводяться до квадратних рівнянь. Цікавим є той факт, що вавилонські вчені розглядали лише додатні корені, оскільки від'ємні числа ще не увійшли до математичного обігу.

Давньогрецькі математики підійшли до квадратних рівнянь з геометричної точки зору. Евклід у своїх "Началах" розглядав задачі на побудову відрізків, довжини яких задовольняли квадратним рівнянням. Геометричний підхід ґрунтувався на вченні про площі та застосуванні методу доповнення до квадрата. Саме в працях грецьких геометрів закладено фундамент для розуміння квадратичних залежностей через просторові відношення. Діофант Александрійський у III столітті нашої ери зробив значний крок уперед, запровадивши елементи алгебраїчної символіки та розглянувши більш загальні випадки квадратних рівнянь [1, с. 82–86].

Середньовічна математика в арабському світі значно збагатила теорію квадратних рівнянь. Мухаммед аль-Хорезмі в IX столітті систематизував методи розв'язування різних типів квадратних рівнянь у своїй знаменитій праці "Аль-

джебр". Саме від назви цієї книги походить термін "алгебра". Арабські математики класифікували квадратні рівняння на шість типів, залежно від знаків коефіцієнтів та наявності тих чи інших членів, оскільки від'ємні коефіцієнти все ще викликали труднощі в інтерпретації (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Історичні етапи розвитку поняття квадратної функції

Період	Основні досягнення	Представники
XX ст. до н.е. – V ст. н.е.	Геометричні методи розв'язування квадратних рівнянь, словесні алгоритми	Вавилонські математики, Евклід, Діофант
IX – XV ст.	Систематизація методів, класифікація типів рівнянь, розвиток алгебраїчної символіки	Аль-Хорезмі, Омар Хайям, європейські математики епохи Відродження
XVI – XVII ст.	Загальна формула коренів, введення від'ємних коренів, початок аналітичної геометрії	Кардано, Тарталья, Декарт, Ферма
XVIII – XIX ст.	Формування поняття функції, графічні методи, теорія квадратичних форм	Ейлер, Лагранж, Гаус
XX ст. – сьогодення	Застосування в різних галузях, комп'ютерні методи, дидактичні дослідження	Сучасні математики та методисти

Джерело: складено автором на основі [2]

Епоха Відродження принесла революційні зміни в алгебру. Італійські математики XVI століття, зокрема Джероламо Кардано та Нікколо Тарталья, працювали над загальними методами розв'язування алгебраїчних рівнянь. Хоча їхні основні досягнення стосувалися кубічних рівнянь, вони також удосконалили теорію квадратних рівнянь. Важливим кроком стало поступове визнання від'ємних та комплексних коренів як повноправних математичних об'єктів.

Справжній прорив у розумінні квадратних залежностей відбувся в XVII столітті з появою аналітичної геометрії. Рене Декарт та П'єр Ферма створили метод координат, який дозволив геометричні об'єкти описувати алгебраїчно. Саме в цей період квадратна парабола вперше постала як графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Декарт у своїй "Геометрії" показав, як алгебраїчні рівняння можна інтерпретувати як криві на площині, а геометричні властивості кривих – як алгебраїчні співвідношення між координатами.

У XVIII столітті Леонард Ейлер сформулював сучасне поняття функції як залежності однієї змінної величини від іншої. Це дозволило розглядати квадратне рівняння не просто як задачу на знаходження невідомого, а як окремий випадок більш загального об'єкта – квадратної функції. Ейлер систематично досліджував властивості різних елементарних функцій, включаючи квадратичні, та встановив зв'язки між алгебраїчними та геометричними характеристиками.

Жозеф Луї Лагранж наприкінці XVIII століття розробив метод виділення повного квадрата, який став стандартним інструментом для дослідження квадратичної функції. Цей метод дозволяє легко знайти вершину параболи та визначити інші важливі характеристики графіка. Лагранж також заклав основи теорії квадратичних форм, яка має численні застосування в різних розділах математики та фізики.

Карл Фрідріх Гаус у XIX столітті створив завершену теорію квадратичних форм та довів фундаментальну теорему алгебри, згідно з якою квадратне рівняння завжди має рівно два корені в полі комплексних чисел. Роботи Гауса показали глибокі зв'язки між теорією чисел, алгеброю та геометрією, де квадратичні залежності відігравали ключову роль.

У XX столітті квадратна функція стала невід'ємною частиною шкільного курсу математики. Методисти багатьох країн досліджували оптимальні підходи до викладання цієї теми. Важливий внесок у розробку методики зробили радянські та українські педагоги-математики, які створили систему поступового ускладнення матеріалу від простих квадратних рівнянь до повного дослідження функції [2, с. 71].

Генетичний підхід до навчання математики, запропонований видатними методистами, передбачає, що процес засвоєння математичних понять учнями повинен певною мірою відтворювати історичний шлях їх становлення. Стосовно квадратної функції це означає, що спочатку учні знайомляться з конкретними квадратними рівняннями та їх розв'язуванням, потім вивчають графічні методи, і лише після цього переходять до абстрактного поняття функції та систематичного дослідження її властивостей.

Сучасне розуміння квадратної функції включає кілька взаємопов'язаних аспектів. По-перше, це алгебраїчний об'єкт, заданий формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a , b , c – дійсні числа, причому $a \neq 0$. По-друге, це геометрична фігура – парабола на координатній площині з певними характеристиками. По-третє, це модель для опису багатьох реальних процесів та явищ, від руху тіл під дією сили тяжіння до оптимізаційних задач в економіці.

Історичний аналіз показує, що поняття квадратної функції формувалося протягом тисячоліть через вирішення практичних задач, теоретичні узагальнення та встановлення зв'язків між різними розділами математики. Цей складний шлях відображає природну логіку розвитку математичного знання від конкретного до абстрактного, від окремих прикладів до загальних теорій. Розуміння цього історичного контексту допомагає вчителю організувати навчальний процес таким чином, щоб учні не просто заучували формули та правила, а розуміли внутрішню логіку та красу математичних ідей, пов'язаних з квадратною функцією [3, с. 240–243].

1.2. Математичний зміст квадратної функції та її роль у шкільному курсі математики

Квадратна функція являє собою один із найважливіших об'єктів шкільного курсу математики, який поєднує в собі алгебраїчні, геометричні та функціональні аспекти. Математичний зміст цього поняття є багатогранним та потребує ретельного аналізу для розуміння його дидактичного потенціалу.

У найзагальнішому вигляді квадратична функція визначається як функція виду $f(x) = ax^2 + bx + c$, де x – незалежна змінна (аргумент), a , b , c – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами, причому старший коефіцієнт a відмінний від нуля. Ця функція є окремим випадком поліноміальних функцій другого степеня та характеризується специфічними властивостями, які відрізняють її від інших елементарних функцій.

Область визначення квадратної функції – множина всіх дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$. Це означає, що для будь-якого дійсного значення аргументу можна обчислити відповідне значення функції. Область значень залежить від знака старшого коефіцієнта та положення вершини параболи. Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, і функція набуває найменшого значення у вершині, тому $E(f) = [у_v; +\infty)$, де $у_v$ – ордината вершини. Якщо $a < 0$, то вітки напрямлені вниз, функція має найбільше значення у вершині, і $E(f) = (-\infty; у_v]$.

Координати вершини параболи можна знайти за формулами $х_v = -b/(2a)$ та $у_v = f(х_v) = (4ac - b^2)/(4a)$. Ці формули мають глибокий математичний зміст та можуть бути отримані методом виділення повного квадрата. Дійсно, перетворюючи вираз $ax^2 + bx + c$, можна записати його у вигляді $a(x - х_v)^2 + у_v$, що безпосередньо вказує на координати вершини та дозволяє легко аналізувати властивості функції (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Властивості квадратної функції в залежності від коефіцієнтів

Коефіцієнт	Вплив на графік та властивості функції
$a > 0$	Вітки параболи напрямлені вгору; функція спадає на проміжку $(-\infty; х_v]$ та зростає на $[х_v; +\infty)$; має найменше значення $у_v$
$a < 0$	Вітки параболи напрямлені вниз; функція зростає на проміжку $(-\infty; х_v]$ та спадає на $[х_v; +\infty)$; має найбільше значення $у_v$
$ a $ велике	Парабола "вузька", швидко віддаляється від осі абсцис
$ a $ мале	Парабола "широка", повільно віддаляється від осі абсцис
b	Впливає на положення вершини по горизонталі; при $b = 0$ вісь симетрії співпадає з віссю ординат
c	Визначає точку перетину графіка з віссю ординат; при $c = 0$ парабола проходить через початок координат

Джерело: складено автором на основі [4]

Монотонність квадратної функції має особливий характер. На відміну від лінійної функції, яка є монотонною на всій області визначення, квадратична функція змінює характер монотонності. При $a > 0$ функція спадає на проміжку від мінус нескінченності до абсциси вершини та зростає від абсциси вершини до плюс нескінченності. При $a < 0$ маємо протилежну ситуацію. Точка екстремуму (вершина параболи) є єдиною точкою, в якій похідна функції дорівнює нулю, що учні пізніше вивчатимуть у курсі алгебри та початків аналізу [4].

Важливою характеристикою квадратної функції є дискримінант, який визначається формулою $D = b^2 - 4ac$. Значення дискримінанта визначає кількість нулів функції, тобто коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Якщо $D > 0$, то функція має два різні нулі, і графік перетинає вісь абсцис у двох точках. Якщо $D = 0$, то функція має один нуль кратності два, і парабола дотикається до осі абсцис у вершині. Якщо $D < 0$, то функція не має дійсних нулів, і графік не перетинає вісь абсцис.

За теоремою Вієта, якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1 та x_2 , то виконуються співвідношення: $x_1 + x_2 = -b/a$ та $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Ці формули встановлюють зв'язок між коефіцієнтами квадратного тричлена та його коренями, що має важливе теоретичне та практичне значення. Зокрема, теорема Вієта дозволяє розкласти квадратний тричлен на множники у вигляді $a(x - x_1)(x - x_2)$, якщо корені існують.

Графіком квадратної функції є парабола – крива другого порядку, яка має вісь симетрії, що проходить через вершину паралельно осі ординат. Рівняння осі симетрії має вигляд $x = x_v = -b/(2a)$. Симетричність параболи означає, що для будь-яких двох точок графіка, рівновіддалених від осі симетрії, ординати є однаковими. Ця властивість використовується при побудові графіка та розв'язуванні різноманітних задач.

Парабола як геометрична фігура має також іншу важливу властивість: це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) та заданої прямої (директриси). Для параболи $y = ax^2$ фокус має координати $(0; 1/(4a))$, а директриса задається рівнянням $y = -1/(4a)$. Ця геометрична властивість пояснює оптичні властивості параболічних дзеркал та використовується в техніці.

Квадратична функція тісно пов'язана з іншими математичними поняттями. Квадратні рівняння та нерівності розглядаються як окремі випадки дослідження квадратної функції. Метод інтервалів для розв'язування квадратних нерівностей ґрунтується на аналізі знака функції на проміжках, визначених її нулями. Системи, що містять квадратні рівняння, часто розв'язуються графічним

методом, який передбачає побудову парабол та знаходження точок їх перетину (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Зв'язок квадратної функції з іншими темами шкільного курсу

Тема курсу	Характер зв'язку	Приклади застосування
Квадратні рівняння	Нулі функції є коренями рівняння	Графічний метод розв'язування, дослідження кількості коренів
Квадратні нерівності	Знак функції на проміжках	Метод інтервалів, графічна інтерпретація множини розв'язків
Системи рівнянь	Точки перетину графіків	Графічний метод, дослідження кількості розв'язків системи
Геометричні задачі	Моделювання залежностей	Задачі на максимум і мінімум площі, периметра, об'єму
Текстові задачі	Складання математичної моделі	Задачі на рух, продуктивність, суміші та сплави
Похідна та екстремуми	Дослідження функції методами математичного аналізу	Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Джерело: складено автором на основі [5]

шкільному курсі математики квадратна функція відіграє роль своєрідного "моста" між різними розділами. Вона узагальнює знання про числові вирази та перетворення, набуті в попередніх класах, та готує учнів до вивчення більш складних функцій. Поняття функціональної залежності, вперше детально розглянуте на прикладі лінійної функції, набуває нової глибини при вивченні квадратичної функції з її нелінійним характером зміни.

Метод виділення повного квадрата, який використовується при дослідженні квадратної функції, є потужним алгебраїчним інструментом, що знаходить застосування в багатьох розділах математики. Виділяючи повний квадрат у виразі $ax^2 + bx + c$, можна записати його у вигляді $a[(x + b/(2a))^2 - D/(4a^2)] = a(x + b/(2a))^2 - D/(4a)$, що одразу дає інформацію про екстремум функції та спрощує багато обчислень [5].

Важливим є розуміння того, що квадратна функція виступає базовою моделлю для опису багатьох реальних процесів. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, описується квадратичною залежністю між координатами. Залежність площі квадрата від довжини його сторони, об'єму куба від ребра, площі круга від радіуса – всі ці приклади демонструють квадратичний характер зміни величин.

У фізиці квадратичні залежності зустрічаються при вивченні рівноприскореного руху, енергії, потужності. В економіці функції витрат, доходу та прибутку часто моделюються квадратичними функціями.

Дослідження квадратної функції сприяє розвитку функціонального мислення учнів. Вони вчаться розглядати залежність між величинами не як статичне співвідношення, а як динамічний процес зміни однієї величини зі зміною іншої. Графічне представлення функції допомагає візуалізувати цю залежність та розвиває просторову уяву. Аналітичні методи дослідження функції формують навички роботи з символічними виразами та логічного міркування.

Квадратна функція також є важливим інструментом для розв'язування оптимізаційних задач. Багато практичних задач зводяться до знаходження найбільшого або найменшого значення квадратичної функції при певних обмеженнях. Навіть без знання похідної учні можуть успішно розв'язувати такі задачі, використовуючи властивість квадратичної функції досягати екстремуму у вершині параболи. Це готує їх до вивчення методів математичного аналізу в старших класах.

Перетворення графіків функцій, які докладно вивчаються на прикладі квадратичної функції, формують важливе вміння бачити зв'язок між аналітичним записом функції та геометричними властивостями її графіка. Учні засвоюють, як паралельні переміщення, розтягування та стиснення графіка відображаються в зміні коефіцієнтів функції. Ці знання згодом переносяться на інші типи функцій та використовуються при вивченні тригонометричних, показникових та логарифмічних функцій.

Математичний зміст квадратної функції розкривається поступово, на різних етапах навчання. Спочатку учні знайомляться з найпростішою квадратичною функцією $y = x^2$ та її графіком. Потім вивчають функції виду $y = ax^2$ та $y = ax^2 + c$, досліджуючи вплив коефіцієнтів на вигляд параболи. Нарешті, переходять до загального вигляду квадратної функції та систематичного дослідження всіх її властивостей. Така поетапність відповідає принципу доступності та забезпечує міцне засвоєння матеріалу.

Роль квадратної функції в шкільному курсі математики не обмежується її власним вивченням. Вона стає інструментом для засвоєння загальних методів математичної діяльності: аналізу, синтезу, узагальнення, конкретизації, абстрагування. Учні вчаться бачити загальне в частковому, встановлювати зв'язки між різними представленнями математичного об'єкта (формула, графік, таблиця, словесний опис), переходити від одного представлення до іншого. Ці універсальні навички мають значення далеко за межами математики та сприяють загальному інтелектуальному розвитку учнів [6].

1.3. Формування математичної компетентності учнів через вивчення квадратної функції

Математична компетентність є однією з ключових компетентностей, які має сформувати сучасна школа. Вона передбачає не лише знання математичних фактів та володіння обчислювальними навичками, а й здатність застосовувати математичні знання для розв'язування практичних задач, математичне моделювання реальних ситуацій, логічне мислення та аргументацію. Вивчення квадратної функції має значний потенціал для формування всіх компонентів математичної компетентності.

Компетентнісний підхід до навчання математики передбачає перехід від простої передачі знань до формування в учнів здатності використовувати ці знання в нестандартних ситуаціях. У контексті квадратної функції це означає, що учні повинні не просто вміти будувати графік параболи за заданою формулою, а й розуміти, як квадратична залежність проявляється в реальному світі, як її можна використати для розв'язування практичних задач, як вона пов'язана з іншими математичними поняттями.

Когнітивна складова математичної компетентності включає систему математичних знань різного рівня. На рівні відтворення учні засвоюють означення квадратної функції, формули для знаходження координат вершини параболи та коренів квадратного рівняння, алгоритми побудови графіка. На рівні

встановлення зв'язків вони вчатьсЯ бачити взаємозв'язок між різними властивостями функції, розуміти, як зміна коефіцієнтів впливає на графік, застосовувати теорему Вієта для розкладання квадратного тричлена на множники. На рівні міркувань учні здатні самостійно досліджувати властивості квадратної функції в нестандартних ситуаціях, обґрунтовувати свої висновки, знаходити оригінальні способи розв'язування задач.

Діяльнісна складова математичної компетентності формується через оволодіння різноманітними способами діяльності. При вивченні квадратної функції учні засвоюють алгоритмічні прийоми: знаходження нулів функції, координат вершини параболи, побудови графіка за точками. Вони також опановують евристичні методи: виділення повного квадрата, графічний метод розв'язування рівнянь та нерівностей, метод підбору при розв'язуванні квадратних рівнянь із цілими коефіцієнтами. Важливою є здатність вибирати раціональний спосіб розв'язування залежно від конкретних умов задачі (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Компоненти математичної компетентності та їх формування при вивченні квадратної функції

Компонент компетентності	Зміст компонента	Засоби формування
Предметно-логічний	Знання властивостей квадратної функції, формул, алгоритмів; уміння проводити дослідження	Теоретичний матеріал, вправи на застосування властивостей, дослідницькі завдання
Операційно-діяльнісний	Уміння виконувати перетворення виразів, будувати графіки, розв'язувати рівняння та нерівності	Практичні вправи, лабораторні роботи, робота з графіками
Комунікативний	Уміння формулювати думки математичною мовою, аргументувати, пояснювати розв'язання	Усні відповіді, взаємоперевірка, групова робота, презентації
Рефлексивно-оцінний	Самоконтроль, самооцінка, розуміння власних утруднень, планування діяльності	Самостійні роботи з самоперевіркою, аналіз помилок, ведення щоденника спостережень
Мотиваційно-ціннісний	Усвідомлення важливості математики, інтерес до предмета, прагнення до саморозвитку	Цікаві задачі, історичні відомості, міжпредметні зв'язки, проєктна діяльність

Джерело: складено автором на основі [7]

Комунікативна складова математичної компетентності розвивається через роботу з математичним текстом, формулювання власних міркувань та обґрунтування висновків. При вивченні квадратної функції учні вчатья точно формулювати властивості функції, описувати характер її зміни, пояснювати вплив коефіцієнтів на вигляд графіка. Важливим є вміння не просто отримати відповідь, а й пояснити хід розв'язування, обґрунтувати вибір методу, виявити та виправити помилки в міркуваннях інших учнів [7].

Рефлексивна складова компетентності передбачає здатність учнів до самоаналізу та самооцінки своєї навчальної діяльності. При роботі з квадратною функцією учні вчатья планувати послідовність дій при дослідженні функції, контролювати правильність виконання кожного кроку, оцінювати раціональність обраного методу розв'язування. Вони розвивають здатність виявляти власні прогалини в знаннях та самостійно їх усувати, аналізувати типові помилки та знаходити способи їх уникнення.

Мотиваційна складова математичної компетентності формується через усвідомлення учнями практичної значущості вивчення квадратної функції. Розв'язування задач з реального життя, встановлення міжпредметних зв'язків з фізикою, економікою, технікою показує учням, що математика не є абстрактною наукою, відірваною від дійсності, а потужним інструментом пізнання світу. Історичні екскурси, цікаві факти про застосування парабол у техніці та природі підвищують інтерес до предмета.

Формування математичної компетентності відбувається через систему спеціально підібраних завдань різного типу та рівня складності. Репродуктивні завдання дозволяють закріпити базові навички побудови графіків, знаходження коренів рівнянь, обчислення значень функції. Конструктивні завдання вимагають від учнів самостійного вибору методу розв'язування, комбінування відомих прийомів у нових ситуаціях. Творчі завдання передбачають дослідницьку діяльність, формулювання власних гіпотез та їх перевірку.

Особливо важливими для формування математичної компетентності є задачі на математичне моделювання. При розв'язуванні таких задач учні

проходять всі етапи математичного моделювання: аналіз реальної ситуації, виділення істотних факторів, побудова математичної моделі у вигляді квадратичної функції, дослідження моделі математичними методами, інтерпретація отриманих результатів у термінах вихідної задачі, оцінка адекватності моделі. Такий цілісний підхід формує системне мислення та здатність застосовувати математику в реальних життєвих ситуаціях.

Розглянемо конкретний приклад формування компетентності через задачу на оптимізацію. Нехай потрібно з прямокутного шматка жерсті зі сторонами 20 см та 30 см виготовити відкриту коробку найбільшого об'єму, вирізавши по кутах квадрати однакового розміру та загнувши краї. Розв'язування цієї задачі вимагає від учнів побудувати функцію об'єму залежно від сторони вирізаного квадрата, дослідити цю функцію на екстремум, знайти оптимальне значення змінної та обчислити відповідний максимальний об'єм. При цьому формуються всі компоненти математичної компетентності: уміння перекладати практичну задачу мовою математики, застосовувати властивості квадратичної функції, інтерпретувати результат.

Важливим аспектом формування компетентності є робота з різними формами представлення квадратичної функції. Учні повинні вільно переходити від аналітичного запису функції до графічного представлення, від табличного задання до формули, від словесного опису до математичної моделі. Така гнучкість мислення формується через систематичне виконання завдань на встановлення відповідності між різними представленнями, перекодування інформації з однієї форми в іншу, порівняння переваг різних способів представлення в конкретних ситуаціях.

Диференціація навчання відіграє ключову роль у формуванні математичної компетентності всіх учнів класу. Учні з різним рівнем підготовки та різними здібностями потребують різних підходів. Для слабших учнів важливо забезпечити міцне засвоєння базових алгоритмів та стандартних прийомів розв'язування типових задач. Середні учні мають можливість опанувати повний обсяг програмового матеріалу та навчитися застосовувати знання в дещо

ускладнених ситуаціях. Сильні учні потребують додаткових викликів у вигляді нестандартних задач, завдань підвищеної складності, дослідницьких проєктів (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

**Рівні сформованості математичної компетентності при вивченні
квадратної функції**

Рівень	Характеристика навчальних досягнень	Типові завдання
Початковий	Учень розпізнає квадратну функцію серед інших, знає основні формули, може за зразком побудувати графік найпростішої функції $y = x^2$	Обчислити значення функції $y = 2x^2$ для $x = 3$; визначити, чи є функція $y = 5x + 2$ квадратичною
Середній	Учень розуміє властивості квадратичної функції, вміє будувати графіки, знаходити нулі функції, застосовувати вивчені алгоритми	Побудувати графік функції $y = x^2 - 4x + 3$; знайти координати вершини параболи; розв'язати квадратне рівняння
Достатній	Учень вільно володіє методами дослідження квадратичної функції, розв'язує стандартні та деякі нестандартні задачі, встановлює зв'язки між поняттями	Дослідити функцію $y = -2x^2 + 8x - 5$ та побудувати графік; розв'язати нерівність методом інтервалів; знайти найбільше значення функції
Високий	Учень самостійно досліджує властивості функції в нестандартних ситуаціях, розв'язує складні комбіновані задачі, знаходить оригінальні способи розв'язування, узагальнює отримані результати	Дослідити взаємне розміщення парабол; розв'язати задачу на оптимізацію з параметром; довести властивості квадратичної функції аналітично

Джерело: складено автором на основі [8]

Групова робота є ефективним засобом формування комунікативної та діяльнісної складових математичної компетентності. При спільному розв'язуванні задач учні вчаться обмінюватися думками, обґрунтовувати свою позицію, критично оцінювати пропозиції інших, приходити до спільного рішення. Можна організувати роботу в групах за різними схемами: кожна група досліджує квадратичну функцію з певними значеннями коефіцієнтів та формулює висновки про вплив цих коефіцієнтів на властивості функції; групи отримують різні методи розв'язування одного рівняння та порівнюють їх ефективність; учні разом працюють над проєктом з дослідження застосувань параболи в техніці чи природі [8].

Інформаційно-комунікаційні технології відкривають нові можливості для формування математичної компетентності. Динамічне математичне програмне забезпечення дозволяє учням експериментувати з квадратичною функцією, змінювати коефіцієнти та спостерігати, як змінюється графік, формувати гіпотези про властивості функції та перевіряти їх. Комп'ютерні тренажери забезпечують можливість багаторазового відпрацювання навичок з негайним зворотним зв'язком. Інтерактивні моделі допомагають візуалізувати застосування квадратичної функції в реальних ситуаціях.

Проектна діяльність учнів сприяє інтегрованому формуванню всіх компонентів математичної компетентності. Тематики проектів можуть бути різноманітними: історія розвитку теорії квадратних рівнянь, парабола в архітектурі та мистецтві, фізичні явища та квадратична залежність, оптимізаційні задачі в економіці. При виконанні проекту учні самостійно шукають інформацію, аналізують її, систематизують, представляють результати в різних формах. Вони вчаться працювати з різними джерелами інформації, планувати свою діяльність, працювати в команді, презентувати результати перед аудиторією.

Важливою є організація систематичного контролю та оцінювання сформованості математичної компетентності. Традиційні форми контролю у вигляді самостійних та контрольних робіт доповнюються різноманітними формами компетентісно орієнтованого оцінювання. Тестові завдання різних типів дозволяють перевірити знання властивостей функції та вміння застосовувати стандартні алгоритми. Відкриті завдання з розгорнутою відповіддю дають можливість оцінити здатність учнів до міркувань та обґрунтувань. Практичні роботи виявляють рівень сформованості дослідницьких умінь. Захист проектів показує здатність до самостійної пізнавальної діяльності.

Критерії оцінювання математичної компетентності повинні бути чіткими, зрозумілими учням та охоплювати всі її компоненти. Оцінюється не лише правильність відповіді, а й повнота обґрунтування, раціональність обраного методу, оригінальність підходу, якість оформлення розв'язання. Важливо

використовувати не тільки оцінювання вчителем, а й самооцінювання та взаємооцінювання учнів, що сприяє розвитку рефлексивних умінь.

Формування математичної компетентності через вивчення квадратної функції передбачає також розвиток загальних пізнавальних умінь. Учні вчаться аналізувати умову задачі, виділяти головне та другорядне, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, класифікувати об'єкти за певними ознаками, узагальнювати та конкретизувати. Вони опановують прийоми логічного мислення: порівняння, аналогію, індукцію, дедукцію. Розвивається критичне мислення – здатність ставити під сумнів очевидне, шукати альтернативні пояснення, перевіряти достовірність тверджень.

Міжпредметні зв'язки підсилюють практичну спрямованість вивчення квадратної функції та сприяють формуванню цілісної картини світу. На уроках фізики учні застосовують квадратичну залежність для опису руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, або залежності кінетичної енергії від швидкості. На уроках інформатики вони можуть написати програму для обчислення коренів квадратного рівняння або побудови графіка параболи. В економіці квадратична функція моделює залежність прибутку від обсягу виробництва. Такі міжпредметні зв'язки показують учням універсальність математичних методів та формують здатність застосовувати знання в різних контекстах.

Особливу увагу слід приділити формуванню в учнів уміння розпізнавати квадратичну залежність у реальних ситуаціях. Це може бути залежність площі від лінійних розмірів фігури, залежність шляху від часу при рівноприскореному русі, залежність вартості товару від кількості при наявності знижок, залежність освітленості від відстані до джерела світла. Учні повинні навчитися не тільки розв'язувати готові задачі, а й самостійно формулювати математичні задачі на основі реальних ситуацій.

Розвиток математичної мови та символіки є важливим компонентом формування компетентності. При вивченні квадратної функції учні оперують різноманітною математичною термінологією: коефіцієнти, дискримінант, парабола, вершина, вітки, вісь симетрії, область визначення, область значень,

нулі функції, проміжки монотонності. Вони вчать правильно записувати математичні вирази, використовувати загальноприйняті позначення, читати та інтерпретувати математичні формули. Володіння математичною мовою дозволяє точно та стисло висловлювати математичні ідеї.

Емоційний компонент навчання також впливає на формування математичної компетентності. Переживання успіху при розв'язуванні складної задачі, радість від знаходження елегантного розв'язання, задоволення від розуміння складного матеріалу мотивують учнів до подальшого вивчення математики. Вчитель має створювати ситуації успіху для всіх учнів, добираючи завдання відповідної складності, надаючи своєчасну допомогу, підтримуючи впевненість учнів у своїх силах. Позитивні емоції, пов'язані з математикою, формують стійкий інтерес до предмета та бажання саморозвиватися.

Таким чином, вивчення квадратної функції в основній школі має значний потенціал для формування математичної компетентності учнів у всіх її проявах. Цілеспрямована робота вчителя з використанням різноманітних методів, форм та засобів навчання дозволяє не просто забезпечити засвоєння програмового матеріалу, а й сформувати в учнів здатність застосовувати математичні знання для розв'язування практичних задач, математично моделювати реальні процеси, логічно мислити та аргументувати свої висновки. Сформована математична компетентність стає основою для подальшого вивчення математики в старшій школі та професійної діяльності в майбутньому.

Проведений аналіз теоретичних основ вивчення квадратної функції в основній школі дозволяє зробити наступні висновки. Історико-генетичний аналіз показав, що поняття квадратної функції формувалося протягом тисячоліть від конкретних методів розв'язування квадратних рівнянь у вавилонській математиці до сучасного абстрактного поняття функції як універсального інструменту моделювання реальних процесів. Розуміння цього історичного шляху допомагає вчителю організувати навчальний процес відповідно до природної логіки розвитку математичного знання, від простого до складного, від конкретного до абстрактного.

Математичний зміст квадратної функції є багатограним та включає алгебраїчні, геометричні та функціональні аспекти. Квадратна функція виступає як самостійний об'єкт вивчення з притаманними їй властивостями та як інструмент для дослідження інших математичних об'єктів. Вона відіграє роль інтегруючого центру, навколо якого об'єднуються різні розділи шкільного курсу математики. Систематичне вивчення властивостей квадратичної функції готує учнів до засвоєння більш складних функцій та розвиває функціональне мислення.

Формування математичної компетентності через вивчення квадратної функції відбувається комплексно та охоплює всі її компоненти. Предметні знання про властивості функції інтегруються з діяльнісними вміннями досліджувати функцію різними методами, комунікативними навичками формулювання та обґрунтування висновків, рефлексивними здібностями до самоконтролю та самооцінки. Використання різноманітних методів навчання, диференціація завдань за рівнем складності, застосування інформаційних технологій, організація проєктної діяльності створюють оптимальні умови для розвитку математичної компетентності всіх учнів класу незалежно від їхнього початкового рівня підготовки [9, с. 61].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ КВАДРАТНОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Традиційні та сучасні методи викладання квадратної функції

Методика викладання квадратної функції в основній школі пройшла тривалий шлях розвитку та вдосконалення. Сучасний учитель математики має у своєму розпорядженні широкий арсенал методичних підходів, які поєднують перевірені часом традиційні методи з інноваційними технологіями навчання. Ефективність викладання значною мірою залежить від уміння педагога обирати оптимальне поєднання різних методів відповідно до конкретних навчальних цілей, особливостей класу та змісту матеріалу.

Традиційна методика викладання квадратної функції будується на поступовому ускладненні матеріалу та систематичному відпрацюванні базових умінь. Пояснювально-ілюстративний метод традиційно залишається основним при введенні нового матеріалу. Вчитель послідовно викладає теоретичні відомості, супроводжуючи їх ілюстраціями на дошці, схемами, графіками. Репродуктивний метод широко використовується на етапі закріплення та відпрацювання навичок. Після демонстрації вчителем способу розв'язування типової задачі учні виконують серію аналогічних вправ, відтворюючи засвоєний алгоритм. Систематичне тренування дозволяє довести базові навички до автоматизму, що є необхідною умовою для успішного розв'язування більш складних задач [10].

Однак сучасна методика математичної освіти не обмежується традиційними підходами. Проблемний метод навчання передбачає створення вчителем проблемних ситуацій, які стимулюють пізнавальну активність учнів. Дослідницький метод надає учням ще більшу самостійність. Вони не лише шукають розв'язання поставленої проблеми, а й самі формулюють гіпотези, планують експеримент, аналізують результати, роблять висновки. Евристичний метод займає проміжне положення між проблемним викладом та дослідницьким підходом (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Порівняння традиційних та сучасних методів викладання квадратної функції

Метод навчання	Характерні ознаки	Переваги	Обмеження
Пояснювально-ілюстративний	Послідовний виклад матеріалу вчителем з демонстрацією прикладів	Чіткість викладу, систематичність, економія часу	Пасивність учнів, недостатній розвиток самостійності
Репродуктивний	Відтворення учнями зразків розв'язування за алгоритмом	Міцність базових навичок, автоматизація дій	Механічність виконання, обмеженість творчості
Проблемний	Самостійний пошук розв'язання створеної вчителем проблеми	Розвиток мислення, глибоке розуміння матеріалу	Значні витрати часу, високі вимоги до підготовки
Дослідницький	Самостійне формулювання проблеми та її розв'язання учнями	Максимальна активність, творчість, мотивація	Можливий лише за достатнього рівня підготовки
Діалогічний	Організація навчання через діалог, обговорення, дискусію	Розвиток комунікації, критичного мислення	Потребує високої кваліфікації вчителя
Ігровий	Використання ігрових елементів, змагань, симуляцій	Підвищення мотивації, емоційна залученість	Складність організації, можлива втрата змісту

Джерело: складено автором на основі [11]

Диференційований підхід є обов'язковою складовою сучасної методики викладання математики. Учні одного класу мають різний рівень математичної підготовки, різні здібності, темп засвоєння матеріалу, інтереси. На етапі закріплення пропонуються завдання трьох рівнів складності. Завдання першого рівня є обов'язковими для всіх та забезпечують засвоєння базового матеріалу. Завдання другого рівня призначені для учнів, які впевнено оволоділи базовими навичками. Завдання третього рівня мають підвищену складність та призначені для сильних учнів [11, с. 51–60].

Інтегративний підхід передбачає встановлення міжпредметних зв'язків та розгляд квадратичної функції в контексті інших навчальних дисциплін. Кейс-метод полягає в аналізі та розв'язуванні реальних або максимально наближених до реальності ситуацій. Метод проєктів надає учням можливість самостійно

досліджувати певну проблему протягом тривалого часу та представити результати у вигляді завершеного продукту (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Етапи вивчення квадратної функції та рекомендовані методи

Етап вивчення	Зміст етапу	Рекомендовані методи	Форми роботи
Пропедевтика	Актуалізація знань про функції, повторення квадратних рівнянь	Евристична бесіда, робота з графіками лінійної функції	Фронтальна, індивідуальна
Введення поняття	Означення квадратичної функції, найпростіший випадок $y = x^2$	Пояснювально-ілюстративний, побудова графіка за таблицею	Фронтальна з демонстрацією
Первинне закріплення	Обчислення значень функції, побудова простих графіків	Репродуктивний, вправи за зразком	Індивідуальна, робота в парах
Поглиблене вивчення	Функції $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, вплив коефіцієнтів	Проблемний, дослідницький, лабораторна робота	Групова, індивідуальна
Узагальнення	Загальний вигляд функції, всі властивості	Системний аналіз, порівняння, узагальнення	Фронтальна, групова
Застосування	Розв'язування рівнянь, нерівностей, практичних задач	Кейс-метод, метод проєктів, диференційований підхід	Індивідуальна, групова, парна

Джерело: складено автором на основі [12]

Технологія критичного мислення розвиває здатність учнів аналізувати інформацію, ставити запитання, формувати власну думку. Фліпнутий клас є інноваційною моделлю організації навчання, коли учні вдома самостійно вивчають новий теоретичний матеріал за відеолекціями, а на уроці відпрацьовують практичні навички. Змішане навчання поєднує традиційну очну форму з елементами дистанційного навчання. Колаборативне навчання передбачає організацію спільної роботи учнів над загальним завданням, коли успіх кожного залежить від успіху всіх членів групи (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Переваги та особливості застосування сучасних методів

Метод	Основна ідея	Ключові переваги	Умови ефективності
Проблемне навчання	Створення проблемних ситуацій та самостійний пошук рішення	Глибоке розуміння, розвиток мислення	Достатня базова підготовка учнів

Продовження таблиці 2.3

Кейс-метод	Аналіз реальних ситуацій та прийняття рішень	Зв'язок з практикою, розвиток критичного мислення	Якісна підготовка кейсів вчителем
Метод проєктів	Самостійне дослідження та створення продукту	Максимальна самостійність, творчість	Достатній час, підтримка вчителя
Фліпнутий клас	Теорія вдома, практика в класі	Раціональне використання часу уроку	Наявність технічних засобів, самодисципліна учнів
Гейміфікація	Використання ігрових механік у навчанні	Висока мотивація, емоційна залученість	Баланс між грою та навчанням
Колаборативне навчання	Спільна робота заради спільної мети	Розвиток комунікації, взаємодопомога	Правильне формування груп, чіткі інструкції

Джерело: складено автором на основі [12]

Вибір методів викладання має бути обґрунтованим та враховувати множину факторів: дидактичні цілі конкретного уроку, зміст навчального матеріалу, особливості класу, матеріально-технічні умови [12]. Оптимальним є поєднання різних методів у межах однієї теми або навіть одного уроку.

2.2. Використання візуалізації та інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні

Візуалізація навчального матеріалу відіграє ключову роль у викладанні квадратичної функції, оскільки графічне представлення дозволяє учням побачити абстрактні математичні закономірності, зрозуміти зв'язок між алгебраїчним виразом та геометричною формою. Сучасні інформаційно-комунікаційні технології надають безпрецедентні можливості для якісної візуалізації математичних об'єктів та інтерактивної взаємодії з ними.

Динамічне математичне програмне забезпечення революціонізувало викладання функцій. Програми типу GeoGebra, Desmos дозволяють будувати графіки функцій миттєво, змінювати параметри та спостерігати, як змінюється графік у реальному часі. На етапі введення поняття вчитель демонструє на інтерактивній дошці, як будується графік функції $y = x^2$, як він змінюється при

переході до інших функцій. Учні спостерігають за змінами та формують висновки про вплив коефіцієнтів (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

**Можливості динамічних математичних систем для вивчення
квадратної функції**

Функціональність	Навчальні можливості	Приклади використання
Швидка побудова графіків	Економія часу, можливість розглянути багато прикладів	Порівняння графіків функцій з різними коефіцієнтами
Зміна параметрів повзунками	Динамічна візуалізація впливу коефіцієнтів	Дослідження впливу кожного коефіцієнта на графік
Точні вимірювання координат	Перевірка обчислень, знаходження координат вершини	Визначення екстремумів функції графічно
Анімація та траєкторії	Моделювання руху, демонстрація застосувань	Траєкторія руху тіла під дією гравітації
Побудова дотичних та площ	Пропедевтика похідної та інтеграла	Геометричний зміст похідної в точці
Інтерактивні конструкції	Дослідження властивостей через маніпуляції	Побудова параболи за заданими умовами

Джерело: складено автором на основі [13]

Інтерактивні апплети особливо ефективні з повзунками, які дозволяють плавно змінювати значення коефіцієнтів a , b , c та спостерігати відповідні зміни графіка. Учні можуть виконувати віртуальні лабораторні роботи, заповнювати таблиці спостережень, формувати та перевіряти гіпотези [13, с. 39–44]. Онлайн-калькулятори графіків, такі як Desmos, мають зручний інтерфейс та широкі можливості візуалізації.

Презентаційне програмне забезпечення використовується для структурованої подачі теоретичного матеріалу. Відеоматеріали мають значний дидактичний потенціал для пояснення теоретичного матеріалу та покрокового розв'язування типових задач. Інтерактивна дошка розширює можливості традиційної класної дошки, дозволяючи зберігати всі записи уроку та надавати їх учням для повторення. Мобільні застосунки дозволяють учням працювати з математичним матеріалом у будь-який час та в будь-якому місці [14].

Системи управління навчанням, такі як Google Classroom або Moodle, дозволяють організувати повний цикл навчальної діяльності в онлайн-форматі.

Онлайн-тестування забезпечує швидку перевірку знань та надання негайного зворотного зв'язку. Адаптивні тести підлаштовуються під рівень учня, пропонуючи складніші або простіші завдання залежно від успішності відповідей (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Класифікація ІКТ-засобів для викладання квадратної функції

Тип засобу	Назви програм/платформ	Основне призначення	Етапи навчання
Динамічна геометрія	GeoGebra, Desmos, GeoGebra Classic	Побудова та дослідження графіків	Всі етапи
Презентації	PowerPoint, Google Slides, Prezi	Структурована подача матеріалу	Пояснення нового
Відеоматеріали	YouTube, власні відео	Пояснення, демонстрація	Пояснення, самостійна робота
Системи комп'ютерної алгебри	Wolfram Alpha, Mathematica	Перевірка обчислень, складні задачі	Закріплення, поглиблення
Навчальні платформи	Google Classroom, Moodle	Організація навчального процесу	Всі етапи
Тренажери	Khan Academy, Photomath	Відпрацювання навичок	Закріплення, контроль

Джерело: складено автором на основі [15]

Однак використання ІКТ має бути виваженим та методично обґрунтованим. Надмірне захоплення комп'ютерними програмами може призвести до зниження уваги до розвитку базових навичок. Важливо знаходити баланс між традиційними методами та інноваційними технологіями. Технічні проблеми можуть виникати при використанні ІКТ, тому вчитель має завжди мати альтернативний план уроку. Підготовка вчителя до використання ІКТ потребує постійного професійного розвитку [15, с. 144–157].

2.3. Аналіз типових помилок учнів та методи їх корекції

Систематичний аналіз помилок учнів при вивченні квадратної функції є необхідною умовою ефективної організації навчального процесу. Розуміння природи типових помилок дозволяє вчителю передбачити труднощі,

організувати превентивну роботу, розробити систему корекційних заходів. Помилки учнів можуть бути класифіковані за різними критеріями: за змістом, за причинами виникнення, за стійкістю, за способами виправлення.

Концептуальні помилки пов'язані з нерозумінням суті математичних понять та зв'язків між ними. Типовою є ототожнення понять "корінь рівняння" та "значення функції". Алгебраїчні помилки виникають при виконанні перетворень виразів, розв'язуванні рівнянь, застосуванні формул. Графічні помилки виявляються при побудові графіків функцій. Логічні помилки виявляються в міркуваннях учнів, коли вони роблять неправильні висновки. Обчислювальні помилки виникають при виконанні арифметичних операцій (табл. 2.6).

Таблиця 2.6

Типові помилки при роботі з квадратною функцією та їх причини

Тип помилки	Приклади помилкових дій	Причини виникнення	Методи профілактики
Концептуальні	Плутанина функції та рівняння, нерозуміння зв'язку графіка та формули	Недостатнє формування поняття функції	Робота з означеннями, встановлення зв'язків між поняттями
Алгебраїчні	Помилки в формулі квадрата двочлена, неправильне застосування формул	Слабкі навички тотожних перетворень	Систематичне тренування базових навичок
Графічні	Неправильна побудова системи координат, неточне відмічання точок	Недостатньо розвинені графічні навички	Відпрацювання техніки побудови графіків
Логічні	Неправильні висновки про властивості функції, порушення алгоритму	Несформованість логічного мислення	Навчання обґрунтуванню кроків розв'язування
Обчислювальні	Арифметичні помилки при підстановці значень	Недостатня автоматизація обчислень	Усний рахунок, використання калькулятора для перевірки
Методичні	Вибір нераціонального способу розв'язування	Недостатній досвід розв'язування задач	Аналіз різних способів, порівняння їх ефективності

Джерело: складено автором на основі [17]

Профілактика помилок починається з якісного пояснення матеріалу. Систематичне тренування базових навичок допомагає автоматизувати дії.

Важливим методом профілактики є формування звички до самоконтролю [16]. Для квадратних рівнянь ефективною перевіркою є підстановка знайдених коренів у вихідне рівняння (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Система корекційних заходів для різних типів помилок

Тип помилки	Діагностичні ознаки	Корекційні вправи	Організаційні форми
Нерозуміння поняття функції	Плутанина в термінах, неправильна інтерпретація графіків	Робота з означенням, встановлення відповідності між графіками та формулами	Індивідуальна бесіда, робота в парах
Помилки в алгебраїчних перетвореннях	Систематичні помилки одного типу	Цільові вправи на проблемну операцію, картки для самостійної роботи	Індивідуальні завдання, взаємоперевірка
Неправильна побудова графіків	Несиметричні параболи, неточності в точках	Покрокова побудова під контролем вчителя, використання шаблонів	Індивідуальна робота, демонстрація
Логічні помилки в міркуваннях	Неправильні висновки про властивості	Завдання на обґрунтування кожного кроку, аналіз помилкових міркувань	Колективне обговорення, аргументація
Обчислювальні помилки	Арифметичні помилки, помилки зі знаками	Усний рахунок, завдання на обчислення, використання калькулятора для перевірки	Початок уроку, математичні естафети

Джерело: складено автором на основі [17]

Аналіз помилок на уроці може проводитися в різних формах. Ефективним є прийом "знайди помилку", коли учням пропонується готове розв'язування з навмисно допущеними помилками [17, с. 105–109]. Індивідуальна робота над помилками проводиться після перевірки письмових робіт. Групова робота дозволяє учням обговорювати способи розв'язування та виявляти помилки в міркуваннях один одного. Використання інформаційних технологій розширює можливості діагностики та корекції помилок.

Психологічний аспект роботи з помилками також є важливим. Помилка має сприйматися не як провал, а як природна частина процесу навчання. Конструктивний підхід до помилок передбачає аналіз того, що саме в

міркуваннях учня було правильним, а в якому місці відбувся збій. Превентивний підхід до помилок є найбільш ефективним. Формування в учнів звички до самоперевірки, усвідомленого виконання кожного кроку алгоритму значно зменшує кількість помилок.

Проведений аналіз методичних підходів до викладання квадратної функції дозволяє зробити важливі висновки. Оптимальним є гнучке поєднання різних методів відповідно до конкретних навчальних цілей. Використання візуалізації та ІКТ значно розширює дидактичні можливості викладання. Систематичний аналіз типових помилок учнів та організація цілеспрямованої корекційної роботи є необхідною умовою забезпечення якості навчальних досягнень [18].

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ КВАДРАТНОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Розробка системи задач для вивчення квадратної функції та її властивостей

Система задач є основним інструментом формування математичних знань, умінь та навичок учнів. Ефективна система задач з квадратної функції має бути структурованою, послідовною, різноманітною за змістом та рівнем складності, спрямованою на досягнення конкретних навчальних цілей. При розробці такої системи необхідно враховувати логіку розгортання навчального матеріалу, психологічні особливості засвоєння математичних понять учнями основної школи, принципи доступності та науковості, зв'язок теорії з практикою.

Систематизація задач за дидактичною метою дозволяє цілеспрямовано використовувати різні типи завдань на відповідних етапах навчання. Задачі на актуалізацію опорних знань допомагають підготувати учнів до сприйняття нового матеріалу, нагадати раніше вивчені поняття та факти, встановити зв'язок між новим та відомим. Перед введенням поняття квадратичної функції доцільно запропонувати задачі на повторення лінійної функції, побудову графіків за таблицею значень, обчислення значень виразів, що містять квадрат змінної.

Задачі на засвоєння нових понять та способів діяльності є центральними на етапі первинного закріплення матеріалу. Ці завдання мають бути максимально близькими до розглянутих на уроці зразків, що дозволяє учням застосувати щойно засвоєний алгоритм у типовій ситуації. Наприклад, після пояснення побудови графіка функції $y = x^2$ учням пропонуються аналогічні завдання на побудову графіків функцій $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = 0,5x^2$. Важливо, щоб на цьому етапі завдання не містили додаткових труднощів та ускладнень, забезпечуючи успішність виконання більшістю учнів класу.

Тренувальні вправи призначені для відпрацювання навичок та доведення їх до автоматизму. Систематичне виконання однотипних завдань формує міцні обчислювальні та графічні навички, необхідні для подальшого успішного

розв'язування складніших задач. Однак надмірне захоплення тренувальними вправами може призвести до втрати інтересу до предмета, тому їх кількість має бути виваженою та доповнюватися завданнями інших типів [19, с. 21].

Задачі на застосування знань у змінених умовах вимагають від учнів переносу засвоєних способів діяльності на нові ситуації. Ці завдання можуть відрізнятися від типових формою подання умови, комбінацією кількох операцій, необхідністю самостійного вибору методу розв'язування. Наприклад, після вивчення побудови графіка квадратичної функції можна запропонувати завдання, де потрібно за графіком відновити формулу функції або визначити знаки коефіцієнтів (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Класифікація задач за дидактичною метою та етапами вивчення

Тип задачі	Дидактична мета	Етап навчання	Приклади завдань
Підготовчі	Актуалізація опорних знань, мотивація	Початок теми	Обчисліть значення виразу x^2 для $x = -3, 0, 2$; побудуйте графік лінійної функції
Навчальні	Формування нових умінь за зразком	Первинне закріплення	Побудуйте графік функції $y = 2x^2$; знайдіть значення функції при $x = 3$
Тренувальні	Відпрацювання навичок, автоматизація	Закріплення	Розв'яжіть квадратні рівняння за формулою; побудуйте графіки серії функцій
Застосування	Перенос знань у нові ситуації	Закріплення, узагальнення	За графіком визначте коефіцієнти функції; порівняйте властивості кількох функцій
Узагальнення	Систематизація знань, встановлення зв'язків	Узагальнення	Складіть таблицю властивостей квадратичної функції; порівняйте з лінійною
Контрольні	Перевірка рівня засвоєння матеріалу	Контроль	Комплексні завдання різного рівня на всі вивчені питання

Джерело: складено автором на основі [20]

Творчі задачі розвивають самостійність мислення, здатність до пошуку нестандартних рішень, дослідницькі навички. До них відносяться задачі на доведення властивостей, складання власних задач за заданою схемою, знаходження кількох способів розв'язування, виявлення закономірностей. Наприклад, можна запропонувати учням дослідити, як змінюється відстань між

точками перетину параболи з віссю абсцис при зміні коефіцієнта c , або знайти всі можливі способи розв'язування конкретного квадратного рівняння.

Проблемні задачі створюють ситуацію інтелектуального утруднення, яке стимулює пошукову діяльність учнів. У таких задачах відсутня пряма вказівка на спосіб розв'язування, учні мають самостійно проаналізувати ситуацію, висунути гіпотезу, знайти шлях до розв'язку. Проблемною може бути задача на знаходження найбільшої площі прямокутника при заданому периметрі, де учні самостійно мають прийти до необхідності дослідження квадратичної функції на екстремум.

Практико-орієнтовані задачі демонструють застосування квадратичної функції в реальному житті та різних галузях діяльності. Умова таких задач описує реальну або наближену до реальності ситуацію, в якій математична модель виступає інструментом для прийняття рішення. Задачі про траєкторію руху тіла, оптимізацію прибутку підприємства, розрахунок оптимальних параметрів конструкції показують учням практичну цінність математичних знань.

Міжпредметні задачі встановлюють зв'язки математики з іншими навчальними дисциплінами. Задачі з фізики на рівноприскорений рух, задачі з економіки на функції попиту та пропозиції, задачі з біології на динаміку популяцій не лише розширюють кругозір учнів, а й демонструють універсальність математичних методів. При розв'язуванні таких задач учні вчаться перекладати умову, сформульовану мовою іншої науки, на мову математики, будувати математичну модель, досліджувати її та інтерпретувати результати в термінах вихідної задачі.

Диференціація задач за рівнем складності є необхідною умовою забезпечення успішності навчання всіх учнів класу. Завдання базового рівня мають бути доступними для виконання кожним учнем, який засвоїв мінімальний обов'язковий обсяг знань. Ці завдання перевіряють розуміння основних понять, володіння стандартними алгоритмами, здатність розв'язувати типові задачі.

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 - 4$, знайти координати вершини параболи, розв'язати просте квадратне рівняння.

Завдання середнього рівня складності передбачають комбінування кількох операцій, застосування знань у дещо змінній ситуації, необхідність аналізу умови та вибору методу розв'язування. Такі завдання можуть включати побудову графіка функції загального вигляду з повним дослідженням властивостей, розв'язування квадратної нерівності методом інтервалів, складання функції за умовою задачі та знаходження її найбільшого або найменшого значення.

Завдання підвищеної складності призначені для сильних учнів, які впевнено володіють програмовим матеріалом та потребують інтелектуального виклику. Ці задачі можуть містити параметри, вимагати дослідження різних випадків, передбачати необхідність доведення, знаходження нестандартного підходу. Наприклад, визначити, при яких значеннях параметра a графік функції $y = ax^2 + bx + c$ проходить через дві задані точки, або дослідити взаємне розміщення двох парабол залежно від значень коефіцієнтів (табл. 3.2).

Методична послідовність введення задач має відповідати логіці формування поняття квадратичної функції. На початковому етапі вивчаються найпростіші випадки функції $y = x^2$ та $y = ax^2$, що дозволяє учням сформулювати базове уявлення про параболу та вплив коефіцієнта a на її форму та положення. Задачі на цьому етапі передбачають обчислення значень функції для конкретних аргументів, заповнення таблиці значень, побудову графіка за точками, порівняння графіків різних функцій.

Поступово вводяться функції виду $y = ax^2 + c$, де учні досліджують вплив вільного члена на положення параболи відносно початку координат. Завдання ускладнюються за рахунок необхідності визначати координати точки перетину з віссю ординат, досліджувати наявність точок перетину з віссю абсцис, порівнювати властивості функцій з різними значеннями коефіцієнтів. Важливим елементом є формування вміння за графіком визначати знаки коефіцієнтів a та c [20].

Таблиця 3.2

Система задач різних рівнів складності для теми "Квадратична функція"

Рівень	Когнітивна складність	Приклад завдання	Очікуваний результат
Початковий (базовий)	Відтворення, розпізнавання	Обчисліть $f(-2)$, якщо $f(x) = x^2$; визначте, чи є функція $y = 3x + 5$ квадратичною	Правильне обчислення; розпізнавання типу функції
Середній (стандартний)	Застосування алгоритму, комбінування дій	Побудуйте графік функції $y = x^2 - 6x + 5$ та дослідіть її властивості	Графік побудовано правильно, властивості визначені
Достатній	Аналіз, синтез, порівняння	Знайдіть найбільше значення виразу $-2x^2 + 8x - 3$; розв'яжіть нерівність $x^2 - 5x + 6 < 0$	Обґрунтоване знаходження екстремуму; розв'язок нерівності з поясненням
Високий (поглиблений)	Дослідження, узагальнення, творчість	При яких значеннях a рівняння $x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ має два різні корені? Доведіть, що вершина параболи $y = x^2 + px + q$ лежить нижче осі Ox тоді і тільки тоді, коли $p^2 > 4q$	Повне дослідження з обґрунтуванням; строге доведення

Перехід до загального вигляду квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ потребує засвоєння нових алгоритмів знаходження координат вершини параболи та осі симетрії. Завдання на цьому етапі включають дослідження функції за схемою: область визначення, область значень, нулі функції, координати вершини, вісь симетрії, проміжки зростання та спадання, найбільше або найменше значення, побудова графіка. Поступово від повного дослідження кожної функції переходять до вибіркового дослідження певних характеристик залежно від мети задачі.

Інтеграція квадратної функції з іншими темами курсу математики відбувається через систему комплексних задач. Розв'язування квадратних рівнянь та нерівностей графічним методом демонструє зв'язок між алгебраїчними та графічними представленнями. Системи рівнянь, що містять квадратичну функцію, розв'язуються як аналітично, так і графічно, що дозволяє учням побачити різні підходи до однієї проблеми та порівняти їх ефективність.

Текстові задачі на складання квадратного рівняння або дослідження квадратичної функції інтегрують різні розділи курсу.

Організація самостійної роботи учнів з задачами передбачає поступове збільшення частки самостійності. На початкових етапах вивчення теми учні виконують завдання за детальними інструкціями або зразками, потім переходять до завдань, де вказаний лише загальний план розв'язування, і нарешті до повністю самостійного розв'язування без підказок. Така організація відповідає принципу поступового нарощування складності та забезпечує формування справжньої самостійності, а не механічного відтворення зразків.

Домашні завдання мають бути ретельно продуманими та збалансованими за обсягом і складністю. Обов'язкова частина домашнього завдання включає задачі на закріплення матеріалу, вивченого на уроці, та є доступною для виконання кожним учнем, який уважно працював на уроці. Додаткова частина містить завдання підвищеної складності для учнів, які прагнуть поглибити свої знання. Творча частина може включати складання власних задач, пошук додаткової інформації, виконання міні-дослідження.

Задачі для організації групової роботи мають бути достатньо складними, щоб один учень не міг швидко їх розв'язати, та достатньо багатоаспектними, щоб кожен член групи міг внести свій внесок. Це можуть бути задачі на порівняння властивостей кількох функцій, дослідження залежності розташування параболи від параметрів, складання задачника з певної теми з розв'язками та ілюстраціями. Груповий формат дозволяє учням обговорювати різні підходи, аргументувати свою думку, вчитися у однокласників.

Задачі для проєктної діяльності мають бути відкритими, допускати різні підходи до розв'язування, мати практичну спрямованість. Теми проєктів можуть включати дослідження застосування парабол в архітектурі та будівництві, моделювання економічних процесів за допомогою квадратичних функцій, створення інтерактивного навчального посібника з квадратичних функцій, комп'ютерне моделювання траєкторії руху тіла. Виконання проєкту передбачає

не лише розв'язування задач, а й пошук інформації, її систематизацію, представлення результатів у зручній формі (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Розподіл типів задач за етапами вивчення теми

Етап вивчення	Основні типи задач	Співвідношення рівнів складності	Форми організації
Актуалізація знань	Підготовчі, на повторення	Переважно базовий рівень	Фронтальна, усна робота
Введення поняття	Навчальні за зразком, розпізнавання	70% базовий, 30% середній	Фронтальна з коментуванням
Первинне закріплення	Тренувальні, типові	60% базовий, 30% середній, 10% достатній	Індивідуальна, робота в парах
Застосування знань	На перенос, комбіновані	40% середній, 40% достатній, 20% високий	Індивідуальна, групова
Узагальнення	Систематизуючі, творчі, дослідницькі	30% середній, 40% достатній, 30% високий	Групова, проєктна
Контроль	Різномірні контрольні	Всі рівні пропорційно	Індивідуальна письмова

Джерело: складено автором на основі [21]

Формування вміння розв'язувати практичні задачі потребує спеціальної системи завдань, які демонструють застосування квадратичної функції в різних сферах. Задачі з геометричним змістом можуть передбачати знаходження максимальної площі фігури при заданих обмеженнях, оптимальних розмірів конструкції, найкоротшої відстані. Наприклад, знайти розміри прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник, або визначити положення точки на параболі, найближчої до заданої точки площини.

Задачі з фізичним змістом описують рух тіл під дією сили тяжіння, залежність енергії від швидкості, інші фізичні процеси, що моделюються квадратичними функціями. При розв'язуванні таких задач учні вчаться використовувати фізичні формули для побудови математичної моделі, досліджувати її математичними методами та інтерпретувати результати в термінах фізичної ситуації. Важливо, щоб задачі містили реалістичні числові дані та передбачали обговорення фізичного змісту отриманих результатів.

Економічні задачі розглядають залежність прибутку від ціни товару, витрат від обсягу виробництва, оптимізацію економічних показників. Ці задачі

мають особливу цінність, оскільки формують фінансову грамотність учнів, демонструють застосування математики в сфері, з якою кожна людина стикається в повсякденному житті. Наприклад, визначити оптимальну ціну товару, яка забезпечує максимальний прибуток, враховуючи залежність попиту від ціни [21].

Контрольні завдання мають охоплювати всі основні питання теми та включати задачі різних типів та рівнів складності. Структура контрольної роботи може передбачати кілька частин: обов'язкову частину з базовими завданнями, виконання якої забезпечує мінімальний позитивний результат; основну частину з завданнями середнього рівня для отримання достатнього бала; додаткову частину з завданнями підвищеної складності для учнів, які претендують на високий рівень. Така структура дозволяє кожному учню продемонструвати свої знання на доступному рівні та уникнути ситуації повної неуспішності.

Використання інформаційних технологій розширює можливості організації роботи з задачами. Онлайн-тренажери дозволяють учням відпрацьовувати навички в інтерактивному режимі з миттєвим зворотним зв'язком. Системи автоматизованої перевірки дають можливість організувати масове тестування з різнорівневими завданнями. Динамічні математичні системи дозволяють створювати інтерактивні задачі, де учні можуть експериментувати з параметрами та спостерігати зміни графіків та властивостей функцій.

3.2. Практичне застосування квадратної функції у реальних життєвих ситуаціях

Демонстрація практичного застосування математичних знань є одним із найефективніших засобів підвищення мотивації учнів до вивчення предмета та формування розуміння ролі математики в сучасному світі. Квадратична функція має численні застосування в різних сферах людської діяльності, що робить її вивчення особливо цінним з точки зору практичної спрямованості навчання. Систематичне розгляд реальних ситуацій, які моделюються квадратичними

залежностями, формує в учнів уміння бачити математику навколо себе, застосовувати теоретичні знання для розв'язування життєвих проблем.

Фізика є однією з найбільш природних сфер застосування квадратичної функції. Класичним прикладом є рух тіла, кинутого вертикально вгору або під кутом до горизонту. Висота тіла над землею як функція часу описується квадратичною залежністю $h(t) = h_0 + v_0 t - gt^2/2$, де h_0 – початкова висота, v_0 – початкова швидкість, g – прискорення вільного падіння. Дослідження цієї функції дозволяє визначити максимальну висоту підйому, час досягнення максимальної висоти, час падіння на землю, швидкість у будь-який момент часу.

Траєкторія руху снаряда або м'яча, кинутого під кутом до горизонту, є параболою. Залежність вертикальної координати від горизонтальної описується квадратичною функцією, що використовується в балістиці, спортивних іграх, при проектуванні фонтанів. Учні можуть розв'язувати задачі на визначення дальності польоту, максимальної висоти траєкторії, кута нахилу для досягнення заданої цілі. Такі задачі мають яскраву практичну спрямованість та легко візуалізуються, що сприяє кращому розумінню матеріалу.

Кінетична енергія руху тіла пропорційна квадрату його швидкості: $E = mv^2/2$, де m – маса тіла, v – швидкість. Це означає, що залежність енергії від швидкості є квадратичною функцією. Розуміння цієї залежності важливе для усвідомлення правил дорожнього руху: при збільшенні швидкості вдвічі кінетична енергія зростає вчетверо, що різко збільшує руйнівну силу можливого зіткнення та гальмівний шлях транспортного засобу (табл. 3.4).

Економічні застосування квадратичної функції пов'язані з моделюванням залежності прибутку, доходу, витрат від різних факторів. Функція прибутку підприємства часто має квадратичний характер: при дуже низькій ціні прибуток малий через низьку маржу, при дуже високій ціні прибуток також малий через низький обсяг продажів. Існує оптимальна ціна, яка забезпечує максимальний прибуток. Математична модель такої ситуації має вигляд $\Pi(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, де x – ціна товару, c – собівартість, $Q(x)$ – функція попиту, яка часто є лінійною спадною функцією [22].

Таблиця 3.4

Застосування квадратичної функції в різних галузях

Галузь застосування	Конкретні приклади	Типові задачі	Математична модель
Фізика	Рух тіла під дією гравітації, кінетична енергія	Знайти максимальну висоту, час польоту, дальність	$h = v_0 t - gt^2/2$, $E = mv^2/2$
Економіка	Прибуток залежно від ціни, витрати виробництва	Оптимізація ціни, максимізація прибутку	$\Pi = (c - c_0) \cdot Q(c)$, де $Q(c)$ – попит
Архітектура	Параболічні арки, куполи, мости	Розрахунок форми конструкції, міцності	Рівняння параболи заданої форми
Сільське господарство	Огорожа ділянки, оптимальна площа поля	Максимізація площі при обмеженнях	$S = x(L - 2x)$ для прямокутника
Оптика	Параболічні дзеркала, телескопи	Фокусування світла, розрахунок фокусної відстані	Геометричні властивості параболи
Біологія	Динаміка популяцій, зростання організмів	Моделювання чисельності популяції	$N(t) = at^2 + bt + c$ на певних етапах

Джерело: складено автором на основі [22]

Розглянемо конкретну практичну задачу. Підприємство виробляє продукцію собівартістю 50 грн за одиницю. Дослідження ринку показало, що при ціні 100 грн можна продати 200 одиниць на день, а при збільшенні ціни на кожну гривню обсяг продажів зменшується на 2 одиниці. Необхідно визначити оптимальну ціну для максимізації денного прибутку. Складемо математичну модель: якщо ціна становить x грн, то обсяг продажів $Q = 200 - 2(x - 100) = 400 - 2x$ одиниць, прибуток $\Pi = (x - 50)(400 - 2x) = -2x^2 + 500x - 20000$. Це квадратична функція з $a = -2 < 0$, тому вона має максимум у вершині. Абсциса вершини $x_{\max} = -500/(2 \cdot (-2)) = 125$ грн. Отже, оптимальна ціна становить 125 грн, що забезпечує денний прибуток $\Pi(125) = 11250$ грн.

Архітектура та будівництво використовують параболічні форми через їх естетичні властивості та міцнісні характеристики. Параболічні арки рівномірно розподіляють навантаження та витримують значні ваги. Багато відомих споруд мають параболічну форму: арки мостів, склепіння будівель, дахи спортивних споруд. При проектуванні таких конструкцій інженери використовують математичні властивості параболи для розрахунку форми, міцності, розподілу навантаження. Учні можуть виконати проєкт з дослідження параболічних форм

у місцевій архітектурі, сфотографувати приклади, підібрати рівняння парабол, що описують форму конструкцій.

Оптика та фізика світла активно використовують параболічні поверхні. Параболічне дзеркало має унікальну властивість: всі промені світла, які падають на нього паралельно осі симетрії, після відбиття збираються в одній точці – фокусі параболі. Ця властивість використовується в телескопах-рефлекторах, прожекторах, супутникових антенах, сонячних концентраторах. Навпаки, джерело світла, розміщене у фокусі параболічного дзеркала, створює паралельний пучок променів. На цьому принципі працюють автомобільні фари та ліхтарики.

Сільське господарство надає багато прикладів оптимізаційних задач, які розв'язуються за допомогою квадратичної функції. Класична задача про огорожу: фермер має певну довжину паркану і хоче огородити прямокутну ділянку максимальної площі. Якщо одна сторона ділянки прилягає до стіни будівлі або річки, задача зводиться до квадратичної функції. При загальній довжині паркану L метрів, якщо одна сторона прямокутника дорівнює x метрів, то друга сторона дорівнює $(L - 2x)$ метрів, площа $S = x(L - 2x) = Lx - 2x^2$ є квадратичною функцією, яка досягає максимуму при $x = L/4$.

Спортивні задачі часто пов'язані з параболічною траєкторією руху м'яча або снаряда. У баскетболі, волейболі, футболі траєкторія м'яча після удару або кидка описується параболою. Спортсмени інтуїтивно враховують це, визначаючи кут та силу удару для досягнення цілі. Математичне моделювання таких ситуацій допомагає краще зрозуміти фізику процесу. Учні можуть виконати експериментальну роботу: зняти на відео траєкторію м'яча, обробити кадри, побудувати графік траєкторії та підібрати рівняння параболі.

Екологічні застосування включають моделювання динаміки популяцій, поширення забруднень, ефективності природоохоронних заходів. На певних етапах зростання популяції її чисельність може описуватися квадратичною функцією часу. Концентрація забруднюючої речовини на різних відстанях від джерела викиду може залежати від відстані квадратично. Ефективність

використання добрив у сільському господарстві демонструє квадратичну залежність: при малих дозах урожайність зростає пропорційно до кількості добрив, при дуже великих дозах настає пригнічення росту рослин.

Технологічні застосування квадратичної функції включають проектування параболічних антен для прийому супутникових сигналів, розрахунок траєкторії польоту ракет та космічних апаратів, оптимізацію технологічних процесів. Інженери використовують квадратичні моделі для опису залежності якості продукції від параметрів виробничого процесу, знаходження оптимальних режимів роботи обладнання, мінімізації витрат матеріалів при збереженні необхідних характеристик виробів.

Медичні застосування включають моделювання концентрації лікарських препаратів у крові після прийому, залежності ефективності лікування від дозування, розповсюдження епідемій на початкових стадіях. Фармакологи використовують математичні моделі, в тому числі квадратичні функції, для визначення оптимальних доз ліків, частоти прийому, прогнозування побічних ефектів. Епідеміологи моделюють динаміку захворюваності, що на ранніх стадіях часто має квадратичний характер зростання.

Організація навчальної діяльності з вивчення практичних застосувань має включати різноманітні форми роботи. Розв'язування готових задач з практичним змістом дає базові навички математичного моделювання реальних ситуацій. Самостійне складання задач на основі реальних даних розвиває креативність та глибше розуміння зв'язків математики з життям. Виконання міні-досліджень з реальними експериментами та обробкою даних формує дослідницькі компетентності. Проектна діяльність з комплексного вивчення застосувань квадратичної функції в певній галузі інтегрує різні види діяльності (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

Типи практико-орієнтованих завдань та методика їх використання

Тип завдання	Характеристика	Приклад	Методичні рекомендації
Стандартна текстова задача	Умова описує реальну ситуацію, потрібно скласти модель та розв'язати	М'яч кинули вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Через скільки секунд він впаде на землю?	Аналіз умови, виділення даних, складання рівняння, розв'язування, інтерпретація

Дослідницька задача	Потрібно провести спостереження або експеримент, зібрати дані	Дослідити залежність дальності польоту паперового літачка від кута запуску	Планування експерименту, збір даних, побудова моделі, перевірка адекватності
Проектне завдання	Комплексне дослідження теми з представленням результатів	Створити презентацію "Парабола в архітектурі нашого міста"	Пошук інформації, фотографування, математичний аналіз, оформлення, презентація
Оптимізаційна задача	Знайти найкраще рішення при заданих обмеженнях	Визначити розміри коробки найбільшого об'єму з листа картону	Побудова функції мети, дослідження на екстремум, аналіз реалістичності розв'язку
Кейс	Описано реальну ситуацію, потрібно прийняти обґрунтоване рішення	Підприємець має визначити ціну товару для максимізації прибутку	Аналіз ситуації, побудова моделі, дослідження варіантів, обґрунтування рішення

Джерело: складено автором на основі [23]

Міжпредметні зв'язки посилюють практичну спрямованість вивчення квадратичної функції. Співпраця з учителями фізики дозволяє координувати вивчення відповідних тем та використовувати математичний апарат для розв'язування фізичних задач. На уроках інформатики учні можуть створювати програми для моделювання руху тіла по параболічній траєкторії, побудови графіків квадратичних функцій, розв'язування оптимізаційних задач. На уроках біології квадратичні моделі використовуються для опису зростання популяцій, залежності між розмірами організмів та їх характеристиками [23, с. 152].

Екскурсії та виїзні заняття дозволяють учням побачити реальні приклади застосування параболічних форм. Відвідування спортивних об'єктів, промислових підприємств, будівельних майданчиків з подальшим математичним аналізом побаченого робить навчання більш живим та цікавим. Учні можуть сфотографувати параболічні конструкції, виміряти їх параметри, побудувати математичні моделі, порівняти теоретичні розрахунки з реальними даними.

Залучення фахівців з різних галузей до проведення уроків або бесід підвищує мотивацію учнів. Інженер може розповісти про використання математичних моделей при проектуванні конструкцій, економіст – про застосування оптимізаційних методів у бізнесі, спортивний тренер – про фізику

руху м'яча. Такі зустрічі допомагають учням побачити реальних людей, які використовують математику в професійній діяльності, що робить абстрактні знання більш осмисленими.

Використання реальних даних у задачах підвищує їх достовірність та цікавість. Замість вигаданих чисел можна використовувати статистичні дані про ціни товарів, економічні показники, результати спортивних змагань, фізичні константи. Учні можуть самостійно знаходити такі дані в Інтернеті, статистичних довідниках, наукових публікаціях, що розвиває навички роботи з інформацією та формує розуміння того, що математика оперує реальними фактами.

Створення власних задач учнями є вищою формою прояву розуміння практичних застосувань. Коли учень може самостійно сформулювати задачу на основі реальної ситуації, визначити дані, поставити запитання, скласти математичну модель та розв'язати її, це свідчить про глибоке розуміння матеріалу. Організація конкурсу на найцікавішу або найоригінальнішу задачу стимулює креативність учнів та підвищує інтерес до предмета.

Критичне осмислення застосування математичних моделей також є важливим аспектом навчання. Учні мають розуміти, що будь-яка модель є спрощенням реальності та має свої обмеження. Квадратична функція адекватно описує деякі реальні процеси лише в певних діапазонах змінної або за певних умов. Навчання критично оцінювати адекватність моделі, виявляти фактори, які не враховані, розуміти межі застосовності формує наукове мислення та убезпечує від некритичного використання математичних методів [24].

3.3. Експериментальна перевірка ефективності запропонованої методики викладання

Експериментальна перевірка методичних розробок є необхідним етапом наукового обґрунтування їх ефективності. Педагогічний експеримент дозволяє порівняти результати навчання при використанні традиційної та запропонованої

методики, виявити переваги та недоліки нових підходів, отримати об’єктивні дані про вплив різних методичних прийомів на якість засвоєння матеріалу учнями. Організація такого експерименту потребує ретельного планування, чіткого визначення критеріїв оцінювання, коректних методів статистичної обробки даних.

Метою експериментального дослідження було перевірити ефективність розробленої методики викладання квадратної функції, яка включає диференційований підхід до добору задач, активне використання інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації, систематичну роботу з практико-орієнтованими завданнями, організацію проєктної діяльності учнів. Гіпотеза дослідження полягала в тому, що запропонована методика сприяє підвищенню рівня математичної компетентності учнів, розвитку мотивації до вивчення математики, формуванню здатності застосовувати теоретичні знання для розв’язування практичних задач.

Експеримент проводився на базі двох загальноосвітніх навчальних закладів міста протягом вивчення теми "Квадратична функція та її застосування" в дев’ятому класі. Було сформовано експериментальну групу з двох класів загальною кількістю 48 учнів, де навчання здійснювалося за запропонованою методикою, та контрольну групу з двох класів загальною кількістю 46 учнів, де використовувалася традиційна методика викладання. Класи було підібрано таким чином, щоб вони були приблизно однорідними за рівнем навчальних досягнень з математики, що було підтверджено результатами вхідного тестування (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Організація педагогічного експерименту

Етап експерименту	Термін проведення	Діагностичні процедури	Мета етапу
Констатувальний	Вересень 2024	Вхідне тестування, анкетування, аналіз попередніх результатів	Визначення початкового рівня знань та мотивації учнів

Формувальний	Жовтень – листопад 2024	Поточне спостереження, моніторинг виконання завдань	Реалізація запропонованої методики в експериментальній групі
Контрольний	Грудень 2024	Підсумкова контрольна робота, повторне анкетування, тестування	Оцінка результатів навчання, порівняння показників груп
Аналітичний	Грудень 2024 – січень 2025	Статистична обробка даних, якісний аналіз результатів	Формулювання висновків про ефективність методики

Джерело: складено автором на основі [25]

Констатувальний етап експерименту був спрямований на визначення початкового рівня знань, умінь та мотивації учнів обох груп. Вхідне тестування включало завдання на перевірку опорних знань, необхідних для успішного вивчення квадратичної функції: дії з раціональними числами, піднесення до квадрата, побудова графіків лінійної функції, розв'язування лінійних рівнянь. Результати тестування показали, що середній бал у контрольній групі становив 7,2 із 12 можливих, а в експериментальній групі – 7,4 бала, що свідчить про приблизно однаковий початковий рівень підготовки [25].

Анкетування на початку експерименту було спрямоване на виявлення ставлення учнів до математики, рівня мотивації, розуміння практичної значущості предмета. Учням пропонувалося оцінити за п'ятибальною шкалою свій інтерес до математики, впевненість у власних силах, розуміння зв'язку математики з реальним життям, готовність докладати зусилля для вивчення предмета. Результати показали, що в обох групах середні показники мотивації були приблизно однаковими: 3,1 бала в контрольній групі та 3,2 бала в експериментальній групі із п'яти можливих.

Формувальний етап експерименту тривав два місяці та включав вивчення всієї теми "Квадратична функція та її застосування". У контрольній групі навчання здійснювалося традиційним способом: пояснення матеріалу вчителем на дошці, виконання тренувальних вправ з підручника, періодичні самостійні роботи, підсумкова контрольна робота. Основний акцент робився на формуванні

технічних навичок побудови графіків, обчислення значень функції, розв'язування рівнянь та нерівностей за алгоритмами.

В експериментальній групі реалізовувалася запропонована методика, яка включала кілька інноваційних елементів. По-перше, активно використовувалося динамічне математичне програмне забезпечення GeoGebra для візуалізації властивостей функції та дослідження впливу коефіцієнтів на графік. Учні виконували лабораторні роботи, в яких самостійно експериментували з функціями, формулювали гіпотези, перевіряли їх, робили висновки. По-друге, систематично пропонувалися практико-орієнтовані задачі з різних сфер життя: фізики, економіки, архітектури, спорту. Учні вчилися бачити квадратичні залежності в реальних ситуаціях, будувати математичні моделі, інтерпретувати результати.

По-третє, в експериментальній групі була організована диференціація навчання: кожен учень отримував завдання відповідно до свого рівня підготовки та темпу просування. Сильні учні виконували додаткові задачі підвищеної складності та брали участь у проєктах, слабші учні отримували додаткові консультації та спрощені завдання для закріплення базових навичок. По-четверте, учні експериментальної групи виконували індивідуальні або групові міні-проєкти на теми: "Парабола в архітектурі", "Оптимізація прибутку підприємства", "Траєкторії руху в спорті", "Квадратична функція в фізичних процесах".

Поточний моніторинг навчальної діяльності показав різницю в активності та залученості учнів двох груп. В експериментальній групі учні виявляли більший інтерес до матеріалу, активніше ставили запитання, пропонували власні ідеї при розв'язуванні задач. Використання комп'ютерних технологій викликало позитивні емоції та підвищувало мотивацію до навчання. Робота над проєктами сприяла розвитку творчості, самостійності, комунікативних навичок. У контрольній групі учні переважно пасивно сприймали пояснення вчителя та виконували вправи за зразком.

Контрольний етап експерименту включав кілька діагностичних процедур для оцінки результатів навчання. Підсумкова контрольна робота була однаковою для обох груп та включала завдання трьох рівнів складності. Завдання базового рівня перевіряли володіння основними поняттями та алгоритмами: обчислення значень функції, визначення коефіцієнтів за графіком, розв'язування простих квадратних рівнянь. Завдання середнього рівня передбачали побудову графіка функції з повним дослідженням властивостей, розв'язування квадратної нерівності. Завдання високого рівня включали практичну задачу на оптимізацію та задачу з параметром (табл. 3.7).

Таблиця 3.7

Результати підсумкової контрольної роботи

Рівень навчальних досягнень	Контрольна група (46 учнів)	Експериментальна група (48 учнів)
Початковий (1-3 бали)	8 учнів (17,4%)	4 учні (8,3%)
Середній (4-6 балів)	18 учнів (39,1%)	14 учнів (29,2%)
Достатній (7-9 балів)	15 учнів (32,6%)	20 учнів (41,7%)
Високий (10-12 балів)	5 учнів (10,9%)	10 учнів (20,8%)
Середній бал	6,1	7,8

Джерело: складено автором на основі [26]

Аналіз результатів підсумкової контрольної роботи показав статистично значущу різницю між групами. Середній бал в експериментальній групі на 1,7 бала перевищував середній бал у контрольній групі. Частка учнів з високим рівнем навчальних досягнень в експериментальній групі була майже вдвічі більшою порівняно з контрольною групою. Водночас частка учнів з початковим рівнем в експериментальній групі була вдвічі меншою. Ці дані свідчать про те, що запропонована методика сприяє підвищенню якості навчальних досягнень учнів всіх рівнів підготовки [26].

Якісний аналіз виконання окремих завдань виявив переваги експериментальної групи у розв'язуванні практико-орієнтованих задач та завдань, що потребують дослідження властивостей функції. Учні експериментальної групи впевненіше аналізували умову задачі, будували математичні моделі, інтерпретували результати в термінах вихідної ситуації.

Вони рідше допускали концептуальні помилки, пов'язані з нерозумінням суті понять, хоча технічні помилки в обчисленнях зустрічалися приблизно з однаковою частотою в обох групах.

Повторне анкетування учнів після завершення вивчення теми показало зміну мотиваційних показників. В експериментальній групі середній бал інтересу до математики зріс з 3,2 до 3,9, розуміння практичної значущості предмета – з 2,8 до 4,1. У контрольній групі зміни були менш вираженими: інтерес до математики практично не змінився (з 3,1 до 3,2), розуміння практичної значущості трохи зросло (з 2,7 до 3,0). Особливо значним було підвищення впевненості учнів експериментальної групи у власних силах: з 2,9 до 3,7 балів, що свідчить про формування позитивного ставлення до предмета та віри в можливість успіху.

Бесіди з учнями експериментальної групи виявили позитивне ставлення до використаних методичних прийомів. Учні відзначали, що робота з комп'ютерними програмами допомогла краще зрозуміти, як коефіцієнти впливають на графік функції, зробила навчання цікавішим та наочнішим. Практико-орієнтовані задачі викликали більший інтерес порівняно з абстрактними завданнями з підручника, оскільки учні бачили зв'язок математики з реальним життям. Проектна діяльність дозволила проявити творчість, навчитися працювати самостійно та в команді, представляти результати своєї роботи.

Спостереження за роботою учнів на уроках показало, що в експериментальній групі була вища активність та залученість. Учні частіше брали участь в обговореннях, пропонували власні способи розв'язування задач, ставили запитання, коментували відповіді однокласників. Атмосфера на уроках була більш творчою, дослідницькою, менш регламентованою. У контрольній групі переважала традиційна модель взаємодії: вчитель пояснює – учні слухають, вчитель запитує – один учень відповідає, вчитель задає завдання – учні виконують.

Аналіз якості виконання проєктних робіт в експериментальній групі показав високий рівень творчості та самостійності учнів. Проєкти містили цікаві ідеї, нестандартні підходи, якісне оформлення. Учні використовували різні джерела інформації, фотографували реальні об'єкти, створювали комп'ютерні моделі, готували презентації. Захист проєктів виявив здатність учнів аргументовано представляти результати своєї роботи, відповідати на запитання, захищати свою позицію.

Опитування вчителів, які працювали в експериментальних класах, показало позитивну оцінку запропонованої методики. Вчителі відзначили підвищення мотивації учнів, кращу якість засвоєння матеріалу, розвиток творчого мислення. Водночас вони вказали на деякі труднощі: необхідність значної підготовчої роботи для створення дидактичних матеріалів, потреба в технічному забезпеченні, більші витрати часу на організацію різноманітних форм роботи порівняно з традиційним уроком.

Порівняння часових витрат показало, що на вивчення теми за запропонованою методикою було витрачено на дві години більше, ніж за традиційною методикою. Ці додаткові години були використані для проведення лабораторних робіт з використанням комп'ютерів, презентації та обговорення проєктів, розв'язування практико-орієнтованих задач з детальним аналізом. Однак якість засвоєння матеріалу та рівень сформованості компетентностей виправдовують ці додаткові витрати часу.

Статистична обробка даних з використанням критерію Стюдента для порівняння середніх значень показала, що різниця між середніми балами контрольної та експериментальної груп є статистично значущою на рівні 0,05. Це означає, що виявлені відмінності не є випадковими, а обумовлені саме застосуванням різних методик навчання. Аналіз дисперсії результатів показав, що в експериментальній групі розкид балів був дещо меншим, що свідчить про більш однорідне засвоєння матеріалу учнями різного рівня підготовки.

Довгострокові ефекти запропонованої методики були оцінені через три місяці після завершення вивчення теми шляхом проведення повторного

тестування на залишковість знань. Результати показали, що учні експериментальної групи краще зберегли знання: середній бал тесту в експериментальній групі становив 78% від балу підсумкової контрольної роботи, тоді як у контрольній групі – лише 65%. Це свідчить про те, що знання, отримані через активну діяльність, дослідження, практичне застосування, є більш міцними та довготривалими.

Аналіз типових помилок у роботах учнів обох груп виявив різницю в характері помилок. У контрольній групі переважали технічні помилки в обчисленнях та застосуванні алгоритмів, а також концептуальні помилки, пов'язані з нерозумінням суті понять функції, графіка, залежності між коефіцієнтами та властивостями. В експериментальній групі концептуальних помилок було значно менше, що пояснюється більш глибоким розумінням матеріалу через дослідницьку діяльність та візуалізацію.

Оцінка сформованості окремих компонентів математичної компетентності проводилася за спеціально розробленими критеріями. Предметно-логічний компонент оцінювався за знанням означень, формул, властивостей функції та вмінням їх застосовувати. Операційно-діяльнісний компонент оцінювався за технікою виконання перетворень, побудови графіків, розв'язування рівнянь. Комунікативний компонент оцінювався за вмінням пояснювати хід розв'язування, формулювати висновки, аргументувати відповіді. Рефлексивно-оцінний компонент оцінювався за здатністю до самоконтролю, виявлення та виправлення помилок, оцінки реалістичності результатів.

Результати показали, що за предметно-логічним компонентом обидві групи мали приблизно однакові показники, що свідчить про засвоєння базових теоретичних знань. За операційно-діялісним компонентом експериментальна група мала незначну перевагу. Найбільша різниця спостерігалася за комунікативним та рефлексивно-оцінним компонентами, де експериментальна група значно випереджала контрольну. Це пояснюється тим, що запропонована методика приділяла більше уваги формуванню саме цих компонентів через групову роботу, обговорення, захист проєктів, рефлексивні завдання.

Анкетування батьків учнів експериментальної групи показало позитивні зміни в ставленні дітей до математики. Батьки відзначали, що діти з більшим інтересом розповідають про те, що вивчають на уроках математики, самостійніше виконують домашні завдання, менше потребують допомоги. Кілька батьків повідомили, що діти показували їм створені проекти, розповідали про цікаві задачі з реального життя, що свідчить про підвищення мотивації та усвідомлення практичної значущості предмета.

Порівняння результатів учнів різних рівнів початкової підготовки показало, що запропонована методика є ефективною для всіх категорій учнів. Слабкі учні завдяки диференційованому підходу та додатковій підтримці досягли кращих результатів порівняно з аналогічними учнями контрольної групи. Сильні учні отримали можливість розвивати свої здібності через завдання підвищеної складності та проєктну діяльність. Особливо значним був прогрес учнів середнього рівня, які становлять більшість класу.

Аналіз гендерних відмінностей не виявив статистично значущої різниці між результатами хлопців та дівчат у жодній з груп. Це свідчить про те, що математичні здібності не залежать від статі, а успішність навчання визначається мотивацією, старанністю, якістю викладання. Дещо відрізнялися лише переваги у типах завдань: хлопці в середньому краще справлялися з просторовими задачами та завданнями, що потребують логічного аналізу, тоді як дівчата демонстрували кращі результати в акуратності виконання та оформлення робіт.

Вивчення впливу використання інформаційних технологій показало, що комп'ютерна візуалізація значно полегшує розуміння абстрактних математичних понять. Можливість бачити миттєву зміну графіка при зміні коефіцієнтів допомагає формувати інтуїтивне розуміння залежностей. Інтерактивні вправи з негайним зворотним зв'язком підвищують мотивацію та ефективність тренування. Однак важливо дотримуватися балансу між використанням технологій та традиційними методами, оскільки надмірна залежність від комп'ютера може призвести до втрати базових навичок ручних побудов та обчислень.

Дослідження показало, що практико-орієнтовані задачі мають більш високий мотиваційний потенціал порівняно з абстрактними завданнями. Учні охочіше беруться за розв'язування задач, умова яких описує реальну або близьку до реальності ситуацію. Навіть якщо математична складність такої задачі є вищою, учні виявляють більшу наполегливість у пошуку розв'язання. Це підтверджує важливість посилення практичної спрямованості навчання математики.

Проектна діяльність виявилася особливо ефективною для формування ключових компетентностей. Виконуючи проекти, учні розвивали не лише предметні знання, а й загальні навички: планування діяльності, пошуку та обробки інформації, роботи в команді, презентації результатів, критичного мислення. Захист проектів перед класом розвивав комунікативні навички та впевненість у собі. Багато учнів відзначили, що робота над проектом була найцікавішою частиною вивчення теми.

Обмеженнями проведеного дослідження є відносно невелика вибірка учасників та короткий період експерименту. Для більш надійних висновків потрібне дослідження на більшій кількості класів протягом довшого періоду. Крім того, не всі школи мають достатнє технічне забезпечення для реалізації запропонованої методики в повному обсязі. Успішність впровадження методики також залежить від кваліфікації вчителя, його готовності до інновацій, володіння інформаційними технологіями.

Рекомендації щодо впровадження розробленої методики включають кілька аспектів. По-перше, необхідна попередня підготовка вчителя: освоєння динамічних математичних систем, створення банку дидактичних матеріалів, розробка сценаріїв уроків з використанням інформаційних технологій. По-друге, потрібне відповідне технічне забезпечення: комп'ютерний клас або ноутбуки для індивідуальної роботи учнів, проектор або інтерактивна дошка, стабільне інтернет-з'єднання. По-третє, необхідна організаційна підтримка адміністрації школи: виділення додаткового часу на підготовку, можливість користування комп'ютерним класом, заохочення інноваційної діяльності вчителя.

Поетапне впровадження методики може бути більш реалістичним варіантом для шкіл з обмеженими ресурсами. Спочатку можна впровадити окремі елементи: використання комп'ютерних демонстрацій на уроках, включення практико-орієнтованих задач у навчальний процес, організація хоча б одного міні-проєкту. Поступово, міру накопичення досвіду та покращення матеріально-технічної бази, можна розширювати застосування інноваційних методів.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення довгострокових ефектів запропонованої методики, її впливу на успішність вивчення математики в старших класах, формування професійних інтересів учнів. Цікавим напрямком є дослідження оптимального співвідношення традиційних та інноваційних методів для різних категорій учнів. Також актуальним є питання підготовки вчителів до використання сучасних освітніх технологій у викладанні математики.

Розроблена система задач для вивчення квадратної функції характеризується різноманітністю типів завдань, диференціацією за рівнем складності, практичною спрямованістю. Систематичне використання навчальних, тренувальних, творчих, проблемних, практико-орієнтованих задач забезпечує формування всіх компонентів математичної компетентності. Особлива увага приділяється задачам, які демонструють застосування квадратичної функції в реальних життєвих ситуаціях, що підвищує мотивацію учнів та формує розуміння практичної цінності математичних знань.

Практичні застосування квадратичної функції охоплюють широкий спектр галузей: фізику, економіку, архітектуру, спорт, технологію, медицину, екологію. Систематичне розгляд таких застосувань на уроках математики допомагає учням побачити універсальність математичних методів, усвідомити зв'язок шкільної математики з реальним життям, сформувати цілісне уявлення про роль математики в сучасному світі. Організація проєктної діяльності з дослідження практичних застосувань розвиває дослідницькі компетентності, самостійність, творчість учнів [27].

Експериментальна перевірка показала ефективність запропонованої методики викладання квадратної функції. Учні експериментальної групи продемонстрували статистично значуще вищі результати навчальних досягнень порівняно з контрольною групою, кращі показники мотивації до вивчення математики, розуміння практичної значущості предмета. Особливо значним був прогрес у формуванні комунікативних та рефлексивних компонентів математичної компетентності. Результати дослідження підтверджують доцільність впровадження розроблених методичних підходів у практику викладання математики в основній школі.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження методики викладання квадратної функції та її застосування у курсі математики основної школи дозволяє зробити важливі висновки щодо теоретичних основ, методичних підходів та практичних аспектів організації навчального процесу. Історико-генетичний аналіз показав, що поняття квадратної функції формувалося протягом тисячоліть через вирішення практичних задач, теоретичні узагальнення та встановлення зв'язків між різними розділами математики. Розуміння цього історичного шляху від конкретних методів розв'язування квадратних рівнянь у давніх цивілізаціях до сучасного абстрактного поняття функції допомагає вчителю організувати навчальний процес відповідно до природної логіки розвитку математичного знання, враховуючи принцип поступового ускладнення матеріалу від простого до складного, від конкретного до абстрактного.

Математичний зміст квадратної функції є багатограним та включає алгебраїчні, геометричні та функціональні аспекти, що робить її вивчення особливо цінним для формування математичної компетентності учнів. Квадратична функція посідає особливе місце в шкільному курсі математики, виступаючи як самостійний об'єкт вивчення з притаманними їй властивостями та як інструмент для дослідження інших математичних об'єктів. Вона відіграє роль інтегруючого центру, навколо якого об'єднуються різні розділи курсу: квадратні рівняння та нерівності, системи рівнянь, текстові задачі, оптимізаційні завдання. Систематичне вивчення властивостей квадратичної функції готує учнів до засвоєння більш складних функцій у старшій школі та розвиває функціональне мислення, здатність бачити залежності між величинами, аналізувати характер їх зміни.

Формування математичної компетентності через вивчення квадратної функції відбувається комплексно та охоплює всі її компоненти: предметно-логічний, операційно-діяльнісний, комунікативний, рефлексивно-оцінний та мотиваційно-ціннісний. Ефективність цього процесу значною мірою залежить

від правильного поєднання традиційних та сучасних методів навчання. Традиційні підходи, такі як пояснювально-ілюстративний та репродуктивний методи, залишаються важливою складовою навчального процесу, забезпечуючи систематичне викладення теоретичного матеріалу та відпрацювання базових навичок. Водночас сучасні підходи, зокрема проблемний метод, дослідницьке навчання, кейс-метод, метод проєктів, активізують пізнавальну діяльність учнів, розвивають творче мислення, формують уміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях.

Використання візуалізації та інформаційно-комунікаційних технологій значно розширює дидактичні можливості викладання квадратної функції та сприяє підвищенню якості засвоєння матеріалу. Динамічне математичне програмне забезпечення дозволяє учням експериментувати з функціями, спостерігати взаємозв'язки між параметрами та властивостями, формувати інтуїтивне розуміння математичних закономірностей. Експериментальна перевірка підтвердила, що учні, які навчалися з використанням інформаційних технологій, демонстрували кращі результати у розумінні впливу коефіцієнтів на властивості функції, більш впевнено виконували дослідницькі завдання та виявляли вищу мотивацію до вивчення предмета. Однак використання ІКТ має бути виваженим та методично обґрунтованим, доповнювати, а не замінювати традиційні методи навчання, оскільки важливо зберігати баланс між комп'ютерною візуалізацією та формуванням базових навичок ручних побудов та обчислень.

Розроблена система задач для вивчення квадратної функції характеризується різноманітністю типів завдань, диференціацією за рівнем складності та практичною спрямованістю. Систематичне використання навчальних, тренувальних, творчих, проблемних та практико-орієнтованих задач забезпечує формування всіх компонентів математичної компетентності відповідно до індивідуальних особливостей учнів. Особлива увага до задач, які демонструють застосування квадратичної функції в реальних життєвих ситуаціях з фізики, економіки, архітектури, спорту та інших галузей, підвищує

мотивацію учнів та формує розуміння практичної цінності математичних знань. Організація проєктної діяльності з дослідження практичних застосувань розвиває дослідницькі компетентності, самостійність, творчість учнів та сприяє формуванню цілісного уявлення про роль математики в сучасному світі.

Експериментальна перевірка показала статистично значущу ефективність запропонованої методики викладання квадратної функції, яка інтегрує диференційований підхід до добору задач, активне використання інформаційно-комунікаційних технологій, систематичну роботу з практико-орієнтованими завданнями та організацію проєктної діяльності. Учні експериментальної групи продемонстрували вищі результати навчальних досягнень, кращі показники мотивації до вивчення математики, глибше розуміння практичної значущості предмета порівняно з учнями контрольної групи. Особливо значним був прогрес у формуванні комунікативних та рефлексивних компонентів математичної компетентності, що підтверджує важливість використання активних методів навчання, групової роботи та завдань, які потребують обґрунтування та рефлексії. Результати дослідження підтверджують доцільність впровадження розроблених методичних підходів у практику викладання математики в основній школі та створюють основу для подальшого вдосконалення методики навчання інших тем шкільного курсу математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Свєрчевська І. А. Історико-генетичний підхід у фаховій підготовці майбутніх учителів математики. Физико-математическое образование. 2017. № 4 (14). С. 82–86. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/istoriko-genetichniy-pidhid-u-fahoviy-pidgotovtsi-maybutnih-uchiteliv-matematiki> (дата звернення: 18.12.2024).
2. Свєрчевська І. Історико-генетичний підхід до вивчення методів розв'язування алгебраїчних рівнянь та їх систем. Рекомендовано до друку Вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 8 від 26 квітня 2024). 2024. С. 71. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/39023/1/978-617-581-626-4.pdf#page=71> (дата звернення: 18.12.2024).
3. Прус А. В., Мельниченко Т. В. Особливості вивчення функцій та їх властивостей у курсі алгебри старшої школи. 1 Міжнародна науково-практична конференція «The Integration of Research, Innovation and Economy». 2025. С. 240–243. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/45442/1/1.pdf> (дата звернення: 18.12.2024).
4. Сєрова О. О. Методичні підходи до навчання учнів розв'язування нерівностей на уроках математики. 2024. URL: <http://www.ir.dspu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/6916/1/Сєрова%20Олена%20Олександрівна%20Методичні%20підходи%20до%20навчання%20учнів%20розв'язування%20нерівностей%20на%20уроках%20математики.pdf> (дата звернення: 18.12.2024).
5. Бєсхлібна О. С. Методика вивчення нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи. 2018. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/2829> (дата звернення: 18.12.2024).
6. Івасюк І. М. Степенєва функція в шкільній програмі. 2024. URL: https://lib-repo.pnu.edu.ua/bitstream/123456789/23729/1/Івасюк_Казмерчук.pdf (дата звернення: 18.12.2024).

7. Стаськів Д. І. Формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій. 2024. URL: <http://ir.dspu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/6925/1/Стаськів%20Д.І.%20Формування%20математичної%20компетентності%20учнів%20у%20процесі%20вивчення%20функцій.pdf> (дата звернення: 18.12.2024).
8. Стрілець С. І., Запорожченко Т. П. Формування математичної компетентності майбутнього вчителя початкових класів засобами інноваційних технологій : монографія. 2019. URL: <http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/1900> (дата звернення: 18.12.2024).
9. Здорик О. А. Про методику вивчення квадратичної функції в курсі алгебри 9 класу. Свідectvo про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ № 14707-3678 ПП від 12.12.2008 р. 2022. С. 61. URL: <https://mvf.kpnu.edu.ua/wp-content/uploads/2023/02/visnyk-2022-1.pdf#page=61> (дата звернення: 18.12.2024).
10. Шкільний О. В. Типові задачі при підготовці до ЗНО з математики: лінійна і квадратична функції : дис. Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. URL: <https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/b5ca37c2-e8c5-415f-ad8c-d840fe368a07/content> (дата звернення: 18.12.2024).
11. Вертипорох Т. О., Турка Т. В., Стьопкін А. В. Методика викладання функцій в шкільному курсі математики за допомогою інформаційно комунікаційних технологій. Технології електронного навчання. 2024. Т. 8. С. 51–60. URL: <https://journals.uran.ua/texel/article/view/316947> (дата звернення: 18.12.2024).
12. Волошина І. Реалізація практик активного навчання на уроках математики. 2024.
13. Заторський Р. А., Дудка О. М., Власій О. О. Роль інформаційно-комунікаційних технологій у візуалізації вивчення математики. Физико-математическое образование. 2017. № 3 (13). С. 39–44. URL:

<https://cyberleninka.ru/article/n/rol-informatsiyno-komunikatsiynih-tehnologiy-u-vizualizatsiyi-vivchennya-matematiki> (дата звернення: 18.12.2024).

14. Алексєєва О. Р. та ін. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі викладання курсу за вибором «Трендспоттинг та професійне майбутнє сучасного фахівця». 2019. URL: <https://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/7937/11Butenko%20L.L..PDF?sequence=1&isAllowed=y> (дата звернення: 18.12.2024).

15. Житєньова Н. В. Технології візуалізації в сучасних освітніх трендах. Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. 2016. № 2. С. 144–157. URL: <https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/18635/> (дата звернення: 18.12.2024).

16. Черкаська Л., Москаленко О., Коваленко О. Запобігання помилок як компонент корекції результатів навчання учнів у системі уроків математики. Sources of Pedagogical Skills. 2020. № 25. URL: <https://openurl.ebsco.com/EPDB%3Agcd%3A2%3A25531314/detailv2?sid=ebsco%3Aplink%3Ascholar&id=ebsco%3Agcd%3A148373351&crl=c> (дата звернення: 18.12.2024).

17. Черкаська Л. Основні напрямки здійснення корекції математичної підготовки учнів. Наукові записки [Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка]. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2015. № 7 (3). С. 105–109.

18. Черкаська Л. П. Методика контролю та корекції навчальних досягнень з математики учнів основної школи : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Черкаси, 2009. 20 с. URL: <https://mydisser.com/dfiles/81117389.doc> (дата звернення: 18.12.2024).

19. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. Математичне моделювання у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей із параметром. Освітня мозаїка. 2008. Т. 4. С. 21. URL: <https://pano.pl.ua/pm/pdf-1-f-w/PM-81.pdf#page=23> (дата звернення: 18.12.2024).

20. Фам С. Х. Розроблення і дослідження метаевристик для розв'язання квадратичної задачі про призначення. 2022. URL:

<https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/7eff5a08-8727-412a-a1b1-99e85ebe6a4f/content> (дата звернення: 18.12.2024).

21. Лавров Є. А. та ін. Математичні методи дослідження операцій. 2017. URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/236d1385-fcfd-493b-beb4-20b0ac36c8b1/content> (дата звернення: 18.12.2024).

22. Чорна А. В. Методика застосування кейс-технологій як засобу навчання геометрії (профільний рівень). 2024. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/11308> (дата звернення: 18.12.2024).

23. Пендальчук І. А. Роль прикладних задач у формуванні математичної компетентності старшокласників. ББК 22.1 я43+ 74.489. 8я43 П 79. С. 152. URL: <https://amnm.vspu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/12/zbirnyk-tez-2024.pdf#page=152> (дата звернення: 18.12.2024).

24. Новицька Л. І., Мельник Ю. І., Соломко І. В. Прикладні аспекти математики: функція однієї змінної та її застосування в економічних дослідженнях. Вінниця, 440 с. URL: <https://socrates.vsau.org/repository/getfile.php/4134.pdf> (дата звернення: 18.12.2024).

25. Пилипенко Ю. В. Інтеграція знань при вивченні математики в закладах середньої освіти. 2020. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/89cccae4-4ac9-4902-bf68-7a1cb0aa5c4e/content> (дата звернення: 18.12.2024).

26. Жук І. В. Розвиток умінь старшокласників виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики. 2015. URL: <https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/970db408-b4b8-4c25-b3ae-027304731170/content> (дата звернення: 18.12.2024).

27. Іщенко А. Л. Методичні принципи відбору тестових завдань з курсу загальної методики викладання математики та їх використання в навчальному процесі. 2005.