**ДЕРЖАВНА ПОДАТКОВА АДМІНІСТРАЦІЯ УКРАЇНИ**
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ**

**Семко М.М.**
**Скасків Л.В.**
**Кучменко С.М.**

# Групи з великими системами підгруп, близьких до нормальних

**Semko M.M.**
**Skaskiv L.V.**
**Kuchmenko S.M.**

# Groups with large systems of subgroups close to normal.

**КИЇВ – 2007**

УДК 519.41/47

Групи з великими системами підгруп, близьких до нормальних /**Семко М.М., Скасків Л.В., Кучменко С.М. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 105 с.**

Робота присвячена дослідженню груп, у яких система узагальнено нормальних підгрупп є досить великою у деякому сенсі. Підгрупа $H$ групи $G$ називається *майже нормальною* в $G$, якщо множина підгруп, спряжених з $H$ у групі $G$ є скінченною, або, що рівносильно, нормалізатор підгрупи $H$ має скінченний індекс у групі $G$. Підгрупа $H$ групи $G$ називається *наближено нормальною* в $G$, якщо $H$ має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні у групі $G$. Вивчаються узагальнено розв'язні групи, у яких система підгруп, що не є наближено нормальними (відповідно система підгруп, що не є майже нормальними), складаються з підгруп: скінченного $0$-рангу; скінченного секційного $p$-рангу, $p$ – просте число; скінченного секційного рангу; скінченного спеціального рангу; скінченного тотального рангу; скінченного мінімаксного рангу, а також з черніковських та майже поліциклічних підгруп відповідно.

The present work is devoted to the study of groups in which a family of generalized normal subgroups is rather large in some sense. A subgroup $H$ is said to be almost normal in $G$ if a family of subgroups conjugated to $H$ in $G$ is finite, or, that is equivalent, the normalizer of $H$ has a finite index in a group $G$. A subgroup $H$ is said to be nearly normal in $G$ if $H$ has a finite index in its normal closure in a group $G$. These types of subgroups have been introduced by B.H. Neumann. In a present work is considered the groups in which the non almost normal subgroups (respectively non nearly normal subgroups) satisfy some finiteness conditions. More concretely, in a present work is studied the generalized soluble groups in which the family of all non nearly normal subgroups or a family of all non almost normal subgroup consists of the subgroups of finite $0$-rank; subgroups of finite section $p$-rank, $p$ is a prime; subgroups of finite section rank; subgroups of finite special rank; subgroups of finite total rank; subgroups of finite minimax rank; Chernikov subgroups; polycyclic-by-finite subgroups.

**Ключові слова:** *майже нормальна підгрупа, наближено нормальна підгрупа, підгрупа скінченного 0-рангу, підгрупа скінченного секційного p-рангу, підгрупа скінченного секційного рангу, підгрупа скінченного спеціального рангу, підгрупа скінченного тотального рангу, підгрупа скінченного мінімаксного рангу.*

**Key words**: *an almost normal subgroup, an nearly normal subgroup, subgroups of finite 0-rank, subgroups of finite section p-rank, subgroups of finite section rank, subgroups of finite special rank, subgroups of finite total rank, subgroups of finite minimax rank.*

Для фахівців у галузі алгебри та студентів математичного фаху.

***Рецензенти:*** Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор ***Л.А. Курдаченко*** (Дніпропетровський національний університет); доктор фізико-математичних наук, професор ***М.Ф. Кузенний*** (Інститут математики НАН України).
.

Затверджено до друку вченою радою Національного університету державної податкової служби України

**Наукове видання**

**Семко М.М.**
**Скасків Л.В.**
**Кучменко С.М.**

**Групи з великими системами підгруп,**
**близьких до нормальних**

**Semko M.M.**
**Skaskiv L.V.**
**Kuchmenko S.M.**

**Groups with large systems of subgroups**

**close to normal.**

Підписано до друку 3.05.2007. Формат 60 ×84/16. Папір друк. Офсет. друк.
Умовн. друк. арк. 4,6. Тираж 300 прим. Зам. 34.

# В С Т У П

Групи з великими системами підгруп, близьких у тому чи іншому сенсі до нормальних, є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Наявність великої кількості нормальних підгруп і близьких до них типів підгруп дуже сильно впливає на структуру групи. Образно кажучи, чим більше має група нормальних і близьких до них підгруп, тим вона ближче до абелевої. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то неабелеві групи з такою властивістю мають дуже просту будову, як показують результати робіт [1, 2]. Існує багато природних типів підгруп, що близькі до нормальних. Наприклад, в теорії скінчених груп важливу роль грають субнормальні підгрупи, підгрупи, що не збігаються зі своїм нормалізатором (за їх допомогою характеризуються скінченні нільпотентні групи), підгрупи, які переставні з кожною циклічною підгрупою групи (вони грають велику роль в скінчених надрозв'язних та розв'язних групах). Ці підгрупи зберігають свій вплив і в нескінченних групах, хоча там їх роль не є такою визначальною. Наприклад, на відміну від скінчених груп, існують нескінченні групи з одиничним центром, всі підгрупи яких субнормальні [3 – 7]. Виникнення й розвиток теорії груп з умовами скінченності привів до появи нових важливих типів підгруп, що близькі до нормальних. Такі типи підгруп розглянув Б. Нейман у своїй роботі [8], що вже стала класичною. Зокрема, він почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінчену множину спряжених. Оскільки кожна така підгрупа має нормалізатор скінченого індексу, такі підгрупи почали пізніше називати майже нормальними. У своїй роботі [8] Б. Нейман охарактеризував групи, всі підгрупи яких майже нормальні, як групи, що мають центр скінченого індексу. Такі групи пізніше стали називати скінченими над центром. Трохи пізніше С.М. Черніков у своїй роботі [9] розглянув групи, у яких $C_G(A)$ має скінчений індекс для кожної абелевої підгрупи $A$. Такі групи також виявились скінченими над центром. У зв'язку з цими двома результатами С.М. Черніков поставив питання про будову груп, у яких кожна абелева підгрупа буде майже нормальною. Відповідь на нього отримав І.І. Єрьомін [10], який довів, що такі групи також будуть скінченними над центром. У статті [11] І.І. Єрьомін почав розглядати групи, у яких усі

нескінченні підгрупи майже нормальні. Локально майже розв'язні групи з цією властивістю були описані значно пізніше у роботі М.М. Семка, С.С. Левіщенка та Л.А. Курдаченка [12]. З цієї роботи починається систематичне вивчення груп, у яких система $L_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи $G$ "дуже велика" чи система $L_{non\text{-}an}(G)$ всіх підгруп, що не є майже нормальними, "дуже мала". Так у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького розглядались групи, у яких система всіх майже нормальних підгруп є щільною [13], результати цієї роботи були пізніше узагальнені в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [14, 15]. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [16] були розглянуті групи, у яких (впорядковані за включенням) системи $L_{an}(G)$ та $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняють умову максимальності, а в роботі Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [17] були розглянуті групи, у яких система $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Узагальнення результатів як роботи [16], так і роботи [17], було отримано пізніше в статті Ж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [18], де розглядались локально майже розв'язні групи, у яких система $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності та слабку умову мінімальності. С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченко [19] розглянули групи, у яких майже нормальними будуть всі підгрупи за винятком скінчено породжених. В той же час вивчались і інші властивості системи майже нормальних підгруп. Так К. Касоло вивчав групи, у яких властивість "бути майже нормальною підгрупою" є транзитивною і в цьому зв'язку також розглянув групи, у яких кожна субнормальна підгрупа є майже нормальною [20, 21]. Ця тематика була продовжена у роботі К. Касоло, С. Франциозі, Ф. де Жиованні [22]. У статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [23] була розглянута зовсім інша ситуація – були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або майже нормальна, або субнормальна. Неважко упевнитись у тому, що (впорядкована за включенням) множина всіх майже нормальних підгруп буде решіткою. Але також неважко побачити, що загалом ця решітка не є повною. Л.А. Курдаченко та С. Рінауро [24] розглянули групи, у яких (впорядкована за включенням) множина всіх майже нормальних підгруп буде повною решіткою.

Інший тип підгруп, які також почав розглядати Б. Нейман у статті [8], це підгрупи, що мають скінчений індекс у своєму нормальному замкненні. Б. Нейман не дав цим підгрупам ніякої спеціальної назви.

Пізніше у роботі [14] такі підгрупи були названі скінченно-нормальними. Ця назва здається не зовсім удалою. У статті [25] був використаний інший термін – *near normal subgroup*. Буквальний переклад цього терміну – наближено нормальні підгрупи, і цією назвою будемо далі користуватись. Інтерес до системи всіх наближено нормальних підгруп групи виник досить недавно. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [14] розглядались групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [26] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $L_{non\text{-}nn}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи $G$ задовольняє умову мінімальності, а у вже цитованій вище роботі А. Галоппо [25] були розглянуті групи, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [27] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [28], де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп.

Таким чином, вивчення властивостей систем майже нормальних та наближено нормальних підгруп та їх впливу на структуру усієї групи є актуальною задачею, що має свою історію та своє специфічне коло питань. До цієї тематики відноситься і дана дисертаційна робота. В ній розглядаються групи, в яких системи $L_{non\text{-}an}(G)$ та $L_{non\text{-}nn}(G)$ складаються з підгруп, що мають той або інший скінчений ранг. Поняття рангу, що є узагальненням поняття вимірності векторного простору, є важливою числовою характеристикою, пов’язаною з групою. В теорії груп природно виникли та досить ефективно працюють різні ранги. В даній роботі будуть розглядатися ранг, вільний від скруту (*0*-ранг), секційний ранг, спеціальний ранг, тотальний ранг, мінімаксний ранг. Слід відмітити, що такий підхід почав зараз застосовуватись і для інших важливих систем підгруп. Так у роботі С. Франциозі, Ф. де Жиованні та М. Ньюэла [29] розглядались групи, у яких множина усіх ненормальних підгруп складається з розв’язних підгруп того чи іншого скінченого рангу, а у роботах Л.А. Курдаченка та П. Соулеса [30] та Л.А. Курдаченка та Х. Сміта [31] вивчались групи, у яких система усіх підгруп, що не є субнормальними, складається з підгруп скінченого спеціального рангу.

Метою даної роботи є:

- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного *0*-рангу яких є наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного секційного $p$-рангу яких є наближено нормальною, $p$ – просте число;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного секційного рангу яких є наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного спеціального рангу яких є наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного тотального рангу яких є наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного мінімаксного рангу яких є наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа яких, що не є черніковською, буде наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа яких, що не є майже поліциклічною, буде наближено нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного *0*-рангу яких є майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного секційного $p$-рангу яких є майже нормальною, $p$ – просте число;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного секційного рангу яких є майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного спеціального рангу яких є майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного тотального рангу яких є майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа нескінченного мінімаксного рангу яких є майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа яких, що не є черніковською, буде майже нормальною;
- опис узагальнено розв'язних груп, кожна підгрупа яких, що не є майже поліциклічною, буде майже нормальною.

# Р О З Д І Л 1

# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі дається огляд літератури, присвяченої дослідженням, що пов’язані з результатами даної роботи. Наведемо короткий виклад відомих результатів, які використовуються в подальшому.

Нехай $\nu$ – деяка властивість, яку можуть мати підгрупи. Ця властивість може бути як внутрішньою (наприклад, $\nu$ – властивість бути нормальною, субнормальною, майже нормальною, переставною підгрупами, підгрупою, що має доповнення і т. і.) і зовнішньою, тобто у цьому випадку $\nu$ означає бути підгрупою, що належить до деякого класу груп $X$. Найважливішими з цих класів є клас: $A$ всіх абелевих груп, всіх груп, що мають скінченний комутант, всіх $FC$-груп, $N_k$ всіх нільпотентних груп ступеня $k$, $N$ всіх нільпотентних груп, $S_d$ всіх розв'язних груп класу $d$, $S$ всіх розв'язних груп, $F$ всіх скінчених груп. Якщо $G$ – група, то позначимо через $L_{non\text{-}\nu}(G)$ (відповідно $L_\nu(G)$) систему всіх тих підгруп $G$, які не мають властивості $\nu$ (відповідно мають властивість $\nu$). Одна з перших задач теорії груп, яка зберігає своє значення і до цього часу, полягає у вивченні впливу на будову групи систем $L_\nu(G)$ та $L_{non\text{-}\nu}(G)$ для найбільш важливих природних властивостей $\nu$. Першим кроком у цьому напрямку була класична стаття Р. Дедекінда [1], у якій були вивченні скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, тобто групи, у яких система $L_{norm}(G)$ співпадає з системою усіх підгруп чи система $L_{non\text{-}norm}(G)$ пуста. Його результати були розширені пізніше на довільні групи Р. Бером [2]. Такі групи пізніше і отримали назву дедекіндових. Вони мають досить просту будову: дедекіндова група або абелева, або має вигляд $A \times B \times Q$, де $A$ – абелева періодична $2'$-група, $B$ – елементарна абелева $2$-група, $Q$ – група кватерніонів. Далі була робота Г. Міллера та Х. Морено [32], у якій вивчались скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві, тобто система $L_{ab}(G)$ складається з усіх власних підгруп чи $L_{non\text{-}ab}(G) = \{G\}$. У цьому ряду важливу роль зіграла також робота О.Ю. Шмідта [33]. Після цих робіт почалось вивчення груп, як скінчених так і нескінченних, всі власні підгрупи яких мають деяку важливу

властивість $\nu$. О.Ю. Шмідт почав вивчення скінченних, у яких система підгруп $L_{non\text{-}\nu}(G)$ є “досить малою” у деякому сенсі. Так у роботі [34] він отримав опис скінчених груп, у яких усі підгрупи з множини $L_{non\text{-}norm}(G)$ спряжені, а у роботі [35] описав скінченні групи, у яких множина $L_{non\text{-}norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Але при переході до нескінченних груп зміст фрази “бути досить малим” стає не дуже визначеним. Тут з’являється досить великий простір для реалізації дуже різних можливостей. С.М. Черніков запропонував розглядати групи, у яких система $L_{non\text{-}\nu}(G)$ задовольняє деяку умову скінченності, зокрема такі класичні умови скінченності, як умови мінімальності та максимальності. У роботі [36] були розглянуті групи, у яких множина всіх неабелевих підгруп задовольняє умову мінімальності, а у роботі [37] були розглянуті групи, у яких множина усіх ненормальних підгруп складається тільки зі скінчених підгруп. Цей підхід виявився дуже цікавим та результативним. Але він зразу показав, що ці дослідження мусять проводитись у деяких природних рамках. Так у роботі [37] С.М. Черніков розглядав періодичні групи, у яких усі нескінченні абелеві підгрупи нормальні при умові існування в них нескінченної абелевої підгрупи. Пізніше В.П. Шунков довів [38], що у нескінченній локально скінченій групі це завжди має місце. Але у загальному випадку це вже не так, оскільки існують нескінченні періодичні групи, всі власні підгрупи яких скінченні. Приклади таких груп, як і багатьох інших екзотичних груп, були побудовані О.Ю. Ольшанським [40]. Ці приклади показують, що реальне вивчення груп, у яких система підгруп $L_{non\text{-}\nu}(G)$ є “досить малою” чи груп, у яких система підгруп $L_{\nu}(G)$ є “досить великою” буде можливим тільки при деяких природних додаткових обмеженнях. Так, наприклад, вивчаючи групи, у яких усі нескінченно породжені підгрупи мають деяку властивість $\nu$, як перший крок ми мусимо розглянути групи, що не мають власних нескінченно породжених підгруп. Як показують приклади О.Ю. Ольшанського, опис таких груп у загальному випадку навряд чи є можливим у найближчий час. Тому природним є розгляд груп, у яких усі нескінченно породжені підгрупи мають деяку властивість $\nu$, у тому ж класі груп, у якому групи, що не мають власних нескінченно породжених підгруп, вже описані. Таким є клас локально майже розв’язних груп. Це і дає нам

природну межу для вивчення. Аналогічною є ситуація і з іншими задачами. Повернемось тепер до огляду результатів, пов'язаних з тематикою даної дисертації.

Групи, у яких система всіх ненормальних підгруп задовольняє умову мінімальності також розглядалися С.М. Черніковим [40]. Слід відмітити, що у роботах [37, 40] розглядались також деякі узагальнення таких груп. Але ми не будемо більш детально торкатися їх, досить детальний їх огляд можна знайти у книзі [41], а також у оглядових статтях [42 – 44].

Дуальним до умови мінімальності є умова максимальності. Групи, у яких система всіх ненормальних підгруп задовольняє умову максимальності розглядалися роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного, М.М. Семка [16] та Дж. Кутоло [45]. Якщо клас локально ступінчатих груп з умовою мінімальності для ненормальних підгруп є простим об'єднанням класу дедекіндових груп та класу груп зі звичайною умовою мінімальності, то для груп з умовою максимальності для ненормальних підгруп ситуація є більш багатшою як кількісно, так і якісно.

Якщо в групі всі скінчено породжені підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Природно виникає питання про протилежну ситуацію: що можна сказати про групи, всі підгрупи яких, що не мають скінченої системи породжуючих елементів (нескінченно породжені підгрупи), нормальні. Групи такого роду розглядались у роботах Л.А. Курдаченка та В.В.Пилаєва [46], Дж. Кутоло [45], Дж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [47].

У работах [48] та [49] були введені дуже цікаві нові умови скінченності – слабкі умови максимальності та мінімальності для різних типів підгруп. Ці умови та пов'язані з ними результати виявились настільки цікавими та плідними, що породили велику серію робіт, у яких ці умови розглядались для різних типів підгруп. Ми не будемо розглядати тут усі аспекти досліджень, пов'язаних зі слабкими умовами максимальності й мінімальності для різних типів підгруп, для цього можна подивитися оглядову статтю Л.С. Казаріна та Л.А. Курдаченко [50]. Ми зупинимось тут тільки на тих аспектах, які мають відношення до даної тематики.

Нехай $M$ – деяка система підгруп групи $G$. Будемо говорити, що $M$ задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно максимальності) або група $G$ задовольняє слабку умову мінімальності

для $M$-підгруп чи коротше $Min$-$\infty$-$M$ (відповідно максимальності для $M$-підгруп чи коротше $Max$-$\infty$-$M$ ), якщо $G$ не має таких нескінченних спадаючих (відповідно зростаючих) рядів $\{ H_n \mid n \in N \}$ підгруп з системи $M$, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ (відповідно $|H_{n+1} : H_n|$) нескінченні для кожного $n \in N$. Якщо $M$ – множина всіх ненормальних підгруп, то отримуємо групи зі слабкою умовою мінімальності (відповідно максимальності) для ненормальних підгруп. Ці групи вивчалися в роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького [51].

Відмітимо також низку інших результатів про групи з малими системами ненормальних підгруп. Якщо в групі всі абелеві підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Тому виникає питання про будову метагамільтонових груп, тобто груп, всі неабелеві підгрупи яких нормальні. Це питання було поставлено С.М. Черніковим. Його вивчення потребувало досить великого проміжку часу. Вивчення метагамільтонових груп розпочали М.Ф. Сєсєкін та Г.М. Ромаліс [52]. Воно було продовжено В.Т. Нагребецьким [53] та О.О. Махньовим [54] і завершено у циклі робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [55 – 68].

Розширенням поняття нормальної підгрупи будуть поняття субнормальних, майже нормальних та наближено нормальних підгруп. З субнормальними підгрупами пов’язана й наступна характеризація скінчених нільпотентних груп. Відомо, що скінчена група тоді і тільки тоді нільпотентна, коли всі її підгрупи субнормальні. Щодо нескінченних груп, то там ситуація зовсім інша. Цей результат може бути розширений на довільні групи тільки у такому вигляді: група тоді і тільки тоді нільпотентна, коли всі її підгрупи субнормальні і їх дефекти обмежені у сукупності [69]. На відміну від скінчених груп, існують нескінченні групи з одиничним центром, всі підгрупи яких субнормальні. Приклади таких груп були побудовані Г. Хайнекеном та І. Мохамедом [3, 4], Б. Хартлі [5, 6], Ф. Менегаццо [7]. Групи, всі підгрупи яких субнормальні, – досить давній і добре розвинений об’єкт досліджень. Основна маса результатів була зібрана в цікавій і фундаментальній монографії Дж. Леннокса та С. Стоунхевера [70]. Після виходу цієї книги було отримано кілька важливих результатів щодо груп, всі підгрупи яких субнормальні. Так кожна така група є розв’язна. Цей фундаментальний результат отримав В. Мьорес [71]. В цій же роботі

було доведено, що гіперцентральна періодична група, всі підгрупи якої субнормальні, буде нільпотентною. Кілька критеріїв нільпотентності груп, всі підгрупи яких субнормальні, отримав Х. Сміт. Так, якщо така група періодична і резідуально скінчена, то вона нільпотентна (Х. Сміт [72]). Якщо така група має нільпотентну нормальну підгрупу, фактор-группа за якою обмежена, то вона нільпотентна (Х. Сміт [73]). Якщо така группа періодична і резідуально нільпотентна, то вона нільпотентна (Х. Сміт [74]). Якщо в групі без скруту всі підгрупи субнормальні, то вона нільпотентна (Х. Сміт [75]). Деякі умови нільпотентності груп, всі підгрупи яких субнормальні, пов'язані з властивостями нормальних замкнень елементів, містить робота Л.А. Курдаченка та Х.Сміта [76].

Групи, у яких множина всіх підгруп, що не є субнормальними, задовольняє умову мінімальності розглядались С.Франциозі та Ф. де Жиованні [77]. При досить звичайних обмеженнях такі групи вичерпуються черніковськими та групами, всі підгрупи яких субнормальні.

Вивчення груп, у яких множина всіх підгруп, що не є субнормальними, задовольняє умову максимальності, виявилось більш результативним. Ці групи розглядались у роботі Л.А. Курдаченка та Х. Сміта [78]. Дуже близькими до цих груп виявились групи, у яких множина всіх підгруп, що не є субнормальними, складається зі скінчено породжених підгруп. Вони розглядались у роботі Г. Хайнекена та Л.А. Курдаченка [79].

Групи, у яких множина всіх підгруп, що не є субнормальними, задовольняє слабку умову мінімальності, вивчались у роботі Л.А. Курдаченка та Х. Сміта [80], а групи, у яких множина всіх підгруп, що не є субнормальними, задовольняє слабку умову максімальності, вивчались у роботі Л.А. Курдаченка та Х. Сміта [81].

Іншим розширенням поняття нормальної підгрупи є поняття майже нормальної підгрупи. Підгрупа $H$ групи $G$ називається майже нормальною в $G$, коли множина $cl_G(H) = \{ H^g \mid g \in G \}$ – клас усіх спряжених з $H$ підгруп – скінчена. Якщо підгрупа $H$ – нормальна в $G$, то $cl_G(H) = \{H\}$, так що майже нормальні підгрупи – це природне узагальнення нормальних підгруп. Підгрупа $H$ тоді і тільки тоді майже нормальна в групі $G$, коли її нормалізатор $N_G(H)$ має скінчений індекс в $G$ (звідси і походить назва таких підгруп). Очевидно, що

перетин двох майже нормальних підгруп та підгрупа, породжена двома майже нормальними підгрупами, будуть майже нормальними підгрупами. Інакше кажучи, множина $L_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи буде решіткою. Але, на відміну від решітки всіх нормальних підгруп, ця решітка не буде повною. Групи, у яких $L_{an}(G)$ буде повною решіткою, були розглянуті Л.А. Курдаченком та С. Рінауром [24]. Результати цієї роботи показують, що досить багато таких груп мають центр скінченого індексу, тобто є *скінченими над центром*. Скінченні над центром групи грають тут роль, подібну до тієї, яку грають дедекіндові групи при вивченні груп з малою множиною ненормальних підгруп. Б. Нейман у своїй роботі [8] почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінчену множину спряжених. Він охарактеризував групи, всі підгрупи яких майже нормальні, як групи, що мають центр скінченого індексу. Такі групи пізніше стали називати скінченими над центром. Трохи пізніше С.М. Черніков у своїй роботі [9] розглянув групи, у яких $C_G(A)$ має скінчений індекс для кожної абелевої підгрупи $A$. Такі групи також виявились скінченими над центром. У зв'язку з цими двома результатами С.М. Черніков поставив питання про будову груп, у яких кожна абелева підгрупа буде майже нормальною. Відповідь на нього отримав І.І. Єрьомін [10], який довів, що такі групи також будуть скінченими над центром. У статті [11] І.І. Єрьомін почав розглядати групи, у яких усі нескінченні підгрупи майже нормальні. Він отримав деякі умови, при яких такі групи будуть скінченими над центром. Опис таких груп при умові їх локальної майже розв'язності отримали Л.А.Курдаченко, С.С.Левіщенко та М.М. Семко [12]. З цієї роботи починається систематичне вивчення груп, у яких система $L_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи $G$ "дуже велика" чи система $L_{non\text{-}an}(G)$ всіх підгруп, що не є майже нормальними, "дуже мала". Так, у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького розглядались групи, у яких система всіх майже нормальних підгруп є щільною [13], результати цієї роботи були пізніше узагальнені в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [14, 15]. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [16] були розглянуті групи, у яких (впорядковані за включенням) системи $L_{an}(G)$ та $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняють умову максимальності, а в роботі Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [17] були розглянуті групи, у яких система $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Узагальнення

результатів як роботи [16], так і роботи [17], було отримано пізніше в статті Ж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [18], де розглядались локально майже розв'язні групи, у яких система $L_{non\text{-}an}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності та слабку умову мінімальності. С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченко [19] розглянули групи, у яких майже нормальними будуть всі підгрупи за винятком скінчено породжених. Відмітимо також, що у цій роботі розглядається поставлене С.М. Черніковим [42] питання про будову груп, у яких множина $L_{non\text{-}an}(G)$ складається з циклічних підгруп.

В той же час вивчались і інші властивості системи майже нормальних підгруп. Так К. Касоло вивчав групи, в яких властивість "бути майже нормальною підгрупою" є транзитивною і в цьому зв'язку також розглянув групи, у яких кожна субнормальна підгрупа є майже нормальною [20, 21]. Ця тематика була продовжена у роботі К. Касоло, С. Франциозі, Ф. де Жиованні [22]. У статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [23] була розглянута зовсім інша ситуація – були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або майже нормальна, або субнормальна.

Інше узагальнення нормальних підгруп – наближено нормальні підгрупи – також уперше почав розглядати Б. Нейман у статті [8]. Такими називають підгрупи, що мають скінчений індекс у своєму нормальному замкнені. Інтерес до системи всіх наближено нормальних підгруп групи виник досить недавно. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [14] розглядались групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [19] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $L_{non\text{-}nn}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи $G$ задовольняє умову мінімальності, а у вже цитованій вище роботі А. Галоппо [25] були розглянуті групи, у яких система $L_{non\text{-}nn}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [27] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [28], де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп.

## 1.1. Відомі результати

Розглянемо зараз розширення класу скінчених груп, які пов'язані з деякими числовими характеристиками, що називаються рангами групи. Поняття рангу виникло в теорії модулів як узагальнення поняття вимірності векторного простору. Абелеві групи можна розглядати як модулі над кільцем цілих чисел. Тому теорія абелевих груп була першою, де виникли та ефективно запрацювали поняття рангу групи. Пізніше ця ідея була перенесена у інші області теорії груп і була використана для виділення природних розширень класу скінчених груп. Зробимо зараз невеликий огляд цих понять і деяких пов'язаних з ними важливих результатів.

Група $G$ має *скінчений 0-ранг* $r_0(G) = r$, *якщо вона має скінчений субнормальний ряд, у якому точно* $r$ *факторів будуть нескінченними циклічними, а всі інші є періодичними.*

Відмітимо, що кожне ущільнення вказаного ряду має точно $r$ нескінченних циклічних факторів. Оскільки кожні два скінченні субнормальні ряди мають ізоморфні ущільнення, (див., наприклад, [82, 3.2.1]), то поняття *0*-рангу не залежить від вибору скінченого субнормального ряду, тобто воно є інваріантом групи. Це поняття відоме також під назвою *рангу, вільного від скруту,* а для майже поліциклічних груп *як числа Хірша.*

**1.1.1. Лема.** *Нехай* $G$ *– група скінченого 0-рангу,* $H$ *– підгрупа* $G$*,* $L$ *– нормальна підгрупа* $G$*. Тоді*

*(1)* $H$ *має скінчений 0-ранг, більш того,* $r_0(H) \le r_0(G)$*.*

*(2)* $G/L$ *має скінчений 0-ранг, більш того,* $r_0(G) = r_0(L) + r_0(G/L)$*.*

Якщо $A$ – абелева група, то $r_0(A) = dim_Q(A \otimes_Z Q)$. Абелева група $A$ тоді і тільки тоді має скінчений *0-ранг*, коли $A/t(A)$ ізоморфна деякій підгрупі адитивної групи $Q \oplus \ldots \oplus Q$ (див., наприклад, [83, лема 24.3]).

$\longleftarrow$ r $\longrightarrow$

Також відмітимо, що $r_0(A)$ співпадає з $Z$-рангом $Z$-модуля $A/t(A)$.

Клас розв'язних груп скінченого *0-рангу* співпадає з класом розв'язних $\boldsymbol{A_1}$-груп, які були введені А.І. Мальцевим [84].

Нехай $A$ – абелева група, $p$ – просте число, $P$ – силовська $p$-підгрупа $A$. Підгрупу $\Omega_1(P)$ можна розглядати як векторний простір над простим полем $F_p$. Покладемо $r_p(A) = dim_{Fp}\Omega_1(P)$. *Число* $r_p(A)$ *називається* $p$*-рангом абелевої групи* $A$.

Абелева група $A$ тоді і тільки тоді має скінчений $p$-ранг, коли її силовська $p$-підгрупа $P$ буде черніковською ( див., наприклад, [83, теорема 25.1]).

Наслідуючи Д. Робінсона [85, 6.1] визначимо наступним чином класи $\boldsymbol{A_0}$ та $\boldsymbol{S_0}$:

*Абелева група* $A$ *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{A_0}$*,, коли* $r_0(A)$ *є скінченим і* $r_p(A)$ *– також скінченні для всіх простих чисел* $p$.

*Розв'язна група* $G$ *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{S_0}$*,, коли* $G$ *має скінчений субнормальний ряд, кожен фактор якого є абелевою* $A_0$ *-групою.*

Клас $\boldsymbol{S_0}$ допускає наступну характеризацію.

**1.1.2. Пропозиція.** *(1) Абелева група* $A$ *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{A_0}$*, коли кожний її елементарний абелевий* $p$*-фактор є скінченним для будь якого простого числа* $p$.

*(2) Розв'язна група* $G$ *тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{S_0}$*, коли кожна її елементарна абелева* $p$*-секція є скінченною для будь якого простого числа* $p$.

Пропозиція 1.1.2 стала основою для назви класу $\boldsymbol{S_0}$: *ці групи називають групами скінченного секційного рангу.*

Ця пропозиція також дає можливість розширити поняття скінченого секційного рангу на довільні групи наступним чином.

*Будемо говорити, що група* $G$ *має скінченний секційний* $p$*-ранг* $r_p(G) = r$*, якщо кожна абелева* $p$*-секція групи* $G$ *має порядок не вищий за* $p^r$ *і існує така абелева* $p$*-секція* $U/V$*, що* $|U/V| = p^r$.

*Будемо говорити, що група* $G$ *має скінченний спеціальний ранг* $r(G) = r$*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа може бути породжена не більше ніж* $r$ *елементами* [86].

Спеціальний ранг називають також *рангом Мальцева-Прюфера*.

**1.1.3. Пропозиція.** *Нехай* $G$ *– група,* $H$ *– її підгрупа,* $L$ *– нормальна підгрупа* $G$. *Тоді*

*(1) Якщо* $G$ *має скінченний спеціальний ранг, то* $H$ *та* $G/L$ *також мають скінченні спеціальні ранги. Більш того,* $r(H) \le r(G)$ *і* $r(G/L) \le r(G)$.

*(2) Якщо L і G/L мають скінченні спеціальні ранги, то G також має скінчений спеціальний ранг.*

Це твердження майже очевидне.

Клас розв'язних груп скінченного спеціального рангу співпадає з класом розв'язних $\boldsymbol{A_2}$-груп, які були введені А.І. Мальцевим [84]. Відмітимо зараз деякі важливі зв'язки між уведеними вище рангами.

Нехай $G$ – абелева група скінченного спеціального рангу. Виберемо в ній таку скінченно породжену підгрупу без скруту $H$, що $G/H$ є періодичною. Позначимо через $D/H$ ділиму частину $G/H$ і покладемо $Sp(G) = \Pi(D/H)$. Якщо $K$ – інша скінченно породжена підгрупа без скруту, що визначає періодичну фактор-групу $G/K$, то обидва фактора $H/(H \cap K)$ та $K/(H \cap K)$ скінченні. Це означає, що ділимі частини $G/H$ та $G/K$ ізоморфні, так що множина $Sp(G)$ є інваріантом групи $G$. Нехай $p \notin \Pi(G/H)$, тоді $H/H^p$ –скінченна силовська $p$-підгрупа $G/H^p$ та маємо $G/H^p = H/H^p \times R/L^p$ (див., наприклад, [83, теорема 27.5]). Це показує, що $G \neq G^p$.

**1.1.4. Теорема** [87]. *Нехай G – локально майже розв'язна група скінченого 0-рангу. Тоді G/P(G) – майже розв'язна група скінченного спеціального рангу. Більш того, якщо S/T – максимальна нормальна розв'язна підгрупа G/T, то існують такі функції $\mu$, $\lambda$, $\sigma$: : $N \longrightarrow N$, що $r(G/T) \leq \mu(r_0(G))$, $|G : S| \leq \lambda(r_0(G))$ і ступінь розв'язності S/T не перевищує $\sigma(r_0(G))$.*

**1.1.5. Теорема** [84]. *Нехай G – локально нільпотентна група. Якщо всі абелеві підгрупи G мають скінченний 0-ранг, то G/P(G) – нільпотентна група скінченного спеціального рангу.*

**1.1.6. Теорема** [88]. *Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G має скінченний спеціальний ранг, то G є скінченним розширенням локально розв'язної групи скінченного спеціального рангу.*

**1.1.7. Теорема** [89]. *Нехай G – локально майже розв'язна група скінченного 0-рангу. Тоді $r_0(G) \leq r(G)$.*

Наслідуючи Д. Робінсона [85, 6.1] визначимо наступним чином класи $\boldsymbol{A_1}$ та $\boldsymbol{S_1}$**:**

Нехай $A$ – абелева група. Визначимо *тотальний ранг A за наступним правилом:*

$R_{tot}(A) = r_0(A) + \sum_{p \in \Pi(A)} r_p(A)$.

*Абелева група A належить до класу* $\boldsymbol{A_1}$ *тоді і тільки тоді, коли її тотальний ранг є скінченним.*

Зокрема, це означає, що множина $\Pi(A)$ – скінченна. Далі $A \in \boldsymbol{A_1}$ тоді і тільки тоді, коли $A$ має скінчений *0-ранг* і періодична частина $A$ є черніковською підгрупою.

*Розв'язна група G тоді і тільки тоді належить до класу* $\boldsymbol{S_1}$*, коли G має скінченний субнормальний ряд, кожен фактор якого є* $\boldsymbol{A_1}$*-групою.*

Клас $\boldsymbol{S_1}$ співпадає з класом розв'язних $\boldsymbol{A_3}$-груп, які були введені А.І. Мальцевим [84]. Відмітимо також, що А.І. Мальцев розглянув підклас *розв'язних* $\boldsymbol{A_4}$*-груп, який складається з груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожен фактор якого є* $\boldsymbol{A_1}$*-групою зі скінченною періодичною частиною.*

**1.1.8. Теорема** [90]. *Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи G є* $\boldsymbol{A_3}$*-группою, то G належить до класу* $\boldsymbol{S_1}$*.*

Іншими натуральними розширеннями класу скінченних груп буде клас $\boldsymbol{M^{\blacktriangle}}$ груп, що задовольняють умову максимальності для всіх підгруп та клас $\boldsymbol{M^{\blacktriangledown}}$ груп, що задовольняють умову мінімальності для всіх підгруп. Обидва ці класи є одними з найстаріших об'єктів вивчення у теорії груп. Однак приклади груп з умовами мінімальності та максимальності для всіх підгруп, що були побудовані О.Ю. Ольшанським та його учнями (див., [39, глави 28, 35, 38]) показують, що такі групи можуть мати властивості, які дуже далекі від властивостей скінченних груп. Майже розв'язні групи з умовою максимальності (тобто групи з класу $\boldsymbol{SF} \cap \boldsymbol{M^{\blacktriangle}}$) або мінімальності (тобто групи з класу $\boldsymbol{SF} \cap \boldsymbol{M^{\blacktriangledown}}$) є досить близькими до скінченних. Це є точнісінько клас $\boldsymbol{P}$ усіх майже поліциклічних груп та клас $\boldsymbol{C}$ усіх черніковських груп відповідно. Більш того, мають місце наступні теореми.

**1.1.9. Теорема** [41, теорема 1.1]. *Локально розв'язна група тоді і тільки тоді задовольняє умову мінімальності, коли вона черніковська.*

**1.1.10. Теорема** [41, теорема 4.3]. *Якщо кожна абелева підгрупа локально розв'язної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

**1.1.11. Теорема [**38**].** *Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

Властивості майже поліциклічних груп та черніковських груп були розглянуті дуже детально в багатьох книгах, наприклад, в [41, 82, 85, 91 – 96]).

Класи $\boldsymbol{M^{\blacktriangle}}$ та $\boldsymbol{M^{\blacktriangledown}}$ можуть бути природно об'єднані у класі мінімаксних груп.

*Група G називається мінімаксною, якщо вона має скінчений субнормальний ряд, фактори якого належать до класів* $\boldsymbol{M^{\blacktriangle}}$ *або* $\boldsymbol{M^{\blacktriangledown}}$.

Клас розв'язних мінімаксних груп позначається через $\boldsymbol{S_2}$ [85]. Зокрема, $\boldsymbol{S_2F}$ – це клас груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожен фактор якого – черніковська або майже поліциклічна група.

Теорія майже розв'язних мінімаксних є дуже розвиненою, ці групи вивчались багатьма авторами з різноманітних точок зору (див., наприклад, книгу [95, 10.3, 10.4] та статті [45, 47 – 51, 78, 80, 81, 89, 97 – 128].

На роль мінімаксних груп вказує наступна теорема.

**1.1.12. Теорема** [119]. *Нехай G – скінченно породжена розв'язна група. Якщо G має скінченний спеціальний ранг, то G – мінімаксна.*

З мінімаксними групами пов'язана наступна комбінаторна характеристика. Наслідуючи Д.І. Зайцева [127], будемо говорити, що *група G має скінченний мінімаксний ранг* $\boldsymbol{r_{mmx}(G) = m}$, *якщо для кожного такого скінченного ланцюга підгруп* $\langle 1\rangle = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_n = G$, *що всі індекси* $|G_{j+1} : G_j|$ *є нескінченними, має місце співвідношення* $n \le m$, *та існує ланцюжок підгруп, для якого* $n = m$. *Якщо такого номера не існує, то мінімаксний ранг групи вважається нескінченним, а якщо ж G є скінченою, то* $\boldsymbol{r_{mmx}(G) = 0}$.

Слід відмітити, що в статті [127] Д.І. Зайцев використав інший термін – показник мінімальності, який виявився не дуже вдалим. Тому пізніше Д.І. Зайцев відмовився від нього і запропонував інший – мінімаксний ранг [50, розділ 4, § 3]. Д. Робінсон використовує інший термін – мінімаксна довжина групи [95, 10.3].

**1.1.13. Теорема** [124]. *Локально майже розв'язна група тоді і тільки тоді має скінченний мінімаксний ранг, коли вона мінімаксна.*

Для локально розв'язних груп аналогічна теорема була доведена ще в статті [49].

**1.1.14. Теорема** [123]. *Якщо всі абелеві підгрупи радикальної групи G мають скінченні мінімаксні ранги, то G буде мінімаксною.*

Слід відмітити, що для нормальної підгрупи $H$ групи $G$ має місце рівність $\boldsymbol{r_{mmx}(G) = r_{mmx}(H) + r_{mmx}(G/H)}$.

Наступні результати, що будуть потрібні, відносяться до *FC*-груп. Один з перших важливих результатів цієї теорії – класична теорема І. Шура.

**1.1.15. Теорема** [129]. *Нехай G – група, центр якої має скінченний індекс с. Тоді комутант [G, G] також скінченний, більш того* $[G, G]^c = \langle 1 \rangle$.

**1.1.16. Наслідок.** *Нехай G – така група, що* $G/\zeta(G)$ *– локально скінченна група. Тоді комутант [G, G] також локально скінченний, більш того* $\Pi([G, G]) \subseteq \Pi(G/\zeta(G))$.

**1.1.17. Теорема**. *Нехай G – FC-група.*

*(1) Фактор-група* $G/\zeta(G)$ *є періодичною* [130].

*(2) Комутант [G, G] також періодичний. Зокрема, множина T усіх елементів, що мають скінченні порядки, є (характеристичною) підгрупою і G/T – абелева група без скруту* [131].

Наступні теореми описують деякі важливі підкласи класу *FC*-груп.

**1.1.18. Теорема** [8]. *(1) Нехай G – група, кожна підгрупа якої майже нормальна. Тоді її центр має скінчений індекс.*

*(2) Нехай G – група, кожна підгрупа якої наближено нормальна. Тоді її комутант [G, G] буде скінченним.*

Відмітимо також один технічний результат Б. Неймана, який буде далі потрібен.

**1.1.19. Пропозиція** [132]. *Нехай G – група,* $H_1, \ldots, H_n$ *– такі її підгрупи, що* $G = H_1 g_1 \cup \ldots \cup H_n g_n$ *для деяких елементів* $g_1, \ldots, g_n$. *Тоді хоча б одна з підгруп* $H_1, \ldots, H_n$ *має скінченний індекс.*

Наведемо також і інші результати, які будуть використані при доведеннях результатів даної роботи.

**1.1.20. Теорема [79]**. *Нехай G – нільпотентна група, T – її періодична частина. Якщо T – обмежена підгрупа, то G містить у собі таку нормальну підгрупу U без скруту, що G/U – обмежена група.*

**1.1.21. Теорема** [133]. *Нехай $G$ – нільпотентна група скінченного спеціального рангу, $H \leq Aut(G)$. Якщо $H$ – локально нільпотентна, то вона задовольняє наступні умови:*

*(1) $H$ – нільпотентна;*

*(2) періодична частина $T$ групи $H$ є скінченою;*

*(3) $H$ містить у собі таку нормальну підгрупу $Q \geq T$, що $H/Q$ – вільна абелева група скінченного або зчисленого рангу, а $Q/T$ має скінченний спеціальний ранг.*

**1.1.22. Наслідок [**133**].** *Нехай $G$ – розв'язна $A_4$ -група. Тоді $G$ містить у собі таку вільну від скруту нільпотентну нормальну підгрупу $H$, що $G/H$ – майже абелева і скінчено породжена.*

**1.1.23. Теорема [**120**].** *Нехай група $G$ містить у собі таку абелеву нормальну підгрупу $A$ без скруту, що $G/A$ – також абелева. Якщо центр групи $G$ не містить у собі $A$ та $A$ є раціонально незвідною, то існує така підгрупа $L$, що $A \cap L = \langle 1 \rangle$ та індекс $|G : AL|$ є скінченим.*

**1.1.24. Теорема [**134**].** *Нехай група $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні, $L$ – локально нільпотентний радикал $G$. Тоді $C_G(L) \leq L$.*

**1.1.25. Теорема** [135]. *Нехай $G \in \mathbf{S_1}$, $H \leq Aut(G)$. Якщо $H$ – локально розв'язна, то $H$ – розв'язна.*

**1.1.26. Теорема** [135]. *Нехай $G \in \mathbf{S_1}$, $H \leq Aut(G)$. Якщо періодичні підгрупи $G$ – скінченні і $H$ – періодична, то $H$ – скінчена.*

**1.1.27. Теорема** [136]. *Нехай група $G$ містить у собі таку абелеву нормальну підгрупу $A$, що $G/A$ – майже поліциклічна. Якщо $G$ – скінчено породжена, то вона задовольняє умову максимальності для нормальних підгруп.*

**1.1.28. Теорема** [136]. *Нехай група $G$ містить у собі таку нормальну підгрупу $A$, що $G/A$ – скінчено визначена (зокрема, майже поліциклічна). Якщо $G$ – скінчено породжена, то $A$ має такі елементи $a_1, \ldots, a_n$, що $A = \langle a_1 \rangle^G \ldots \langle a_n \rangle^G$.*

**1.1.29. Теорема** [137]. *Нехай група $G$, що має скінчений ряд нормальних підгруп $\langle 1 \rangle = F_0 \leq F_1 \leq \ldots \leq F_n = G$, $H \leq Aut(G)$. Якщо $H$ стабілізує цей ряд, тобто діє тотожно у кожному факторі цього ряду, то $H$ – нільпотентна.*

**1.1.30. Теорема** [138]. *Нехай $G$ – періодична локально розв'язна група, всі силовські $p$-підгрупи якої є черніковськими. Тоді $G/O_{p'}(G)$ також є черніковською групою.*

**1.1.31. Теорема** [138]. *Нехай $G$ – періодична локально розв'язна група, всі силовські $p$-підгрупи якої є черніковськими для кожного простого числа $p$. Тоді $G$ містить у собі таку нормальну абелеву ділиму підгрупу $D$, що $G/D$ є резідуально скінченою і силовські $p$-підгрупи $G/D$ скінчені для кожного простого $p$.*

**1.1.32. Теорема** [124]. *Нехай група $G$ містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу $F$ порядку $n$, що $G/F$ має скінчений субнормальний ряд довжини $r$, фактори якого – локально циклічні групи без скруту. Тоді $G$ містить у собі таку характеристичну підгрупу $D$, що має скінчений субнормальний ряд довжини $r$, фактори якого – локально циклічні групи без скруту, а $G/D$ має скінчений порядок, що залежить тільки від $n$ та $r$.*

**1.1.33. Теорема** [128]. *Нехай $G$ – нільпотентна група скінченого 0-рангу. Якщо її центр є скінчено породженим, то і уся група $G$ буде скінчено породженою.*

# Р О З Д І Л *2*

# ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ ПІДГРУП, БЛИЗЬКИХ ДО НОРМАЛЬНИХ

У цьому розділі викладаються результати про будову груп, у яких підгрупи, які не є наближено нормальними, мають той або інший скінченний ранг (скінченний *р-ранг*, скінченний *0-ранг*, скінченний секційний ранг, скінченний спеціальний ранг, скінченний мінімаксний ранг) або є черніковськими чи майже поліциклічними.

## 2.1. Попередні результати

**2.1.1. Означення.** *Підгрупу H групи G будемо називати наближено нормальною (в G), якщо H має скінчений індекс у своєму нормальному замкненні* $H^G$.

Підгрупи такого роду вперше почав розглядати Б. Нейман у статті [131], не давши їм ніякої спеціальної назви. У роботі [14] такі підгрупи були названі скінчено-нормальними. Ця назва здається не зовсім удалою. У статті [25] був використаний інший термін – *near normal subgroup*, буквальним перекладом якого будемо тут користуватись.

**2.1.2. Лема.** *Якщо H, L – наближено нормальні підгрупи групи G, то підгрупи* $K = \langle H, L \rangle$ *та* $H \cap L$ *також будуть наближено нормальними.*

***Доведення.*** Дійсно, маємо $H^G = x_1H \cup \ldots \cup x_nH$, $L^G = Ly_1 \cup \ldots \cup Ly_m$. Якщо $u \in H^G$, $v \in L^G$, то $u \in x_jH$, $v \in Ly_t$ для деяких $1 \le j \le n$, $1 \le t \le m$, так що $uv \in x_jH\,Ly_t$, а тому $H^G L^G = \cup_{1 \le j \le n,\, 1 \le t \le m} x_jH\,Ly_t$.

Далі, з включення $HL \le K$ отримуємо, що $x_jHLy_t \le x_jKy_t = x_jy_t\,(y_t^{-1}Ky_t)$, отже $H^GL^G = \cup_{1 \le j \le n,\, 1 \le t \le m} x_jy_t\,(y_t^{-1}Ky_t)$.

З пропозиції 1.1.19 випливає, що хоча б одна з підгруп $y_t^{-1}Ky_t$ має скінчений індекс в $H^GL^G$, а тому і підгрупа $K$ має скінчений індекс в $H^GL^G$. З очевидного включення $K^G \le H^GL^G$ випливає, що підгрупа К є наближено нормальною в $G$. Розглянемо тепер перетин $H \cap L$. Маємо $|H^G \cap L^G : H \cap L| = |H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L|\,|H^G \cap L^G \cap L : H \cap L|$, і тепер, використовуючи властивості індексів, отримаємо, що $|H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L| = |(H^G \cap L^G)L : L| \le |L^G : L|$, $|H^G \cap L^G \cap L :$

$H \cap L \mid = \mid (H^G \cap L)H : H \mid \leq \mid H^G : H \mid$. З цих співвідношень і випливає скінченність індексу $\mid H^G \cap L^G : H \cap L \mid$. З очевидного включення $(H \cap L)^G \leq H^G \cap L^G$ випливає тепер, що підгрупа $H \cap L$ наближено нормальна в $G$.

**2.1.3. Лема.** *Якщо $g$ – такий елемент групи $G$, що підгрупа $\langle g \rangle$ – наближено нормальна в $G$, то $g \in FC(G)$.*

***Доведення***. Дійсно, якщо $g \in FC(G)$ і елемент $g$ має скінчений порядок, то зі скінченності індексу $\mid \langle g \rangle^G : \langle g \rangle \mid$ отримуємо, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є скінченим, а тоді $g \in FC(G)$. Нехай тепер елемент $g$ має нескінченний порядок. Зі скінченності індексу $\mid \langle g \rangle^G : \langle g \rangle \mid$ отримаємо, що $L = \langle g \rangle^G$ – майже абелева підгрупа. Знайдеться таке число $k \in N$, що підгрупа $\langle g^k \rangle = K$ – нормальна в $L$ і має в ній скінчений індекс. Нехай $C = C_L(K)$, тоді $\mid L : C \mid \leq 2$ та $C$ – скінчена над центром. З класичної теореми І. Шура (теорема 1.1.15) випливає скінченність $[C, C]$. У свою чергу, звідси випливає той факт, що сукупність $T$ усіх елементів скінченого порядку підгрупи $C$ буде (характеристичною) підгрупою $C$. Оскільки абелева група $C/T$ без скруту містить у собі нескінчену циклічну підгрупу скінченого індексу, то вона сама буде нескінченною циклічною. Отже, $L/T$ містить у собі нормальну циклічну підгрупу $C/T$, індекс якої не перевищує числа 2. Якщо $L/T$ не має скруту, то, очевидно, кожний її елемент має в ній скінчену множину спряжених, тобто $L/T$ – $FC$-група. Але ж $FC$-група без скруту є абелевою (теорема 1.1.17), а тому $L/T$ – нескінченна циклічна група. Якщо припустити, що $L/T$ має елементи скінченого порядку, то $L/T$ – нескінченна діедральна група. У цьому випадку, очевидно, $C/T$ буде локально нільпотентним радикалом $L/T$. Оскільки $g \in C$, то і $\langle g \rangle^G \leq C$, і отже $L/T = C/T$. Таким чином, у кожному випадку $L/T$ – нескінченна циклічна група, а тому $L/T = \langle gT \rangle$. Для довільного елемента $x \in G$ маємо тепер $x^{-1}gx = g^t y$, де $t \in \{-1, 1\}$, $y \in T$. Зі скінченності $T$ випливає, що елемент $g$ має в групі $G$ скінчену множину спряжених, тобто $g \in FC(G)$.

**2.1.4. Лема.** *Нехай $G$ – група, $F$ – її скінчена підгрупа, $A$ – $F$-інваріантна нескінчена елементарна абелева $p$-підгрупа. Тоді $A$ містить у собі підгрупу $\times_{n \in N} B_n$, де $B_n$ – неодинична скінчена $F$-інваріантна підгрупа для кожного $n \in N$.*

***Доведення***. Нехай $1 \neq b_1 \in A$, $B_1 = \langle b_1 \rangle^F$. Із скінченності $F$ отримуємо, що $B_1$ – скінчена. Оскільки $A$ є елементарною абелевою, то вона містить у собі підгрупу $C_1$ з властивістю $A = B_1 \times C_1$. Скінченність $F$ забезпечує скінченність множини $\{ C_1^x \mid x \in F \}$, тобто

$\{ C_1^x \mid x \in F\} = \{ x_1^{-1} C_1 x_1, \ \ldots \ , x_m^{-1} C_1 x_m \}$.

Нехай $E_1 = \cap_{x \in F} C_1^x$. Кожна з підгруп $x_j^{-1} C_1 x_j$, $1 \leq j \leq m$, має в $A$ скінчений індекс, тому $A/E_1$ – скінчена, зокрема, $E_1 \neq \langle 1 \rangle$. За самою побудовою, $E_1$ буде $F$-інваріантною підгрупою $A$, для якої $E_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$. Нехай $1 \neq b_2 \in E_1$ і $B_2 = \langle b_2 \rangle^F$. Знову $B_2$ є скінченою. Вибираємо в $A$ підгрупу $C_2$, що має властивість $A = (B_1 B_2) \times C_2$. Тоді знову $E_2 = \cap_{x \in F} C_2^x$ має скінчений індекс в $A$ та буде $F$-інваріантною. Застосовуючи аналогічні аргументи, збудуємо нескінчену систему $\{B_n \mid n \in N\}$ таких неодиничних скінчених $F$-інваріантних підгруп $A$, що $\langle B_n \mid n \in N \rangle = \times_{n \in N} B_n$.

**2.1.5. Лема.** *Нехай $G$ – група, $A$ – її нескінчена елементарна абелева $p$-підгрупа. Якщо $A$ – наближено нормальна, то $A^G$ містить у собі нескінчену $G$-інваріантну елементарну абелеву $p$-підгрупу.*

***Доведення***. Оскільки $A$ – наближено нормальна, то індекс $|A^G : A|$ є скінченним. Тоді $A$ містить у собі $A^G$-інваріантну підгрупу $D$, що має в $A^G$ скінчений індекс. Звідси випливає, що локально нільпотентний радикал $L$ підгрупи $A^G$ має в $A^G$ скінчений індекс. Очевидно, $L$ – $G$-інваріантна. Оскільки $L/D$ є скінченою, то $L = FD$ для деякої скінченої підгрупи $F$. Далі, підгрупа $D$ – нормальна в $A^G$, тому вона є $F$-інваріантною. З леми 2.1.4 отримуємо тоді, що $D$ містить у собі підгрупу $\times_{n \in N} D_n$, де $D_n$ – скінчена неодинична $F$-інваріантна підгрупа для кожного $n \in N$. Звідси випливає нескінченність підгрупи $C_D(F)$. Рівність $L = FD$ забезпечує тепер включення $C_D(F) \leq \zeta(L)$, яке, у свою чергу, доводить нескінченність нижнього шару $E$ силовської $p$-підгрупи $\zeta(L)$. Оскільки $L$ – $G$-інваріантна, то і $E$ буде $G$-інваріантною.

**2.1.6. Лема.** *Нехай $G$ – група, $A$ – її абелева підгрупа без скруту. Якщо $A$ – наближено нормальна, то $A^G$ містить у собі таку $G$-інваріантну абелеву підгрупу $B$ без скруту, що $A^G/B$ – обмежена група. Зокрема, якщо $A$ має нескінчений 0-ранг, то також і $B$ має нескінчений 0-ранг.*

***Доведення.*** Оскільки $A$ – наближено нормальна, то індекс $|A^G : A|$ є скінченним. Тоді $A$ містить у собі $A^G$-інваріантну підгрупу $D$, що має в $A^G$ скінчений індекс. Звідси випливає, що локально нільпотентний радикал $L$ підгрупи $A^G$ має в $A^G$ скінчений індекс. Очевидно, підгрупа $L$ буде $G$-інваріантною. Локальна нільпотентність $L$ тягне за собою той факт, що множина $T$ усіх її елементів скінченого порядку буде (характеристичною) підгрупою. Оскільки $D \leq A$, то $T \cap D = \langle 1 \rangle$, а тому $T$ буде скінченною. Далі, $L/T$ вільна від скруту і є скінченим розширенням абелевої підгрупи. З її локальної нільпотентності випливає тоді, що вона абелева. У свою чергу, скінченність $T$ показує, що $L$ – нільпотентна. З теореми 1.1.20 випливає, що $L$ містить у собі таку нормальну підгрупу $H$ без скруту, що $L/H$ – обмежена група. Нехай $n$ – таке натуральне число, що $(L/H)^n = \langle 1 \rangle$. Тоді $L^n \leq H$, зокрема, $B = L^n$ – підгрупа вільна від скруту. Тоді порядки елементів $L/B$ ділять число $n$, до того ж $B$ є характеристичною в $L$, а тому буде $G$-інваріантною. Зі скінченності $A^G/L$ випливає, що $A^G/B$ – обмежена група.

**2.1.7. Лема.** *Нехай $G$ – розв'язна група, у якої $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо $G$ має нескінчений 0-ранг, то $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченого 0-рангу.*

***Доведення.*** Нехай $A_1$ – нормальна абелева підгрупа $G$. Оскільки $P(G) = \langle 1 \rangle$, то $A_1$ вільна від скруту. Якщо вона має нескінчений ранг, то все доведено. Припустимо, що $r_0(A_1)$ є скінченим. Нехай далі $A_2/A_1$ – нормальна абелева підгрупа $G/A_1$, а через $T/A_1$ позначимо періодичну частину $A_2/A_1$. З теореми 1.1.21 випливає, що індекс $|T : C_T(A_1)|$ є скінченним. Підгрупа $C_T(A_1)$ є нільпотентною і нормальною в $G$. Оскільки $P(G) = \langle 1 \rangle$, то $C_T(A_1)$ вільна від скруту і тому абелева. Окрім того, періодична частина $A_2/C_T(A_1)$ є скінченою. Використовуючи аналогічні аргументи, збудуємо ряд нормальних підгруп $\langle 1 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_s \leq A_{s+1} = S$, що задовольняють наступні умови: кожен фактор $A_{j+1}/A_j$ або є скінченим, або є абелевою групою без скруту скінченого *0-рангу*, $0 \leq j \leq s-1$, а останній фактор $A_{s+1}/A_s$ є абелевою групою нескінченого *0-рангу*. У кожному абелевому факторі без скруту $A_{j+1}/A_j$ вибираємо $S$-інваріантну підгрупу $D/A_j$ найменшого можливого *0*-рангу. Нехай $L/D$ – періодична частина $A_{j+1}/D$, тоді і $L$ буде $S$-інваріантною підгрупою. Окрім того, $L/A_j$ – $S$-раціонально незвідна та $A_{J+1}/L$ вільна від скруту.

Інакше кажучи, не втрачаючи загальності можна припустити, що кожен абелевий фактор без скруту $A_{j+1}/A_j$ є $S$-раціонально незвідним.

Якщо $A_s/A_{s-1}$ є скінченим, то майже очевидною є та обставина, що $S/A_{s-1}$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту, що має нескінчений $0$-ранг. Припустимо тепер, що $A_s/A_{s-1}$ – абелева група без скруту . Якщо $A_s/A_{s-1} \le \zeta(S/A_{s-1})$, то група $S/A_{s-1}$ є нільпотентною і тому містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченого $0$-рангу (теорема 1.1.5). Нарешті, припустимо, що $\zeta(S/A_{s-1})$ не містить у собі $A_s/A_{s-1}$. За теоремою 1.1.23 $S/A_{s-1}$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченого $0$-рангу. За допомогою аналогічних аргументів через скінчену кількість кроків отримаємо, що і група $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченого $0$-рангу.

**2.1.8. Лема.** *Нехай $H$ – нормальна підгрупа групи $G$, що задовольняє наступним умовам:*

*(1) $H$ вільна від скруту;*

*(2) $H \le \zeta_n(G)$;*

*(3) $G/H$ – локально скінченна група.*

*Тоді $\gamma_n(G)$ – локально скінченна підгрупа.*

***Доведення.*** Не обмежуючи загальності, можна припустити, що $n$ –найменше натуральне число, що має властивість $H \le \zeta_n(G)$. Для доведення застосуємо індукцію за числом $n$. Нехай спочатку $n = 1$, тобто $H \le \zeta(G)$. У цьому випадку $[G, G]$ – локально скінченна група (наслідок 1.1.16). Нехай тепер $n > 1$. Покладемо $C = H \cap \zeta(G)$. За індуктивною гіпотезою $\gamma_{n-1}(G/C) = P/C$ – локально скінчена група. Це тягне за собою локальну скінченність підгрупи $[P, P]$ (наслідок 1.1.16). Звідси випливає, що підмножина $T$, що складається з усіх елементів скінченого порядку підгрупи $P$, буде (характеристичною) підгрупою $P$. Зокрема, $T$ нормальна в $G$. З включення $[P, P] \le T$ випливає, що $P/T$ – абелева група без скруту. Далі, $P/T$ містить у собі підгрупу $CT/T$, для якої $(P/T)/(CT/T)$ – періодична. Включення $CT/T \le \zeta(G/T)$ і той факт, що в абелевій групі без скруту операція добування кореня є однозначною, приводять до включення $P/T \le \zeta(G/T)$. У свою чергу, останнє включення тягне за собою ту обставину, що $G/T$ – нільпотентна група ступеню $n$. Таким чином, маємо включення $\gamma_n(G) \le T$, яке і доводить лему.

За допомогою аналогічних аргументів доводиться і наступна

**2.1.9. Лема.** *Нехай $H$ – нормальна розв'язна підгрупа групи $G$, що має ступінь розв'язності $d$, $L$ – така підгрупа $C_G(H)$, що $L \geq H$ та $L/H$ є локально скінченою. Тоді член ряду комутантів підгрупи $L$, що має номер $d$, буде локально скінченною підгрупою.*

**2.1.10. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група нескінченного 0-рангу, у якої $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально скінченні або локально нільпотентні, то $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченного 0-рангу.*

***Доведення.*** Нехай $L$ – локально нільпотентний радикал групи $G$. З рівності $P(G) = \langle 1 \rangle$ випливає, що $L \neq \langle 1 \rangle$. Якщо припустити, що $L$ має нескінчений 0-ранг, то з теореми А.І. Мальцева (теорема 1.1.5) отримаємо, що $L$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченого 0-рангу. Тому розглянемо випадок, коли $L$ має скінчений 0-ранг. Оскільки $P(G) = \langle 1 \rangle$, то $L$ – локально нільпотентна підгрупа без скруту. Знову застосовуючи теорему 1.1.5 отримаємо, що $L$ – нільпотентна підгрупа скінченого спеціального рангу. Нехай $C = C_G(L)$ та $R/L$ – локально нільпотентний радикал $C/L$. Припустимо, що $C \neq L$. За теоремою Б.І. Плоткіна (теорема 1.1.24) $C_R(L) \leq L$, а це включення доводить рівність $R = L$. Звідси випливає, що локально скінчений радикал $F/L$ фактора $C/L$ є неодиничним. З леми 2.1.8 та умови $P(G) = \langle 1 \rangle$ випливає нільпотентність $F$. Але тоді $F \leq L$. Отримане протиріччя доводить рівність $C = L$. Інакше кажучи, $G/L$ ізоморфна до підгрупи $Aut(L)$. Через $S/L$ позначимо максимальну нормальну радикальну підгрупу $G/L$. З теореми 1.1.25 випливає, що $S/L$ розв'язна. Якщо припустити тепер, що $S$ має нескінченний 0-ранг, то з леми 2.1.7 отримаємо, що $S$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченного 0-рангу. Тому розглянемо випадок, коли $S/L$ має скінчений 0-ранг. Нехай $P(G/L) = P/L$, тоді $P/L$ – скінчена (теорема 1.1.26), а $(S/L)/(S/L \cap P/L)$ має скінчений спеціальний ранг за теоремою 1.1.4. Зі скінченності $P/L$ отримуємо, що $S/L$ буде розв'язною $\boldsymbol{A_4}$-групою (тобто $\boldsymbol{A_3}$-групою зі скінченими періодичними підгрупами). Припустимо, що $G/S$ є нескінченною. Покладемо $Z/L = C_{G/L}(S/L)$ та позначимо через $T/S$ максимальну нормальну локально скінчену підгрупу $G/S$. Якщо припустити, що $T/S$ – скінчена, то знову неважко отримати, що локально нільпотентний радикал $G/S$ буде неодиничним. Але це суперечить вибору $S$. Отже, $T/S$ є нескінченою. Нехай $U/L = T/L \cap Z/L$. З теореми 1.1.26 випливає скінченність $T/U$. З

леми 2.1.9 випливає існування в $U/L$ такої характеристичної локально скінченої підгрупи $V/L$, що $U/V$ – розв'язна. Зокрема, $V/L \le P/L$, а тому $V/L$ є скінченою. Але тоді підгрупа $W/L = C_{U/L}(V/L)$ має скінчений індекс в $U/L$. Неважко побачити, що $W/L$ є розв'язною. Оскільки вона нормальна в $G/L$, то $(S/L)(W/L)$ – розв'язна нормальна підгрупа. З вибору $S/L$ отримуємо рівність $S/L = (S/L)(W/L)$, з якої, зокрема, випливає скінченність $T/S$. Таким чином, знову отримали протиріччя, яке показує, що $S/L$ має нескінчений $0$-ранг. Цей випадок уже був розглянутий.

**2.1.11. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, $F$ – її скінчена нормальна підгрупа. Підгрупа $H$ тоді і тільки тоді наближено нормальна в $G$, коли $HF/F$ наближено нормальна в $G/F$.*

***Доведення.*** Якщо $H$ є наближено нормальною в $G$, то індекс $|H^G : H|$ є скінченним. Скінченність $F$ тягне за собою скінченність індексу $|H^G F: H^G|$, а це приводить до скінченності $|H^G F : H|$. Зокрема, індекс $|H^G F : HF|$ буде скінченим, а тому скінченим буде і $|(HF)^G : HF|$. Це доводить, що $HF$ є наближено нормальною в $G$, а тому і $HF/F$ є наближено нормальною в $G/F$.

Навпаки, нехай $HF/F$ наближено нормальна в $G/F$. У цьому випадку $HF$ наближено нормальна в $G$. Скінченність індексу $|HF : H|$ тягне за собою той факт, що $H$ має скінчений індекс у деякій нормальній в $G$ підгрупі. Зокрема, і індекс $|H^G : H|$ є скінченним, так що $H$ є наближено нормальною в $G$.

## 2.2. Періодичні групи, у яких усі підгрупи нескінченного секційного *p*-рангу наближено нормальні

**2.2.1. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні.*

*(1) Якщо $H$ – підгрупа нескінченного секційного $p$-рангу, то і кожна її підгрупа нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальна.*

*(2) Якщо $H$ – нормальна підгрупа $G$, то кожна підгрупа нескінченного секційного $p$-рангу фактор-групи $G/H$ є наближено нормальною.*

Це твердження є майже очевидним.

**2.2.2. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні, $g \in G$, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична $\langle g \rangle$-інваріантна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma(p) = \{\lambda \in \Lambda \mid H_\lambda$ має неодиничну елементарну абелеву $p$-секцію$\}$ є нескінченною. Тоді $G \in FC(G)$.*

***Доведення.*** Покладемо $\langle x \rangle = \langle g \rangle \cap H$. Тоді $Supp\ x = \Delta$ є скінченою підмножиною $\Lambda$ та $(\times_{\lambda \in M} H_\lambda) \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$, де підмножина $M = \Lambda \setminus \Delta$ є нескінченною. Виберемо в $M$ дві підмножини $K$ і $N$, що задовольняють наступні умови: $K \cup N = M$, $K \cap N = \varnothing$ та обидві підмножини $\Sigma(p) \cap K$, $\Sigma(P) \cap N$ – нескінченні. Цей вибір забезпечує тепер ту обставину, що підгрупи $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda)$ і $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ мають нескінченні секційні $p$-ранги, зокрема, вони будуть наближено нормальними. Тому за лемою 2.1.2 їх перетин $\langle g \rangle = \langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda) \cap \langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ також буде наближено нормальною підгрупою. З леми 2.1.3 випливає тепер той факт, що $g \in FC(G)$.

**2.2.3. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma(p) = \{ \lambda \in \Lambda \mid H_\lambda$ має неодиничну елементарну абелеву $p$-секцію$\}$ є нескінченною. Тоді $H \leq FC(G)$.*

**2.2.4. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі періодичну абелеву підгрупу $A$ нескінченого секційного $p$-рангу, то $A \leq FC(G)$, зокрема, $FC(G)$ має нескінчений секційний $p$-ранг.*

***Доведення.*** Нехай $P$ – силовська $p$-підгрупа $A$. Тоді $P$ має нескінчений секційний $p$-ранг, а тому $P$ містить у собі підгрупу $E = \times_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, де $E_\lambda$ –циклічна підгрупа простого порядку $p$ для кожного $\lambda \in \Lambda$ та множина індексів $\Lambda$ є нескінченою. Очевидно, підгрупа $E_\lambda$ буде $\langle a \rangle$-інваріантною для будь-якого елемента $a \in A$, і, застосовуючи лемму 2.2.2, отримаємо включення $A \leq FC(G)$.

**2.2.5. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі періодичну абелеву підгрупу $A$ нескінченного секційного $p$-рангу, то $G$ – FC-група.*

***Доведення.*** Нехай $P$ – силовська $p$-підгрупа $A$. Тоді $P$ має нескінченний секційний $p$-ранг, а тому $P$ містить у собі нескінчену елементарну абелеву $p$-підгрупу $E$. Тоді $E$ – наближено нормальна. З леми 2.1.5 отримуємо, що $G$ містить у собі нормальну нескінченну елементарну абелеву $p$-підгрупу $B$.

Нехай $g$ – довільний елемент групи $G$. Якщо $g$ має скінчений порядок, то з леми 2.1.4 отримуємо тоді, що $B$ містить у собі підгрупу $\times_{n \in N} B_n$, де $B_n$ – скінчена неодинична $\langle g \rangle$-інваріантна підгрупа для кожного $n \in N$. За лемою 2.2.2 $g \in FC(G)$. Нехай тепер $G$ має нескінчений порядок. Оскільки $B$ – елементарна абелева підгрупа, то $B = U \times V$, де обидві підгрупи $U$, $V$ – нескінченні. Зокрема, вони будуть наближено нормальними, тобто обидва індекси $|U^G : U|$ та $|V^G : V|$ – скінчені. З того факту, що $B$ – нормальна в $G$ випливають включення $U^G$, $V^G \le B$. Всі ці обставини показують, що перетин $W = U^G \cap V^G$ є скінченим. Обидві підгрупи $\langle gW \rangle U^G/W$ та $\langle gW \rangle V^G/W$ мають нескінчений секційний $p$-ранг, і з леми 2.2.1 випливає, що вони наближено нормальні в $G/W$. Зважаючи на рівність $\langle g \rangle \cap B = \langle 1 \rangle$, тепер можна бачити, що $\langle gW \rangle U^G/W \cap \langle gW \rangle V^G/W = \langle gW \rangle$ – наближено нормальна підгрупа. За лемою 2.1.3 $gW \in FC(G/W)$. Оскільки $W$ – скінчена нормальна підгрупа $G$, то $FC(G/W) = FC(G)/W$, і отже, $g \in FC(G)$. Інакше кажучи, $G = FC(G)$.

**2.2.6. Лема.** *Нехай $G$ – локально скінченна група, $L/K$ – її нескінченна елементарна абелева $p$-секція. Тоді $G$ містить у собі нескінченну елементарну абелеву $p$-підгрупу.*

***Доведення.*** Виберемо у секції $L/K$ (нескінченну) зчислену елементарну абелеву $p$-підгрупу $B$. Нехай $B/K = \times_{n \in N} \langle b_n K \rangle$ та покладемо $B_n/K = \times_{m \le n} \langle b_m K \rangle$, $n \in N$. Оскільки $|B_1/K| = p$, то знайдеться така циклічна $p$-підгрупа $P_1$, що $B_1 = P_1 K$. Нехай в $B$ вже вибрані скінчені $p$-підгрупи $P_1, \ldots, P_n$, які задовольняють наступні умови: $P_1 \le \ldots \le P_n$ і $B_j = KP_j$ для кожного $j \le n$. Виберемо в $B$ скінчену підгрупу $F$, для якої $B_{n+1} = KF$, а в підгрупі $F$ виберемо силовську $p$-підгрупу $P_{n+1}$, що містить у собі $P_n$. Оскільки $B_{n+1}/K = FK/K \cong F/(F \cap K)$ – $p$-група, то з властивостей силовських підгруп скінчених груп отримаємо рівність $F = P_{n+1}(F \cap K)$, з якої, у свою чергу, випливає рівність $B_{n+1} = FK = P_{n+1}(F \cap K)K = P_{n+1}K$. Індуктивні міркування показують тепер, що можна побудувати

нескінчену зростаючу послідовність скінчених $p$-підгруп, що задовольняють умови $P_1 \leq \ldots \leq P_n \leq \ldots$ і $B_j = KP_j$ для кожного $n \in N$. Покладемо $P = \cup_{n \in N} P_n$, тоді $P$ – така $p$-підгрупа, що $B = PK$. З співвідношень $B/K = PK/K \cong P/(P \cap K)$ отримаємо нескінченність секційного $p$-рангу підгрупи $P$. Якщо припустити тепер, що $P$ задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп, то за теоремою С.М. Чернікова (теорема 1.1.10) підгрупа $P$ буде черніковською. Але ж черніковська $p$-підгрупа має скінчений секційний $p$-ранг. Це протиріччя і показує, що $P$ не може задовольняти умову мінімальності для абелевих підгруп, і тому вона містить у собі нескінченну елементарну абелеву $p$-підгрупу.

**2.2.7. Пропозиція**. *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ – $FC$-група нескінченного секційного $p$-рангу, то $G$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Розглянемо спочатку випадок, коли $G$ – періодична група. З леми 2.2.6 отримуємо, що $G$ містить у собі нескінченну елементарну абелеву $p$-підгрупу $A$. З леми 2.1.5 тепер отримаємо, що $G$ містить у собі нескінченну нормальну елементарну абелеву $p$-підгрупу $B$. Нехай $H$ – довільна підгрупа $G$. Якщо перетин $H \cap B$ є нескінченим, то $H \cap B$ – підгрупа нескінченого секційного $p$-рангу, а тому вона наближено нормальна. Припустимо тепер, що $U = H \cap B$ є скінченою. Оскільки $B$ нормальна в $G$, то $V = U^G \leq B$, а тому $HV/V \cap B/V = < 1 >$. З того факту, що $G$ – $FC$-група та скінченності $U$ випливає скінченність $V$. Далі $B/V$ – елементарна абелева підгрупа, так що $B/V = C/V \times D/V$, де обидві підгрупи $C/V$, $D/V$ – нескінченні. Зокрема, вони наближено нормальні, тобто індекси $\left|(C/V)^{G/V} : C/V\right|$ та $\left|(D/V)^{G/V} : D/V\right|$ є скінченими. Знову застосовуючи той факт, що $B$ – нормальна в $G$, отримаємо включення $(C/V)^{G/V}, (D/V)^{G/V} \leq B/V$. Усі ці обставини доводять скінченність $W/V = (C/V)^{G/V} \cap (D/V)^{G/V}$. Оскільки $(HW/W)\ (C/W)^{G/W}$ та $(HW/W)\ (D/W)^{G/W}$ мають нескінчений секційний $p$-ранг, то з леми 2.2.1 випливає, що вони наближено нормальні в $G/W$. Враховуючи рівність $HW/W \cap B/W = <1>$, тепер можна побачити, що $HW/W = (HW/W)\ (C/W)^{G/W} \cap (HW/W)\ (D/W)^{G/W}$ – наближено нормальна підгрупа, тобто індекс $\left|(HW)^G : HW\right|$ є скінченим. Зі скінченності нормальної підгрупи $W$ випливає

скінченність $|HW : H|$, а це, у свою чергу, тягне за собою скінченність $|(HW)^G : H|$. Таким чином, $H$ – наближено нормальна. Отже, кожна підгрупа $G$ є наближено нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) група $G$ має скінчений комутант.

Нехай тепер $G$ – неперіодична група. Виберемо у центрі $G$ максимальну підгрупу без скруту $Z$. Оскільки $G/\zeta(G)$ є періодичною (теорема 1.1.17), то також і $G/Z$ є періодичною. Припустимо спочатку, що підгрупа $Z$ має нескінчений секційний $p$-ранг. Якщо $L$ – підгрупа, що містить у собі $Z$, то і вона має нескінчений секційний $p$-ранг. Інакше кажучи, $L$ – наближено нормальна в $G$. Звідси випливає, що кожна підгрупа $G/Z$ буде наближено нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) $G/Z$ має скінчений комутант. Якщо ж $Z$ має скінчений секційний $p$-ранг, то періодична фактор-група $G/Z$ має нескінчений секційний $p$-ранг. З доведеного вище випливає знову, що $G/Z$ має скінчений комутант. Оскільки $G$ – $FC$-група, то підгрупа $[G, G]$ є періодичною (теорема 1.1.17), зокрема, $[G, G] \cap Z = \langle 1 \rangle$. Наступні співвідношення $[G, G] \cong [G, G]/([G, G] \cap Z) \cong [G, G]Z/Z = [G/Z, G/Z]$ показують, що $[G, G]$ є скінченою.

**2.2.8. Теорема.** *Нехай $G$ – локально майже розв'язна група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченного секційного $p$-рангу, то $G$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Нехай $S$ – періодична підгрупа, що має нескінчений секційний $p$-ранг, $T$ – максимальна періодична підгрупа, яка містить у собі $S$. Тоді $T$ також має нескінчений секційний $p$-ранг, а тому вона наближено нормальна в $G$. Це означає, що індекс $|T^G : T|$ є скінченим, зокрема, і $T^G$ буде періодичною. За вибором $T$ маємо $T^G = T$. Інакше кажучи, $T$ є нормальною в $G$. У свою чергу, це означає, що $T$ містить усі елементи скінченого порядку. Оскільки $G$ – локально майже розв'язна, то $T$ буде локально скінченою. За лемою 2.2.6 $T$ містить у собі нескінчену елементарну абелеву $p$-підгрупу $A$. З леми 2.2.5 випливає тоді, що $G$ – $FC$-група. Нарешті, застосовуючи пропозицію 2.2.7, отримаємо скінченність підгрупи $[G, G]$.

## 2.3. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого *0*-рангу наближено нормальні

**2.3.1. Лема.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні.*

*(1) Якщо H – підгрупа нескінченного 0-рангу, то і кожна її підгрупа нескінченного 0-рангу наближено нормальна.*

*(2) Якщо H – нормальна підгрупа G, то кожна підгрупа нескінченного 0-рангу фактор-групи G/H є наближено нормальною.*

Це твердження є майже очевидним.

**2.3.2. Лема.** *Нехай G – група, у якій всі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні, $g \in G$, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична $\langle g \rangle$-інваріантна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ є нескінченною. Тоді $\langle g \rangle$ наближено нормальна в G, і тому $g \in FC(G)$.*

***Доведення.*** Покладемо $\langle x \rangle = \langle g \rangle \cap H$. Тоді *Supp* $x = \Delta$ є скінченою підмножиною $\Lambda$ та $(\times_{\lambda \in M} H_\lambda) \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$, де підмножина $M = \Lambda \setminus \Delta$ є нескінченною. Виберемо тепер в $M$ дві підмножини $K$ і $N$, що задовольняють наступні умови: $K \cup N = M$, $K \cap N = \varnothing$ та обидві підмножини $\Sigma \cap K$, $\Sigma \cap N$ – нескінченні. Цей вибір забезпечує тепер ту обставину, що підгрупи $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda)$ і $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ мають нескінченні *0*-ранги, зокрема, вони будуть наближено нормальними. Тому за лемою 2.1.2 їх перетин $\langle g \rangle = \langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda) \cap \langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ також буде наближено нормальною підгрупою. З леми 2.1.3 випливає тепер той факт, що $g \in FC(G)$.

**2.3.3. Наслідок.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ є нескінченною. Тоді $H \leq FC(G)$.*

**2.3.4. Наслідок.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні. Якщо G містить у собі абелеву підгрупу A нескінченого 0-рангу, то $A \leq FC(G)$, зокрема, FC(G) має нескінчений 0-ранг.*

***Доведення.*** Якщо $A$ вільна від скруту, то вона містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченого рангу. Якщо ж періодична частина $T$ підгрупи $A$ є неодиничною, то тоді в фактор-групі $A/T$

вибираємо вільну абелеву підгрупу $C/T$, що має нескінчений $0$-ранг. Маємо $C = E \times T$, де $C/T \cong E$ – вільна абелева підгрупа нескінченого $0$-рангу (див., наприклад, [83, теорема 14.4]). Таким чином, у кожному з випадків $A$ містить у собі підгрупу $\times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де $C_\lambda$ – нескінченна циклічна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$ та множина індексів $\Lambda$ є нескінченою. Очевидно, підгрупа $C_\lambda$ є $\langle a \rangle$-інваріантною для кожного елемента $a \in A$, і за лемою 2.3.2 $A \leq FC(G)$.

**2.3.5. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного $0$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ – $FC$-група нескінченного $0$-рангу, то $G$ має скінчений комутант.*

***Доведення.*** Виберемо у центрі групи $G$ максимальну підгрупу без скруту $U$. Оскільки $G/\zeta(G)$ є періодичною (теорема 1.1.17), то також і $G/U$ є періодичною. Звідси випливає, що $U$ має нескінчений $0$-ранг. ранг. Якщо $L$ – підгрупа, що містить у собі $U$, то і вона має нескінчений $0$-ранг. Інакше кажучи, $L$ – наближено нормальна в $G$. Звідси випливає, що кожна підгрупа $G/U$ буде наближено нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) $G/U$ має скінчений комутант. Оскільки $G$ – $FC$-група, то підгрупа $[G, G]$ є періодичною (теорема 1.1.17), зокрема, $[G, G] \cap U = \langle 1 \rangle$. Наступні співвідношення $[G, G] \cong [G, G]/([G, G] \cap U) \cong [G, G]U/U = [G/U, G/U]$ показують, що $[G, G]$ є скінченною.

**2.3.6. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного $0$-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченного $0$-рангу, то $G$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Нехай $A$ – абелева підгрупа, що має нескінченний $0$-ранг. З наслідку 2.3.4 випливає включення $A \leq FC(G)$. Зокрема, $FC$-центр має нескінченний $0$-ранг. Нехай $Z = \zeta(FC(G))$. Оскільки $FC(G)/\zeta(FC(G))$ є періодичною (теорема 1.1.17), то $Z$ має нескінченний $0$-ранг. З абелевості $Z$ випливає, що вона містить у собі підгрупу без скруту $C$ нескінченного $0$-рангу. Тоді $C$ буде наближено нормальною і згідно леми 2.1.6 $C^G$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу без скруту нескінченного $0$-рангу. Щоб не вводити нові позначення, можна вважати, що $C$ нормальна в $G$. Нехай $1 \neq c_1 \in C$, $C_1 = \langle c_1 \rangle^G$. Оскільки $c_1 \in FC(G)$, то $C_1$ – скінченно породжена. Виберемо в $A$ підгрупу $B_1$, максимальну відносно $C_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$. Очевидно, $C/B_1$ – група без скруту скінченного спеціального рангу,

зокрема, вона має скінчений *0*-ранг. У свою чергу, ще значить, що $B_1$ має нескінчений *0*-ранг, тому $B_1^G/B_1$ – скінчена. Оскільки $C_1 \cong C_1B_1/B_1$ вільна від скруту, то $B_1^G/B_1 \cap C_1B_1/B_1 = \langle 1 \rangle$. За вибором $B_1$ маємо $B_1^G = B_1$. Інакше кажучи, підгрупа $B_1$ буде нормальною в $G$. Нехай $1 \neq c_2 \in B_1$ та $C_2 = \langle c_2 \rangle^G$. Знову $C_2$ буде скінчено породженою. Виберемо в $A$ підгрупу $B_2$, максимальну відносно $(C_1C_2) \cap B_2 = \langle 1 \rangle$. Знову $A/B_2$ має скінчений спеціальний ранг, причому $B_2$ – нормальна в $G$. Застосовуючи аналогічні аргументи, збудуємо нескінчену множину $\{C_n \mid n \in N\}$ таких скінчено породжених $G$-інваріантних підгруп $C$, що $\langle C_n \mid n \in N \rangle = \times_{n \in N} C_n$. Зокрема, $C_n$ – $\langle g \rangle$-інваріантна для кожного елемента $g \in G$. За лемою 2.3.2 $g \in FC(G)$, і це доводить рівність $G = FC(G)$. Застосування леми 2.3.5 завершує доведення.

**2.3.7. Теорема.** *Нехай G – група нескінченного 0-рангу, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні. Якщо G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінченні, то G/P(G) – абелева група без скруту.*

***Доведення.*** Не обмеживши загальності, можна припустити, що $P(G) = \langle 1 \rangle$. З пропозиції 2.1.10 випливає, що $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченного *0*-рангу. З пропозиції 2.3.6 отримаємо, що $G$ має скінчений комутант. Оскільки $P(G) = \langle 1 \rangle$, то $G$ – абелева група без скруту.

При додаткових обмеженнях на групу $G$ є можливим описати не тільки будову фактор-групи $G/P(G)$, а і будову усієї групи $G$.

**2.3.8. Теорема.** *Нехай G – розв'язна група нескінченого 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, наближено нормальні. Припустимо, що всі скінчено породжені підгрупи G мінімаксні. Тоді група G має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. За теоремою 2.3.7 $G/P$ – абелева група без скруту, що має нескінченний *0*-ранг. Тому вона містить у собі вільну абелеву підгрупу (нескінченного) зчисленого рангу $\times_{n \in N} \langle a_n P \rangle$. Оскільки підгрупа $H = \langle a_1, a_2 \rangle$ – розв'язна, то вона має ряд нормальних підгруп $\langle 1 \rangle = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_k = P \cap H \leq H$, фактори якого є абелевими. Тоді $H/H_{k-1}$ задовольняє умову максимальності для нормальних підгруп (теорема 1.1.27). Звідси випливає, що її абелева періодична підгрупа $H_k/H_{k-1}$ буде обмеженою. З іншого боку, $H$ – мінімаксна, а мінімаксна і обмежена група є

скінченою. Отже, $H_k/H_{k-1}$ – скінченна, а тому $H/H_{k-1}$ є поліциклічною. Повторюючи ті самі аргументи достатню кількість разів, ми отримаємо, що $P \cap H$ – скінченна. Це означає, що і $[H, H]$ буде скінченною, а оскільки $H$ – скінчено породжена, то $H/\zeta(H)$ є скінченою. Тоді існує таке натуральне $t$, що $(a_2)^t = b_2 \in \zeta(H)$, зокрема, $< a_1, b_2 > = < a_1 > \times < b_2 >$. Застосовуючи аналогічні міркування, можемо показати, що і підгрупа $L = < a_1, b_2, a_3 >$ буде скінченою над центром, так що знайдеться таке натуральне число $m$, що $(a_3)^m = b_2 \in \zeta(L)$, зокрема, $< a_1, b_2, b_3 > = < a_1 > \times < b_2 > \times < b_3 >$. Подальше застосування аналогічних аргументів показує, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу без скруту, що має нескінчений $0$-ранг. Залишилось застосувати пропозицію 2.3.6.

**2.3.9. Теорема.** *Нехай $G$ – розв'язна група нескінченного 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, наближено нормальні. Припустимо, що $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінченні. Якщо $G$ – локально нетерова, то комутант групи $G$ буде скінченим.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. За теоремою 2.3.7 $G/P$ – абелева група без скруту нескінченого $0$-рангу. Нехай $L$ – скінчено породжена підгрупа $G$. Оскільки $L$ задовольняє умову максимальності для всіх підгруп, то вона майже поліциклічна. Тому $L \cap P$ є скінченою. З того факту, що $L/(L \cap P)$ – абелева, отримуємо, що $L$ – скінчена над центром. Тепер повторюючи аргументи попередньої теореми, отримуємо, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченого $0$-рангу й застосування пропозиції 2.3.6. завершує доведення.

**2.3.10. Наслідок.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група нескінченного 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, наближено нормальні. Тоді комутант групи $G$ буде скінченим.*

**2.3.11. Лема.** *Нехай $G$ – $FC$-гіперцентральна група. Якщо $G$ – скінчено породжена, то вона майже нільпотентна.*

***Доведення.*** Припустимо спочатку, що $G$ – $FC$-нільпотентна. Нехай $<1> = F_0 \le F_1 \le \ldots \le F_n = G$ – верхній $FC$-центральний ряд $G$. Досить довести, що $G/C_G(F_{i+1}/F_i)$ є скінченою для кожного $i$, $0 \le i \le n-1$. Скористаємось індукцією за числом $n$. Якщо $n = 1$, то $G$ – $FC$-група, і тоді $G$ буде скінченною над центром. Нехай тепер $n > 1$ і

припустимо, що вже доведена скінченність фактор-групп $G/C_G(F_{i+1}/F_i)$ для $n > i \geq 1$. Покладемо $H = C_G(F_2/F_1) \cap \ldots \cap C_G(F_n/F_{n-1})$. Тоді $G/H$ – скінчена і $H/F_1$ – нільпотентна (теорема 1.1.29). Зокрема, $G/F_1$ – скінчено визначена, а із теореми 1.1.28 випливає, що $F_1 = \langle g_1 \rangle^G \ldots \langle g_S \rangle^G$ для деяких елементів $g_1, \ldots, g_S \in FC(G)$. Покладемо $U = C_G(\langle g_1 \rangle^G) \cap \ldots \cap C_G(\langle g_S \rangle^G)$. Тоді $G/U$ – скінчена та $U = C_G(F_1)$. Тепер нехай $C = H \cap U$, тоді $G/C$ буде скінченою та $C$ – нільпотентна (теорема 1.1.29).

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай $\langle 1 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \ldots C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \ldots C_\gamma = G$ – верхній $FC$-центральний ряд $G$. Введемо до розгляду множину $\Sigma = \{\alpha \mid G/C_\alpha$ – майже нільпотентна група$\}$. Оскільки $G = \cup_{\alpha \leq \gamma} C_\alpha$, то $\Sigma \neq \varnothing$. Нехай $\beta$ – найменший елемент $\Sigma$. Якщо $\beta = 0$, то $G$ – майже нільпотентна. Припустимо, що $\beta > 0$. Спочатку розглянемо ситуацію, коли $\beta$ є неграничним ординалом. Оскільки $C_\beta/C_{\beta-1}$ – $FC$-центр $G/C_{\beta-1}$, то $G/C_{\beta-1}$ – $FC$-нільпотентна. Група $G$ – скінчено породжена і, користуючись наведеними вище аргументами, неважко довести, що $G/C_{\beta-1}$ буде майже нільпотентною. Але це суперечить вибору $\beta$. Це протиріччя доводить, що $\beta$ – граничний ординал. Група $G/C_\beta$ є майже нільпотентною, зокрема, вона майже поліциклічна, тому з теореми 1.1.28 випливає, що $C_\beta = \langle g_1 \rangle^G \ldots \langle g_S \rangle^G$ для деяких $g_1, \ldots, g_S \in C_\beta$. Але тоді існує такий ординал $\delta < \beta$, що $g_1, \ldots, g_s \in C_\delta$, зокрема, $C_\beta = C_\delta$, і отримуємо протиріччя, яке і доводить, що $G$ буде майже нільпотентною.

**2.3.12. Наслідок.** *Нехай $G$ – $FC$-гіперцентральна група нескінченного 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, наближено нормальні. Тоді група $G$ має скінченний комутант.*

## 2.4. Групи, у яких усі підгрупи нескінченного секційного рангу наближено нормальні

У розділі 2.2 вже почалося вивчення груп, всі підгрупи яких, що мають нескінченний секційний $p$-ранг, наближено нормальні. Був розглянутий випадок, коли група містить у собі періодичну підгрупу нескінченного секційного $p$-рангу. Для розгляду випадку, коли всі

періодичні підгрупи мають скінченний секційний $p$-ранг, скористаємось результатами розділу 2.2.

**2.4.1. Теорема.** *Нехай $G$ – радикальна група, всі підгрупи якої, що мають нескінченний секційний $p$-ранг, наближено нормальні. Якщо $G$ має нескінченний секційний $p$-ранг, але всі періодичні підгрупи мають скінченні секційні $p$-ранги, то $G/O_{p'}(G)$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Покладемо $R = O_{p'}(G)$, $P = P(G)$. Не обмежуючи загальності, можна припустити, що $R = \langle 1 \rangle$. Оскільки кожна силовська $p$-підгрупа $P$ має скінчений секційний $p$-ранг, то кожна силовська $p$-підгрупа $P$ є черніковською. Оскільки $G$ – локально розв'язна, то $P$ – черніковська група за теоремою М.І. Каргаполова (теорема 1.1.30). Якщо припустити тепер, що $r_0(G)$ є скінченим, то $G/P$ має скінченний спеціальний ранг за теоремою 1.1.4 , а тому $G/P$ має скінчений секційний $p$-ранг. Це протиріччя доводить нескінченність $0$-рангу групи $G$. Але тоді $G/P$ має нескінченний *0-ранг*. З пропозиції 2.1.10 отримаємо, що $G/P$ містить у собі абелеву підгрупу $A/P$ вільну від скруту, що має нескінченний $0$-ранг. ранг. З теореми 1.1.8 випливає, що $A$ містить у собі абелеву підгрупу $B$ нескінченого $0$-рангу, періодична частина $T$ якої буде черніковською. Міркуючи як і в доведенні наслідку 2.3.4, прийдемо до існування в $B$ підгрупи без скруту $C$, що має нескінчений $0$-ранг. Зокрема, $C$ має нескінчений секційний $p$-ранг. Повторюючи практично дослівно доведення пропозиції 2.3.6, отримуємо, що $G$ – $FC$-група, а з пропозиції 2.2.7 випливає тепер, що $G$ має скінченний комутант.

**2.4.2. Теорема.** *Нехай $G$ – розв'язна група, всі підгрупи якої, що мають нескінченний секційний $p$-ранг, наближено нормальні. Припустимо також, що кожна скінчено породжена підгрупа $G$ є мінімаксною. Якщо $G$ має нескінченний секційний $p$-ранг, то комутант групи $G$ буде скінченним.*

Дійсно, якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого секційного $p$-рангу, то комутант групи G буде скінченним за теоремою 2.2.8. Якщо ж усі періодичні підгрупи мають скінченні секційні $p$-ранги, то з теореми 2.4.1 отримаємо, що $G/P(G)$ – абелева група без скруту, а потім використовуються міркування, аналогічні тим, які були застосовані при доведенні теореми 2.3.8.

Аналогічна ситуація і з наступними твердженнями.

**2.4.3. Теорема.** *Нехай $G$ – локально нетерова радикальна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, наближено нормальні, то $G$ має скінченний комутант.*

**2.4.4. Наслідок.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, наближено нормально, то $G$ має скінченний комутант.*

**2.4.5. Наслідок.** *Нехай $G$ – $FC$-гіперцентральна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, наближено нормальні, то $G$ має скінченний комутант.*

**2.4.6. Теорема.** *Нехай $G$ – радикальна група нескінченого секційного рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний ранг, наближено нормальні, то група $G$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого секційного $p$-рангу для деякого простого числа $p$, то за теоремою 2.2.8 комутант групи $G$ буде скінченим. Припустимо тепер, що всі періодичні підгрупи мають скінчений секційний $p$-ранг. З теореми 2.4.1 випливає, що $G/P$ – абелева група без скруту. Оскільки кожна силовська $p$-підгрупа $P$ має скінченний секційний $p$-ранг, то кожна силовська $p$-підгрупа $P$ буде черніковською для кожного простого числа $p$. За теоремою 1.1.31 $G$ містить у собі таку нормальну абелеву ділиму підгрупу $D$, що $G/D$ – резідуально скінчена група зі скінченими силовськими $p$-підгрупами для усіх простих чисел $p$. Оскільки силовські підгрупи $D$ є черніковськими, то $D \le FC(G)$. Нехай $L/D$ – локально нільпотентний радикал $P/D$. Його силовські підгрупи скінчені, тому $L/D \le FC(G/D)$. Тепер уже неважко отримати, що $G$ – $FC$-гіперцентральна група, а потім застосувати наслідок 2.4.5.

Наступні два твердження доводяться за допомогою невеликої модифікації тих міркувань, які використовувались для доведення леми 2.2.5, пропозицій 2.2.7, 2.3.6 і леми 2.3.5.

**2.4.7. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного спеціального рангу наближено нормальні. Якщо $G$ – $FC$-група нескінченного спеціального рангу, то $G$ має скінченний комутант.*

**2.4.8. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного спеціального рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченного спеціального рангу, то група $G$ має скінченний комутант.*

**2.4.9. Теорема.** *Нехай $G$ – група нескінченного спеціального рангу і припустимо, що $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений спеціальний ранг, наближено нормальні, то група $G$ має скінченний комутант.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого спеціального рангу, то $G$ містить у собі періодичну абелеву підгрупу нескінченого спеціального рангу за теоремою 1.1.6. З пропозиції 2.4.8 отримаємо, що $G$ має скінчений комутант. Припустимо тепер, що всі періодичні підгрупи $G$ мають скінчений спеціальний ранг. Тоді фактор-група $G/P$ має нескінчений спеціальний ранг. Якщо припустити тепер, що $G/P$ має скінчений $0$-ранг, то за теоремою 1.1.4 $G/P$ має скінчений спеціальний ранг. Таким чином, $R_0(G/P)$ буде нескінченим. З пропозиції 2.1.10 випливає, що $G/P$ містить у собі абелеву підгрупу $A/P$ нескінченого $0$-рангу. Але тоді $A/P$ має нескінчений спеціальний ранг. З пропозиції 2.4.8 випливає, що $G/P$ – абелева група без скруту. Оскільки $P$ має скінчений спеціальний ранг, то $P$ – майже розв'язна за теоремою 1.1.6. Позначимо через $L$ локально розв'язний радикал $P$, тоді $L/P$ – скінчена. Звідси випливає скінченність $G/C_G(L/P)$. Підгрупа $C_G(L/P)$ вже буде локально розв'язною. Нехай $F$ – довільна скінчено породжена підгрупа $C_G(L/P)$. Оскільки $F \cap P$ має скінчений спеціальний ранг, а $F/(F \cap P)$ – абелева та скінчено породжена, то $F$ – розв'язна підгрупа скінченого спеціального рангу. Але скінчено породжена розв'язна група скінченого спеціального рангу є мінімаксною за теоремою 1.1.12. Повторюючи майже дослівно міркування з доведення теореми 2.3.8, отримаємо, що $[F, F]$ є скінченою. Точно так, як і в цій теоремі можна довести, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу без скруту нескінченого $0$-рангу. З пропозиції 2.4.8 випливає тоді, що $G$ має скінчений комутант.

## 2.5. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого тотального рангу наближено нормальні

***2.5.1.*** **Теорема.** *Нехай $G$ – локально майже розв'язна група, всі підгрупи якої, що мають нескінчений тотальний ранг, наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого тотального рангу, то $G$ має скінчений комутант.*

***Доведення.*** Нехай $S$ – періодична підгрупа, що має нескінчений тотальний ранг, $T$ – максимальна періодична підгрупа, яка містить у собі $S$. Тоді $T$ також має нескінчений тотальний ранг, а тому вона наближено нормальна в $G$. Із скінченності $|T^G : T|$ випливає періодичність $T^G$, а це веде до рівності $T = T^G$. Інакше кажучи, $T$ – нормальна в $G$. У цьому випадку $T$ містить усі елементи скінченого порядку. Оскільки $G$ – локально майже розв'язна група, то $T$ – локально скінчена. Оскільки $T$ не є черніковською, то вона містить у собі абелеву підгрупу $B$, яка не є черніковською (теорема 1.1.11). Тоді $B$ – наближено нормальна, тобто $|B^G : B|$ є скінченим. Підгрупа $B^G$ також не буде черніковською, тому вона має нескінчений тотальний ранг. Кожна підгрупа, яка містить у собі $B^G$, також має нескінчений тотальний ранг, а тому є наближено нормальною. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/B^G$ є наближено нормальною, так що $G/\mathrm{B}^G$ має скінчений комутант за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18). З того факту, що $B^G$ – майже абелева випливає, що $G$ – майже розв'язна. Якщо $G$ має нескінчений спеціальний ранг, то з теореми 2.4.9 отримаємо, що $G$ має скінчений комутант.

Припустимо тепер, що $G$ має скінчений спеціальний ранг. З цього випливає, зокрема, що усі силовські підгрупи $T$ будуть черніковськими.

У свою чергу це тягне за собою нескінченість множини $\Pi(C)$, де $C = B^G$. Оскільки $C$ є майже абелевою, то її локально нільпотентний радикал $L$ має в $C$ скінчений індекс. Звідси випливає нескінченність множини $\Pi(L)$. Нехай $R$ – довільна підгрупа $G$. Якщо перетин $R \cap L$ не є черніковською підгрупою, то $R$ має нескінчений тотальний ранг, і, зокрема, вона наближено нормальна. Припустимо тепер, що $R \cap L$ є черніковською. Нехай $D$ – силовська $\Xi$-підгрупа $L$, де $\Xi = \Pi(L) \setminus \Pi(R \cap L)$, тоді $R \cap D = \langle 1 \rangle$. Скінченність $\Pi(R \cap L)$ та нескінченність $\Pi(L)$ показують, що множина $\Xi$ також нескінчена. Знайдуться дві

нескінчені підмножини $\Delta$, $\varsigma$ з наступними властивостями: $\Delta \cup \varsigma = \Xi$, $\Delta \cap \varsigma = \varnothing$. Нехай $V$ (відповідно $W$) – силовська $\Delta$-підгрупа (відповідно силовська $\varsigma$-підгрупа) $D$. Слід відмітити, що підгрупи $V$, $W$ – $G$-інваріантні. Далі, обидві підгрупи $RV$ та $RW$ мають нескінчені тотальні ранги, так що вони наближено нормальні. Отже і їх перетин $RV \cap RW = R$ за лемою 2.1.2 буде наближено нормальним. Таким чином, кожна підгрупа $G$ є наближено нормальною. У цьому випадку комутант $G$ буде скінченим за теоремою 1.1.18.

***2.5.2.*** **Теорема.** *Нехай $G$ – група нескінченого тотального рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінчений тотальний ранг, наближено нормальні. Якщо $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені, то $G$ має скінчений комутант.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого тотального рангу, то комутант $G$ буде скінченим за теоремою 2.5.1. Тому потрібно розглянути випадок, коли $P$ має скінчений тотальний ранг. У цьому випадку $P$ – черніковська підгрупа. У свою чергу, звідси випливає, що $r_0(G/P)$ є нескінченим. Кожна підгрупа $G/P$, яка має нескінчений $0$-ранг, має також нескінчений тотальний ранг, так що вона наближено нормальна. З теореми 2.3.7 отримуємо, що $G/P$ – абелева група вільна від скруту. Таким чином, $G$ – $FC$-гіперцентральна група, і залишається скористатися наслідком 2.3.12.

## 2.6. Групи, у яких усі підгрупи нескінченного мінімаксного рангу наближено нормальні

Ми продовжуємо послідовно переходити від більш широких обмежень на систему підгруп, що не є наближено нормальними, до більш вузьких. При цьому, природно, опис груп, що розглядаються, стає більш детальним, а кількість типів груп зростає. На черзі обмеження, пов’язане з мінімаксним рангом. Застосовуючи результати попередніх розділів, можна звести загальну ситуацію розгляду груп з наближено нормальними підгрупами нескінченого мінімаксного рангу до розгляду їх в класі майже розв’язних $\boldsymbol{A_3}$-груп, як про це свідчить наступний результат.

**2.6.1. Пропозиція.** *Нехай група $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний мінімаксний ранг, наближено нормальні, то або $G$ має скінченний комутант, або $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група.*

***Доведення.*** Припустимо спочатку, що $G$ має нескінчений тотальний ранг. Оскільки кожна мінімаксна підгрупа має скінчений тотальний ранг, то з теореми 2.5.2 випливає, що $G$ має скінчений комутант. Нехай тепер $G$ має скінчений тотальний ранг. Неважко упевнитись у тому, що в цьому випадку $G$ має скінчений ряд нормальних підгруп $\langle 1 \rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$, фактори якого – локально скінчені групи або локально нільпотентні групи без скруту. Якщо $H_{j+1}/H_j$ – локально нільпотентна група без скруту, то вона буде нільпотентною групою скінченого *0*-рангу (теорема 1.1.5). Якщо ж $H_{j+1}/H_j$ – локально скінчена група, то її абелеві підгрупи будуть черніковськими, а тому $H_{j+1}/H_j$ – черніковська група (теорема 1.1.11). Таким чином, $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група.

**2.6.2. Лема.** *Нехай $G$ – група, $A$ – її абелева підгрупа без скруту скінченого 0-рангу. Якщо $A$ – наближено нормальна, то $A$ містить у собі таку $G$-інваріантну абелеву підгрупу $B$, що $A^G/B$ є скінченою.*

***Доведення.*** Оскільки $A$ є наближено нормальною, то індекс $|A^G : A|$ буде скінченим. Тому знайдеться таке натуральне число $n$, що $B = (A^G)^n \le A$. Очевидно, $B$ – $G$-інваріантна підгрупа і фактор-група $A^G/B$ є обмеженою. Зі скінченності індексу $|A^G : A|$ випливає, що $A^G$ має скінчений спеціальний ранг. Але ж обмежена група скінченого спеціального рангу буде скінченою. Отже, $A^G/B$ є скінченою.

**2.6.3. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту, що має скінчений 0-ранг, але не є мінімаксною, то $G$ містить у собі нормальну абелеву підгрупу без скруту, яка має скінчений 0-ранг і не є мінімаксною.*

**2.6.4. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту $A$, що має скінчений 0-ранг, але не є мінімаксною, то індекс $|[G, G] : [G, G] \cap A|$ буде скінченим. Зокрема, $[G, G]$ – скінчено породжена майже абелева підгрупа.*

***Доведення.*** З леми 2.6.2 випливає, що $A$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу $B$, для якої індекс $|A : B|$ є скінченим. Але тоді $B$ має скінчений $0$-ранг, не будучи мінімаксною. Виберемо в $B$ таку скінчено породжену підгрупу $C$, що фактор-група $B/C$ є періодичною. Оскільки $B$ не є мінімаксною, то множина $\Pi(B/C)$ буде нескінченою. Тоді в ній існують дві такі нескінчені підмножини $\Delta$ та $\Xi$, що $\Delta \cup \Xi = \Pi(B/C)$ і $\Delta \cap \Xi = \varnothing$. Позначимо через $D/C$ силовську $\Delta$-підгрупу, а через $E/C$ – силовську $\Xi$-підгрупу $B/C$, тоді $B = DE$ та $D \cap E = C$. Обидві підгрупи $D$ і $E$ не є мінімаксними, тому вони наближено нормальні, тобто індекси $|D^G : D|$, $|E^G : E|$ є скінченими. Це тягне за собою скінченність $(D^G/C \cap E^G/C) = K/C$, так що $K$ буде скінчено породженою підгрупою. Оскільки $D^G$ (відповідно $E^G$) не є мінімаксною, то кожна підгрупа, що містить у собі $D^G$ (відповідно $E^G$) також не буде мінімаксною, а тому наближено нормальною в $G$. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/D^G$ (відповідно $G/E^G$) наближено нормальна. Але тоді фактор-група $G/D^G$ (відповідно $G/E^G$) має скінчений комутант за теоремою 1.1.18. Рівність $D^G \cap E^G = K$ разом з теоремою Ремака забезпечує вкладання $G/K \le G/D^G \times G/E^G$, яке доводить скінченність $[G/K, G/K]$. Звідси вже видно, що $[G, G]$ буде скінчено породженою майже абелевою групою. Нарешті, зі скінченності $[G/K, G/K]$, співвідношень $[G/K, G/K] = [G, G]K/K \cong [G, G]/([G, G] \cap K)$ та включення $K \le A$ отримуємо, що індекс $|[G, G] : [G, G] \cap A|$ є скінченим.

**2.6.5. Наслідок.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група без скруту, у якій усі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу наближено нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву сервантну підгрупу $A$, що має скінчений $0$-ранг, але не є мінімаксною, то $A$ – нормальна в $G$ і містить у собі комутант групи $G$.*

***Доведення.*** З леми 2.6.2 випливає, що $A$ містить у собі таку $G$-інваріантну підгрупу $B$, що індекс $|A : B|$ є скінченим. Нехай $C$ – сервантна оболонка $B$ (тобто $C/B$ – це періодична частина $G/B$ ). Тоді $A \le C$, а оскільки $A$ є сервантною в $G$, то $A = C$. З наслідку 2.6.4 отримуємо скінченність $[G, G] / ([G, G] \cap A) \cong [G, G]A/A$. З іншого боку, $G/A$ вільна від скруту і тому $[G, G]A = A$, тобто $[G, G] \le A$.

**2.6.6. Наслідок.** *Нехай група $G$ не є мінімаксною і має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченими факторами. Якщо всі її підгрупи нескінченого*

*мінімаксного рангу наближено нормальні і група G має нескінчений комутант, то G – майже розв'язна* $\boldsymbol{A_3}$*-група, комутант [G, G] якої є скінчено породженою майже абелевою підгрупою.*

***Доведення.*** З пропозиції 2.6.1 випливає, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Оскільки $G$ не є мінімаксною, то вона містить у собі абелеву підгрупу $A$, яка не є мінімаксною (теорема 1.1.14). Позначимо через $T$ періодичну частину $A$. З того факту, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група випливає, що $T$ – черниковська підгрупа. У цьому випадку маємо $A = T \times B$ (див., наприклад, [83, теореми 21.2 та 27.5]). Очевидно підгрупа $B$ не може бути мінімаксною, отже можна застосувати тепер наслідок 2.6.4.

Нехай $A$ – абелева група без скруту. Позначимо через $PM_{mmx}(A)$ *перетин усіх тих сервантних підгруп A, які не є мінімаксними. Будемо називати цю підгрупу сервантним мінімаксним монолітом групи A.*

Підгрупа $PM_{mmx}(A)$ була введена до розгляду у роботі Д. Кутоло і Л.А. Курдаченка [18] (потрібно відмітити, що у вказаній роботі для цієї підгрупи було використане інше позначення).

**2.6.7. Лема.** *Нехай A – абелева група без скруту. Якщо* $PM_{mmx}(A) \neq \langle 1 \rangle$, *то* $r_0(A)$ *буде скінченим та A містить у собі сервантну мінімаксну підгрупу B, для якої* $r_0(A/B) = 1$.

***Доведення.*** Нехай $C = PM_{mmx}(A)$. З означення випливає, що кожна власна сервантна підгрупа $C$ буде мінімаксною. Нехай $M$ – максимальна $Z$–незалежна система елементів підгрупи $C$. Розширимо $M$ до максимальної $Z$–незалежної системи елементів $L$ усієї групи $A$. Для елемента $a \in M$ знайдемо в $A$ максимальну підгрупу $U$, для якої $\langle a \rangle \cap U = \langle 1 \rangle$ та $L \setminus \{ a \} \subseteq U$. Позначимо через $T/U$ періодичну частину фактор-групи A/$U$. З вибору $U$ отримуємо, що $\langle aU \rangle$ має нескінчений порядок, так що $a \notin T$. Це означає, що $U = T$, а тому $A/U$ є вільною від скруту, тобто $U$ – сервантна підгрупа $A$. Оскільки $U$ не містить у собі $C$, то $U$ – мінімаксна. Далі, з выбору $U$ також випливає, що кожна неодинична циклічна підгрупа $A/U$ має неодиничний перетин з $\langle aU \rangle$. Інакше кажучи, $A/U$ – локально циклічна група (тобто $r_0$(A/$U$) = 1). Оскільки мінімаксна група має скінчений 0-ранг, то і уся група $A$ має скінчений 0-ранг.

**2.6.8. Лема.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу наближено нормальні. Припустимо, що G*

*містить у собі абелеву нормальну підгрупу без скруту A, яка має скінчений 0-ранг, але не є мінімаксною. Тоді для кожного елементу* $g \in G$ *підгрупа* $C_A(g)$ *не є мінімаксною.*

***Доведення.*** Нехай $H = < A, g > = A <g>$ . За наслідком 2.6.4 [*H, H*] буде майже абелевою та скінчено породженою. Це тягне за собою той факт, що підгрупа $[A, g] = K$ також є скінчено породженою. Інакше кажучи, $K$ – це така скінчено породжена $<g>$-інваріантна підгрупа, що $H/K$ – абелева. Відображення $\phi_g$: $a \longrightarrow [a, g]$, $a \in A$, буде ендоморфізмом, тому $Ker\ \phi_G = C_A(g)$ та $Im\ \phi_g = [A, g]$ будуть $<g>$-інваріантними підгрупами і $[A, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\phi_g = A/C_A(g)$. Вище вже відмічалося, що $[A, g]$ є скінчено породженою, і отже, $E = C_A(g)$ не може бути мінімаксною.

**2.6.9. Наслідок.** *Нехай G – група, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні. Якщо G містить у собі абелеву підгрупу без скруту, що має скінчений 0-ранг, але не є мінімаксною, то кожен елемент скінченого порядку групи G належить до її FC-центру.*

***Доведення.*** За наслідком 2.6.3 $G$ містить у собі нормальну абелеву підгрупу $A$ без скруту, яка має скінчений *0*-ранг, але не є мінімаксною. Нехай $g$ – елемент скінченого порядку. З леми 2.6.8 отримаємо, що $E = C_A(g)$ не буде мінімаксною. Тому і $< E, g > = E \times <g>$ не є мінімаксною і тому є наближено нормальною в $G$. Таким чином, $< E, g >$ має скінчений індекс в $U = < E, g >^G$, а звідси випливає, що і індекс $|U : E| = k$ буде скінченим. Покладемо $V = U^k$, тоді $V$, як характеристична підгрупою $U$, є $G$-інваріантною, а тому і $C_U(V)$ також $G$-інваріантна. За вибором $V$ маємо включення $V \le E$ , яке, у свою чергу, тягне за собою включення $<g> \le C_U(V)$. Підгрупа $W = C_U(V)$ має центр скінченого індексу і тому її комутант $[W, W]$ буде скінченим (теорема 1.1.15). Звідси і випливає, що множина $T$ усіх елементів підгрупи $V$, порядок яких є скінченим, буде (характеристичною) підгрупою. Неважко бачити, що $T$ є скінченою нормальною підгрупою $G$. Оскільки $g \in T$, то $<g>^G$ буде скінченою, а тому $g \in FC(G)$.

**2.6.10. Наслідок.** *Нехай G – локально нільпотентна група без скруту, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні. Якщо G не мінімаксна та неабелева, то її центр* $Z = \zeta(G)$ *не буде мінімаксною підгрупою.*

***Доведення.*** За пропозицією 2.6.1 $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, зокрема, $G$ має скінчений $0$-ранг. Але в цьому випадку $G$ буде нільпотентною (теорема 1.1.5). Тоді $G$ має центральний $< 1 > = Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_k = G$, який складається з сервантних підгруп (див., наприклад, [94, теорема 2.25]). Цей ряд можна ущільнити до (центрального) ряду сервантних підгруп з локально циклічними факторами. Інакше кажучи, щоб не вводити нових позначень, можна вважати, що кожен фактор $Z_{j+1}/Z_j$ є локально циклічною групою. Виберемо елементи $z_{j+1} \in Z_{j+1} \setminus Z_j$, $0 \le j \le k-1$, та покладемо $H = < z_1, z_2, \ldots, z_k >$. Оскільки $G$ не є мінімаксною, то вона містить у собі абелеву підгрупу, яка не є мінімаксною (теорема 1.1.14). Тому $G$ містить у собі сервантну абелеву підгрупу $A$, яка не є мінімаксною. Наслідок 2.6.5 показує, що підгрупа $A$ буде нормальною в $G$. Оскільки $H$ є скінчено породженою та нільпотентною, то вона має центральний ряд $< 1 > = L_0 \le L_1 \le \ldots \le L_k = H$ з нескінченими циклічними факторами. З леми 2.6.8 випливає, що підгрупа $A_1 = C_A(L_1)$ не є мінімаксною. Включення $L_1 \le \zeta(H)$ свідчить про той факт, що $C_A(L_1)$ є $H$-інваріантною підгрупою. Використовуючи ті ж самі аргументи, отримаємо, що $A_2 = C_A(L_2)$ не мінімаксна і $H$-інваріантна. За допомогою цих же міркувань через скінчену кількість кроків отримаємо, що $C_A(H)$ також не є мінімаксною. Нехай тепер $g$ – довільний елемент групи $G$. З побудови $H$ випливає існування такого натурального числа $m$, що $g^m \in H$. Для кожного елемента $x \in C_A(H)$ маємо $g^m x = x g^m$. Але в нільпотентній групі $G$, вільній від скруту, остання рівність тягне за собою рівність $gx = xg$, яке доводить включення $C_A(H) \le \zeta(G)$. У свою чергу, це включення і доводить, що підгрупа $\zeta(G)$ не буде мінімаксною.

**2.6.11. Наслідок.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група без скруту, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні. Якщо $G$ не мінімаксна та неабелева, то фактор-група $G/\zeta(G)$ абелева та скінчено породжена.*

***Доведення.*** За наслідком 2.6.10 $\zeta(G)$ не буде мінімаксною підгрупою. Але тоді і кожна підгрупа, що містить у собі $\zeta(G)$ не є мінімаксною, і тому буде наближено нормальною в $G$. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/\zeta(G)$ є наближено нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) $G/\zeta(G)$ має скінчений комутант. Оскільки $G$ – вільна від скруту локально нільпотентна

група, то її центр є сервантною підгрупою (див., наприклад, [94, теорема 2.25]). Звідси випливає, що фактор-група $G/\zeta(G)$ – абелева. Тому для кожного $g \in G$ відображення $\phi_g$: $x \longrightarrow [x, g]$, $x \in G$, є ендоморфізмом і отже, $[G, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\ \phi_g = G/C_G(g)$. За наслідком 2.6.6 $[G, G]$ є скінчено породженою, зокрема, і $[G, g]$ буде скінчено породженою. Але тоді і ізоморфна до неї фактор-група $G/C_G(g)$ є скінчено породженою для будь-якого елемента $g \in G$. За пропозицією 2.6.1 $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, зокрема, $G$ має скінчений $0$-ранг. Нехай $\{g_1\zeta(G), \ldots, g_t\zeta(G)\}$ – максимальна $Z$–незалежна система елементів фактор-групи $G/\zeta(G)$, $H = < g_1, \ldots, g_t >$. З теореми Ремака маємо вкладання $G/C_G(H) \le G/C_G(g_1) \times \ldots \times G/C_G(g_t)$, яке, за доведеним вище, показує, що $G/C_G(H)$ – скінчено породжена. Нехай тепер $D = H\ \zeta(G)$, тоді $C_G(H) = C_G(D)$, зокрема, $G/C_G(D)$ також є скінчено породженою. З вибору $D$ отримаємо для кожного елемента $g \in G$ існування такого натурального числа $m$, що $g^m \in D$. Для довільного $x \in C_G(D)$ маємо тепер $g^m x = xg^m$. Але у вільній від скруту нільпотентній групі $G$ остання рівність тягне за собою рівність $gx = xg$, яке доводить включення $C_G(D) \le \zeta(G)$, тобто $C_G(D) = \zeta(G)$. У свою чергу, це доводить скінчену породженість фактор-групи $G/\zeta(G)$.

**2.6.12. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні, $g \in G$, $A$ – $<g>$-інваріантна абелева підгрупа без скруту, причому $A \cap <g> = <1>$. Якщо $A$ не є мінімаксною та має скінчений 0-ранг, то підгрупа $< A, g >$ є нільпотентною.*

***Доведення.*** Якщо елемент $g$ має скінчений порядок, то за наслідком 2.6.9 підгрупа $<g>$ буде нормальною в $<A, g>$, тобто $< A, g > = A \times <g>$ є абелевою. Припустимо тепер, що елемент $g$ має нескінчений порядок. За лемою 2.6.8 $C = C_A(G)$ не буде мінімаксною. Неважко упевнитись у тому, що $C$ є $<g>$-інваріантною підгрупою. Оскільки $A$ вільна від скруту, то підгрупа $C$ буде сервантною в $A$. Тоді фактор-група $< A, g >/C$ також вільна від скруту. Далі, з того факту, що $C$ не є мінімаксною, отримаємо, що і кожна підгрупа, що містить у собі $C$, не є мінімаксною, і тому буде наближено нормальною в $G$. Інакше кажучи, кожна підгрупа фактор-групи $<A, g>/C$ є наближено нормальною. Але тоді $<A, g>/C$ має скінчений комутант за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18). Вважаючи на той

факт, що вона є вільною від скруту, отримаємо, що вона абелева. З очевидного включення $C \le \zeta(\langle A, g\rangle)$ випливає тепер нільпотентність $\langle A, g\rangle$.

**2.6.13. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні, $g$ – елемент нескінченого порядку групи $G$, $A$ – $\langle g\rangle$-інваріантна абелева підгрупа без скруту скінченого 0-рангу, причому $A \cap \langle g\rangle \neq \langle 1\rangle$. Якщо $A$ не є мінімаксною та $\langle g, A\rangle$ вільна від скруту, то підгрупа $\langle A, g\rangle$ є нільпотентною.*

***Доведення.*** Оскільки $A \cap \langle g\rangle \neq \langle 1\rangle$, то існує таке натуральне число $m$, що $g^m \in A$. Очевидно $C = \langle g^m\rangle \le \zeta(\langle g, A\rangle)$. Позначимо через $T/C$ періодичну частину $A/C$. Якщо $T/C$ не є мінімаксною, то за пропозицією 2.6.1 $\langle g, A\rangle/C$ має скінчений комутант. Зокрема, нормальне замкнення в $\langle g, A\rangle/C$ підгрупи $\langle gC\rangle$, яке будемо позначати через $D/C$, є скінченим. Якщо ж $T/C$ – мінімаксна, то вона буде черніковською. У цьому випадку маємо $A/C = T/C \times B/C$ (див., наприклад, [83, теореми 21.2 і 27.5]). Разом з $A$ також і $B/C$ не може бути мінімаксною. Тепер можна застосувати наслідок 2.6.9 і знову отримати, що підгрупа $D/C$ є скінченою. Підгрупа $D$ є майже циклічною. А оскільки вона не має скруту, то вона циклічна. Отже $\langle g, A\rangle$ є добутком двох нормальних абелевих підгруп $A$ та $D$ і за теоремою Фіттінга (див., наприклад, [94, теорема 2.18]) підгрупа $\langle g, A\rangle$ буде нільпотентною.

**2.6.14. Наслідок.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, всі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу якої наближено нормальні. Якщо $G$ вільна від скруту і не є мінімаксною, то вона є нільпотентною.*

***Доведення.*** Оскільки $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, то вона містить у собі такі нормальні підгрупи $H$, $A$, що $H \le A$, $H$ є нільпотентною, $A/H$ – скінчено породжена абелева група без скруту, $G/A$ – скінчена група (наслідок 1.1.22). Разом з $G$ підгрупа $H$ не є мінімаксною. За наслідком 2.6.11 і $\zeta(H)$ не буде мінімаксною. Очевидно, що $\zeta(H)$ нормальна в $G$. Тоді і кожна підгрупа, що містить у собі $\zeta(H)$, також не буде мінімаксною, і тому наближено нормальна в $G$. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/\zeta(H)$ є наближено нормальною. Тоді фактор-група $G/\zeta(H)$ має скінчений комутант за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18). Центр $\zeta(H)$ є сервантним в $H$ (див.,

наприклад, [94, теорема 2.25]), а тому $A/\zeta(H)$ не має скруту. Звідси отримуємо, що $A/\zeta(H)$ – абелева група без скруту. За наслідком 2.6.11 $H/\zeta(H)$ має скінчену множину породжуючих елементів, так що і $A/\zeta(H)$ буде скінчено породженою. Нехай $A/\zeta(H) = \langle a_1\zeta(H)\rangle \times \ldots \times \langle a_t\zeta(H)\rangle$. За наслідком 2.6.12 $\langle a_j, \zeta(H)\rangle$ є нільпотентною для кожного $j$, $1 \le j \le t$. З теореми Фіттінга (див., наприклад, [94, теорема 2.18]) випливає, що $A$ є нільпотентною.

Припустимо, що група $G$ не є нільпотентною. Оскільки $G/A$ є скінченою, то можна вважати, що $A$ – максимальна нільпотентна нормальна підгрупа $G$. Використаємо індукцію за порядком фактор-групи $G/A$. Якщо $|G/A| = p$ – просте число, то $G$ є нільпотентною за наслідком 2.6.13. Припустимо, що вже доведено нільпотентність усіх таких власних підгруп $S$ групи $G$, що містять у собі $A$. У цьому випадку і $S/A$ є нільпотентною. Таким чином, кожна власна підгрупа скінченої групи $G/A$ буде нільпотентною. За теоремою О.Ю. Шмідта $L/A = (P/A)(Q/A)$, де $P/A$ – нормальна силовська $p$-підгрупа, $Q/A$ – циклічна силовська $q$-підгрупа, $p$, $q$ – різні прості числа (див., наприклад, [82, 9.1.9]). Оскільки $P$ – власна підгрупа $G$, то $P$ є нільпотентною, і вибір $A$ приводить тоді до рівності $A = P$, яке, у свою чергу, доводить, що $G/A$ є абелевою. У цьому випадку застосування наслідку 2.6.13 та теореми Фіттінга доводить нільпотентність $G$.

**2.6.15. Теорема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, і припустимо, що вона не мінімаксна і має нескінчений комутант. В групі $G$ всі підгрупи, що мають нескінчений мінімаксний ранг, є наближено нормальними тоді і тільки тоді, коли $G$ задовольняє наступні умови:*

*(1) $G$ містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу $F$, що $G/F = D/F \times E/F$, де $D/F$ – ділима черниковська підгрупа, а підгрупа $E/F$ вільна від скруту та нільпотентна;*

*(2) $Z/F = \zeta(E/F)$ не є мінімаксною, а фактор-група $(E/F)/(Z/F)$ є скінчено породженою;*

*(3) $[E/F, E/F] \le PM_{mmx}(Z/F)$, зокрема, $Z/F$ містить у собі сервантну мінімаксну підгрупу $M/F$, для якої $r_0(Z/M) = 1$.*

***Доведення. Необхідність.*** Оскільки $G$ – майже розв'язна група, що не є мінімаксною, вона містить у собі абелеву підгрупу $A$, яка також не є мінімаксною (теорема 1.1.14). Позначимо через $T$

періодичну частину $A$. Оскільки $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, то $T$ – черніковська. Тоді маємо $A = T \times B$ (див., наприклад, [83, теореми 21.2 та 27.5]). Очевидно разом з $A$ і підгрупа $B$ не може бути мінімаксною. За наслідком 2.6.4 $[G, G]$ є майже абелевою та скінчено породженою. З наслідку 2.6.9 випливає, що $FC$-центр групи $G$ містить кожен елемент скінченого порядку. Звідси випливає, що множина $D$ усіх елементів групи $G$, що мають скінчений порядок, буде (характеристичною) підгрупою $G$ (теорема 1.1.17). Знову користуючись тією обставиною, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, отримаємо, що $D$ – черніковська підгрупа. Включення $D \leq FC(G)$ забезпечує тепер існування такої нормальної в $G$ скінченої підгрупи $L$, що $D/L$ – ділима черніковська група. Нехай $K = L[G, G]$, тоді $G/K$ буде абелевою. Ізоморфізм $(DK)/K \cong D/(D \cap K)$, рівності $D \cap K = D \cap (L[G, G]) = L\,(D \cap [G, G])$ та той факт, що $[G, G]$ – майже абелева скінчено породжена підгрупа, забезпечують спочатку скінченність перетину $D \cap [G, G]$, а потім ділимість $(DK)/K$. З властивостей ділимих підгруп абелевих груп (див., наприклад, [83, теорема 21.2]) випливає розклад $G/K = (DK)/K \times E/K$, зокрема, $G = DE$. Скінченність $D \cap [G, G]$ тягне за собою скінченність $F = D \cap E$. Оскільки $L \leq F$, то $D/F$ – ділима черніковська група. Далі з співвідношень $G/D = ED/D \cong E/(D \cap E) = E/F$ випливає, що $E/F$ не має скруту. Твердження (2) випливає з наслідків 2.6.14, 2.6.10 та 2.6.11. Нарешті, твердження (3) випливає з наслідку 2.6.5 та леми 2.6.7.

***Достатність***. Нехай $H$ – підгрупа $G$ і припустимо, що $H$ не мінімаксна. Розглянемо спочатку випадок, коли $F = \langle 1 \rangle$. Оскільки $G/Z$ є мінімаксною, то перетин $H \cap Z$ не може бути мінімаксним. З умови (3) отримуємо включення $[G, G] \leq H \cap Z$, яке показує, що $H$ – нормальна підгрупа $G$. Нехай тепер $F \neq \langle 1 \rangle$. Цей випадок випливає з доведеного тільки що та пропозиції 2.2.11.

## 2.7. Групи, у яких усі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні

Мінімаксні майже розв'язні групи, як видно з їх визначення, виникають з двох важливих класів груп: черніковських груп та майже поліциклічних груп. Тому природно виникає питання про будову

груп, у яких усі підгрупи, що не є черніковськими, наближено нормальні; та груп, у яких всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні. В цьому зв'язку слід відмітити, що в роботі [77] були розглянуті групи з умовою мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними. Очевидно, що локально розв'язні групи, у яких усі підгрупи, що не є черніковськими, наближено нормальні, задовольняють умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними. Застосувавши теореми 2.10 та 2.14 статті [77], отримаємо наступний результат.

**2.7.1. Теорема.** *Нехай $G$ – нечерніковська локально майже розв'язна група, у якій усі підгрупи, що не є черніковськими, наближено нормальні. Тоді $G$ – група одного з наступних типів:*

*(1) $G$ – група, що має скінченний комутант;*

*(2) $G$ – нескінчена діедральна група;*

*(3) $G = D \times A$, де $D$ – ділима черніковська підгрупа, $A$ – група типу (2);*

*(4) $G$ містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу $F$, що $G/F$ – група типу (2);*

*(5) $G$ містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу $F$, що $G/F$ – група типу (3).*

Групи, всі підгрупи яких, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, ще не вивчались. Тому їх розгляд стає нашою наступною метою.

**2.7.2. Пропозиція.** *Нехай група $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченими факторами. Якщо всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то або група $G$ має скінчений комутант, або $G$ – майже розв'язна $A_3$-група.*

Дійсно, кожна підгрупа, що не є мінімаксною, не буде і майже поліциклічною, тому вона наближено нормальна і можна використати пропозицію 2.6.1.

**2.7.3. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не є майже поліциклічними. Якщо $H$ – така її нормальна підгрупа, що кожна надгрупа $H$ не є майже поліциклічною, то фактор-група $G/H$ має скінченний комутант.*

Дійсно, тоді кожна підгрупа $H$ є наближено нормальною, тобто кожна підгрупа $G/H$ є наближено нормальною. Але в цьому разі $G/H$ має скінчений комутант за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18).

**2.7.4. Лема.** *Нехай $G$ – група, $H$ – її $F$-досконала підгрупа. Якщо $H$ є наближено нормальною, то вона нормальна.*

Оскільки індекс $|H^G : H|$ є скінченим, то $H$ співпадає з $F$-досконалою частиною нормального замкнення $H^G$. Але $F$-досконала частина є характеристичною, зокрема, вона буде нормальною в усій групі $G$.

**2.7.5. Теорема.** *Нехай $G$ – локально скінчена група. В групі $G$ всі її підгрупи, що не майже поліциклічними, наближено нормальні тоді і тільки тоді, коли $G$ – група одного з наступних типів:*

*(1) $G$ – група зі скінченим комутантом;*

*(2) $G$ – майже квазіциклічна група.*

***Доведення. Необхідність.*** Припустимо, що група $G$ має нескінчений комутант. З пропозиції 2.7.2 отримаємо тоді, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Бувши локально скінченою, $G$ – черніковська група. Позначимо через $D$ її ділиму ($F$-досконалу) частину і припустимо, що $D$ не буде квазіциклічною. Нехай $K$ – квазіциклічна підгрупа $D$. У цьому випадку маємо $D = K \times B$, де підгрупа $B$ є ділимою, а тому і $F$-досконалою. За лемою 2.7.4 обидві підгрупи $K, B$ будуть нормальними. З леми 2.7.3 випливає, що обидві фактор-групи $G/K$ та $G/B$ мають скінчені комутанти. Оскільки $K \cap B = \langle 1 \rangle$, то теорема Ремака забезпечує вкладання $G \rightarrowtail G/K \times G/B$, яке, у свою чергу, доводить скінченність комутанту групи $G$. Отримане протиріччя показує, що $D$ – квазіциклічна підгрупа, а отже, $G$ – група типу (*2*).

***Достатність.*** Якщо $G$ – група типу (*1*), то кожна її підгрупа є наближено нормальною. Розглянемо випадок, коли $G$ належить до типу (*2*). Нехай $H$ – підгрупа $G$ і припустимо, що $H$ не є майже поліциклічною. Нехай $D$ знову позначає ділиму ($F$-досконалу) частину групи $G$. Оскільки $G/D$ – скінчена, то $H \cap D$ не може бути скінченим. Але тоді $H \cap D = D$, тобто $D \leq H$, а тому $H$ має скінчений індекс в $G$. Таким чином, і в цьому випадку підгрупа $H$ є наближено нормальною в $G$.

Подальше вивчення випадку неперіодичних груп розпадається на дві природні ситуації: (*1*) група містить у собі нескінчені

періодичні підгрупи; та (*2*) всі періодичні підгрупи скінченні. Розглянемо ці ситуації у вказаній черговості.

**2.7.6. Лема.** *Нехай G – неперіодична локально майже розв'язна група, що містить у собі нескінчену періодичну підгруп. Також припустимо, що центр G не містить у собі квазіциклічних підгруп. Якщо всі підгрупи G, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в G і комутант G є нескінченим, то G містить у собі таку нормальну квазіциклічну підгрупу D, що G/D – скінчено породжена група зі скінченим комутантом.*

***Доведення.*** Нехай $P$ – нескінчена періодична підгрупа $G$. Ми можемо вкласти $P$ в максимальну періодичну $T$. Оскільки $G$ – локально майже розв'язна, то $T$ – локально скінчена. З нескінченості $T$ отримуємо, що $T$ містить у собі нескінчену абелеву підгрупу $B$ (теорема 1.1.11). Тоді $B$ не може бути поліциклічною, а тому $B$ – наближено нормальна, тобто $|B^G : B|$ є скінченим. Підгрупа $B^G$ також не буде майже поліциклічною, більш того, кожна підгрупа, що містить у собі $B^G$, також не буде майже поліциклічною, і тому є наближено нормальною. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/B^G$ є наближено нормальною, а тому $G/B^G$ має скінчений комутант за теоремою 1.1.18. Оскільки $B^G$ – майже абелева, то $G$ – майже розв'язна. За пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Бувши локально скінченою, $T$ є черніковською. Позначимо через $D$ її ділиму ($F$-досконалу) частину і припустимо, що $D$ не є квазіциклічною. Нехай $K$ – квазіциклічна підгрупа $D$. Маємо тепер $D = K \times B$, де підгрупа $B$ є ділимою, а тому $F$-досконалою. За лемою 2.7.4 обидві підгрупи $K$, $B$ є нормальними. З леми 2.7.3 випливає, що $G/K$ і $G/B$ мають скінчені комутанти. Оскільки $K \cap B = \langle 1 \rangle$, то теорема Ремака забезпечує вкладання $G \hookrightarrow G/K \times G/B$, яке, у свою чергу, доводить скінченність комутанту групи $G$. Отримане протиріччя показує, що $D$ – квазіциклічна підгрупа. Фактор-група $G/D$ має скінчений комутант, зокрема, вона буде $FC$-групою. Оскільки центр $G$ не містить у собі $D$, то знайдеться елемент $g \in G$, для якого $[g, D] \neq \langle 1 \rangle$. Якщо припустити, що $[g, D] \neq D$, то підгрупа $[g, D]$ є скінченою. Це тягне за собою скінченність комутанту підгрупи $\langle D, g \rangle$, зокрема, ця підгрупа буде $FC$-групою. У цьому випадку її центр містить у собі кожну ділиму підгрупу. Отримане протиріччя доводить рівність $[g, D] = D$. Покладемо $C/D = C_{G/D}(gD)$, і нехай $x \in C$. Маємо тоді $g^x = gy$ для

деякого елемента $y \in D$. З рівності $D = [g, D]$ отримуємо, що $y = [g, u]$ для деякого $u \in D$. Тепер $g^x = gy = g[g, u] = g^u$, а звідси випливає співвідношення $xu^{-1} \in C_G(g)$, яке доводить рівність $C = DC_G(g)$. З вибору $G$ випливає $D \cap C_G(g) \neq D$, а це доводить скінченність $D \cap C_G(g)$. Нехай $E = C_G(g)$ та припустимо, що $E$ не є майже поліциклічною, і тому є наближено нормальною, тобто $|E^G : E|$ є скінченим. Підгрупа $E^G$ також не буде майже поліциклічною, більш того, кожна підгрупа, що містить у собі $E^G$, також не буде майже поліциклічною, і тому є наближено нормальною. Інакше кажучи, кожна підгрупа $G/E^G$ є наближено нормальною, а тому $G/E^G$ має скінчений комутант за теоремою 1.1.18. Скінченність $|E^G : E|$ тягне за собою скінченність перетину $F = D \cap E^G$. За теоремою Ремака $G/F \hookrightarrow G/D \times G/E^G$, а з цього випливає скінченність комутанту $G/F$. Скінченність $F$ тягне за собою скінченність $[G, G]$. Це протиріччя доводить, що $E$ буде майже поліциклічною. Оскільки $G/D$ – $FC$-група, то $C$ має скінчений індекс в $G$. З рівності $C = DE$ випливає, що $C/D$ буде скінчено породженою, отже, скінчено породжена і $G/D$.

**2.7.7. Лема.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в $G$ і комутант $G$ є нескінченим, то $G/D$ має скінчений комутант і для будь-якої абелевої підгрупи $A$ секція $A/(A \cap D)$ є скінчено породженою.*

***Доведення.*** Припустимо, що для деякої абелевої підгрупи $A$ секція $A/(A \cap D)$ не є скінчено породженою. Оскільки центр містить у собі $D$, то $AD$ – абелева підгрупа. Щоб не вводити нових позначень, будемо вважати, що $D \leq A$. З властивостей ділимих підгруп абелевих груп (див., наприклад, [83, теорема *21.2*]) випливає розклад $A = D \times E$ для деякої підгрупи $E$. З нашого припущення отримуємо, що $E$ не може бути скінчено породженою. Але тоді вона наближено нормальна. За лемою 2.6.2 $E$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу без скруту $B$ скінченого індексу. Зокрема, $B$ також не має скінченої множини породжуючих елементів. За лемою 2.7.3 $[G/D, G/D]$ та $[G/B, G/B]$ – скінчені. Застосовуючи теорему Ремака з $D \cap B \leq D \cap E = \langle 1 \rangle$ отримаємо вкладання $G \hookrightarrow G/D \times G/B$, яке, у свою чергу, доводить скінченність комутанту групи $G$. Отримане

протиріччя доводить, що фактор-група $A/(A \cap D)$ є скінчено породженою.

**2.7.8. Наслідок.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$, а фактор-група $G/D$ не має скінченої системи породжуючих елементів. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в $G$ і комутант $G$ є нескінченим, то кожна абелева підгрупа $G$ має нескінчений індекс.*

***Доведення.*** Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант. З пропозиції 2.7.2 і того факту, що $G$ має нескінчений комутант, отримаємо, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Припустимо, що $G$ має абелеву нормальну підгрупу $A$ скінченого індексу. Оскільки $D$ не містить у собі власних підгруп скінченого індексу, то $D \le A$. Якщо припустити, що $A/D$ є скінчено породженою, то і фактор-група $G/D$ буде скінчено породженою. Отже, $A/D$ не може мати скінченої системи породжуючих елементів. Однак це суперечить попередній лемі 2.7.7.

**2.7.9. Наслідок.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в $G$ і комутант $G$ є нескінченим, то для будь-якої $FC$-підгрупи $A$ секція $A/(A \cap D)$ буде скінчено породженою.*

***Доведення.*** Припустимо, що для деякої $FC$-підгрупи $A$ секція $A/(A \cap D)$ не є скінчено породженою. Оскільки центр містить у собі $D$, то $AD$ – $FC$-підгрупа. Щоб не вводити нових позначень, можна вважати, що $D \le A$. Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант за лемою 2.7.3. Звідси випливає, що множина $T$ усіх елементів скінченого порядку буде характеристичною підгрупою $G$, і більш того, фактор-група $G/T$ буде абелевою. Оскільки $G$ має нескінчений комутант, то за пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Зокрема, $T$ – черніковська підгрупа. З леми 2.7.7 тепер можна отримати, що $T$ – майже квазіциклічна підгрупа. Покладемо $C/D = C_{A/D}(T/D)$. Скінченність $T/D$ тягне за собою скінченність $A/C$. Оскільки $(C/D) \cap (T/D) \le \zeta(C/D)$ і $(C/D)/((C/D) \cap (T/D)) \cong (C/D)(T/D)/(T/D) \cong CT/T$ – абелева, то $C/D$ – нільпотентна. Нарешті, включення $D \le \zeta(G)$ забезпечує той факт, що підгрупа $C$ – нільпотентна. Зі скінченності $A/C$ випливає, що $C/D$ не має скінченої

системи породжуючи елементів. Покладемо $Z = \zeta(C)$, тоді $E/Z$ – періодична група (теорема 1.1.17). Оскільки $Z$ має скінчений спеціальний ранг, то вона містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $K$, що $C/K$ – періодична. Оскільки вона і нільпотентна, то $C/K = P/K \times Q/K$, де $P/K$ – силовська $p$-підгрупа, $\{p\} = \Pi(D)$, $Q/K$ – силовська $p'$-підгрупа. З нескінченності $C/D$ випливає, що або $DK/K$ має нескінчений індекс в $P/K$, або $Q/K$ буде нескінченою. У кожній з цих ситуацій $E/K$ містить у собі таку нормальну нескінчену підгрупу $U/K$, що $U/K \cap DK/K = \langle 1 \rangle$. Тоді $U \cap D = L$ є скінченою. Очевидно, $U$ не може бути поліциклічною, а тому з леми 2.7.3 отримаємо, що $C/U$ має скінчений комутант. Теорема Ремака забезпечує тепер вкладання $C/L \hookrightarrow E/D \times E/U$, а це, у свою чергу, доводить скінченність комутанта групи $E/L$, а отже, і скінченність $[E, E]$ , бо $L$ сама скінчена. У цьому випадку $G/[E, E]$ буде майже абелевою, що суперечить наслідку 2.7.8. Отримане протиріччя і доводить той факт, що $A/(A \cap D)$ є скінчено породженою.

**2.7.10. Наслідок.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$, а фактор-група $G/D$ не має скінченої системи породжуючих елементів. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в $G$ і комутант $G$ є нескінченим, то кожна $FC$-підгрупа $G$ має нескінченний індекс. Зокрема, фактор-група $G/FC(G)$ буде нескінченною.*

***Доведення.*** Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант за лемою 2.7.3. З пропозиції 2.7.2 і того факту, що $G$ має нескінчений комутант, отримаємо, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Припустимо, що $G$ має нормальну $FC$-підгрупу $A$ скінченого індексу. Оскільки $D$ не містить у собі власних підгруп скінченого індексу, то $D \leq A$. Якщо припустити, що $A/D$ є скінчено породженою, то і вся фактор-група $G/D$ буде скінчено породженою. Отже, $A/D$ не може мати скінченої системи породжуючих елементів. Однак це суперечить наслідку *2.7.9*.

**2.7.11. Лема.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в $G$ і комутант $G$ є нескінченим, то $G/D$ має скінчений комутант та*

*кожна підгрупа G, що не має скінченої системи породжуючи елементів, містить у собі D.*

***Доведення.*** Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант. Нехай $H$ – підгрупа, що не має скінченої системи породжуючих елементів і припустимо, що $H$ не містить у собі $D$. Це означає скінченність перетину $H \cap D$. Оскільки $G$ має нескінчений комутант, то за пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Тоді $H$ містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу $A$ без скруту, що $H/A$ – скінчена (теорема 1.1.32). Скінченність $H/A$ тягне за собою ту обставину, що $A$ не має скінченої системи породжуючих елементів. Однак це суперечить лемі 2.7.7.

**2.7.12. Лема**. *Нехай G – неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить у собі квазіциклічну підгрупу D. Якщо всі підгрупи G, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні в G і комутант G є нескінченим, то G/D має скінчений комутант та або G/D – скінчено породжена, або G містить у собі таку нормальну періодичну підгрупу T, що T/D є скінченою, а G/T – мінімаксна абелева група без скруту, у якої* $\boldsymbol{Sp}(G/T) = \{p\}$, *де* $\{p\} = \Pi(D)$.

***Доведення.*** Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант за лемою 2.7.3. Звідси випливає, що множина $T$ усіх елементів скінченого порядку буде підгрупою. Оскільки $G$ має нескінчений комутант, то за пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Зокрема, $T$ – черніковська підгрупа. З леми 2.7.7 тепер можна отримати, що $T$ – майже квазіциклічна підгрупа. Припустимо, що $G/T$ не має скінченої системи породжуючих. Група $G$ містить у собі таку нормальну підгрупу $H \geq D$, що $H/D$ – (абелева) підгрупа без скруту, а фактор-група $G/H$ є скінченою (теорема 1.1.32). Зокрема, $H$ – нільпотентна ступеню *2*. Для будь-якого елемента $h \in H$ відображення $\theta_h$ : $x \longrightarrow [h, x]$, $x \in H$, буде ендоморфізмом, так що маємо

$$[H, h] = Im\ \theta_h \cong H/Ker\ \theta_h = H/C_H(h).$$

Оскільки, $[H, h] \leq D$, то або $H/C_H(h)$ є скінченою циклічною $p$-групою, або $H/C_H(h)$ – квазіциклічна $p$-група, де $\{p\} = \Pi(D)$. Ми вже відмічали, що $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, тому абелева підгрупа без скруту $H/D$ має скінчений *0*-ранг. Виберемо в ній максимальну $Z$-незалежну систему елементів $\{h_1D, \ldots, h_rD\}$ і покладемо $V = C_H(h_1, \ldots, h_r)$. З очевидної рівності $C_H(h_1, \ldots, h_r) = C_H(h_1) \cap \ldots \cap$

$C_H(h_r)$ та теореми Ремака отримаємо вкладання $H/V \rightarrowtail H/C_H(h_1) \times \ldots \times H/C_H(h_r)$,яке доводить, що $H/V$ – черніковська $p$-группа. Припустимо, що $VD/D$ не має скінченої системи породжуючих елементів. Підгрупа $W = < h_1, \ldots, h_r >$ належить до центру підгрупи $V$, зокрема, вона є нормальною. За вибором $W$ секція $V/W$ буде періодичною. З нільпотентності $V$ отримаємо розклад $V/W = \times_{q \in \Pi(V/W)} S_q/W$, де $S_q/W$ – силовська $q$-підгрупа $V/W$. Оскільки $V$ – нільпотентна $\boldsymbol{A_3}$-група, то силовські підгрупи її періодичної фактор-групи $V/W$ будуть черніковськими. Нагадаємо той факт, що центр нільпотентної періодичної групи містить у собі кожну ділиму абелеву підгрупу (див., наприклад, [94, лема 3.13]), то кожна силовська $q$-підгрупа $S_q/W$ має центр скінченого індексу, зокрема, вона буде $FC$-групою. Але тоді і $V/W$ – періодична $FC$-група. З того факту, що $W$ – скінчено породжена абелева підгрупа, отримаємо скінченність перетину $W \cap D$. Оскільки $V/D$ – абелева, то з вкладання $V/(W \cap D) \rightarrowtail V/W \times V/D$, яке забезпечується теоремою Ремака, отримаємо, що $V/(W \cap D)$ – $FC$-група, а скінченність $W \cap D$ показує, що і $V$ – $FC$-група. За наслідком 2.7.10 $V/D$ – скінчено породжена, і тому $H/V$ є нескінченою. У цьому випадку знайдеться хоча б один індекс $j$, $1 \le j \le r$, для якого $H/C_H(h_j)$ – квазіциклічна $p$-група. Вище вже відмічалось, що $H/V$ є черніковською $p$-групою. З доведеної тільки що скінченої породженості $V/D$ отримаємо тепер, що $H/D$ – мінімаксна абелева група без скруту, у якої $\boldsymbol{Sp}(H/D) = \{p\}$. Зі скінченності $G/H$ отримаємо, нарешті, що і $G/T$ – мінімаксна абелева група без скруту, у якої $\boldsymbol{Sp}(G/T) = \{p\}$.

Тепер уже можна зібрати всі отримані вище результати та завершити розгляд випадку, коли група містить у собі нескінчені періодичні підгрупи.

**2.7.13. Теорема.** *Нехай $G$ – неперіодична локально майже розв'язна група, яка містить у собі нескінчену періодичну підгрупу. У групі $G$ всі її підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні тоді і тільки тоді, коли $G$ – група одного з наступних типів:*

*(1) $G$ – група зі скінченим комутантом.*

*(2) $[G, G]$ містить у собі таку нормальну в $G$ квазіциклічну підгрупу $D$, що $[G, G]/D$ – скінчена, $G/D$ – скінчено породжена.*

*(3) $G$ задовольняє наступні умови:*

*(3A) [G, G] містить у собі таку квазіциклічну підгрупу D, що* $D \leq \zeta(G)$;

*(3B) множина всіх елемнтів скінченого порядку фактор-групи G/D складає скінчену підгрупу T/D;*

*(3C) G/T – абелева мінімаксна група;*

*(3D)* $\mathbf{Sp}(G/T) = \{p\} = \Pi(D)$, *p – просте число;*

*(3E) якщо A – FC-підгрупа групи G, то* $A/(A \cap D)$ *буде скінчено породженою. Зокрема, кожна підгрупа G, що не має скінченої системи породжуючих елементів, містить у собі D.*

***Доведення. Необхідність.*** Припустимо, що група $G$ має нескінчений комутант. За пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Якщо центр $G$ не містить у собі квазіциклічних підгруп, то з огляду на лему 2.7.6, $G$ – група типу (*2*). Припустимо тепер, що центр групи $G$ містить у собі квазіциклічну підгрупу $D$. Оскільки $D$ не є майже поліциклічною, то $G/D$ має скінчений комутант за лемою 2.7.3. Звідси випливає, що множина $T$ усіх елементів скінченого порядку буде підгрупою. Оскільки $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, то $T$ – черніковська підгрупа. З леми 2.7.7 тепер можна отримати, що $T$ – майже квазіциклічна підгрупа. Якщо $G/D$ є скінчено породженою, то знову $G$ має тип (*2*). Припустимо, що $G/D$ не має скінченої системи породжуючих елементів. З леми 2.7.12 отримаємо, що $G$ задовольняє умови (*3C*), (*3D*). Нарешті, умова (*3E*) випливає з наслідку 2.7.9 та леми 2.7.11.

***Достатність.*** Нехай $G$ – група типу (*1*). Тоді кожна її підгрупа є наближено нормальною. Нехай тепер $H$ – підгрупа $G$, яка не є майже поліциклічною. Розглянемо спочатку випадок, коли $G$ – група типу (*2*). Оскільки $G/D$ є скінчено породженою, то перетин $H \cap D$ не може бути скінченим. Але тоді $H \cap D = D$, тобто $D \leq H$. Але у фактор-групі $G/D$ кожна підгрупа є наближено нормальною, і отже, $H$ – наближено нормальна в $G$. Нарешті, нехай $G$ – група типу (*3*). Припустимо, що $H$ не містить у собі $D$. Тоді перетин $H \cap D$ буде скінченим. З співвідношень $H/(H \cap D) \cong (HD)/D$ і того факту, що $G/D$ має скінчений комутант, та умов (*3B*) та (*3C*) випливає скінченність підгрупи $[H, H]$. Зокрема, $H$ – *FC*-підгрупа. Скінченність $H \cap D$ тягне за собою той факт, що $H/(H \cap D)$ не має скінченої системи породжуючих елементів, а це суперечить умові (*3E*). Отримане протиріччя доводить включення $D \leq H$. Тепер знову слід відмітити,

що в $G/D$ кожна підгрупа є наближено нормальною, і отже, $H$ буде наближено нормальною в $G$.

Наступний заключний етап – це розгляд випадку, коли всі періодичні підгрупи будуть скінченими. Оскільки з огляду на пропозицію 2.6.15 вивчення цих груп є можливим з точністю до скінчених нормальних підгруп, то для опису локально нільпотентних груп, що мають скінчену періодичну частину, достатньо описати тільки локально нільпотентні групи, вільні від скруту. Опис таких груп розпадається на дві ситуації у залежності від того, буде комутант скінчено породженим чи ні.

**2.7.14. Лема.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група без скруту, що не має скінченої системи породжуючих елементів. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то центр групи $G$ не має скінченої системи породжуючих елементів, зокрема, $G$ – нільпотентна і її ступінь нільпотентності не перевищує 2.*

***Доведення.*** Припустимо, що група $G$ має нескінчений комутант. За пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. У цьому випадку $G$ буде нільпотентною (теорема 1.1.5). Оскільки $G$ не має скінченої системи породжуючих елементів, то її центр $Z$ не може бути скінчено породженим (теорема 1.1.33). За лемою 2.7.3 $G/Z$ має скінчений комутант. З іншого боку, оскільки $G$ вільна від скруту, то і $G/Z$ не має скруту (див., наприклад, [94, теорема 2.25]). Це означає, що $G/Z$ є абелевою групою.

**2.7.15. Лема.** *Нехай $G$ – неабелева локально нільпотентна група без скруту, що не має скінченої системи породжуючих елементів. Припустимо також, що комутант групи $G$ є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то фактор-група $G/\zeta(G)$ буде абелевою та скінчено породженою.*

***Доведення.*** За лемою 2.7.14 $\zeta(G)$ не має скінченої системи породжуючих елементів і фактор-група $G/\zeta(G)$ – абелева. Тому для кожного елемента $g \in G$ відображення $\phi_g$: $x \longrightarrow [x, g]$, $x \in G$, буде ендоморфізмом, і отже $[G, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\ \phi_g = G/C_G(g)$. За нашими умовами $[G, G]$ є скінчено породженою, так що і $[G, g]$ – скінчено породжена. Але тоді і ізоморфна до неї фактор-група $G/C_G(g)$ є скінчено породженою для кожного $g \in G$. За пропозицією 2.7.2 $G$ –

майже розв'язна $A_3$-група, зокрема, $G$ має скінчений $0$-ранг. Нехай $\{g_1\zeta(G), \ldots, g_t\zeta(G)\}$ – максимальна $Z$-незалежна система елементів фактор-групи $G/\zeta(G)$, $H = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. За теоремою Ремака $G/C_G(H) \hookrightarrow G/C_G(g_1) \times \ldots \times G/C_G(g_t)$, а це показує, що $G/C_G(H)$ є скінчено породженою. Нехай тепер $D = H\zeta(G)$, тоді $C_G(H) = C_G(D)$, зокрема, і $G/C_G(D)$ – скінчено породжена. З вибору підгрупи $D$ отримуємо існування для кожного елемента $g \in G$ такого натурального числа $m$, що $g^m \in D$. Для довільного $x \in C_G(D)$ маємо тепер $g^m x = x g^m$. Але ж у нільпотентній групі $G$ без скруту остання рівність тягне за собою рівність $gx = xg$, яка показує, що $C_G(D) \leq \zeta(G)$, тобто $C_G(D) = \zeta(G)$. У свою чергу, ця рівність і доводить, що фактор-група $G/\zeta(G)$ буде скінчено породженою.

Нехай $A$ – абелева група вільна від скруту. *Позначимо через* $\boldsymbol{PM_{fg}}(A)$ *перетин усіх тих сервантних підгруп $A$, які не є скінчено породженими, та будемо називати цю підгрупу сервантним поліциклічним монолітом групи $A$.*

Підгрупа $\boldsymbol{PM_{fg}}(A)$ була введена до розгляду у роботі С. Франціозі, Ф. де Жіованні та Л.А. Курдаченка [23] (слід відмітити, що в цій роботі була використана інша назва та інше позначення).

Наступна лема доводиться точно так, як доводилась лема 2.6.7.

**2.7.16. Лема.** *Нехай $G$ – абелева група без скруту. Якщо $\langle 1 \rangle \neq \boldsymbol{PM_{fg}}(A)$, то $r_0(A)$ буде скінченим та $A$ містить у собі таку сервантну скінчено породжену підгрупу $B$, що $r_0(A/B) = 1$.*

**2.7.17. Теорема.** *Нехай $G$ – неабелева локально нільпотентна група без скруту, що не має скінченої системи породжуючих елементів. Припустимо також, що комутант групи $G$ є скінчено породженим. В групі $G$ всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні тоді і тільки тоді, коли $G$ задовольняє наступні умови:*

*(1) $G$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $E$, що $G = E\zeta(G)$ і $E \cap \zeta(G) = [G, G]$;*

*(2) $\zeta(G)$ не має скінченої множини породжуючих елементів;*

*(3) $[G, G] \leq \boldsymbol{PM_{fg}}(\zeta(G))$, зокрема, $\boldsymbol{PM_{fg}}(\zeta(G)) \neq \langle 1 \rangle$, а тому $\zeta(G)$ містить у собі таку скінчено породжену сервантну підгрупу $M$, що $\zeta(G)/M$ – нециклічна локально циклічна група.*

***Доведення. Необхідність.*** За лемою 2.7.14 $Z = \zeta(G)$ не має скінченої множини породжуючих елементів. З наслідку 2.7.15

випливає, що $G/Z$ – скінчено породжена абелева група. Зокрема, $K = [G, G] \leq \zeta(G)$. Абелева група $G/K$ має вільну абелеву фактор-групу $(G/K)/(Z/K)$, і тому $G/K = Z/K \times E/K$, де $G/Z \cong E/K$ – скінчено породжена (див., наприклад, [83, теорема 14.4]). Оскільки $K$ – скінчено породжена, то і $E$ – скінчено породжена. Нарешті, якщо $S$ – сервантна підгрупа $Z$, яка не є скінчено породженою, то за лемою 2.7.3 фактор-група $G/S$ має скінчений комутант. З іншого боку, $Z/S$ вільна від скруту і оскільки $G/Z$ також не має скруту (див., наприклад, [94, теорема 2.25]), то і $G/S$ не має скруту. Звідси випливає, що ця фактор-група абелева, тобто $K \leq S$. Це тягне за собою включення $[G, G] \leq \boldsymbol{PM_{fg}(\zeta(G))}$. І, нарешті, застосування леми 2.7.16 завершує доведення умови (*3*).

***Достатність***. Нехай $H$ – підгрупа $G$ і припустимо, що $H$ не є поліциклічною. Оскільки $G/Z$ – скінчено породжена, то перетин $H \cap Z$ не може бути скінчено породженим. Нехай $L$ – сервантна оболонка підгрупи $H \cap Z$ у $Z$, тоді $L$ також не має скінченої системи породжуючих елементів, і за умовою (*3*) маємо $[G, G] = K \leq L$. Оскільки $[G, G] \leq Z$, то $K \cap H = K \cap H \cap Z$. З співвідношень $K/(K \cap H) = K/(K \cap H \cap Z) \cong K(H \cap Z)/(H \cap Z) \leq L/(H \cap Z)$, і того факту, що фактор-група $L/(H \cap Z)$ є періодичною, отримаємо, що і $K/(K \cap H)$ також буде періодичною. З іншого боку, підгрупа $K$ є скінчено породженою, так що її періодична фактор-група $K/(K \cap H)$ буде скінченою. Таким чином, фактор-група $G/(K \cap H)$ має скінчений комутант $K/(K \cap H)$. Але тоді кожна її підгрупа є наближено нормальною, зокрема, наближено нормальною буде і $H/(K \cap H)$. Звідси вже випливає, що підгрупа $H$ – наближено нормальна в $G$.

**2.7.18. Лема.** *Нехай $G$ – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи $G$ не є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то $\zeta(G)$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $M$, що $\zeta(G)/M$ –квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$.*

***Доведення.*** За лемою 2.7.14 $Z = \zeta(G)$ не має скінченої системи породжуючих елементів, а також $K = [G, G] \leq \zeta(G)$. Оскільки $G$ – неабелева і вільна від скруту, то вона має нескінчений комутант. За пропозицією 2.7.2 $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Зокрема, $G$ має

скінчений $0$-ранг. Тому в підгрупі $Z$ можна вибрати таку скінчено породжену підгрупу $E$, що $Z/E$ – періодична. Якщо множина $\Pi(Z/E)$ є нескінченою, то в ній можливо виділити дві такі нескінчені підмножини $\Delta$ та $\Xi$, що $\Delta \cup \Xi = \Pi(Z/E)$ та $\Delta \cap \Xi = \varnothing$. Позначимо через $D/E$ силовську $\Delta$-підгрупу, а через $S/E$ – силовську $\Xi$-підгрупу $Z/E$, тоді $Z = DS$ і $D \cap S = E$. Обидві підгрупи $D$ та $S$ не можуть бути поліциклічними, тому за лемою 2.7.3 обидві фактор-групи $G/D$ та $G/S$ мають скінчені комутанти. З рівності $E = D \cap S$ отримуємо вкладання $G/E \hookrightarrow G/D \times G/S$, яке доводить скінченність комутанту фактор-групи $G/E$. З того факту, що $E$ має скінчену множину породжуючих елементів випливає тепер, що і $[G, G]$ буде скінчено породженою. Отримане протиріччя доводить скінченність множини $\Pi(Z/E)$. У свою чергу, це означає, що $Z/E$ буде черніковською групою. Позначимо через $P/E$ її ділиму частину. Якщо припустити, що вона не є квазіциклічною, то маємо $P/E = U/E \times V/E$, де обидві підгрупи $U/E$ та $V/E$ – неодиничні та ділимі, зокрема, $U$ та $V$ не можуть бути поліциклічними. За лемою 2.7.3 обидві фактор-групи $G/U$ та $G/V$ мають скінчені комутанти. Рівність $E = U \cap V$ забезпечує вкладання $G/E \hookrightarrow G/U \times G/V$, яке показує, що фактор-група $G/E$ має скінчений комутант. Однак це знову приводить до протиріччя, яке показує, що $P/E$ – квазіциклічна підгрупа. Використовуючи властивості ділимих підгруп абелевих груп, отримаємо розклад $Z/E = P/E \times M/E$, де підгрупа $M/E$ – скінчена. Але тоді $M$ – скінчено породжена і $Z/M$ буде квазіциклічною $p$-групою.

**2.7.19. Наслідок.** *Нехай $G$ – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи $G$ не є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то $G/\zeta(G)$ – абелева мінімаксна група, більш того, $\mathbf{Sp}(G/\zeta(G)) = \mathbf{Sp}(\zeta(G)) = \{p\}$, де $p$ – просте число.*

***Доведення.*** За лемою 2.7.14 $\zeta(G)$ не має скінченої системи породжуючих елементів та фактор-група $G/\zeta(G)$ – абелева. Тому для будь-якого елемента $g \in G$ відображення $\phi_g: x \longrightarrow [x, g]$, $x \in G$, буде ендоморфізмом, і отже, $[G, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\ \phi_g = G/C_G(g)$. Оскільки $[G, G] \leq \zeta(G)$, то з леми 2.7.18 отримаємо, що $[G, g]$ – мінімаксна та $\mathbf{Sp}([G, g]) = \{p\}$, де $p$ – просте число. Але тоді і

ізоморфна до неї фактор-група $G/C_G(g)$ буде мінімаксною та її спектр складається тільки з одного простого числа $p$ для будь-якого елемента $g \in G$. За пропозицією *2.7.2* $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Зокрема, $G$ має скінчений *0*-ранг. Нехай $\{g_1\zeta(G), \ldots, g_t\zeta(G)\}$ – максимальна $Z$–незалежна система елементів фактор-групи $G/\zeta(G)$, $H = < g_1, \ldots, g_t >$. З теореми Ремака отримаємо вкладання $G/C_G(H) \rightarrowtail G/C_G(g_1) \times \ldots \times G/C_G(g_t)$, яке за доведеним вище показує, що фактор-група $G/C_G(H)$ – мінімаксна та її спектр складається тільки з одного простого числа $p$. Нехай тепер $D = H\zeta(G)$, тоді $C_G(H) = C_G(D)$, зокрема, $G/C_G(D)$ – також мінімаксна і її спектр складається тільки з одного простого числа $p$. Вибір $D$ забезпечує існування для кожного елемента $g \in G$ такого натурального числа $m$, що $g^m \in D$. Для будь-якого $x \in C_G(D)$ маємо тепер $g^m x = x g^m$. Але в нільпотентній групі $G$ без скруту остання рівність тягне за собою рівність $gx = xg$, яка показує, що $C_G(D) \leq \zeta(G)$, тобто $C_G(D) = \zeta(G)$. У свою чергу, ця рівність доводить, що $G/\zeta(G)$ буде мінімаксною та її спектр складається тільки з одного простого числа $p$.

**2.7.20. Лема.** *Нехай $G$ – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи $G$ не є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то для кожної абелевої підгрупи $A$ секція $A/(A \cap [G, G])$ є скінчено породжена.*

***Доведення.*** Припустимо протилежне, нехай $A/(A \cap [G, G])$ не має скінченої множини породжуючих. За лемою 2.7.14 $K = [G, G] \leq \zeta(G)$, так що $AK$ – абелева підгрупа. Щоб не вводити нових позначень, будемо вважати, що $K \leq A$. В підгрупі $K$ знайдемо таку скінчено породжену підгрупу $E$, що $K/E$ – квазіциклічна $p$-група. Існування такої підгрупи випливає з леми 2.7.18. Із властивостей ділимих підгруп абелевих груп (див., наприклад, [83, теорема 21.2]) отримуємо розклад $A/E = K/E \times L/E$ для деякої підгрупи $L$. З нашого припущення щодо $A/K$ випливає, що $L$ не може бути скінчено породженою. У такому разі вона є наближено нормальною. За лемою 2.6.2 $L$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу без скруту $B$ скінченого індексу. Зокрема, $B$ також не буде скінчено породженою. За лемою 2.7.3 обидві фактор-групи $G/K$ та $G/B$ мають скінчені комутанти. В черговий раз, застосовуючи теорему Ремака, маємо $G/(K \cap B) \rightarrowtail G/K \times G/B$, що доводить скінченність комутанту $G/(K \cap$

*B)*. Оскільки $K \cap B \leq K \cap L = E$, то це тягне за собою той факт, що комутант усієї групи є скінчено породжений. Отримане протиріччя показує, що *A*/*K* буде скінчено породженою.

**2.7.21. Лема.** *Нехай G – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи G не є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи G, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то для кожної абелевої підгрупи A, що не має скінченої системи породжуючих, перетин* $A \cap [G, G]$ *також не має скінченої множини породжуючих.*

***Доведення.*** Припустимо протилежне, нехай $A \cap [G, G]$ – скінчено породжена. Оскільки *A* не є поліциклічною, то вона наближено нормальна. За лемою 2.6.2 *A* містить у собі *G*-інваріантну підгрупу без скруту *C* скінченого індексу. Зокрема, *C* також не може мати скінченої системи породжуючих елементів. За лемою 2.7.3 $G/C$ має скінчений комутант. Використовуючи вкладання $G/(C \cap [G, G]) \hookrightarrow G/[G, G] \times G/C$, знову можна довести скінченність комутанту фактор-групи $G/(C \cap \zeta(G))$. Оскільки $C \cap [G, G] \leq A \cap [G, G]$, то $C \cap [G, G]$ – скінчено породжена. Однак це тягне за собою той факт, що комутант усієї групи є скінчено породжений. Отримане протиріччя показує, що $A \cap [G, G]$ не має скінченої системи породжуючих елементів.

**2.7.22. Наслідок.** *Нехай G – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи G не є скінчено породженим. Якщо всі підгрупи G, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то для кожної абелевої підгрупи A, що не має скінченої системи породжуючих елементів, перетин* $A \cap [G, G]$ *має скінчений індекс в* $[G, G]$.

Дійсно, за лемою 2.7.21 перетин $A \cap [G, G]$ не може бути поліциклічною підгрупою. З леми 2.7.3 випливає, що $G/(A \cap [G, G])$ має скінчений комутант. Це і означає, що $A \cap [G, G]$ має скінчений індекс в $[G, G]$.

**2.7.23. Теорема.** *Нехай G – неабелева локально нільпотентна група без скруту. Припустимо також, що комутант групи G не є скінчено породженим. В групі G всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні тоді і тільки тоді, коли G задовольняє наступні умови:*

*(1) $\zeta(G)$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $M$, що $\zeta(G)/M$ – квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$;*

*(2) $G/\zeta(G)$ – абелева мінімаксна група, причому $\mathbf{Sp}(G/\zeta(G))=\mathbf{Sp}(\zeta(G))=\{p\}$;*

*(3) $[G, G] \leq \mathbf{PM}_{fg}(\zeta(G))$, зокрема, $\mathbf{PM}_{fg}(\zeta(G)) \neq \langle 1\rangle$;*

*(4) для кожної абелевої підгрупи $A$ секція $A/(A \cap [G, G])$ є скінчено породженою.*

*Більш того, для кожної підгрупи $H$, що не є поліциклічною, перетин $H \cap [G, G]$ має скінчений індекс в $[G, G]$.*

***Доведення. Необхідність.*** Умова (*1*) випливає з леми 2.7.18. Умова (*2*) випливає з наслідку 2.7.19. Наслідок 2.7.15 доводить включення $[G, G] \leq \zeta(G)$, яке, у свою чергу, тягне за собою умову (*3*). Нарешті, умова (*4*) випливає з леми 2.7.20. Нарешті, нехай $H$ – підгрупа, що не поліциклічною. Тоді вона містить у собі абелеву підгрупу $A$, що не є скінчено породженою (див., наприклад, [94, теорема 3.31]). З наслідку 2.7.22 випливає, що перетин $A \cap [G, G]$ має скінчений індекс в $[G, G]$, а тому і $H \cap [G, G]$ має скінчений індекс в $[G, G]$.

***Достатність.*** Нехай $H$ – підгрупа $G$ і припустимо, що $H$ не є майже поліциклічною. Тоді $H$ містить у собі абелеву підгрупу $A$, що не є скінчено породженою. З умови (*4*) отримуємо, що і перетин $A \cap [G, G]$ не буде поліциклічним. Нехай $L$ – сервантна оболонка підгрупи $B = A \cap [G, G]$ в $Z = \zeta(G)$, тоді $L$ також не має скінченої системи породжуючих елементів, і за умовою (*3*) $[G, G] \leq L$. Умови (*3*), (*1*) і той факт, що $L/B$ є періодичною, показують, що вона буде скінченою. Тепер включення $[G, G]B/B \leq L/B$ показує, що фактор-группа $G/B$ має скінчений комутант. Але тоді кожна її підгрупа буде наближено нормальною, зокрема, це виконується і для $H/B$. Звідси випливає, що $H$ є наближено нормальною в $G$.

Таким чином, залишилося розглянути випадок, коли група $G$ не є локально нільпотентною і всі її періодичні підгрупи будуть скінченими, зокрема, $P(G)$ – скінчена. Знову пропозиція 2.6.15 робить можливим редукцію до випадку, коли $P(G) = \langle 1\rangle$. Оскільки $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, то вона містить у собі такі нормальні підгрупи $H$, $A$, що $H \leq A$, $H$ є нільпотентною, $A/H$ – скінчено породжена абелева група без скруту, $G/A$ – скінчена група (наслідок 1.1.22).

**2.7.24. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо також, що комутант групи $G$ є нескінченим і $P(G) = <1>$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то $G$ містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу $A$ без скруту, що не є скінчено породженою і $G/A$ має скінчений комутант та скінчену періодичну частину.*

***Доведення.*** Як відмічалось вище, $G$ містить у собі такі нормальні підгрупи $H$, $L$, що $H \leq L$, $H$ є нільпотентною, $L/H$ – скінчено породжена абелева група без скруту, $G/L$ – скінчена група. Оскільки $G/H$ є майже поліциклічною, то $H$ не може бути поліциклічною. З леми 2.7.14 випливає, що $A = \zeta(H)$ не має скінченої системи породжуючих елементів. За лемою 2.7.3 фактор-група $G/A$ має скінчений комутант. З того факту, що $H$/A та $L/H$ є вільними від скруту, а $G/L$ – скінчена, випливає, що періодична частина $G/A$ буде скінченою.

**2.7.25. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо також, що комутант групи $G$ є нескінченим і $P(G) = <1>$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні і $[G, G]$ – майже поліциклічна, то $G$ – нільпотентна група без скруту.*

***Доведення.*** Як відмічалось вище, $G$ містить у собі такі нормальні підгрупи $H$, $L$, що $H \leq L$, $H$ є нільпотентною, $L/H$ – скінчено породжена абелева група без скруту, $G/L$ – скінчена група. Оскільки $[G, G]$ – майже поліциклічна, то і $[H, H]$ буде поліциклічною. За наслідком 2.7.15 $A = \zeta(H)$ не має скінченої системи породжуючих та $H/A$ – абелева і скінчено породжена. З леми 2.7.3 отримаємо, що $G/A$ має скінчений комутант і є скінчено породженою. Для довільного елемента $g \in G$ відображення $\phi_g$: $a \longrightarrow [a, g]$, $a \in A$, є ендоморфізмом, тому $Ker\ \phi_g = C_A(g)$ та $Im\ \phi_g = [A, g]$ є $<g>$-інваріантними підгрупами і $[A, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\ \phi_g = A/C_A(g)$. Разом з $[G, G]$ підгрупа $[A, g]$ також скінчено породжена, і отже, $E = C_A(g)$ – не є поліциклічною. Оскільки $G/A$ – скінчено породжена, то $G/A = < g_1A, \ldots, g_nA >$. Як тільки що було доведено, підгрупа $E_1 = C_A(g_1)$ не має скінченої множини породжуючих, тому вона наближено нормальна. За лемою 2.6.2 $E_1$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу $B_1$ скінченого індексу. Зокрема, $B_1$ не є поліциклічною. Повторюючи для неї усі наведені вище аргументи, побачимо, що і підгрупа $B_2 = B_1 \cap C_A(g_2)$ не має скінченої множини породжуючих. Використовуючи

ті ж самі міркування, через скінчену кількість кроків отримаємо, що підгрупа $C = C_A(g_1, \ldots, g_n)$ не має скінченої множини породжуючих. Лема 2.7.3 показує, що фактор-група $G/C$ має скінчений комутант. Тому множина $T/C$ усіх її елементів скінченого порядку буде підгрупою. У цьому випадку $[T, T]$ – локально скінчена підгрупа (наслідок 1.1.16). Зокрема, множина $P$ усіх елементів $T$, що мають скінчений порядок, буде (характеристичною) підгрупою $T$. Більш того, $T/P$ – абелева група (вільна від скруту). Враховуючи рівність $P(G) = \langle 1 \rangle$, отримаємо, що $T$ – абелева група без скруту. Оскільки $T/C$ – періодична, то включення $C_A(g_1, \ldots, g_n) \leq \zeta(G)$ і той факт, що операція добування кореня в абелевій групі без скруту є однозначною, забезпечують включення $T \leq \zeta(G)$. З того факту, що $G/T$ – абелева, випливає нільпотентність $G$. Зокрема, вона є вільною від скруту.

**2.7.26. Наслідок.** *Нехай $G$ – майже абелева група і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні і $G$ – неабелева, то її комутант не може бути скінчено породженим.*

***Доведення.*** Припустимо протилежне, нехай $[G, G]$ є скінчено породженою. За пропозицією 2.7.2 та лемою 2.7.25 $G$ – нільпотентна. Зокрема, вона є вільною від скруту. Бувши у той же час майже абелевою, $G$ – абелева. Отримане протиріччя і доводить наслідок.

**2.7.27. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо також, що комутант групи $G$ не є майже поліциклічним і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то кожна абелева підгрупа $A$ без скруту містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $B$, що $A/B$ – квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$.*

***Доведення.*** Оскільки $A$ має скінчений $0$-ранг, то в ній можна вибрати таку скінчено породжену підгрупу $E$, що $A/E$ є періодичною. Якщо множина $\Pi(A/E)$ – нескінчена, то існують дві такі нескінчені підмножини $\Delta$ і $\Xi$, що $\Delta \cup \Xi = \Pi(Z/E)$ та $\Delta \cap \Xi = \varnothing$. Позначимо через $D/E$ – силовську $\Delta$-підгрупу, а через $S/E$ – силовську $\Xi$-підгрупу $A/E$, тоді $Z = DS$ та $D \cap S = E$. Обидві підгрупи $D$ і $S$ не можуть бути поліциклічними, тому з леми 2.7.3 випливає, що обидві фактор-групи $G/D$ та $G/S$ мають скінчені комутанти. З рівності $E = D \cap S$ отримаємо вкладання $G/E \hookrightarrow G/D \times G/S$, яке показує, що $G/E$ має скінчений

комутант. Скінчена породженість $E$ доводить тепер, що і $[G, G]$ буде скінчено породженим. Отримане протиріччя з наслідком 2.7.26 доводить скінченність $\Pi(A/E)$. У свою чергу, це означає, що $A/E$ – черніковська група. Позначимо через $P/E$ її ділиму частину. Якщо припустити, що вона не є квазіциклічною, то $P/E = U/E \times V/E$, де обидві підгрупи $U/E$ та $V/E$ – неодиничні та ділимі, зокрема, $U$ і $V$ не можуть бути поліциклічними. З леми 2.7.3 випливає, що обидві фактор-групи $G/U$ та $G/V$ мають скінчені комутанти. З рівності $E = U \cap V$ випливає вкладання $G/E \hookrightarrow G/U \times G/V$, яке доводить скінченність комутанту фактор-групи $G/E$. Однак це знову приводить до протиріччя, яке доводить той факт, що $P/E$ – квазіциклічна підгрупа. Ділимість $P/E$ тягне за собою розклад $Z/E = P/E \times B/E$, де підгрупа $B/E$ – скінченна. Але тоді $B$ – скінчено породжена і $A/B$ – квазіциклічна $p$-група.

**2.7.28. Наслідок.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо також, що комутант групи $G$ не є майже поліциклічним і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо всі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні, то $G$ задовольняє наступні умови:*

*(1) $[G, G]$ містить у собі $G$-інваріантну абелеву підгрупу без скруту $A$ скінченого індексу;*

*(2) $A$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $B$, що $A/B$ –квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$;*

*(3) якщо $C$ – підгрупа $A$ і $r_0(C) < r_0(A)$, то $C$ – скінчено породжена.*

***Доведення.*** Оскільки $[G, G]$ не є майже поліциклічною, то і $G$ не є майже поліциклічною. У цьому випадку вона містить у собі абелеву підгрупу $U$, що не є скінчено породженою (див., наприклад, [94, теорема 3.31]). Умова $P(G) = \langle 1 \rangle$ вказує на те, що періодична частина $U$ буде скінченою. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $U$ не має скруту. Серед нескінченно породжених підгруп $U$ знайдемо підгрупу $B$, $0$-ранг якої є найменшим. Це можливо, бо $U$ має скінчений $0$-ранг. Тоді $B$ буде наближено нормальною. За лемою 2.6.2 $B$ містить у собі $G$-інваріантну підгрупу $E$ скінченого індексу. Зокрема, $E$ також не є поліциклічною. Лема 2.7.3 доводить скінченність комутанту фактор-групи $G/E$. Покладемо $A = [G, G] \cap E$, тоді з співвідношень $[G, G]/A \cong [G, G]/([G, G] \cap E) \cong [G, G]E/E$

отримаємо скінченність $[G, G]/A$. Оскільки $[G, G]$ не є майже поліциклічною, то $A$ не має скінченої системи породжуючих елементів. Тому $r_0(U) = r_0(A)$, і з вибору $U$ випливає умова (*3*). Нарешті, умова (*2*) випливає з леми 2.7.27.

**2.7.29. Наслідок.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо, що комутант групи $G$ не є майже поліциклічним і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Нехай також усі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні. Якщо $A$ – $G$-інваріантна абелева підгрупа без скруту, що має в $[G, G]$ скінчений індекс, то для довільного елемента $g \in G$ або $C_A(g) = A$, або $C_A(g) = \langle 1 \rangle$.*

***Доведення.*** Знову використаємо відображення $\phi_g$: $a \longrightarrow [a, g]$, $a \in A$, яке є ендоморфізмом. Маємо $Ker\ \phi_g = C_A(g)$, $Im\ \phi_g = [A, g]$ та $[A, g] = Im\ \phi_g \cong A/Ker\ \phi_g = A/C_A(g)$. Неважко побачити, що підгрупа $C_A(g)$ – сервантна в $A$. Тому якщо припустити, що $A \neq C_A(g) \neq \langle 1 \rangle$, то $r_0(C_A(g)) < r_0(A)$, і умова (*3*) наслідку 2.7.28 забезпечує скінчену породженість підгрупи $C_A(g)$. Далі також отримаємо, що $r_0([A, g]) < r_0(A)$, і знову застосування умови (*3*) наслідку 2.7.28 приводить до скінченої породженості підгрупи $[A, g]$. Ізоморфізм $[A, g] \cong A/C_A(g)$ доводить тепер, що $A$ – скінчено породжена, і отже, $[G, G]$ – майже поліциклічна. Протиріччя, що ми отримали, доводить, що нерівність $A \neq C_A(g)$ є можливою тільки у випадку, коли $C_A(g) = \langle 1 \rangle$.

**2.7.30. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група. Припустимо, що комутант групи $G$ не є майже поліциклічним і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Нехай також усі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні. Якщо $A$ – $G$-інваріантна абелева підгрупа без скруту, що має в $[G, G]$ скінчений індекс і $A \leq \zeta(G)$, то $G$ – нільпотентна.*

***Доведення.*** За лемою 2.7.3 фактор-група $G/A$ має скінчений комутант. Тому множина $T/A$ всіх її елементів скінченого порядку буде підгрупою. У цьому випадку $[T, T]$ – локально скінчена підгрупа (наслідок 1.1.16). Зокрема, множина $P$ усіх елементів $T$, що мають скінчений порядок, буде (характеристичною) підгрупою $T$. Більш того, $T/P$ – абелева група (без скруту). Зважаючи на рівність $P(G) = \langle 1 \rangle$, отримаємо, що $T$ – абелева група без скруту. Оскільки $T/A$ – періодична, то включення $A \leq \zeta(G)$ і той факт, що добування кореня в абелевій групі без скруту є однозначним, забезпечує включення $T \leq \zeta(G)$. З того факту, що $G/T$ – абелева, випливає нільпотентність $G$.

**2.7.31. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Припустимо, що комутант групи $G$ не є майже поліциклічним і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Нехай також усі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні. Якщо $A$ – $G$-інваріантна абелева підгрупа без скруту, що має в $[G, G]$ скінчений індекс і існує елемент $g \in G$, для якого $C_A(g) \neq A$, то $G$ містить у собі підгрупу $D = AV$ скінченого індексу, де $A \cap V = \langle 1 \rangle$ і $V$ – абелева підгрупа без скруту.*

***Доведення.*** З наслідку 2.7.29 випливає, що $C_A(g) = \langle 1 \rangle$. За лемою 2.7.3, $G/A$ – група зі скінченим комутантом, так що $L/A = C_{G/A}(gA)$ має скінчений індекс. Оскільки $L/A$ ще й майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, то вона містить у собі абелеву підгрупу скінченого індексу. З співвідношення $gA \in \zeta(L/A)$ бачимо, що приєднуючи до цієї абелевої підгрупи елемент $gA$, знову отримаємо абелеву підгрупу. Тому, щоб не вводити нових позначень, можна вважати, що $L/A$ – абелева. Використовуючи в черговий раз ізоморфізм $[A, g] \cong A/C_A(g) \cong A$ та умову (*2*) наслідку 2.7.28, отримаємо скінченність $A/[A, g]$. Звідси випливає, що підгрупа $C = C_L(A/[A, g])$ має в $L$ скінчений індекс. Нехай $k = |A/[A, g]|$ і $E = C^k$. Оскільки $C$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група, то $C/E$, і отже, $L/E$ – скінчені. Нехай $c \in C$. Маємо $[c^2, g] = [c, g]^c [c, g] = [c, g^c] [c, g]$. Далі $g^c = ga$ для деякого елемента $a \in A$, так що $[c, ga] = [c, g]^a [c, a]$, а тому $[c^2, g] = [c, g]^2 [c, a]$, де $[c, a] = v \in [A, g]$. За допомогою аналогічних міркувань отримаємо співвідношення $[c^k, g] = [c, g]^k w$ для деякого елемента $w \in [A, g]$. Оскільки $[c, g] \in A$, то $[c, g]^k \in A^k \leq [A, g]$, тому $[c^k, g] \in [A, g]$, тобто $[c^k, g] = [b, g]$ для деякого $b \in A$. Звідси випливає, що $c^k b^{-1} \in C_L(g)$ або $c^k \in C_L(g)A$. Інакше кажучи, маємо включення $E \leq C_L(g)A$. Рівність $C_A(g) = \langle 1 \rangle$ показує, що $C_L(g) \cap A = \langle 1 \rangle$, а звідси отримуємо $C_L(g) \cong C_L(g)/(C_L(g) \cap A) \cong C_L(g)A/A \geq EA/A$. Як уже було відмічено, $EA/A$ – абелева і має скінчений індекс в $G/A$. Тому $V = C_L(g)$ – абелева та $D = AE$ має скінчений індекс в $G$.

**2.7.32. Наслідок.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група. Припустимо, що $[G, G]$ та $G/[G, G]$ не є майже поліциклічними і $P(G) = \langle 1 \rangle$. Нехай також усі підгрупи $G$, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні. Тоді $G$ – нільпотентна.*

***Доведення.*** За наслідком *2.7.28* $[G, G]$ містить у собі $G$-інваріантну абелеву підгрупу $A$ без скруту, яка має скінчений індекс. Якщо $C_A(g) = A$ для кожного елемента $g \in G$, то $A \leq \zeta(G)$.

Лема 2.7.30 доводить, що $G$ – нільпотентна. Тому можна припустити, що існує елемент $g$, для якого $C_A(g) \neq A$. З леми 2.7.31 випливає тоді існування в $G$ такої підгрупи $D = AV$ скінченого індексу, що $A \cap V = \langle 1 \rangle$ і $V$ – абелева підгрупа без скруту. Зокрема, підгрупа $V$ не може бути скінчено породженою, так що вона наближено нормальна. Лема 2.6.2 забезпечує тепер існування в $V$ абелевої $G$-інваріантної підгрупи $B$, що має скінчений індекс. Зокрема, $B$ не є скінчено породженою, і з леми 2.7.3 випливає скінченність комутанту $G/B$. Співвідношення $A \cap B \leq A \cap V = \langle 1 \rangle$ тягне за собою вкладання $G \hookrightarrow G/A \times G/B$, яке доводить скінченність $[G, G]$. Отримане протиріччя показує, що $C_A(G) = A$ для кожного елемента $g \in G$, а це, як було доведено вище, означає нільпотентність $G$.

Тепер уже і для останнього випадку можна отримати наступний опис.

**2.7.33. Теорема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, що не є майже поліциклічною і нільпотентною. Припустимо, що $P(G) = \langle 1 \rangle$. У групі $G$ всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні тоді і тільки тоді, коли $G$ задовольняє наступні умови:*

*(1) $[G, G]$ містить у собі $G$-інваріантну абелеву підгрупу без скруту $A$ скінченого індексу;*

*(2) $A$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $B$, що $A/B$ – квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$;*

*(3) якщо $C$ – підгрупа $A$ і $r_0(C) < r_0(A)$, то $C$ – скінчено породжена;*

*(4) $C_G(A) \neq G$ і $C_A(g) = \langle 1 \rangle$ для кожного елемента $g \in G \setminus C_G(A)$.*

*(5) $G$ містить у собі таку підгрупу $D = AV$ скінченого індексу, що $A \cap V = \langle 1 \rangle$ та $V$ – абелева скінчено породжена підгрупа без скруту.*

***Доведення. Необхідність.*** Лема 2.7.25 показує, що $[G, G]$ не може бути майже поліциклічною. За наслідком 2.7.28 $G$ задовольняє умови (*1*) – (*3*). Умова (*4*) випливає з леми 2.7.30. Наслідок 2.7.32 показує, що фактор-група $G/[G, G])$ – скінчено породжена. І, нарешті, щоб отримати умову (*5*), треба використати лему 2.7.31.

***Достатність.*** Нехай $H$ – підгрупа $G$ і припустимо, що $H$ не є майже поліциклічною. Оскільки $G/[G, G]$ є скінчено породженою, то перетин $H \cap [G, G]$ не може бути майже поліциклічним. За умовою (*3*) $r_0(H \cap A) = r_0(A)$, а це показує, що $H \cap A$ має скінчений індекс $s$ в підгрупі $A$. Тоді $B = A^s \leq H \cap A$. Очевидно, $B$ – нормальна підгрупа $G$. Оскільки $r_0(A)$ є скінченим, то $A/B$ – також скінчена. Це тягне за

собою скінченність комутанту фактор-групи $G/B$. Але тоді кожна її підгрупа наближено нормальна, тобто $H/B$ є наближено нормальною в $G/B$. Отже і підгрупа $H$ – наближено нормальна в $G$.

# Р О З Д І Л 3
# ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ МАЙЖЕ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

У цьому розділі викладаються результати про будову груп, у яких підгрупи, які не є майже нормальними, мають той або інший скінченний ранг (скінченний $p$-ранг, скінченний $0$-ранг, скінченний секційнний ранг, скінченний спеціальний ранг, скінченний мінімаксний ранг).

## 3.1. Групи, в яких усі підгрупи нескінченного $0$-рангу майже нормальні

**3.1.1. Означення.** *Підгрупу $H$ групи $G$ будемо називати майже нормальною (в $G$), якщо $H$ має скінченну множину спряжених.*

Інакше кажучи, підгрупа $H$ тоді і тільки тоді є майже нормальною, коли її нормалізатор має скінчений індекс у всій групі $G$.

Підгрупи такого роду також уперше почав розглядати Б. Нейман у статті [8].

Слід зразу відмітити, що якщо $H, L$ – майже нормальні підгрупи в групі $G$, то підгрупи $H \cap L$ і $< H, L >$ також будуть майже нормальними. Це випливає з очевидних включень

$N_G(H) \cap N_G(L) \leq N_G(H \cap L)$ та $N_G(H) \cap N_G(L) \leq N_G(< H, L >)$, а також того факту, що підгрупа $N_G(H) \cap N_G(L)$ має скінчений індекс в $G$. Цими властивостями майже нормальних підгруп будемо користуватись далі без спеціальних посилань.

За допомогою майже нормальних підгруп можна дати наступну характеристики $FC$-центру групи $G$.

**3.1.2. Лема.** *$FC$-центр групи $G$ співпадає з множиною усіх тих елементів $g \in G$, для яких підгрупа $<g>$ майже нормальна в $G$.*

***Доведення***. Дійсно, якщо $g \in FC(G)$, то елемент $g$ має скінчену множину спряжених в $G$, а тому і підгрупа $<g>$ також має скінчену множину спряжених в $G$, тобто індекс $|G : N_G(<g>)|$ буде скінченим.

Навпаки, якщо підгрупа $\langle g \rangle$ майже нормальна в $G$, то індекс $|G : N_G(\langle g \rangle)|$ є скінченим. У випадку, коли елемент $G$ має скінчений порядок індекс $|N_G(\langle g \rangle) : C_G(\langle g \rangle)|$ буде скінченим, а тому скінченим буде і індекс $|G : C_G(\langle g \rangle)| = |g^G|$. Коли ж елемент $g$ має нескінчений порядок, то $|N_G(\langle g \rangle) : C_G(\langle g \rangle)| \leq 2$, і знову $|G : C_G(\langle g \rangle)| = |g^G|$ є скінченним.

**3.1.3. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу майже нормальні.*

*(1) Якщо $H$ – підгрупа нескінченного 0-рангу, то і кожна її підгрупа нескінченного 0-рангу майже нормальна.*

*(2) Якщо $H$ – нормальна підгрупа $G$, то кожна підгрупа нескінченного 0-рангу фактор-групи $G/H$ є майже нормальною.*

Це твердження є майже очевидним.

**3.1.4. Лема.** *Нехай $G$ – група, в якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу майже нормальні, $g \in G$, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична $\langle g \rangle$-інваріантна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ є нескінченною. Тоді $\langle g \rangle$ – майже нормальна в $G$ і тому $g \in FC(G)$.*

***Доведення.*** Покладемо $\langle x \rangle = \langle g \rangle \cap H$. Тоді $Supp\ x = \Delta$ є скінченою підмножиною $\Lambda$ та $(\times_{\lambda \in M} H_\lambda) \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$, де підмножина $M = \Lambda \setminus \Delta$ є нескінченною. Виберемо тепер в $M$ дві підмножини $K$ і $N$, що задовольняють наступні умови: $K \cup N = M$, $K \cap N = \varnothing$ та обидві підмножини $\Sigma \cap K$, $\Sigma \cap N$ – нескінченні. Цей вибір забезпечує тепер ту обставину, що підгрупи $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda)$ і $\langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ мають нескінченні 0-ранги, зокрема, вони будуть майже нормальними. Тому їх перетин $\langle g \rangle = \langle g \rangle (\times_{\lambda \in K} H_\lambda) \cap \langle g \rangle (\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ також буде майже нормальною підгрупою. З леми 3.1.2 випливає тепер той факт, що $g \in FC(G)$.

**3.1.5. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, в якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу майже нормальні, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ є нескінченною. Тоді $H \leq FC(G)$.*

**3.1.6. Наслідок.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу майже нормальні. Якщо $G$ містить у собі*

*абелеву підгрупу $A$ нескінченого 0-рангу, то $A \leq FC(G)$, зокрема, $FC(G)$ має нескінченний 0-ранг.*

***Доведення.*** Якщо $A$ вільна від скруту, то вона містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченого рангу. Якщо ж періодична частина $T$ підгрупи $A$ є неодиничною, то тоді у фактор-групі $A/T$ вибираємо вільну абелеву підгрупу $C/T$, що має нескінчений $0$-ранг. Маємо тепер $C = E \times T$, де $C/T \cong E$ – вільна абелева підгрупа нескінченого $0$-рангу (див., наприклад, [83, теорема 14.4]). Таким чином, у кожному з випадків $A$ містить у собі підгрупу $\times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де $C_\lambda$ – нескінченна циклічна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$ та множина індексів $\Lambda$ є нескінченою. Очевидно, підгрупа $C_\lambda$ є $\langle a \rangle$-інваріантною для кожного елемента $a \in A$, і за лемою 3.1.4 $A \leq FC(G)$.

**3.1.7. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу наближено нормальні. Якщо $G$ – FC-група нескінченного 0-рангу, то $G$ – скінченна над центром.*

***Доведення.*** Виберемо у центрі групи $G$ максимальну підгрупу без скруту $U$. Оскільки $G/\zeta(G)$ є періодичною (теорема 1.1.17), то також і $G/U$ є періодичною. Звідси випливає, що $U$ має нескінчений $0$-ранг. ранг. Якщо $L$ – підгрупа, що містить у собі $U$, то і вона має нескінчений $0$-ранг. Інакше кажучи, $L$ – майже нормальна в $G$. Звідси випливає, що кожна підгрупа $G/U$ буде наближено нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) $G/U$ має центр скінченого індексу. Нехай $Z/U = \zeta(G/U)$ та $z$ – довільний елемент $Z$. Для кожного елемента $g \in G$ маємо тоді $[g, z] \in U$. З іншого боку, підгрупа $[G, G]$ є періодичною (теорема 1.1.17). Отже, $[g, z] \in U \cap [G, G] = \langle 1 \rangle$, тобто $z \in \zeta(G)$. Таким чином, $G/\zeta(G)$ – скінчена.

**3.1.8. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного 0-рангу майже нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченного 0-рангу, то $G$ – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Нехай $A$ – абелева підгрупа, що має нескінченний $0$-ранг. З наслідку 3.1.6 випливає включення $A \leq FC(G)$. Зокрема, $FC$-центр має нескінченний $0$-ранг. Нехай $C = \zeta(FC(G))$. Оскільки $FC(G)/\zeta(FC(G))$ є періодичною (теорема 1.1.17), то $C$ має нескінченний $0$-ранг. Нехай $1 \neq c_1 \in C$, $C_1 = \langle c_1 \rangle^G$. Оскільки $c_1 \in FC(G)$, то підгрупа $C_1$ – скінчено породжена. Виберемо в $C$ підгрупу $B_1$, максимальну відносно $C_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$. Очевидно $C/B_1$ – група скінченого спеціального рангу, зокрема, вона має скінчений $0$-ранг. У

свою чергу, це означає, що підгрупа $B_1$ має нескінчений *0*-ранг, а тому вона майже нормальна. Це тягне за собою скінченність множини $\{ B_1^x \mid x \in G \}$. Нехай $\{ B_1^x \mid x \in G\} = \{x_1^{-1}B_1x_1, \ldots, x_m^{-1}B_1x_m \}$ та $C_1 = \cap_{x \in G} B_1^x$. Теорема Ремака забезпечує вкладання $A/C_1 \rightarrow A/B_1^x{}_1 \times \ldots \times A/B_1^x{}_m$. Це показує нам, що $C_1$ – $G$-інваріантна підгрупа $A$, для якої $C_1 \cap A_1 = \langle 1 \rangle$ і також $A/C_1$ – група скінченого спеціального рангу. Зокрема, $C_1 \neq \langle 1 \rangle$. Нехай $1 \neq c_2 \in C_1$, $C_2 = \langle c_2 \rangle^G$. Знову $C_2$ – скінчено породжена підгрупа. Виберемо в $C$ підгрупу $B_2$, максимальну відносно $(C_1C_2) \cap B_2 = \langle 1 \rangle$. Тоді $C/B_2$ – група скінченого спеціального рангу. Застосовуючи аналогічні аргументи, побудуємо нескінчену систему $\{ C_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ таких скінчено породжених $G$-інваріантних підгруп $C$, що $\langle C_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \times_{n \in N} C_n$. Зокрема, $C_n$ буде $\langle g \rangle$-інваріантною для кожного елемента $g \in G$. За лемою 3.1.4 $g \in FC(G)$, що доводить рівність $G = FC(G)$. Застосування леми 3.1.7 завершує доведення.

**3.1.9. Теорема.** *Нехай G – група нескінченого 0-рангу, у якій усі підгрупи нескінченого 0-рангу майже нормальні. Якщо G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені, то G/P(G) – абелева група без скруту.*

***Доведення.*** Не обмеживши загальності, можна припустити, що $P(G) = \langle 1 \rangle$. З пропозиції 2.1.10 випливає, що $G$ містить у собі абелеву підгрупу без скруту нескінченного *0*-рангу. З пропозиції 3.1.8 отримаємо, що $G$ має центр скінченого індексу. Оскільки $P(G) = \langle 1 \rangle$, то $G$ – абелева група без скруту.

При додаткових обмеженнях на групу $G$ є можливим описати не тільки будову фактор-групи $G/P(G)$, а і будову усієї групи $G$.

**3.1.10. Теорема.** *Нехай G – розв'язна група нескінченого 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, майже нормальні. Припустимо, що всі скінчено породжені підгрупи G є мінімаксними. Тоді група G – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. За теоремою 3.1.9 $G/P$ – абелева група без скруту, що має нескінчений *0*-ранг. Тому вона містить у собі вільну абелеву підгрупу (нескінченного) зчисленого рангу $\times_{n \in N} \langle a_nP \rangle$. Повторюючи майже дослівно аргументи з доведення теореми 2.3.8, ми отримаємо, що $[H, H]$ буде скінченою, а оскільки $H$ – скінчено породжена, то $H/\zeta(H)$ є скінченою. Тоді існує таке

натуральне $t$, що $(a_2)^t = b_2 \in \zeta(H)$, зокрема, $\langle a_1, b_2\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle b_2\rangle$. Застосовуючи аналогічні міркування, можемо показати, що і підгрупа $L = \langle a_1, b_2, a_3\rangle$ буде скінченою над центром, так що знайдеться таке натуральне число $m$, що $(a_3)^m = b_2 \in \zeta(L)$, зокрема, $\langle a_1, b_2, b_3\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle b_3\rangle$. Подальше застосування аналогічних аргументів показує, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу без скруту, що має нескінчений *0*-ранг. Залишилось застосувати пропозицію 3.1.8.

**3.1.11. Теорема.** *Нехай G – група нескінченого 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, майже нормальні. Припустимо, що G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені. Якщо G – локально нетерова, то G – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. За теоремою 3.1.9 $G/P$ – абелева група без скруту нескінченого *0*-рангу. Нехай $L$ – скінчено породжена підгрупа $G$. Оскільки $L$ задовольняє умову максимальності для всіх підгруп, то вона майже поліциклічна. Тому $L \cap P$ є скінченою. З того факту, що $L/(L \cap P)$ – абелева, отримуємо, що $L$ – скінчена над центром. Тепер повторюючи аргументи попередньої теореми, отримуємо, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченого *0*-рангу й застосування пропозиції 3.1.8 завершує доведення.

**3.1.12. Наслідок.** *Нехай G – локально нільпотентна група нескінченого 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, майже нормальні. Тоді G – скінченна над центром група.*

**3.1.13. Наслідок.** *Нехай G – FC-гіперцентральна група нескінченого 0-рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінченний 0-ранг, майже нормальні. Тоді G – скінчена над центром група.*

Це твердження є наслідком леми 2.3.11 та теореми 3.1.11.

## 3.2. Групи, в яких усі підгрупи нескінченного секційного *p*-рангу майже нормальні

**3.2.1. Лема.** *Нехай G – група, в якій усі підгрупи нескінченного секційного p-рангу майже нормальні.*

*(1) Якщо H – підгрупа нескінченного секційного p-рангу, то і кожна її підгрупа нескінченного секційного p-рангу майже нормальна.*

*(2) Якщо H – нормальна підгрупа G, то кожна підгрупа нескінченного секційного p-рангу фактор-групи G/H є майже нормальною.*

Це твердження є майже очевидним.

**3.2.2. Лема.** *Нехай G – група, в якій усі підгрупи нескінченного секційного p-рангу наближено нормальні, $g \in G$, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична $\langle g \rangle$-інваріантна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma(p)=\{\lambda \in \Lambda \mid H_\lambda$ має неодиничну елементарну абелеву p-секцію$\}$ є нескінченною. Тоді $\langle g \rangle$ – майже нормальна в G , зокрема, $g \in FC(G)$.*

Доведення цієї леми практично дослівно повторює доведення леми 3.1.5, тому не будемо його наводити.

**3.2.3. Наслідок.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного p-рангу майже нормальні, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, де $H_\lambda$ – неодинична підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що підмножина $\Sigma(p) = \{\lambda \in \Lambda \mid H_\lambda$ має неодиничну елементарну абелеву p-секцію$\}$ є нескінченною. Тоді $H \leq FC(G)$.*

**3.2.4. Наслідок.** *Нехай G – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного p-рангу майже нормальні. Якщо G містить у собі абелеву підгрупу A нескінченого секційного p-рангу, то $A \leq FC(G)$, зокрема, FC(G) має нескінчений секційний p-ранг.*

***Доведення.*** Нехай $T$ – періодична частина підгрупи $A$, а $P$ – її силовська $p$-підгрупа. Якщо $P$ має нескінчений секційний $p$-ранг, то $P$ містить у собі підгрупу $E = \times_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, де $E_\lambda$ – циклічна підгрупа простого порядку $p$ для кожного $\lambda \in \Lambda$ та множина індексів $\Lambda$ є нескінченою. Очевидно, підгрупа $E_\lambda$ – $\langle a \rangle$-інваріантна для кожного елемента $a \in A$, і, застосовуючи лему 3.2.2, отримаємо включення $A \leq FC(G)$. Припустимо тепер, що $P$ (а, отже, і $T$) має скінчений секційний $p$-ранг. Тоді $r_p(G/T)$ буде нескінченим. У цьому випадку $G/T$ має нескінчений $0$-ранг. Як і в наслідку 3.1.6 отримаємо, що $A$ містить у собі підгрупу $\times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де $C_\lambda$ – нескінчена циклічна підгрупа для кожного $\lambda \in \Lambda$ та множина індексів $\Lambda$ буде нескінченою. Очевидно, підгрупа $C_\lambda$ є $\langle a \rangle$-інваріантною для кожного елемента

$a \in A$, і, застосовуючи лему 3.2.2, знову отримаємо включення $A \le FC(G)$.

**3.2.5. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу майже нормальні. Якщо $G$ – $FC$-група нескінченного секційного $p$-рангу, то $G$ – скінченна над центром.*

***Доведення.*** Розглянемо спочатку випадок, коли $G$ – періодична група. З леми 2.2.6 отримуємо, що $G$ містить у собі нескінченну елементарну абелеву $p$-підгрупу $B$. Нехай $H$ – довільна підгрупа $G$. Якщо перетин $H \cap B$ є нескінченим, то $H \cap B$ – підгрупа нескінченого секційного $p$-рангу, а тому вона майже нормальна. Припустимо тепер, що $H \cap B$ є скінченою. Виберемо в $B$ підгрупу $U$, що має властивість $B = U \times (H \cap B)$. Тоді $U$ є нескінченою та $U \cap H = \langle 1 \rangle$. Наступним кроком буде вибір в $U$ двох таких нескінчених підгруп $V$ і $W$, що $U = V \times W$. Кожна з підгруп $N_G(V)$, $N_G(W)$ має скінчений індекс в $G$, а тому скінчений індекс в $G$ буде мати і підгрупа $Y = N_G(V) \cap N_G(W)$. Нехай $D = H \cap Y$, тоді індекс $|H : D|$ є скінченим, а тому можна вибрати таку скінчену підгрупу $F$, нормальну в $H$, що $H = FD$. Обидві підгрупи $DV$ та $DW$ мають нескінчений секційний $p$-ранг, і отже майже нормальні в $G$. З рівності $D = DV \cap DW$ отримаємо, що $D$ – майже нормальна. Оскільки в $FC$-групі кожна скінчена підгрупа майже нормальна, то $H = FD$ – майже нормальна. Отже, кожна підгрупа $G$ буде майже нормальною. Але в цьому випадку $G$ – скінчена над центром за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18).

Нехай тепер $G$ – неперіодична група. Виберемо у центрі $G$ максимальну підгрупу без скруту $Z$. Оскільки $G/\zeta(G)$ є періодичною (теорема 1.1.17), то також і $G/Z$ є періодичною. Припустимо спочатку, що підгрупа $Z$ має нескінчений секційний $p$-ранг. Якщо $L$ – підгрупа, що містить у собі $Z$, то і вона має нескінчений секційний $p$-ранг. Інакше кажучи, $L$ – майже нормальна в $G$. Звідси випливає, що кожна підгрупа $G/Z$ буде майже нормальною. За теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18) $G/Z$ є скінченою над центром. Якщо ж $Z$ має скінчений секційний $p$-ранг, то періодична фактор-група $G/Z$ має нескінчений секційний $p$-ранг. З доведеного вище випливає знову, що $G/Z$ є скінченою над центром. Як і в лемі 3.1.7 можна довести, що і вся група $G$ має центр скінченого індексу.

**3.2.6. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного $p$-рангу майже нормальні. Якщо $G$ містить*

*у собі абелеву підгрупу нескінченого секційного p-рангу, то G – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Нехай $A$ – абелева подгрупа підгрупа нескінченого секційного $p$-рангу групи $G$. За лемою 3.2.4 $A \le FC(G)$. Зокрема, $FC$-центр має нескінчений секційний $p$-ранг. Покладемо $C = \zeta(FC(G))$, тоді з леми 3.2.5 отримаємо, що фактор-група $FC(G)/C$ є скінченою, а отже, $C$ має нескінчений секційний $p$-ранг. Нехай $1 \neq c_1 \in C$, $C_1 = \langle c_1 \rangle^G$. Оскільки $c_1 \in FC(G)$, то підгрупа $C_1$ – скінчено породжена. Вибираємо в $C$ підгрупу $B_1$, максимальну відносно властивості $C_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$. Неважко бачити, що $C/B_1$ – група скінченого спеціального рангу, зокрема, вона має скінчений секційний $p$-ранг. У свою чергу, це означає, що підгрупа $B_1$ має нескінчений секційний $p$-ранг. Тепер залишається майже слово в слово повторити усі аргументи з доведення пропозиції 3.1.8.

**3.2.7. Теорема.** *Нехай G – локально майже розв'язна група, в якій усі підгрупи нескінченного секційного p-рангу майже нормальні. Якщо G містить у собі періодичну підгрупу нескінченного секційного p-рангу, то G – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Нехай $S$ – періодична підгрупа, що має нескінчений секційний $p$-ранг, $T$ – максимальна періодична підгрупа, яка містить у собі $S$. Тоді $T$ також має нескінчений секційний $p$-ранг, а тому вона майже нормальна в $G$. Тоді $T$ – нормальна в $G$ (див., наприклад, [93, §54]). У свою чергу, це означає, що $T$ містить усі елементи скінченого порядку. Оскільки $G$ – локально майже розв'язна, то $T$ буде локально скінченою. За лемою 2.2.6 $T$ містить у собі нескінчену елементарну абелеву $p$-підгрупу $A$. Застосовуючи пропозицію 3.2.6, отримаємо скінченність фактор-групи $G/\zeta(G)$.

**3.2.8. Теорема.** *Нехай G – радикальна група, всі підгрупи якої, що мають нескінчений секційний p-ранг, майже нормальні. Якщо G має нескінчений секційний p-ранг, але всі періодичні підгрупи мають скінчені секційні p-ранги, то $G/O_{p'}(G)$ – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Покладемо $R = O_{p'}(G)$, $P = P(G)$. Не обмежуючи загальності, можна припустити, що $R = \langle 1 \rangle$. Оскільки кожна силовська $p$-підгрупа $P$ має скінчений секційний $p$-ранг, то кожна силовська $p$-підгрупа $P$ є черніковською. Оскільки $G$ – локально розв'язна, то $P$ – черніковська група за теоремою М.І. Каргаполова (теорема 1.1.30). Якщо припустити тепер, що $r_0(G)$ є скінченим, то

$G/P$ має скінчений спеціальний ранг за теоремою 1.1.4 , а тому $G/P$ має скінчений секційний $p$-ранг. Це протиріччя доводить нескінченність $0$-рангу групи $G$. Але тоді $G/P$ має нескінчений $0$-ранг. З пропозиції 2.1.10 отримаємо, що $G/P$ містить у собі абелеву підгрупу $A/P$ вільну від скруту, що має нескінчений $0$-ранг. З теореми 1.1.8 випливає, що $A$ містить у собі абелеву підгрупу $B$ нескінченого $0$-рангу, періодична частина $T$ якої буде черніковською. Як і раніше, звідси випливає існування в $B$ підгрупи без скруту $C$, що має нескінчений $0$-ранг. Зокрема, $C$ має нескінчений секційний $p$-ранг. З пропозиції 3.2.6, отримуємо, що $G$ – скінчена над центром.

**3.2.9. Теорема.** *Нехай $G$ – розв'язна група, всі підгрупи якої, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, майже нормальні. Припустимо також, що кожна скінчено породжена підгрупа $G$ є мінімаксною. Якщо $G$ має нескінченний секційний $p$-ранг, то $G$ – скінченна над центром.*

Дійсно, якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого секційного $p$-рангу, то використовується теорема 3.2.7. Якщо ж усі періодичні підгрупи мають скінчені секційні $p$-ранги, то з теореми 3.2.8 отримаємо, що $G/P(G)$ – абелева група без скруту, а потім використовуються міркування, аналогічні тим, які були застосовані при доведенні теореми 3.1.10.

Аналогічна ситуація і з наступними твердженнями.

**3.2.10. Теорема.** *Нехай $G$ – локально нетерова радикальна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, майже нормальні, то $G$ – скінчена над центром.*

**3.2.11. Наслідок.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, майже нормальні, то $G$ – скінчена над центром.*

**3.2.12. Наслідок.** *Нехай $G$ – $FC$-гіперцентральна група нескінченого секційного $p$-рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний $p$-ранг, майже нормальні, то $G$ – скінчена над центром.*

**3.2.13. Теорема.** *Нехай $G$ – радикальна група нескінченого секційного рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений секційний ранг, майже нормальні, то група $G$ – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого секційного $p$-рангу для деякого простого числа $p$, то за теоремою 3.2.7 $G$ – скінчена над центром група. Припустимо тепер, що всі періодичні підгрупи мають скінчений секційний $p$-ранг для кожного простого числа $p$. З теореми 3.2.8 випливає, що $G/P$ – абелева група без скруту. Оскільки кожна силовська $p$-підгрупа $P$ має скінчений секційний $p$-ранг, то кожна силовська $p$-підгрупа $P$ буде черніковською для кожного простого числа $p$. За теоремою 1.1.31 $G$ містить у собі таку нормальну абелеву ділиму підгрупу $D$, що $G/D$ – резидуально скінчена група зі скінченими силовськими $p$-підгрупами для усіх простих чисел $p$. Оскільки силовські підгрупи $D$ є черніковськими, то $D \leq FC(G)$. Нехай $L/D$ – локально нільпотентний радикал $P/D$. Його силовські підгрупи скінчені, тому $L/D \leq FC(G/D)$. Тепер уже неважко отримати, що $G$ – $FC$-гіперцентральна група, а потім застосувати наслідок 3.2.12.

Наступні два твердження доводяться за допомогою невеликої модифікації тих міркувань, які використовувались для доведення леми 3.2.5, пропозиції 3.2.6

**3.2.14. Лема.** *Нехай $G$ – група, в якій усі підгрупи нескінченого спеціального рангу майже нормальні. Якщо $G$ – $FC$-група нескінченого спеціального рангу, то $G$ – скінчена над центром.*

**3.2.15. Пропозиція.** *Нехай $G$ – група, в якій усі підгрупи нескінченого спеціального рангу майже нормальні. Якщо $G$ містить у собі абелеву підгрупу нескінченого спеціального рангу, то група $G$ – скінчена над центром.*

**3.2.16. Теорема.** *Нехай $G$ – група нескінченого спеціального рангу і припустимо, що $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений спеціальний ранг, майже нормальні, то група $G$ – скінчена над центром.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого спеціального рангу, то $G$ містить у собі періодичну абелеву підгрупу нескінченого спеціального рангу за теоремою 1.1.6. З пропозиції 3.2.15 отримаємо, що $G$ – скінчена над центром. Припустимо тепер, що всі періодичні підгрупи $G$ мають скінчений спеціальний ранг. Тоді фактор-група $G/P$ має нескінчений

спеціальний ранг. Якщо припустити тепер, що $G/P$ має скінчений $0$-ранг, то за теоремою 1.1.4 $G/P$ має скінчений спеціальний ранг. Таким чином, $r_0(G/P)$ буде нескінченим. З пропозиції 2.1.10 випливає, що $G/P$ містить у собі абелеву підгрупу $A/P$ нескінченого $0$-рангу. Але тоді $A/P$ має нескінчений спеціальний ранг. З пропозиції 3.2.15 випливає, що $G/P$ – абелева група без скруту. Оскільки $P$ має скінчений спеціальний ранг, то $P$ – майже розв'язна за теоремою 1.1.6. Позначимо через $L$ локально розв'язний радикал $P$, тоді $L/P$ – скінчена. Звідси випливає скінченність $G/C_G(L/P)$. Підгрупа $C_G(L/P)$ вже буде локально розв'язною. Нехай $F$ – довільна скінчено породжена підгрупа $C_G(L/P)$. Оскільки $F \cap P$ має скінчений спеціальний ранг, а $F/(F \cap P)$ – абелева та скінчено породжена, то $F$ – розв'язна підгрупа скінченого спеціального рангу. Але скінчено породжена розв'язна група скінченого спеціального рангу є мінімаксною за теоремою 1.1.12. Повторюючи майже дослівно міркування з доведення теореми 3.1.10, отримаємо, що $[F, F]$ є скінченою. Точно так, як і в цій теоремі можна довести, що $G$ містить у собі вільну абелеву підгрупу без скруту нескінченого $0$-рангу. З пропозиції 3.2.15 випливає тоді, що $G$ – скінчена над центром.

## 3.3. Групи, в яких усі підгрупи нескінченого тотального рангу майже нормальні

**3.3.1. Теорема.** *Нехай $G$ – локально майже розв'язна група, всі підгрупи якої, що мають нескінчений тотальний ранг, майже нормальні. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого тотального рангу, то $G$ – скінчена над центром група.*

***Доведення.*** Нехай $S$ – періодична підгрупа, що має нескінчений тотальний ранг, $T$ – максимальна періодична підгрупа, яка містить у собі $S$. Тоді $T$ також має нескінчений тотальний ранг, а тому вона майже нормальна в $G$. У цьому випадку $T$ – нормальна в $G$ ( див., наприклад, [93, § 54]), а значить, $T$ містить усі елементи скінченого порядку. Оскільки $G$ – локально майже розв'язна група, то $T$ – локально скінчена. Враховуючи той факт, що $T$ не є черніковською, отримаємо, що вона містить у собі абелеву підгрупу $B$, яка не є

черніковською (теорема 1.1.11). Тоді $B$ – майже нормальна, тобто $N_G(B)$ має скінчений індекс в $G$. Покладемо $H = Core_G(N_G(B))$, тоді обидва індекси $|G : H|$ та $|B : B \cap H|$ будуть скінченими. Скінченність останнього тягне за собою той факт, що $C = B \cap H$ не є черніковською підгрупою, а тому $C$ – майже нормальна, більш того, кожна підгрупа, що містить у собі $C$, також буде майже нормальною. Очевидно, $C$ – нормальна в $H$, так що $H/C$ – скінчена над центром за теоремою 1.1.18. Нехай $\{ C^x \mid x \in G \} = \{ x_1^{-1}Cx_1, \ldots, x_m^{-1}Cx_m \}$. Для будь-якого $x \in G$ маємо $H/C^x \cong H^x/C^x \cong H/C$ – скінчена над центром, а тому з вкладання $H/Core_G(C) \rightarrow H/x_1^{-1}Cx_1 \times \ldots \times H/x_m^{-1}Cx_m$, яке випливає з теореми Ремака, отримаємо, що $H/Core_G(C)$ – скінчена над центром. Скінченність індексу $|G : H|$ разом з комутативністю підгрупи $C$ доводять тепер, що $G$ – майже розв'язна група. Якщо $G$ має нескінчений спеціальний ранг, то з теореми 3.2.16 отримаємо, що $G$ буде скінченою над центром.

Припустимо тепер, що $G$ має скінчений спеціальний ранг. З цього випливає, зокрема, що усі силовські підгрупи $T$ будуть черніковськими. У свою чергу це тягне за собою нескінченість множини $\Pi(C)$. Підгрупа $E = \langle x_1^{-1}Cx_1, \ldots, x_m^{-1}Cx_m \rangle$ нормальна в $G$. З іншого боку, вона буде періодичною нільпотентною підгрупою за теоремою Фіттінга (див., наприклад, [94, теорема 2.18]). Отже, $E = \times_{p \in \Pi(E)} B_p$, де $B_p$ – силовська $p$-підгрупа $E$ і множина $\Pi(E)$ – нескінчена. Нехай $x \in G$, тоді можна вибрати таку нескінчену підмножину $\pi \subseteq \Pi(E)$, що $\langle x \rangle \cap \times_{p \in \pi} E_p = \langle 1 \rangle$. Знайдуться дві нескінчені підмножини $\rho$, $\sigma$ з наступними властивостями: $\rho \cup \sigma = \pi$, $\rho \cap \sigma = \varnothing$. Тоді обидві підгрупи $\langle x \rangle (\times_{p \in \rho} E_p)$ та $\langle x \rangle (\times_{p \in \sigma} E_p)$ мають нескінчений тотальний ранг, а тому будуть майже нормальними. Тоді і їх перетин $\langle x \rangle (\times_{p \in \rho} B_p) \cap \langle x \rangle (\times_{p \in \sigma} B_p) = \langle x \rangle$ є майже нормальною підгрупою. Зокрема, $x \in FC(G)$, так що $G = FC(G)$.

Нехай $R$ – довільна підгрупа $G$. Якщо перетин $R \cap L$ є нескінченим, то $R \cap E$ – підгрупа нескінченого тотального рангу, а тому вона майже нормальна. Припустимо тепер, що $R \cap E$ – скінчена. Вибираємо таку нескінчену підмножину $\Xi \subseteq \Pi(E)$, що $R \cap \times_{p \in \Xi} E_P = \langle 1 \rangle$. Знайдуться дві нескінчені підмножини $\Delta$, $\varsigma$ з наступними властивостями: $\Delta \cup \varsigma = \Xi$, $\Delta \cap \varsigma = \varnothing$. Тоді обидві

підгрупи $R\,(\times_{p\in\Delta} E_p)$ та $R\,(\times_{p\in\varsigma} E_p)$ мають нескінчений тотальний ранг і отже будуть майже нормальними. Тому і їх перетин $R(\times_{p\in\Delta} B_p) \cap R(\times_{p\in\varsigma} B_p) = R$ – майже нормальна підгрупа. Отже, кожна підгрупа $G$ є майже нормальною. За теоремою Б. Неймана (теоремою 1.1.18) $G$ – скінчена над центром.

**3.3.2. Теорема.** *Нехай $G$ – група нескінченого тотального рангу, всі підгрупи якої, що мають нескінчений тотальний ранг, майже нормальні. Якщо $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінчені, то $G$ – скінчена над центром група.*

***Доведення.*** Покладемо $P = P(G)$. Якщо $G$ містить у собі періодичну підгрупу нескінченого тотального рангу, то комутант $G$ буде скінченим за теоремою 3.3.1. Тому потрібно розглянути випадок, коли $P$ має скінчений тотальний ранг. У цьому випадку $P$ – черніковська підгрупа. У свою чергу, звідси випливає, що $r_0(G/P)$ є нескінченим. Кожна підгрупа $G/P$, яка має нескінчений $0$-ранг, має також нескінчений тотальний ранг, так що вона майже нормальна. З теореми 3.1.9 отримуємо, що $G/P$ – абелева група вільна від скруту. Таким чином, $G$ – $FC$-гіперцентральна група, і залишається скористатися наслідком 3.1.13.

## 3.4. Групи, в яких усі підгрупи нескінченного мінімаксного рангу майже нормальні

Ми продовжуємо послідовно переходити від більш широких обмежень на систему підгруп, що не є майже нормальними, до більш вузьких. При цьому, природно, кількість виникаючих тут типів груп зростає. Як і для наближено нормальних підгруп, наступним на черзі будуть обмеження, пов'язані з мінімаксним рангом. Застосовуючи результати попередніх розділів, можна звести загальну ситуацію розгляду груп з майже нормальними підгрупами нескінченого мінімаксного рангу до розгляду їх в класі майже розв'язних $\boldsymbol{A_3}$-груп, як про це свідчить наступний результат.

**3.4.1. Пропозиція.** *Нехай група $G$ має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або*

*локально скінчені. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінчений мінімаксний ранг, майже нормальні, то або G – скінчена над центром група, або G – майже розв'язна* $\boldsymbol{A_3}$*-група.*

***Доведення.*** Припустимо спочатку, що $G$ має нескінчений тотальний ранг. Оскільки кожна мінімаксна підгрупа має скінчений тотальний ранг, то з теореми 3.3.2 випливає, що $G$ має центр скінченого індексу. Нехай тепер $G$ має скінчений тотальний ранг. Неважко упевнитись у тому, що в цьому випадку $G$ має скінчений ряд нормальних підгруп $\langle 1\rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$, фактори якого – локально скінчені групи або локально нільпотентні групи без скруту. Якщо $H_{j+1}/H_j$ – локально нільпотентна група без скруту, то вона буде нільпотентною групою скінченого *0*-рангу (теорема *1.1.5*). Якщо ж $H_{j+1}/H_j$ – локально скінчена група, то її абелеві підгрупи будуть черніковськими, а тому $H_{j+1}/H_j$ – черніковська група (теорема 1.1.11). Таким чином, $G$ – майже розв'язна $\boldsymbol{A_3}$-група.

У роботі Д. Кутоло та Л.А. Курдаченка [18] були розглянуті групи зі слабкими умовами мінімальності та максимальності для підгруп, які не є майже нормальними. У цій же роботі було доведено, що класи таких груп при деяких природних додаткових обмеженнях співпадають з класом груп, у яких усі підгрупи, що не є мінімаксними, майже нормальні. Таким чином, застосовуючи результати статті [18], можна отримати наступний опис майже розв'язних $\boldsymbol{A_3}$-груп, всі підгрупи яких, що мають нескінчений мінімаксний ранг, майже нормальні. Слід відмітити, що в результаті отримано той клас груп, який уже зустрічався в теоремі 2.6.15.

***3.4.2.*** **Теорема.** *Нехай G – майже розв'язна* $\boldsymbol{A_3}$*-група, і припустимо, що вона не мінімаксна і має центр нескінченого індексу. В групі G всі підгрупи, що мають нескінчений мінімаксний ранг, є майже нормальними тоді і тільки тоді, коли G задовольняє наступні умови:*

*(1) G містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу F, що* $G/F = D/F \times E/F$*, де D/F – ділима черниковська підгрупа, а підгрупа E/F вільна від скруту та нільпотентна;*

*(2)* $Z/F = \zeta(E/F)$ *не є мінімаксною, а фактор-група* $(E/F)/(Z/F)$ *є скінчено породженою;*

*(3)* $[E/F, E/F] \le \boldsymbol{PM}_{\boldsymbol{mmx}}(Z/F)$*, зокрема, Z/F містить у собі сервантну мінімаксну підгрупу M/F, для якої* $r_0(Z/M) = 1$.

Мінімаксні майже розв'язні групи, як видно з їх означення, виникають з двох важливих класів груп: черніковських груп та майже поліциклічних груп. Тому природно виникає питання про будову груп, у яких усі підгрупи, що не є черніковськими, майже нормальні; та груп, у яких всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, майже нормальні. В статті Л.А. Курдаченка і В.В. Пилаєва [17] були розглянуті групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є майже нормальними. Очевидно, що майже розв'язні групи, всі підгрупи яких, що не є черніковськими, задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є майже нормальними. Застосовуючи основний результат статті Л.А. Курдаченка і В.В. Пилаєва [17], отримаємо наступну теорему.

**3.4.3. Теорема.** *Нехай G – нечерніковська локально майже розв'язна группа, в якій усі підгрупи, що не є черніковськими, майже нормальні. Тоді G – група одного з наступних типів:*

*(1) G – скінчена над центром;*

*(2)* $G = A \leftthreetimes \langle g \rangle$ *, де* $/g/ = p$ *– просте число,* $A = C_G(A)$ *– вільна абелева група,* $r_0(A) = p - 1$*, g індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;*

*(3)* $G = D \times (A \leftthreetimes \langle g \rangle)$*, де D – ділима черниковська підгрупа,* $A \leftthreetimes \langle g \rangle$ *– група типу (2);*

*(4) G містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу F, що G/F – група типу (2);*

*(5) G містить у собі таку скінчену нормальну підгрупу F, що G/F – група типу (3).*

Групи, всі підгрупи яких, що не є майже поліциклічними, майже нормальні, ще не вивчались. Тому їх розгляд стає нашою наступною метою.

**3.4.4. Пропозиція.** *Нехай група G має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченими факторами. Якщо всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, майже нормальні, то або група G – скінчена над центром, або G – майже розв'язна* $\boldsymbol{A_3}$*-група.*

Дійсно, кожна підгрупа, що не є мінімаксною, не буде і майже поліциклічною, тому вона наближено нормальна і можна використати пропозицію 3.4.1.

**3.4.5. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не є майже поліциклічними. Якщо $H$ – така нормальна підгрупа, що кожна підгрупа, яка містить у собі $H$, не є майже поліциклічною, то $G/H$ – скінчена над центром.*

Дійсно, тоді кожна підгрупа $H$ є майже нормальною, тобто кожна підгрупа $G/H$ є майже нормальною. Але в цьому разі $G/H$ має центр скінченого індексу за теоремою Б. Неймана (теорема 1.1.18).

Наступна лема є очевидною.

**3.4.6. Лема.** *Нехай $G$ – група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не є майже поліциклічними. Тоді кожна підгрупа $G$, що не має скінченої системи породжуючих, майже нормальна в $G$.*

Групи, у яких кожна підгрупа, що не має скінченої системи породжуючих, буде майже нормальною (анти $FC$-групи ), вивчалися в статті С. Франциозі, Ф. де Жиованні и Л.А. Курдаченка [23]. Наступні два результати також очевидні.

**3.4.7. Лема.** *Нехай $G$ – локально скінчена група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не мають скінченої системи породжуючих. Тоді кожна підгрупа $G$, яка не є майже поліциклічною, буде майже нормальною в $G$.*

**3.4.8. Лема.** *Нехай $G$ – локально нільпотентна група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не мають скінченої системи породжуючих. Тоді кожна підгрупа $G$, яка не є майже поліциклічною, буде майже нормальною в $G$.*

Таким чином, дві попередні леми показують, що опис локально скінчених та локально нільпотентних груп, у яких майже нормальні всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, міститься в роботі [23].

**3.4.9. Лема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група, у якій майже нормальні всі підгрупи, що не мають скінченої системи породжуючих. Якщо підгрупа $P(G)$ – нескінчена, то кожна підгрупа $G$, яка не є майже поліциклічною, буде майже нормальною в $G$.*

Дійсно, підгрупа $P(G)$ є нескінченою і черніковською, так що її ділима частина $D$ буде неодиничною. Очевидно, $D \le FC(G)$. Оскільки $D$ не має скінченої системи породжуючих елементів, то $G/D$ – скінчена над центром. Інакше кажучи, $G$ буде $FC$-нільпотентною групою. Але тоді кожна її скінчено породжена підгрупа майже нільпотентна за лемою 2.3.11, зокрема, вона майже поліциклічна.

Отже і для цього випадку опис також міститься у роботі [23].

Тепер залишається розглянути випадок, коли підгрупа $P(G)$ буде скінченою. Використовуючи лему 3.4.5 та теорему 3.17 статті [23], можна довести наступне твердження.

**3.4.10. Теорема.** *Нехай $G$ – майже розв'язна $A_3$-група зі скінченою підгрупою $P(G)$. В групі $G$ всі підгрупи, що не є майже поліциклічними, тоді і тільки тоді майже нормальні в $G$, коли $G$ задовольняє наступні умови:*

*(1) $G$ містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу без скруту $A$ скінченого 0-рангу, що $G/A$ – скінчена над центром та скінчено породжена;*

*(2) $A$ містить у собі таку скінчено породжену підгрупу $B$, що $A/B$ – квазіциклічна $p$-група для деякого простого числа $p$;*

*(3) якщо $L$ – підгрупа $A$, що не має скінченої системи породжуючих елементів, то $r_0(L) = r_0(A)$.*

# ЛІТЕРАТУРА


1. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind //* Math. Annalen.–1897.–**48.–** S**.** 548 – 561.
2. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //*S.-B. Heidelberg Akad.–1933.– **2.–** S. 12 – 17.
3. **Heineken H. and Mohamed I.J.** *Groups with normalizer condition //* Math. Annalen. – 1972.–**198,** №3.– P. 178 – 187.
4. **Heineken H. and Mohamed I.J.** *Non-nilpotent groups with normalizer condition //* Lecture Notes Math. – 1974.– **372**.– P. 357 – 360.
5. **Hartley B.** *A note on the normalizer condition //* Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973.– **74**, №1.– P. 11 – 15.
6. **Hartley B.** *О нормализаторном условии и мини–транзитивных группах подстановок //* Алгебра и логика.– 1974.– **13,** № 5.– С. 589 – 602.
7. **Menegazzo F.** *Groups of Heineken-Mohamed //*J. Algebra. – 1995.–**171.–**P. 807 – 825.
8. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate subgroups //* Math. Z.– 1955.–**63**, № 1.– P. 76 – 96.
9. **Черников С.Н.** *О строении групп с конечными классами сопряженных элементов //* Докл. АН СССР.–1957.–**115**, №1.–С.60 – 63.
10. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп* // Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.
11. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных бесконечных подгрупп //* Уч. зап. Пермского ун-та.–1960.– **17**, № 2.– С. 13 – 14.
12. **Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А.** *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами //* Изв. вузов. Математика.– 1983**.– №** 10.– С. 57 – 63.
13. **Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э.** *Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп //* Укр. мат. журн.– 1983.– **35**, № 1.– С. 42 – 46
14. **Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Групи з щільною системою нескінченних підгруп //* Доп. АН УРСР. Серія А. – 1985.– № 3. – С. 7 – 9.
15. **Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп //* Укр. мат. журн.– 1991.– **43**, № 7-8.– С. 969 – 974.
16. **Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Групи з деякими умовами максимальності //* Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987.– № 1. –С. 9 – 11.
17. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** *Группы, богатые почти нормальными подгруппами //* Укр. мат. журн.– 1988.– **40**, № 3.– С. 326 – 330.
18. **Cutolo G. and Kurdachenko L.A.** *Weak chain conditions for non-almost normal subgroups //* Groups 93 Galway/St.Andrews, Galway 1993, vol. 1, London Math. Soc., Lecture Notes Ser.–1995.–**211.–** P**.** 120 – 130.

19. **Franciosi S., de Giovanno F. and Kurdachenko L.A.** *On groups with many almost normal subgroups //* Ann. Mat. Pura Appl. – 1995.– **169,** № 4.– P. 35 – 65.
20. **Casolo C.** *Groups with finite classes of subnormal subgroups //*Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.–1989.– **81**.– P. 107 – 149.
21. **Casolo C.** *Subgroups of finite index in generalized T-groups //*Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.–1989.– **81**.– P. 265 – 277.
22. **Casolo C., Franciosi S., de Giovanni F.** *Groups with finitely many infinite conjugacy classes of subnormal subgroups //* Ricerche Mat. – 1994.– **43**, № 2.– P. 309 – 321.
23. **Franciosi S., de Giovanno F. and Kurdachenko L.A.** *Groups with finite conjugacy classes of non-subnormal subgroups //*Archiv der Mathematik.– 1998.– **70**.– P. 169 – 181.
24. **Kurdachenko L.A., Rinauro S.** *Intersection and join of almost normal subgroups //* Communications in Algebra.– 1995.– **23** , № 5.– P. 1967 – 1974.
25. **Galoppo A.** *Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups //* Ricerche Mat.–2000.– **49,** №2.–P. 213 – 220.
26. **Franciosi S., de Giovanni F.** *Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups //* "Groups – Korea 94".– 1995.–Berlin: Walter de Gruyter.– P. 107 – 118.
27. **Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.** *Groups with restrictions on non-subnormal subgroups //* Ricerche di Matematica.– 1997.– **46**, № 2.– P. 307 – 320.
28. **Musella C.** *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups //* Note di Matematica.– 2000/2001.– **20,** № 1.– P. 43 – 52.
29. **Franciosi S., de Giovanno F. and Newell M.L.** *Groups with polycyclic non-normal subgroups //* Algebra Colloquium .–2000.– **7,** №. 1.– P. 33 – 42.
30. **Kurdachenko L.A., Soules P.** *Groups with all non-subnormal subgroups of finite rank //*Groups St Andrews 2001 in Oxford, London Math. Soc. Lecture Note Series.– Cambridge University Press.–2003.–**305**.– P. 366 – 376.
31. **Kurdachenko L.A., Smith H.** *Groups in which all subgroups of infinite rank are subnormal //*Glasgow Journal of Mathematics. – 2004.– **46**.–P. 83 –90.
32. **Miller G.A., Moreno H. C.** *Non-abelian groups in which every subgroup is abelian* // Trans. Amer. Math. Soc.–1903.–**4**.–P. 389 – 404.
33. **Шмидт О.Ю.** *Группы, все подгруппы которых специальные* // Мат. сб. – 1924. – **31,** №3. – С. 366 –372.
34. **Шмидт О.Ю.** *Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп* // Мат. сб. – 1926. – **33**.– С. 161 – 172.
35. **Шмидт О.Ю.** *Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп* // Труды семинара по теории групп. – М.– Л.: Наука. – 1938. – С. 7 – 26.
36. **Черников С.Н.** *Бесконечные группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп //* Докл. АН СССР.–1964.– **159,** №4.– С. 759 –760.

37. **Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп* // Укр. мат. журн.–1967.– **19**, № 6.– С. 111 – 131.
38. **Шунков В.П.** *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп* // Алгебра и логика.–1970.– **9**, № 5.– С. 579 – 615.
39. **Ольшанский А.Ю.** *Геометрия определяющих соотношений в группах*. – М.: Наука, 1989. – 447 с.
40. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием минималь-ности для неинвариантных абелевых подгрупп* //Группы с ограни-чениями для подгрупп.– Киев: Наукова думка, 1971.– С. 106 – 115.
41. **Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*. – М.: Наука, 1980.–384 с.
42. **Черников С.Н.** *Исследование групп с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн.–1969.– **21** , № 2.–С. 193 – 209.
43. **Зайцев Д.И., Каргаполов М.И., Чарин В.С.** *Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн.– 1972.– **24**, № 5.– 619 – 633.
44. **Чарин В.С., Зайцев Д.И.** *О группах с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп* // Укр. мат. журн.–1988.– **40**, № 3.–С. 277 –287.
45. **Cutolo G.** *On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups* // Rivista Mat. pura ed applicata.–1991.– **9**.–P. 49 – 59.
46. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** *О группах, двойственных дедекиндовым* //Докл. АН УССР. Сер. А.– 1989.– № 10.– С. 21 – 22.
47. **Cutolo G., Kurdachenko L.A.** *Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups* // Geometriae Dedicata.–1995.–**55**.–P. 279 – 292.
48. **Baer R**. *Polyminimaxgruppen* // Math. Annalen.– 1968.– **175,** № 1.– S. 1 – 43.
49. **Зайцев Д.И.** *Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности* // Укр. мат. журн.–1968.– **20**, № 4.–С. 472 – 482.
50. **Казарин Л.С., Курдаченко Л.А.** *Условия конечности и факторизации в бесконечных группах* // Успехи мат. наук. –1992. –**47**, № 3.– С. 81 – 126.
51. **Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э.** *О группах со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными* // Укр. мат. журн.–1989.– **41**, № 2.– С. 1705 – 1709.
52. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** *О метагамильтоновых группах I* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – **5**, № 3. – С. 45 – 49.
53. **Нагребецкий В.Т.** *Конечные нильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – **6**, № 1. – С. 80 – 88.
54. **Махнев А.А.** *О конечных метагамильтоновых группах* // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – **10**, № 1. – С. 60 – 75.
55. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение разрешимых нильпотентных метагамильтоновых групп* // Мат. заметки. –1983.–**34**, № 2.–С.179 – 188.
56. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of soluble non-nilpotent metahamiltonian groups*. Math. Notes. –1983.– **34**, № 2, P. 179-188.

57. **Кузенний М.Ф., Семко М.М.** *Будова розв'язних метагамільтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.
58. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of soluble metahamiltonian groups* // Reports of Acad. Science of USSR, ser. A.–1985.– № 2.– P. 6 – 9.
59. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О строении непериодических метагамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика.– 1986. – № 11.–С. 32 – 40.
60. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.***On structure of non-periodic metahamiltonian groups* // Izv. VUZ Mathematics. –1986.– № 11.– P. 32-40.
61. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180 – 185.
62. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Structure of non-periodic metabelian metahamiltonian groups with the non-elementary derived subgroup* // Ukrainian Math. J. – 1987.– **39**, no. 2.– P. 180-185.
63. **Semko M.M., Kuzennyi N.F.** *Structure of periodic metabelian metahamiltonian groups with an elementary derived subgroups of rank* 2 // Ukrainian Math. J. – 1987.– **39**, no. 6.– P. 743-750.
64. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170 – 176.
65. **Semko N.N., Kuzennyi N.F.** *The structure of metacyclic meta-Hamiltonian groups* //Modem Analysis and its Applications.– Kiev: Institute of Mathematics, 1989.– P. 173 – 183.
66. **Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 168 – 175.
67. **Kuzennyi N.F., Semko M.M.** *Meta-Hamiltonian groups with elementary commutant of rank* 2 // Ukrainian Math. J. – – 1990.– **42**, no. 2.– P. 168-175.
68. **Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф**. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743 – 750.
69. **Roseblade J.E.** *On groups in which every subgroup is subnormal* // J. Algebra.– 1965.– **2** .– P. 402 – 412.
70. **LS. Lennox J.C., Stonehewer S.E.** *Subnormal subgroups of groups*. CLARENDON PRESS: Oxford - 1987.
71. **Möhres W.** *Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind* //Archiv Math.–1990.–**54**.– S. 232 – 235.
72. **Smith H.** *Residually finite groups with all subgroups subnormal* // Bull. London Math. Soc.–1999.– **31**.– P. 679 – 680.
73. **Smith H.** *Nilpotent-by-(finite exponent) groups with all subgroups subnormal* // Journal Group Theory.–2000.– **3**.– P. 47 – 56.
74. **Smith H.** *Residually nilpotent groups with all subgroups subnormal* // J. Algebra.–2001.– **244**.– P. 845 – 850.

75. **Smith H.** *Torsion-free groups with all subgroups subnormal //* Archiv Math.– 2001.– **76,** №1.– P. 1 – 6.
*76.* **Kurdachenko L.A., Smith H.** *The nilpotence of some groups with all subgroups subnormal //* Publicaciones Mat.–1998.– **42.–**P. 411 – 421.
*77.* **Franciosi S., de Giovanni F.** *Groups satisfying the minimal condition on non-subnormal subgroups //*"Infinite groups 1994". **–** Berlin: Walter de Gruyter.– 1996.– P. 63 – 72.
*78.* **Kurdachenko L.A., Smith H.** *Groups with the maximal condition on non-subnormal subgroups //*Bolletino Unione Mat.Ital.–1996.–**10-B.–**P.441 – 460.
79. **Heineken H., Kurdachenko L.A.** *Groups with subnormality for all sub-groups that are not finitely generated //*Annali Mat.–1995.–**169**.–P.203 – 232.
*80.* **Kurdachenko L.A., Smith H.** *Groups with the weak minimal condition for non-subnormal subgroups //* Annali Mat.–1997.– **173.–** P. 299 – 312.
*81.* **Kurdachenko L.A., Smith H.** *Groups with the weak maximal condition for non-subnormal subgroups //* Ricerche Mat.–1998.– **47.–** P. 29 – 49.
82. **Robinson D.J.S.** *A course in the theory of groups.*–New York: Springer, 1982.– 481 p.
83. **Фукс Л.** *Бесконечные абелевы группы: в 2 т.*–М.: Мир,1974.–Т.1.–336 с.
84. **Мальцев А.И.** *О некоторых классах бесконечных разрешимых групп //* Мат. сб.–1951.– **28**, № 3 .– С. 567 – 588.
85. **Robinson D.J.S.** *Infinite soluble and nilpotent groups.*– London: Queen Mary College Mathematics Notes, 1968.–210 p.
86. **Мальцев А.И.** *О группах конечного ранга //* Мат. сб.–1948.–**22**, № 2.– С. 351 – 352.
87. **Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.** *The schur property and groups with uniform conjugace classes //* J. Algebra. – 1995.–**174.–** P. 823 – 847.
88. **Шунков В.П.** *О локально конечных группах конечного ранга //* Алгебра и логика.– 1971.– **10**, № 2.– С. 199 – 225.
89. **Robinson D.J.S.** *Soluble products of nilpotent groups //* J. Algebra.–1986.– **98**.– P. 183 –196.
90. **Чарин В.С.** *О разрешимых группах типа* $A_3$ // Мат. сб. –1961.–**54**, № .– С. 489 – 499.
91. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** *Основы теории групп.* – М.: Наука, 1982.–288 с.
92. **Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F.** *Locally finite groups.*– Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.–210 p.
93. **Курош А.Г.** *Теория групп.* – М.: Наука, 1967.– 648 с.
94. **Robinson D.J.S.** *Finiteness conditions and generalized soluble groups, Part 1.*– Berlin: Springer, 1972.– 210 p.
95. **Robinson D.J.S.** *Finiteness conditions and generalized soluble groups, Part 2.*– Berlin: Springer, 1972.– 254 p.
96. **Segal D.** *Polycyclic groups*.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.–289 p.

97. **Brewster D.C. and Lennox J.C.** *Subnormality and quasinormality in soluble minimax groups* // Journal Algebra. – 1977.–**48,** № 2.–P. 368 – 381.
98. **FdeG 3. Franciosi S. and de Giovanni F.** *On maximal subgroups of minimax groups*. Atti. Accad. Naz. Lincei. Mat. Applic. - 1995, ser **8,9**,no 1,
99. **De Giovanni F.** *Soluble groups with many Min-by-Max quotients* // Bolletino Mat. Unione Italiana. – 1991.–**5B,** № 2.– P. 449 – 462.
100. **Karbe M.** *Unendliche Gruppen mit schwachen Kettenbedingungen für endlich erzeugte Untergruppen* //Archiv Math. –1985.–**45,** № 2.–S.97 – 110.
101. **Karbe M.** *Groups satisfying the weak chain condition for normal subgroups* // Rocky Mountain J. Math. – 1987.–**17,** № 1.–P. 41 – 47.
102. **Karbe M. and Kurdachenko L.A.** *Just infinite modules over locally soluble groups* //Archiv Math. – 1988.–**51,** № 5.–P. 401 – 411.
103. **Kazarin L.S., Kurdachenko L.A. and Subbotin I.Ya.** *On groups saturated with abelian subgroups* //International Journal Algebra and Computation. – 1998.–**8,** № 4.–P. 443 – 466.
104. **Kropholler P.H.** *On finitely generated soluble groups with no large wreath product section* // Proc. London Math. Soc. – 1984.–**49,** №1.– P. 155 – 169.
105. **Курдаченко Л.А.** *Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Сиб. мат. журн.–1979.– **20**, № 5.– С. 1068 – 1075.
106. **Курдаченко Л.А.** *Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальных подгрупп* // Мат. заметки.–1981.– **29**, № 1.– С. 19 – 30.
107. **Курдаченко Л.А.** *Локально нильпотентные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для нормальных подгрупп* // Сиб. мат. журн.–1984.– **25**, № 4.– С. 589 – 594.
108. **Курдаченко Л.А.** *Локально нильпотентные группы со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Докл. АН УССР. Сер. А.–1985.–№ 8.– С. 9 – 12.
109. **Курдаченко Л.А.** *Локально нильпотентные группы с условием Min-∞-n* //Укр. мат. журн.–1990.– **42,** № 3.– С. 303 – 307.
110. **Курдаченко Л.А.** *О некоторых классах групп со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Укр. мат. журн.– 1990.– **42**, № 8.– С. 1050 – 1056.
111. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** *О группах с минимаксными фактор-группами* // Укр. мат. журн.– 1990.– **42**, № 5.– С. 550 – 553.
112. **Курдаченко Л.А., Пылаев В.В., Горецкий В.Э.** *О группах с некоторыми системами минимаксных фактор-групп* // Докл. АН УССР. Сер. А.–1988.–№ 3.– С. 17 – 20.
113. **Kurdachenko L.A., Tushev A.V. and Zaitsev D.I.** *Noetherian modules over nilpotent groups of finite rank* // Archiv Math.–1991.–**56**.– P. 433 – 436.
114. **McCaughan D.J.** *Subnormality in soluble minimax groups* //Journal Austral. Math. Soc.(series A). – 1974.–**17,** № 1.– P. 113 - 128.

115. **McDougall D.** *Soluble minimax groups with the subnormal intersection property //* Math. Z. –1970.– **114**.– P. 241 – 244.
116. **Newell M.L.** *On soluble Min-by-Max groups //* Math. Annalen. – 1970.–**186,** №4.– P. 282 – 286.
117. **Newell M.L.** *A subgroup characterization of soluble Min-by-Max groups //* Archiv Math. – 1970.– **21,** №1.– P.128 – 131.
118. **Robinson D.J.S.** *On soluble minimax groups //* Math. Z.–1967.–**101.–**P. 13 – 40.
119. **Robinson D.J.S.** *A theorem on finitely generated hyperabelian groups //* Invent. Math. –1970.–**10,** №1.– P. 38 – 43.
120. **Robinson D.J.S.** *A new treatment of soluble groups with finiteness conditions on their abelian subgroups //* Bull. London Math. Soc.–1976.– **8.–** P. 113 – 129.
121. **Wilson J.S.** *Soluble products of minimax groups and nearly surjective derivations //* Journal pure applied Algebra. – 1988.– **53,** №8.– P. 297 – 318.
122. **Wilson J.S.** *Soluble groups which are products of minimax groups //* Archiv Math.–1988.– **50,** №1.– P. 19 – 21.
123. **Зайцев Д.И.** *О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности //* Мат. сб.–1969.–7**8**, № 3 .– С. 323 – 331.
124. **Зайцев Д.И.** *К теории минимаксных групп //* Укр. мат. журн.–1971.– **23**, № 5.– С. 652 – 660.
125. **Зайцев Д.И.** *Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп //* Укр. мат. журн.–1971.– **23**, № 5.– С. 661 – 665.
126. **Зайцев Д.И.** *О разрешимых группах конечного ранга //* Группы с ограничениями для подгрупп.–Киев: Наукова думка, 1971.– С. 115 – 130.
127. **Зайцев Д.И.** *О индексе минимальности группы //* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974.– С. 72 – 130.
128. **Зайцев Д.И., Курдаченко Л.А., Тушев А.В.** *Модули над нильпотентными группами конечного ранга //*Алгебра и логика.–1985.– **24**, № 6.– С. 412 – 436.
129. **Schur I.** *Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution //* J. reine andew. Math. – 1904.– **127**.– S. 20 – 50.
130. **Baer R**. *Finiteness properties of groups //* Duke Math. J.–1948.– **15**.– P. 1021 – 1032.
131. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate elements //* Proc. London Math. Soc. –1951.–**1,** №3.– P. 178 – 187.
132. **Neumann B.H.** *Groups covered by permutable subsets //* J. London Math. Soc.–1954.– **29,** № 114.– P. 236 – 248.
133. **Чарин В.С.** *О группах автоморфизмов нильпотентных групп //* Укр. мат. журн.–1954.– **6**, № 3.– С. 295 – 304.
134. **Плоткин Б.И.** *Радикальные группы //* Мат. сб. – 1955.– **37,** № .–С. 507 – 526.

135. **Смирнов Д.М.** *О группах автоморфизмов разрешимых групп* // Мат. сб. – 1953.– **32**, № 2.– С. 365 – 384.
136. **Hall P.** *Finiteness conditions for soluble groups* // Proc. London Math. Soc. – 1954.– **4**.– P. 419 – 436.
137. **Kaloujnine L.A.** *Über gewisse Beziehungen zwischen eine Gruppe und ihren Automorphismen* // Bericht Math. Tagung Berlin. – 1953.– P. 164 – 172.
138. **Каргаполов М.И.** *Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами* // Сиб. мат. журн.–1961.– **2,** №6.– С. 853 – 873.
139. **Кучменко С.**Н. *Группы с широким множеством обобщенно нормальных подгрупп* //Вісник Дніпропетровського університету. Математика.–2003.– Вип. 8.– **44,** №53**.–** С**.**
140. **Кучменко С.**Н. *Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга* //Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.– 2004.–Вип. № 1.– С. 21 **–** 33.
141. **Semko M.M., Kuchmenko S.M.** *Groups, in which almost all subgroups are near to normal* // J. "Algebra and Discrete mathematics".–2004.–№2.–C. 92 – 113.
142. **Семко М.М., Кучменко С.М.** *Групи з великими системами майже нормальних підгруп* //Доп. НАН України.–2004.–№10.**–** С. 33 – 38.
143. **Кучменко С.Н.** *Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга* //Доп. НАН України.–2004.–№12.**–** С. 22 – 28.
144. **Семко Н.Н., Кучменко С.Н.** *Группы, у которых почти все подгруппы близки к нормальным* // Укр. мат. журн.– 2005.– 5 , № 2.– С.
145. **Семко М.М., Кучменко С.М.** *Про групи з майже нормальними підгрупами нескінченного рангу* //Матеріали десятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13 – 15 трав. 2004).– К.: ТОВ «Задруга».– 2004.– С. 511.
146. **Кучменко С.Н.** *О группах с неминимаксными приближенно нормальными подгруппами* //Матеріали десятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13 – 15 трав. 2004).– К.: ТОВ «Задруга».– 2004.– С. 427.
147. **Semko M.M., Kuchmenko S.M.** *The groups with almost normal subgroups of infinite rank* //Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета. Тезисы докладов.–Изд-во механико-математического факультета МГУ.– 2004.– С. 270 – 272.

# ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$H^G$ – нормальне замкнення підгрупи $H^G$ у групі $G$, тобто нормальна підгрупа, породжена всіма спряженими з $H$ підгрупами у групі $G$.

$\zeta(G)$ – центр групи $G$.

$\zeta_\alpha(G)$ – член верхнього центрального ряду групи $G$, що має порядковий номер $\alpha$.

$\gamma_\alpha(G)$ – член нижнього центрального ряду групи $G$, що має порядковий номер $\alpha$.

$[G, G]$ – комутант групи $G$.

$Aut(G)$ – група автоморфізмів групи $G$.

$C_H(M) = \{ x \in H \mid xa = ax$ для будь-якого елемента $a \in M \}$ – централізатор підмножини $M$ у підгрупі $H$.

Якщо $H$ – нормальна підгрупа групи $G$, $L$ – підгрупа, що містить $H$, то через $C_G(L/H)$ позначимо повний прообраз в $G$ підгрупи $C_{G/H}(L/H)$.

Для довільного елемента $g \in G$ позначимо через $g^G$ клас всіх елементів, які спряжені з $g$, тобто $g^G = \{x^{-1} g\, x \mid x \in G\}$.

$FC(G) = \{ g \in G \mid$ клас $g^G$ – скінчений$\}$.

Очевидно, $FC(G)$ – характеристична підгрупа групи $G$, її називають $FC$-центром групи $G$. Якщо $G = FC(G)$, то $G$ називають $FC$-групою.

Стартуючи від $FC$-центра, можна збудувати верхній $FC$-центральний ряд групи $G$ $\quad <1> = C_0 \le C_1 \le \ldots C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots C_\gamma$ за наступним правилом: $C_1 = FC(G)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = FC(G/C_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, та $FC(G/C_\gamma) = <1>$. Останній член $C_\gamma$ цього ряду називається верхнім $FC$-гіперцентром. Якщо він співпадає з усією групою $G$, то $G$ називається $FC$-гіперцентральною, а якщо при цьому $\gamma$ ще є скінченим, то $G$ називається $FC$-нільпотентною.

Група $G$ називається черніковською групою, коли вона містить у собі нормальну підгрупу скінченого індексу $H$, що розкладається у прямий добуток скінченої множини квазіциклічних груп.

Будемо говорити, що група $G$ задовольняє умову максимальності (відповідно мінімальності), якщо $G$ не має нескінченних зростаючих (відповідно спадаючих) ланцюжків підгруп.

Будемо говорити, що $G$ – нетерова група, якщо вона задовольняє умову максимальності для всіх підгруп. Група $G$ називається локально нетеровою, якщо кожна її скінчено породжена підгрупа є нетеровою.

Нехай $A$ – абелева група, $p$ – просте число, $P$ – силовська $p$-підгрупа $A$. Для кожного $n \in N$ покладемо $\Omega_n(P) = \{ x \in P \mid | x | \leq p^n\}$. Очевидно, $\Omega_n(P)$ – характеристична підгрупа $A$. Маємо $\Omega_1(P) \leq \Omega_2(P) \leq \ldots \leq \Omega_n(P) \leq \Omega_{n+1}(P) \leq \ldots$ і $P = \cup_{n \in \mathrm{N}} \Omega_n(P)$.

Група називається локально скінченою, якщо кожна її скінчена підмножина породжує скінчену підгрупу.

Група називається обмеженою, якщо порядки її елементів обмежені у сукупності.

Група називається резидуально скінченою, якщо для кожного її елемента існує (нормальна) підгрупа скінченого індексу, що не містить цього елементу.

Група $G$ називається $F$-досконалою, якщо вона не містить у собі власних підгруп скінченого індексу. $F$-досконалі групи у деякому розумінні є антиподами резидуально скінчених груп. У кожній групі $G$ підгрупа, породжена усіма її $F$-досконалими підгрупами, буде $F$-досконалою, її називають $F$-досконалою частиною групи $G$.

Через $P(G)$ будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи $G$.

Нехай $A$ – абелева група, $G \leq Aut(A)$. Будемо говорити, що $A$-раціонально незвідна (точніше, $G$-раціонально незвідна), якщо кожна її неодинична $G$-інваріантна підгрупа $B$ визначає періодичну фактор-групу $A/B$. Якщо у цьому випадку $G = <\varphi>$, то будемо говорити, що $\varphi$ – раціонально незвідний автоморфізм.

Будемо говорити, що $G$ – скінчена над центром група, якщо її центр має в $G$ скінчений індекс.

# З М І С Т

ВСТУП.....3
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....7
1.1. Відомі результати.....14
РОЗДІЛ 2. ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП.....22
2.1. Попередні результати.....22
2.2. Періодичні групи, у яких усі підгрупи нескінченого секційного $p$-рангу наближено нормальні.....28
2.3. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого 0-рангу наближено нормальні.....33
2.4. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого секційного рангу наближено нормальні.....37
2.5. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого тотального рангу наближено нормальні.....41
2.6. Групи, у яких усі підгрупи нескінченого мінімаксного рангу наближено нормальні.....42
2.7. Групи, у яких усі підгрупи, що не є майже поліциклічними, наближено нормальні.....51
РОЗДІЛ 3. ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ МАЙЖЕ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП.....75
3.1. Групи, в яких усі підгрупи нескінченого секційного 0-рангу майже нормальні.....75
3.2. Групи, в яких усі підгрупи нескінченого p-рангу майже нормальні.....79
3.3. Групи, в яких усі підгрупи нескінченого тотального рангу майже нормальні.....85
3.4. Групи, в яких усі підгрупи нескінченого мінімасного рангу майже нормальні.....87
ЛІТЕРАТУРА.....92
ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....100