

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

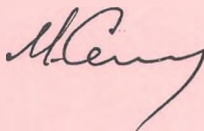
СЕМКО Микола Миколайович

УДК 519.41/47

**ГРУПИ З УМОВАМИ
ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ
ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕНЬ
ДЛЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ПІДГРУП**

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук



Київ – 2000

Дисертація є рукопис

Робота виконана в Академії державної податкової служби України
Державної податкової адміністрації України

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН Білорусі, доктор фізико-математичних наук, професор

ШЕМЕТКОВ Леонід Олександрович,
Гомельський державний університет імені
Франціско Скорини Республіки Білорусь,
професор кафедри алгебри і геометрії

доктор фізико-математичних наук, старший
науковий співробітник

ЧЕРНІКОВ Микола Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник

доктор фізико-математичних наук, професор

ЛИМАН Федір Миколайович,
Сумський державний педагогічний університет
ім. А.М. Макаренка, завідувач кафедри математики

Провідна установа: **Львівський національний університет імені
Івана Франка,** кафедра алгебри і топології,
Міністерство освіти і науки України, м. Львів

Захист відбудеться "1" лютого 2001 року о 14 годині на
засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 Київського національного
університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01107, м. Київ, проспект
акад. Глушкова, 6, Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського національного
університету імені Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розісланий "25" грудня 2000 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради _____ Петравчук А.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вже більше ста років здійснюється інтенсивне вивчення груп, у яких деякі системи підгруп задовольняють певні умови (обмеження). Зазначимо, що темп і глибина таких досліджень невинно зростають. Цей напрямок вивчення груп бере свій початок з груп Гамільтона, груп Міллера-Морено, груп Шмідта. Особливу роль в подальшому розвитку цього напрямку зіграли роботи О.Ю. Шмідта, Р. Бера, О.Г. Куроша, С.М. Чернікова, Ф. Холла, Б. Неймана. У цій ділянці досліджень одержано багато важливих результатів, які можна знайти в роботах Б. Амберга, Г.Баумслага, З.І. Боровича, Н. Блекберна, Х. Віланда, В.Гашюца, В.М. Глушкова, Ю.М. Горчакова, Ф. Джіованні, Д.І. Зайцева, Л.С. Казаріна, М.І. Каргаполова, О. Кегеля, П.Г. Конторовича, М.Ф. Кузенного, Л.А.Курдаченка, С.С.Левіщенко, Ф.М.Лимана, В.Д.Мазурова, А.І. Мальцева, О.О. Махньова, Ю.І. Мерзлякова, В.С. Монахова, О.Ю. Ольшанського, А.П. Петравчука, І.В.Протасова, Б.І. Плоткіна, В.Н. Ремесленнікова, Д. Робінсона, Я.П. Сисака, А.І. Старостіна, С.Стоунхевара, В.І. Суцанського, М. Томкінсона, Б. Хартлі, Г. Хайнекена, М.Холла, В.С. Чаріна, М.С. Чернікова, С.А. Чуніхіна, Л.О. Шеметкова, В.П. Шункова та багатьох інших алгебраїстів.

З дедекіндових (H -) груп, тобто груп, у яких нормальні всі підгрупи, розпочалось вивчення довільних (як скінченних, так і нескінченних) груп, у яких деяка система підгруп Σ задовольняє умову нормальності (H). Опис скінченних H -груп здійснено у роботі Р. Дедекінда (1897 р.), а нескінченних – у роботі Р. Бера (1933 р.). Згадані роботи започаткували важливий напрямок досліджень в теорії груп. Головною метою цього напрямку є опис узагальнень дедекіндових груп. Такі узагальнення здійснюються або шляхом звуження системи підгруп Σ , що є нормальними в усій групі, або послабленням властивості нормальності для підгруп із Σ . Названі узагальнення H -груп можна знайти, наприклад, у роботах О.Ю. Шмідта, Б. Хупперта, З. Янка, Д. Баклі, Н. Іто, Й. Сепе, Ф.М. Лимана, Г.М. Ромаліса, М.Ф. Сесекіна, С.М. Чернікова, В.Т. Нагребецького, О.О. Махньова, М.Ф. Кузенного, С.С. Левіщенко, І.Я. Субботіна, Л.О. Шеметкова, Г. Жордана, А. Фаттахі, М.С. Чернікова, Л.А. Курдаченка, В.В. Пилаєва, Д. Кеппіта, А.Ф. Баранніка, А. Манна, В.Е. Горецького та інших.

Послабленням нормальності для підгруп системи Σ нескінченної групи G є майже нормальність. Підгрупа H групи G називається майже нормальною підгрупою групи G , коли індекс $[G: N_G(H)]$ скінченний. Одними з перших значних узагальнень дедекіндових груп, які пов'язані з поняттям майже нормальної підгрупи, одержані Б. Нейманом та І.І. Єрмоїним.

Узагальненням дедекіндових груп присвячена дисертаційна робота. В ній узагальнення дедекіндових груп здійснюється за допомогою обмеження

нормальності і майже нормальності для системи підгруп Σ^* , яка певним чином пов'язана із згаданою системою Σ . Це підкреслює її актуальність.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи пов'язана з тематикою наукових досліджень Інституту математики НАН України і Академії державної податкової служби України (номер державної реєстрації 0198U001999).

Мета і задачі дослідження. Традиційними питаннями напрямку досліджень груп, до якого відноситься дисертаційна робота, були задачі опису груп G , у яких нормальні або майже нормальні всі підгрупи деякої системи Σ .

У 1968 році А. Манн почав вивчати групи, у яких нормальні не всі підгрупи системи Σ , а ті групи G , що мають нормальну підгрупу N , розміщену між будь-якими двома підгрупами A і B із Σ , де A – власна немаксимальна підгрупа з B . У нього Σ – система всіх підгруп групи G .

Групи, введені А. Манном, С.М. Черніков у 1975 році назвав групами з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Він же ввів поняття умов щільності і строгої щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т.д.) системи підгруп Σ . Властивість V підгруп групи G називається щільною (строго щільною) по відношенню до системи підгруп Σ , якщо для будь-яких підгруп A і B із Σ , де A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує така підгрупа H із властивістю V , що $A \leq H \leq B$ ($A < H < B$). Ці поняття широко використовувалися в роботах С.М. Чернікова і його учнів (М.С. Черніков, Л.А. Курдаченко, М.Ф. Кузенний, В.В. Пилаєв, В.Е. Горєцький).

Різнноманітні умови щільності властивості V для системи підгруп Σ групи G базуються на поняттях: відрізка $([A; B])$ –, інтервалу $((A; B))$ –, півінтервалу $((A; B])$ –, півінтервалу $([A; B))$ – підгруп групи G , кожний із яких є множиною всіх підгруп X групи G таких, що A і B із Σ , A – підгрупа з B і відповідно: $A \leq X \leq B$; $A < X < B$; $A < X \leq B$; $A \leq X < B$. Потужність відрізка, інтервалу, півінтервалу підгруп групи G називається його модулем, порядком або довжиною і позначається відповідно: $||[A; B]||$; $|(A; B)|$; $|[(A; B)]|$; $|([A; B])|$. За означенням $||[A; B]|| \geq 1$, тобто A – підгрупа з B , при $||[A; B]|| > 1$ A – власна підгрупа з B , при $||[A; B]|| > 2$ A – власна немаксимальна підгрупа з B .

У цій термінології А. Манн розглядав групи, у яких Σ – система всіх підгруп групи G і для кожного відрізка $[A; B]$ такого, що $||[A; B]|| > 2$ справедливе співвідношення $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Проте він цілком описав тільки скінченні ненільпотентні групи такого роду, у яких $(A; B) \ni N \triangleleft G$. Властивості скінченних груп з умовами $||[A; B]|| > 2$ і $[A; B] \ni N \triangleleft G$ вивчали М.Ф. Кузенний і В.В. Пилаєв. Опис цих груп згадані автори не одержали.

В.Е. Горецкий вивчав нескінченні групи, у яких $||[A; B]|| > 2$ і Σ – система всіх: нескінченних –, нескінченних абелевих –, нескінченних неабелевих підгруп групи G , для яких $[A; B] \in N \triangleleft G$. Повністю він описав тільки групи такого роду, у яких Σ – система всіх нескінченних підгруп. Цей опис виявився дуже громіздким. Це зумовлено відсутністю опису груп, у яких Σ – система всіх підгруп, $||[A; B]|| > 2$, $[A; B] \in N \triangleleft G$.

Зрозуміло, що при $||[A; B]|| \geq 1$ умова $[A; B] \in N$ – майже нормальна (МН-) підгрупа з G збігається з умовою майже нормальності всіх підгруп групи G . Б. Нейман установив, що групи такого роду скінченні над своїм центром. При умовах $||[A; B]|| > 2$, $[A; B] \in N$ – МН-підгрупа з G , $|G| = \infty$, Σ – система всіх підгруп, групи G вивчені Л.А. Курдаченком і В.Е. Горецким.

Метою даної роботи є дослідження наступних класів груп з умовами різноманітної щільності нормальності і майже нормальності для конкретних систем підгруп Σ :

- $\Sigma H[]$ -груп та їх підкласів, тобто груп G , у яких $||[A; B]|| > 1$, $[A; B] \in N \triangleleft G$;
- $U\Sigma H[]$ -груп та їх підкласів, тобто груп G , у яких $||[A; B]|| > 2$, $[A; B] \in N \triangleleft G$;
- $MH[I]$ -груп, тобто груп, у яких $||[A; B]|| \geq 1$, $|A| = \infty$, $[A; B] \in N$ – МН-підгрупа (майже нормальна) з G ;
- $MH[\overline{T}]$ -груп, тобто груп, у яких $||[A; B]|| \geq 1$, A – неперіодична підгрупа, $[A; B] \in N$ – МН-підгрупа з G ;
- $U\Sigma MH[I]$ -груп та їх підкласів, тобто груп, у яких $||[A; B]|| > 2$, $|A| = \infty$, $[A; B] \in N$ – МН-підгрупа з G ;
- $U\Sigma MH[\overline{T}]$ -груп та їх підкласів, тобто груп, у яких $||[A; B]|| > 2$, A – неперіодична підгрупа, $[A; B] \in N$ – МН-підгрупа з G .

Задачі дослідження:

- локально ступінчасті $\Sigma H[]$ -групи та їх підкласи;
- локально ступінчасті $U\Sigma H[]$ -групи та їх підкласи;
- локально майже розв'язні $MH[I]$ -групи;
- $MH[\overline{T}]$ -групи;
- локально майже розв'язні $U\Sigma MH[I]$ -групи та їх підкласи;
- $U\Sigma MH[\overline{T}]$ -групи та їх підкласи.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації вперше отримано нові теоретичні результати:

- вивчено до твірних елементів і визначальних співвідношень і подано конструкцію побудови локально ступінчастих $\Sigma H[]$ -груп та їх підкласів (теореми 1.4.1 і 1.4.2);

- аналогічно охарактеризовано локально ступінчасті $УЩН[]$ -групи та їх підкласи (теореми 2.2.3, 2.3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2);
- встановлено 15 типів локально ступінчастих $УЩН[]$ -груп, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих $УЩН()$ - і $УЩН[]$ -груп (теорема 3.4.2);
- встановлено 2 типи груп, що належать перетину класів локально ступінчастих $УЩН()$ - і $УЩН[]$ -груп і не належать класу $УЩН()$ -груп (теорема 3.4.1);
- знайдено конструкції побудови в термінах прямих, напівпрямих добутків та скінченних розширень локально майже розв'язних $МН[I]$ -груп (теореми 4.1.1 і 4.1.2);
- знайдено конструкції побудови в термінах прямих, напівпрямих добутків та розширень $МН[\overline{T}]$ -груп (теорема 4.1.3);
- аналогічно охарактеризовано локально майже розв'язні $УЩМН[I]$ -групи (теореми 4.1.2 і 4.2.2);
- аналогічно охарактеризовано $УЩМН[\overline{T}]$ -групи та їх підкласи (теорема 4.2.3).

Допоміжними новими результатами, що мають і самостійне значення, можна вважати:

- опис до твірних елементів і визначальних співвідношень локально ступінчастих груп, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами (теорема 1.1.1);
- такий же опис метациклічних 2-груп із трьома інволюціями (теорема 1.1.4).

Всі ці результати мають строге доведення.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Описані в дисертації класи груп значно розширюють конкретну базу теорії груп. Важливе як теоретичне, так і практичне значення має розроблена в дисертації методика дослідження груп з умовами щільності нормальності і майже нормальності для різноманітних систем підгруп. Результати дисертації можуть використовуватися в різних теоретико-групових дослідженнях.

Сформульовані і нерозв'язані в роботі задачі можуть бути основою нових наукових досліджень.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації опубліковані в монографії [1] без співавторів. Вона інтегрує, узагальнює й уточнює результати, що опубліковані в роботах [2–24]. Всі вони, крім [2, 6, 8–10], опубліковані без співавторів. Особистий внесок здобувача в монографію [2] і роботи [6, 8–10], що написані в співавторстві, такий: [2, розділ 5]; [6, теореми 1 і 2]; [8, теорема 3]; [9, теорема]; [10, теореми 1–3].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися і опубліковані в тезисах матеріалів:

- Всесоюзних алгебраїчних конференціях (Кишинів – 1985 р., Львів – 1987 р.);
- Всесоюзних симпозиумах з теорії груп (Мінськ – 1986 р., Свердловськ – 1988 р.);
- Міжнародних математичних конференціях ім. акад. М. Кравчука (Київ – 1995; 1996; 1997; 1998; 2000 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій пам'яті професора Л.М. Глускіна (Слов'янськ – 1997 р.);
- VII Білоруській математичній конференції (Мінськ – 2000 р.).

Крім того, результати дисертаційної роботи доповідались на алгебраїчних семінарах Інституту математики НАН України (1983 – 1988 роки); Київського національного університету імені Тараса Шевченка (1999 р.); Львівського національного університету імені Івана Франка (2000 р.); Гомельського державного університету (Білорусь, 1999 р.); Дніпропетровського національного університету (1998 – 2000 роки); Українського національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова (1986 – 2000 роки); Кошицького університету (Словаччина, 1990 та 1992 роки).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в монографії [1], в 23 наукових роботах [2 – 24] (список цих робіт наведено в кінці автореферату). Всі ці роботи опубліковані у фахових виданнях, що відповідають вимогам ВАК України.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, чотирьох основних розділів (які містять 13 підрозділів), висновків і списку використаних джерел. Список використаних джерел складається із 217 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 301 сторінка.

Автор щиро вдячний ректору Академії державної податкової служби України професору Мельнику Петру Володимировичу за постійну увагу і підтримку в роботі.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність дослідження, показаний зв'язок теми, що досліджується в роботі, із планами наукових досліджень, формулюються мета і задачі дослідження, охарактеризовано наукову новизну роботи, практичне значення отриманих результатів, особистий внесок дисертанта, апробацію результатів дисертації, вказані структура й обсяг дисертації. В структурі дисертації виділяється чотири основних розділи I – IV.

Узагальнення дедекіндових груп здійснюється або шляхом звуження системи підгруп Σ , що нормальні в усій групі, або послабленням властивості нормальності для підгруп із Σ . Зрозуміло, що узагальнення таких груп можна одержати накладаючи обмеження на деякі підсистеми із Σ . Однією з ефективних властивостей, що дає можливість виділяти підсистеми із Σ , є включення однієї підгрупи із Σ в іншу. З використанням цієї властивості багато авторів вивчали групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G . Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G , якщо для підгрупи A з підгрупи B в групі G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. Встановлено, що так виділені групи мають досить складну будову. А тому їхній опис можливий лише при додаткових обмеженнях, серед яких такі досить широкі обмеження як локальна ступінчастість та локальна майже розв'язність.

У розділі I “Будова локально ступінчастих $\text{ЩН}[]$ -груп” викладаються результати про групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. Завдяки поняттю проміжку (відрізок, інтервал, півінтервал) підгруп групи вводиться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості груп по кожному з них. Наведено опис окремих класів груп із найбільш загальним означенням щільності ($\text{УЩН}[]$ -груп). Описані локально ступінчасті недедекіндові $\text{ЩН}[]$ -групи.

У підрозділі 1.1 “Допоміжні результати” розглядаються групи, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами. Опис локально ступінчастих груп такого роду дано в теоремі 1.1.1. У теоремі 1.1.2 встановлюється один критерій дедекіндовості групи. Опис розкладу групи за допомогою її повної нормальної підгрупи подано в теоремі 1.1.3. У цьому ж підрозділі описані метациклічні групи з трьома інволюціями (теорема 1.1.4). Теореми 1.1.1 – 1.1.4 нові і мають самостійне значення.

Т е о р е м а 1.1.1. *Локально ступінчасті групи G , що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку l і p (p – просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, у яких усі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M , і G ізоморфна групі одного з типів:*

- 1) G – циклічна група порядку p^α , p – просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ – 2-максимальна підгрупа з G ;
- 2) $|G| = pq$, $p \nmid q$ – необов'язково різні прості числа, $M = 1$ – 2-максимальна підгрупа з G ;
- 3) G – група кватерніонов, $M = \Phi(G)$ – 2-максимальна підгрупа з G ;
- 4) G – циклічна група порядку $p^\alpha q$, $p \nmid q$ – різні прості числа, $\alpha > 1$, M – максимальна підгрупа з G , $|M| = p^{\alpha-1} q$;

5) $G = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = p^\alpha$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x, z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle$ – максимальна підгрупа з G ;

6) $G = R \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r^\alpha > 2$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, r і q – різні прості числа, $\langle x \rangle$ – максимальна підгрупа з G , $M = R \rtimes \langle x^q \rangle$ – максимальна підгрупа з G .

Теорема 1.1.2. Нехай G – група, що містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 , для яких $N_1 \cap N_2 = 1$, G/N_1 і G/N_2 – дедекіндові групи. Тоді G – дедекіндова група, якщо в ній виконується хоча б одна з умов:

1) N_1 – періодична група без інволюцій, N_2 – група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8;

2) N_1 – неперіодична група без інволюцій або з елементами порядку 8, N_2 – група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8.

Наслідок 1.1.3. Якщо група G містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 такі, що $N_1 \cap N_2 = 1$ і G/N_i – дедекіндова група ($i \in \{1, 2\}$), N_i – локально циклічна група з силовською 2-підгрупою D , для якої $|D| \notin \{2, 4\}$, то G – дедекіндова група.

Теорема 1.1.3. Нехай G – група, N – її нормальна підгрупа і G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів, тобто для будь-якого елемента g із G і всіх елементів x із N існує елемент a такий, що $g^{-1}xg = a^{-1}xa$. Тоді $G = NC_G(N)$. Зокрема, при $Z(N) = 1$ $G = N \times C_G(N)$.

Наслідок 1.1.4. Нехай G – група, N – така її 2-породжена нормальна підгрупа, що $G' \cap N = N' \leq Z(N)$. Тоді $G = NC_G(N)$.

Наслідок 1.1.5. Нехай G – група з центральним циклічним комутантом G' . Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' = N'$ маємо $G = NC_G(N)$.

Наслідок 1.1.6. Якщо G – група з комутантом порядку p і N – будь-яка її 2-породжена неабелева p -підгрупа, то $G = NC_G(N)$.

Наслідок 1.1.7. Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:

1) G – нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку 8, $G' \leq Z(G)$;

2) $G = U \rtimes X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою чи групою кватерніонів, $|U| > 1$, $|X| > 1$, $w(X) \leq Z(G)$, $[U, X] \leq w(U)$;

3) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, x] = a^2 b^2$, $[b, x] = b^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$.

Теорема 1.1.4. Метациклічні 2-групи з трьома інволюціями мають вигляд $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^r$ (r – ціле непарне число) і вичерпуються групами таких типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $r = 1$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $r = -1$;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $r = -(1+2^k)$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $r = 1+2^k$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$;
- 5) $G = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^l} \rangle$, $r = 1+2^k$, $1 < k < l$, $\alpha < \beta$, $|d| = 2^l$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $r = -1$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $r = -(1+2^k)$, $1 < k < \alpha - 1$, $\beta > \alpha - k + 1$.

Н а с л і д о к 1.1.9. Неодиночні метациклічні 2-групи G з числом інволюцій відмінним від числа 3 вичерпуються групами таких типів:

- 1) G – неодиночна циклічна 2-група, в G одна інволюція;
- 2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ – група кватерніонів, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 4$, $\alpha > 1$, $a^{2^{\alpha-1}} = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, в G одна інволюція;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – група діедра, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2$, $\alpha > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, в G не менше 5 інволюцій;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – квазідіедральна група, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 2$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1+2^{\alpha-1}}$, в G не менше 5 інволюцій.

У підрозділі 1.2 “Основні означення і загальні результати” вводяться означення восьми класів груп з умовами щільності нормальності для підгруп (означення 1.2.3). Теорема 1.2.1 встановлює замкненість введених класів груп за підгрупами та фактор-групами і включення кожного з цих класів в деякий інший. Всі розглядувані класи груп належать класу УЩН[]-груп, тобто груп G , у яких для будь-якої пари підгруп A і B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$. Теорема 1.2.2 описує всі типи ненормальних підгруп локально ступінчастої УЩН[]-групи. Вона є одним з вузлових результатів подальших досліджень. Теорема 1.2.3 присвячена характеризації локально ступінчастих УЩН[]-груп.

О з н а ч е н н я 1.2.1. Нехай G – група, A і B – її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A; B]$ ($(A; B)$) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $(A; B]$ чи $[A; B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

Проміжком $\{A; B\}$ називається відрізок, інтервал або півінтервал.

О з н а ч е н н я 1.2.2. Модулем проміжку $\{|A; B|\}$ називається число його елементів.

О з н а ч е н н я 1.2.3. Нехай у групі G для довільного відрізка $[A; B]$, де A та B – τ -підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

- 1) при $|[A;B]| \geq 1$: 1.1) $N \in [A;B]$;
 2) при $|[A;B]| > 1$: 2.1) $N \in (A;B)$; 2.2) $N \in [A;B)$; 2.3) $N \in [A;B]$;
 3) при $|[A;B]| > 2$: 3.1) $N \in (A;B)$; 3.2) $N \in (A;B]$; 3.3) $N \in [A;B)$;
 3.4) $N \in [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: H - , $\text{ЩН}(\tau)$ - , $\text{ЩН}[\tau]$ - , $\text{ЩН}[\tau]$ - , $\text{УЩН}(\tau)$ - , $\text{УЩН}(\tau)$ - , $\text{УЩН}[\tau]$ - , $\text{УЩН}[\tau]$ -групою.

Якщо τ – властивість бути будь-якою підгрупою групи G , то в позначеннях відповідних класів груп буква τ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як H - , $\text{ЩН}()$ - , $\text{ЩН}[]$ - , $\text{ЩН}[]$ - , $\text{УЩН}()$ - , $\text{УЩН}()$ - , $\text{УЩН}[]$ - , $\text{УЩН}[]$ -групи.

Всім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через $K(H)$, $K(\text{ЩН}())$, $K(\text{ЩН}[])$, $K(\text{ЩН}[])$, $K(\text{УЩН}())$, $K(\text{УЩН}[])$, $K(\text{УЩН}[])$, $K(\text{УЩН}[])$.

Т е о р е м а 1.2.1. Класи $K(H)$, $K(\text{ЩН}())$, $K(\text{ЩН}[])$, $K(\text{ЩН}[])$, $K(\text{УЩН}())$, $K(\text{УЩН}[])$, $K(\text{УЩН}[])$, $K(\text{УЩН}[])$ замкнені за підгрупами і фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.

Т е о р е м а 1.2.2. Недедекіндова локально ступінчаста $\text{УЩН}[]$ -група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа U якої може бути лише власною підгрупою одного з таких типів:

- 1) U – циклічна підгрупа порядку p^α , $\alpha > 0$, p – довільне просте число, $\Phi(\Phi(U)) = M \triangleleft G$;
- 2) U – група порядку pq , $M = 1 \triangleleft G$;
- 3) U – група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M \triangleleft G$;
- 4) U – циклічна підгрупа порядку $p^\alpha q$, $\alpha > 1$, p і q – різні прості числа, $M \leq U$, $M \triangleleft G$, $|M| = p^{\alpha-1} q$;
- 5) $U = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|x| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|y| = p$, p – довільне просте число, $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] \leq \langle x \rangle^{p^\Delta}$, $[U:U'] > 4$, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U' , $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle = M \triangleleft G$;

6) $U = R \rtimes \langle x \rangle$, R – елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $r^\gamma > 2$, $|x| = p^\beta$, p і r – різні прості числа, $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ – максимальна підгрупа з U , $U' = R$, $R \times \langle x^p \rangle = M \triangleleft G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Т е о р е м а 1.2.3. Недедекіндові локально ступінчасті $\text{УЩН}[]$ -групи G мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиначних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з таких типів:

- 1) G – скінченна нільпотентна група;
- 2) G – скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група;

3) G має центральну квазіциклічну p -підгрупу R , для якої G/R – скінченна дедекіндова група.

Підрозділ 1.3 “Деякі частинні випадки” присвячений описам деяких підкласів $УЩН[]$ -груп, що мають самостійне значення і використовуються в подальших дослідженнях. У теоремі 1.3.1 описані всі локально ступінчасті $УЩН[]$ -групи Шмідта. Теорема 1.3.2 описує всі метациклічні $УЩН[]$ -групи, а теорема 1.3.3 – локально ступінчасті мінімальні неметациклічні групи такого роду. У теоремі 1.3.4 описані локально ступінчасті $УЩН[]$ -групи, які мають ненормальні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Т е о р е м а 1.3.1. Локально ступінчасті $УЩН[]$ -групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P – нормальна в G силовська p -підгрупа порядку $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, $G' = P$, Q – ненормальна циклічна силовська q -підгрупа з G порядку q^β , $\beta > 0$, p і q – різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leq Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^d$, $\Delta \in \{0, 1\}$, $\alpha - \Delta$ – показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ – максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ та вичерпуються групами таких типів:

- 1) P – група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;
- 2) $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;
- 3) P – елементарна абелева група, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Т е о р е м а 1.3.2. Метациклічні $УЩН[]$ -групи G вичерпуються групами таких типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leq k < \alpha$, $\alpha - k \leq \beta$;
- 5) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 8) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $\beta \in \{3, 4\}$, $b^{-1}ab = a^7$;
- 10) $G = P \times D$, P – група кватерніонів порядку 8, D – скінченна абелева метациклічна група;
- 11) $G = P \times D$, P – силовська p -підгрупа G , $|D| = q$, p і q – різні прості числа, P – група одного з таких типів розглядуваної теореми: 2, $|P'| = 2$; 4, $|P'| = p$; 6, $\beta < 4$;

12) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, $p \nmid r$ – необ'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^q \in Z(G)$;

13) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $\Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \leq Z(G)$; при $|z| = r$ $b^q \in Z(G)$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

14) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, $q \nmid r$ – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $C_{\langle b \rangle}(\langle a \rangle) = 1$;

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

16) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $|z| = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, b^q] = [a, z] = 1$, $[b, z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Т е о р е м а 1.3.3. Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УЩН[]-групи вигляду $G = AX$, де $A = \langle a, b \rangle$ – нормальна в G підгрупа, $a \neq 1$, X – q -група, $p \nmid q$ – прості числа і вичерпуються групами таких типів:

1) $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$;

2) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

3) $G = A \times X$, A – група кватерніонів порядку 8, $|X| = 2$;

4) A – група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $|x| = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;

5) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

6) $G = A \rtimes X$ – група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, $|A| = p^2$, $|x| \in \{q, q^2\}$;

7) $G = A \rtimes X$ – група Шмідта типу 1 теореми 1.3.1, A – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне число, $X = \langle x \rangle$, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$;

9) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $X = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, A – квазіцентральна підгрупа з G ;

10) $G = A \rtimes X$, $|A| = p$ – непарне просте число, $X = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = q^2$, $|z| = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

11) G – квазіциклічна p -група.

Т е о р е м а 1.3.4. Нехай G – локально ступінчаста УЩН[]-група з мінімальною неметациклічною підгрупою C . Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять C .

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою C вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p і q – різні прості числа, $\Phi(P) \rtimes Q$ – нелінійно потентна група Міллера-Морено, $p \neq 3$;

2) $G = (R \times P) \rtimes Q$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|Q| = q$, r , p і q – попарно різні прості числа, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $R \rtimes Q$ і $P \rtimes Q$ – нелінійно потентні групи Міллера-Морено.

Н а с л і д о к 1.3.11. Нехай G – локально ступінчаста $U\mathcal{CN}[]$ -група і C – її ненормальна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді C – нелінійно потентна група Міллера-Морено порядку p^2q з нормальною силовською p -підгрупою, p і q – різні прості числа.

Н а с л і д о к 1.3.12. Нехай G – локально ступінчаста $U\mathcal{CN}[]$ -група і C – її лінійно потентна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді $C \triangleleft G$ і G/C – дедекіндова група.

Підрозділ 1.4 “Будова $\mathcal{CN}[]$ -груп та їх підкласів” присвячений опису локально ступінчастих $\mathcal{CN}[]$ -груп та їх підкласів. $\mathcal{CN}[]$ -групою називається така група G , у якій для будь-якої пари підгруп A і B таких, що $A < B$, існує нормальна в G підгрупа N і $A \leq N \leq B$. Зауважимо, що $\mathcal{CN}[]$ -групи раніше не розглядалися. Теорема 1.4.1 дає опис всіх локально ступінчастих $\mathcal{CN}[]$ -груп з виділенням восьми типів груп такого роду. Теорема 1.4.2 показує, що всі виділені в означенні 1.2.3 підкласи $\mathcal{CN}[]$ -груп вичерпуються дедекіндовими групами.

Т е о р е м а 1.4.1. Локально ступінчасті недедекіндові $\mathcal{CN}[]$ -групи G є черніківськими групами, у яких $|G'| \in \{p, p^2\}$, $[G:Z(G)] \in \{p^2q, pq\}$, p і q – не обов'язково різні прості числа та вичерпуються групами таких типів:

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = C \times Q$, C – неединична локально циклічна 2-група, Q – група кватерніонів порядку 8;

4) $G = (C \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, C – локально циклічна p -група або група кватерніонів порядку 8, $[a, b] = c \in C$, $|c| = p$, $|a| = |b| = p$, $[C, \langle b \rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = b^2 = a^2b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

8) $G = P \rtimes Q$, P – силовська p -підгрупа з G , Q – силовська q -підгрупа з G , p і q – різні прості числа, $|P| \in \{p, p^2\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; при $|P| = p$ $p \equiv 1 \pmod{q}$; при $|P| = p^2$ $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ – показник p за модулем q .

Н а с л і д о к 1.4.2. Нехай G – локально ступінчаста недедекіндова група. Тоді справедливі такі твердження:

1) будь-яка $\text{ЩН}[\]$ -група є групою з нормальними нециклічними підгрупами;

2) існують неперіодичні метациклічні групи G та скінченна група G з нормальною силовською 2-підгрупою, що ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, у яких нормальні всі нециклічні підгрупи і G – не $\text{ЩН}[\]$ -група;

3) для довільної p -групи G наступні умови еквівалентні:

а) G – $\text{ЩН}[\]$ -група; б) G – група з нормальними нециклічними підгрупами.

Т е о р е м а 1.4.2. Класи H -, $\text{ЩН}[\]$ -, $\text{ЩН}(\)$ -груп співпадають з класом дедекіндових груп.

У кінці розділу наведено висновки.

Розділ II “Будова локально ступінчастих $\text{УЩН}[\]$ -груп” повністю присвячений опису локально ступінчастих груп з умовами узагальненої щільності нормальності для підгруп ($\text{УЩН}[\]$ -груп). Спочатку описуються метагамільтонові групи такого роду. Далі, з використанням цього опису, вивчаються неметагамільтонові $\text{УЩН}[\]$ -групи.

Підрозділ 2.1 “Деякі корисні результати” присвячений опису локально ступінчастих недедекіндових метагамільтонових $\text{УЩН}[\]$ -груп. Зауважимо, що цей опис суттєво використовується в подальшому, зокрема, у підрозділах 2.2 і 2.3. У теоремі 2.1.1 описані недедекіндові $\text{УЩН}[\]$ -групи з комутантом простого порядку з виділенням 7 типів груп такого роду. Теорема 2.1.2 описує всі недедекіндові метагамільтонові $\text{УЩН}[\]$ -групи. Отримано 18 типів таких груп. Наслідок 2.1.3 описує локально ступінчасті неметагамільтонові $\text{УЩН}[\]$ -групи, що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп. Доведено, що існує 3 типу груп такого роду.

Т е о р е м а 2.1.1. Недедекіндові $\text{УЩН}[\]$ -групи G з комутантом порядку p , p – просте число, мають вигляд $G = CF$, C – локально циклічна p -група чи група кватерніонів порядку 8, $[C, F] = 1$, $F = (Q \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $[a, b] \in \langle c \rangle = G' = F' \leq Q = \langle u, v \rangle$, $|c| = p$ та вичерпуються групами таких типів:

1) $G = F = (Q \rtimes \langle b \rangle) \times \langle a \rangle$, $Q_2 = \langle c \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|a| \in \{1, r\}$, p і q – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $b^q \in Z(G)$; при $|a| \neq 1$ $b^q \in Z(G)$; при $|a| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = F = Q \rtimes \langle b \rangle$, $|Q| = p$, $|b| = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $C_{\langle b \rangle}(Q) = 1$;

3) $G = F = Q \times \langle a \rangle$, $Q = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $[u, v] = c = u^p$, $|a| \in \{1, r\}$, r – просте число;

4) $G = C \times F$, C – локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, $F = Q \times \langle a \rangle$, Q – група кватерніонів порядку 8, $|a| \in \{1, r\}$, r – просте число;

5) $F = Q \times \langle a \rangle$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle$, $[u, v] = c \in C$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $|a| \in \{1, r\}$, r – просте число, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; при $|a| \neq 1$ $|u| = |v| = p$;

6) $G = F$, $Q = \langle u \rangle \rtimes_{\Delta-1} \langle v \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = c = u^p$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$;

7) $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$.

Т е о р е м а 2.1.2. Локально ступінчасті недедекіндові метабільтонові УЩН[]-групи G вичерпуються групами таких типів:

1) G – недедекіндова УЩН[]-група з комутантом порядку p , p – просте число (теорема 2.1.1);

2) G – недедекіндова метациклічна метабільтонова УЩН[]-група з комутантом непростого порядку (наслідок 1.3.6);

3) $G = (P \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^2 , $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$, p і q – різні прості числа, $P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число; при $|z| = r$ $\beta = 1$;

4) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, $3 \neq r$ – просте число;

5) G – група порядку p^4 з абелевим нецентральною комутантом типу (p, p) , p – непарне просте число;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{p^s}$, $0 < s < p$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $t = s = 1$;

8) $G = A \rtimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = 1$;

9) $G = A \rtimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $s = 1$;

10) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

11) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|a| = |x| = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

12) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ – непарне просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^\varepsilon b^p$, $0 \leq \varepsilon < p$,

$a^p = c^{1+a}b^p$, $0 \leq t < p$, всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

13) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2 x^2$;

14) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p^2$, p – непарне просте число, $[b, x] = a^{sp} b^{tp} x^p$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = b^{lp} x^{lp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

15) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

16) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$;

17) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, $|P| = p^\alpha$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $\alpha + \beta < 6$, $P \rtimes \langle x \rangle$ – нільпотентна група Міллера-Морено, α – показник p за модулем q ;

18) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Фробеніуса, P – елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, α – показник p за модулем q і дорівнює показнику p за модулем r .

Н а с л і д о к 2.1.3. Локально ступінчасті неметагамільтонові УЩН[]-групи G , що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп, є групою одного з таких типів:

1) $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 і Q_2 – групи кватерніонів порядку 8;

2) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|z| = 2$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$.

Підрозділ 2.2 “Будова нільпотентних УЩН[]-груп” присвячений опису нільпотентних УЩН[]-груп. В лемах 2.2.1 – 2.2.8 встановлюються властивості неметагамільтонових названих груп. Опис цих груп дається в теоремі 2.2.3. Доведено, що існує 28 типів таких недедекіндових груп.

Т е о р е м а 2.2.3. Нільпотентні недедекіндові УЩН[]-групи G вичерпуються групами таких типів:

1) $G = (\langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = p^A$, $A > 1$, $|v| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $[u, v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна p -група або група кватерніонів порядку 8, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$,

$[C, \langle v \rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $|C'| |u| |v| \neq 32$; при $|z| = r$ $|u| = |v| = p$;

4) $G = ((\langle u \rangle^{\Delta-1} \times \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = u^p$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

5) $G = CF$, C – локально циклічна p -група чи група кватерніонів порядку 8, $[C, F] = 1$, $C \cap F = \langle c \rangle$, $F = (((\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \times \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

6) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

8) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$;

10) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^4 \rangle$; при $|z| = r$ $\beta \in \{2, 3\}$; при $\beta = 2$ $[a, z] = 1$;

11) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$;

12) G – група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p, p) , p – непарне просте число;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^p$, $0 < s < p$;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^p b^p$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $t = s = 1$;

15) $G = A \times \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 1$, $|x| = p$ – непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

16) $G = A \times \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^p b^p$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $s = 1$;

17) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

18) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 r$, r – просте число; $[a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1$,

19) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ – непарне просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^{\varepsilon} b^p$, $0 \leq \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon} b^p$, $0 \leq t < p$, всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

20) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2 b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2 x^2$;

21) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p$, p – непарне просте число, $[b, x] = a^{sp} b^{tp} x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $t^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

22) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

23) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

24) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

25) $G = (\langle a, b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a, b \rangle$ – група кватерніонів, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a$;

26) $G = U \rtimes X$, U – циклічна 2-група або група кватерніонів порядку 8, X – група кватерніонів порядку 8, $[U, X] \leq w(U)$; при $U' = 1$ $[U, X] = w(U)$;

27) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

28) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a \rangle \langle b \rangle) \cap \langle x \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^2$.

У підрозділі 2.3 “Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[]-груп” описані ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[]-групи (теорема 2.3.1). Отримано 17 типів груп такого роду.

Т е о р е м а 2.3.1. Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[]-групи G є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами таких типів:

I. Метагамільтонові групи:

i) метациклічні:

1) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r – прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) мінімальні неметациклічні ненадрозв’язні групи Шмідта:

3) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

4) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 – показник p за модулем q , p і q – різні прості числа;

iii) групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

5) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q, r – попарно різні прості числа, α – показник p за модулем q , α – показник p за модулем r , $P \rtimes \langle x^q \rangle$ і $P \rtimes \langle x^r \rangle$ – групи Міллера-Морено;

6) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, P – елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, α – показник p за модулем q , p і q – різні прості числа, $P \rtimes \langle x^q \rangle$ – група Міллера-Морено, $\alpha + \beta < 6$;

7) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$, p і q – різні прості числа;

8) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = p$, $|x| = q$, $|z| = r$, p, q, r – прості числа, $p \neq q$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ – група Міллера-Морено, 2 – показник p за модулем q , $p \neq 3$, $q > 2$;

II. Неметагамільтонові групи:

i) метациклічні:

9) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r – не обов'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

11) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

ii) надрозв'язні мінімальні неметациклічні підгрупи:

12) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – квазіцентрально підгрупа з G ;

14) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^2$, $|z| = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

iii) групи, що містять власні неметациклічні підгрупи:

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, p – просте число, $p \neq 3$, $|x| = q$ – просте число, 2 – показник p за модулем q , $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено;

16) $G = (R \times P) \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|x| = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, 2 – показник p за модулем q , $q > 2$, $R \rtimes \langle x \rangle$ і $P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентні групи Міллера-Морено;

17) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x^q \rangle$ та $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x^r \rangle$ – мінімальні неметациклічні групи.

Всі основні результати цього розділу нові і є значним узагальненням класу дедекіндових груп і класів груп із робіт А. Манна, М.Ф. Кузенного і В.В. Пилаєва. У кінці розділу наведено висновки.

У розділі III “Будова УЩН()-груп та локально ступінчастих УЩН()- і УЩН[]-груп” вивчаються групи з певними умовами щільності нормальності для підгруп, які складають значні і самостійні підкласи груп класу УЩН[]-груп. Серед них класи: УЩН()-, УЩН()-, УЩН[]-груп.

Підрозділ 3.1 “Будова УЩН()-груп” присвячений опису УЩН()-груп (означення 1.2.3). Доведено, що існує 10 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.1.1) та 4 типи ненільпотентних (теорема 3.1.2) УЩН()-груп.

Т е о р е м а 3.1.1. Нільпотентні недедекіндові УЩН()-групи G вичерпуються групами таких типів:

1) $G = (\langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $[u, v] = u^p$;

2) $G = C \times Q \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, Q – група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C – локально циклічна p -група чи група кватерніонів порядку 8, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v \rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r – прості числа, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; при $|z| = r$ $|u| \cdot |v| = p^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

5) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

6) $G = A \rtimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 1$, $|x| = p$ – просте число, $p \beta > 4$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = 1$;

7) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

8) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle \times \langle y \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r – просте число;

9) $G = U \rtimes X$, U – циклічна 2-група чи група кватерніонів порядку 8, $|U| > 2$, X – група кватерніонів порядку 8, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$;

10) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

Т е о р е м а 3.1.2. Ненільпотентні УЩН()-групи G є скінченними над-розв'язними групами та вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q і r – прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a \rangle \times \langle z \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $\langle z, x \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\Delta$, $\Delta > 2$, $|z| = q$ – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

4) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^2$, $|z| = q$ – непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

У підрозділі 3.2 “Будова локально ступінчастих УЩН()-груп” описані локально ступінчасті УЩН()-групи (означення 1.2.3). Одержано 13 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.2.1) та 9 типів ненільпотентних (теорема 3.2.2) груп такого роду.

Т е о р е м а 3.2.1. Нільпотентні недедекіндові УЩН()-групи G вичерпуються групами таких типів:

1) G – нільпотентна недедекіндова УЩН()-група, тобто група G одного з типів 1 – 10 теореми 3.1.1;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^3$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = p^2$, $|x| = |b| = p$ – непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ – непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – просте число, $[a, x] = b^t$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $t = s = 1$;

7) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ – просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^t$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ – неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $s = 1$;

8) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ – непарне просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^\varepsilon b^p$, $0 \leq \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon}b^p$, $0 \leq t < p$, всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

9) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2x^2$;

10) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p$, p – не-парне просте число, $[b, x] = a^s b^t x^l$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = b^f x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $f^2 + 4fs$, $f^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

13) $G = (\langle a, b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a, b \rangle$ – група кватерніонів, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a$.

Т е о р е м а 3.2.2. Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН()-групи G вичерпуються групами типів:

1) G – ненільпотентна УЩН()-група, тобто група G одного з типів 1 – 4 теореми 3.1.2;

2) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

3) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $|P| = p^2$, $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 – показник p за модулем q , $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = |P'| = p$ – просте число, $p > 3$, $|x| = q$ – непарне просте число, 2 – показник p за модулем q ;

5) $G = (P \rtimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $|P| = p^2$, $|x| = q$, $p \neq 3$, $q > 2$, $|z| = r$ – просте число, $r \neq p$, 2 – показник p за модулем q ;

6) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = pr$, p і r – необов'язково різні непарні прості числа, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

8) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – квазіцентральна підгрупа з G ;

9) $G = (R \times P) \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|x| = q$, p, q і r – попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod{q}$, 2 – показник p за модулем q , $p \neq 3$, $q > 2$, $R \rtimes \langle x \rangle$ і $P \rtimes \langle x \rangle$ – ненільпотентні групи Міллера-Морено.

Підрозділ 3.3 “Будова локально ступінчастих УЩН()-груп” присвячений опису УЩН()-груп (означення 1.2.3). Доведено, що існує 6 типів нільпотентних недедекіндових (теорема 3.3.1) та 6 типів ненільпотентних (теорема 3.3.2) УЩН()-груп.

Т е о р е м а 3.3.1. Нільпотентні недедекіндові УЦН()-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = ((\langle u \rangle \times \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $|u| = p^{\Delta-1}$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = u^{p^{\Delta-1}}$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

2) $G = CF$, C – локально циклічна p -група або група кватерніонів порядку 8, $[C, F] = 1$, $C \cap F = \langle c \rangle$, $F = (((\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \times \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

3) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = |z| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] = \langle a^4 \rangle$;

4) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle (\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[a, z] = \langle b, x \rangle = a^3 = x^6$, $[b, z] = 1$;

5) $G = U \times X$, U і X – групи кватерніонів порядку 8.

Т е о р е м а 3.3.2. Ненільпотентні локально ступінчасті УЦН()-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

2) $G = P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, $p \neq 3$, $q > 2$;

3) $G = P \times \langle x \rangle$, P – група типу (p, p) , $|x| = qr$, $P \times \langle x^q \rangle$ і $P \times \langle x^r \rangle$ – ненільпотентні групи Міллера-Морено;

4) $G = P \times \langle x \rangle$, P – група типу (p, p) , $|x| \in \{q^2, q^3\}$, $P \times \langle x^q \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено;

5) $G = (P \times \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P – група типу (p, p) , $P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $|x| = q$, $|z| = r$, $p \neq r$.

У підрозділі 3.4 “Деякі наслідки” встановлено структурні властивості введених класів груп. Зокрема, в теоремі 3.4.1 описаний клас груп, який належить перетину класів локально ступінчастих УЦН()- та УЦН()-груп. Теорема 3.4.2 описує локально ступінчасті УЦН()-групи, що не належать об’єднанню класів локально ступінчастих УЦН()- та УЦН()-груп.

Т е о р е м а 3.4.1. Всі не УЦН()-групи, які належать перетину класів локально ступінчастих УЦН()- та УЦН()-груп, вичерпуються групами типів:

1) $G = P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| \in \{q, q^2\}$;

2) $G = (P \times \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| = q$, $|z| = r$, $r \neq p$.

Т е о р е м а 3.4.2. Клас $УЩН[]$ -груп містить об'єднання класів $УЩН()$ - та $УЩН()$ -груп, але ним не вичерпується.

Локально ступінчасті $УЩН[]$ -групи, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих $УЩН[]$ - і $УЩН()$ -груп, вичерпуються групами типів:

I. Нільпотентні групи:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $p\alpha > 6$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-2}}$;
- 2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\beta > \alpha > 2$, $p\alpha > 6$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-2}}$, $\langle a \rangle \triangleleft G$;
- 3) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 3$, $|d| = 4$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 4) $G = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a \rangle) \times \langle x \rangle$, $|c| = |b| = |a| = |x| = p$, $p > 3$, $[a, b] = b$, $[b, x] = c$, $[c, x] = 1$;
- 5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = |x| = p$, p – непарне просте число, $[a, b] = a^{p^s}$, $0 < s < p$, $[a, b] = b$, $[b, x] = 1$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;
- 8) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16 = |b|$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 9) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|x| = 4$, $(\langle a \rangle \langle b \rangle) \cap \langle x \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$.

II. Ненільпотентні групи:

- 10) $G = P \times \langle x \rangle$, P – група типу (p, p, p) , $|x| = qr$, p , q , r – попарно різні прості числа, $P \times \langle x^q \rangle$ і $P \times \langle x^r \rangle$ – групи Міллера-Морено;
- 11) $G = P \times \langle x \rangle$, P – група типу (p, p, p) , $|x| = q^2$, p і q – різні прості числа, $P \times \langle x^q \rangle$ – група Міллера-Морено;
- 12) $G = P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p, p) , $|x| = q$;
- 13) $G = (P \times \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, P – група типу (p, p) , $|x| = q$, $|z| = r$;
- 14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = q$, $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \times \langle x \rangle$ – ненільпотентна група Міллера-Морено;
- 15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$ – ненадрозв'язна група Фробеніуса, P – група типу (p, p) , $|x| = qr$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $P \times \langle x^q \rangle$ та $P \times \langle x^r \rangle$ – мінімальні неметациклічні групи.

Результати опису скінченних ненільпотентних $УЩН()$ -груп співпадають з результатами із робіт А. Манна, М.Ф. Кузенного і В.В. Пилаєва. Результати опису всіх нільпотентних та ненільпотентних локально ступінчастих $УЩН()$ - і $УЩН[]$ -груп є новими. У кінці розділу наводяться наслідки.

Значні розширення класу дедекіндових груп виникають при переході від умови нормальності до деяких її узагальнень. Одним із таких узагальнень є поняття майже нормальності підгрупи групи. Розділ IV “Групи з умовами щільності майже нормальності для підгруп” присвячений опису локально майже розв’язних груп з умовами щільності майже нормальності для різних систем підгруп.

У підрозділі 4.1 “Попередні результати” приведені результати, які мають самостійне значення і використовуються в подальшому. Зокрема, теореми 4.1.1 і 4.1.2 описують локально майже розв’язні групи з нескінченними майже нормальними підгрупами, а теорема 4.1.3 – неперіодичні групи з неперіодичними майже нормальними підгрупами.

Означення 4.1.2. Підгрупа H групи G називається майже нормальною підгрупою групи G (МН-підгрупою), якщо індекс $[G:N_G(H)]$ скінченний.

Означення 4.1.4. Група G називається МН[τ]-групою, якщо довільний відрізок $[A;B]$ групи G , де підгрупи A і B мають властивість τ , містить МН-підгрупу. Клас таких груп будемо позначати через $K(\text{МН}[\tau])$.

Якщо τ – властивість бути будь-якої підгрупою групи G , то G називається МН[τ]-групою.

Якщо $\tau = BI$, тобто $|B| = \infty$, то G називається МН[BI]-групою.

Якщо $\tau = I$, тобто $|A| = \infty$, то G називається МН[I]-групою.

Якщо $\tau = \bar{T}$, тобто A – неперіодична підгрупа, то G називається МН[$\bar{T}$]-групою.

Якщо $\tau = B\bar{T}$, тобто B – неперіодична підгрупа, то G називається МН[$B\bar{T}$]-групою.

Теорема 4.1.1. Неперіодичні нескінченні над центром МН[I]-групи вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = p$ – просте число, A – вільна абелева група рангу $p-1$, $C_4(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;

2) $G = A \langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, p – просте число, $A = A_1 A_2 \dots A_{p-1}$, де $A_i = C \rtimes \langle a_i \rangle \triangleleft G$, $|A_i| = \infty$, $C \triangleleft G$, $|C| < \infty$, $A \cap \langle b \rangle = C \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $A/C = A_1/C \times \dots \times A_{p-1}/C \times \dots \times A_{p-1}/C$ – вільна абелева група рангу $p-1$, G/C – група типу 1.

Теорема 4.1.2. Періодичні локально майже розв’язні нескінченні над центром МН[I]-групи вичерпуються групами наступних типів:

1) G – майже квазіциклічна група з нецентральною квазіциклічною підгрупою;

2) $G = K \rtimes \langle f \rangle$ – черніковська група з не локально циклічною повною частиною K , що є силовською p -підгрупою з G , p – просте число,

$C_G(K) = K$, кожний неединичний елемент із $\langle f \rangle$ індукує на K p -адично незвідний автоморфізм, ранг K не перевищує $q-1$ для будь-якого $q \in \pi(\langle f \rangle)$;

3) $G = R \ltimes \langle b \rangle$ – черніковська група з повною частиною K , $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, p – непарне просте число, K – p -група рангу $p-1$, $R \cap \langle b \rangle = K \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, b індукує на K p -адично незвідний автоморфізм, $R = K \rtimes \langle f \rangle \triangleleft G$, при $f \neq 1$ R – група типу 2;

4) $G = KF$ – черніковська група з повною частиною K , F містить таку нормальну в G підгрупу C , що G/C – група типу 2;

5) $G = R \ltimes \langle b \rangle$ – черніковська група з повною частиною K , $R \triangleleft G$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, p – непарне просте число, $R \cap \langle b \rangle = K \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $R = KF$, $|F| < \infty$, F містить скінченну нормальну підгрупу C з G , що G/C – група типу 3.

Т е о р е м а 4.1.3. Неперіодичні нескінченні над центром $MN[\bar{T}]$ -групи вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = p$ – просте число, A – вільна абелева група рангу $p-1$, $C_A(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;

2) $G = (((K \rtimes \langle a_1 \rangle) \rtimes \langle a_2 \rangle) \rtimes \dots) \rtimes \langle a_{p-1} \rangle \ltimes \langle b \rangle$, K – нормальна в G періодична підгрупа, яка є скінченим розширенням центральної підгрупи групи G , a_i – елемент нескінченного порядку, $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $b^p \in K$ і G/K – група типу 1.

Підрозділ 4.2 “Будова локально майже розв’язних груп з умовами щільності майже нормальності для різних систем підгруп” присвячений опису локально майже розв’язних груп з щільними системами: всіх, нескінченних та неперіодичних майже нормальних підгруп. Це теореми 4.2.1 – 4.2.3 відповідно.

О з н а ч е н н я 4.2.1. Група G називається УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-групою, якщо для довільного відрізка підгруп $[A; B]$ такого, що $|[A; B]| > 2$ і підгрупи A та B мають властивість τ в G існує така МН-підгрупа C , що буде вірним відповідно одне із співвідношень: $(A; B) \in C$, $(A; B) \in C$, $[A; B] \in C$, $[A; B] \in C$.

Якщо τ – це властивість бути довільною підгрупою з G , то G називається відповідно УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-, УЦМН(τ)-групою.

Якщо τ – це властивість I , тобто $|A| = \infty$, то G називається відповідно УЦМН(I)-, УЦМН(I)-, УЦМН(I)-, УЦМН(I)-групою.

Якщо $\tau = \bar{T}$, тобто A – неперіодична підгрупа, то G називається відповідно УЦМН($\bar{T}$)-, УЦМН($\bar{T}$)-, УЦМН($\bar{T}$)-, УЦМН($\bar{T}$)-групою.

Н а с л і д о к 4.2.1. В нижче наведеній таблиці розміром 3×4 , елементами якої є 12 введених в означенні 4.2.1 класів груп, стрілками вказано, який із класів є підкласом іншого.

$$\begin{array}{ccccc}
 \kappa(U\mathcal{C}MH(\)) & \longrightarrow & \kappa(U\mathcal{C}MH(\)) & \xrightarrow{\quad} & \kappa(U\mathcal{C}MH(\)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \kappa(U\mathcal{C}MH(I)) & \longrightarrow & \kappa(U\mathcal{C}MH(I)) & \xrightarrow{\quad} & \kappa(U\mathcal{C}MH(I)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \kappa(U\mathcal{C}MH(\overline{T})) & \longrightarrow & \kappa(U\mathcal{C}MH(\overline{T})) & \xrightarrow{\quad} & \kappa(U\mathcal{C}MH(\overline{T}))
 \end{array}$$

Т е о р е м а 4.2.1. Локально майже розв'язні нескінченні над центром $U\mathcal{C}MH[\]$ -групи розв'язні, мають вигляд $G = D\langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, p – просте число, $D = D_1 D_2 \dots D_i \dots D_{p-1} \rtimes G$, $D_i = C \triangleleft \langle a_i \rangle$, $|a_i| = \infty$, C – скінченна нормальна підгрупа з G , $D \cap \langle b \rangle = C \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $D/C = D_1/C \times D_2/C \times \dots \times D_{p-1}/C$ – вільна абелева група рангу $p-1$ та вичерпуються групами типів:

- 1) $C = 1$, $G = D \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = p$, D – вільна абелева група рангу $p-1$, $C_D(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на D раціонально незвідний автоморфізм;
- 2) $C = \langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$, $|c| \in \{1, r\}$, r – просте число, G/C – група типу 1, $C\langle b \rangle$ – абелева група або неабелева група порядку rp , або p -група Міллера-Морено, яка не ізоморфна групі діедра порядку 8;
- 3) $C = \langle c \rangle$, $\langle c \rangle \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, G/C – нескінченна діедральна група;

- 4) $C = Q \times \langle b^p \rangle$, $Q \rtimes \langle b \rangle$ – скінченна ненільпотентна група Міллера-Морено, Q – елементарна абелева q -група, $q \neq p$, G/C – група типу 1, $|Q||b| > pq$.

О з н а ч е н н я 4.2.2. Підгрупа A групи G називається стандартним добутком підгруп $A_i = C \rtimes X_i$, $i \in I$, якщо X_i – локально циклічна група, $C \triangleleft A$, A/C – прямий добуток A_i/C , при $|I| = 0$ $A = C$.

Т е о р е м а 4.2.2. Класи періодичних локально майже розв'язних $U\mathcal{C}MH[\]$ - та $MH[\]$ -груп співпадають між собою.

Неперіодичні $U\mathcal{C}MH[\]$ -групи, що не є $MH[\]$ -групами, мають вигляд $G = (RA)\langle b \rangle = R(A\langle b \rangle) = AF$, де R – центральна в G квазіциклічна r -група, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $A \triangleleft G$, A – стандартний добуток підгруп $A_i = K \rtimes \langle a_i \rangle$, $|a_i| = \infty$, $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $r \nmid p$ – прості числа, $K \triangleleft G$, $|K| < \infty$, $A \cap \langle b \rangle = K \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $RK = C = P(G)$ – максимальна періодична нормальна підгрупа з G , $F = C\langle b \rangle = T(G)$ – максимальна періодична підгрупа з G , $R \cap \langle b \rangle = 1$, F/R – група одного з типів 1 – 6 теореми 1.1.1 та вичерпуються групами, у яких G/R – група одного з типів 1 – 4 теореми 4.2.1, а сама група G може бути групою одного з типів:

- 1) $G = R \times (A \rtimes \langle b \rangle)$, $K = 1$, $\beta = 1$, A – вільна абелева група рангу $p-1$, $C_A(\langle b \rangle) = 1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм;

2) $G = R \times (A \langle b \rangle)$, $K = \langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$, $|c| \in \{1, q\}$, q – просте число, $K \langle b \rangle$ – абелева чи група Міллера-Морено, G не містить підгруп діебра порядку 8, G/K – група типу 1;

3) $G = R \times (A \langle b \rangle)$, $K = Q \times \langle b^p \rangle$, $|Q| = q^\gamma$, q – просте число, $\gamma > 1$, b індукує на Q незвідний автоморфізм, $\Phi(Q) = 1$, G/K – група типу 1;

4) $G = R \times (A \langle b \rangle)$, $A = K \times \langle a_1 \rangle$, $p = 2$, $K \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

5) $G = R(A \langle b \rangle)$, $R \cap K = T \leq Z(G)$, G/T – група одного з типів 1 – 4.

Т е о р е м а 4.2.3. Класи неперіодичних $УЩМН[\bar{T}]$ - і $МН[\bar{T}]$ -груп співпадають між собою.

Всі результати цього розділу, окрім теореми 4.2.1, є новими. У кінці розділу наводяться висновки.

ВИСНОВКИ

Дослідження узагальнень дедекіндових груп активно здійснюється вже більш ста років. Зазначимо, що кількість таких досліджень невинно зростає. На їх основі виникають нові перспективні і самостійні напрямки в теорії груп. Один з таких напрямків визначається за допомогою поняття щільності для різних систем підгруп. В дисертаційній роботі здійснено узагальнення дедекіндових груп, яке базується на понятті щільності нормальності та майже нормальності для різних систем підгруп.

В дисертації вперше введено в розгляд такі класи груп: $ЩН[\]$ -групи та їх підкласи ($Н$ -, $ЩН[\]$)-, $ЩН(\]$ -групи); $УЩН[\]$ -групи та їх підкласи ($УЩН(\]$ -, $УЩН[\]$)-, $УЩН(\]$ -групи); $МН[\Pi]$ -групи; $УЩМН[\Pi]$ -групи та їх підкласи ($УЩМН(\Pi)$ -, $УЩМН(\Pi)$ -, $УЩМН[\Pi]$ -групи); $УЩМН[\bar{T}]$ -групи та їх підкласи ($УЩМН(\bar{T})$ -, $УЩМН(\bar{T})$ -, $УЩМН[\bar{T}]$ -групи).

Вивчено до твірних елементів і визначальних співвідношень і подано конструкцію побудови локально ступінчастих $ЩН[\]$ -груп та їх підкласів (теореми 1.4.1 і 1.4.2).

Аналогічно охарактеризовано локально ступінчасті $УЩН[\]$ -групи та їх підкласи (теореми 2.2.3, 2.3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2).

Встановлено 15 типів локально ступінчастих $УЩН[\]$ -груп, що не належать об'єднанню класів локально ступінчастих $УЩН(\]$ - і $УЩН[\]$ -груп (теорема 3.4.2).

Встановлено 2 типи груп, що належать перетину класів локально ступінчастих $УЩН(\]$ - і $УЩН[\]$ -груп і не належать класу $УЩН(\]$ -груп (теорема 3.4.1).

Знайдено конструкції побудови в термінах прямих, напівпрямих добутків та скінченних розширень локально майже розв'язних $MH[I]$ -груп (теорема 4.1.1 і 4.1.2).

Знайдено конструкції побудови в термінах прямих, напівпрямих добутків та розширень $MH[\bar{T}]$ -груп (теорема 4.1.3).

Аналогічно охарактеризовано локально майже розв'язні $U\mathcal{C}MH[I]$ -групи (теорема 4.1.2 і 4.2.2).

Аналогічно охарактеризовано $U\mathcal{C}MH[\bar{T}]$ -групи та їх підкласи (теорема 4.2.3).

Допоміжними новими результатами, що мають і самостійне значення, можна вважати:

- опис до твірних елементів і визначальних співвідношень локально ступінчастих груп, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами (теорема 1.1.1);
- такий же опис метациклічних 2-груп із трьома інволюціями (теорема 1.1.4).

Проблема А. Манна для скінченних груп узагальнена і розв'язана для локально ступінчастих груп.

Розвинуті ідеї С.М. Чернікова вивчення груп з умовами щільності властивості V підгруп групи для різних систем підгруп.

Поняття щільності властивості V підгруп групи дає можливість сформулювати багато нових перспективних задач в теорії груп. Зокрема, це стосується властивості нормальності і майже нормальності для різних систем підгруп. Наприклад, щільності нормальності можна розглядати для систем: циклічних, нециклічних, абелевих, неабелевих, нільпотентних, ненільпотентних, скінченних, нескінченних, нескінченних абелевих, нескінченних неабелевих та інших систем підгруп.

Аналогічні задачі для нескінченних груп можна сформулювати для щільностей майже нормальності.

Основні результати дисертаційної роботи можуть бути відправними в розв'язанні згаданих нових задач.

Всі результати дисертаційної роботи мають строге доведення і базуються на класичних теоретико-групових методах.

Результати дисертації можуть використовуватися в багатьох теоретико-групових дослідженнях, при читанні спецкурсів і спецсеминарів та при написанні дипломних робіт і наукових рефератів.

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Семко М.М.* Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1998. - 285 с.
2. *Кузенний М.Ф., Семко М.М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. - К.: Ін-т математики НАН України, 1996. - 232 с.
3. *Семко М.М.* Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1997. - 90 с.
4. *Семко М.М.* Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1997. - 63 с.
5. *Семко М.М.* Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1997. - 62 с.
6. *Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А.* О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. - 1983. - N 10. - С. 57-63.
7. *Семко Н.Н.* Непериодические группы с почти нормальными непериодическими подгруппами // Группы и системы их подгрупп. - К.: Ін-т математики АН УССР. - 1983. - С. 79-86.
8. *Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М.* Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. - 1985.- N 3. - С. 7-9.
9. *Курдаченко Л.А., Кузенний Н.Ф., Семко Н.Н.* Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. - 1991. - Т.43, N 7, 8. - С. 969-973.
10. *Кузенний М.Ф., Семко М.М.* Про групи, близькі до метациклічних // Укр. мат. журн. - 1996. - Т. 48, N 6. - С. 782-790.
11. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих $\text{UЩН}[]$ -груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1996. - Вип. 12. - С. 181-186.
12. *Семко М.М.* Про будову $\text{UЩН}[]$ -груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1996. - Вип. 13. - С. 196-203.
13. *Семко М.М.* Будова нільпотентних $\text{UЩН}[]$ -груп // Класи груп з обмеженнями для підгруп. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1997.- С. 27-41.
14. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих ненільпотентних $\text{UЩН}[]$ -груп // Укр. мат. журн. - 1997. - Т. 49, N 6. - С. 789 - 798.
15. *Семко М.М.* Ненільпотентні групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх

- застосування до крайових задач. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1997. - Вип. 15. - С. 175-187.
16. **Семко М.М.** Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1997. - Вип. 16. - С. 255-263.
 17. **Семко М.М.** Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп // Укр. мат. журн. - 1997. - Т. 49, N 8. - С. 1148-1151.
 18. **Семко М.М.** Про будову УЩН[]-груп з елементарним комутантом рангу два // Укр. мат. журн. - 1997. - Т. 49, N 10. - С. 1396-1403.
 19. **Семко М.М.** Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. - 1997. - N 9. - С. 49-53.
 20. **Семко М.М.** Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. - 1997. - N 10. - С. 43-46.
 21. **Семко М.М.** Про будову УЩН[]-груп // Укр. мат. журн. - 1998. - Т.50, N 9. - С. 1250-1261.
 22. **Семко М.М.** Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[]-груп // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. - К.: Ін-т математики НАН України. - 1998. - Вип. 1 (17). - С. 230-237.
 23. **Семко М.М.** Будова локально ступінчастих УЩН()-груп // Укр. мат. журн. - 1998. - Т.50, N 11. - С. 1532-1536.
 24. **Семко М.М.** Будова локально ступінчастих УЩН[]-груп // Укр. мат. журн. - 1999. - Т.51, N 3. - С. 383-388.

АНОТАЦІЇ

Семко М.М. Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2000.

Дисертація присвячена дослідженню узагальнень дедекіндових груп, що здійснюється завдяки різним умовам щільності нормальності та майже нормальності для деяких систем підгруп. Іншими словами, досліджуються групи G , що мають нормальну (майже нормальну) підгрупу N , розміщену між довільними двома підгрупами A і B групи G , де A – підгрупа з B і A та B – підгрупи деякої системи підгруп Σ досліджуваної групи. Різні умови щільності визначаються співвідношеннями: $A \leq N \leq B$; $A < N < B$; $A < N \leq B$; $A \leq N < B$, а також властивостями: A – підгрупа групи B ; A – власна підгрупа групи B ; A – власна немаксимальна підгрупа групи B .

Вивчено як скінченні так і нескінченні локально ступінчасті (локально майже розв'язні) групи з умовами різних щільностей нормальності (майже нормальності) для певних систем підгруп.

Ключові слова: *дедекіндова група, нормальна підгрупа, майже нормальна підгрупа, метагамільтонова група, щільність нормальності, щільність майже нормальності, власна підгрупа, власна немаксимальна підгрупа.*

Семко Н.Н. Группы с условиями плотности нормальности и её обобщений для некоторых систем подгрупп. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2000.

Диссертация посвящена исследованию обобщений дедекиндовых групп. Оно осуществляется с помощью условий плотности нормальности и почти нормальности для некоторых систем подгрупп. Другими словами, исследуются группы G , которые имеют нормальную (почти нормальную) подгруппу N , расположенную между произвольными двумя подгруппами A и B группы G , где A – подгруппа из B и A и B – подгруппы некоторой системы подгрупп Σ исследуемой группы. Подгруппа N называется расположенной между подгруппами A и B группы G , если A – подгруппа из B и $A \leq N \leq B$. Различные условия плотности определяются соотношениями: $A \leq N \leq B$; $A < N < B$; $A < N \leq B$; $A \leq N < B$, а также свойствами: A – подгруппа из B ; A – собственная подгруппа из B ; A – собственная немаксимальная подгруппа из B . Подгруппа A группы B называется собственной подгруппой группы B , если она отлична от B , т.е. $A < B$.

Множество $\{X\}$ подгрупп X исследуемой группы G , для которых $A \leq X \leq B$ называется отрезком подгрупп из G и обозначается $[A; B]$. Мощность подгрупп этого отрезка называется его модулем и обозначается $|[A; B]|$. Понятно, что $|[A; B]| \geq 1$. При $|[A; B]| \geq 1$ A – подгруппа из B , при $|[A; B]| > 1$ A – собственная подгруппа из B , при $|[A; B]| > 2$ A – собственная немаксимальная подгруппа из B .

Изучено до образующих элементов и определяющих соотношений и приведена конструкция строения класса локально ступенчатых групп G , у которых $|[A; B]| > 1$, $[A; B] \in N \triangleleft G$ и некоторых его подклассов. Среди них классы групп, у которых $|[A; B]| > 1$ и соответственно: $(A; B) \in N \triangleleft G$; $[A; B] \in N \triangleleft G$; $(A; B) \in N \triangleleft G$.

Аналогично охарактеризован класс локально ступенчатых групп G , у которых $|[A; B]| > 2$, $[A; B] \in N \triangleleft G$ и некоторые его подклассы. Среди них

классы групп, у которых $||[A; B]|| > 2$ и соответственно: $(A; B) \in N \triangleleft G$; $[A; B] \in N \triangleleft G$; $(A; B) \in N \triangleleft G$.

Определены конструкции строения в терминах прямых, полупрямых произведений и конечных расширений класса локально почти разрешимых групп G , у которых $||[A; B]|| \geq 1$, A – бесконечная подгруппа, $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G .

Определены конструкции строения в терминах прямых, полупрямых произведений и расширений класса групп G , у которых $||[A; B]|| \geq 1$, A – непериодическая подгруппа, $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G и некоторые его подклассы.

Аналогично охарактеризован класс локально почти разрешимых групп G , у которых $||[A; B]|| > 2$, A – бесконечная подгруппа, $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G и некоторые его подклассы. Среди них классы групп, у которых $||[A; B]|| > 2$, A – бесконечная подгруппа и соответственно: $(A; B) \in$ – почти нормальная подгруппа из G ; $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G ; $(A; B) \in N$ – почти нормальная подгруппа из G .

Аналогично охарактеризован класс групп G , у которых $||[A; B]|| > 2$, A – непериодическая подгруппа, $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G и некоторые его подклассы. Среди них классы групп, у которых $||[A; B]|| > 2$, A – непериодическая подгруппа и соответственно: $(A; B) \in N$ – почти нормальная подгруппа из G ; $[A; B] \in N$ – почти нормальная подгруппа из G ; $(A; B) \in N$ – почти нормальная подгруппа из G .

Вспомогательными новыми результатами, которые имеют самостоятельное значение, являются:

- описание до образующих элементов и определяющих соотношений локально ступенчатых групп, которые не порождаются своими собственными немаксимальными подгруппами;
- такое же описание метациклических 2-групп с тремя инволюциями.

Ключевые слова: *дедекиндова группа, нормальная подгруппа, почти нормальная подгруппа, плотность нормальности, плотность почти нормальности, собственная подгруппа, собственная немаксимальная подгруппа, отрезок подгрупп, модуль отрезка подгрупп.*

Semko M. M. Groups with the denseness conditions of normality and its generalization for certain systems of subgroups. Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06 – algebra and number theory. Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 2000.

The dissertation is written to investigate generalizations of dedekind's groups through different denseness conditions of normality and almost-normality

for certain systems of subgroups. In other words, the groups G are investigated, which have a normal (almost normal) subgroup N located between two arbitrary subgroups A and B of the group G , where A is a subgroup from B ; A and B are subgroups of a system of subgroups Σ of the investigated group. Different denseness conditions are distinguished by the following correlations: $A \leq N \leq B$; $A < N < B$; $A < N \leq B$; $A \leq N < B$, and by the properties: A is a subgroup of the group B ; A is a proper subgroup of the group B ; A is a proper nonmaximal subgroup of the group B .

Both finite and infinite locally graded (locally almost solvable) groups with different denseness conditions of normality (almost normality) for certain systems of subgroups are studied.

Key words: *dedekind's group, a normal subgroup, an almost normal subgroup, meta-Hamiltonian group, denseness of normality, denseness of almost-normality, a proper subgroup, a proper nonmaximal subgroup.*

Підписано до друку 22.11.2000. Формат 60×90/16. Папір друк. Друк. офсет.
Умовн. друк. арк. 1,9. Тираж 100 прим. Зам. 450.

Віддруковано у друкарні Академії державної податкової служби України.
08201, м. Ірпінь, вул. К. Маркса, 31.