

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ
ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ**

**СЕМКО М.М.
СКАСКІВ Л.В.
ПИСКУН М.М.**

**УЗАГАЛЬНЕНО НОРМАЛЬНІ ПІДГРУПИ
ТА ЇХ ВПЛИВ НА СТРУКТУРУ ГРУПИ**

Ірпінь – 2008

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	3
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	15
1.1. Відомі результати	21
РОЗДІЛ 2. ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ТА МАЙЖЕ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП.....	28
2.1. Попередні результати	28
2.2. Абелеві секції груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ має вимірність Крулля	35
2.3. Будова груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ має вимірність Крулля	40
2.4. Попередні результати про групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ має вимірність Крулля	47
2.5. Будова груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ має вимірність Крулля	51
2.6. Будова груп, у яких система усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля	59
РОЗДІЛ 3. ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП	66
3.1. Властивості підгруп, майже поліциклічно наближених до нормальних.....	66
3.2. Будова деяких класів анти PC -груп	80
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	91

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

H^G – нормальне замкнення підгрупи H у групі G , тобто нормальна підгрупа, породжена H у групі G .

$\zeta(G)$ – центр групи G .

$\zeta_\alpha(G)$ – член верхнього центрального ряду групи G , що має порядковий номер α .

$\gamma_\alpha(G)$ – член нижнього центрального ряду групи G , що має порядковий номер α .

$[G, G]$ – комутант групи G .

$\text{Aut}(G)$ – група автоморфізмів групи G .

$C_H(M) = \{ x \in H \mid xa = ax \text{ для будь-якого елемента } a \in M \}$ – централізатор підмножини M у підгрупі H . Якщо H – нормальна підгрупа групи G , L – підгрупа, що містить H , то через $C_G(L/H)$ позначимо повний прообраз в G підгрупи $C_{G/H}(L/H)$.

Для довільного елемента $g \in G$ позначимо через g^G клас всіх елементів, які спряжені з g , тобто $g^G = \{ x^{-1}gx \mid x \in G \}$.

$\text{FC}(G) = \{ g \in G \mid \text{клас } g^G \text{ – скінченний} \}$.

Очевидно, $\text{FC}(G)$ – характеристична підгрупа групи G , її називають FC -центром групи G . Якщо $G = \text{FC}(G)$, то G називають FC -групою.

Стартуючи від FC -центра, можна збудувати верхній FC -центральный ряд групи G

$$\langle 1 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \dots \leq C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \dots \leq C_\gamma$$

за наступним правилом: $C_1 = \text{FC}(G)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \text{FC}(G/C_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, та $\text{FC}(G/C_\gamma) = \langle 1 \rangle$.

Останній член C_γ цього ряду називається верхнім FC -гіперцентром. Якщо він співпадає з усією групою G , то G називається FC -гіперцентральною, а якщо при цьому γ ще є скінченним, то G називається FC -нільпотентною.

Група G називається черніковською групою, коли вона містить у собі нормальну підгрупу скінченного індексу H , що розкладається у прямий добуток скінченної множини квазіциклічних груп.

Будемо говорити, що група G задовольняє умову максимальності (відповідно мінімальності), якщо G не має нескінченних зростаючих (відповідно спадаючих) ланцюжків підгруп.

Група називається резидуально скінченною, якщо для кожного її елемента існує (нормальна) підгрупа скінченного індексу, що не містить цього елемента.

Група G називається F -досконалою, якщо вона не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. F -досконалі групи у деякому розумінні є антиподами резидуально скінченних груп. У кожній групі G підгрупа, породжена усіма її F -досконалими підгрупами, буде F -досконалою, її називають F -досконалою частиною групи G .

Нехай A – абелева група, p – просте число, P – силовська p -підгрупа A . Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\Omega_n(P) = \{ x \in P \mid x^p \leq p^n \}$. Очевидно, $\Omega_n(P)$ – характеристична підгрупа A . Маємо $\Omega_1(P) \leq \Omega_2(P) \leq \dots \leq \Omega_n(P) \leq \Omega_{n+1}(P) \leq \dots$ і $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(P)$.

Група називається локально скінченною, якщо кожна її скінченна підмножина породжує скінченну підгрупу.

Група називається обмеженою, якщо порядки її елементів обмежені у сукупності.

Нам також будуть потрібні деякі поняття з теорії модулів. Нехай R – комутативне кільце та A – R -модуль. Покладемо

$$t_R(A) = \{ a \in A \mid \text{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle \}.$$

Якщо R не має дільників нуля, то $t_R(A)$ буде підмодулем A . У цьому випадку підмодуль $t_R(A)$ називається R -періодичною частиною модуля A . Модуль A називається R -періодичним, якщо він співпадає зі своєю R -

періодичною частиною; будемо говорити, що A не має R -кручення, якщо підмодуль $t_R(A)$ буде нульовим.

Нехай D – дедекіндова область. Покладемо

$$\mathbf{Spec}(D) = \{ P \mid P - \text{максимальний ідеал } D \}.$$

Якщо I – ідеал D , то покладемо

$$A_I = \{ a \in A \mid a I^n = \langle 0 \rangle \text{ для деякого } n \in \mathbf{N} \}.$$

Неважко побачити, що A_I буде D -підмодулем A . Цей підмодуль A_I будемо називати I -компонентою модуля A . Якщо A співпадає зі своєю I -компонентою, то будемо говорити, що $A \in I$ -модулем над кільцем D . Далі покладемо

$$\Omega_{I,n}(A) = \{ a \in A \mid a I^n = \langle 0 \rangle \}.$$

Неважко упевнитись у тому, що $\Omega_{I,n}(A)$ також є D -підмодулем та має місце включення $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, так що отримуємо рівність $\cup_{n \in \mathbf{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Тепер покладемо $\mathbf{Ass}_D(A) = \{ P \in \mathbf{Spec}(D) \mid A_P \neq \langle 0 \rangle \}$. Тоді маємо стандартний прямий розклад $t_D(A) = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, де $\pi = \mathbf{Ass}_D(A)$ (див., наприклад, [1, наслідок 6.25]).

Нехай D – дедекіндова область, C – простий D -модуль, тоді маємо ізоморфізм $C \cong D/P$ для деякого $P \in \mathbf{Spec}(D)$. Позначимо D -ін'єктивну оболонку C через $\mathbf{C}_P^\infty$. Модуль $\mathbf{C}_P^\infty$ називається *прюферовим модулем*. Як і в теорії абелевих груп можна довести, що

$$\mathbf{C}_P^\infty \cong \lim_{\leftarrow} \{ D/P^n \mid n \in \mathbf{N} \}.$$

За своєю побудовою, $\mathbf{C}_P^\infty$ буде P -модулем, причому

$$\Omega_{P,k}(\mathbf{C}_P^\infty) \cong_D D/P^k \text{ та}$$

$$\Omega_{P,k+1}(\mathbf{C}_P^\infty) / \Omega_{P,k}(\mathbf{C}_P^\infty) \cong (D/P^{k+1}) / (P/P^{k+1}) \cong D/P$$

для кожного $k \in \mathbf{N}$. Таким чином, якщо E – власний D -підмодуль прюферового модуля $\mathbf{C}_P^\infty$, то знайдеться таке число $k \in \mathbf{N}$, що $E = \Omega_{P,k}(\mathbf{C}_P^\infty)$. Дійсно, якщо $b \notin \Omega_{P,k}(\mathbf{C}_P^\infty) \setminus \Omega_{P,k-1}(\mathbf{C}_P^\infty)$, то $C = bD$. Слід відмітити також, що прюферовий P -модуль $\mathbf{C}_P^\infty$ є монолітичним і його моноліт співпадає з $\Omega_{P,1}(\mathbf{C}_P^\infty)$.

Якщо D – дедекіндова область, A – артиновий D -модуль, то A буде D -періодичним, так що $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, де множина $\pi = \text{Ass}_D(A)$ є скінченною. Далі маємо $A_P = C_1 \oplus \dots \oplus C_k \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_d$, де C_j є циклічним P -модулем, $1 \leq j \leq k$, а E_j – прюферовий P -модуль, $1 \leq j \leq d$ (див., наприклад, [2, теорема 5.7]).

Через $P(G)$ будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи G .

Будемо говорити, що G – скінченна над центром група, якщо її центр має в G скінченний індекс.

ВСТУП

Нормальні підгрупи групи та їх узагальнення мають досить вагомий вплив на структуру групи. Чим більшою буде система таких підгруп, тим цей вплив буде більш вирішальним. Образно кажучи, чим більше має група узагальнено нормальних підгруп, тим її будова стає більш прозорою. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то неабелеві групи з такою властивістю мають дуже просту будову, як показують результати робіт [3, 4]. В процесі розвитку теорії груп виникло досить багато типів підгруп, в тому чи іншому сенсі близьких до нормальних. Перші узагальнення зводились до простих послаблень означення і привели до появи таких типів підгруп як субнормальні, підгрупи, що не збігаються зі своїм нормалізатором (за їх допомогою характеризуються скінченні нільпотентні групи), підгрупи, які переставні з кожною циклічною підгрупою групи (вони грають велику роль в скінченних зверхрозв'язних та розв'язних групах). Ці досить давні узагальнення виникли спочатку в теорії скінченних груп і потім почали розглядатись і в нескінченних групах. Слід відмітити, що нескінченність групи досить часто приводить до якісних відмінностей. Наприклад, скінченна група, всі підгрупи якої субнормальні, буде нільпотентною. Однак, на відміну від скінченних груп, існують нескінченні групи з одиничним центром, всі підгрупи яких субнормальні [5 – 9]. В теорії нескінченних груп природно виникають свої специфічні узагальнення нормальних підгруп. Одні з перших таких цікавих узагальнень розглянув Б. Нейман у своїй роботі [10], що вже стала класичною. Зокрема, він почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінченну множину спряжених. Оскільки кожна така підгрупа має нормалізатор скінченного індексу, такі підгрупи почали пізніше називати майже нормальними. У своїй роботі [10] Б. Нейман охарактеризував групи, всі підгрупи яких майже нормальні, як групи, що мають центр скінченного індексу. Такі групи пізніше стали називати скінченними над

центром. Пізніше І.І. Єрьомін у роботі [11] показав, що групи, всі абелеві підгрупи яких майже нормальні, також будуть скінченними над центром. У статті [12] І.І. Єрьомін почав розглядати групи, в яких усі нескінченні підгрупи майже нормальні. Локально майже розв'язні групи з цією властивістю були описані значно пізніше у роботі М.М. Семка, С.С. Левіщенка та Л.А. Курдаченка [13]. З цієї роботи починається систематичне вивчення груп, в яких система $\mathcal{L}_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи G «дуже велика» чи система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ всіх підгруп, що не є майже нормальними, «дуже мала». Так у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горецького розглядались групи, у яких система всіх майже нормальних підгруп є щільною [14], результати цієї роботи були пізніше узагальнені в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [15, 16]. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [17] були розглянуті групи, у яких (впорядковані за включенням) системи $\mathcal{L}_{an}(G)$ та $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ задовольняють умову максимальності, а в роботі Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [18] були розглянуті групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Узагальнення результатів як роботи [17], так і роботи [18], було отримано пізніше в статті Ж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [19], де розглядались локально майже розв'язні групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності та слабку умову мінімальності. С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченко [20] розглянули групи, у яких майже нормальними будуть всі підгрупи за винятком скінченно породжених. В той же час вивчались і інші властивості системи майже нормальних підгруп. Так К. Касоло вивчав групи, у яких властивість «бути майже нормальною підгрупою» є транзитивною і в цьому зв'язку також розглянув групи, у яких кожна субнормальна підгрупа є майже нормальною [21, 22]. Ця тематика була продовжена у роботі К. Касоло, С. Франціозі, Ф. де Жиованні [23]. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [24] була розглянута зовсім інша ситуація – були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або майже

нормальна, або субнормальна. Неважко упевнитись у тому, що (впорядкована за включенням) множина всіх майже нормальних підгруп буде решіткою. Але також неважко побачити, що загалом ця решітка не є повною. Л.А. Курдаченко та С. Рінауро [25] розглянули групи, у яких (впорядкована за включенням) множина всіх майже нормальних підгруп буде повною решіткою. Подальший цікавий розвиток цієї тематики продовжився у роботах [26, 27] М.М. Семка та С.М. Кучменко, де розглядались групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ складається з підгруп того чи іншого скінченного рангу.

Інший тип підгруп, які також почав розглядати Б. Нейман у статті [10], це підгрупи, що мають скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Такі підгрупи будемо називати далі наближено нормальними. Систематичне вивчення впливу системи наближено нормальних підгруп на будову групи розпочато досить недавно. Л.А. Курдаченко, М.Ф. Кузенний та М.М. Семко у роботі [15] вивчали групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [28] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи G задовольняє умову мінімальності, а у роботі А. Галоппо [29] були розглянуті групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [30] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [31], де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп. Суттєвий внесок у цю проблематику був здійснений у роботах [32 – 34], де були вивчені досить широкі класи груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ складається з груп того чи іншого скінченного рангу.

Таким чином, вивчення властивостей систем майже нормальних та наближено нормальних підгруп та їх впливу на структуру усієї групи є актуальною задачею, що має свою історію та своє специфічне коло питань. Ця тематика розглядається і в даній роботі. В розділі 2 запропоновано наступний

новий підхід, витoki якого знаходяться у теорії кілець і який був там досить ефективним. Розглянемо наступну умову скінченності, яка є дуже широким узагальненням як умови мінімальності, так і умови максимальності. Нашою метою тут є застосування цієї умови для вивчення впливу на структуру групи таких її важливих систем узагальнено нормальних підгруп як система всіх її наближено нормальних підгруп та система всіх її майже нормальних підгруп. Теорія кілець була першою, де почалися розглядатись різні природні обмеження на системи лівих (відповідно правих) ідеалів. Теорія артинових кілець (тобто кілець з умовою мінімальності для лівих ідеалів) та теорія нетерових кілець (тобто кілець з умовою максимальності) є одними з найбільш розвинених. У теорії кілець виникло досить багато цікавих природних узагальнень артинових та нетерових кілець. Одним з таких узагальнень є кільця, що мають вимірність Крулля.

Нехай A – частково впорядкована множина. Для елементів $a, b \in A$ визначимо замкнений інтервал з кінцями a, b як підмножину

$$[a, b] = \{ x \in A \mid a \leq x \leq b \}.$$

Визначимо тепер відхилення $\mathbf{dev}(A)$ частково впорядкованої множини A (див., наприклад, [35, 6.1]) за наступним правилом.

Якщо порядок на частково впорядкованій множині A є тривіальний, то покладемо $\mathbf{dev}(A) = -\infty$.

Якщо порядок на частково впорядкованій множині A нетривіальний, а такий, що A задовольняє умову мінімальності, то покладемо $\mathbf{dev}(A) = 0$.

Тепер за індукцією для порядкового числа α визначимо $\mathbf{dev}(A) = \alpha$ у випадку, коли $\mathbf{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ та для кожного спадаючого ланцюжка

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

елементів множини A усі, за виключенням скінченної множини замкнених інтервалів $[a_n, a_{n+1}]$ мають відхилення, яке є строго меншим ніж α .

Скажемо тепер, що частично частково впорядкована множина A має відхилення, якщо знайдеться порядкове число α , для якого $\mathbf{dev}(A) = \alpha$.

Образно кажучи, відхилення частково впорядкованої множини показує, наскільки вона є віддаленою від множини з умовою мінімальності, зокрема і від цілком впорядкованих множин. Слід також відмітити, що частково впорядковані множини, що мають відхилення, можна розглядати також як і узагальнення частково впорядкованих множин з умовою максимальності (див., наприклад, [35, 6.1.8]).

Поняття відхилення знайшло корисні застосування в теорії кілець та модулів, само його виникнення пов'язано з цією теорією. Нагадаємо, що *кілець R має вимірність Крулля*, якщо впорядкована за включенням система всіх його лівих ідеалів має відхилення (див, наприклад, [35, 6.2.2]). Вказане відхилення і називається *вимірністю Крулля кільця R* та позначається символом $K(R)$.

Нехай тепер G – група та S – деяка система її підгруп. Цю множину S можна розглядати як частково впорядковану множину відносно теоретико-множинного включення. Оскільки в теорії груп позначення $[a, b]$ є стандартним та зарезервовано для комутатору елементів a, b , то для замкненого інтервалу впорядкованої множини S , що утворюють її підгрупи A, B , будемо використовувати наступне позначення: $[[A, B]]$, тобто

$$[[A, B]] = \{ C / C \in S \text{ та } A \leq C \leq B \}.$$

Якщо частково впорядкована система підгруп S має відхилення, то у цьому випадку будемо говорити, що *система S має вимірність Крулля* та будемо розуміти під цією вимірністю *відхилення частково впорядкованої системи S* і відповідно використовувати для нього наступне позначення $K_S(G)$. Якщо тепер розглянути деяку теоретико-групову властивість ν та визначити за нею наступну систему підгруп

$$S = \{ H / H \in \text{підгрупою, що має властивість } \nu \},$$

То замість $K_S(G)$ будемо писати $K_\nu(G)$.

Нагадаємо, що група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи $\mathfrak{S}$, якщо для кожного спадаючого ланцюжка

$$H_1 \geq H_2 \geq \dots \geq H_n \geq \dots$$

підгруп системи S знайдеться такий номер m , що індекси $[H_n : H_{n+1}]$ будуть скінченими при $n \geq m$. У цьому випадку кожен замкнений інтервал $[[H_n, H_{n+1}]]$ є скінченним і, зокрема, задовольняє умову мінімальності. Таким чином, якщо група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи S , то ця система S має вимірність Крулля, більш того $K_S(G) \leq 1$. Отже це показує, що ми отримали не тільки узагальнення звичайної умови мінімальності, а і слабку умову мінімальності для підгруп системи S .

Повернемось зараз до систем підгруп, що є узагальненнями нормальних. У якості S розглянемо систему $\mathcal{Q}_{non-nn}(G)$ (відповідно $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$) всіх підгруп групи G , які не є наближено нормальними (відповідно не є майже нормальними), та будемо вивчати групи, у яких ці впорядковані системи підгруп мають вимірність Крулля. Цю вимірність ми будемо позначати через $K_{non-nn}(G)$ (відповідно через $K_{non-an}(G)$). Як ми бачили вище, групи, що мають вказані вимірності Крулля, мусять мати досить великі системи наближено нормальних та майже нормальних підгруп. Вивченню цих груп присвячений розділ 2 даної роботи.

У розділі 3 роботи вводиться до розгляду наступне узагальнення наближено нормальних підгруп.

Нехай X – клас груп. Будемо говорити, що група G має X -класи спряжених елементів або, що G є XC -групою, якщо фактор-група $G/C_G(g^G)$ належить до класу X для кожного елемента g групи G . Тут через g^G позначається клас усіх елементів, які спряжені з елементом g , тобто підмножина $\{g^x = x^{-1}gx \mid x \in G\}$.

Якщо $X = I$ – це клас усіх одиничних груп, то клас усіх IC – груп співпадає з класом A усіх абелевих груп. Тому, при належному виборі класу X , клас XC – груп можна розглядати як природне узагальнення класу абелевих груп.

Наприклад, якщо $X = F$ – це клас усіх скінченних груп, то клас усіх FC -груп – це точно клас усіх *FC-груп або груп зі скінченними класами спряжених елементів*. Цей клас є досить вдалим розширенням як класу усіх абелевих груп, так і класу усіх скінченних груп, який наслідуює багато хороших властивостей цих двох класів. Тому теорія FC -груп є однією з найбільш розвинених серед теорій нескінченних груп.

Природними розширеннями класу скінченних груп є клас C усіх черніковських груп та клас P усіх майже поліциклічних груп. Тому якщо $X = C$, то клас усіх CC -груп – це точнісінько клас усіх *груп з черніковськими класами спряжених елементів*, який був введений у розгляд Я.Д. Половицьким [36]. Цей клас не є таким вивченим, як клас FC -груп, але теорія цих груп розвивається досить інтенсивно та має вже багато цікавих та важливих результатів. Якщо ж $X = P$, то приходимо до класу PC -груп або до класу усіх *груп з майже поліциклічними класами спряженості*. Вивчення цього класу тільки починається [37, 38]. Зараз ми розглянемо підклас класу PC -груп, який виникає з наступного розширення поняття наближено нормальних підгруп.

Підгрупа H групи G називається *майже поліциклічно наближеною до нормальної* (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Як видно з цього означення, ці підгрупи будуть природним узагальненням наближено нормальних підгруп. Якщо $G \in PC$ - групою, то для кожного елемента $g \in G$ підгрупа $H_g = \langle g \rangle^G$ буде майже поліциклічною. Звідси випливає, що і для кожної майже поліциклічної підгрупи F групи G її нормальне замкнення F^G буде майже поліциклічною підгрупою. Інакше кажучи, кожна майже поліциклічна підгрупа F групи G є майже поліциклічно наближена до нормальній. Більш того, ця властивість є характеристичною для PC -груп. Тому природно виникає питання про те, а якою ж буде протилежна ситуація. Точніше кажучи, що можна сказати про будову групи G , у якій усі підгрупи,

за винятком майже поліциклічних, будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. Такі групи будемо називати *анти PC-групами*. Вивченню цих груп присвячений розділ 3 даної роботи.

Тема роботи пов'язана з тематикою наукових досліджень Інституту математики НАН України і Національного університету державної податкової служби України (номер державної реєстрації 0107U008317).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі дається огляд літератури, присвяченої дослідженням, що пов'язані з тематикою даної роботи. Наведемо тут також короткий виклад відомих результатів, які будуть використані у подальших дослідженнях.

Нехай ν – деяка властивість, яку можуть мати підгрупи. Для нас важливим буде випадок, коли вона є внутрішньою властивістю. До таких належить така властивість, як, наприклад, властивість бути нормальною, субнормальною, майже нормальною, переставною підгрупами, підгрупою, що має доповнення. Якщо G – група, то позначимо через $\mathcal{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ (відповідно $\mathcal{L}_{\nu}(G)$) систему всіх тих підгруп H , які не мають властивості ν (відповідно мають властивість ν). Однією з важливих задач теорії груп є задача вивчення впливу на будову усієї групи систем $\mathcal{L}_{\nu}(G)$ та $\mathcal{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ для найбільш важливих природних властивостей ν . Ця задача була однією з перших природних задач, вона є актуальною і до нашого часу. Першою роботою, що започаткувала весь цей напрямок, була класична стаття Р. Дедекінда [3], у якій були вивчені скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, тобто групи, у яких система $\mathcal{L}_{\text{norm}}(G)$ співпадає з системою усіх підгруп чи система $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ пуста. Його результати були розширені пізніше на довільні групи Р. Бером [4]. Такі групи пізніше і отримали назву дедекіндових. Вони мають досить просту будову: дедекіндова група або абелева, або має вигляд $A \times B \times Q$, де A – абелева періодична 2'-група, B – елементарна абелева 2-група, Q – група кватерніонів. Наступною була інша класична робота Г. Міллера та Х. Морено [39], в якій вивчалися скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві, тобто система $\mathcal{L}_{\text{ab}}(G)$ складається з усіх власних підгруп чи $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G) = \{G\}$. У цьому ряду важливу роль зіграла також робота

О.Ю. Шмідта [40]. Після цих робіт почалось вивчення груп, як скінченних так і нескінченних, всі власні підгрупи яких мають деяку важливу властивість ν . О.Ю. Шмідт почав вивчення скінченних, у яких система підгруп $\mathcal{L}_{non-\nu}(G)$ є “досить малою” у деякому сенсі. Так у роботі [41] він отримав опис скінченних груп, у яких всі підгрупи з множини $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ спряжені, а у роботі [42] описав скінченні групи, у яких множина $\mathcal{L}_{non-norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Але при переході до нескінченних груп зміст фрази “бути досить малим” стає не дуже визначеним. Тут з’являється досить великий простір для реалізації дуже різних можливостей. С.М. Черніков запропонував розглядати групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-\nu}(G)$ задовольняє деяку умову скінченності, зокрема такі класичні умови скінченності, як умови мінімальності та максимальності. У роботі [43] були розглянуті групи, у яких множина всіх абелевих підгруп задовольняє умову мінімальності, а у роботі [44] були розглянуті групи, у яких множина усіх ненормальних підгруп складається тільки зі скінченних підгруп. Цей підхід виявився дуже цікавим та результативним. Але він зразу показав, що ці дослідження мусять проводитись у деяких природних рамках. Так у роботі [44] С.М. Черніков розглядав періодичні групи, у яких всі нескінченні абелеві підгрупи нормальні при умові існування в них нескінченної абелевої підгрупи. Пізніше В.П. Шунков довів [45], що у нескінченній локально скінченній групі це завжди має місце. Але у загальному випадку це вже не так, оскільки існують нескінченні періодичні групи, всі власні (абелеві) підгрупи яких скінченні. Ціла серія груп такого роду була знайдена О.Ю. Ольшанським (див. його монографію [46]). Ці приклади серед усього іншого показують, що реальне вивчення груп, у яких система підгруп $\mathcal{L}_{non-\nu}(G)$ є “досить малою” чи груп, у яких система підгруп $\mathcal{L}(G)$ є “досить великою” буде можливим тільки при деяких природних додаткових обмеженнях. Так, наприклад, вивчаючи групи, у яких всі нескінченно породжені підгрупи мають деяку властивість ν , як перший крок ми мусимо розглянути групи, що не мають власних нескінченно породжених

підгруп. Як показують приклади О.Ю. Ольшанського, опис таких груп у загальному випадку навряд чи є можливим у найближчий час. Тому природним є розгляд груп, у яких всі нескінченно породжені підгрупи мають деяку властивість ν , у тому ж класі груп, у якому групи, що не мають власних нескінченно породжених підгруп, вже описані. Такими будуть клас розв'язних груп та його природні узагальнення, такі як, наприклад гіперабелеві, радикальні та локально розв'язні групи. Ці класи будуть такою природною межею і для інших аналогічних задач. Повернемося однак до огляду результатів, з яких виникає тематика даної дисертації.

Групи, у яких система всіх ненормальних підгруп задовольняє умову мінімальності також розглядалися С.М. Черніковим [47], а в роботах [44, 47] були розглянуті також деякі узагальнення. Але ми не будемо більш детально торкатися їх, досить детальний огляд їх можна знайти у книзі [48], а також у оглядових статтях [49 – 51]).

Протилежною умовою до умови мінімальності є умова максимальності. Групи, у яких система підгруп, що не є нормальними, задовольняє умову максимальності розглядалися в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного, М.М. Семка [17] та Дж. Кутоло [52]. Якщо клас локально ступінчатих груп з умовою мінімальності для ненормальних підгруп є простим об'єднанням класу дедекіндових груп та класу груп зі звичайною умовою мінімальності, то для груп з умовою максимальності для ненормальних підгруп ситуація є більш багатшою як кількісно, так і якісно.

Якщо в групі всі скінченно породжені підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Природно виникає питання про протилежну ситуацію: що можна сказати про групи, всі підгрупи яких, що не мають скінченної системи породжуючих елементів (нескінченно породжені підгрупи), нормальні. Групи такого роду розглядалися у роботах Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [53], Дж. Кутоло [52], Дж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [54].

Р. Бером [55] та Д.І. Зайцевим [56] були введені дуже цікаві умови скінченності – слабкі умови максимальності та мінімальності для різних типів підгруп. Ці умови та пов’язані з ними результати виявились настільки цікавими та плідними, що породили велику серію робіт, у яких ці умови розглядались для різних типів підгруп. Ми не будемо розглядати тут всі аспекти досліджень, пов’язаних зі слабкими умовами максимальності і мінімальності для різних типів підгруп, для цього можна подивитися оглядову статтю Л.С. Казаріна та Л.А. Курдаченка [57]. Ми зупинимось тут тільки на тих аспектах, які мають відношення до даної тематики.

Нехай M – деяка система підгруп групи G . Будемо говорити, що M задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно максимальності) або група G задовольняє слабку умову мінімальності для M -підгруп чи коротше $Min - \infty - M$ (відповідно максимальності для M -підгруп чи коротше $Max - \infty - M$), якщо G не має таких нескінченних спадаючих (відповідно зростаючих) рядів $\{H_n / n \in \mathbf{N}\}$ підгруп з системи M , що індекси $/H_n : H_{n+1}/$ (відповідно $/H_{n+1} : H_n/$) нескінченні для кожного $n \in \mathbf{N}$. Якщо M – множина всіх ненормальних підгруп, то отримуємо групи зі слабкою умовою мінімальності (відповідно максимальності) для ненормальних підгруп. Ці групи вивчалися в роботі Л.А. Курдаченка та В.Е. Горєцького [58].

Відмітимо також низку інших результатів про групи з малими системами ненормальних підгруп. Якщо в групі всі абелеві підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Тому виникає питання про будову груп, всі неабелеві підгрупи яких нормальні, тобто система всіх ненормальних підгруп складається тільки з неабелевих підгруп. Це питання було поставлено С.М. Черніковим [49]. Розв’язанню цього питання та розгляду деяких його узагальнень був присвячений цикл робіт М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [59 – 75].

Розглянемо зараз узагальнення поняття нормальної підгрупи, що стосуються даної роботи. Одним з таких узагальнень є поняття майже

нормальної підгрупи. Підгрупа H групи G називається майже нормальною в G , коли множина $cl_G(H) = \{ H^g \mid g \in G \}$ – клас усіх спряжених з H підгруп – скінченна. Якщо підгрупа H – нормальна в G , то $cl_G(H) = \{H\}$, так що майже нормальні підгрупи – це природне узагальнення нормальних підгруп. Підгрупа H тоді і тільки тоді майже нормальна в групі G , коли її нормалізатор $N_G(H)$ має скінченний індекс в G (звідси і походить назва таких підгруп). Очевидно перетин двох майже нормальних підгруп та підгрупа, породжена двома майже нормальними підгрупами, будуть майже нормальними підгрупами. Інакше кажучи, множина $\mathcal{Q}_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи буде рішівкою. Але, на відміну від рішівки всіх нормальних підгруп, ця рішівка не буде повною. Групи, у яких $\mathcal{Q}_{an}(G)$ буде повною решівкою, були розглянуті Л.А. Курдаченко та С. Рінауро [25]. Результати цієї роботи показують, що досить багато таких груп мають центр скінченного індексу, тобто є *скінченними над центром*. Скінченні над центром групи грають тут роль, подібну до тієї, яку грають дедекіндові групи при вивченні груп з малою множиною ненормальних підгруп. Б. Нейман у своїй роботі [10] почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінченну множину спряжених. Він охарактеризував групи, всі підгрупи яких майже нормальні, як групи, що мають центр скінченного індексу. Такі групи пізніше стали називати скінченними над центром. Трохи пізніше І.І. Єрьомін [11] довів, що групи, у яких кожна абелева підгрупа є майже нормальною, також будуть скінченними над центром. У статті [12] І.І. Єрьомін почав розглядати групи, у яких усі нескінченні підгрупи майже нормальні. Він отримав деякі умови, при яких такі групи будуть скінченними над центром. Опис таких груп при умові їх локальної майже розв’язності отримали Л.А.Курдаченко, С.С.Левіщенко та М.М.Семко [13]. З цієї роботи починається систематичне вивчення груп, у яких система $\mathcal{Q}_{an}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи G “дуже велика” чи система $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$ всіх підгруп, що не є майже нормальними, “дуже мала”. Так у роботі Л.А. Курдаченка та В.Е.

Горецького розглядались групи, у яких система всіх майже нормальних підгруп є щільною [14], результати цієї роботи були пізніше узагальнені в роботах Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [15, 16]. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [17] були розглянуті групи, у яких (впорядковані за включенням) системи $\mathcal{Q}_{an}(G)$ та $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$ задовольняють умову максимальності, а в роботі Л.А. Курдаченка та В.В. Пилаєва [18] були розглянуті групи, у яких система $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Узагальнення результатів як роботи [17], так і роботи [18], було отримано пізніше в статті Ж. Кутоло та Л.А. Курдаченка [19], де розглядались локально майже розв'язні групи, у яких система $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності та слабку умову мінімальності. С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченко [20] розглянули групи, у яких майже нормальними будуть всі підгрупи за винятком скінченно породжених. Відмітимо також, що у цій роботі розглядається поставлене С.М. Черніковим [49] питання про будову груп, у яких множина $\mathcal{Q}_{non-an}(G)$ складається з нециклічних підгруп. В той же час вивчались і інші властивості системи майже нормальних підгруп. Так К. Касоло вивчав групи, у яких властивість “бути майже нормальною підгрупою” є транзитивною і в цьому зв'язку також розглянув групи, у яких кожна субнормальна підгрупа є майже нормальною [21, 22]. Ця тематика була продовжена у роботі К. Касоло, С. Франціозі, Ф. де Жиованні [23]. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [24] була розглянута зовсім інша ситуація – були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або майже нормальна, або субнормальна.

Інше узагальнення нормальних підгруп – наближено нормальні підгрупи – також вперше почав розглядати Б. Нейман у статті [10]. Такими називають підгрупи, що мають скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Інтерес до системи всіх наближено нормальних підгруп групи виник досить недавно. У роботі Л.А. Курдаченка, М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [15] розглядались групи, у яких система всіх наближено нормальних

підгруп є щільною. У роботі С. Франціозі і Ф. де Жиованні [28] були розглянуті групи, у яких (впорядкована за включенням) система $\mathcal{L}_{\text{non-nn}}(G)$ всіх наближено нормальних підгруп групи G задовольняє умову мінімальності, а у вже цитованій вище роботі А. Галоппо [29] були розглянуті групи, у яких система $\mathcal{L}_{\text{non-nn}}(G)$ задовольняє умову максимальності. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л.А. Курдаченка [30] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відмітимо також статтю К. Мюзелли [31], де вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп.

1.1. Відомі результати

Наведемо у цьому підрозділі деякі поняття та результати, що будуть використовуватись у наших подальших розглядах.

Наведемо спочатку один технічний результат Б. Неймана, який буде далі потрібен при вивченні властивостей наближено нормальних підгруп.

1.1.1. Пропозиція [76]. *Нехай G – група, $H_1, \dots, H_n$ – такі її підгрупи, що $G = H_1 g_1 \cup \dots \cup H_n g_n$ для деяких елементів $g_1, \dots, g_n$. Тоді хоча б одна з підгруп $H_1, \dots, H_n$ має скінченний індекс.*

Наступний результат – це класична теорема І. Шура, одна з перших теорем теорії FC -груп.

1.1.2. Теорема [77]. *Нехай G – група, центр якої має скінченний індекс c . Тоді комутант $[G, G]$ також скінченний, більш того $[G, G]^c = \langle 1 \rangle$.*

1.1.3. Наслідок. *(1) Нехай g – елемент групи G , що має скінченний порядок. Якщо клас спряжених елементів g^G є скінченним, то підгрупа $\langle g^G \rangle$ також буде скінченною (лема Діцмана).*

(2) Нехай G – така група, що $G/\zeta(G)$ – локально скінченна група. Тоді комутант $[G, G]$ також локально скінченний, більш того $\Pi([G, G]) \subseteq \Pi(G/\zeta(G))$.

1.1.4. Теорема. Нехай G – FC-група.

(1) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є періодичною [78].

(2) Комутант $[G, G]$ також періодичний. Зокрема, множина T всіх елементів, що мають скінченні порядки, є (характеристичною) підгрупою і G/T – абелева група без скруту [79].

(3) Фактор-група $G/\zeta(G)$ є резидуально скінченною. Зокрема, центр групи G містить у собі кожну F -досконалу підгрупу.

Наступні теореми описують деякі важливі підкласи класу FC-груп.

1.1.5. Теорема. (1) Нехай G – група, кожна підгрупа якої майже нормальна. Тоді її центр має скінченний індекс [10].

(2) Нехай G – група, кожна абелева підгрупа якої майже нормальна. Тоді її центр має скінченний індекс [11].

(3) Нехай G – група, кожна підгрупа якої наближено нормальна. Тоді її комутант $[G, G]$ буде скінченним [10].

(4) Нехай G – група, кожна абелева підгрупа якої наближено нормальна. Тоді її комутант $[G, G]$ буде скінченним [80, теорема 7.17].

Першими природними розширеннями класу скінченних груп були класи $M^\blacktriangleleft$ груп, що задовольняють умову максимальності для всіх підгруп та $M^\blacktriangleright$ груп, що задовольняють умову мінімальності для всіх підгруп. Обидва ці класи є одними з найстаріших об'єктів вивчення у теорії груп. Однак приклади груп з умовами мінімальності та максимальності для всіх підгруп, що були побудовані О.Ю. Ольшанським та його учнями (див., [46, глави 28, 35, 38]) показують, що такі групи можуть мати властивості, які дуже далекі від властивостей скінченних груп. Майже розв'язні групи з умовою максимальності (тобто групи з класу $SF \cap M^\blacktriangleleft$) або мінімальності (тобто групи з класу $SF \cap M^\blacktriangleright$) є досить близькими до скінченних. Це є точнісінько клас P усіх майже поліциклічних груп та клас C усіх черніковських груп відповідно. Більш того, мають місце наступні теореми.

1.1.6. Теорема [48, теорема 1.1]. *Локально розв'язна група тоді і тільки тоді задовольняє умову мінімальності, коли вона черніковська.*

1.1.7. Теорема [48, теорема 4.3]. *Якщо кожна абелева підгрупа локально розв'язної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

1.1.8. Теорема [45]. *Якщо кожна абелева підгрупа локально скінченної групи G задовольняє умову мінімальності, то G – черніковська.*

Властивості майже поліциклічних груп та черніковських груп були розглянуті дуже детально в багатьох книгах, наприклад, в [48, 81– 88].

Класи M^Δ та M^∇ можуть бути природно об'єднані у класі мінімаксних груп.

Група G називається мінімаксною, якщо вона має скінченний субнормальний ряд, фактори якого належать до класів M^Δ або M^∇ .

Клас розв'язних мінімаксних груп позначається через S_2 [84]. Зокрема, S_2F – це клас груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого – черніковська або майже поліциклічна група.

Теорія майже розв'язних мінімаксних є дуже розвиненою, ці групи вивчались багатьма авторами з різноманітних точок зору (див., наприклад, книгу [86, 10.3, 10.4] та статті [55, 89, 52, 19, 54, 90 – 94, 57, 95 – 100, 58, 101 – 113, 56, 114 – 119]).

Деяке розширення класу мінімаксних груп дає наступний клас груп. Нехай A – абелева група. Покладемо $r_0(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Це число $r_0(A)$ називається 0 -рангом абелевої групи A . Абелева група A тоді і тільки тоді має скінченний 0 -ранг, коли $A/t(A)$ ізоморфна деякій підгрупі адитивної групи $\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}$ (у цій сумі точно r копій $\mathbb{Q}$) (див., наприклад, [120, лема 24.3]). Також відмітимо, що $r_0(A)$ співпадає з $\mathbb{Z}$ -рангом $\mathbb{Z}$ -модуля $A/t(A)$.

Клас розв'язних груп скінченного 0 -рангу співпадає з класом розв'язних A_1 -груп, які були введені А.І. Мальцевим [121].

Нехай A – абелева група, p – просте число, P – силовська p -підгрупа A . Підгрупу $\Omega_1(P)$ можна розглядати як векторний простір над простим полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Покладемо

$$r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Omega_1(P).$$

Число $r_p(A)$ називається p -рангом абелевої групи A .

Абелева група A тоді і тільки тоді має скінченний p -ранг, коли її силовська p -підгрупа P буде черніковською (див., наприклад, [120, теорема 25.1]).

Наслідуючи Д. Робінсона [84, 6.1] визначимо наступним чином класи A_0 та S_0 :

Абелева група A тоді і тільки тоді належить до класу A_0 , коли $r_0(A)$ є скінченним і $r_p(A)$ – також скінченні для всіх простих чисел p .

Розв’язна група G тоді і тільки тоді належить до класу S_0 , коли G має скінченний субнормальний ряд, кожен фактор якого є абелевою A_0 -групою.

Будемо говорити, що група G має скінченний спеціальний ранг $r(G) = r$, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа може бути породжена не більше ніж r елементами [122].

Спеціальний ранг називають також *рангом Мальцева-Прюфера*.

Клас розв’язних груп скінченного спеціального рангу співпадає з класом розв’язних A_2 -груп, які були введені А.І. Мальцевим [121].

Наслідуючи Д. Робінсона [84, 6.1] визначимо наступним чином класи A_1 та S_1 :

Нехай A – абелева група. Визначимо *тотальний ранг* A за наступним правилом

$$r_{\text{tot}}(A) = r_0(A) + \sum_{p \in \Pi(A)} r_p(A).$$

Абелева група A належить до класу A_1 тоді і тільки тоді, коли її тотальний ранг $r_{\text{tot}}(A)$ є скінченним.

Зокрема, це означає, що множина $\Pi(A)$ – скінченна. Далі $A \in A_1$ тоді і тільки тоді, коли A має скінченний 0-ранг і періодична частина A є черніковською підгрупою.

Розв’язна група G тоді і тільки тоді належить до класу S_1 , коли G має скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого є A_1 -групою.

Клас S_1 співпадає з класом розв’язних A_3 -груп, які були введені А.І. Мальцевим [121]. Відмітимо також, що А.І. Мальцев розглянув підклас розв’язних A_4 -груп, який складається з груп, що мають скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого є A_1 -групою зі скінченною періодичною частиною.

Нам будуть потрібні наступні важливі результати відносно абелевих підгруп радикальних груп.

1.1.9. Теорема. (1) *Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи G є A_3 -групою, то G буде розв’язною A_3 -групою [123].*

(2) *Нехай G – радикальна група. Якщо всі абелеві підгрупи групи G будуть мінімаксними, то G буде розв’язною мінімаксною групою [55, 114].*

Наведемо також потрібні нам твердження з теорії абелевих груп.

1.1.10. Пропозиція [124]. *Нехай A – абелева група. Якщо її фактор-група A/A^p є скінченною для деякого простого числа p і P – силовська p -підгрупа A , то $P = K \times D$, де K – скінченна підгрупа, а D – діліма підгрупа.*

1.1.11. Пропозиція (див., наприклад, [120, теорема 23.1]). *Нехай A – діліма абелева група. Тоді $A = \times_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, де або A_λ ізоморфна до адитивної групи раціональних чисел, або A_λ є квазіциклічною p -підгрупою для деякого простого числа p .*

1.1.12. Пропозиція (див., наприклад, [120, теорема 14.5]). *Нехай A – вільна абелева група. Тоді кожна неодиначна підгрупа A також буде вільною.*

1.1.13. Пропозиція (див., наприклад, [2, лемма 5.6]). Нехай D – дедекіндова область, P – її максимальний ідеал та A – P -модуль над кільцем D . Модуль A буде артиновим тоді і тільки тоді, коли $\dim_{D/P} \Omega_1(A) \in$ скінченною.

1.1.14. Теорема (див., наприклад, [125, теорема 6.14]). Нехай D – дедекіндова область та A – P -модуль над кільцем D . Якщо $\text{Ann}_J(A) \in$ ненульовим, то модуль A розкладається у пряму суму циклічних підмодулів.

Тепер нам будуть потрібні наступні важливі результати відносно лінійних груп.

1.1.15. Теорема (див., наприклад, [126, теорема 2.5]). Нехай G – поліциклічна група. Тоді $G \in$ ізоморфною до підгрупи $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$ для деякого натурального числа n . Навпаки, кожна розв'язна підгрупа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$ буде пол циклічною.

1.1.16. Теорема (див., наприклад, [126, лема 2.3]). Нехай G – група, H – її підгрупа, що має скінченний індекс k . Якщо $H \in$ ізоморфною до підгрупи $\mathbf{GL}(n, F)$ для деякого натурального числа n , то G буде ізоморфною до підгрупи $\mathbf{GL}(nk, F)$.

1.1.17. Теорема (теорема Цассенхауза, див., наприклад, [126, теорема 3.7]). Нехай F – поле. Існує така функція $f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, що ступінь розв'язності кожної розв'язної підгрупи $\mathbf{GL}(n, F)$ не перевищують $f(n)$. Зокрема, кожна локально розв'язна підгрупа $\mathbf{GL}(n, F) \in$ розв'язною.

1.1.18. Теорема (альтернатива Тітса, див., наприклад, [126, наслідок 10.17]). Нехай F – поле, G – підгрупа $\mathbf{GL}(n, F)$. Якщо група G не містить у собі вільної нециклічної підгрупи, то G містить у собі таку нормальну розв'язну підгрупу S , що G/S буде локально скінченною. Більш того, якщо $\text{char}(F) = 0$, то G/S буде скінченною.

1.1.19. Теорема (теорема Ф. Холла, див., наприклад, **85**, наслідок до леми 5.35]). *Нехай R – нетерове кільце, G – майже поліциклічна група. Тоді групове кільце RG буде нетеровим.*

РОЗДІЛ 2

ГРУПИ З ВЕЛИКИМИ СИСТЕМАМИ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ТА МАЙЖЕ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

У цьому розділі викладаються результати про будову груп, у яких система підгруп, які не є наближено нормальними (відповідно майже нормальними), мають вимірність Крулля. Як ми вже зазначали, ці групи мусять мати досить великі системи наближено нормальних та майже нормальних підгруп. Це робить можливим досить детально дослідити їх будову, що ми і будемо робити на протязі цього розділу.

2.1. Попередні результати

2.1.1. Означення. Підгрупу H групи G будемо називати наближено нормальною (в G), якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні H^G .

Як вже відмічалось раніше, підгрупи такого роду вперше почав розглядати Б. Нейман у статті [79]. Нам будуть необхідні деякі властивості таких підгруп.

2.1.2. Лема. Якщо H, L – наближено нормальні підгрупи групи G , то підгрупи $K = \langle H, L \rangle$ та $H \cap L$ також будуть наближено нормальними.

Доведення. Дійсно, маємо $H^G = x_1 H \cup \dots \cup x_n H$, $L^G = Ly_1 \cup \dots \cup Ly_m$. Якщо $u \in H^G$, $v \in L^G$, то $u \in x_j H$, $v \in Ly_t$ для деяких $1 \leq j \leq n$, $1 \leq t \leq m$, так що $uv \in x_j H Ly_t$, а тому

$$H^G L^G = \bigcup_{1 \leq j \leq n, 1 \leq t \leq m} x_j H Ly_t.$$

Далі, з включення $HL \leq K$ отримуємо, що $x_j H L y_t \leq x_j K y_t = x_j y_t (y_t^{-1} K y_t)$, отже

$$H^G L^G = \bigcup_{1 \leq j \leq n, 1 \leq t \leq m} x_j y_t (y_t^{-1} K y_t).$$

З пропозиції 1.1.1 випливає, що хоча б одна з підгруп $y_t^{-1} K y_t$ має скінченний індекс в $H^G L^G$, а тому і підгрупа K має скінченний індекс в $H^G L^G$. З очевидного включення $K^G \leq H^G L^G$ випливає, що підгрупа K є наближено нормальною в G . Розглянемо тепер перетин $H \cap L$. Маємо $/H^G \cap L^G : H \cap L / = /H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L / /H^G \cap L^G \cap L : H \cap L /$, і тепер, використовуючи властивості індексів, отримаємо, що

$$\begin{aligned} /H^G \cap L^G : H^G \cap L^G \cap L / &= / (H^G \cap L^G) L : L / \leq /L^G : L / , \\ /H^G \cap L^G \cap L : H \cap L / &= / (H^G \cap L) H : H / \leq /H^G : H / . \end{aligned}$$

З цих співвідношень і випливає скінченність індексу $/H^G \cap L^G : H \cap L /$. З очевидного включення $(H \cap L)^G \leq H^G \cap L^G$ випливає тепер, що підгрупа $H \cap L$ наближено нормальна в G . ■

2.1.3. Лема. Якщо g – такий елемент групи G , що підгрупа $\langle g \rangle$ – наближено нормальна в G , то $g \in FC(G)$.

Доведення. Дійсно, якщо $g \in FC(G)$ і елемент g має скінченний порядок, то зі скінченності індексу $\langle g \rangle^G : \langle g \rangle /$ отримуємо, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є скінченним, і тоді $g \in FC(G)$. Нехай тепер елемент g має нескінченний порядок. Зі скінченності індексу $\langle g \rangle^G : \langle g \rangle /$ отримаємо, що $L = \langle g \rangle^G$ – майже абелева підгрупа. Знайдеться таке число $k \in \mathbf{N}$, що підгрупа $\langle g^k \rangle = K$ – нормальна в L і має в ній скінченний індекс. Нехай $C = C_L(K)$, тоді $/L : C / \leq 2$ та C – скінченна над центром. З класичної теореми І. Шура (теорема 1.1.2) випливає скінченність $[C, C]$. У свою чергу, звідси випливає той факт, що сукупність T усіх елементів скінченного порядку підгрупи C буде (характеристичною) підгрупою C . Оскільки абелева група C/T без скруту містить у собі нескінченну циклічну підгрупу скінченного індексу, то вона сама буде нескінченною циклічною. Отже, L/T містить у собі нормальну циклічну підгрупу C/T , індекс якої не перевищує

числа 2. Якщо L/T не має скруту, то, очевидно, кожен її елемент має в ній скінченну множину спряжених, тобто L/T – FC -група. Але ж FC -група без скруту є абелевою (теорема 1.1.4), а тому L/T – нескінченна циклічна група. Якщо припустити, що L/T має елементи скінченного порядку, то L/T – нескінченна дієдральна група. У цьому випадку, очевидно, C/T буде локально нільпотентним радикалом L/T . Оскільки $g \in C$, то $\langle g \rangle^G \leq C$, і отже $L/T = C/T$. Таким чином, у кожному випадку L/T – нескінченна циклічна група, а тому $L/T = \langle gT \rangle$. Для довільного елемента $x \in G$ маємо тепер $x^{-1}gx = g^t u$, де $t \in \{-1, 1\}$, $u \in T$. Зі скінченності T випливає, що елемент g має в групі G скінченну множину спряжених, тобто $g \in FC(G)$.

■

2.1.4. Лема. Нехай G – група, для якої $K_{non-nn}(G)$ існує.

(1) Якщо H – підгрупа групи G , то $K_{non-nn}(H)$ існує.

(2) Якщо L – нормальна підгрупа групи G , то $K_{non-nn}(G/L)$ існує.

(3) Якщо U, V – підгрупи групи G , причому U – нормальна в V , то $K_{non-nn}(V/U)$ існує.

Ці твердження є майже очевидними.

2.1.5. Означення. Нехай G – група, H – її підгрупа. Будемо говорити, що H є рівномірним добутком підгруп H_λ , $\lambda \in \Lambda$, якщо виконуються наступні умови:

(U 1) $H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda$ для кожної пари індексів $\lambda, \mu \in \Lambda$;

(U 2) $H_\lambda \cap \langle H_\mu / \mu \neq \lambda \rangle = \langle 1 \rangle$.

Той факт, що підгрупа H є рівномірним добутком набору підгруп H_λ , $\lambda \in \Lambda$, будемо позначати за допомогою наступного символу $H = \mathbf{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

Якщо M – підмножина Λ , то символом $H \mathbf{M}$ будемо позначати підгрупу $\langle H_\lambda / \lambda \in M \rangle = \mathbf{Un}_{\lambda \in M} H_\lambda$. Також через $\mathcal{Q}_{Un}(H)$ будемо позначати систему $\{H \mathbf{M} / M \subseteq \Lambda\}$. Система підгруп $\mathcal{Q}_{Un}(H)$ є частково впорядкованою відносно теоретико-множинного включення. Позначимо

також через $[[K, L]]_{Un}$ замкнений інтервал з кінцями K, L впорядкованої множини $\mathcal{Q}_{Un}(H)$.

2.1.6. Лема. Нехай G – група та нехай H – її підгрупа, що розкладається в рівномірний добуток $H = \mathbf{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. Якщо система $\mathcal{Q}_{Un}(H)$ має відхилення, то відповідна множина індексів Λ є скінченною.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай множина Λ буде нескінченною. Далі позначимо через α порядкове число, що задовольняє умову $\text{dev}(\mathcal{Q}_{Un}(H)) = \alpha$. Наше твердження будемо доводити, застосувавши індукцію за числом α . Нехай спочатку $\alpha = 0$. З нашого припущення про нескінченність множини Λ випливає існування нескінченного спадного ланцюжка

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots,$$

що складається з нескінченних підмножин Λ . Однак існування такого ланцюжка тягне за собою існування нескінченного ланцюжка підгруп

$$H \langle \Lambda_1 \rangle > H \langle \Lambda_2 \rangle > \dots > H \langle \Lambda_n \rangle > \dots.$$

З іншого боку, рівність $\text{dev}(\mathcal{Q}_{Un}(H)) = 0$ означає, що впорядкована за включенням множина $\mathcal{Q}_{Un}(H)$ задовольняє умову мінімальності. Отже отримано протиріччя, що доводить наше твердження для випадку, коли $\text{dev}(\mathcal{Q}_{Un}(H)) = 0$.

Припустимо тепер, що $\alpha > 0$ та що наше твердження вже доведено для всіх порядкових чисел, які є строго меншими, ніж α . Використовуючи той факт, що за нашою гіпотезою множина індексів Λ є нескінченною, знайдемо в ній нескінченну спадаючу послідовність

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots.$$

таких нескінченних підмножин Λ , що і різниці $M_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n+1}$ також є нескінченними для кожного номера $n \in \mathbf{N}$. Знову приходимо до нескінченного спадаючого ланцюжка підгруп

$$H \langle \Lambda_1 \rangle > H \langle \Lambda_2 \rangle > \dots > H \langle \Lambda_n \rangle > \dots.$$

Знайдеться такий номер $k \in \mathbf{N}$, що $\text{dev}([H \triangleleft \Lambda_n >, H \triangleleft \Lambda_{n+1}])_{U_n} < \alpha$ для всіх $n \geq k$. Однак

$$H \triangleleft \Lambda_n = H \triangleleft M_n \triangleleft H \triangleleft \Lambda_{n+1} \quad \text{та} \quad H \triangleleft M_n \cap H \triangleleft \Lambda_{n+1} = \langle 1 \rangle.$$

Неважко довести той факт, що замкнені інтервали $[H \triangleleft \Lambda_n >, H \triangleleft \Lambda_{n+1}]_{U_n}$ та $\mathcal{Q}_{U_n}(H \triangleleft M_n)$, які розглядаються як впорядковані за включенням множини, є ізоморфними. Звідси випливає, що остання множина $\mathcal{Q}_{U_n}(H \triangleleft M_n)$ має відхилення, більш того, $\text{dev}(\mathcal{Q}_{U_n}(H \triangleleft M_n)) < \alpha$. Враховуючи нашу індуктивну гіпотезу, ми бачимо, що це означає, що підмножина M_n мусить бути скінчеуною для номерів $n \geq k$. Це останнє протиріччя і завершує доведення нашого результату. ■

2.1.7. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $H \cap K \leq L$;
- (iii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$ (звідси випливає зокрема, що підгрупи K, L також будуть H -інваріантними);
- (iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде наближено нормальною в G .

Доведення. Той факт, що множина Λ є нескінченною, тягне за собою існування таких нескінченних підмножин Δ, Σ в Λ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$ та $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Припустимо, що підгрупа $H K \triangleleft M$ не є наближено нормальною в G для будь-якої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$. Звідси вже буде впливати, що впорядкована за включенням система підгруп $\{H K \triangleleft M / M \subseteq \Delta\}$ мусить мати відхилення. Неважко упевнитись у тому, що ця впорядкована множина є ізоморфною до впорядкованої множини $\mathcal{Q}_{U_n}(K \triangleleft \Delta / L)$ (відмітимо, що $K \triangleleft \Delta / L = \bigtimes_{\lambda \in \Delta} K_\lambda / L$, а прямий добуток є частинним випадком рівномірного

добутку). Наявність такого ізоморфізму вказує на ту обставину, що відхилення має і впорядкована множина $\mathcal{Q}_{Un}(K \triangleleft \Delta / L)$. **Лема 2.1.6** показує, що у цьому випадку підмножина індексів Δ повинна бути скінченною, що суперечить її вибору. Отримана суперечність доводить існування такої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$, що підгрупа $H K \triangleleft M$ буде наближено нормальною в G . Застосувавши ті ж самі аргументи, покажемо, що і підмножина Σ містить у собі нескінченну підмножину Γ , для якої підгрупа $H K \triangleleft \Gamma$ є наближено нормальною в G . З такого вибору підмножин Δ, Σ випливає, що має місце рівність $HL = H K \triangleleft M \cap H K \triangleleft \Gamma$. Оскільки перетин двох наближено нормальних підгруп також є наближено нормальною підгрупою за **лемою 2.1.2**, то HL є наближено нормальною підгрупою G . ■

2.1.8. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{non-nn}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) підмножина $\Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде наближено нормальною в G .

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ та нехай $T/L = \bigtimes_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Застосувавши тепер **лему 2.1.7** до підгруп H, T, L , отримаємо необхідний результат. ■

2.1.9. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{non-nn}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та $K_\lambda \in H$ -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K , L також будуть H -інваріантними;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде наближено нормальною в G .

Доведення. Оскільки підгрупа $K_\lambda \in H$ -інваріантною, то вона буде і $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина $\text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ є скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде нескінченною, так що є можливим застосувати зараз **наслідок 2.1.8.** ■

2.1.10. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна H -інваріантна підгрупа для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді $H \leq \text{FC}(G)$.

Доведення. Дійсно, з **наслідку 2.1.9** отримаємо, що для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle$ буде наближено нормальною в G . Залишається лише відмітити, що за **лемою 2.1.3** кожна циклічна наближено нормальна підгрупа групи міститься в її FC -центрі. ■

2.1.11. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо K – така підгрупа G , що $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де підгрупи $K_\lambda \in H$ неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то $K \leq \text{FC}(G)$.

2.1.12. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Припустимо, що L, K – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупи K, L будуть наближено нормальними в G .

Доведення. З того факту, що множина індексів Λ є нескінченною, випливає існування в ній таких нескінченних підмножин Δ, Σ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, $V = \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$, тоді є очевидними рівності $K = UV$ і $U \cap V = L$. Більш того, будемо мати $K/U \cong \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$ та $K/V \cong \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$. З лема 2.1.7 отримуємо, що підгрупи U, V будуть наближено нормальними. Оскільки перетин двох наближено нормальних підгруп та підгрупа, ними породжена, також є наближено нормальними підгрупами за лемою 2.1.2, то наше твердження і буде випливати з рівностей $K = UV$ і $U \cap V = L$. ■

2.2. Абелеві секції груп, у яких система $\mathcal{L}_{non-nn}(G)$ має вимірність Крулля

2.2.1. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{non-nn}(G)$. Якщо підгрупа H не є наближено нормальною в G , то фактор-група $H/[H, H]$ буде мінімаксною.

Доведення. Виберемо у абелевій фактор-групі $H/[H, H]$ таку вільну абелеву підгрупу $F/[H, H]$, що фактор-група H/F буде періодичною. З наслідку 2.1.12 випливає, що множина $\Pi(H/F)$ повинна бути скінченною. Вільна абелева група $F/[H, H]$ є добутком нескінченних циклічних підгруп C_λ , $\lambda \in \Lambda$: $F/[H, H] = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Нехай тепер p – просте число, що не належить до $\Pi(H/F)$. Маємо

$$D/[H, H] = (F/[H, H])^p = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^p.$$

Якщо припустити тепер, що множина індексів Λ є нескінченною, то у цьому випадку фактор-група F/D буде нескінченною елементарною p -групою. З нашого вибору простого числа p отримуємо, що F/D буде силовською p -підгрупою H/D , і тому маємо прямий розклад $H/D = F/D \times Q/D$, де Q/D – силовська p' -підгрупа H/D . Тоді секція $H/Q \cong (H/D)/(Q/D) \cong F/D$ буде нескінченною елементарною абелевою p -групою. Однак для цього випадку **наслідок 2.1.12** забезпечує той факт, що підгрупа H мусить бути наближено нормальною. Отримана суперечність показує у свою чергу, що множина індексів Λ повинна бути скінченною, а значить, відповідна фактор-група $F/[H, H]$ буде скінченно породженою.

Нехай $r \in \Pi(H/F)$ і позначимо через R/F силовську r -підгрупу H/F . Оскільки R/F є ізоморфною до деякої фактор-групи H , то, застосувавши знову **наслідок 2.1.12** отримаємо, що фактор-група $(R/F)/(R/F)^p$ повинна бути скінченною. У свою чергу разом з **пропозицією 1.1.10** це приводить до прямого розкладу $R/F = K/F \times C/F$, де підгрупа K/F є скінченною, а підгрупа C/F є ділимою. Тепер ми можемо побачити, що H має ділиму r -фактор-групу, яка є ізоморфною до C/F . За **пропозицією 1.1.11** ця фактор-група буде прямим добутком квазіциклічних r -груп. Приймаючи до уваги **наслідок 2.1.12**, отримаємо, що кількість цих квазіциклічних множників мусить бути скінченною. Це означає, що підгрупа C/F буде черніковською. Скінченність K/F тягне за собою той факт, що R/F є черніковською. Оскільки це є справедливим для кожної силовської підгрупи H/F та, як ми вже зазначили вище, множина $\Pi(H/F)$ є скінченною, то і вся фактор-група H/F буде черніковською. Таким чином, абелева група $H/[H, H]$ є розширенням скінченно породженої підгрупи $F/[H, H]$ за допомогою черніковської групи H/F . Це і показує, що фактор-група $H/[H, H]$ буде мінімаксною. ■

2.2.2. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо абелева підгрупа H не є наближено нормальною в G , то вона буде мінімаксною.

2.2.3. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо g – елемент групи G , для якого існує $\langle g \rangle$ -інваріантна нескінченна елементарна абелева p -підгрупа A , то A містить у собі $\langle g \rangle$ -інваріантну підгрупу B , кожна підгрупа якої буде $\langle g \rangle$ -інваріантною.

Доведення. Нехай $J = \mathbf{F}_p \langle x \rangle$ – групове кільце нескінченної циклічної групи $\langle x \rangle$ над простим полем $\mathbf{F}_p$. Дію елементу x на A визначимо за правилом $ax = g^{-1}ag$, $a \in A$. Ця дія може бути розширена природним чином до дії на A усього кільця J . Так визначена дія задає на A структуру модуля над кільцем J . Зазначимо, що групове кільце J є областю головних ідеалів, зокрема, воно буде дедекіндовою областю. Припустимо спочатку, що A не є J -періодичним. Тоді знайдеться такий елемент $a \in A$, що $\text{Ann}_J(a) = \langle 0 \rangle$. У цьому випадку маємо

$$S = \langle a \rangle^{\langle g \rangle} = aJ \cong J.$$

Покладемо $K = \mathbf{F}_p \langle x^p \rangle$, тоді

$$J = K \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus \dots \oplus Kx^{p-1}.$$

Нехай $C = aK$. Зазначимо, що C має нескінченний індекс в A та $CJ = S$ або, в мультиплікативних позначеннях, $C^{\langle g \rangle} = S$. З наслідку 2.1.12 випливає, що кожна підгрупа A є наближено нормальною в G . Зокрема, підгрупа C є наближено нормальною в $\langle A, g \rangle$. Це означає, що індекс $[C^{\langle g \rangle} : C] = [S : C]$ мусить бути скінченним. Отримане протиріччя показує, що модуль A буде J -періодичним. Позначимо через π множину $\text{Ass}_D(A)$, тоді маємо прямий розклад $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, де через A_P позначено P -компоненту A . Покладемо

$$\sigma = \pi \setminus \{(x-1)J \cup \dots \cup (x-p+1)J\}, E = \bigoplus_{P \in \sigma} \Omega_{P,1}(A).$$

Тоді $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де C_λ – простий J -підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Більш того, маємо ізоморфізм $C_\lambda \cong J/P_\lambda$, де P_λ є простим ідеалом кільця J та $P_\lambda \neq (x-k)J$, $1 \leq k \leq p-1$, $\lambda \in \Lambda$. Звідси випливає, що C_λ буде скінченним, а також

$|C_\lambda| > p$. Припустимо тепер, що множина індексів Λ є нескінченною. У кожному підмодулі C_λ виберемо неединичний (чи ненульовий, якщо застосовуються адитивні позначення) елемент c_λ та покладемо $U = \langle c_\lambda / \lambda \in \Lambda \rangle$. За таким вибором U має нескінченний індекс в E та $UJ = E$ (в адитивних позначеннях) або $U^{<g>} = E$ (в мультиплікативних позначеннях). Як уже зазначалось вище, кожна підгрупа A буде наближено нормальною в G . Зокрема, і підгрупа U є наближено нормальною в $\langle A, g \rangle$. А це означає, що індекс $|U^{<g>} : U| = |E : U|$ повинен бути скінченним. Отримана суперечність показує, що множина індексів Λ є скінченна. Беручи до уваги **пропозицію 1.1.13**, бачимо, що E – артиновий J -модуль. Тоді або E буде скінченним, або E містить у собі прюферовий P -модуль V для деякого $P \in \sigma$. У другому випадку з того факту, що адитивна група V є нескінченною елементарною абелевою, отримаємо існування в V такої нескінченної підгрупи W , що індекс $|V : W|$ також є нескінченним. У той же час кожний власний J -підмодуль V буде скінченним, а це тягне за собою рівність $WJ = V$ або, в мультиплікативних позначеннях, $W^{<g>} = V$. Як вже відмічалось раніше, підгрупа W є наближено нормальною в $\langle A, g \rangle$. Це означає, що індекс $|W^{<g>} : W| = |V : W|$ повинен бути скінченним. Отримане протиріччя і доводить скінченність E .

Знайдемо тепер простий ідеал P з множини $\pi \setminus \sigma$ та припустимо, що фактор-модуль $\Omega_{P,2}(A)/\Omega_{P,1}(A)$ є нескінченним. Та обставина, що адитивна група $\Omega_{P,2}(A)$ є елементарною абелевою дає можливість отримати прямий розклад $\Omega_{P,2}(A) = \Omega_{P,1}(A) \oplus Y$ для деякої підгрупи Y . Зокрема, Y буде нескінченною та має нескінченний індекс в $\Omega_{P,2}(A)$, а також має місце рівність $YJ = \Omega_{P,2}(A)$ або, в мультиплікативних позначеннях, $Y^{<g>} = \Omega_{P,2}(A)$. Як і раніше, індекс $|Y^{<g>} : Y| = |\Omega_{P,2}(A) : Y|$ мусить бути скінченним, і знову отримуємо протиріччя, яке доводить скінченність $\Omega_{P,2}(A)/\Omega_{P,1}(A)$. У свою чергу, якщо припустити тепер, що нескінченною буде секція $A_P/\Omega_{P,1}(A)$, то,

використавши аргументи, які вже наводились вище, отримаємо, що A_p/Ω_p , $_1(A)$ містить у собі прюферовий P -підмодуль, що знову приводить до протиріччя. Отже, скінченність A_p/Ω_p , $_1(A)$ є доведеною. Зокрема, $\text{Ann}_J(A_p) \neq \langle 0 \rangle$. У цьому випадку, як показує **теорема 1.1.14**, будемо мати прямий розклад $A_p = \bigoplus_{\mu \in M} L_\mu$, де L_μ – циклічний J -підмодуль для кожного $\lambda \in \Lambda$. Покладемо

$$M_p = \{ \mu \in M \mid |L_\mu| > p \}.$$

Із скінченності фактора A_p/Ω_p , $_1(A)$ впливає тепер скінченність підмножини M_p . Але тоді має місце прямий розклад $A_p = X_p \oplus Z_p$, де X_p, Z_p – це J -підмодулі (тобто вони будуть $\langle g \rangle$ -інваріантними), X_p є скінченним, а Z_p – це однорідний напівпростий J -підмодуль, кожний простий підмодуль якого має простий порядок p . Нехай тепер $B = \bigoplus_{p \in \pi \setminus \sigma} Z_p$. Завдячуючи такому вибору, B буде $\langle g \rangle$ -інваріантною підгрупою, що має в A скінченний індекс. Більш того, кожна підгрупа B , очевидно, буде $\langle g \rangle$ -інваріантною. ■

2.2.4. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо H – підгрупа групи G , для якої існує H -інваріантна нескінченна елементарна абелева p -підгрупа A , p – просте число, то FC -центр групи G містить у собі H .

Доведення. Нехай h – довільний елемент підгрупи H . Оскільки A є H -інваріантною, то вона буде також і $\langle h \rangle$ -інваріантною. З **леми 2.2.3** випливає, що A містить у собі $\langle h \rangle$ -інваріантну підгрупу B скінченного індексу, кожна підгрупа якої також є $\langle h \rangle$ -інваріантною. Зокрема B – нескінченна елементарна абелева підгрупа. **Наслідок 2.1.9** показує тепер, що має місце включення $h \in FC(G)$. Оскільки таке включення є справедливим для кожного елемента $h \in H$, то для підгрупи H отримуємо включення $H \leq FC(G)$. ■

2.2.5. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо G містить у собі нескінченну нормальну елементарну абелеву p -підгрупу для деякого простого числа p , то G – FC -група.

2.2.6. Лема. Нехай G – група, H – її підгрупа. Припустимо, що G містить у собі H -інваріантну абелеву підгрупу A без скруту. Якщо B – сервантна наближено нормальна в G підгрупа A , то B буде H -інваріантною.

Доведення. Нехай $D = B^H$. Оскільки $A \in H$ -інваріантною, то $D \leq A$. З того факту, що B є наближено нормальною в G , випливає, що B також буде наближено нормальною в підгрупі $\langle A, H \rangle$. Звідси випливає, що фактор-група D/B є скінченною. З іншого боку, сервантність підгрупи B в A тягне за собою той факт, що фактор-група A/B не має скруту. Це і доводить рівність $D = B$, яке і показує, що B буде H -інваріантною підгрупою. ■

2.2.7. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо H – підгрупа G , для якої існує H -інваріантна вільна абелева підгрупа F нескінченного рангу, то $H \leq FC(G)$.

Доведення. Підгрупа F розкладається у прямий добуток нескінченних циклічних підгруп C_λ , $\lambda \in \Lambda$: $F = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. З наслідку 2.1.12 випливає, що кожна з підгруп C_λ буде наближено нормальною в G . Кожна з цих підгруп також є сервантною в F . Лема 2.2.6 вказує тепер на те, що підгрупа C_λ буде H -інваріантною для кожного $\lambda \in \Lambda$. Застосовуючи тепер наслідок 2.1.10, отримаємо потрібне нам включення $H \leq FC(G)$. ■

2.2.8. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо G містить у собі нормальну вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу, то G – FC -група.

2.3. Будова груп, у яких система $\mathcal{L}_{\text{non-nn}}(G)$ має вимірність Крулля

2.3.1. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо G – FC -група, то вона має скінченний комутант.

Доведення. Нехай A – довільна абелева підгрупа G . Якщо A не є мінімаксною, то з **наслідку 2.2.2** випливає, що A буде наближено нормальною в G . Розглянемо тепер випадок, коли A не буде мінімаксною. Нехай $B = A \cap \zeta(G)$. За теоремою Р. Бера (**теорема 1.1.4**), фактор-група $G/\zeta(G)$ буде періодичною. Оскільки періодична абелева мінімаксна група є черніковською, то такою буде фактор-група A/B . Позначимо через D/B максимальну ділиму підгрупу A/B . Оскільки G – FC -група, то її центр містить у собі кожну ділиму підгрупу за **теоремою 1.1.4**, так що $D/B \leq \zeta(G/B)$. Підгрупа D/B має в A/B скінченний індекс, тому існує така скінченна підгрупа K/B , що задовольняє наступну умову $A/B = (D/B)(K/B)$. Застосовуючи той факт, що G – FC -група, отримаємо скінченність нормального замкнення $L/B = (K/B)^{G/B}$. Разом з включенням $D/B \leq \zeta(G/B)$ це показує, що $(D/B)(L/B)$ буде нормальною підгрупою в G/B . Маємо тепер

$$\begin{aligned} |L : A| &= |LD : KD| = |LD/B : KD/B| = |/(LD/B)(KD/B) : (KD/B)| = \\ &= |L/B : (L/B) \cap (KD/B)| = |L/B : (K/B)(L/B \cap D/B)| \leq |L/B : K/B|. \end{aligned}$$

Останній індекс є скінченним, а це тягне за собою скінченність індексу $|A^G : A|$. Таким чином, кожна абелева підгрупа буде наближено нормальною в групі G . У цьому випадку **теорема 1.1.5** свідчить про те, що група G має скінченний комутант. ■

2.3.2. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо G містить у собі нескінченну елементарну абелеву p -підгрупу для деякого простого числа p , то G має скінченний комутант.

Доведення. Нехай A – нескінченна елементарна абелева p -підгрупа G . **Наслідок 2.2.2** свідчить про те, що A буде наближено нормальною в G підгрупою. Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи A , тоді індекс $|K : A|$ буде скінченним. За класичною теоремою Пуанкаре, підгрупа A містить у собі нормальну в K підгрупу B скінченного індексу. Зокрема, B буде нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою. Знайдемо в підгрупі K скінченну підгрупу F , що задовольняє умову $K = FA$. Очевидно,

підгрупа $B \in F$ -інваріантною, тому за **наслідком 2.2.4** будемо мати включення $F \leq FC(G)$. Враховуючи тепер лему Діцмана (**наслідок 1.1.3**), отримаємо скінченність нормального замкнення $E = F^G$. В фактор-групі G/E нормальна підгрупа $K/E = FA/E = EA/E \cong A/(A \cap E)$ є нескінченною елементарною абелевою і **наслідок 2.2.5** показує, що G/E буде FC -групою. Застосування **леми 2.3.1** доводить скінченність комутанта фактор-групи G/E . З того факту, що підгрупа E є скінченною, отримаємо тепер скінченність комутанта усієї групи G . ■

Наступна лема є відомою, але оскільки ми не змогли знайти відповідних посилань, то наведемо її тут з доведенням.

2.3.3. Лема. *Нехай G – локально скінченна група, силовські підгрупи якої є скінченними для кожного простого числа p . Якщо множина $\Pi(G)$ є скінченною, то вся група G буде скінченною.*

Доведення. Для кожного простого числа $p \in \Pi(G)$ вибираємо в G силовську p -підгрупу S_p і породжуємо ними підгрупу H : $H = \langle S_p / p \in \Pi(G) \rangle$. Локально скінченність групи G тягне за собою скінченність підгрупи H . Нехай $|H| = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_t^{k_t}$. Припустимо, що $G \neq H$ і знайдемо елемент $x \in G \setminus H$. Не зменшуючи загальності нашого розгляду, можемо припустити, що x є p -елементом для деякого простого числа p . Тоді підгрупа $K = \langle H, x \rangle$ буде скінченною та з її побудови випливає, що вона не співпадає з H . Рівності

$$\Pi(G) = \Pi(H) = \Pi(K) = \{p_1, \dots, p_t\},$$

показують, що $|H| = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_t^{m_t}$, де $m_j \geq k_j$ для усіх $1 \leq j \leq t$. Більш того, якщо $p = p_s$, то $m_s > k_s$. Тоді $p_s^{m_s}$ дорівнює порядку силовської p_s -підгрупи K і $p_s^{k_s}$ дорівнює порядку силовської p_s -підгрупи H . Таким чином, можна побачити, що порядок силовської p_s -підгрупи K є строго більшим, ніж порядок силовської p_s -підгрупи H . З іншого боку, скінченність силовських p -підгруп G тягне за собою їх спряженість для кожного простого числа p . За

своєю побудовою силовські p -підгрупи H будуть силовськими p -підгрупами усієї групи G . Зокрема, силовські p_s -підгрупи K будуть спряженими з силовськими p_s -підгрупами H , а тому вони мусять мати однакові порядки. Це протиріччя доводить рівність $H = G$, а значить, і скінченність групи G . ■

2.3.4. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-ni}}(G)$. Якщо G містить у собі періодичну абелеву підгрупу, що не є черніковською, то G має скінченний комутант.

Доведення. Нехай A – періодична абелева підгрупа, що не є черніковською. Припустимо, що для деякого простого числа p силовська p -підгрупа P з підгрупи A також не буде черніковською. Така ситуація обов’язково виникає у випадку, коли множина $\Pi(A)$ є скінченною. Тоді нижній шар S підгрупи P буде нескінченним. Інакше кажучи, S є нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою G . З лемми 2.3.2 можна отримати тепер, що G має скінченний комутант.

Розглянемо тепер інший з можливих випадків, тобто випадок, коли для будь-якого простого числа p силовська p -підгрупа A буде черніковською. Оскільки A не є черніковською, то це означає нескінченність множини $\Pi(A)$. У свою чергу, з цього випливає, що A містить у собі підгрупу $B = \times_{p \in \Pi(A)} B_p$, де B_p – це скінчена неединична p -підгрупа, $p \in \Pi(A)$. З самої структури підгрупи B можемо побачити, що вона не є мінімаксною, а тому **наслідок 2.2.2** показує, що B буде наближено нормальною в G . Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи B , тоді індекс $|K : B|$ буде скінченним. В такому разі підгрупа B містить у собі нормальну в K підгрупу C скінченного індексу. Нехай $|K : C| = d$ та покладемо $D = K^d$. Оскільки силовські підгрупи K є скінченними, то фактор-група K/D також буде скінченною за **лемою 2.3.3**. Підгрупа D , яка є характеристичною в K , є нормальною в G . Із скінченності K/D випливає нескінченність множини $\Pi(D)$. З **наслідку 2.1.10** отримаємо, що G – FC-група, а застосування **лемми 2.3.1** доводить скінченність коммутанту групи G . ■

2.3.5. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$. Якщо G містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу, то G має скінченний комутант.

Доведення. Нехай F – вільна абелева підгрупа нескінченного рангу. З **наслідку 2.2.2** випливає, що F буде наближено нормальною в G . Позначимо через K нормальне замкнення в G підгрупи F , тоді індекс $|K : F|$ буде скінченним. У цьому випадку підгрупа B містить у собі нормальну в K підгрупу C скінченного індексу. Нехай $|K : C| = d$ та $D = K^d$. Порядки елементів фактор-групи K/D є дільниками натурального числа d , зокрема ця фактор-група буде періодичною. Це означає, що підгрупа D – неединична і тому, враховуючи **пропозицію 1.1.12**, вона сама буде вільною абелевою. Знову враховуючи ту обставину, що K/D є періодичною, отримаємо нескінченність рангу підгрупи D . Підгрупа D , будучи характеристичною в K , є нормальною в G . Із **наслідку 2.2.8** отримаємо, що G – FC -група, а застосування **леми 2.3.1** доводить скінченність коммутанта групи G . ■

Тепер уже є можливим отримати опис груп, для яких існує вимірність Крулля $K_{\text{non-nn}}(G)$ у наступному досить широкому класі груп. Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні. Таким чином, або G має зростаючу неединичну локально нільпотентну підгрупу, або вона має зростаючу неединичну локально скінченну підгрупу. У першому випадку G має нормальну неединичну локально нільпотентну підгрупу і її найбільша нормальна локально нільпотентна підгрупа (локально нільпотентний радикал) є неединичним. У другому випадку G містить у собі нормальну неединичну локально скінченну підгрупу. Майже очевидним також є той факт, що в будь-якій групі G підгрупа, породжена усіма нормальними локально скінченними підгрупами є (найбільшою) нормальною локально скінченною підгрупою. Її називають локально скінченим радикалом групи. Таким чином, узагальнено радикальна група має

зростаючий ряд *нормальних* підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні.

2.3.6. Теорема. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Припустимо, що група G має нескінченний комутант. Нехай A – довільна абелева підгрупа з G та позначимо через T максимальну періодичну підгрупу A . Якщо підгрупа T не є черніковською, то з **наслідку 2.3.4** отримаємо, що G має скінченний комутант. Отримана суперечність показує, що T буде черніковською підгрупою. Припустимо тепер, що підгрупа A має нескінченний 0-ранг. У цьому випадку A містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу. З **леми 2.3.5** знову впливає скінченність коммутанта групи G , тобто знову отримаємо протиріччя. Це протиріччя показує, що $r_0(A)$ є скінченним. У свою чергу це свідчить про той факт, що A буде абелевою A_3 -групою.

Позначимо через R – максимальну нормальну радикальну підгрупу G . З **теорему 1.1.9** отримаємо, що R буде розв'язною A_3 -групою. Нехай L/R – максимальна нормальна локально скінчеуна підгрупа G/R . Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, яка не є черніковською, то тоді **наслідок 2.3.4** забезпечує той факт, що G/R має скінчеуний комутант D/R . Його централізатор $C_{G/R}(D/R)$ буде мати тоді скінчеуний індекс в G/R . Якщо припустити тепер, що G/R є нескінчеуною, то, приймаючи до уваги ту обставину, що $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, отримаємо, що $C_{G/R}(D/R)$ буде неодиначною нільпотентною нормальною підгрупою G/R . Однак це суперечить вибору підгрупи R . Таким чином, у цьому випадку фактор-група G/R повинна бути скінчеуною, і цим все доведено. Тому на черзі постає розгляд випадку, коли всі абелеві підгрупи L/R будуть черніковськими. У цьому випадку група L/R також буде черніковською за теоремою В.П.

Шункова (теорема 1.1.8). Знову з вибору підгруп L, R , випливає скінченність L/R . Припустимо, що фактор-група G/R є нескінченною та позначимо через U/L локально нільпотентний радикал G/L . З наших умов випливає, що U/L буде вільною від скруту локально нільпотентною підгрупою. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Як і раніше, звідси випливає співвідношення $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Враховуючи той факт, що G/R не може містити у собі нормальних локально нільпотентних підгруп, отримуємо рівність $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Але ж у такому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Ці співвідношення свідчать про той факт, що V/R буде неединичною нормальною локально нільпотентною підгрупою G/R , а це суперечить властивостям, що має фактор-група G/R . Отримане протиріччя доводить її скінченність, а з цим і всю теорему. ■

2.3.7. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними, система підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, яка не перевищує 1.

2.3.8. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є наближено нормальними, то або G має скінченний комутант, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є наближено

нормальними, система підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля.

2.4. Попередні результати про групи, у яких система $\mathcal{L}_{non-an}(G)$ має вимірність Крулля

2.4.1. Означення. Підгрупу H групи G будемо називати майже нормальною (в G), якщо H має скінченну множину спряжених.

Інакше кажучи, підгрупа H тоді і тільки тоді є майже нормальною, коли її нормалізатор має скінченний індекс у всій групі G .

Підгрупи такого роду також вперше почав розглядати Б. Нейман у статті [10].

Слід зразу відмітити, що якщо H, L – майже нормальні підгрупи в групі G , то підгрупи $H \cap L$ і $\langle H, L \rangle$ також будуть майже нормальними. Це випливає з очевидних включень

$$N_G(H) \cap N_G(L) \leq N_G(H \cap L) \text{ та } N_G(H) \cap N_G(L) \leq N_G(\langle H, L \rangle),$$

а також того факту, що підгрупа $N_G(H) \cap N_G(L)$ має скінченний індекс в G . Цими властивостями майже нормальних підгруп будемо користуватись далі без спеціальних посилань.

За допомогою майже нормальних підгруп можна дати наступну характеристики FC -центру групи G .

2.4.2. Лема. FC -центр групи G співпадає з множиною усіх тих елементів $g \in G$, для яких підгрупа $\langle g \rangle$ – майже нормальна в G .

Доведення. Дійсно, якщо $g \in FC(G)$, то елемент g має скінченну множину спряжених в G , а тому і підгрупа $\langle g \rangle$ також має скінченну множину спряжених в G , тобто індекс $|G : N_G(\langle g \rangle)|$ буде скінченним.

Навпаки, якщо підгрупа $\langle g \rangle$ майже нормальна в G , то індекс $|G : N_G(\langle g \rangle)|$ є скінченним. У випадку, коли елемент g має скінченний порядок індекс $|N_G(\langle g \rangle) : C_G(\langle g \rangle)|$ буде скінченним, а тому скінченним

буде і індекс $|G : C_G(\langle g \rangle)| = |g^G|$. Коли ж елемент g має нескінченний порядок, то $|N_G(\langle g \rangle) : C_G(\langle g \rangle)| \leq 2$, і знову $|G : C_G(\langle g \rangle)| = |g^G|$ є скінченним. ■

2.4.3. Лема. Нехай G – група, для якої $K_{\text{non-an}}(G)$ існує.

(1) Якщо H – підгрупа групи G , то $K_{\text{non-an}}(H)$ існує.

(2) Якщо L – нормальна підгрупа групи G , то $K_{\text{non-an}}(G/L)$ існує.

(3) Якщо U, V – підгрупи групи G , причому U – нормальна в V , то $K_{\text{non-an}}(V/U)$ існує.

Ці твердження є майже очевидними.

Як і для груп, у яких система підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, нам будуть потрібні наступні технічні результати.

2.4.4. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $H \cap K \leq L$;

(iii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$ (звідси випливає зокрема, що підгрупи K, L також будуть H -інваріантними);

(iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде наближено нормальною в G .

Доведення. Той факт, що множина Λ є нескінченною, тягне за собою існування таких нескінченних підмножин Δ, Σ в Λ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$ та $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Припустимо, що підгрупа $HK\langle M \rangle$ не є майже нормальною в G для будь-якої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$. Звідси вже буде впливати, що впорядкована за включенням система підгруп $\{HK\langle M \rangle / M \subseteq \Delta\}$ мусить мати відхилення. Неважко упевнитись у тому, що ця впорядкована множина є ізоморфною до впорядкованої множини $\mathcal{L}_{\text{un}}(K\langle \Delta \rangle/L)$. Наявність такого ізоморфізму вказує на ту обставину що відхилення має і впорядкована

множина $\mathcal{L}_{Un}(K \triangleleft \Delta / L)$. **Лема 2.1.6** показує, що у цьому випадку підмножина індексів Δ повинна бути скінченною, що суперечить її вибору. Отримана суперечність доводить існування такої нескінченної підмножини $M \subseteq \Delta$, що підгрупа $H K \triangleleft M$ буде майже нормальною в G . Застосувавши ті ж самі аргументи, покажемо, що і підмножина Σ містить у собі нескінченну підмножину Γ , для якої підгрупа $H K \triangleleft \Gamma$ є наближено нормальною в G . З такого вибору підмножин Δ, Σ випливає, що має місце рівність $HL = H K \triangleleft M \cap H K \triangleleft \Gamma$. Оскільки вище вже відмічалось, що перетин двох майже нормальних підгруп також є майже нормальною підгрупою, то HL є наближено нормальною підгрупою G . ■

2.4.5. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \bigstar_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) підмножина $\Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде наближено нормальною в G .

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ та нехай $T/L = \bigstar_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Застосувавши тепер лему 2.4.4 до підгруп H, T, L , отримаємо необхідний результат. ■

2.4.6. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та $K_\lambda \in H$ -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде наближено нормальною в G .

Доведення. Оскільки підгрупа $K_\lambda \in H$ -інваріантною, то вона буде і $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина $\text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ є скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде нескінченною, так що є можливим застосувати зараз **наслідок 2.4.5.** ■

2.4.7. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна H -інваріантна підгрупа для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді $H \leq \text{FC}(G)$.

Доведення. Дійсно, з **наслідку 2.4.6** отримаємо, що для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle$ буде наближено нормальною в G . Залишається лише застосувати **лему 2.4.2.** ■

2.4.8. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо K – така підгрупа G , що $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де підгрупи K_λ є неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то $K \leq \text{FC}(G)$.

2.4.9. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Припустимо, що L, K – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупи K, L будуть майже нормальними в G .

Доведення. З того факту, що множина індексів Λ є нескінченною, випливає існування в ній таких нескінченних підмножин Δ, Σ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset, \Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L, V = \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$, тоді є очевидними рівності $K = UV$ і $U \cap V = L$. Більш того, будемо мати $K/U \cong \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$ та $K/V \cong \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$. З лема 2.4.4 отримуємо, що підгрупи U, V будуть майже нормальними. Оскільки перетин двох майже нормальних підгруп та підгрупа, ними породжена, також є майже нормальними підгрупами, то наше твердження і буде випливати з рівностей $K = UV$ і $U \cap V = L$. ■

2.5. Будова груп, у яких система $\mathcal{Q}_{\text{non-an}}(G)$ має вимірність Крулля

2.5.1. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо підгрупа H не є майже нормальною в G , то фактор-група $H/[H, H]$ буде мінімаксною.

Доведення. Воно майже дослівно повторює доведення лема 2.2.1, тільки замість наслідку 2.1.12 треба використовувати наслідок 2.4.9. ■

2.5.2. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо абелева підгрупа H не є майже нормальною в G , то вона буде мінімаксною.

2.5.3. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо H – підгрупа групи G , для якої існує H -інваріантна нескінченна елементарна абелева p -підгрупа A для деякого простого числа p , то $H \leq \text{FC}(G)$.

Доведення. Нехай h – довільний елемент підгрупи H . З наслідку 2.4.9 випливає, що кожна підгрупа A буде майже нормальною в G . Вибираємо в підгрупі A довільний неединичний елемент a_1 . Оскільки циклічна підгрупа $\langle a_1 \rangle$ є майже нормальною в G , то множина $\{ \langle a_1 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \}$ повинна бути скінченною. Це тягне за собою той факт, що і підгрупа $A_1 = \langle \langle a_1 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \rangle$ мусить бути скінченною. Оскільки підгрупа A є H -інваріантною, то має місце включення $A_1 \leq A$. З того факту, що A є елементарною абелевою випливає, що кожна підгрупа A має доповнення в ній, так що маємо прямий розклад $A = A_1 \times B_1$ для деякої підгрупи B_1 . За тією ж самою причиною підгрупа B_1 також буде майже нормальною, а з цього випливає, зокрема, що множина $\{ B_1^x / x \in \langle h \rangle \}$ мусить бути скінченна. Покладемо

$$\{ B_1^x / x \in \langle h \rangle \} = \{ C_1, C_2, \dots, C_m \}, C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m.$$

Природний ізоморфізм $A/B_1 \cong A^x/B_1^x = A/B_1^x$ показує, що кожна з підгруп A/B_1^x , $x \in \langle h \rangle$, має в A скінченний індекс. Використовуючи тепер скінченність множини $\{ B_1^x / x \in \langle h \rangle \}$, отримаємо звідси, що і підгрупа C має в A скінченний індекс. Вибір підгрупи C засвідчує той факт, що вона буде $\langle h \rangle$ -інваріантною. Включення $C \leq B_1$ приводить нас до рівності $C \cap A_1 = \langle 1 \rangle$.

Нехай $1 \neq a_2 \in C$. Як ми бачили вище, циклічна підгрупа $\langle a_2 \rangle$ буде майже нормальною в G . А це буде причиною того, що система спряжених підгруп $\{ \langle a_2 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \}$ є скінченною. У свою чергу з цього випливає скінченність підгрупи $A_2 = \langle \langle a_2 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \rangle$. З включення $a_2 \in C$ та того факту, що C є $\langle h \rangle$ -інваріантною, та рівності $C \cap A_1 = \langle 1 \rangle$, отримаємо рівність $A_1 \cap A_2 = \langle 1 \rangle$. Як і раніше, підгрупа $A_1 A_2$ має доповнення в A , так що маємо прямий розклад $A = A_1 A_2 \times B_2$ для деякої підгрупи B_2 . Як і раніше, перетин $E = \bigcap_{x \in \langle h \rangle} B_2^x$ має скінченний індекс в A

та є $\langle h \rangle$ -інваріантною. Включення $E \leq B_2$ забезпечує рівність $E \cap A_1 A_2 = \langle 1 \rangle$.

Використовуючи аналогічні аргументи, побудуємо таку нескінченну систему $\{A_n / n \in \mathbf{N}\}$, що складається зі скінченних $\langle h \rangle$ -інваріантних підгруп, що $\langle A_n / n \in \mathbf{N} \rangle = \times_{n \in \mathbf{N}} A_n$. З наслідку 2.4.7 отримаємо включення $h \in FC(G)$. Оскільки воно має місце для кожного елемента $h \in H$, то $H \leq FC(G)$. ■

2.5.4. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G містить у собі нескінченну нормальну елементарну абелеву p -підгрупу, то G – FC-група.

2.5.5. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо H – підгрупа групи G , для якої існує H -інваріантна вільна абелева підгрупа F нескінченного рангу, то $H \leq FC(G)$.

Доведення. Маємо прямий розклад $F = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де C_λ – нескінченна циклічна група для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Нехай h – довільний елемент підгрупи H . У підгрупі F вибираємо довільний неединичний елемент a_1 . З наслідку 2.4.8 випливає, що підгрупа $\langle a_1 \rangle$ буде майже нормальною в G . У цьому випадку множина спряжених підгруп $\{\langle a_1 \rangle^x / x \in \langle h \rangle\}$ повинна бути скінченною. Наслідком цього буде той факт, що підгрупа $A_1 = \langle \langle a_1 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \rangle$ буде скінченно породженою. Оскільки A є H -інваріантною, то має місце включення $A_1 \leq A$. Використовуючи тепер скінченну породженість підгрупи A_1 , можемо бачити, що підмножина $\text{Supp}(A_1)$ буде скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(A_1)$ буде нескінченною. Покладемо $B_1 = \times_{\lambda \in M} C_\lambda$, тоді перетин $A_1 \cap B_1$ буде одиничним, а фактор-група F/B_1 буде вільною абелевою та скінченно породженою. З цього випливає, зокрема, той факт, що підгрупа B_1 не може бути мінімаксною, а тому, зважаючи на наслідок 2.5.2, вона є майже

нормальною в G . Як наслідок цього система спряжених підгруп $\{B_1^x / x \in \langle h \rangle\}$ буде скінченною. Покладемо

$$\{B_1^x / x \in \langle h \rangle\} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}, V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m.$$

Природний ізоморфізм $A/B_1 \cong A^x/B_1^x = A/B_1^x$ свідчить тепер про той факт, що кожна з фактор-груп A/B_1^x , $x \in \langle h \rangle$, буде вільною абелевою та скінченно породженою. Застосувавши теорему Ремака, будемо мати вкладання

$$A/V \hookrightarrow A/V_1 \times A/V_2 \times \dots \times A/V_m.$$

У свою чергу, з нього будемо мати, що A/V є вільною абелевою та скінченно породженою, а значить, підгрупа V буде вільною абелевою та має нескінченний ранг. Із вибору V випливає той факт, що вона є $\langle h \rangle$ -інваріантною. Включення $V \leq B_1$ забезпечує тепер рівність $V \cap A_1 = \langle 1 \rangle$.

Нехай $1 \neq a_2 \in V$. Як ми вже бачили раніше, циклічна підгрупа $\langle a_2 \rangle$ також буде майже нормальною в G , а тому система спряжених підгруп $\{\langle a_2 \rangle^x / x \in \langle h \rangle\}$ є скінченною. Це тягне за собою той факт, що підгрупа $A_2 = \langle \langle a_1 \rangle^x / x \in \langle h \rangle \rangle$ повинна бути скінченно породженою. Включення $a_2 \in V$ разом з $\langle h \rangle$ -інваріантністю підгрупи V та рівністю $V \cap A_1 = \langle 1 \rangle$ забезпечують рівність $A_1 \cap A_2 = \langle 1 \rangle$. Оскільки $A_1 A_2$ має скінченну кількість породжуючих елементів, то повторюючи майже дослівно аргументи, які наводились вище, знайдемо в A таку $\langle h \rangle$ -інваріантну вільну абелеву підгрупу E нескінченного рангу, що $E \cap A_1 A_2 = \langle 1 \rangle$.

Використовуючи і далі аналогічні аргументи, побудуємо таку нескінченну систему $\{A_n / n \in \mathbf{N}\}$, яка складається зі скінченних $\langle h \rangle$ -інваріантних підгруп, що задовольняє умову

$$\langle A_n / n \in \mathbf{N} \rangle = \bigstar_{n \in \mathbf{N}} A_n.$$

Наслідок 2.4.7 забезпечує тепер співвідношення $h \in FC(G)$. Оскільки воно має місце для кожного елемента $h \in H$, то отримаємо фінальне включення $H \leq FC(G)$. ■

2.5.6. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G містить у собі нормальну вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу, то G – FC-група.

2.5.7. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G – FC-група, то вона скінченна над центром.

Доведення. Нехай A – довільна абелева підгрупа G . Якщо A не є мінімаксною, то з **наслідку 2.5.2** випливає, що A буде майже нормальною в G . Розглянемо тепер випадок, коли A є мінімаксною. Нехай $B = A \cap \zeta(G)$. За теоремою Р. Бера (**теорема 1.1.4**), фактор-група $G/\zeta(G)$ буде періодичною. Оскільки періодична абелева мінімаксна група є черніковською, то такою буде фактор-група A/B . Очевидно $N_{G/B}(A/B) = N_G(A)/B$, тому якщо довести, що A/B є майже нормальною підгрупою в G/B , то звідси буде випливати, що і A є майже нормальною підгрупою G . Позначимо через D/B максимальну ділиму підгрупу A/B . Оскільки G є FC-групою, то її центр містить у собі кожну ділиму підгрупу за **теоремою 1.1.4**, так що $D/B \leq \zeta(G/B)$. Підгрупа D/B має в A/B скінченний індекс, тому існує така скінченна підгрупа K/B , що задовольняє наступну умову $A/B = (D/B)(K/B)$. Включення $D/B \leq \zeta(G/B)$ забезпечує нам інше включення $N_{G/B}(K/B) \leq N_{G/B}(A/B)$. Оскільки G – FC-група, то майже очевидним є той факт, що кожна її скінченно породжена підгрупа буде майже нормальною, так що індекс $|G/B : N_{G/B}(K/B)|$ буде скінченним, а це значить, що підгрупа $N_{G/B}(A/B)$ має в G/B скінченний індекс. Таким чином, ми можемо бачити, що кожна абелева підгрупа буде майже нормальною в G . У цьому випадку **теорема 1.1.5** свідчить про те, що центр групи G має скінченний індекс. ■

2.5.8. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G містить у собі нескінченну елементарну абелеву p -підгрупу для деякого простого числа p , то центр групи G буде мати скінченний індекс.

Доведення. Нехай A – нескінченна елементарна абелева p -підгрупа, яку за нашими умовами має G . З **наслідку 2.5.2** підгрупа A буде майже нормальною в усій групі G . Покладемо $K = N_G(A)$. **Наслідок 2.5.4** забезпечує той факт, що K – FC -група, а **лема 2.5.7** доводить тепер, що центр підгрупи K має скінченний індекс. Використовуючи тепер той факт, що індекс $|G : K|$ є скінченним, отримаємо, що G буде майже абелевою групою. Позначимо через L нормальну в G абелеву підгрупу, що має скінченний індекс, а через P позначимо її силовську p -підгрупу. Скінченність фактор-групи G/L забезпечує скінченність $A/(A \cap L)$, а це означає, що перетин $A \cap L$ мусить бути нескінченним. Оскільки остання підгрупа входить до нижнього шару S підгрупи P , то також і S повинна бути нескінченною. Очевидно, підгрупа S є нормальною в G . Застосувавши знову **наслідок 2.5.4** та **лему 2.5.7**, отримаємо, що G буде скінченною над центром. ■

2.5.9. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G містить у собі періодичну абелеву підгрупу, що не є черніковською, то центр групи G має скінченний індекс.

Доведення. Нехай A – періодична абелева підгрупа, що не є черніковською. Припустимо, що для деякого простого числа p силовська p -підгрупа P з підгрупи A також не буде черніковською. Така ситуація обов'язково виникає у випадку, коли множина $\Pi(A)$ є скінченною. Тоді нижній шар S підгрупи P буде нескінченним. Інакше кажучи, S є нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою G . З **леми 2.5.8** можна отримати тепер, що центр групи G має скінченний індекс.

Розглянемо тепер інший з можливих випадків, тобто випадок, коли для будь-якого простого числа p силовська p -підгрупа A буде черніковською. Оскільки A не є черніковською, то це означає нескінченність множини $\Pi(A)$. У свою чергу, з цього випливає, що A містить у собі підгрупу $B = \times_{p \in \Pi(A)} B_p$, де B_p – це скінченна неединична p -підгрупа, $p \in \Pi(A)$. З самої структури підгрупи B можемо побачити, що вона не є мінімаксною, а тому **наслідок**

2.5.2 показує, що B буде майже нормальною підгрупою G . Нехай $K = N_G(B)$. За **наслідком 2.4.7** K має бути FC -групою, а **лема 2.5.7** показує, що K є скінченною над центром. Той факт, що індекс $|G : K|$ є скінченним, показує, що G мусить бути майже абелевою групою. Позначимо через L нормальну в G абелеву підгрупу, що має скінченний індекс, а через T позначимо її максимальну періодичну підгрупу. Якщо для деякого простого числа p силовська p -підгрупа T не буде черніковською, то знову застосувавши аргументи, які вже наводились вище, зможемо прийти до висновку, що центр групи G має скінченний індекс. І наостанок припустимо, що для будь-якого простого числа p силовська p -підгрупа T буде черніковською. Оскільки T містить у собі підгрупу $A \cap L$, яка не є черніковською, то наслідком цього буде нескінченність множини $\Pi(A)$. В такому випадку T містить у собі підгрупу $C = \times_{p \in \Pi(A)} C_p$, де C_p – нижній шар силовської p -підгрупи T , $p \in \Pi(A)$. Слід відмітити, що кожна з підгруп C_p буде G -інваріантною, тому з **наслідку 2.4.7** отримаємо той факт, що G є FC -групою, а **лема 2.5.7** показує, що G є скінченною над центром. ■

2.5.10. Лема. *Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-an}}(G)$. Якщо G містить у собі вільну абелеву підгрупу, що має нескінченний ранг, то центр групи G має скінченний індекс.*

Доведення. Нехай F – вільна абелева підгрупа, що має нескінченний ранг. З **наслідку 2.5.2** випливає, що F буде майже нормальною підгрупою G . Покладемо $K = N_G(F)$. **Наслідок 2.5.6** вказує на ту обставину, що K повинна бути FC -групою, а **лема 2.5.7** показує, що K є скінченною над центром. Скінченність індексу $|G : K|$ свідчить про те, що G є майже абелевою групою. Інакше кажучи, існує абелева підгрупа L , яка є нормальною в усій групі G та має в ній скінченний індекс. Позначимо через T її максимальну періодичну підгрупу. Якщо T не є черніковською підгрупою, то G має центр скінченного індексу за **наслідком 2.5.9**. Тому на черзі є розгляд випадку, коли підгрупа T буде черніковською. З того факту, що фактор-група G/L є

скінченною, впливає скінченність фактору $F/(F \cap L)$, а це означає, враховуючи **пропозицію 1.1.12**, що перетин $F \cap L$ буде вільною абелевою підгрупою нескінченного рангу. Таким чином, ми бачимо, що $r_0(L)$ є нескінченним. Нехай тепер U – вільна абелева підгрупа L , для якої фактор-група L/U вже буде періодичною. Нескінченність $r_0(L)$ тягне за собою і нескінченність $r_0(U)$. Зокрема, підгрупа U не може бути мінімаксною, а це означає, що вона є майже нормальною в G за **наслідком 2.5.2**. У цьому випадку система спряжених підгруп $\{ U^x / x \in G \}$ буде скінченною. Покладемо

$$\{ U^x / x \in G \} = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}, V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m.$$

Природний ізоморфізм $L/U \cong L^x/U^x = L/U^x$ показує, що кожна з фактор-груп L/U^x , $x \in G$, буде періодичною групою. За теоремою Ремака отримуємо вкладання

$$L/V \hookrightarrow L/V_1 \times L/V_2 \times \dots \times L/V_m,$$

яке забезпечує той факт, що і фактор-група A/V також буде періодичною. У свою чергу, це означає, що підгрупа V є вільною абелевою та має нескінченний ранг. За вибором V отримуємо, що вона є нормальною в G . Застосувавши тепер **наслідок 2.5.6** та **лему 2.5.7**, отримаємо, що G є скінченною над центром. ■

Тепер уже є можливим отримати опис груп, для яких існує вимірність Крулля $K_{non-an}(G)$ у класі узагальнено радикальних груп.

2.5.11. Теорема. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є майже нормальними, має вимірність Крулля, то або центр G має скінченний індекс, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Припустимо, що центр групи G має нескінченний індекс та розглянемо довільну абелеву підгрупу A групи G . Позначимо через T максимальну періодичну підгрупу A . Якщо підгрупа T не є черніковською, то з **наслідку 2.5.9** отримаємо, що центр G має скінченний індекс. Отримана

суперечність показує, що T мусить бути черніковською підгрупою. Припустимо тепер, що підгрупа A має нескінченний 0 -ранг. У цьому випадку A містить у собі вільну абелеву підгрупу нескінченного рангу. З леми 2.5.10 знову впливає скінченність індексу центру групи G , тобто знову отримаємо протиріччя. Це протиріччя показує, що $r_0(A)$ є скінченним. У свою чергу це свідчить про той факт, що A буде абелевою A_3 -групою.

Позначимо через R – максимальну нормальну радикальну підгрупу G . Повторюючи тепер майже дослівно доведення останньої частини **теорему 2.3.6** отримаємо, що R буде розв'язною A_3 -групою, а фактор-група G/R буде скінченною. Це і доводить теорему. ■

2.5.12. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є майже нормальними, то або центр G має скінченний індекс, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є майже нормальними, система підгруп, що не є майже нормальними, має вимірність Крулля, яка не перевищує 1.

2.5.13. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є майже нормальними, то або центр G має скінченний індекс, або G буде майже розв'язною A_3 -групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє умову максимальності для підгруп, що не є майже нормальними, система підгруп, що не є майже нормальними, має вимірність Крулля.

2.6. Будова груп, у яких система усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля

У цьому останньому підрозділі буде вивчатися структура груп, у яких система $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля. Ми не можемо отримати теорему про цю будову як наслідок з попередніх результатів, тому що ненормальна підгрупа може виявитись і майже нормальною, або наближено нормальною. Інакше кажучи, з того факту, що система усіх ненормальних підгруп групи має вимірність Крулля, не випливає, що системи усіх підгруп групи, що не є майже нормальними або наближено нормальними, мають вимірність Крулля. Однак є можливим тут застосувати розглянуту вище техніку доведень.

2.6.1. Лема. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $H \cap K \leq L$;

(iii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$ (звідси випливає зокрема, що підгрупи K, L також будуть H -інваріантними);

(iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде нормальною в G .

Доведення. Ми можемо майже дослівно повторити тут усі ті аргументи, які були використані при доведенні лема 2.1.7, а також використати лему 2.1.6 і той очевидний факт, що перетин двох нормальних підгруп також є нормальною підгрупою. ■

2.6.2. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та $K_\lambda \in H$ -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K , L також будуть H -інваріантними;

(iii) підмножина $\Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде нормальною в G .

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ та нехай $T/L = \bigtimes_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Застосувавши тепер лему 2.6.1 до підгруп H , T , L , отримаємо необхідний результат. ■

2.6.3. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L , K , H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) L є нормальною підгрупою в K ;

(ii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та $K_\lambda \in H$ -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K , L також будуть H -інваріантними;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде нормальною в G .

Доведення. Оскільки підгрупа $K_\lambda \in H$ -інваріантною, то вона буде і $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина $\text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ є скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде нескінченною, так що є можливим застосувати зараз наслідок 2.6.2. ■

2.6.4. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що K , H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

(i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неединична H -інваріантна підгрупа для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;

(iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді кожна підгрупа H (і зокрема сама підгрупа H) буде нормальною в усій групі G .

Доведення. Дійсно, з наслідку 2.6.3 отримаємо, що для довільного елемента $h \in H$ циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ буде нормальною в G . Звідси і буде випливати, що кожна підгрупа H є нормальною. ■

2.6.5. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Якщо K – така підгрупа G , що $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де підгрупи K_λ є неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то кожна підгрупа K (і зокрема сама підгрупа K) буде нормальною в усій групі G .

2.6.6. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупи K, L будуть нормальними в G .

Доведення. З того факту, що множина індексів Λ є нескінченною, випливає існування в ній таких нескінченних підмножин Δ, Σ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, $V = \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$, тоді є очевидними рівності $K = UV$ і $U \cap V = L$. Більш того, будемо мати $K/U \cong \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$ та $K/V \cong \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$. З леми 2.6.1 отримуємо, що підгрупи U, V будуть нормальними. Оскільки перетин двох нормальних підгруп та підгрупа, ними породжена, також будуть нормальними підгрупами, то наше твердження і буде випливати з рівностей $K = UV$ и $U \cap V = L$. ■

2.6.7. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Якщо група G містить у собі підгрупу $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ є неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є

нескінченною, то кожна підгрупа із G буде нормальною, тобто G є дедекіндовою групою.

Доведення. Нехай h – довільний елемент підгрупи G . З наслідку 2.6.5 випливає, що кожна підгрупа K буде нормальною в G . З наслідку 2.6.3 отримаємо тепер, що циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ повинна бути нормальною в G . Звідси тривіально випливає, що кожна підгрупа G буде нормальною. ■

2.6.8. Наслідок. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Якщо група G містить у собі абелеву підгрупу A , яка є прямим добутком нескінченної множини неодиначних циклічних груп, то G буде дедекіндовою групою.

2.6.9. Теорема. Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є нормальними, має вимірність Крулля, то або кожна підгрупа G буде нормальною, або G буде майже розв'язною мінімаксною групою.

Доведення. Припустимо, що група G не є дедекіндовою. Вибираємо в групі G довільну абелеву підгрупу A та позначимо через T максимальну періодичну підгрупу A . Якщо підгрупа T не є черніковською, то, очевидно, вона містить у собі підгрупу, яка є прямим добутком нескінченної множини скінченних циклічних підгруп. Тоді з наслідку 2.6.8 отримаємо, що G буде дедекіндовою групою. Зокрема, якщо група G буде періодичною, то або вона дедекіндова, або кожна її абелева підгрупа є черніковською. В останньому випадку, враховуючи той факт, що періодична узагальнено радикальна група є локально скінченною, з теореми 1.1.8 отримаємо, що група G є черніковською. Припустимо тепер, що G не є періодичною. У цьому випадку можна вважати, що і A не є періодичною. Вибираємо в A вільну абелеву підгрупу C , для якої фактор-група A/C вже буде періодичною. Якщо підгрупа C має нескінчений 0-ранг, то з наслідку 2.6.8 отримаємо, що G буде дедекіндовою групою. Як наступний крок розглянемо ситуацію, коли C має скінчений 0-ранг. Припустимо, що підгрупа A не є мінімаксною.

Покладемо $E = C^8$. Позначимо через $\mathbf{P}$ множину всіх простих чисел. Для довільного простого p розглянемо фактор-групу A/E^p . Той факт, що A не є мінімаксною, означає, що мінімаксною не буде також і фактор-група A/E^p . Оскільки вона є періодичною, це, у свою чергу, означає, що множина $\Pi(A/E^p)$ мусить бути нескінченною. Тоді фактор-група A/E^p містить у собі підгрупу, що розкладається у прямий добуток нескінченної множини неединичних циклічних підгруп. З **наслідку 2.6.6** випливає, що підгрупа E^p буде нормальною в усій групі G . Тепер з **наслідку 2.6.8** отримаємо, що G/E^p буде дедекіндовою групою. За вибором цієї фактор-групи, вона має елементи, порядок яких дорівнює 8. Якщо зважити на ту обставину, що неабелева дедекіндова група не має елементів порядку 8, то це означає, що G/E^p буде абелевою. Слід підкреслити, що це є вірним для кожного простого числа p . Оскільки E є вільною абелевою групою, то $\bigcap_{p \in \mathbf{P}} E^p = \langle 1 \rangle$. Застосувавши тепер класичну теорему Ремака, отримаємо вкладання

$$G \hookrightarrow \prod_{p \in \mathbf{P}} G/E^p,$$

яке, у свою чергу, доводить, що G буде абелевою групою.

Тепер залишилося розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи групи G будуть мінімаксними. Позначимо через R – максимальну нормальну радикальну підгрупу G . З **теореми 1.1.9** отримаємо, що R буде розв'язною мінімаксною групою. Припустимо, що $R \neq G$.

Нехай L/R – максимальна нормальна локально скінченна підгрупа G/R . Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, яка не є черніковською, то, як ми бачили вище, **наслідок 2.6.8** забезпечує той факт, що G/R є дедекіндовою. Але в цьому випадку є нільпотентною групою, клас нільпотентності якої не перевищує число 2. Звідси випливає, що $G = R$, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, на черзі постає розгляд випадку, коли всі абелеві підгрупи L/R будуть черніковськими. У цьому випадку група L/R також буде черніковською за теоремою В.П. Шункова (**теорема 1.1.8**). Знову з вибору підгруп L, R , випливає скінченність L/R . Припустимо, що фактор-

група G/R є нескінченною та позначимо через U/L локально нільпотентний радикал G/L . З наших умов випливає, що U/L буде вільною від скруту локально нільпотентною підгрупою. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Звідси випливає співвідношення $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Враховуючи той факт, що G/R не може містити у собі нормальних локально нільпотентних підгруп, отримуємо рівність $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Але ж у такому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Ці співвідношення свідчать про той факт, що V/R буде неединичною нормальною локально нільпотентною підгрупою G/R , а це суперечить властивостям, що має фактор-група G/R . Отримане протиріччя доводить її скінченність, а з цим і всю теорему. ■

2.6.10. Наслідок. *Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є нормальними, то або кожна підгрупа G буде нормальною, або G буде майже розв'язною мінімаксною групою.*

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є нормальними, система підгруп, що не є нормальними, має вимірність Крулля, яка не перевищує 1. ■

Для локально майже розв'язних груп аналогічний результат був доведений в роботі [58].

РОЗДІЛ 3

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

У цьому розділі викладаються результати про будову груп, які у деякому сенсі є протилежними до груп з майже поліциклічними класами спряжених елементів. Основне поняття, що розглянуте у даному розділі – це поняття підгрупи, майже поліциклічно наближеної до нормальної. Такі підгрупи є досить широким цікавим узагальненням поняття наближено нормальних підгруп. У даному розділі розглядаються групи, що мають досить велику систему підгруп, майже поліциклічно наближених до нормальних.

3.1. Властивості підгруп, майже поліциклічно наближених до нормальних

3.1.1. Означення. Підгрупа H групи G називається майже поліциклічно наближеною до нормальної (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною.

3.1.2. Лема. Нехай G – група. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що є майже поліциклічно наближені до нормальних. Тоді і їх перетин $H \cap K$ буде підгрупою, майже поліциклічно наближеною до нормальної.

Доведення. Дійсно, за означенням підгрупа H (відповідно K) містить у собі таку нормальну в H^G (відповідно в K^G) підгрупу U (відповідно V), що H^G/U (відповідно K^G/V) буде майже поліциклічною. Підгрупа $H^G \cap K^G \cap$

$U = K^G \cap U$ буде нормальною в $H^G \cap K^G$, і відповідно, $H^G \cap K^G \cap V = H^G \cap V$ є нормальною в $H^G \cap K^G$. З рівності

$$U \cap V = H^G \cap U \cap V \cap K^G = (K^G \cap U) \cap (H^G \cap V)$$

отримаємо, що підгрупа $U \cap V$ нормальна в $H^G \cap K^G$. Мають місце наступні співвідношення

$$(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U) = (H^G \cap K^G)/(H^G \cap K^G \cap U) \cong (H^G \cap K^G)U/U \leq H^G/U$$

та

$$(K^G \cap U)/(U \cap V) = (K^G \cap U)/(K^G \cap U \cap V) \cong (K^G \cap U)V/V \leq K^G/V,$$

які свідчать про те, що обидві фактор-групи $(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U)$ та $(K^G \cap U)/(U \cap V)$ будуть майже поліциклічними. Звідси випливає, що майже поліциклічною буде і наступна фактор-група $(H^G \cap K^G)/(U \cap V)$. Включення $U \cap V \leq H \cap K$ доводить тепер, що перетин $H \cap K$ буде підгрупою, що майже поліциклічно наближена до нормальної. ■

3.1.3. Пропозиція. *Нехай G – група автоморфізмів майже поліциклічної групи K . Якщо G є локально узагальнено радикальною групою, то вона буде майже поліциклічною.*

Доведення. З теорем 1.1.15 та 1.1.16 отримаємо, що група G ізоморфно вкладається в лінійну групу $GL(n, \mathbf{Z})$ для деякого натурального числа n . Нехай H – довільна розв’язна підгрупа групи G . Ми можемо розглядати G як підгрупу $GL(n, \mathbf{Q})$. Тепер з класичної теореми Цассенхауза (теорема 1.1.17) знайдеться таке натуральне число k , яке залежить тільки від n , що ступінь розв’язності підгрупи H не перевищує числа k . Звідси за допомогою досить стандартних аргументів неважко отримати, що також і довільна радикальна підгрупа групи G буде розв’язною і ступінь її розв’язності не перевищує числа k . У свою чергу це тягне за собою той факт, що кожна локально радикальна підгрупа групи G буде розв’язною і ступінь її розв’язності не перевищує числа k . У цьому випадку неважко довести, що тоді група G містить у собі найбільшу нормальну

розв'язну підгрупу S . Оскільки S також є підгрупою $GL(n, \mathbf{Z})$, то з **теореми 1.1.15** впливає той факт, що S мусить бути поліциклічною підгрупою. Оскільки, очевидно, локально узагальнено радикальна група не містить у собі вільних нециклічних підгруп, то теорема Тітса (**теорема 1.1.18**) показує, що фактор-група G/S буде скінченною. Таким чином, з доведеного вище про підгрупу S впливає, що і вся група G є майже поліциклічною. ■

Нехай G – група і X – клас груп. Покладемо

$$XC(G) = \{ x \in G \mid G/C_G(g^G) \in X \}.$$

У загальному випадку (тобто для довільного класу X) підмножина $XC(G)$ не буде підгрупою в G . Однак, якщо клас груп X є формацією (тобто він буде замкнений відносно переходу до фактор-груп та підпрямих добутків), то $XC(G)$ буде навіть характеристичною підгрупою. У цьому випадку підгрупа $XC(G)$ називається *XC-центром групи G* . Якщо $X = P$ – це клас усіх майже поліциклічних груп, то будемо відповідно говорити про *PC-центр групи* та позначати його через $PC(G)$. Очевидним є той факт, що клас усіх майже поліциклічних груп утворює формацію і тому підмножина $PC(G)$ буде характеристичною підгрупою групи G .

3.1.4. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо g – такий її елемент, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою, то $g \in PC(G)$.*

Доведення. Покладемо $H_g = \langle g \rangle^G$. З пропозиції 3.1.3 отримаємо, що фактор-група $G/C_G(H_g)$ буде майже поліциклічною. Але ж це і буде означати, що $g \in PC(G)$. ■

3.1.5. Наслідок. *Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо H – майже поліциклічна нормальна підгрупа G , то для кожного елемента $g \in H$ має місце включення $g \in PC(G)$.*

Доведення. Дійсно, має місце включення $\langle g \rangle^G \leq H$, яке доводить той факт, що $\langle g \rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. Тепер необхідно застосувати **наслідок 3.1.4**. ■

3.1.6. Наслідок. Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо її майже поліциклічна підгрупа H буде майже поліциклічно наближена до нормальної, то $H \leq PC(G)$.

Доведення. Підгрупа H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , яка визначає майже поліциклічну фактор-групу H^G/L . Але ж у цьому випадку і сама підгрупа H^G буде майже поліциклічною. З наслідку 3.1.5 отримаємо тепер включення $H \leq PC(G)$. ■

3.1.7. Наслідок. Нехай G – локально узагальнено радикальна група. Якщо її циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ є майже поліциклічно наближена до нормальної, то $g \in PC(G)$.

Наступні результати є відомими, але ми не змогли відшукати відповідних посилань і тому наводимо їх тут з доведеннями.

3.1.8. Пропозиція. Нехай G – група і C – підгрупа її центру. Якщо фактор-група G/C є поліциклічною, то комутант групи G також буде поліциклічним.

Доведення. Фактор-група G/C має субнормальний ряд з циклічними факторами, і тому група G має субнормальний ряд

$$C = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G,$$

де $H_{j+1}/H_j = \langle c_{j+1} H_j \rangle$ – циклічний фактор, $0 \leq j \leq n-1$. Для доведення скористаємось індукцією за числом n . Якщо $n = 1$, то фактор група G/C буде циклічною, і з вибору підгрупи C впливає, що уся група G буде абелевою. У такому разі її комутант буде одиничною підгрупою, зокрема він є скінченним. Нехай тепер $n > 1$, покладемо $H_{n-1} = H$ та нехай вже доведено, що підгрупа $K = [H, H]$ буде поліциклічною. Фактор-група H/K є абелевою, а H/CK буде ще і скінченно породженою. Покладемо також $x = c_n$, тоді маємо $G/H = \langle xH \rangle$. Розглянемо відображення $\psi: aK \longrightarrow [x, a] K, a \in H$. Оскільки H/K є абелевою, неважко побачити, що це відображення буде ендоморфізмом підгрупи H/K , причому $\text{Im } \psi = [xK, H/K]$, $\text{Ker } \psi = C_{H/K}(xK)$. З вибору підгрупи C отримаємо включення $C \leq \text{Ker } \psi$, яке доводить той факт,

що фактор-група $(H/K)/\mathbf{Ker} \psi$ буде скінченно породженою. Тепер ізоморфізм $\mathbf{Im} \psi \cong (H/K)/\mathbf{Ker} \psi$ показує, у свою чергу, що підгрупа $\mathbf{Im} \psi = [xK, H/K] = T/K$ є скінченно породженою. Фактор-група $(G/K)/(T/K)$ уже буде центральним розширенням підгрупи $(H/K)/(T/K)$ за допомогою циклічної групи. Тому вона буде абелевою, а тому $[G, G] \leq T$. У свою чергу, T є розширенням поліциклічної підгрупи K за допомогою скінченно породженої абелевої групи T/K . Таким чином, T , а отже і $[G, G]$, буде поліциклічною підгрупою, що і доводить результат. ■

3.1.9. Теорема. *Нехай G – група і C – підгрупа її центру. Якщо фактор-група G/C є майже поліциклічною, то комутант групи G також буде майже поліциклічним.*

Доведення. За умовами теореми, фактор-група G/C містить у собі таку нормальну поліциклічну підгрупу H/C , що G/H є скінченною. З пропозиції 3.1.8 випливає, що комутант $D = [H, H]$ буде поліциклічною підгрупою. Для доведення теореми досить довести тепер, що фактор-група G/D має майже поліциклічний комутант. Тому, не применшуючи загальності розгляду, будемо вважати підгрупу D одиничною. Інакше кажучи, можна вважати, що H – абелева підгрупа. Нехай $\{g_1, \dots, g_k\}$ – набір представників всіх суміжних класів групи G за підгрупою H , взятих по одному у кожному суміжному класі. Розглянемо відображення $\psi_j: a \longrightarrow [g_j, a], a \in H, 1 \leq j \leq k$. Оскільки H є абелевою, неважко побачити, що це відображення буде ендоморфізмом підгрупи H , причому $\mathbf{Im} \psi_j = [g_j, H], \mathbf{Ker} \psi_j = C_H(g_j)$. Оскільки центр групи G містить у собі підгрупу C , то отримуємо включення $C \leq \mathbf{Ker} \psi_j$. Це включення показує, що фактор-група $H/\mathbf{Ker} \psi_j$ мусить бути скінченно породженою. Використавши тепер ізоморфізм $\mathbf{Im} \psi_j \cong H/\mathbf{Ker} \psi_j$, у свою чергу можемо побачити, що підгрупа $\mathbf{Im} \psi_j = [g_j, H]$ є скінченно породженою підгрупою. Оскільки це є вірним для кожного індексу $j, 1 \leq j \leq k$, то підгрупа $K = [g_1, H] \dots [g_k, H]$ також буде скінченно породженою. Якщо x –

довільний елемент групи G , то $x \in g_j H$ для деякого j , а тому $x = g_j h$ для деякого елемента $h \in H$. Якщо тепер $a \in H$, то маємо

$$[x, a] = [g_j h, a] = [g_j, a]^h [h, a] = [g_j, a] \in K.$$

Це означає, що $[G, H] \leq K$, а отже центр фактор-групи G/K містить підгрупу H/K . Оскільки фактор-група $(G/K)/(H/K)$ є скінченною, то за класичною теоремою Шура (**теорема 1.1.2**) комутант $L/K = [G/K, G/K]$ буде скінченним. Врахувавши інформацію про структуру підгрупи K , отримаємо, що підгрупа L буде майже поліциклічною, що доводить теорему. ■

3.1.10. Теорема. Нехай G – група. Якщо g – такий її елемент, що $g \in PC(G)$, що нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ має майже поліциклічний комутант та задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп.

Доведення. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$, $C = C_G(H)$. За вибором елемента g , фактор-група G/C буде майже поліциклічною. Очевидно центр підгрупи H містить у собі перетин $C \cap H$. Згадавши про ізоморфізм $H/(C \cap H) \cong HC/C$ і взявши до відома **теорему 3.1.9**, отримаємо, що комутант K підгрупи H буде майже поліциклічним. Відмітимо, що підгрупа K буде нормальною в усій групі G . Абелеву групу H/K ми можемо розглядати як модуль над цілочисленим груповим кільцем $\mathbb{Z}L$, де $L = G/C$ – майже поліциклічна група. За класичною теоремою Ф. Холла (**теорема 1.1.19**) кільце $\mathbb{Z}L$ буде нетеровим. За своєю побудовою $\mathbb{Z}L$ -модуль H/K буде циклічним, а тому він буде гомоморфним образом кільця $\mathbb{Z}L$, що розглядається як модуль над самим собою. З цього буде випливати, що H/K буде нетеровим $\mathbb{Z}L$ -модулем. Оскільки кожний $\mathbb{Z}L$ -підмодуль H/K буде G -інваріантною підгрупою, звідси і отримуємо, що фактор H/K задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. Врахувавши тепер той факт, що K є майже поліциклічною підгрупою, і отже задовольняє умову максимальності для всіх підгруп, одержуємо, що і нормальна підгрупа H також задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. ■

3.1.11. Лема. Нехай G – група і H – її нормальна підгрупа. Нехай T – підмножина елементів групи G , що задовольняє умову $G = \langle T \rangle C_G(H)$. Тоді центр групи G містить у собі перетин $H \cap C_G(T)$.

Доведення. Нехай x – довільний елемент групи G , $y \in H \cap C_G(T)$. Тоді $x = zb$ для деяких елементів $z \in \langle T \rangle$ та $b \in C_G(H)$. Нагадаємо, що $C_G(T) = C_G(\langle T \rangle)$. Враховуючи цю рівність, маємо тепер

$$[x, y] = [zb, y] = [z, y]^b [b, y] = 1.$$

Це і означає, що $y \in \zeta(G)$. ■

3.1.12. Теорема. Група G тоді і тільки тоді буде РС-групою, коли для кожного її елемента g нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ його циклічної підгрупи $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою.

Доведення. Припустимо спочатку, що G є РС-групою. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$, $C = C_G(H)$. За визначенням РС-групи, фактор-група G/C буде майже поліциклічною. Зокрема, вона буде скінченно породженою. Тому існує така скінченна підмножина T , що $G = \langle T \rangle C$. З того факту, що G є РС-групою випливає тоді, що фактор-група $G/C_G(T)$ буде майже поліциклічною. Ізоморфізм

$$H/(C_G(T) \cap H) \cong HC_G(T)/C_G(T) \leq G/C_G(T)$$

показує, що фактор-група $H/(C_G(T) \cap H)$ буде майже поліциклічною. З леми 3.1.11 отримуємо, що центр групи G містить у собі перетин $C_G(T) \cap H$. З іншого боку теорема 3.1.10 показує, що нормальна підгрупа H задовольняє умову максимальності для G -інваріантних підгруп. Врахувавши цю обставину, отримаємо, що центральна підгрупа $C_G(T) \cap H$ мусить бути скінченно породженою. Разом з цим фактом та обставина, що $H/(C_G(T) \cap H)$ є майже поліциклічною групою, показує що і вся підгрупа H буде майже поліциклічною.

Навпаки, припустимо, що для кожного елемента g його нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою. З цього факту за допомогою трансфінітної індукції неважко отримати, що група G має

зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого або скінченні, або скінченно породжені абелеві групи. Зокрема G буде (локально) узагальнено радикальною групою. З **наслідку 3.1.4** випливає тоді, що $G = PC(G)$, тобто G буде PC -групою. ■

3.1.13. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли для кожної її скінченно породженої підгрупи H її нормальне замкнення H^G є майже поліциклічною підгрупою.

3.1.14. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли кожна її циклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Доведення. Припустимо спочатку, що G є PC -групою. Покладемо $H = \langle g \rangle^G$. З **теореми 3.1.12** випливає, що нормальна підгрупа H буде майже поліциклічною. Очевидним чином це означає, що підгрупа $\langle g \rangle$ є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Навпаки, нехай кожна циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ групи G буде майже поліциклічно наближена до нормальної. З цього випливає, що її нормальне замкнення $\langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою. Застосувавши тепер **теорему 3.1.12**, отримаємо той факт, що G є PC -групою. ■

3.1.15. Наслідок. Група G тоді і тільки тоді буде PC -групою, коли кожна її майже поліциклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Доведення. Дійсно, нехай спочатку G є PC -групою. Вибираємо в ній довільну майже поліциклічну підгрупу H . Тоді H має скінченну множину $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ породжуючих елементів. З **теореми 3.1.12** випливає, що нормальне замкнення $\langle g_j \rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою для кожного індексу j , $1 \leq j \leq n$. Тоді майже поліциклічною буде і добуток $\langle g_1 \rangle^G \dots \langle g_n \rangle^G = H^G$. Очевидним чином це означає, що підгрупа H є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Навпаки, якщо кожна майже поліциклічна підгрупа групи G буде майже поліциклічно наближена до нормальної, то те ж саме буде мати місце і

для кожної її циклічної підгрупи. Тепер залишилось застосувати **наслідок 3.1.14.** ■

В роботі [37] було розглянуто інше розширення поняття наближено нормальної підгрупи. Таким розширенням були підгрупи H групи G , для яких впорядкована за включенням система підгруп $\{ L \mid H \leq L \leq G \}$ задовольняє умову максимальності. Зразу слід відмітити, що це поняття не буде еквівалентним поняттю, що розглядається в даній роботі. В цьому можна упевнитись розглянувши наступний приклад.

3.1.16. Приклад. Нехай p – просте число, $\langle a \rangle$ – циклічна група порядку p , $\langle g \rangle$ – нескінченна циклічна група,

$$G = \langle g \rangle \wr \langle g \rangle = A \rtimes \langle g \rangle -$$

вінцевий добуток цих двох циклічних груп, A – базова підгрупа цього вінцевого добутку. За конструкцією A буде нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою, і отже група G не є (майже) поліциклічною. Ми можемо розглядати A як циклічний модуль над груповим кільцем $J = \mathbf{F}_p \langle g \rangle$ нескінченної циклічної групи над простим полем $\mathbf{F}_p$. Це тягне за собою ізоморфізм $A \cong J / \text{Ann}_J(a)$. У свою чергу $\text{Ann}_J(a)$ буде ідеалом у кільці J . Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс в J , то нескінченність A доводить рівність $\text{Ann}_J(a) = \langle 0 \rangle$. Зокрема звідси випливає, що $C_A(g) = \langle 1 \rangle$. Нехай тепер H – нормальне замкнення підгрупи $\langle g \rangle$ в групі G . З **наслідку 3.1.4** отримаємо включення $g \in PC(G)$, яке в свою чергу доводить той факт, що і фактор-група $A/C_A(g)$ повинна бути поліциклічною. Оскільки A є періодичною, то це означає, що $A/C_A(g)$ мусить бути скінченною. Але ж у цьому випадку $C_A(g) \neq \langle 1 \rangle$. Однак, як ми вже бачили вище, це є неможливим. Отримане протиріччя показує, що підгрупа H не може бути поліциклічною. Інакше кажучи, підгрупа $\langle g \rangle$ не є майже поліциклічно наближена до нормальної. Нехай тепер

$$K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n \leq \dots$$

довільна зростаюча послідовність підгруп, що містять у собі $\langle g \rangle$. З включення $\langle g \rangle \leq K_n$ отримаємо напівпрямий розклад $K_n = B_n \rtimes \langle g \rangle$. Це приводить нас до іншої зростаючої послідовності підгруп

$$B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_n \leq \dots,$$

кожна з яких міститься в A та буде $\langle g \rangle$ -інваріантною. Оскільки групове кільце $\mathbf{F}_p \langle g \rangle$ є нетеровим, то і циклічний $\mathbf{F}_p \langle g \rangle$ -модуль A буде нетеровим. Це означає, що A не містить у собі строго зростаючих послідовностей $\langle g \rangle$ -інваріантних підгруп. Таким чином, знайдеться такий номер m , що $B_m = B_{m+k}$ для кожного натурального k . У свою чергу тоді будемо мати $K_m = K_{m+k}$ для кожного натурального k . Таким чином, впорядкована за включенням система підгруп $\{ L \mid \langle g \rangle \leq L \leq G \}$ задовольняє умову максимальності.

Наступним природним питанням тут є питання про будову груп, кожна підгрупа яких є майже поліциклічно наближена до нормальної. З одного боку, тут можна було використати результати роботи [37], яку ми вже цитували вище. Але доведення, наведене в цій роботі по суті повторює доведення роботи Б. Неймана [10] за виключенням, останньої частини, де був використаний результат М. Томкінсона. З іншого боку, для нашого випадку остання частина доведення може бути значно спрощена. Тому є сенс навести тут доведення наступної теореми про будову груп, кожна підгрупа яких є майже поліциклічно наближена до нормальної, використовуючи ідеї доведення Б. Неймана та наступні результати.

Відмітимо спочатку елементарні властивості підгруп, які є майже поліциклічно наближені до нормальних.

3.1.17. Лема. *Нехай G – група, кожна підгрупа якої є майже поліциклічно наближена до нормальної.*

(1) *Якщо H – підгрупа групи G , то кожна підгрупа H є майже поліциклічно наближена до нормальної.*

(2) Якщо L – нормальна підгрупа G , то кожна підгрупа G/L є майже поліциклічно наближена до нормальної.

(3) Якщо U, V – підгрупи G , причому U – нормальна в V , то кожна підгрупа V/U є майже поліциклічно наближена до нормальної.

Ці твердження є майже очевидними.

3.1.18. Пропозиція. Нехай G – FC -група. Якщо її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G має скінченний комутант.

Доведення. Нехай спочатку G є періодичною групою. Вибираємо в ній довільну підгрупу H . Оскільки H є майже поліциклічно наближена до нормальної, то H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L , для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Але ж періодична майже поліциклічна група є скінченною. Врахувавши включення $L \leq H$, отримаємо звідси, що підгрупа H має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Інакше кажучи, кожна підгрупа G буде майже нормальною. З теореми Б. Неймана [10] отримаємо, що G має скінченний комутант.

Нехай тепер G – неперіодична FC -група. З **теореми 1.1.4** випливає, що фактор-група $G/\zeta(G)$ буде періодичною. В центрі $\zeta(G)$ вибираємо таку вільну абелеву підгрупу A , що $\zeta(G)/A$ є періодичною. Тоді і вся фактор-група G/A також буде періодичною. З леми **3.1.17** отримаємо, що кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної. З доведеного вище отримаємо, що комутант G/A буде скінченною підгрупою. З **теореми 1.1.4** отримаємо, що множина T всіх елементів групи G , що мають скінченний порядок, є характеристичною підгрупою, а фактор-група G/T буде абелевою. Застосовуючи класичну теорему Ремака, з очевидної рівності $A \cap T = \langle 1 \rangle$ отримаємо вкладання

$$G \twoheadrightarrow V = G/A \times G/T.$$

З доведеного вище отримаємо скінченність підгрупи $[G/A, G/A]$. Той факт, що другий прямиий множник є абелевим, приводить до рівності $[V, V] = [G/A, G/A]$. Отже підгрупа $[V, V]$, а з нею і $[G, G]$, буде скінченною. ■

3.1.19. Лема. Нехай G – група. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G – РС-група.

Доведення. Дійсно, у цьому випадку і кожна циклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної. Тепер досить застосувати **наслідок 3.1.15.** ■

3.1.20. Лема. Нехай G – група, центр якої містить таку періодичну підгрупу A , що G/A – абелева. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то G має скінченний комутант.

Доведення. Для кожного елемента $g \in G$ розглянемо відображення $\psi_g: x \longrightarrow [g, x], x \in G$. Оскільки A – підгрупа центру, то маємо

$$\psi_g(ab) = [g, xy] = [g, y] [g, x]^y = [g, x] [g, y] = \psi_g(x) \psi_g(y).$$

Таким чином, відображення ψ_g буде ендоморфізмом групи G , причому $\text{Im } \psi_g = [g, G] \leq A \leq \zeta(G)$, $\text{Ker } \psi_g = C_G(g)$. Використавши тепер ізоморфізм

$$[g, G] = \text{Im } \psi_g \cong \text{Im } \psi_g / \text{Ker } \psi_g = G / C_G(g),$$

отримаємо, що фактор-група $G/C_G(g)$ мусить бути періодичною. З іншого боку, **лема 3.1.19** показує, що ця фактор-група є майже поліциклічною. Одночасно дві ці складові доводять той факт, що $G/C_G(g)$ є скінченною. Оскільки це має місце для кожного елемента $g \in G$, то G є FC-групою. Тепер залишається застосувати **пропозицію 3.1.18.** ■

3.1.21. Лема. Нехай G – РС-група і припустимо, що H – її нормальна підгрупа, що визначає майже поліциклічну фактор-групу G/H . Якщо комутант підгрупи H є майже поліциклічною підгрупою, то і комутант усієї групи G також буде майже поліциклічною підгрупою.

Доведення. Оскільки фактор-група G/H є майже поліциклічною, то вона породжується скінченною підмножиною елементів $\{x_1H, \dots, x_kH\}$. Покладемо $K = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$, тоді маємо рівність $G = HK$. Скориставшись тим фактом, що G – РС-група, з **наслідку 3.1.13** отримаємо, що нормальне замкнення $L = K^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. З співвідношень $G/L = HL/L \cong H/(H \cap L)$ та того факту, що комутант $[H, H]$ є майже

поліциклічною підгрупою, впливає, що майже поліциклічним буде і підгрупа $D/L = [G/L, G/L]$. Очевидне включення $[G, G] \leq D$ доводить тепер той факт, що комутант $[G, G]$ усієї групи G також буде майже поліциклічною підгрупою. ■

3.1.22. Теорема. *Нехай G – група. Якщо кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, то комутант усієї групи G буде майже поліциклічною підгрупою.*

Доведення. З леми 3.1.19 випливає, що G є PC -групою. Припустимо, що комутант групи G не буде майже поліциклічною підгрупою. Зокрема, він буде неодиначною підгрупою, а тому знайдуться елементи x_1, y_1 , для яких $[x_1, y_1] = z_1 \neq 1$. Покладемо $X_1 = \langle x_1, y_1 \rangle^G$, $C_1 = C_G(X_1)$. Скориставшись тим фактом, що G – PC -група, отримаємо, що фактор-група G/C_1 буде майже поліциклічною. Лема 3.1.21 показує, що у цьому випадку комутант підгрупи C_1 також не може бути майже поліциклічною підгрупою. Зокрема, підгрупа X_1 не може містити у собі $[C_1, C_1]$. У цьому випадку знайдуться елементи x_2, y_2 , для яких $[x_2, y_2] = z_2 \notin X_1$. За їх вибором також маємо $[x_1, x_2] = [x_1, y_2] = [y_1, y_2] = [x_2, y_1] = 1$. Покладемо $X_2 = \langle x_2, y_2 \rangle^G$, $C_2 = C_G(X_2)$. Знову скористаємось тим фактом, що G – PC -група і отримаємо, що фактор-група G/C_2 буде майже поліциклічною. Лема 3.1.21 показує, що комутант підгрупи C_2 знову не може бути майже поліциклічною підгрупою. Застосувавши звичайну індукцію, за допомогою аналогічних аргументів знайдемо підмножину елементів $\{x_n, y_n / n \in \mathbf{N}\}$, що задовольняють наступні умови:

$$[x_n, x_k] = [x_n, y_k] = [y_n, y_k] = 1 \text{ у випадку, коли } n \neq k;$$

$$[x_n, y_n] = z_n \text{ та } z_n \notin \langle x_k, y_k / 1 \leq k \leq n-1 \rangle^G.$$

Нехай $H = \langle x_n, y_n / n \in \mathbf{N} \rangle$. Покладемо тепер $\Sigma = \{n / [x_n, z_n] \neq 1\}$. Припустимо спочатку, що множина Σ є нескінченною. Тоді її елементи можна переіндексувати, зберігаючи їх взаємний порядок, тобто покладемо $\Sigma = \{\sigma(n) / n \in \mathbf{N}\}$. Нехай тепер $U = \langle x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)} / n \in \mathbf{N} \rangle$, тоді нормальне

замкнення U^H містить у собі підгрупу $\langle z_{\sigma(n)}/n \in \mathbf{N} \rangle$. Припустимо, що існує таке натуральне число m , що

$$U \langle z_{\sigma(n)}/1 \leq n \leq m \rangle^H = U \langle z_{\sigma(n)}/1 \leq n \leq m-1 \rangle^H.$$

За умовами, яким задовольняють елементи $\{x_n, y_n/n \in \mathbf{N}\}$, будемо мати тоді $[x_{\sigma(m)}, U] = \langle 1 \rangle$ та $[x_{\sigma(m)}, z_{\sigma(n)}] = 1$ у випадку, коли $n < m$, і отже

$$[x_{\sigma(m)}, U \langle z_{\sigma(n)}/1 \leq n \leq m \rangle^H] = \langle 1 \rangle.$$

З іншого боку, $[x_{\sigma(m)}, z_{\sigma(m)}] \neq 1$. Отримана суперечність доводить, що нерівність

$$U \langle z_{\sigma(k)}/1 \leq k \leq n-1 \rangle^H \neq U \langle z_{\sigma(k)}/1 \leq k \leq n \rangle^H$$

має місце для кожного натурального номеру n . Таким чином, ми отримуємо строго зростаючий ланцюжок підгруп

$$\begin{aligned} U \langle z_{\sigma(1)} \rangle^H &< U \langle z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)} \rangle^H < \dots \\ < U \langle z_{\sigma(k)}/1 \leq k \leq n \rangle^H &< U \langle z_{\sigma(k)}/1 \leq k \leq n+1 \rangle^H < \dots \end{aligned}$$

З іншого боку, підгрупа U є майже поліциклічно наближена до нормальної в підгрупі H за лемою 3.1.17. Це означає, що U^H містить у собі таку нормальну підгрупу $L \leq U$, що фактор-група U^H/L буде майже поліциклічною. Звідси випливає, що впорядкована за включенням система підгруп $\{K/L \leq K \leq U^H\}$ задовольняє умову максимальності. У цьому випадку і її підсистема $\{K/U \leq K \leq U^H\}$ також повинна задовольняти цю умову. Таким чином ми отримали протиріччя, яке доводить скінченність підмножини Σ .

За допомогою аналогічних аргументів можна довести і той факт, що підмножина $\{n / [y_n, z_n] \neq 1\}$ також є скінченною. Отже, існує такий натуральний номер t , що $[x_n, z_n] = [y_n, z_n] = 1$ для всіх $n \geq t$. Усі наступні розгляді ми будемо проводити вже в підгрупі $\langle x_n, y_n / n \geq t \rangle$. Тому, щоб не обтяжувати наш розгляд новими позначеннями, будемо вважати, що $[x_n, z_n] = [y_n, z_n] = 1$ для всіх натуральних чисел n . Покладемо тепер $\Xi = \{n / z_n \in \text{скінченним}\}$. Припустимо тепер, що підмножина Ξ є скінченною.

Тоді існує такий натуральний номер q , що z_n є нескінченним для всіх $n \geq q$. Покладемо $H_1 = \langle x_n, y_n \mid n \geq q \rangle$, $U_1 = \langle x_n \mid n \geq q \rangle$, $W = \langle z_n \mid n \geq q \rangle$. З наших припущень випливає, що центр H_1 містить у собі підгрупу W . Якщо перетин $W \cap U_1$ є неединичним, то він містить неединичний елемент $z = x_q^k q x_{q+1}^k q + 1 \dots x_{q+s}^k q + s$ для деякого натурального номера s . Нехай $p = q + r$ – найменший номер, для якого $k_{q+r} \neq 0$. Тоді $[y_p, z] = 1$. З іншого боку,

$$[y_p, z] = [y_p, x_q^k q x_{q+1}^k q + 1 \dots x_{q+s}^k q + s] = z_p^k p,$$

А останній елемент не може бути одиничним, оскільки за нашими припущеннями z_p має нескінченний порядок. Отримана суперечність доводить нескінченність підмножини Ξ . Покладемо $H_2 = \langle x_n, y_n \mid n \in \Xi \rangle$, $V = \langle z_n \mid n \in \Xi \rangle$. Тоді центр підгрупи H_2 містить у собі підгрупу V , причому остання є періодичною та визначає абелеву фактор-групу H_2/V_1 . За побудовою комутант підгрупи H_2 містить V , а остання підгрупа є нескінченною. Зокрема, комутант підгрупи H_2 також буде нескінченним. З іншого боку, **лема 3.1.20** стверджує, що комутант підгрупи H_2 повинен бути скінченною підгрупою. Це останнє протиріччя і доводить теорему. ■

3.2. Будова деяких класів анти РС-груп

3.2.1. Означення. Група G називається анти РС-групою, якщо всі її підгрупи, за винятком майже поліциклічних, будуть майже поліциклічно наближені до нормальних.

За **наслідком 3.1.15** група G тоді і тільки тоді буде РС-групою, коли кожна її майже поліциклічна підгрупа є майже поліциклічно наближена до нормальної, тому введені вище групи є протилежними в деякому сенсі до груп з майже поліциклічними класами спряжених елементів.

Наступна лема дає деякі елементарні властивості анти РС-груп.

3.2.2. Лема. Нехай G – анти РС-група.

- (1) Якщо H – підгрупа групи G , то H також буде анти PC-групою.
- (2) Якщо L – це нормальна підгрупа G , то фактор-група G/L буде анти PC-групою.
- (3) Якщо U, V – такі підгрупи G , що U є нормальною в V , то секція V/U також буде анти PC-групою.

3.2.3. Лема. Нехай G – анти PC-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $H \cap K \leq L$;
- (iii) $K/L = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

Доведення. Нескінченність множини Λ забезпечує існування таких нескінченних підмножин Δ, Σ в множині Λ , що задовольняють умови $\Delta \cap \Sigma = \emptyset, \Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U/L = \bigtimes_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L, V/L = \bigtimes_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$. З того факту, що обидві підмножини Δ, Σ є нескінченними, можна побачити тепер, що обидві підгрупи U/L та V/L не можуть бути майже поліциклічними. За своїм вибором обидві підгрупи U та V будуть H -інваріантними. Тоді також і обидві добутки UH та VH не будуть майже поліциклічними, а отже, вони майже поліциклічно наближені до нормальних. Лема 3.1.2 показує, що перетин $UH \cap VH$ також буде підгрупою, яка є майже поліциклічно наближена до нормальної. Включення $L \leq U$ та $L \leq V$ свідчать, що має місце також і включення $L \leq UH \cap VH$. З іншого боку, нехай $x \in UH \cap VH$, тоді $x = uh = vu$ для деяких елементів $u \in U, v \in V, h, u \in H$. Звідси для елемента h отримуємо $h = u^{-1}x \in K$, а це показує, що $h \in K \cap H \leq L$.

Використовуючи аналогічні аргументи, можна довести, що $y \in K \cap H \leq L$.
Тепер будемо мати

$$uL = uhL = xL = vyL = vL \in (U/L \cap V/L) = \langle 1 \rangle.$$

Інакше кажучи, $uL = vL = L$, тобто $u, v \in L$. Це забезпечує наступне включення $x \in HL$. Таким чином, ми дійшли до включень

$$LH \leq UH \cap VH \leq LH,$$

які тягнуть за собою рівність $UH \cap VH = HL$, яка вже і показує, що підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної. ■

3.2.4. Наслідок. Нехай G – анти PC-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) підмножина індексів $\Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ та також $T/L = \times_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Тепер залишається застосувати лему 2.2.3 до трійки підгруп H, T, L і отримати необхідний нам результат. ■

3.2.5. Наслідок. Нехай G – анти PC-група. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$, K_λ буде H -інваріантною підгрупою для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для кожного елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в G .

Доведення. Оскільки підгрупа $K_\lambda \in H$ -інваріантною, то вона буде також $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина індексів $\text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде скінченною, а тому доповнююча для неї підмножина $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде вже нескінченною, а це дає можливість застосувати попередній **наслідок 3.2.4.** ■

3.2.6. Наслідок. Нехай G – анти PC -група. Припустимо, що K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна H -інваріантна підгрупа для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупа K також буде H -інваріантною;
- (ii) множина індексів Λ є нескінченною.

Якщо група G є локально узагальнено радикальною, то має місце включення $H \leq PC(G)$.

Доведення. Дійсно, враховуючи попередній **наслідок 3.2.5**, отримаємо, що для будь якого елемента h , що належить до підгрупи H , циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в усій групі G . З **наслідку 3.1.6** отримаємо тепер включення $h \in PC(G)$. ■

3.2.7. Наслідок. Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група. Припустимо, що K – підгрупа G , що задовольняє наступні умови:

- (i) $K = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де K_λ – неодиначна підгрупа для усіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (ii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді має місце включення $H \leq PC(G)$.

Тепер ми маємо змогу безпосередньо перейти до вивчення структури анти PC -груп.

3.2.8. Лема. Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група та нехай A – її абелева підгрупа. Якщо PC -центр групи G не містить у собі A , то в підгрупі A існує така скінченно породжена підгрупа B , що фактор-група A/B буде квазіциклічною.

Доведення. В підгрупі A існує вільна абелева підгрупа C , яка визначає періодичну фактор-групу A/C . Припустимо, що ця виділена підгрупа C не

має скінченної системи породжуючих елементів. За її вибором це означає, що C є прямим добутком нескінченної множини нескінченних циклічних підгруп. Приймаючи до уваги **наслідок 3.2.6**, отримаємо включення $A \leq PC(G)$. Але ж це суперечить нашим умовам відносно підгрупи A . Отримане протиріччя доводить той факт, що підгрупа C мусить бути скінченно породженою. Оскільки фактор-група A/C вже періодична, то маємо природний розклад $A/C = \times_{p \in \Pi(A/C)} T_p/C$, де T_p/C – силовська p -підгрупа групи A/C , $p \in \Pi(A)$. Якщо припустити, що множина $\Pi(A/C)$ є нескінченною, то з **наслідку 3.2.5** випливає, що підгрупа $\langle a \rangle C$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в усій групі G для кожного елемента a з підгрупи A . Очевидним є той факт, що $\langle a \rangle C$ є поліциклічною, тому врахувавши **наслідок 3.1.6**, приходимо до включення $\langle a \rangle C \leq PC(G)$. Зокрема і для елемента a маємо $a \in PC(G)$. Згадаємо тепер, що a є довільним елементом підгрупи A , і це доводить наступне включення $A \leq PC(G)$. Отже знову отримали протиріччя з вибором підгрупи A , яке доводить скінченність множини $\Pi(A/C)$. Припустимо тепер, що для деякого простого числа p нижній шар $\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C \mid (xC)^p = 1\}$ силовської p -підгрупи T_p/C буде нескінченним. Інакше кажучи, це означає, що $\Omega_1(T_p/C)$ є нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою. Для такого випадку ми знову можемо використати **наслідок 3.2.5** і отримати, що підгрупа $\langle a \rangle C$ буде майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G для довільного елемента $a \in A$, що, як ми вже бачили раніше, тягне за собою включення $A \leq PC(G)$. Отримане знову протиріччя доводить той факт, що підгрупа $\Omega_1(T_p/C)$ повинна бути скінченною для кожного простого числа $p \in \Pi(A/C)$. У свою чергу, це означає, що T_p/C буде черніковською підгрупою для будь-якого простого числа $p \in \Pi(A/C)$. Врахувавши це, отримаємо розклад $T_p/C = K_p/C \times D_p/C$, де K_p/C – скінченна підгрупа, а інший прямий множник D_p/C є ділимою підгрупою, $p \in \Pi(A/C)$. Наприкінці припустимо, що A/C містить у

собі дві такі квазіциклічні підгрупи P_1/C та P_2/C , що $P_1/C \cap P_2/C = \langle I \rangle$. Для довільного елемента $a \in A$ обидві підгрупи $\langle a \rangle_{P_1}$ и $\langle a \rangle_{P_2}$ не будуть майже поліциклічними, а тому вони повинні бути майже поліциклічно наближені до нормальних в групі G . Вибір підгруп P_1, P_2 забезпечує той факт, що перетин мусить бути $\langle a \rangle_{P_1/C} \cap \langle a \rangle_{P_2/C}$ скінченним. У свою чергу це означає, що перетин $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2}$ буде скінченно породженою абелевою підгрупою, зокрема, він є поліциклічною підгрупою. З **леми 3.1.2** отримаємо, підгрупа $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2}$ – буде майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G . **Наслідок 3.2.5** показує, що має місце включення $\langle a \rangle_{P_1} \cap \langle a \rangle_{P_2} \leq PC(G)$, яке, в свою чергу, приводить до включення $a \in PC(G)$, а отже і $A \leq PC(G)$. Це останнє протиріччя показує, що можливим є тільки розклад $A/C = B/C \times D/C$, де B/C є скінченною підгрупою, а D/C буде квазіциклічною підгрупою. Але ж у цьому випадку B є скінченно породжена абелева підгрупа, а фактор-група A/C буде квазіциклічною. ■

3.2.9. Лема. *Нехай G – локально узагальнено радикальна анти PC -група. Якщо вона містить у собі абелеву підгрупу A , яка не є мінімаксною, то G має майже поліциклічний комутант.*

Доведення. Доведена тільки що **лема 3.2.8** приводить нас до включення $A \leq PC(G)$. Тепер ми можемо стверджувати, що PC -центр групи G не може бути мінімаксною підгрупою. З **теорему 3.1.12** випливає, що для будь-якої майже поліциклічної підгрупи $H \leq PC(G)$ її нормальне замкнення H^G буде майже поліциклічною підгрупою. Звідси випливає, що кожна майже поліциклічна підгрупа, яка входить до PC -центру групи G , буде майже поліциклічно наближена до нормальної. З іншого боку, кожна підгрупа PC -центру групи G , яка не є майже поліциклічною, також буде майже поліциклічно наближена до нормальної. Врахувавши тепер **теорему 3.1.22**, будемо бачити, що PC -центр групи G має майже поліциклічний комутант K . Нехай $xK \in PC(G/K)$, покладемо $X/K = \langle xK \rangle^{G/K} = \langle x \rangle^G K/K$. Застосувавши знову **теорему 3.1.12**, отримаємо, що підгрупа X/K повинна бути майже

поліциклічною. Оскільки такою самою ж буде і підгрупа K , то також підгрупа X , а разом з нею і нормальне замкнення $\langle x \rangle^G$, буде майже поліциклічною.

Наслідок 3.1.4 забезпечує нам включення $x \in PC(G)$, яке доводить рівність $PC(G/K) = PC(G)/K$. Весь наш наступний розгляд буде проводитись у фактор-групі G/K , тому, щоб не вводити нових позначень, можемо вважати підгрупу K одиничною. Як ми зможемо побачити далі, це припущення не обмежить загальності наступних аргументів. Отже будемо вважати, що підгрупа $PC(G)$ є абелевою. Наша мета тепер – довести рівність $G = PC(G)$. Припустимо, що ця рівність не має місця. Це означає можливість існування елемента $g \in G \setminus PC(G)$. Вибираємо у підгрупі $PC(G)$ вільну абелеву підгрупу C , що визначає періодичну фактор-групу $PC(G)/C$. Припустимо, що підгрупа C не має скінченної системи породжуючих елементів. За її вибором це означає, що C є прямим добутком нескінченної множини нескінченних циклічних підгруп. У цьому випадку підгрупа C буде майже поліциклічно наближена до нормальної. Оскільки $PC(G)/C$ є періодичною групою, то її секція C^G/C , яка повинна бути поліциклічною та періодичною, є скінченною. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що і нормальне замкнення C^G також буде вільною абелевою підгрупою. Щоб знову не вводити нових позначень, будемо вважати підгрупу C нормальною. Для підгрупи C є можливим отримати такий розклад $C = C_1 \times C_2$, де обидві підгрупи C_1 та C_2 будуть вільними абелевими та мають нескінченний 0-ранг. Зокрема вони не можуть бути поліциклічними, а це означає, що тоді секції C_1^G/C_1 та C_2^G/C_2 будуть поліциклічними. Врахувавши рівність $C_1 \cap C_2 = \langle 1 \rangle$ отримаємо той факт, що перетин $\langle g \rangle_{C_1^G} \cap \langle g \rangle_{C_2^G}$ є поліциклічною підгрупою. Також кожна з підгруп $\langle g \rangle_{C_1^G}$ та $\langle g \rangle_{C_2^G}$ не є поліциклічною, а тому обидві вони будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. **Лема 3.1.2** забезпечує той факт, що і їх перетин $\langle g \rangle_{C_1^G} \cap \langle g \rangle_{C_2^G}$ мусить бути підгрупою, що майже поліциклічно наближена до нормальної. Використавши тепер **наслідок 3.1.6**, отримаємо важливе включення $\langle g \rangle_{C_1^G} \cap \langle g \rangle_{C_2^G} \leq PC(G)$, яке

показує зокрема, що $g \in PC(G)$. Отримана суперечність доводить той факт, що підгрупа C є скінченно породженою.

За вибором підгрупи C фактор-група $PC(G)/C$ є періодичною, тому існує канонічний розклад $PC(G)/C = \times_{p \in \Pi(A/C)} T_p/C$, де T_p/C – силовська p -підгрупа цієї фактор-групи, $p \in \Pi(PC(G))$. Якщо припустити, що множина $\Pi(PC(G)/C)$ є нескінченною, то за **наслідком 3.2.5** підгрупа $\langle g \rangle C$ повинна бути майже поліциклічно наближена до нормальної в групі G . Є очевидним той факт, що підгрупа $\langle g \rangle C$ є поліциклічною, тому з **наслідку 3.1.6** отримаємо включення $\langle g \rangle C \leq PC(G)$. Зокрема це означає, що $g \in PC(G)$, а це вже суперечить припущенню про елемент g . Отримане протиріччя доводить скінченність множини $\Pi(PC(G)/C)$. Як ми вже зазначали вище, підгрупа $PC(G)$ не є мінімаксною. Припустимо тепер, що для деякого простого числа $p \in \Pi(PC(G)/C)$ нижній шар $\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C \mid (xC)^p = 1\}$ силовської p -підгрупи T_p/C є скінченним. У цьому випадку вся силовська підгрупа T_p/C буде черніковською. Згадавши тепер про доведену вище скінченність множини $\Pi(PC(G)/C)$, отримаємо, що фактор $PC(G)/C$ буде черніковською групою. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що $PC(G)$ є мінімаксною підгрупою. Отримане протиріччя доводить існування такого простого числа p , що $\Omega_1(T_p/C) = L/C$ – нескінченна підгрупа. Інакше кажучи, це означає, що $\Omega_1(T_p/C)$ буде нескінченною елементарною абелевою p -підгрупою. Для підгрупи L/C є можливим отримати такий розклад $L/C = L_1/C \times L_2/C$, де обидві підгрупи L_1/C та L_2/C будуть нескінченними елементарними абелевими. Зокрема, обидві вони не можуть бути майже поліциклічними. У такому разі обидві секції L_1^G/L_1 та L_2^G/L_2 повинні бути поліциклічними, а тому і скінченними, оскільки вони є періодичні. Рівність $L_1 \cap L_2 = \langle 1 \rangle$ показує, що перетин $\langle g \rangle L_1^G \cap \langle g \rangle L_2^G$ є поліциклічною підгрупою. Кожна з підгруп $\langle g \rangle L_1^G$ та $\langle g \rangle L_2^G$ не є майже поліциклічною, а тому обидві вони будуть майже поліциклічно наближені до нормальних. **Лема 3.1.2** забезпечує той факт, що і перетин $\langle g \rangle L_1^G \cap \langle g \rangle L_2^G$ буде

підгрупою, яка майже поліциклічно наближена до нормальної. Скориставшись тепер **наслідком 3.1.6**, отримаємо включення $\langle g \rangle_{L_1^G} \cap \langle g \rangle_{L_2^G} \leq PC(G)$, з якого, зокрема, випливає і включення $g \in PC(G)$. Отримане останнє протиріччя доводить потрібну нас рівність $G = PC(G)$. Як вже зазначалось вище, у цьому випадку комутант групи G буде майже поліциклічною підгрупою. ■

3.2.10. Теорема. *Нехай G – узагальнено радикальна анти PC -група. Тоді або група G має майже поліциклічний комутант, або G буде майже розв’язною мінімаксною групою.*

Доведення. Вище доведена **лема 3.2.9** показує, що якщо серед усіх абелевих підгруп групи G існує підгрупа, яка не є мінімаксною, то комутант групи G повинен бути майже поліциклічною підгрупою. Тому залишається розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи G є мінімаксними.

Позначимо через R максимальну нормальну радикальну підгрупу групи G . Застосувавши **теорему 1.1.9**, отримаємо, що R буде розв’язною мінімаксною підгрупою. Нехай L/R – це максимальна нормальна локально скінченна підгрупа G/R . Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, що не є черніковською, то з **леми 3.2.2 та леми 3.2.9** отримаємо той факт, що фактор-група G/R має скінченний комутант D/R . Його централізатор $C_{G/R}(D/R)$ буде мати тоді скінченний індекс в усій фактор-групі G/R . Якщо припустити, що G/R є нескінченною, то, беручи до уваги включення $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, будемо мати, що $C_{G/R}(D/R)$ є неединичною нільпотентною нормальною підгрупою G/R . Це однак суперечить вибору підгрупи R . Отримана суперечність свідчить, що у такому випадку вся фактор-група G/R повинна бути скінченною, і все доведено. Тому залишається розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи фактору L/R будуть черніковськими. **Теорема 1.1.8** показує, що у цьому випадку L/R також буде черніковською. Врахувавши вибір підгруп L, R , бачимо, що L/R буде скінченною. Знову припустимо, що фактор-група G/R є нескінченною та позначимо через U/L

локально нільпотентний радикал фактор-групи G/L . Врахувавши цей вибір, отримаємо, що фактор U/L буде локально нільпотентною групою без скруту. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Звідси випливає, що перетин $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R$ є неединичною підгрупою. За означенням фактор-група G/R не містить у собі нормальних локально нільпотентних підгруп, тому маємо $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Однак у цьому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Отримані співвідношення свідчать про те, що V/R – це неединична нормальна локально нільпотентна підгрупа фактор-групи G/R , а це суперечить вибору підгрупи R . Отримане протиріччя доводить той факт, що фактор-група G/R мусить бути скінченною, а з цим і доводить всю теорему. ■

Для періодичного випадку можна отримати наступне уточнення доведеного вище результату.

3.2.11. Лема. *Нехай G – група, H – її F -досконала підгрупа. Якщо H є майже поліциклічно наближеною до нормальної, то вона нормальна.*

Доведення. Означення підгрупи, яка є майже поліциклічно наближена до нормальної, показує, що H^G містить у собі таку нормальну підгрупу P , що секція H^G/P є майже поліциклічною. Оскільки вона ще і періодична, то вона скінченна. Але тоді H співпадає з F -досконалою частиною нормального замкнення H^G . Але F -досконала частина є характеристичною, зокрема, вона буде нормальною в усій групі G . ■

3.2.12. Лема. *Нехай G – анти PC -група. Якщо H – така її нормальна підгрупа, що кожна підгрупа G , що містить у собі H та не співпадає з H , не є майже поліциклічною, то фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант.*

Доведення. З умов леми випливає, що кожна підгрупа G , що містить у собі H та не співпадає з H , є майже поліциклічно наближена до нормальної. Інакше кажучи, кожна підгрупа G/H є майже поліциклічно наближена до

нормальної. З **теорема 3.1.22** отримаємо тепер, що фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант. ■

3.2.13. Теорема. *Нехай G – локально скінченна група. Якщо G – анти PC-група, то G – група одного з наступних типів:*

- (1) G – група зі скінченним комутантом;
- (2) G – майже квазіциклічна група.

Доведення. Припустимо, що група G має нескінченний комутант. З огляду на локальну скінченність групи це означає, що він не є майже поліциклічним. З **теорема 3.2.10** отримаємо тоді, що G – майже розв’язна мінімаксна група. Бувши локально скінченною, G – черніковська група. Позначимо через D її ділиму (F -досконалу) частину і припустимо, що D не буде квазіциклічною. Нехай K – квазіциклічна підгрупа D . У цьому випадку маємо $D = K \times B$, де підгрупа B є ділимою, а тому і F -досконалою. За **лемою 3.2.11** обидві підгрупи K, B будуть нормальними. З **леми 2.7.3** випливає, що обидві фактор-групи G/K та G/B мають майже поліциклічні, а отже, скінченні комутанти. Оскільки $K \cap B = \langle 1 \rangle$, то теорема Ремака забезпечує вкладання $G \hookrightarrow G/K \times G/B$, яке, у свою чергу, доводить скінченність комутанта групи G . Отримане протиріччя показує, що D – квазіциклічна підгрупа, а отже, G – група типу (2). ■

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya.** *Artinian modules over group rings.*– Basel: Birkhauser, 2007.– 245 p.
2. **Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya.** *Groups with prescribed quotient groups and associated module theory.* – New Jersey: World Scientific, 2002. – 227 p.
3. **Dedekind R.** *Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind //* Math. Annalen.–1897.–**48.**– S. 548 – 561.
4. **Baer R.** *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //*S.-B. Heidelberg Akad.–1933.– **2.**– S. 12 – 17.
5. **Heineken H. and Mohamed I.J.** *Groups with normalizer condition //* Math. Annalen. – 1972.–**198**, №3.– P. 178 – 187.
6. **Heineken H. and Mohamed I.J.** *Non-nilpotent groups with normalizer condition //* Lecture Notes Math. – 1974.– **372.**– P. 357 – 360.
7. **Hartley B.** *A note on the normalizer condition //* Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973.– **74**, №1.– P. 11 – 15.
8. **Hartley B.** *О нормализаторном условии и мини-транзитивных группах подстановок //* Алгебра и логика.– 1974.– **13**, № 5.– С. 589 – 602.
9. **Menegazzo F.** *Groups of Heineken-Mohamed //*J. Algebra. – 1995.–**171.**– P. 807 – 825.
10. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate subgroups //* Math. Z.– 1955.–**63**, № 1.– P. 76 – 96.
11. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп //* Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.
12. **Еремин И.И.** *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп //* Мат. сб.–1959.– **47**, № 1.– С. 45 – 54.

13. Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А. *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами* // Изв. вузов. Математика.— 1983.— № 10.— С. 57 – 63.
14. Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э. *Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп* // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 1.— С. 42 – 46
15. Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М. *Групи з щільною системою нескінченних підгруп* // Доп. АН УРСР. Серія А. — 1985.— № 3. — С. 7 – 9.
16. Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп* // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 7-8.— С. 969 – 974.
17. Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М.М. *Групи з деякими умовами максимальності* // Доп. АН УРСР. Серія А. — 1987.— № 1. —С. 9 – 11.
18. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В. *Группы, богатые почти нормальными подгруппами* // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 3.— С. 326 – 330.
19. Cutolo G. and Kurdachenko L.A. *Weak chain conditions for non-almost normal subgroups* // Groups 93 Galway/St.Andrews, Galway 1993, vol. 1, London Math. Soc., Lecture Notes Ser.—1995.—211.— P. 120 – 130.
20. Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A. *On groups with many almost normal subgroups* // Ann. Mat. Pura Appl. — 1995.— 169, № 4.— P. 35 – 65.
21. Casolo C. *Groups with finite classes of subnormal subgroups* //Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—1989.— 81.— P. 107 – 149.
22. Casolo C. *Subgroups of finite index in generalized T-groups* //Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—1989.— 81.— P. 265 – 277.
23. Casolo C., Franciosi S., de Giovanni F. *Groups with finitely many infinite conjugacy classes of subnormal subgroups* // Ricerche Mat. — 1994.— 43, № 2.— P. 309 – 321.

24. **Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.** *Groups with finite conjugacy classes of non-subnormal subgroups* //Archiv der Mathematik.– 1998.– **70**.– P. 169 – 181.
25. **Kurdachenko L.A., Rinauro S.** *Intersection and join of almost normal subgroups* // Communications in Algebra.– 1995.– **23** , № 5.– P. 1967 – 1974.
26. **Семко М.М., Кучменко С.М.** *Групи з великими системами майже нормальних підгруп* //Доп. НАН України.–2004.–№10.– С. 33 – 38.
27. **Семко Н.Н., Кучменко С.Н.** *Группы, у которых почти все подгруппы близки к нормальным* // Укр. мат. журн.– 2005.– **57**, № 4.– С. 514 – 532.
28. **Franciosi S., de Giovanni F.** *Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups* // "Groups – Korea 94".– 1995.–Berlin: Walter de Gruyter.– P. 107 – 118.
29. **Galoppo A.** *Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups* // Ricerche Mat.–2000.– **49**, №2.–P. 213 – 220.
30. **Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.** *Groups with restrictions on non-subnormal subgroups* // Ricerche di Matematica.– 1997.– **46**, № 2.– P. 307 – 320.
31. **Musella C.** *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups* // Note di Matematica.– 2000/2001.– **20**, № 1.– P. 43 – 52.
32. **Кучменко С.Н.** *Группы с широким множеством обобщенно нормальных подгруп* //Вісник Дніпропетровського університету. Математика.–2003.– Вип. 8.– С. 44 – 53.
33. **Кучменко С.Н.** *Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга* //Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.– 2004.– Вип. № 1.– С. 21 – 33.
34. **Semko M.M., Kuchmenko S.M.** *Groups in which almost all subgroups are near to normal* // J. "Algebra and Discrete mathematics".–2004.–№2.– С. 92 – 113.

35. **McConnel J.C., Robson J.C.** *Noncommutative noetherian rings.*– New York: Wiley, 1987.– 597 p.
36. **Половицкий Я.Д.** *Локально экстремальные и слойно экстремальные группы* // Мат. сб. – 1962. – **58**, № 5.– С. 685 – 694.
37. **Franciosi S., de Giovanni F. and Tomkinson M.J.** *Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes* //Bolletino Unione Mat.Italiana.– 1990.– **4B**, №7.– P. 35 – 55.
38. **Kurdachenko L.A., Otal J. and Soules P.** *Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups* // Communications in Algebra.– 2004.– **32**, № 12.– P. 4769 – 4784.
39. **Miller G.A., Moreno H. C.** *Non-abelian groups in which every subgroup is abelian* // Trans. Amer. Math. Soc.–1903.–**4**.–P. 389 – 404.
40. **Шмидт О.Ю.** *Группы, все подгруппы которых специальные* // Мат. сб. – 1924. – **31**, №3. – С. 366 –372.
41. **Шмидт О.Ю.** *Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп* // Мат. сб. – 1926. – **33**.– С. 161 – 172.
42. **Шмидт О.Ю.** *Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп* // Труды семинара по теории групп. – М.– Л.: Наука. – 1938. – С. 7 – 26.
43. **Черников С.Н.** *Бесконечные группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп* // Докл. АН СССР.–1964.– **159**, №4.– С. 759 –760.
44. **Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп* // Укр. мат. журн.–1967.– **19**, № 6.– С. 111 – 131.
45. **Шунков В.П.** *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп* // Алгебра и логика.–1970.– **9**, № 5.– С. 579 – 615.
46. **Ольшанский А.Ю.** *Геометрия определяющих соотношений в группах.* – М.: Наука, 1989. – 447 с.
47. **Черников С.Н.** *Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп* //Группы с ограничениями для подгрупп.– Киев: Наукова думка, 1971.– С. 106 – 115.

- 48. Черников С.Н.** *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* – М.: Наука, 1980.–384 с.
- 49. Черников С.Н.** *Исследование групп с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн.–1969.– **21** , № 2.–С. 193 – 209.
- 50. Зайцев Д.И., Каргаполов М.И., Чарин В.С.** *Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн.– 1972.– **24**, № 5.– 619 – 633.
- 51. Чарин В.С., Зайцев Д.И.** *О группах с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп* // Укр. мат. журн.–1988.– **40**, № 3.–С. 277 –287.
- 52. Cutolo G.** *On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups* // Rivista Mat. pura ed applicata.–1991.– **9**.–Р. 49 – 59.
- 53. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.** *О группах, двойственных дедекиндовым* // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1989.– № 10.– С. 21 – 22.
- 54. Cutolo G., Kurdachenko L.A.** *Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups* // Geometriae Dedicata.–1995.–**55**.–Р. 279 – 292.
- 55. Baer R.** *Polyminimaxgruppen* // Math. Annalen.– 1968.– **175**, № 1.– S. 1 – 43.
- 56. Зайцев Д.И.** *Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности* // Укр. мат. журн.–1968.– **20**, № 4.–С. 472 – 482.
- 57. Казарин Л.С., Курдаченко Л.А.** *Условия конечности и факторизации в бесконечных группах* // Успехи мат. наук. –1992. –**47**, № 3.– С. 81 – 126.
- 58. Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э.** *О группах со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными* // Укр. мат. журн.–1989.– **41**, № 2.– С. 1705 – 1709.
- 59. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *Строение разрешимых ненильпотентных метабильтовых групп* // Мат. заметки. –1983.–**34**, № 2.–С.179 – 188.
- 60. Кузенный Н.Ф., Семко М.М.** *Будова розв'язних метабильтонових груп* // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.
- 61. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** *О строении непериодических метабильтовых групп* // Изв. вузов. Математика.– 1986. – № 11.–С. 32 – 40.

62. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180 – 185.
63. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 170 – 176.
64. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 168 – 175.
65. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 743 – 750.
66. Semko M.M. *Groups with conditions of denseness of normality and its generalizations for some system of subgroups.* – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1998. – 285 p.
67. Kuzennyi N.F., Semko M.M. *On groups close to metacyclic groups.* Ukrainian Mathematical Journal – 1996. – V. 48, N 6. – P. 782-790.
68. Semko M.M. *Structure of locally graded non-nilpotent $CDN[]$ -groups.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 6. – P. 883-893.
69. Semko M.M. *Structure of one class of groups with conditions of denseness of normality for subgroups.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 8. – P. 1292-1295.
70. Semko M.M. *On the construction of $CDN[]$ -groups with elementary commutant of rank two.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – V. 49. – №. 10. – P. 1570-1577.
71. Semko M.M. *The structure of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups.* Dopov. NAS of Ukraine. – 1997. – V. 9. – P. 49-53.
72. Semko M.M. *The structure of groups with some conditions of denseness of normality for subgroups.* Dopov. NAS of Ukraine. – 1997. – V. 10. – P. 43-46.

73. **Semko M.M.** *On the structure of CDN $\langle \rangle$ -groups.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V. 50. – №. 9. – P. 1431-1441.
74. **Semko M.M.** *Structure of locally graded CDN($\langle \rangle$)-groups.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V. 50. – №. 11. – P. 1750-1754.
75. **Semko M.M.** *Structure of locally graded CDN($\langle \rangle$)-groups.* Ukrainian Mathematical Journal. – 1999. – V. 51. – №. 3. – P. 427-433.
76. **Neumann B.H.** *Groups covered by permutable subsets* // J. London Math. Soc.–1954.– **29**, № 114.– P. 236 – 248.
77. **Schur I.** *Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution* // J. reine angew. Math. – 1904.– **127**.– S. 20 – 50.
78. **Baer R.** *Finiteness properties of groups* // Duke Math. J.–1948.– **15**.– P. 1021 – 1032.
79. **Neumann B.H.** *Groups with finite classes of conjugate elements* // Proc. London Math. Soc. –1951.–**1**, №3.– P. 178 – 187.
80. **Tomkinson M.I.** *FC-groups.* – Boston: Pitman, 1984.–171 p.
81. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** *Основы теории групп.* – М.: Наука, 1982.–288 с.
82. **Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F.** *Locally finite groups.*– Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.–210 p.
83. **Куропш А.Г.** *Теория групп.* – М.: Наука, 1967.– 648 с.
84. **Robinson D.J.S.** *Infinite soluble and nilpotent groups.*– London: Queen Mary College Mathematics Notes, 1968.–210 p.
85. **Robinson D.J.S.** *Finiteness conditions and generalized soluble groups: Part 1.*– Berlin: Springer, 1972.– 210 p.
86. **Robinson D.J.S.** *Finiteness conditions and generalized soluble groups : Part 2.*– Berlin: Springer, 1972.– 254 p.
87. **Robinson D.J.S.** *A course in the theory of groups.*–New York: Springer, 1982.–481 p.

88. Segal D. *Polycyclic groups*.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.— 289 p.
89. Brewster D.C. and Lennox J.C. *Subnormality and quasinormality in soluble minimax groups* // Journal Algebra. — 1977.—**48**, № 2.—P. 368 – 381.
90. Karbe M. *Unendliche Gruppen mit schwachen Kettenbedingungen für endlich erzeugte Untergruppen* //Archiv Math. —1985.—**45**, № 2.—S.97 – 110.
91. Karbe M. *Groups satisfying the weak chain condition for normal subgroups* // Rocky Mountain J. Math. — 1987.—**17**, № 1.—P. 41 – 47.
92. Karbe M. and Kurdachenko L.A. *Just infinite modules over locally soluble groups* //Archiv Math. — 1988.—**51**, № 5.—P. 401 – 411.
93. Kazarin L.S., Kurdachenko L.A. and Subbotin I.Ya. *On groups saturated with abelian subgroups* //International Journal Algebra and Computation. — 1998.—**8**, № 4.—P. 443 – 466.
94. Kropholler P.H. *On finitely generated soluble groups with no large wreath product section* // Proc. London Math. Soc. — 1984.—**49**, №1.— P. 155 – 169.
95. Курдаченко Л.А. *Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Сиб. мат. журн.—1979.— **20**, № 5.— С. 1068 – 1075.
96. Курдаченко Л.А. *Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальных подгрупп* // Мат. заметки.—1981.— **29**, № 1.— С. 19 – 30.
97. Курдаченко Л.А. *Локально нильпотентные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для нормальных подгрупп* // Сиб. мат. журн.—1984.— **25**, № 4.— С. 589 – 594.
98. Курдаченко Л.А. *Локально нильпотентные группы со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Докл. АН УССР. Сер. А.—1985.—№ 8.— С. 9 – 12.
99. Курдаченко Л.А. *Локально нильпотентные группы с условием Min- ∞ -n* //Укр. мат. журн.—1990.— **42**, № 3.— С. 303 – 307.

100. Курдаченко Л.А. *О некоторых классах групп со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп* // Укр. мат. журн.– 1990.– 42, № 8.– С. 1050 – 1056.
101. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В. *О группах с минимаксными фактор-группами* // Укр. мат. журн.– 1990.– 42, № 5.– С. 550 – 553.
102. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В., Горецкий В.Э. *О группах с некоторыми системами минимаксных фактор-групп* // Докл. АН УССР. Сер. А.–1988.–№ 3.– С. 17 – 20.
103. Kurdachenko L.A., Smith H. *Groups with the maximal condition on non-subnormal subgroups* //Bolletino Unione Mat.Ital.–1996.–10-B.–P.441 – 460.
104. Kurdachenko L.A., Smith H. *Groups with the weak minimal condition for non-subnormal subgroups* // Annali Mat.–1997.– 173.– P. 299 – 312.
105. Kurdachenko L.A., Smith H. *Groups with the weak maximal condition for non-subnormal subgroups* // Ricerche Mat.–1998.– 47.– P. 29 – 49.
106. Kurdachenko L.A., Tushev A.V. and Zaitsev D.I. *Noetherian modules over nilpotent groups of finite rank* // Archiv Math.–1991.–56.– P. 433 – 436.
107. McCaughan D.J. *Subnormality in soluble minimax groups* //Journal Austral. Math. Soc.(series A). – 1974.–17, № 1.– P. 113 - 128.
108. McDougall D. *Soluble minimax groups with the subnormal intersection property* // Math. Z. –1970.– 114.– P. 241 – 244.
109. Newell M.L. *On soluble Min-by-Max groups* // Math. Annalen. – 1970.– 186, №4.– P. 282 – 286.
110. Newell M.L. *A subgroup characterization of soluble Min-by-Max groups* // Archiv Math. – 1970.– 21, №1.– P.128 – 131.
111. Robinson D.J.S. *On soluble minimax groups* // Math. Z.–1967.–101.–P. 13 – 40.
112. Robinson D.J.S. *A theorem on finitely generated hyperabelian groups* // Invent. Math. –1970.–10, №1.– P. 38 – 43.

- 113. Robinson D.J.S.** *A new treatment of soluble groups with finiteness conditions on their abelian subgroups* // Bull. London Math. Soc.–1976.– **8**.– P. 113 – 129.
- 114. Зайцев Д.И.** *О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности* // Мат. сб.–1969.–**78**, № 3 .– С. 323 – 331.
- 115. Зайцев Д.И.** *К теории минимаксных групп* // Укр. мат. журн.–1971.– **23**, № 5.– С. 652 – 660.
- 116. Зайцев Д.И.** *Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп* // Укр. мат. журн.–1971.– **23**, № 5.– С. 661 – 665.
- 117. Зайцев Д.И.** *О разрешимых группах конечного ранга* // Группы с ограничениями для подгрупп.–Киев: Наукова думка, 1971.– С. 115 – 130.
- 118. Зайцев Д.И.** *О индексе минимальности группы* // Исследование групп с заданными свойствами подгрупп.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974.– С. 72 – 130.
- 119. Зайцев Д.И., Курдаченко Л.А., Тушев А.В.** *Модули над нильпотентными группами конечного ранга* //Алгебра и логика.–1985.– **24**, № 6.– С. 412 – 436.
- 120. Фукс Л.** *Бесконечные абелевы группы: В 2 т.*– М.: Мир, 1974.– Т.1.– 336 с.
- 121. Мальцев А.И.** *О некоторых классах бесконечных разрешимых групп* // Мат. сб.–1951.– **28**, № 3 .– С. 567 – 588.
- 122. Мальцев А.И.** *О группах конечного ранга* // Мат. сб.–1948.–**22**, № 2.– С. 351 – 352.
- 123. Чарин В.С.** *О разрешимых группах типа A_3* // Мат. сб. –1961.–**54**, № 3.– С. 489 – 499.
- 124. Курдаченко Л.А.** *Непериодические FC-группы и связанные с ними классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения* // Сиб. мат. журн.– 1986. – **27**, № 2.– С. 104 – 116.

- 125. Sharpe D.W. and Vamos P.** *Injective modules.* – Cambridge: Cambridge Univ., 1972.– 190 p.
- 126. Wehrfritz B.A.F.** *Infinite linear groups.*– Berlin: Springer, 1973.– 229 p.

