АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ

М. М. Сенько

ПРО БУДОВУ ГРУП З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Київ 1997

АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ

М. М. Семко

ПРО БУДОВУ ГРУП З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Київ 1997

УДК 519.41/47
Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп / Семко М. М. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — 90 с.

Розглядаються групи, які мають багато нормальних підгруп, що називається щільністю нормальності для підгруп. Вводиться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості груп по кожному з них. Наведено опис окремих класів груп із найбільш загальним означенням щільності (УЩН[ ]-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \le N \le B$). Конструктивно описані локально ступінчасті: а) групи G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A < B$, існує нормальна підгрупа N із G і $A \le N \le B$; б) метагамільтонові УЩН[ ]-групи.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

Бібліогр.: 49 назв.

Відповідальний редактор доктор фізико-математичних наук *М. Ф. Кузенний*

Рецензенти доктор фізико-математичних наук, професор *І. В. Протасов*
доктор фізико-математичних наук, професор *Л. А. Курдаченко*

Затверджено до друку вченою радою Інституту педагогіки АПН України

ISBN 966-02-0182-6

© М. М. Семко, 1997

В С Т У П

У багатьох роботах (див.,наприклад, [1 - 14]) вивчались групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leqslant N \leqslant B$. Групи такого роду, де V - властивість нормальності, вивчались, наприклад, у роботах [8 - 14]. У згаданих роботах A завжди була власною немаксимальною підгрупою з B, $A \leqslant N < B$, або $A < N \leqslant B$. Зрозуміло, що ці умови при вивченні таких груп необов'язкові.

В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які є значним узагальненням груп із робіт [9 - 14]. Деякі результати цієї роботи опубліковані і задепоновані в [37 - 49].

Робота складається з п'яти параграфів. В параграфі 1.1 розглядаються групи, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами. Конструктивний опис локально ступінчастих груп такого роду дано в теоремі 1.1.1. В цьому ж параграфі описані метациклічні групи з трьома інволюціями (теорема 1.1.4).

У параграфі 1.2 вводяться означення восьми класів груп з умовами щільності нормальності для підгруп (означення 1.2.3). Теорема 1.2.1 встановлює замкненість введених класів груп за підгрупами та фактор-групами і включення кожного з цих класів в інший. Всі розглядувані класи груп належать класу УШН[ ]- груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немак-

симальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leqslant N \leqslant B$. Теорема 1.2.2 описує всі типи ненормальних підгруп локально ступінчастої УЩН[ ]-групи. Теорема 1.2.3 присвячена характеризації локально ступінчастих УЩН[ ]-груп.

Параграф 1.3 присвячений конструктивному опису деяких підкласів УЩН[ ]-груп, що мають самостійне значення і використовуються в подальших дослідженнях. У теоремі 1.3.1 конструктивно описані всі локально ступінчасті УЩН[ ]-групи Шмідта. Теорема 1.3.2 описує всі метациклічні УЩН[ ]-групи, а теорема 1.3.3 - локально ступінчасті мінімальні неметациклічні групи такого роду. У теоремі 1.3.4 описані локально ступінчасті УЩН[ ]-групи, які мають ненормальні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Параграф 1.4 присвячений опису локально ступінчастих ЩН[ ]-груп та їх підкласів. ЩН[ ]- групою називається така група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A < B$, існує нормальна в G підгрупа N і $A \leqslant N \leqslant B$. Теорема 1.4.1 дає конструктивний опис всіх локально ступінчастих ЩН[ ]-груп з виділенням восьми типів груп такого роду. Теорема 1.4.2 показує, що всі виділені в означенні 1.2.3 підкласи ЩН[ ]-груп вичерпуються дедекіндовими групами.

Параграф 2.1 присвячений конструктивному опису локально ступінчастих метагамільтонових УЩН[ ]-груп. У теоремі 2.1.1 описані УЩН[ ]-групи з комутантом простого порядку з виділенням семи типів груп такого роду. Теорема 2.1.2 описує метагамільтонові УЩН[ ]-групи. Одержано 18 типів таких груп. Наслідок 2.1.3 описує локально ступінчасті неметагамільтонові УЩН[ ]-групи, що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп (одержано 3 типи таких груп).

Г Л А В А I

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ ШН[ ]-ГРУП

1.1. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

О з н а ч е н н я 1.1.1. Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G, якщо в G не існує такої підгрупи B, що $A < B < G$.

Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G.

При $n > 0$ підгрупа A групи G називається n-максимальною в G, коли вона є максимальною підгрупою деякої (n-1)-максимальної підгрупи A групи G.

Скінченні неодиничні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиничні та деякі нескінченні групи, наприклад, квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Л е м а 1.1.1. Нехай G - довільна група. Тоді справедливі наступні твердження:

1) група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $/G/ \in \{1, p\}$, p - просте число;

2) $G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми максимальними підгрупами, тобто всі її максимальні підгрупи породжують власну підгрупу M групи G, коли $/g/ = p^{\alpha}$, p - просте число, $\alpha \geq 0$; при $\alpha = 0$ підгрупа M не існує; при $\alpha > 0$ $M = \Phi(\langle g \rangle)$ - єдина максимальна підгрупа в G;

3) $G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, тобто всі власні немаксимальні підгрупи в G породжують власну підгрупу M в G, коли $/g/ = p^{\alpha}q^{\beta}$, p,q - різні прості числа, $\alpha > 0$, $\beta \in \{0, 1\}$; при $\alpha + \beta < 2$ підгрупа M не існує; при $\alpha + \beta = 2$ M - 2-максимальна підгрупа в G; при $\alpha + \beta > 2$ і $\beta = 0$ $M = \Phi(\Phi(G)) = G$ - 2-максимальна підгрупа в G; при $\alpha + \beta > 2$ і $\beta = 1$ M - максимальна підгрупа в G порядку $p^{\alpha-1}q$.

Доведення. Необхідність. Твердження 1 леми очевидне. Покажемо, що при умовах 2 і 3 леми $/G/ < \infty$. Дійсно, нехай це не так. Тоді

$G = \langle g \rangle$, $|g| = \infty$ і $G = \langle g^2 \rangle \langle g^3 \rangle = \langle g^4 \rangle \langle g^9 \rangle$, що неможливо. Отже, $|g| < \infty$. При $|g| \in \{1, p\}$ справедливе твердження 1 леми. Тому будемо вважати, що $|g| \notin \{1, p\}$. Звідси $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, де $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle$ – силовська p-підгрупа з G, p – просте число, $\langle y \rangle$ – її холлівське доповнення. Якщо $|y| = 1$, то твердження 2 та 3 леми справедливі. Нехай $|y| \neq 1$. Тоді в G існують щонайменше 2 максимальні підгрупи $M_1 = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$ і $M_2 = \langle x \rangle \times \langle y_1 \rangle$, де $\langle y_1 \rangle$ – власна максимальна підгрупа з $\langle y \rangle$. Зрозуміло, що $G = M_1 M_2$, і тому умова 2 леми не виконується. Якщо тепер $|y| \in \{1, q\}$ (q – просте число), то необхідність твердження 3 доведена.

Нехай $|y| \notin \{1, q\}$. Тоді $\langle y \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$, $|g_1| = q^{\beta}$, q – просте число, $q \neq p$, $\beta > 0$ і $|\Phi(\langle g_1 \rangle)\langle g_2 \rangle| > 1$. Звідси $\langle x \rangle$, $\langle g_1 \rangle$, $\langle g_2 \rangle$ – власні немаксимальні підгрупи з G, що породжують всю групу G. А це неможливо за умовою леми. Отже, $|g_2| = 1$, $|g_1| = q$ в умовах твердження 3 леми.

При $|g| = p^{\alpha}$ $\alpha > 1$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують $\Phi(\Phi(G))$. При $|g_1| = q$ $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle g_1 \rangle$ – власні немаксимальні підгрупи з G і тому вони породжують максимальну підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle g \rangle$ з G. Звідси $|M| = p^{\alpha-1} q$. Необхідність доведена.

Достатність. Достатність для твердження 1 леми очевидна. Нехай G – група типу 2 леми. Тоді $\Phi(G)$ – єдина власна максимальна підгрупа з G. Звідси $M = \Phi(G)$ і достатність доведена. Нехай G – група типу 3 леми. У цьому випадку $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $|y| = q^{\beta}$, $\beta \in \{0, 1\}$. При $\alpha = 1$ $|G| = pq$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G співпадають з одиничною підгрупою 1. Тому $M = 1$. Нехай тепер $\alpha > 1$. Тоді $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle y \rangle$ – власні немаксимальні підгрупи з G, які породжують підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$, $[G:M] = p$. Звідси M – максимальна підгрупа з G. Достатність для груп типу 3 леми доведена. Лема доведена.

Наслідок 1.1.1. Група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $|G| \in \{1, p\}$, p – просте число.

Доведення випливає з леми 1.1.1.

Лема 1.1.2. Нехай G – довільна група, що має власні немаксимальні підгрупи, які всі породжують власну підгрупу M групи G.

Тоді $M \lhd G$, для будь-якого примарного елемента x із $G \setminus M$ $\langle x \rangle$ – максимальна підгрупа з G, $G = \langle g, x \rangle$, де g – будь-який елемент із $G \setminus \langle x \rangle$, $/G/ \notin \{1, r\}$, r – просте число і виконується тільки одне з тверджень:

1) M – 2-максимальна підгрупа з G і G – циклічна група порядку p^{α}, $\alpha > 1$, або $/G/ = pq$, p, q – необов'язково різні прості числа;

2) $M = \Phi(\langle x \rangle)$, G – періодична група;

3) M – максимальна підгрупа циклічної групи G, $/G/ = p^{\alpha}q$, p і q – різні прості числа, $\alpha > 1$, $/M/ = p^{\alpha-1}q$;

4) M – максимальна підгрупа нециклічної групи G, $G = M \cdot \langle x \rangle$, $M \cap \langle x \rangle = \Phi(\langle x \rangle)$, для будь-якого примарного елемента g із $G \setminus M$ $\langle g \rangle$ – максимальна підгрупа з G, $\mathcal{F}(\langle x \rangle) = \mathcal{F}(\langle g \rangle)$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми. Покажемо спочатку, що $M \lhd G$. При $/M/ = 1$ це очевидно. Тому будемо вважати, що $/M/ > 1$. Якщо $M = \langle a \rangle$, $/a/ = r^{\gamma}$, r – просте число, $\gamma > 0$, то за твердженням 2 леми 1.1.1 всі власні підгрупи з M породжують $\Phi(M)$. Але M містить елемент c такий, що $c \notin \Phi(M)$ і $\langle c \rangle$ – власна немаксимальна підгрупа в G. Звідси $M = \langle c \rangle$ і тому для будь-якого z із G підгрупа $z^{-1}\langle c \rangle z$ – власна немаксимальна в G. Таким чином, $z^{-1}cz \in M$ і, значить, $M \lhd G$.

Нехай тепер M – нециклічна група. Тоді $M = \langle x_i \rangle$, i – елемент множини індексів I, $\langle x_i \rangle < M$. Звідси $\langle x_i \rangle$ – власна немаксимальна підгрупа в G і тому для будь-якого z із G $z^{-1}x_i z \in M$ і, значить, $M \lhd G$.

Нехай G – циклічна група. Якщо G – примарна група, то для G справедливе твердження 3 леми 1.1.1 і вірне твердження 3 розглядуваної леми.

Нехай тепер G – нециклічна група і $x \in G \setminus M$. Тоді $G > \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $x \notin M$ і тому $\langle x \rangle$ не породжується своїми власними підгрупами. За лемою 1.1.1 $\langle x \rangle$ – примарна максимальна підгрупа з G. Для будь-якого елемента g із $G/\langle x \rangle$ $\langle g, x \rangle$ не може бути власною підгрупою в G і, таким чином, $G = \langle g, x \rangle$. Якщо M – немаксимальна підгрупа з G, то $\Phi(\langle x \rangle) = M \cap \langle x \rangle$, $/M\langle x \rangle/ = /M/r$, r – просте число. З умови $G > M\langle x \rangle$ і максимальності $\langle x \rangle$ в G випливає $M > \langle x \rangle$ і тому $M = \Phi(\langle x \rangle)$. Оскільки x – довільний елемент із $G \setminus M$, то G – періодична група і для G виконується твердження 2 леми. Якщо ж M – максимальна підгрупа в G, то для G виконується твердження 4 леми.

Лема доведена.

О з н а ч е н н я 1.1.2 [1]. Група G називається локально ступінчастою, коли будь-яка її неодинична скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.

Н а с л і д о к 1.1.2. Локально ступінчасті групи G з леми 1.1.2 є скінченними розв'язними групами.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми 1.1.2. Якщо G - циклічна група, то твердження наслідку очевидне. Нехай G - нециклічна група. Тоді можна вважати, що для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.1.2. Покажемо, що $|G| < \infty$. Дійсно, нехай $|G| = \infty$. Тоді за лемою 1.1.2 G містить такий елемент x, що $|x| = p^{\alpha}, \alpha > 0$, p - просте число, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з $G = \langle g, x \rangle$. Із означення 1.1.2 легко випливає, що G має нескінченний ланцюг нормальних підгруп G_i, $G_i > G_{i+1}$. Зрозуміло, що знайдеться таке i, для якого $[G:G_i] > p^{\alpha}$. Звідси $G_i\langle x \rangle < G$, що суперечить максимальності підгрупи $\langle x \rangle$ у групі G. Таким чином, $|G| < \infty$ і G має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За основною теоремою з [15] G - розв'язна група. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.1.1. Локально ступінчасті групи G, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p - просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, з яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M і G ізоморфна групі одного з типів:

1) G - циклічна група порядку p^{α}, p - просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ - 2-максимальна підгрупа з G;

2) $|G| = pq$, p і q - необов'язково різні прості числа, $M = E$ - 2-максимальна підгрупа з G;

3) G - група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G;

4) G - циклічна група порядку $p^{\alpha}q$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, M - максимальна підгрупа з G, $|M| = p^{\alpha-1}q$;

5) $G = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x,z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x^{p} \rangle \times \langle z \rangle$ - максимальна підгрупа з G;

6) $G = R \lambda \langle x \rangle$, $/R/ = r^{\alpha} > 2$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta > 2$, r і q - різні прості числа, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G, $M = R \lambda \langle x^{q} \rangle$ - максимальна підгрупа з G.

Доведення. Необхідність. Якщо $/G/ \in \{1, p\}$ (p - просте число), то твердження теореми очевидне. Нехай $/G/ \notin \{1, p\}$. За наслідком 1.1.1 G має власні немаксимальні підгрупи і задовольняє умову леми 1.1.2, за твердженням якої всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну нормальну підгрупу M і вірне одне з 4 тверджень згаданої леми. За наслідком 1.1.2 G - скінченна розв'язна 2-породжена група. Якщо $/G/ = pq$, де p і q - необов'язково різні прості числа, то $M = 1$ - 2-максимальна підгрупа з G і, значить, G - група типу 1 чи 2 теореми.

Нехай G - циклічна група. Тоді за твердженням 3 леми 1.1.1 $/G/ = p^{\alpha}q$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, M - максимальна підгрупа з G, $/M/ = p^{\alpha-1}q$ і G - група типу 4.

Нехай G - нециклічна група. Тоді для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.1.2, за яким G містить елемент x такий, що $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q - просте число, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G. Розглянемо два можливі випадки: 1) G - нільпотентна група; 2) G - ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку $G = Q \times D$, де Q - силовська q-підгрупа з G, D - її холлівське доповнення в G. Зрозуміло, що $Q \geqslant \langle x \rangle$. Оскільки підгрупа $\langle x \rangle$ максимальна в G, то $[G:\langle x \rangle]$ - просте число і тому $/D/ \in \{1, r\}$ (r - просте число). При $/D/ = r$ і $Q = \langle x \rangle$ G - циклічна група, що суперечить вибору G. Звідси $/D/ = 1$, $G' = Q$, $[G:\langle x \rangle] = q = r$ і, значить, G - примарна група, що має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За теоремою 12.5.1 з [16] G - група типу 5 розглядуваної теореми, у якої $[G:G'] > 4$, або $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ \in \{2, 4\}$, $\alpha > 1$, $G' \neq 1$. При $\alpha = 2$ G - неабелева група порядку 8, що не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, ізоморфна групі кватерніонів і тому G є групою типу 3 теореми, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G.

Нехай $\alpha > 2$ і G не є групою типу 5 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою 12.5.1 з [16] G має власні циклічні підгрупи порядку 2 та 4, які немаксимальні в G і породжують групу G, що неможливо. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Розглянемо два випадки: 2.1) $\langle x \rangle \lhd G$; 2.2) $\langle x \rangle \not\lhd G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $[G:\langle x\rangle] = r$, r – просте число, $r \neq q$. При $/x/ = q$ $M = 1$ і G – група типу 2. Нехай $/x/ > q$. Тоді $G = \langle x\rangle \setminus \langle y\rangle$, $/y/ = r$, $\langle y\rangle$ – ненормальна силовська r-підгрупа з G, $\langle y\rangle$ – немаксимальна підгрупа з G. Позначимо через N підгрупу з G, породжену всіма силовськими r-підгрупами з G. Тоді $N \lhd G$. Покажемо, що $G = N$. Дійсно, нехай $G \neq N$. Тоді за лемою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $G = ND$, де $D = N_G(\langle y\rangle)$. Звідси $D = T \times \langle y\rangle$, де $T = D \cap \langle x\rangle$. Відомо, що $\langle x\rangle = TT_1$, де T_1 – силовська q-підгрупа з N. Але тоді $T = \langle x\rangle$ і G – нільпотентна група, що не так. Таким чином, $G = N$, а це суперечить умові теореми. Випадок 2.1 розглянутий повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку $N_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з G. Звідси $\langle x\rangle$ – силовська q-підгрупа з G, що належить центру свого нормалізатора. За теоремою 14.3.1 з [16] $G = R \setminus \langle x\rangle$, де R – холлівське доповнення $\langle x\rangle$ в G. Оскільки $\langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з G, то R – мінімальна нормальна підгрупа з G. Відомо, що $/R/ = r^{\alpha} > 2$, r – просте число. При $\alpha + \beta = 2$ група G типу 2 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha + \beta > 2$. Ясно, що R – елементарна абелева група, всі власні циклічні підгрупи якої є власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло також, що підгрупа $\langle x^q\rangle$ немаксимальна в G і тому $x^q \in M$. Покажемо, що $M \geqslant R$. Дійсно, при $\beta > 1$ R – власна немаксимальна підгрупа з G і тому R належить M. При $\beta = 1$ $\alpha > 1$ і R породжується своїми власними циклічними підгрупами, які за попереднім зауваженням належать M. Звідси $M \geqslant R$. За умовою теореми $G > M$, $M = R \setminus \langle x^q\rangle$ – максимальна підгрупа з G і, таким чином, G – група типу 6 теореми. Випадок 2.2 повністю розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що в групах G порядку 1 чи r (r – просте число) взагалі немає власних немаксимальних підгруп і тому G не породжується такими підгрупами. Будемо вважати, що $/G/ \notin \{1, r\}$ і, значить, G – група одного з типів 1 – 6 розглядуваної теореми. За твердженням леми 1.1.1 група G типу 1 чи 4 не породжується своїми власними підгрупами і тому для груп цих типів достатність доведена.

В групі G типу 2 всі власні немаксимальні підгрупи співпадають з одиничною підгрупою 1, а в групі G типу 3 всі підгрупи такого роду співпадають з $\Phi(G)$. Звідси випливає достатність для цих типів груп.

Нехай G – група типу 5 і M_1 – підгрупа з G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло, що $x^p \in M_1$, $z \in M_1$. Звідси $M_1 \geq \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle = M$ – максимальна підгрупа з G. Покажемо, що $M_1 = M$. Нехай $M_1 \neq M$. Тоді існує власна немаксимальна підгрупа X з G така, що $MX = G$. Значить, X містить елемент y, а M – елемент a такі, що $x = ay$. Ясно, що $a = x^{ip} z^{\beta}$. Звідси $x = x^{ip} z^{\beta} y$ і тому $x^{-ip} x = z^{\beta} y$. Зрозуміло, що $/x^{-ip} x/ = /x/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$. Оскільки $/z^{\beta}/ \in \{1, p\}$, то з умови $[G:G'] > 4$ маємо $/y/ = /x/$. Але тоді $\langle y \rangle$ – максимальна підгрупа з G, що суперечить вибору X. Це означає, що $M_1 = M$ і достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G – група типу 6. Оскільки $\alpha + \beta > 2$, то всі власні підгрупи з R є власними немаксимальними підгрупами з G і $\langle x^q \rangle$ – теж власна немаксимальна підгрупа з G. Тому $N \geq M$ – максимальна підгрупа із G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Покажемо, що $N = M$. Справді, якщо це не так, то $N = G = M\langle y \rangle$, де y – q-елемент. Легко бачити, що $\langle x^q \rangle \langle y \rangle$ – силовська q-підгрупа з G. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle y \rangle$ – власна немаксимальна підгрупа з G. Будь-яка силовська q-підгрупа з G циклічна і тому $[x^q, y] = 1$, $/x^q y/ = /x/$. Звідси $/y/ > /x^q/$ і, значить, $/y/ = /x/$. Отже, $\langle y \rangle$ – силовська q-підгрупа з G, яка максимальна в G, що не так і тому $N = M$. Достатність для груп типу 6 доведена. Теорема доведена.

О з н а ч е н н я 4.1.3 [46]. Група G, у якої всі підгрупи нормальні, називається дедекіндовою групою.

Т в е р д ж е н н я 4.1.1 [16]. Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q – група кватерніонів, D – елементарна абелева 2-група, A – періодична абелева група без інволюцій.

Для дедекіндових груп G справедливі твердження:

1) якщо G містить елемент нескінченного порядку чи 8 порядку, то $G' = 1$;

2) циклічні 2-підгрупи G порядку більше двох містять G'.

Т е о р е м а 1.1.2. Нехай G – група, що містить нормальні підгрупи N_1 і N_2, для яких $N_1 \cap N_2 = 1$ і G/N_1 та G/N_2 – дедекіндові групи. Тоді G – дедекіндова група, якщо в ній виконується хоча б одна з умов:

1) N_1 – періодична група без інволюцій, N_2 – група без інволюцій, або група, що містить елемент порядку 8;

2) N_1 – неперіодична група без інволюцій або з елементами порядку 8, N_2 – група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8.

Доведення. Нехай G, N_1 і N_2 задовольняють умови теореми. Якщо $G' = 1$, то твердження теореми очевидне. Нехай $G' \neq 1$. Оскільки $N_1 \cap N_2 = 1$, то можливі два випадки: 1) $N_1 \not> G'$; 2) $N_1 > G'$.

Випадок 1. У цьому випадку G/N_1 – неабелева група, а тому періодична гамільтонова група, яка за твердженням 1.1.1 не містить елементів порядку 8. Звідси за умовою теореми N_2 – періодична група, що не містить інволюцій. Зрозуміло, що $N_2 \cap G' = 1$, звідки $N_2 \leqslant Z(G)$. Тепер G/N_2 – неабелева група, а значить, періодична нільпотентна гамільтонова група. Таким чином, маємо що і G – періодична нільпотентна група. Нехай D – силовська 2-підгрупа з G. Тоді $D \cap N_2 = 1$, D – гамільтонова 2-група і $G = D \times A$, де A – періодична нільпотентна група без інволюцій. Оскільки G/N_1 і G/N_2 – гамільтонові групи, $N_1 \cap N_2 = 1$, то G' – 2-група. Звідси $A' = 1$. За твердженням 1.1.1 G – гамільтонова група. Отже, теорема у випадку 1 доведена.

Випадок 2. В цьому випадку G/N_2 – неабелева група, а тому вона гамільтонова нільпотентна періодична група, у якої $N_1 \times N_2/N_2$ – періодична абелева група без інволюцій. Звідси $N_1 \times N_2/N_2$ не може містити комутант групи G/N_2. Таким чином, $G' \not< N_1$. Суперечність. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1.1.3. Якщо група G містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 такі, що $N_1 \cap N_2 = 1$ і G/N_i – дедекіндова група ($i \in \{1,2\}$), N_i – локально циклічна група з силовською 2-підгрупою D, для якої $|D| \notin \{2,4\}$, то G – дедекіндова група.

Наслідок випливає з теореми 1.1.2.

Теорема 1.1.3. Нехай G – група, N – її нормальна підгрупа і G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів, тобто для будь-якого елемента g із G і всіх елементів x із N в N існує елемент a такий, що $g^{-1}xg = a^{-1}xa$. Тоді $G = N \cdot C_G(N)$. Зокрема, при $Z(N) = 1$ $G = N \times C_G(N)$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді для елемента g з G та будь-якого x з N маємо $g^{-1}xg = a^{-1}xa$, де $a \in N$. Звідси $ag^{-1}xga = x = u^{-1}xu$, де $u = ga^{-1}$, $u \in C_G(N)$, і тому $g = ua$ і g належить добутку $NC_G(N)$ і $G = NC_G(N)$. Зрозуміло, що $N \cap C(N) \leqslant Z(N)$. Якщо $Z(N) = 1$, то $G = N \times C_G(N)$. Теорема доведена.

Наслідок 1.1.4. Нехай G – група, N – така її 2-породжена нормальна підгрупа, що $G' \cap N = N' \leqslant Z(N)$. Тоді $G = NC_G(N)$.

Доведення. Нехай G, $N = \langle a,b \rangle$ задовольняють умови леми. Тоді $G' \cap N = \langle c \rangle < Z(N)$, $c = [a,b]$. Нехай g – елемент з G. Ясно, що $g^{-1}ag = ac^{l}$, $g^{-1}bg = bc^{m}$. Звідси $g^{-1}cg = (g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1}(g^{-1}ag) = (g^{-1}bg) = a^{-1}c^{-l}b^{-1}a^{-m}ac^{l}bc^{m} = c$, а значить, $[c,g] = 1$.

Нехай $d = a^{-1}b^{m}a^{-m}b^{l}$. Оскільки $\langle c \rangle < Z(N\langle g \rangle)$, то за відомими комутантними співвідношеннями (див., наприклад, [16]) $[d^{-1}g,a] = 1$, а значить, $d^{-1}g \in C_G(N)$. Тому група G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів. За теоремою 1.1.3 $G = NC_G(N)$. Лема доведена.

Наслідок 1.1.5. Нехай G – група з центральним циклічним комутантом G'. Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' = N'$ маємо $G = NC_G(N)$.

Наслідок 1.1.6. Якщо G – група з комутантом порядку p і N – будь-яка її 2-породжена неабелева p-підгрупа, то $G = NC_G(N)$.

Означення 1.1.4 [18]. Підгрупа $w(G)$ групи G, породжена всіма елементами з G, що мають порядком просте число, називається нижнім шаром групи G.

Твердження 1.1.2 [18]. Нижній шар групи G є характеристичною і тому нормальною підгрупою групи G.

Т в е р д ж е н н я 1.1.3 (теорема Б з [4]). В скінченній 2-групі G, клас нільпотентності якої не більше 2, кількість інволюцій тоді і тільки тоді рівна 3, коли G - група одного з наступних класів:

1) G - нециклічна метациклічна група, яка відмінна від групи кватерніонів і групи діедра порядку 8;

2) $G = A \lambda B$, де кожна з підгруп A і B або циклічна, або ізоморфна групі кватерніонів 8-го порядку, причому інволюція з B лежить у Z(G);

3) $G = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = a^2$, $[a,c] = b^2$, $[b,c] = c^2$, $[a,b] = 1$;

4) $G = \langle a, b, c, d \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = b^2$, $d^2 = a^2b^2$, $[a,b] = [c,d] = 1$, $[a,c] = a^2$, $[a,b] = [a,d] = [b,c] = a^2b^2$, $[b,d] = b^2$.

Л е м а 1.1.3. Метациклічна 2-група G тоді і тільки тоді має три інволюції, коли вона нециклічна і не має підгрупи кватерніонів та групи діедра порядку 8.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Зрозуміло, що G - нециклічна група. В групі діедра порядку 8 п'ять інволюцій і тому G не містить групи діедра порядку 8. Припустимо, що G містить підгрупу кватерніонів Q. Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^r$, r - ціле непарне число. Оскільки Q - неабелева група, то $G' \neq 1$ і $\alpha > 1$. Нехай $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. За теоремою про ізоморфізм груп $Q/\langle x \rangle$ - циклічна група. Звідси $|x| = 4$, $Q = \langle x, y \rangle$. Отже, існує підгрупа $A = \langle a \rangle Q = \langle a \rangle \langle y \rangle$, $|y| = 4$, $y^2 = x^2 = a^{2^{\alpha-1}}$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$, $[A : \langle a \rangle] = 2$, $\langle a \rangle$ - максимальна підгрупа з A. За теоремою 12.5.1 з [16] G не може бути групою кватерніонів порядку 8, чи узагальненою групою кватерніонів. Звідси $|G| > 8$. Знову за теоремою 12.5.1 з [16] A - група кватерніонів порядку 8, або узагальнена група кватерніонів. Звідси $|v(A)| = 2$ і тому G містить v, $|v| = 2$, $\langle v \rangle \cap A = 1$. Значить, існує підгрупа $B = A \lambda \langle v \rangle$. Оскільки $B/\langle a \rangle$ - елементарна абелева група порядку 4, а $G/\langle a \rangle$ - циклічна група, то прийшли до суперечності. Отже, G не містить групи кватерніонів порядку 8. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - нециклічна метациклічна 2-група, що не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8.

Тоді $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $\langle a\rangle \lhd G$. Нехай $\langle a\rangle$ – максимальна циклічна підгрупа з G. Тоді G містить $A > \langle a\rangle$ і $[A:\langle a\rangle] = 2$. Значить, A – нециклічна група з максимальною циклічною підгрупою $\langle a\rangle$. За теоремою 12.5.1 з [16] $A = \langle a\rangle \lambda \langle y\rangle$, $/y/ = 2$, $[A:A'] > 4$, $w(A) = w(\langle a\rangle) \times \langle y\rangle$, $/w(A)/ = 4$. Покажемо, що $w(A) = w(G)$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G\backslash A$ містить v, $/v/ = 2$, і G містить підгрупу $A \lambda \langle v\rangle$. Звідси маємо, що $B/\langle a\rangle$ – елементарна абелева група порядку 4, яка міститься в циклічній групі $G/\langle a\rangle$. Суперечність. Тому $w(A) = w(G)$ і, значить, G містить три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.1.7. Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:

1) G – нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку 8, $G' \leqslant Z(G)$;

2) $G = U \lambda X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою, чи групою кватерніонів, $/U/ > 1$, $/X/ > 1$, $w(X) \leqslant Z(G)$, $[U,X] \leqslant w(U)$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2$, $[a,x] = a^2b^2$, $[b,x] = b^2$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Тоді вона задовольняє умови твердження 1.1.3, за яким G – група одного з типів 1 – 4 згаданого твердження. Нехай G – група типу 1 твердження 1.1.3. За лемою 1.1.3 G не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8 і тому G – група типу 1 наслідку. Нехай G – група типу 2 твердження 1.1.3. Тоді $G = U \lambda X$, де U, X – неодиничні циклічні 2-групи, чи групи кватерніонів. Оскільки $G' \leqslant Z(G)$, то $w(X) \leqslant Z(G)$. Підгрупа $X = \langle x,y\rangle$ – циклічна, чи група кватерніонів. Якщо $/X/ = 2$, то $G = U \times X$ – група типу 2. Нехай $/X/ > 2$. Якщо U та X одночасно циклічні, то G – група типу 1 наслідку. Нехай X – циклічна група. Звідси U – нециклічна група і, значить, група кватерніонів. Із умови $G' \leqslant Z(G)$ випливає, що $[U,X] \leqslant U \cap Z(G) = w(U)$ і знову G – група типу 2 наслідку.

Нехай тепер X – нециклічна група. При нециклічності U, як і раніше, $[U,X] \leqslant w(U)$ і знову G – група типу 2 наслідку. Нехай $U =$

$= \langle u \rangle$ - циклічна група, $/u/ = 2^{\Delta}$. При $\Delta = 1$ $G = U \times X$ і G - група типу 2. Нехай $\Delta > 1$. Тоді G містить підгрупи $\langle u \rangle \lambda \langle x \rangle$, $\langle u \rangle \lambda \langle y \rangle$ з центральним комутантом. Оскільки $w(X) = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \leqslant Z(G)$, то $\langle x \rangle$ та $\langle y \rangle$ індукують на $\langle u \rangle$ автоморфізм порядку 2. За відомими комутантними співвідношеннями (див., наприклад,[16]) $[u,x]^2 = [u,x^2] = 1$, $[u,y]^2 = [u,y^2] = 1$. Звідси $[\langle u \rangle, X] \leqslant w(\langle u \rangle)$ і знову G - група типу 2 наслідку.

І нарешті, нехай G - група типу 3 чи 4 твердження 1.1.3. Можна вважати, що G - неметациклічна група. Легко показати, що в групах типу 3 згаданого твердження $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і тому G - група типу 3 наслідку.

Аналогічно в групах G типу 4 твердження 1.1.3 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і $G = \langle a, b, c, d \rangle$. Покладемо $x = ad$, $y = bc$ і одержимо, що G - група типу 4 наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що G - скінченна нециклічна 2-група і $G' \leqslant Z(G)$. Покажемо, що G містить три інволюції. За лемою 1.1.3 в групах G типу 1 точно три інволюції. Групи G одного з типів 2 - 4 наслідку є групами відповідно кожного з типів твердження 1.1.3. За цим твердженням в G точно три інволюції. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.1.4. Метациклічні 2-групи з трьома інволюціями мають вигляд $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{r}$ (r -ціле непарне число) і вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $r = 1$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $\alpha > 1, \beta > 1$, $r = -1$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $\alpha > 2, \beta > 1$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha, \beta \geqslant \alpha - k$;

4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geqslant \alpha - k$;

5) $G = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^{l}} \rangle$, $r = 1+2^{k}$, $1 < k < l < \alpha < \beta$, $/d/ = 2^{l}$;

6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\alpha > 2, \beta > 2$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $r = -1$;

7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $r = -(1+2^{k})$, $1 < k < \alpha - 1$, $\beta > \alpha - k + 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - метациклічна 2-група з трьома інволюціями. Тоді за лемою 1.1.3 $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - нециклічна метациклічна група, що не містить підгруп кватерніонів та груп діедра порядку 8, $/a/ = 2^{\alpha}$, $/b/ = 2^{\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{r}$, r - ціле

непарне число. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle a\rangle$ – максимальна циклічна підгрупа з G. Оскільки G – нециклічна група, то $G \geqslant A > \langle a\rangle$, де A – нециклічна підгрупа з G, $[A:\langle a\rangle] = 2$. Тепер A – нециклічна 2-група з циклічною максимальною підгрупою $\langle a\rangle$, яка не містить підгрупи кватерніонів та групи діедра порядку 8. За теоремою 12.5.1 з [16] $A' = 1$ або $[A:A'] > 4$ і завжди $A = \langle a\rangle \lambda \langle y\rangle$, $|y| = 2$, $w(A) = w(\langle a\rangle) \times \langle y\rangle \lhd G$. Якщо $G' = 1$, то без порушення загальності $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – група типу 1 теореми.

Нехай $G' \neq 1$. Тоді $\alpha > 1$. Якщо $G = A$, то $A' \neq 1$, A не містить груп діедра порядку 8. Отже, $\alpha > 2$, $y^{-1}ay = a^{1+2^{\alpha-1}}$. Покладемо $b = y$ і тоді G – група типу 4 розглядуваної теореми. Нехай $G \neq A$ і, значить, $[G:\langle a\rangle] > 2$. В роботах [20 – 22] виписані всі нециклічні метациклічні 2-групи $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle \lhd G$, $[G:\langle a\rangle] > 2$, які при умові $G' \neq 1$ можуть бути групами одного з типів 2 – 7 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ – група одного з типів 1– 7 теореми. Легко бачити, що G – нециклічна метациклічна 2-група. Покажемо, що G містить точно три інволюції, або іншими словами, $w(G) = \langle c\rangle \times \langle v\rangle$ – елементарна абелева група порядку 4, де $\langle c\rangle = w(\langle a\rangle)$, $w(\langle a\rangle) \leqslant Z(G)$, $|c| = 2$, $|v| = 2$. В силу леми 1.1.3 досить показати, що G не містить ні підгрупи кватерніонів, ні групи діедра порядку 8. Для груп типу 1 теореми це зрозуміло. Нехай G – група одного з типів 2 – 7 і G містить неабелеву підгрупу Q порядку 8. Покладемо $A = \langle a\rangle Q$ і $\langle x\rangle = \langle a\rangle \cap Q$. Оскільки $A/\langle a\rangle$ – підгрупа циклічної групи $G/\langle a\rangle$, то $A/\langle a\rangle$ – циклічна група. Звідси $|x| = 4$ і тому $[A:\langle a\rangle] = 2 = [Q:\langle x\rangle]$. Ясно, що $A = \langle a\rangle\langle z\rangle$, де $\langle z\rangle = A \cap \langle b\rangle$, $z^2 \in \langle a\rangle$ і $A' \neq 1$. В групах G кожного з типів 2 – 4 $A = \langle a\rangle \lambda \langle z\rangle$, де $\langle z\rangle = w(\langle b\rangle)$. В групі G типу 2 $w(\langle b\rangle) \leqslant Z(G)$ і тому $A' = 1$. В групі G типу 3 та 4 при $\beta > \alpha - k$ $w(\langle b\rangle) \leqslant Z(G)$ і $A' = 1$. Тому G – група типу 3 чи 4 і $\beta = \alpha - k$.

Нехай G – група типу 4. Тоді з умови $1 < k < \alpha$ і за теоремою 12.5.1 з [16] $A' \leqslant \langle a^{p^k}\rangle$ і тому $A' = \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle > 1$. A не містить неабелевих підгруп порядку 8, що суперечить вибору A.

В групах типу 3 при $\alpha - k = 1$ $\beta > 1$, що неможливо. Тому $\alpha - k > 1$. Але тоді $\langle z\rangle = w(\langle b\rangle) \leqslant \langle b^2\rangle$. Зрозуміло, що $b^{-2}ab^2 = a^{r^2}$, де $r^2 = (1+2^k)^2 = 1 + 2^{k+1} + 2^{2k} = 1 + 2^{k+1}(1+2^{k-1}) = 1+s2^{k+1}$, $(s,2) = 1$. Звідси $b^{-2}ab^2 = a^{1+s2^{k+1}}$. Тепер підгрупа $G_1 = \langle a\rangle \lambda \langle b^2\rangle$ може бути групою лише типу 4, в якій A не містить неабелевих підгруп

порядку 8, що неможливо.

Нехай тепер G - група одного з типів 5 - 7 теореми. В групі G кожного з цих типів $[G:\langle a\rangle] > 2$, $\alpha > 2$, $|A| > 8$. У групі типу 5 $A' \leqslant \langle a^2\rangle$ і знову за теоремою 12.5.1 з [16] A - абелева група, чи група Міллера - Морено, яка не містить неабелевої підгрупи порядку 8. В групах типів 6 чи 7 $\langle z\rangle = \langle b^{2^{\beta-2}}\rangle \leqslant Z(G)$ і тому $A' = 1$, що неможливо. Отже, наше припущення в усіх випадках приводить до суперечності і тому в G точно три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Наслідок 1.1.8. Метациклічні групи $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ кожного з типів 1 - 7 теореми 1.1.4 не містять неабелевих підгруп порядку 8, але містять підгрупу $A = \langle a\rangle \lambda \langle v\rangle$, яка може бути неабелевою групою лише в групах G типу 3 чи 4 згаданої теореми при $\beta = \alpha - k$ і A - група Міллера - Морено.

Наслідок випливає з леми 1.1.3 та доведення достатності теореми 1.1.4.

Наслідок 1.1.9. Неодиничні метациклічні 2-групи G з числом інволюцій відмінним від числа 3 вичерпуються групами типів:

1) G - неодинична циклічна 2-група, в G одна інволюція;

2) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ - група кватерніонів, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 4$, $\alpha > 1$, $a^{2^{\alpha-1}} = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, в G одна інволюція;

3) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$ - група діедра, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2$, $\alpha > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, в G не менше 5 інволюцій;

4) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$ - квазідіедральна група, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 2$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1+2^{\alpha-1}}$, в G не менше 5 інволюцій.

Доведення. Необхідність. Нехай G - неодинична метациклічна 2-група. Тоді вона має центральну інволюцію c. Якщо c - єдина інволюція в G, то за теоремою 12.5.1 з [16] G - група типу 1 чи 2 розглядуваного наслідку. Тому будемо вважати в подальшому, що в G інволюцій більше 3. За лемою 1.1.3 та попереднім $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ містить неабелеву підгрупу порядку 8, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\langle a\rangle \lhd G$, $\langle a\rangle$ - максимальна циклічна підгрупа з G, $G > Q$, $Q' \neq 1$, $|Q| = 8$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Ясно, що $G \geqslant A = \langle a\rangle Q$, $A \cap Q = \langle x\rangle$, $|x| = 4$, $Q = \langle x,y\rangle$. Зрозуміло, що $A = \langle a\rangle\langle y\rangle = \langle a\rangle\langle z\rangle$, $[A:\langle a\rangle] = 2$ і тому

$y^2 \in \langle a\rangle$, $z^2 \in \langle a\rangle$, де $\langle z\rangle = A \cap \langle b\rangle$. Відмітимо, що $y^{-1}xy = z^{-1}xz = x^{-1}$. Покажемо, що $A = G$. Дійсно, нехай це не так. Покажемо спочатку, що $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = \langle a^2\rangle$. При $\alpha = 2$ $A = Q$ і $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = Q' = \langle a^2\rangle$. При $\alpha > 2$ і з припущення $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] \leqslant \langle a^4\rangle$ за теоремою 12.5.1 з [16] одержимо, що A - абелева група, чи група Міллера - Морено, яка не містить неабелевих підгруп порядку 8. Суперечність. Тому завжди $[\langle a\rangle,\langle z\rangle] = \langle a^2\rangle$ і за теоремою 12.5.1 з [16] $z^{-1}az = a^r$, $r \in \{-1, -1 + 2^{\alpha-1}\}$. Оскільки $A \neq G$, то $\langle z\rangle \leqslant \langle b^2\rangle$. В силу [20 - 22] $b^{-1}ab = a^t$, $t \in \{-1, (1+2^k), -(1+2^k)\}$, $1 < k < \alpha$. Зрозуміло, що $b^{-2}ab^2 = a^{t^2}$, де, очевидно, t^2 конгруентно $1 + s2^{k+1}$ по модулю 2^α, s - непарне число. Зрозуміло також, що $A \leqslant \langle a\rangle\langle b^2\rangle$. Але тоді r конгруентно $t^{2^{n+1}}$ по модулю 2^α, $z = b^{2^{n+1}}$, n - ціле невід'ємне число. Звідси $r \notin \{-1, -1 + 2^{\alpha-1}\}$. Суперечність. Значить, $A = G$. Оскільки G не може бути групою кватеріонів, то за теоремою 12.5.1 з [16] G - група типу 3 чи 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена. Достатність очевидна.

Наслідок 1.1.10. Нехай G - нециклічна метациклічна 2-група і $\langle a\rangle$ - її циклічна підгрупа найбільшого порядку, що містить G'. Якщо $[G:\langle a\rangle] > 2$, то в G точно три інволюції.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle < G$, $\langle b\rangle < G$. Припустимо, що в G не три інволюції. Тоді G - група одного з типів 2 - 4 наслідку 1.1.9 і $[G:G'] = 4$. Зрозуміло, що $G' < \langle a^2\rangle$. Але $[G:G'] = [\langle a\rangle:G'][G:\langle a\rangle] > 4$. Суперечність. Отже, в G точно три інволюції. Наслідок доведено.

1.2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Означення 1.2.1. Нехай G - група, A та B - її підгрупи, $A \leqslant B$. Відрізком (інтервалом) $[A;B]$ $((A;B))$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A \leqslant X \leqslant B$ $(A < X < B)$.

Півінтервалом $(A;B]$ чи $[A;B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A < X \leqslant B$ чи $A \leqslant X < B$.

Проміжком $\{A;B\}$ називається відрізок, інтервал чи півінтервал.

Означення 1.2.2. Модулем проміжку $/\{A;B\}/$ називається

число його елементів.

Л е м а 1.2.1. Для понять, введених в означенні 1.2.1, справедливі твердження:

1) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ = 1$, чи $/(A;B]/ = 0$, чи $/[A;B)/ = 0$, коли $A = B$;

2) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ = 2$, чи $/(A;B]/ = 1$, чи $/[A;B)/ = 1$, коли A - максимальна підгрупа з B;

3) тоді і тільки тоді $/[A;B]/ > 2$, чи $/(A;B]/ > 1$, чи $/[A;B)/ > 1$, коли A - власна немаксимальна підгрупа з B;

4) тоді і тільки тоді $/(A;B)/ = 0$, коли $A = B$ або A - максимальна підгрупа з B.

Твердження леми випливає з означень 1.2.1 та 1.2.2.

О з н а ч е н н я 1.2.3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A;B]$, де A та B $\mathfrak{T}$-підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

1) при $/[A;B]/ \geq 1$: 1.1) $N \in [A;B]$;

2) при $/[A;B]/ > 1$: 2.1) $N \in (A;B]$; 2.2) $N \in [A;B)$; 2.3) $N \in (A;B)$;

3) при $/[A;B]/ > 2$: 3.1) $N \in (A;B)$; 3.2) $N \in (A;B]$; 3.3) $N \in (A;B)$; 3.4) $N \in [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: H- , ШН($\mathfrak{T}$]- , ШН($\mathfrak{T}$)- , ШН[$\mathfrak{T}$]- , УШН($\mathfrak{T}$)- , УШН($\mathfrak{T}$]- , УШН[$\mathfrak{T}$)- , УШН[$\mathfrak{T}$]-групою.

Якщо $\mathfrak{T}$ - властивість бути будь-якою підгрупою групи G, то в позначеннях відповідних класів груп буква $\mathfrak{T}$ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як H- , ШН( ]- , ШН[ )- , ШН[ ]- , УШН( )- , УШН( ]- , УШН[ )- , УШН[ ]-групи.

Вісім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через K(H), K(ШН( ]), K(ШН[ )), K(ШН[ ]), K(УШН( )), K(УШН( ]), K(УШН[ )), K(УШН[ ]).

Л е м а 1.2.2. Нехай G - група. Тоді справедливі твердження:

1) група G тоді і тільки тоді H-група, коли вона дедекіндова група;

2) група G тоді і тільки тоді є ШН( ]- ,ШН[ )- , ШН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ існує нормальна підгрупа N

групи G, що відповідно $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

3) група G тоді і тільки тоді є УШН( )- , УШН( ]- , УШН[ )- , УШН[ ]-групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ таких, що A немаксимальна в B, існує нормальна підгрупа N групи G і відповідно $N \in (A;B)$, $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$;

4) $K(H) \leqslant K(\text{ШН}( ]) \leqslant K(\text{ШН}[ ]) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$,
$K(H) \leqslant K(\text{ШН}[ )) \leqslant K(\text{ШН}[ ])$,
$K(\text{ШН}( ]) \leqslant K(\text{УШН}( ]) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$,
$K(\text{ШН}[ )) \leqslant K(\text{УШН}[ )) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$,
$K(H) \leqslant K(\text{УШН}( )) \leqslant K(\text{УШН}( ]) \cap K(\text{УШН}[ ))$.

Доведення. Припустимо спочатку, що G – H-група. Тоді для будь-якої підгрупи X з G за означенням 1.1.3 маємо $[X;X] \ni N \lhd G$. Звідси $N \neq X \lhd G$ і G – дедекіндова група. Зрозуміло, що будь-яка дедекіндова група є H-групою і твердження 1 леми доведене.

Нехай в G $/[A;B]/ > 1$. Тоді за означенням 1.2.1 та лемою 1.2.1 $A < B$ і A – власна підгрупа з B. В силу означення 1.2.3 G має таку нормальну підгрупу N, що відповідно $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$. Оскільки для власної підгрупи A підгрупи B з G $/[A;B]/ > 1$ і відповідно $(A;B] \ni N \lhd G$, $[A;B) \ni N \lhd G$, $[A;B] \ni N \lhd G$, то твердження 2 доведене.

Нехай тепер в G $/[A;B]/ > 2$. За означенням 1.2.2 та лемою 1.2.1 A – власна немаксимальна підгрупа з B. За означенням 1.2.3 G має таку нормальну підгрупу N, що відповідно $N \in (A;B)$, $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$, $N \in [A;B]$. Оскільки для власної немаксимальної підгрупи A підгрупи B з G $/[A;B]/ > 2$ і відповідно $(A;B) \ni N \lhd G$, $(A;B] \ni N \lhd G$, $[A;B) \ni N \lhd G$, $[A;B] \ni N \lhd G$, то твердження 3 доведене.

За твердженням 1 розглядуваної леми K(H) належить всім іншим семи класам груп означення 1.2.3. Якщо $/[A;B]/ > 1$ і $(A;B] \ni N \lhd G$, $[A;B) \ni N \lhd G$, $[A;B] \ni N \lhd G$, то $N \in [A;B]$ і тим більше це справедливо і при $/[A;B]/ > 2$. Звідси $K(\text{ШН}( ]) \leqslant K(\text{ШН}[ ]) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$; $K(\text{ШН}[ )) \leqslant K(\text{ШН}[ ]) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$, $K(\text{ШН}[ )) \leqslant K(\text{ШН}[ ])$, $K(\text{ШН}( ]) \leqslant K(\text{УШН}( ])$, $K(\text{ШН}[ )) \leqslant K(\text{УШН}[ ))$. Нехай далі $/[A;B]/ > 2$. Тоді із співвідношення $(A;B) \ni N \lhd G$ маємо $N \in (A;B]$, $N \in [A;B)$. Звідси $K(\text{УШН}( )) \leqslant K(\text{УШН}( ]) \cap K(\text{УШН}[ ))$. Нарешті, із співвідношень $(A;B] \ni N \lhd G$, $[A;B) \ni N \lhd G$ випливає, що $N \in [A;B]$ і тому $K(\text{УШН}( ]) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$, $K(\text{УШН}[ )) \leqslant K(\text{УШН}[ ])$. Твердження 4 дове-

дене. Лема доведена.

Л е м а 1.2.3. Нехай G - неперіодична УШН[1]-група, тобто для будь-якого $/[A;B]/ > 2$ і $/A/ = \infty$ маємо $[A;B] \ni N \lhd G$. Тоді G - абелева група.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді G містить елемент g, $/g/ = \infty$. Покладемо $\langle g\rangle = B$, $A_1 = \langle g^4\rangle$, $A_2 = \langle g^9\rangle$. За умовою леми $[A_1;B] \ni N_1 \lhd G$, $[A_2;B] \ni N_2 \lhd G$. Ясно, що $\langle g\rangle = N_1 \cdot N_2$ і, значить, $\langle g\rangle \lhd G$. Отже, всі нескінченні циклічні підгрупи нормальні в G. Нехай x - довільний примарний елемент з G. Тоді група G містить підгрупу $Y = \langle g\rangle \lambda \langle x\rangle$. Покладемо $A = \langle g^8\rangle \lambda \langle x\rangle$, $B = \langle g^{32}\rangle \lambda \langle x\rangle$. Тоді $/[A;B]/ > 2$, $/A/ = \infty$ і за умовою леми $[A;B] \ni N \lhd G$. Ясно, що $x \in N$, $N = \langle g^{2d}\rangle \lambda \langle x\rangle$, $3 \leqslant d \leqslant 5$ і $Y' \leqslant \langle g^{2d}\rangle$ і тому $Y' \leqslant \langle g^8\rangle$. Відомо, що $x^{-1}gx = g^{-1}$, або $x^{-2}gx = g$. Звідси з умови $Y' \neq \langle g^2\rangle$ випливає, що $x^{-1}gx = g$, $Y = \langle g\rangle \times \langle x\rangle$, $N = \langle g^{2d}\rangle \times \langle x\rangle$ і $\langle x\rangle$ - періодична частина N. Звідси $\langle x\rangle \lhd G$ і тому в силу твердження 1.1.1 G - абелева група. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 1.2.4 [23]. Підгрупа A групи G називається квазіцентральною підгрупою з G, якщо всі її підгрупи нормальні в G.

Л е м а 1.2.4. Нехай УШН[ ]-група G має підгрупу $D = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$, $/a_i/ = p_i$, p_i - просте число, $i \in \{1,2,3,4\}$. Тоді G - дедекіндова група.

Доведення. Нехай G та D задовольняють умови леми. Якщо G - неперіодична група, то твердження леми справедливе в силу леми 1.2.3. Нехай G - періодична група. Покажемо, що $\langle a_i\rangle \lhd G$. Покладемо $B_{12} = \langle a_1\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$, $B_{13} = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_4\rangle$, $B_{14} = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle$, $A = \langle a_1\rangle$. Тоді $/[A;B_{1j}]/ > 2$, $j \in \{2,3,4\}$. За означенням УШН[ ]-груп $[A;B_{1j}] \ni N_j \lhd G$. Ясно, що $\bigcap_{j=2}^{4} N_j = \langle a_1\rangle \lhd G$. Аналогічно доводимо, що для будь-якого i, $i \in \{2,3,4\}$, $\langle a_i\rangle \lhd G$. Нехай x - будь-який p-елемент з G. Тоді G містить підгрупу $X = D\langle x\rangle$ і $/D \cap \langle x\rangle / \in \{1,p\}$. Зрозуміло, що $\langle x\rangle$ має одиничний перетин хоча б з однією із підгруп $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle$, $\langle a_1\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$, $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_4\rangle$, $\langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$. Не пору-

шуючи загальності можна вважати, що $\langle x\rangle \cap U = 1$, де $U = \langle a_2\rangle \times \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$ і в G існує підгрупа $V = U \lambda \langle x\rangle$. Покладемо $A = \langle x\rangle$, $B_2 = (\langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $B_3 = (\langle a_2\rangle \times \langle a_4\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $B_4 = (\langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle) \lambda \langle x\rangle$. Тоді за означенням УШН[ ]-груп маємо $[A;B_j] \ni N_j \lhd G$, $j \in \{2,3,4\}$. Тепер $\bigcap_{j=2}^{4} N_j = \langle x\rangle \lhd G$. Отже, будь-яка циклічна примарна підгрупа з G нормальна в G і тому, як легко бачити, G – дедекіндова група. Лема доведена.

Л е м а 1.2.5. Нехай G – УШН[ ]-група і $X = U \times V$ – її підгрупа. Тоді справедливі твердження:

1) якщо $|V| = r$ (r – просте число), то U – ШН[ ]-група і при нільпотентності U вона є УШН( )-групою;

2) якщо V містить власні немаксимальні підгрупи, то U – дедекіндова група і при $U \lhd G$ U – квазіцентральна підгрупа з G.

Доведення. Нехай G та X задовольняють умови леми і A – будь-яка підгрупа з U. При умові твердження 2 леми V містить V_1, де V_1 – власна немаксимальна підгрупа з V. Отже, $|[A;B]| > 2$, де $B = A \times V$. За означенням УШН[ ]-груп маємо $[A;B] \ni N \lhd G$, $N = (U \cap N) \times V_2$, де V_2 – підгрупа з V, $A \leqslant N \cap U \leqslant U \cap B = A$. Звідси $A \lhd U$. Якщо при цьому $U \lhd G$, то $A \lhd G$. Отже, U – дедекіндова група і при $U \lhd G$ будь-яка її підгрупа нормальна в G. За означенням 1.2.3 U – квазіцентральна підгрупа з G. Твердження 2 леми доведене.

Нехай виконується умова твердження 1 леми і нехай $|[A;B]| > 1$, де $B \leqslant U$. Покладемо $B_1 = B \times V$. Тоді $|[A;B_1]| > 2$ і за означенням УШН[ ]-груп $[A;B_1] \ni N \lhd G$. Нехай $N_1 = N \cap U$. Тоді $N_1 \leqslant U$ і $N_1 \in [A;B]$. Звідси U – ШН[ ]-група.

Нехай U – нільпотентна група і $|[A;B]| > 2$. Покажемо, що $A < N_1 < B$, де $N_1 \lhd G$. Справді, оскільки $|[A;B]| > 2$, то $A < C < B$. Покладемо $C_1 = C \times V$. Тоді $|[A;C_1]| > 2$ і $|[C;B_1]| > 2$. За означенням УШН[ ]-груп маємо $[A;C_1] \ni M_2 \lhd G$, $[C;B_1] \ni M_3 \lhd G$. Покладемо $N_2 = U \cap M_2$, $N_3 = U \cap M_3$. Тоді $N_2 \lhd U$, $N_3 \lhd U$. Зрозуміло, що $A \leqslant N_2$, $A < N_3$, $N_2 < B$, $N_3 \leqslant B$. Якщо $A < N_2$, то $(A;B) \ni N_2 \lhd U$ і U – УШН( )-група. Якщо $N_3 < B$, то $A < N_3 < B$ і, значить, U – УШН( )-група. В противному разі $N_2 = A$, $N_3 = B$. Відомо [18], що в нільпотентній групі U при умові $A \lhd U$, $B \lhd U$, A – власна немаксимальна підгрупа з B, маємо $(A;B) \ni N < U$ і знову U – УШН( )-гру-

па. Лема доведена.

Т е о р е м а 1.2.1. Класи К(Н), К(ШН( )), К(ШН[ )), К(ШН[ ]), К(УШН( )), К(УШН( ]), К(УШН[ )), К(УШН[ ]) замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.

Доведення. Нехай G – група одного із восьми класів груп теореми, X – довільна підгрупа з G і $A \leqslant X \leqslant B$. За умовою теореми маємо нормальну підгрупу N з G, яка задовольняє відповідні співвідношення означення I.2.3. Зрозуміло, що $N \lhd X$ і тому всі розглядувані класи груп замкнені за підгрупами.

Нехай $\overline{G}$ – довільна фактор-група одного з розглядуваних класів груп, $\overline{A} \leqslant \overline{B} \leqslant \overline{G}$. Тоді $A \leqslant B \leqslant G$, де A і B – повні прообрази $\overline{A}$ і $\overline{B}$ в групі G відповідно і G – група одного з класів означення 1.2.3. За цим же означенням G має нормальну підгрупу N, яка задовольняє відповідні співвідношення означення. Зрозуміло, що образ $\overline{N}$ в $\overline{G}$ підгрупи N з G теж задовольняє співвідношення означення 1.2.3. Значить, всі розглядувані класи груп замкнені за фактор-групами.

Зрозуміло, що група кватерніонів восьмого порядку Q буде групою кожного з розглядуваного класу груп. Нехай $G = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times \times Q_4$, де Q_i – група кватерніонів порядку 8, $i \in \{1,2,3,4\}$. Зрозуміло, що G – недедекіндова група, яка містить елементарну абелеву підгрупу порядку 16. За лемою 1.2.4 G – дедекіндова група. Суперечність. Звідси, жоден із розглядуваних класів груп не є замкненим за прямими добутками. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1.2.1. Недедекіндова локально ступінчаста УШН[ ]-група є розв'язною чернiковською групою.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. За лемою 1.2.3 G – періодична група. Нехай H – будь-яка нескінченна неабелева підгрупа з G і h – її довільний елемент. Тоді $|[\langle h\rangle;H]| > 2$ і за означенням УШН[ ]-груп $[\langle h\rangle;H] \ni N \lhd G$. Звідси легко бачити, що $H \lhd G$. В силу твердження 6.5 з [1] нескінченна група G розв'язна. За лемою 1.2.4 G не має абелевих підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних множників. Отже, G – задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп і тому за відомим результатом з [24] G – чернiковська група з повною частиною R. Зе тео-

ремою 1.2.1 G/R – скінченна УШН[ ]-група.

Нехай R = 1. Тоді /G/ < ∞. Покажемо, що G – розв'язна група. Зрозуміло, що G має головний ряд 1 = $G_0 \leq \ldots \leq G_i \leq \ldots \leq G_n = G$, фактори якого є елементарними абелевими групами, чи простими групами. Якщо всі фактори вибраного ряду абелеві, то G – розв'язна група. Припустимо, що для деякого i > 0 G_i/G_{i-1} – неабелева і тому проста група. Тоді G_i/G_{i-1} містить $B/G_{i-1} > A/G_{i-1} > \bar{1}$ і /[A/G_{i-1}; B/G_{i-1}]/ > 2. За означенням 1.2.3 [A;B] $\ni$ N $\lhd$ G і N/G_{i-1} – неодинична власна нормальна підгрупа з G_i/G_{i-1}, що суперечить простоті G_i/G_{i-1}. Отже, при R = 1 G – розв'язна група.

При R $\neq$ 1 G – розв'язна група за попереднім. Всі випадки розглянуті. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.2.2. Недедекіндова локально ступінчаста УШН[ ]-група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа U якої може бути лише власною підгрупою одного з типів:

1) U – циклічна підгрупа порядку p^{α}, $\alpha > 0$, p – довільне просте число, $\Phi(\Phi(U)) = M \lhd G$;

2) U – група порядку pq, p і q – необов'язково різні прості числа, $M = 1 \lhd G$;

3) U – група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M \lhd G$;

4) U – циклічна підгрупа порядку $p^{\alpha}q$, $\alpha > 1$, p і q – різні прості числа, $M \leq U$, $M \lhd G$, /M/ = $p^{\alpha-1}q$;

5) U = $\langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, /x/ = p^{β}, $\beta > 1$, /y/ = p, p – довільне просте число, [$\langle x \rangle$,$\langle y \rangle$] $\leq \langle x^{p^{\beta-1}} \rangle$, [U:U'] > 4, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U', $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle = M \lhd G$;

6) U = R $\lambda \langle x \rangle$, R – елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $r^{\gamma} > 2$, /x/ = p^{β}, p і r – різні прості числа, $\gamma \in \{1,2,3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ – максимальна підгрупа з U, U' = R, R x $\langle x^p \rangle = M \lhd G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови теореми. Тоді 1 < U < G і за наслідком 1.2.1 G – розв'язна черніковська група. Якщо /U/ – просте число, то U – група типу 1. Нехай /U/ – не просте число. Тоді за умовою 1 леми 1.1.1 U має власні немаксимальні підгрупи X. Звідси /[X;U]/ > 2 і за означенням 1.2.3 [X;U] $\ni$ N(X) $\lhd$ $\lhd$ G. Якщо U породжується своїми власними немаксимальними підгрупами X, то U породжується і підгрупами N(X). Тому U $\lhd$ G, що не-

можливо. Отже, U не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами і тому U задовольняє умову теореми 1.1.1. За цією теоремою U і M можуть бути типу 1 - 6. Якщо U та M - групи типу 1 - 5 згаданої теореми, то тоді U та M - підгрупи одного з типів 1 - 5 розглядуваної теореми.

Нехай U - група типу 6 теореми 1.1.1. Тоді $U = R \leftthreetimes \langle x \rangle$, R та $\langle x \rangle$ задовольняють ті ж співвідношення, що в теоремі 1.1.1, тобто $|R| = r^{\gamma} > 2$, $|x| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, r і p - різні прості числа. Оскільки G - недедекіндова група, то за лемою 1.2.4 вона не містить елементарних абелевих підгруп порядку r^2. Звідси $\gamma \in \{1, 2, 3\}$. Покажемо, що $|G| < \infty$. Дійсно, нехай $|G| = \infty$. Тоді G містить квазіциклічну підгрупу K, яка за попереднім не може бути нормальна в G. Звідси $K \not\lhd G$. Зрозуміло, що $K \cap R = 1$ і, значить, в G існує підгрупа $V = K\langle x \rangle$, яка за попереднім теж нормальна в G. Але тоді $V \cap U = \langle x \rangle \lhd U$, що неможливо. Отже, $|G| < \infty$. За теоремою 1.1.1 $M = R \leftthreetimes \langle x^{p} \rangle \lhd G$. Покажемо, що $M' = 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді за лемою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $G = MD = RD$, де $D = N_G(\langle x^{p} \rangle)$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle \not\leqslant D$. Оскільки $M' \neq 1$, то $R \cap D = R'$ - власна підгрупа з R, $R' \lhd D$, $R' \lhd R$, а тому $R' \lhd G$. Оскільки R - мінімальна нормальна підгрупа з U, то $R' = 1$ і $G = R \leftthreetimes D$, $D \neq G$. Зрозуміло, що D - скінченна група одного з типів 1 - 6 теореми 1.1.1. Оскільки $U \not\subset G$, то $\langle x \rangle \not\subset D$. Звідси D - недедекіндова група і тому D - неабелева група типу 2, 5, 6 теореми 1.1.1. Зрозуміло, що $|x| > p$. Тому $|D|$ ділиться на добуток більше ніж двох простих чисел. Звідси D не може бути групою типу 5 теореми 1.1.1. За твердженням цієї теореми $\langle x \rangle$ містить D', $\langle x \rangle \lhd D$, що суперечить попередньому. Отже, D може бути групою типу 6 теореми 1.1.1 і містить $M_1 \lhd G$, D/M_1 - група простого порядку. Зрозуміло, що $[R, M_1] = 1$, $x^{p} \in M_1$, $[R, x^{p}] = 1$. Звідси $M' = 1$, що не так, і тому $M = R \times \langle x^{p} \rangle$.

Нехай $\gamma > 1$. Припустимо, що $\gamma + \beta > 4$. Тоді R містить підгрупу A, $|A| > 1$, $A < R$, U - підгрупу $B = A \times \langle x^{p} \rangle$ і $|[A;B]| > 2$. За означенням УШН[ ]-груп $[A;B] \ni N \lhd G$. Оскільки $R \lhd G$, $N \lhd G$, то $R \cap N = N_1 \lhd G$, $A \not\leqslant N_1 < R$, що суперечить мінімальності R в U. Отже, $\gamma + \beta < 5$ і U - група типу 6 розглядуваної теореми. Теорема доведена.

О з н а ч е н н я 1.2.3. Група G називається дисперсивною, як-

що вона має силівський ряд, тобто ряд нормальних в G підгруп $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ таких, що при $n < 2$ G - p-група (p - просте число), а при $n > 1$, $i > 0$ G_i/G_{i-1} - p_i-група (p_i - просте число), а при $i \neq j$, $j > 0$, p_i, p_j - різні прості числа.

Група G називається дисперсивною за Оре, якщо при $1 < i < n$ $p_i > p_j$.

Т е о р е м а 1.2.3. Недедекіндові локально ступінчасті УШН[ ]-групи G мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з типів:

1) G - скінченна нільпотентна група;

2) G - скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група;

3) G має центральну квазіциклічну p-підгрупу R, для якої G/R - скінченна дедекіндова група.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді за наслідком 1.2.1 G - розв'язна черніковська група, яка за лемою 1.2.4 не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток не більше ніж трьох неодиничних множників. Можливі випадки: 1) $|G| = \infty$; 2) $|G| < \infty$.

Випадок 1. У цьому випадку G містить квазіциклічну p-підгрупу R, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G. Нехай x - довільний примарний елемент з G. Тоді в G існує підгрупа $X = R\langle x\rangle$ і $|[\langle x\rangle;X]| > 2$. За означенням УШН[ ]-груп $[\langle x\rangle;X] \ni N \lhd G$. Ясно, що $X = RN \lhd G$. Звідси $X/R = \langle Rx\rangle \lhd G/R$ і, таким чином, всі примарні циклічні підгрупи нормальні в G/R і тому G/R - дедекіндова група.

Припустимо, що повна частина G має більше ніж одну квазіциклічну підгрупу. Тоді в G існують квазіциклічні підгрупи R_1 і R_2 такі, що $R_1 \cap R_2 = 1$. За попереднім $R_i \lhd G$, G/R_i - дедекіндова група, і $i \in \{1,2\}$. За теоремою 1.1.2 G - дедекіндова група, що не так. Звідси повна частина G співпадає з квазіциклічною p-підгрупою R.

За попереднім для будь-якого примарного елемента x з G $X = R\langle x\rangle = RN$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $|N| < \infty$. Звідси $[R,\langle x\rangle] \leqslant N \cap R$, $|N \cap R| < \infty$ і тому $|X'| < \infty$. Отже, квазіциклічна підгрупа R лежить у центрі X. Оскільки G - черніковська нільпотентна група, то $G' \neq R$ і, значить, $|G'| < \infty$. Звідси G -

група типу 3 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $|G'| < \infty$. Нехай G – нільпотентна група. Тоді $G = U \times V$, де V – недедекіндова силовська p–підгрупа з G, V – її холлівське доповнення в G. За лемою 1.2.5 $|V| \in \{1, r^2\}$, r – просте число, $r \neq p$ і, значить, у цьому випадку G – група типу 2 теореми.

Нехай G – скінченна нільпотентна група. Покажемо, що G – дисперсивна група. Припустимо, що це не так. Тоді G містить мінімальну недисперсивну підгрупу X, яка, очевидно, розв'язна.

Нехай X' не містить жодної примарної силовської підгрупи з X. Тоді в силу [25] $X = SD$, де S – група Шмідта, D – нільпотентна підгрупа з X, $[S,D] = 1$, $S \cap D = Z \leqslant Z(X)$, $Z \leqslant \Phi(S)$, $Z \leqslant \Phi(D)$. За теоремою 1.2.1 $X/Z = S/Z \times D/Z$ – УШН[ ]-група. Відомо [25], що S/Z і D/Z – нільпотентні групи. За лемою 1.2.5 S/Z чи D/Z має бути дедекіндовою групою, що неможливо. Отже, X' містить хоча б одну примарну силовську підгрупу з X. В силу [25] $X = PQ$, P – силовська ненормальна в X p–підгрупа, Q – ненормальна в X силовська q–підгрупа, $p \neq q$, $P' \neq 1$, P неізоморфна групі кватерніонів порядку 8. За теоремою 1.2.2 $P = \langle x \rangle \setminus \langle y \rangle$, $|x| = p^{\Delta}$, $|y| = p$, $\Delta > 1$, $[x,y] = x^{p^{\Delta-1}}$, $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$, $[P:P'] > 4$. Знову в силу [25] $X = AD$, $D = Q \setminus \langle b \rangle$, $D \lhd G$ і D – нільпотентна підгрупа, яка задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути підгрупою типу 2, 6 згаданої теореми. Якщо припустити, що D – підгрупа типу 6 теореми 1.2.2, то $Q \times \langle b^p \rangle = M \lhd G$ і, значить, $Q \lhd G$, що неможливо.

Нехай тепер D – група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $|D| = qp$, $q > p$. Оскільки A належить метациклічній підгрупі P, то A – нециклічна метациклічна група. При $|A| = 4$ P – група діедра порядку 8, яка не може бути групою типу 5 теореми 1.2.2. Суперечність. Значить, $|A| > 4$. Зрозуміло, що $A \setminus Q$ – нільпотентна група, яка містить підгрупу Шмідта S з нормальною метациклічною силовською p–підгрупою і ненормальною силовською q–підгрупою, $q > p$. За відомими результатами (див., наприклад, [25]) $p = 2$, $q = 3$. Звідси $|A| \geqslant 8$ і знову в силу [25] $|P'| > 2$ і, таким чином, P не може бути підгрупою типу 5 теореми 1.2.2. Отже, G – дисперсивна група типу 1 теореми. Теорема доведена.

1.3. ДЕЯКІ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

О з н а ч е н н я 1.3.1 [26]. Група $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ називається метациклічною групою, якщо $\langle a\rangle \lhd G$.

Т в е р д ж е н н я 1.3.1 [26]. Клас метациклічних груп замкнений за підгрупами та фактор-групами, незамкнений за прямими добутками і замкнений за скінченними прямими добутками скінченних прямих множників попарно взаємно простих порядків.

О з н а ч е н н я 1.3.2. Нільпотентна група з нільпотентними власними підгрупами називається групою Шмідта.

О з н а ч е н н я 1.3.3. Неабелева група з абелевими власними підгрупами називається групою Міллера - Морено.

Н а с л і д о к 1.3.1. Нехай G - локально ступінчаста УЦН[ ]-група, U - її ненормальна підгрупа. Тоді справедливі твердження:

1) U - скінченна, не більше ніж біпримарна підгрупа з абелевими власними підгрупами;

2) U - нільпотентна група Міллера - Морено, що може бути підгрупою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2;

3) U - неметациклічна група, коли вона підгрупа з G типу 6 теореми 1.2.2, $\gamma > 1$, $\gamma + \beta < 5$;

4) U^1 - r-група, r - просте число, будь-яка циклічна r-підгрупа з U порядку більше r містить U^1.

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови наслідку. Тоді U - підгрупа одного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2. Очевидно, що U - скінченна, не більше ніж біпримарна група. Очевидно також, що всі власні підгрупи з U є абелевими групами і тому справедливе твердження 1 наслідку. Нільпотентна підгрупа U групи G може бути лише групою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2. Але тоді за твердженням 1 наслідку всі власні підгрупи з U абелеві і тому за означенням 1.3.3 U - нільпотентна група Міллера - Морено. Таким чином, твердження 2 наслідку доведене.

Ясно, що U^1 - r-група, r - просте число. Нехай g - елемент з G і $|g| = r^2$. Покажемо, що $\langle g\rangle \geqslant U^1$. При $U^1 = 1$ це очевидно. Нехай

$U' \neq 1$. Тоді U – підгрупа одного з типів 2, 3, 5, 6 теореми 1.2.2. В підгрупі U кожного з типів 2, 6 згаданої теореми немає циклічних підгруп порядку r^2 і тому $\langle g \rangle \geqslant U'$. Підгрупа U типу 3 теореми 1.2.2 є групою кватерніонів порядку 8, у якій всі підгрупи порядку 4 містять U'. У підгрупі U типу 5 теореми 1.2.2 за умовою цієї теореми будь-яка підгрупа порядку r^2 містить U'. Отже, завжди $\langle g \rangle \geqslant U'$, що доводить твердження 4 наслідку. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.3.1. Локально ступінчасті УШН[ ]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \lambda Q$, де P – нормальна в G силовська p-підгрупа порядку $p^{\alpha} > 2, \alpha \in \{1,2,3\}$, $G' = P$, Q – ненормальна циклічна силовська q-підгрупа з G порядку q^{β}, $\beta > 0$, p і q – різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leqslant Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^{\Delta}$, $\Delta \in \{0,1\}$, $\alpha - \Delta$ – показник p по модулю q, $\Phi(P) \times Q$ – максимальна підгрупа з G, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, та вичерпуються групами типів:

1) P – група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;

2) $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;

3) P – елементарна абелева, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умови теореми. За теоремою 1.2.3 G – скінченна нільпотентна група, яка в силу (див., наприклад, [25]) має вигляд $G = P \lambda Q$, де для P і Q виконуються всі умови з початкового формулювання розглядуваної теореми, крім умови $\alpha \in \{1,2,3\}$. Покажемо, що G – група одного з типів 1 – 3 теореми і тим самим одержимо справедливість відзначеної умови. Якщо $\alpha = 1$, то G – група типу 3 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha > 1$. При $\alpha = 2$ і $\alpha + \beta < 5$ в силу [25] G – група типу 3. Нехай $\alpha \geqslant 3$ і M – будь-яка максимальна підгрупа з P. Як відомо [25], $\Phi(P) < M$ і $M \trianglelefteq G$ і в силу наслідку 1.3.1 M – метациклічна група.

Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді, очевидно, G має ненормальну підгрупу $U = M \times \Phi(Q)$, яка може бути лише підгрупою типу 5 теореми 1.2.2 і тому є циклічною групою порядку $p^{\Delta}q$. Але $|U| = |M|/|\Phi(Q)| \geqslant p^2q^2$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\beta < 3$.

Нехай $P' = 1$. Тоді знову в силу [25] P – елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha > 2$. Ясно, що $G > P \times \Phi(Q)$. За теоремою 1.2.3 неделекіндова група G не має підгруп, що розкладається в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників. Звідси P –

елементарна абелева група порядку p^3, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\alpha+\beta < 5$ і G – група типу 3 теореми.

Покажемо, що при $\alpha = 2$ $\alpha+\beta < 5$. Якщо $\beta < 3$, то це очевидно. Нехай $\beta > 2$. Тоді G містить підгрупу $U = M \times \Phi(Q)$, де M – максимальна підгрупа з P, $/M/ = p$, $/\Phi(Q)/ = q^{\beta-1}$. Якщо припустити, що $U \not\lhd G$, то знову U – підгрупа типу 5 теореми 1.2.2, яка містить нормальну в G підгрупу M_1 порядку $pq^{\beta-2}$. Звідси $P \cap M_1 = M \lhd G$, що суперечить відомим результатам про групи Шмідта при $\alpha = 2$ (див., наприклад, [25]). Таким чином, при $P' = 1$ і $\alpha > 1$ $\alpha+\beta < 5$.

Нехай далі $P' \neq 1$. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] $P' = \Phi(P) = Z(P)$ і $U = \Phi(P) \times Q \not\lhd G$. Значить, U задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути тільки циклічною групою. Звідси $\Phi(P)$ – циклічна група. За властивістю груп Шмідта [25] $\exp(\Phi(P)) = p$ і при $p > 2$ $\exp(P) = p$.

Припустимо, що P – метациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] P – група кватерніонів порядку 8 і в цьому випадку G – група типу 1 теореми.

Припустимо тепер, що P – неметациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] і теоремою 1.2.1 $G/\Phi(P)$ – УШН[ ]-група Шмідта з нормальною силовською p-підгрупою $P/\Phi(P)$ порядку $p^{\alpha-1}$, яка є нільпотентною групою Міллера – Морено типу 3 розглядуваної теореми, $\alpha > 2$ і $\alpha - 1$ є показником p за модулем q. Для групи G типу 3 розглядуваної теореми $\alpha - 1 \in \{2,3\}$. Знову за властивістю груп Шмідта при $\alpha - 1 = 3$ $\Phi(P) = 1$, що неможливо. Таким чином, $\alpha - 1 = 2$ і, значить, $\alpha = 3$ і P – неметациклічна неабелева група порядку p^3, яка, як відомо, має експоненту p, $p > 2$, 2 є показником p за модулем q. Звідси $q > 2$. Знову за властивістю груп Шмідта [25] $P/\Phi(P)$ не може бути елементарною абелевою групою порядку 9. Звідси $p > 3$.

Покажемо, що $\beta = 1$. Нехай це не так. Тоді $P > M = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$, $/c/ = /x/ = p$, $\langle c \rangle = \Phi(P)$, $M \not\lhd G$. Покладемо $N = M \times \Phi(Q)$. За припущенням N – абелева непримарна нециклічна підгрупа з G порядку $p^2q^{\beta-1}$. Зрозуміло, що N не може бути групою одного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2. Тому за цією теоремою $N \lhd G$, $P \cap N = M \lhd G$, що суперечить ненормальності M в G. Отже, $\beta = 1$ і G – група типу 2 теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = P \times Q$ – група одного з типів розглядуваної теореми. За властивістю загального вигляду групи G маємо, що

G - скінченна група Шмідта (див.,наприклад, [25]).

Покажемо, що G - УЩН[ ]-група. Дійсно, нехай /[A;B]/ > 2. Покажемо, що [A;B] ∋ N ◁ G. Якщо A ◁ G, чи B ◁ G, то покладемо відповідно N = A чи N = B і все доведено. Звідси $A \not\trianglelefteq G$, $B \not\trianglelefteq G$, /A/ > 1, $B \not\geqslant G'$. Оскільки G' = P і B - власна підгрупа з G, то B - власна нільпотентна підгрупа вигляду $P_1 \times Q_1$, де $P > P_1 = P \cap B$ - силовська p-підгрупа з B, Q_1 - її холлівське доповнення в B. Оскільки /A/ ≠ ≠ 1, то /B/ є добутком не менше ніж трьох простих чисел. Далі, оскільки $/P_1/ \leqslant p^2$, то в групі G типу 2 $/Q_1/ \geqslant q$ і тому $/P'/ = p^2$, $/Q_1/ = q$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = Q_1$. Звідси в P існує максимальна підгрупа P_1 і $P_1 \trianglelefteq G$, що не так в групах Шмідта (див., наприклад, [25]). Значить, для груп типу 2 достатність доведена.

Аналогічно доводимо достатність для груп G типу 3 при $\alpha = 3$ і для груп G типу 4 при $\beta = 1$.

Нехай G - група типу 1 і $\beta = 2$. При цій умові нижній шар $w(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому всі елементи з G простого порядку належать Z(G). Звідси та за попереднім /A/ є добутком не менше ніж двох простих чисел, /B/ - добуток не менше ніж чотирьох простих чисел, /G/ - добуток п'яти простих чисел, [G:B] ділиться на 2. Звідси /B/ = 36, $/P_1/ = 4$, $/Q_1/ = 9$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $Q_1 = Q$, і тому $P_1 \trianglelefteq G$, що в групах Шмідта неможливо [25]. Таким чином, для груп G типу 1 достатність доведена.

Нехай, нарешті, G - група типу 3. За попереднім $\alpha \in \{1,2\}$. Нехай $\alpha = 1$. Вище доведено, що $P_1 < P$ і тому $/P_1/ = 1$, B - q-група, яка без порушення загальності належить циклічній підгрупі Q. Ясно, що A - власна немаксимальна підгрупа як із B, так і Q. Звідси $A \leqslant \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому $A \trianglelefteq G$, що не так. Тому $\alpha = 2$ і $\alpha + \beta < 5$. Зрозуміло, що [G:B] ділиться на p, /G/ - добуток більше ніж чотирьох простих чисел, /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси $/B/ = pq^2$, $/Q/ = q^2$. Знову без порушення загальності можна вважати, що $Q = Q_1$, $P_1 \trianglelefteq G$, що в групах Шмідта неможливо [25]. Отже, всі випадки розглянуті і тим самим достатність доведена. Теорема доведена.

При доведенні достатності теореми 4.3.1 встановлено такий результат.

Наслідок 1.3.2. В локально ступінчастій УШН[ ]-групі Шмідта G з умови $/[A;B]/ > 2$ випливає, що або $A \lhd G$, або $B \lhd G$.

Наслідок 1.3.3. Локально ступінчасті УШН[ ]-групи G Міллера – Морено вичерпуються групами типів:

1) G – група кватерніонів порядку 8;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-1}}$, p – довільне просте число;

3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/c/ = p$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha \in \{1,2\}$, $\beta \in \{1,2\}$, $p(\alpha+\beta) > 4$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$;

4) $G = P \lambda Q$ – група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. За відомими результатами (див., наприклад, [25]) і за теоремою 1.2.3 G – скінченна примарна p-група, чи скінченна група Шмідта.

Нехай G – p-група, що не є групою одного з типів 1, 2 розглядуваного наслідку. Тоді в силу [25] $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $/c/ = p$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$. При $p(\alpha+\beta) = 4$ G – група діедра порядку 8, яка, очевидно, є групою типу 2 розглядуваного наслідку. Тому будемо вважати, що $p(\alpha+\beta) > 4$. Відомо також, що $Z(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle = \Phi(G)$, $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle \not\lhd G$, $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle \not\lhd G$. В силу теореми 1.2.2 підгрупи $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle$, $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$ можуть бути лише p-підгрупами одного з типів 1, 2, 5 цієї теореми. Для підгруп згаданих типів $\alpha < 3$, $\beta < 3$ і G – група типу 2. Випадок, коли G – примарна група, розглянуто повністю.

Нехай G – непримарна група. Тоді $G = P \lambda Q$ – група Шмідта, у якої $P^1 = 1$ і G задовольняє умову теореми 1.3.1. і тому є групою типу 3 згаданої теореми. Звідси G – група типу 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 4 розглядуваного наслідку. Тоді в силу [25] G – скінченна група і, значить, локально ступінчаста група Міллера – Морено. Покажемо, що G – УШН[ ]-група. Для груп G типу 4 це встановлено в теоремі 1.3.1, а для груп G типу 1 це очевидно. Тому в подальшому будемо вважати, що G – група одного з типів 2, 3 наслідку.

Нехай $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то це очевидно. Тому $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $A \not\leq Z(G)$, $B \cap G^1 = 1$. У

групах кожного з типів 2, 3 наслідку для будь-якого $g \in G$ маємо $g^p \in Z(G)$. Зрозуміло, що $/B/ > p^3$. Для груп G типу 2 $B = \langle g \rangle$, $A \leqslant \Phi(B) = \langle g^p \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A, і тому для груп G типу 2 достатність доведена. В групах G типу 3 $[G:\langle c \rangle] \leqslant p^4$. Звідси $/B/ \leqslant p^4$. Оскільки $\langle c \rangle$ не доповнюється в G, то $/B/ < p^4$ і, значить, $/B/ = p^3$, $\alpha = \beta = 2$, $/A/ = p$. Але за цих умов $A \leqslant w(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A, і тим самим достатність для груп G типу 3 доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 4.3.2. Метациклічні УПН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 2^\alpha$, $/b/ = 2^\beta$, $\alpha \in \{2,3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;

4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leqslant k < \alpha$, $\alpha - k \leqslant \beta$;

5) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle = \langle b \rangle\langle d \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $/d/ = p^{\alpha-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$;

6) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta > 1$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

8) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = 16$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

9) $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $/a/ = 16$, $/b/ = 2^\beta$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $\beta \in \{3,4\}$, $b^{-1}ab = a^7$;

10) $G = P \times D$, P – група кватерніонів порядку 8, D – скінченна абелева метациклічна група;

11) $G = P \times D$, P – силовська p-підгрупа G, $/D/ = q$, p і q – різні прості числа, P – група одного з наступних типів розглядуваної теореми: 2, $/P'/ = 2$; 4, $/P'/ = p$; 6, $\beta < 4$;

12) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – необов'язково різні прості числа, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle,\langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^q \in Z(G)$;

13) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle,\langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $/z/ \in \{1,r\}$, r – просте число, $\Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \leqslant Z(G)$; при $/z/ = r$ $b^q \in Z(G)$; при $/z/ =$

$= p$ $\beta < 3$;

I4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p > 5$, $/b/ = qr$, q і r – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $C_{\langle b \rangle}(\langle a \rangle) = 1$;

I5) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\langle b \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $\langle z, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $b^{-1} a b = a^{-1}$;

I6) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/b/ = q^{\beta}$, $/z/ = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, b^{q}] = [a, z] = 1$, $[b, z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умови теореми. Тоді $G = \langle a \rangle\langle b \rangle$, $\langle a \rangle \triangleleft G$. Якщо $G' = 1$, то G – група типу 1. Нехай далі $G' \neq 1$. Якщо G – гамільтонова група, то в силу твердження 1.1.1 G – група типу 10. Тому в подальшому будемо вважати, що G – недедекіндова метациклічна група. За теоремою 1.2.3 G – скінченна недедекіндова метациклічна група і в силу твердження 1.3.1 всі підгрупи G та її фактор-групи метациклічні. Розглянемо два можливі випадки: 1) G – скінченна нільпотентна група; 2) G – скінченна ненільпотентна група.

Випадок 1. Можливі випадки: 1.1) G – p-група; 1.2) G – не p-група.

Випадок 1.1. У цьому випадку в силу [20] $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^{k}} \rangle$, $p^{k} > 2$, $0 < k < \alpha$, $G' > \langle c \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, $\langle c \rangle \leqslant Z(G)$, $/c/ = p^{\Delta}$, $\langle b \rangle \not\triangleleft G$. Якщо $\alpha - k = 1$, то $/G'/ = p$ і G – метациклічна недедекіндова група Міллера – Морено, яка може бути лише групою типу 2 наслідку 1.3.3. Звідси G – група типу 2 або 4 розглядуваної теореми. Нехай далі $\alpha - k > 1$ і тому $\alpha > 2$, $\alpha - k \leqslant \Delta$, $1 < \Delta \leqslant \alpha$. Значить, в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle\langle a^{p^{\alpha-\Delta-2}} \rangle$. Покажемо, що $\langle b \rangle \leqslant N \leqslant B$ і $N \triangleleft G$. Якщо $B \triangleleft G$, то $B = N$ і все доведено. Нехай $B \not\triangleleft G$. Зрозуміло, що B – нециклічна p-група, $\exp(B) > p$. Тому B задовольняє умову теореми 1.2.2 і може бути лише групою типу 5 згаданої теореми, для якої $\langle b \rangle$ – немаксимальна в B і $\langle b \rangle \leqslant M \triangleleft G$, M – одна з максимальних підгруп B. Отже, завжди $N \leqslant B$, $\langle b \rangle \leqslant N \triangleleft G$. З цього випливає, що $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = G' \leqslant N \leqslant B$. Але тоді $k \geqslant \alpha - \Delta - 2$. При $\Delta = 0$ $k = \alpha - 2$. Тепер при $k = 1$ $\alpha = 3$ і в силу [20] G – група одного з типів 2, 3, 4 розглядуваної теореми. Якщо $k > 1$, то в силу [20] G – група типу 4 теореми.

Нехай тепер $\Delta > 0$. При $p^{k} > 2$ в силу [20] $G = \langle b \rangle\langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap$

$\cap \langle d\rangle = 1$, $/d/ = p^{\beta}$. В G існує підгрупа $B = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle \lambda \langle d\rangle$, для якої, як це показано вище, або $B = N \lhd G$, або $\langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d\rangle = N$, $N \lhd G$. Знову $G' \leqslant N$, $k = \alpha - 2$ і G - група типу 5 теореми.

Нехай $p^k = 2$. Тоді в силу [20] $p = 2$, $k = 1$, $\alpha > 2$, $/\langle a\rangle \cap \cap \langle b\rangle/ = 2$. При $\alpha = 3$ в силу [20] $b^{-1} ab = a^{-1}$, $\beta > 1$ і G - група типу 6 теореми. Нехай тепер $\alpha > 3$. Зрозуміло, що $\Delta = 1$, $1 = k \geqslant \alpha - \Delta - 2 = \alpha - 3$. Звідси $\alpha = 4$.

Нехай $b^{-1} ab = a^{-1}$. Якщо припустити, що $\beta > \alpha$, то $d = ab^{2^{\beta-\alpha}} \neq 1$ і тому $\langle a\rangle \cap \langle d\rangle = 1$. Тепер знову $B = \langle a^{p^{\alpha}}\rangle \lambda \langle d\rangle \lhd G$. За теоремою 1.2.2 $B \lhd G$, $G' \leqslant B$ і тому $G' \leqslant \langle a^{p^{\alpha}}\rangle$, що неможливо. Отже, $\beta \leqslant \alpha$ і G - група типу 7 теореми.

Нехай тепер $b^{-1} ab \neq a^{-1}$. Тоді в силу [20] $b^{-1} ab = a^{-(1+2^k)}$, $k \in \{2,3\}$. Як і при умові $b^{-1} ab = a^{-1}$, легко встановити, що $2 < \beta \leqslant 4$ і при $k = 2$, $\beta = \alpha$ G - група типу 8 теореми, а при $k = 3$ G - група типу 9 розглядуваної теореми. Випадок 1.1 розглянуто повністю.

Випадок 1.2. В цьому випадку $G = P \times D$, де P - неабелева силовська p-підгрупа з G, D - неодинична нільпотентна скінченна холлівська підгрупа з G. Зрозуміло, що P містить власні неабелеві підгрупи і за лемою 1.2.5 D - дедекіндова група. Оскільки G - недедекіндова група, то і P - недедекіндова група. Звідси в силу леми 1.2.5 $/D/ = q$, $p \neq q$. Зрозуміло, що P - група одного з типів 2 - 9 розглядуваної теореми і $/P'/ > 1$.

Нехай $/P'/ = p$. Тоді P може бути групою одного з типів 2, 4 теореми і G - група типу 10 розглядуваної теореми.

Нехай $/P'/ > p$. Коли P - група типу 6 розглядуваної теореми, то G - група типу 10. Нехай P - група одного з типів 2 - 5, 7 - 9 розглядуваної теореми. В групі P кожного з типів 2 - 5 існує підгрупа $X = \langle c\rangle \times \langle x\rangle$, $\langle c\rangle = w(G')$, $x \notin \Phi(P)$ і G містить підгрупу $B = X \times D$. Очевидно, що B не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2. Звідси $B \lhd G$, $P' \leqslant B \cap P' = \langle c\rangle$ і тому $/P'/ < p$, що суперечить вибору P.

Нехай P - група одного з типів 7 - 9 теореми. Тоді P містить підгрупу $X = \langle a^{q}\rangle\langle b\rangle$, $G \geqslant B = X \times D$. Як і раніше, $B \lhd G$, $P' \leqslant B \cap P' \leqslant \langle a^{q}\rangle$, що неможливо. Отже, у випадку 1.2 всі можливості вичерпані і тому випадок 1 повністю розглянуто.

Випадок 2. У цьому випадку за теоремою 1.2.3 G - скінченна нільпотентна метациклічна група. В силу [20] $G = \langle a\rangle \lambda D$, $[\langle a\rangle,$

D] = <a>, <a> не містить інволюцій, D – нільпотентна метациклічна ненормальна підгрупа з G. Ясно, що D – група одного з типів 1 – 5 теореми 1.2.2. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) /a/ – непросте число; 2.2) /a/ – просте число.

Випадок 2.1. У цьому випадку <a> $\leqslant$ <c>, /c/ = r, <c> $\lhd$ G. Оскільки [<a>,D] = <a>, G – нільпотентна група, то за відомим результатом (див., наприклад, [16]) [<c>,D] = <c>. Покладемо N = = <c> λ D. Припустимо, що N $\lhd$ G. Тоді G/N – абелева група і G' $\leqslant$ N, що неможливо, оскільки G' $\leqslant$ <a>, <a> > <c>. Отже, N $\not\lhd$ G. Зрозуміло, що N – нільпотентна надрозв'язна підгрупа. Нехай <c> – немаксимальна підгрупа з <a>, M_1 – максимальна підгрупа з <a>, що містить <c>. Тоді $M_1 \lhd$ G і G містить нільпотентну підгрупу N_1 = = $M_1 \lambda$ D. Як і раніше для N, $N_1 \lhd$ G. Але тоді N_1 – нільпотентна надрозв'язна ненормальна підгрупа з G, яка може бути лише підгрупою одного з типів 2, 6 теореми 1.2.2.

Зрозуміло, що D $\neq$ 1, $/M_1/$ – непросте число. Тому $/N_1/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і N_1 не може бути підгрупою типу 2 теореми 1.2.2.

Нехай N_1 – підгрупа типу 6 згаданої теореми. Тоді за наслідком 1.3.1 N_1 – метациклічна група Міллера – Морено з нормальною силовською підгрупою простого порядку r і в N_1 доповнюється єдина неодинична власна нормальна підгрупа порядку r. За нашим вибором в N_1 доповнюється підгрупа M_1, $M_1 \neq 1$, $M_1 < N_1$, $/M_1/$ – непросте число. З цієї суперечності випливає, що <c> – максимальна підгрупа з <a>. Значить, /a/ = pr, p і r – неодмінно різні прості числа. Ясно, що N – підгрупа одного з типів 2, 6 теореми, N = <c> λ <b>, /b/ = $= q^{\beta}$, $\beta > 0$, q – просте число, [<a>,<b>] = <a>, p $\equiv$ 1 (mod q), r $\equiv$ $\equiv$ 1 (mod q). За теоремою 1.2.2 <c> x $<b^{q}>$ = M $\lhd$ G. Звідси $<b^{q}> \lhd$ $\lhd$ G, $<b^{q}>$ = Z(G) і G – група типу 12 розглядуваної теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. /a/ = p – непарне число і D – підгрупа одного з типів 1 – 5 теореми 1.2.2. Якщо D – підгрупа типу 1 згаданої теореми, то D = <b>, /b/ = q^{β}, $\beta > 0$, p $\equiv$ 1 (mod q) і G – група типу 13.

Нехай D – підгрупа типу 2 згаданої теореми. Тоді /D/ = qr. Якщо q = r, то D = <b> x <z>, де без порушення загальності можна вважати, що [a,z] = 1, /z/ = q. Оскільки G – нільпотентна група, то [<a>,<b>] = <a>, /b/ = q, p $\equiv$ 1 (mod q) і G – група типу 13

теореми.

Нехай $q \neq r$. Тоді $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/b/ = q$, $/z/ = r$. Якщо $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \neq 1$, $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] \neq 1$, то $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $Z(G) = 1$. Можна вважати, що $D = \langle b \rangle$, $/b/ = qr$ і G – група типу 14 теореми.

Нехай $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] = 1$. Тоді $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $/b/ = q$, $/z/ = r$, $p \equiv 1 \pmod q$ і G – група типу 13 теореми. Випадок, коли D – група типу 2 теореми 1.2.2, розглянуто повністю.

Нехай $D = \langle z, b \rangle$ – група кватерніонів, тобто D – група типу 3 теореми 1.2.2. Оскільки $C_G(\langle a \rangle) \lhd G$, $G/C_G(\langle a \rangle)$ – підгрупа з $\mathrm{Aut}\langle a \rangle$ і $\mathrm{Aut}\langle a \rangle$ – циклічна група, то без порушення загальності можна вважати, що $[a, z] = 1$. Оскільки G – нільпотентна група і $b^2 \in Z(G)$, то b індукує на $\langle a \rangle$ автоморфізм порядку 2. Звідси $b^{-1} a b = a^{-1}$ і G – група типу 15 теореми.

Нехай D – підгрупа типу 4 теореми 1.2.2. Тоді D – циклічна група порядку $q^\beta r$, яка містить нормальну в G підгрупу M порядку $q^{\beta-1} r$, $\beta > 1$. Звідси $M = O_q(\langle a \rangle)$, $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/z/ = r$, $/b/ = q^\beta$, $[a, z] = 1$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $p \equiv 1 \pmod q$. Якщо $r = p$, то $\beta < 3$. Справді, нехай це не так. Тоді $G > B = \langle b^q \rangle \times \langle az \rangle$, $/B/ = q^{\beta-1} p$. Покажемо, що $B \geqslant N \geqslant \langle az \rangle$. Якщо $B \lhd G$, то $N = B$. Припустимо, що $B \not\lhd G$. Тоді B може бути підгрупою типу 4 теореми 1.2.2, $B > M \lhd G$, $/M/ = q^{\beta-2} p$. Звідси $za \in M$ і тому $[\langle b \rangle, \langle az \rangle] = [\langle a \rangle, \langle b \rangle] \leqslant N \cap \langle a \rangle = 1$, що неможливо. Отже, $\beta < 3$ і G – група типу 13.

Нехай, нарешті, D – група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b \rangle \lambda \langle z \rangle$, $/b/ = q^\beta$, $/z/ = q$ – просте число, $\beta > 1$, $[b, z] \in \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$, $C_D(\langle a \rangle) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$, $[D : D'] > 4$. Оскільки G – нільпотентна група, то $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і $p \equiv 1 \pmod q$. При $D' = 1$ $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $[a, z] = 1$ і G – група типу 13. Нехай $D' \neq 1$. Оскільки G – метациклічна група, то $\langle c \rangle \lhd D$, $[a, c] = 1$ і $D/\langle c \rangle$ – циклічна група. Припустимо, що $c \in \langle b \rangle$. Тоді $\langle c \rangle \leqslant \langle b^q \rangle$, $D/\langle c \rangle$ – нециклічна група. Значить, $c \notin \langle b \rangle$ і тому $D = \langle b \rangle \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $D' \leqslant \langle c \rangle$, $c = b^i z^q$, $(j, q) = 1$. Оскільки $[a, c] = 1$, $C_D(\langle a \rangle) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$, то $i \equiv 0 \pmod q$. Звідси $c^q = b^{iq}$ і $\langle c^q \rangle \geqslant D' = \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$. Тому $b^{iq} \neq 1$. Але $iq \equiv 0 \pmod{q^2}$. Отже, $\beta > 2$ і G – група типу 16 розглядуваної теореми. Випадок 2.2 розглянуто повністю, а з ним і випадок 2. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 16 теореми. Тоді, очевидно, G – метациклічна група. Покажемо, що G – УПН[ ]-гру-

па, тобто для будь-якого $/[A;B]/ > 2$ $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо G - дедекіндова група, то це очевидно і тому для груп G одного з типів 1, 9 достатність доведена.

Нехай G - недедекіндова група. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$, чи $B = N$ і все доведено. Тому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. Звідси $A \neq 1$, $A \not\leq Z(G)$, $B \not\leq Z(G)$, $B \not\leq G'$. Зрозуміло, що G - скінченна група і /B/ - добуток не менше ніж трьох простих чисел, $B < G$, а /G/ - добуток не менше ніж чотирьох простих чисел. Значить, для груп G типу 14 достатність доведена. Розглянемо два можливих випадки: 1) $/G'/ = p$; 2) $/G'/$ - непросте число.

Випадок 1. У цьому випадку G - група одного з типів 2, 4, 11, 13. Група G кожного з типів 2, 4 є метациклічною p-групою Міллера - Морено типу 2 наслідку 1.3.3, за твердженням якого G - УЩН[ ]-група. В групах G кожного з типів 11, 13 $G' \cap B = 1$. В групі G типу 11 для будь-якого g з G маємо $g^p \in Z(G)$. Ясно, що $B = \langle g \rangle$, $A \leq \langle g^p \rangle = N \lhd G$, що й потрібно було довести, тобто група G типу 11 є УЩН[ ]-групою.

Нехай G - група типу 13. Тоді $G' = \langle a \rangle$, $/a/ = p$. Нехай $r \neq p$. Тоді $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ - циклічна холлівська підгрупа з G. Без порушення загальності можна вважати, що $B \leq \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $z \in Z(G)$. При $/z/ \neq 1$ $\langle b^q \rangle \times \langle z \rangle \leq Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $A \leq \langle b \rangle \times \langle z \rangle = N \lhd G$. При $/z/ = 1$ $A \leq \Phi(\Phi(\langle b \rangle) \leq Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так. Таким чином, $r = p$, тобто $/z/ = p$. Тоді $\beta < 3$. Оскільки /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, то $\beta = 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $b \in B = \langle g \rangle$. Підгрупа $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ ненормальна в G, $\langle b \rangle < B$ і тому $/B/ = q^2 p$, $B = \langle b \rangle \times \langle z_1 \rangle$, $/z_1/ = p$, $[a, z_1] = 1$ і, значить, $z_1 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Звідси $z = z_1$ і тому $A \leq w(B) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle = Z(G)$. Отже, $A \lhd G$, що не так, і, таким чином, група G типу 13 є УЩН[ ]-групою. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $/G'/$ - непросте число і G може бути групою одного з типів 2 - 9, 11, 12, 15, 16. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $\langle a \rangle \cap B = 1$; 2.2) $\langle a \rangle \cap B \neq 1$.

Випадок 2.1. У цьому випадку для груп G кожного з типів 2 - 9, 11 для будь-якого g з G такого, що $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, маємо $\langle g^{p^2} \rangle \lhd G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ - циклічна група. Звідси $B = \langle g \rangle$, $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, $A \leq \langle g^{p^2} \rangle$ і тому $A \lhd G$, що суперечить вибору A. Для груп G типу 12 B - q-група, $\langle b \rangle$ - силовська q-підгрупа з G, $\langle b^q \rangle \not\leq Z(G)$. Зрозумі-

ло, що $A \leqslant \langle b^q \rangle$ і тому $A \lhd G$, що знову суперечить вибору A. В групах G кожного з типу 15, 16 B – теж q-група, $\langle b,z \rangle$ – силовська q-підгрупа з G, що містить нормальну в G максимальну підгрупу M. У групах типу 15 $M = \langle z \rangle$, а в групах G типу 16 $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Зрозуміло, що M належить будь-якій силовській q-підгрупі з G і A – власна немаксимальна підгрупа деякої силовської q-підгрупи з G. За теоремою 1.1.1 $A \leqslant M$. Якщо $M = \langle z \rangle$, то $A \lhd G$, що не так. Нехай $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Тоді G – група типу 16, $\beta > 1$. Зрозуміло, що $A < M$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $B \leqslant \langle b \rangle \lambda \langle z \rangle$. Якщо $A \lhd (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, то $A \lhd G$. Отже, $A \not\lhd (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, а це можливо, коли $|A| = q$. Але $|B| > q^2$ і при $B \leqslant M$, $B \lhd G$, що знову не так. Таким чином, $B \not\leqslant M$. Звідси $\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle = M\langle b \rangle$, $M \cap \langle b \rangle = N$, $A < N$, $|N| > p$, а тому $N \lhd G$ і, значить, N – шукана підгрупа. Випадок 2.1 розглянуто повністю.

Випадок 2.2. Нехай G – група типу 11. Тоді $G = P \times D$, P – 2-група типу 6 розглядуваної теореми, $|D| = q$, $q \neq 2$. Зрозуміло, що $B \cap \langle a \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle c \rangle \leqslant Z(G)$. Оскільки $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і $G/\langle a \rangle$ – циклічна група непростого порядку, $[G:P] = q$, то $B/\langle c \rangle$ – циклічна група парного порядку. Якщо $B \leqslant P$, то $|B| = 8 = |c/[B:\langle c \rangle]$. Звідси $\beta = 3$ і при $B = \langle g \rangle$ маємо $A \leqslant \langle g^2 \rangle$, $A \leqslant Z(G)$, а тому $A \lhd G$, що неможливо. При нециклічності підгрупи B маємо $B = \langle g \rangle \langle a^2 \rangle$, $B > G'$ і тому $B \lhd G$, що теж неможливо. Таким чином, $B \not\leqslant P$. Тоді $D \leqslant B$, $B = X \times D$, де $X = P \cap B$, $|X| > 2$. Якщо X – нециклічна група, то $X \geqslant \Phi(P) \lhd G$ і $G/\Phi(P)$ – дедекіндова група, а тому $B \lhd G$, що неможливо. Отже, $X = \langle g \rangle$, $|g| \in \{4,8\}$, $c \in \langle g \rangle$. При $|g| = 4$ $A \leqslant \Phi(B) = \langle g^2 \rangle \times D \leqslant Z(G)$ і тому знову $A < G$, що неможливо. При $|g| = 8$ за теоремою I.I.I $A \leqslant \langle g^2 \rangle \times D \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що теж неможливо. Достатність для груп типу 11 доведена.

Нехай G – група одного з типів 2 – 9. Покладемо $\langle y \rangle = \langle a \rangle \cap B$. Тоді $\langle y \rangle \lhd G$, $B = \langle y \rangle \langle x \rangle$, $|y| \in \{p, p^2\}$. Зрозуміло, що $A \not\leqslant \langle a \rangle$, $\langle y \rangle \leqslant \Phi(G)$ і $G/\langle y \rangle = \bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \lambda \langle \bar{b} \rangle$, де $\langle \bar{a} \rangle = \langle a \rangle / \langle y \rangle$, $\langle \bar{b} \rangle = \langle y \rangle \langle b \rangle / \langle y \rangle = \langle b \langle y \rangle \rangle$. Оскільки $A \not\leqslant \langle y \rangle$, то $|\bar{A}| > 1$, де $\bar{A} = \langle y \rangle A / \langle y \rangle$ і $\langle \bar{a} \rangle \cap \bar{A} = 1$. Очевидно, що $\bar{b}^p \in Z(\bar{G})$ і $B/\langle y \rangle = \bar{B}$. Зрозуміло, що $|B| > p$.

Нехай $|y| = p$. Оскільки $|B| > p^2$, то $|\bar{B}| > p$. Тоді $\bar{A} \leqslant \Phi(\bar{B}) \leqslant Z(\bar{G})$. Звідси $\langle y \rangle A = N \lhd G$ і $N < B$.

Нехай тепер $|y| = p^2$. Тоді G може бути 2-групою одного з типів

7 – 9. Група G кожного з цих типів не має циклічних максимальних підгруп, що містять $\langle y\rangle$ і відмінних від $\langle a\rangle$. Звідси B – нециклічна група. Якщо B – група кватерніонів, то $A = \Phi(B) = w(\langle a\rangle) \lhd G$, що неможливо. Нехай B не є групою кватерніонів. Тоді $B' \leqslant \langle y^2\rangle \leqslant Z(G)$, $/y^2/ = 2$ і B – абелева метациклічна група, чи група Міллера – Морено. З будови цих груп (див., наприклад, [16]) B містить інволюцію d таку, що $\langle d\rangle \cap \langle y\rangle = 1$. З цього випливає, що G не може бути узагальненою групою кватерніонів і G містить нормальну підгрупу $\langle a\rangle \times \langle d\rangle$, $w(G) = \langle a^g\rangle \times \langle d\rangle$, $\langle y^k\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$. Легко бачити тепер, що $\langle y\rangle \times \langle d\rangle = \langle y\rangle \cdot w(G) \lhd G$ і $G/(\langle y\rangle \times \langle d\rangle)$ – група кватерніонів порядку 8. Звідси $B \lhd G$, що теж неможливо, і тому достатність для груп G кожного з типів 2 – 9 доведена.

Нехай G – група типу 12. Зрозуміло, що тоді $A \not\subset \langle a\rangle$, $\langle a\rangle \cap B = \langle y\rangle$, $/y/ = p$, $B = \langle y\rangle \lambda Q_1$, (без порушення загальності можна вважати, що $Q_1 = B \cap \langle b\rangle$), $\langle y\rangle \lhd G$, $b^q \in Z(G)$. За теоремою 1.1.1 $A \leqslant \langle y\rangle \times \langle b^q\rangle$ і тому $A \lhd G$, що не так і, значить, для груп G типу 12 достатність доведена.

Нехай, нарешті, G – група одного з типів 15, 16. Припустимо, що $a \in B$. Тоді в групі G типу 15 $G/\langle a\rangle$ – дедекіндова група і тому $B \lhd G$, що неможливо. В групі G типу 16 $B = \langle a\rangle \lambda Q_1$, де $Q_1 = B \cap (\langle b\rangle \lambda \langle z\rangle)$ і $/Q_1/ > q$. Звідси $Q_1 > [b,z]$ і тому $G < B \lhd G$, що теж неможливо. Припустимо тепер, що $a \notin B$. Тоді $\langle a\rangle \cap B = 1$ і B – q-підгрупа з G, яка без порушення загальності належить силовській q-підгрупі $Q = \langle z,b\rangle$ з G. Зрозуміло, що A – власна немаксимальна підгрупа з Q. Звідси $A \leqslant M \lhd G$, де $M = \langle z\rangle$ в групі G типу 15, і $M = \langle b^k\rangle \times \langle z\rangle$ в групі G типу 16. Як і вище, або $A = \langle z^k\rangle \leqslant Z(G)$, що неможливо, або $A < Q_1 = M \cap B \lhd G$. Покладемо $Q_1 = N$ і будемо мати, що розглядувані типи груп $G \in$ УНН[ ]-групами. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.4. Локально ступінчасті ШН[ ]-групи G вичерпуються групами типу 3 теореми 1.3.1, у яких $\alpha \in \{1,2\}$ і при $\alpha = 2$ $\beta = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 G – УНН[ ]-група, що задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути групою одного з типів 1 – 3 згаданої теореми. В групі G кожного з типів 1, 2 покладемо $A = Q$, $B = \Phi(P) \times Q$. За означен-

ням ШН[ ]-груп маємо $[A;B] \ni N \lhd G$. Звідси N – нормальна нільпотентна підгрупа з G, силовська q-підгрупа якої є підгрупою Q. Тому $Q \lhd G$, що в групах Шмідта неможливо і, значить, G не є групою одного з типів 1, 2 теореми 1.3.1.

Нехай G – група типу 3 теореми 1.3.1. Тоді $G = P \lambda Q$, $/P/ = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2,3\}$. Якщо $\alpha = 1$, то G – група з наслідку. Нехай $\alpha = 3$. Тоді P – елементарна абелева група порядку p^3. Нехай $B \leqslant P$, $/B/ = p^2$, $A \leqslant B$, $/A/ = p$. За означенням ШН[ ]-груп $[A;B] \ni N \lhd G$, що в групах Шмідта неможливо. Звідси $\alpha = 2$. Нехай $\beta > 1$. Покладемо $B = A \lambda \Phi(Q)$, $/A/ = p$. Тоді $/[A;B]/ > 1$ і за означенням ШН[ ]-груп $[A;B] \ni N \lhd G$, $P \cap N = A \lhd G$, що суперечить будові груп Шмідта. Таким чином, $\beta = 1$. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група з наслідку. Тоді $G = P \lambda Q$ – група типу 3 теореми 1.3.1, $/P/ = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$, Q – циклічна група порядку q^{β}, $\Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і при $\alpha = 2$ $\beta = 1$. Зрозуміло, що G – локально ступінчаста група Шмідта. Покажемо, що для будь-якого відрізку $/[A;B]/ > 1$ існує підгрупа N така, що $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $N = A$, чи $N = B$ і все доведено.

Нехай $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. Тоді $B \not\leqslant G'$, $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси при $\alpha = 2$ $G = B \lhd G$, що не так. Тому $\alpha = 1$. Ясно, що $/G'/ = p$. Тоді $B \cap G' = 1$. Без порушення загальності можна вважати, що B належить силовській q-підгрупі $Q = \langle b \rangle$ з G. Але тоді $A \leqslant \Phi(Q) \leqslant Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що знову не так. Всі можливі випадки розглянуті. Достатність доведена. Наслідок доведений.

О з н а ч е н н я 1.3.4 [18]. Група G називається гіперциклічною, якщо вона має цілком впорядкований ряд нормальних в G підгруп, фактори якого циклічні.

Гіперциклічна група G з скінченним згаданим рядом називається надрозв'язною [18].

Н а с л і д о к 1.3.5. Всі: Н- , ШН( )- , ШН[ )-, УШН( )-групи є розв'язними гіперциклічними групами. Всі УШН( )-групи Шмідта вичерпуються ненільпотентними метациклічними групами Міллера – Морено і співпадають з групами типу 3 теореми 1.3.1 при $\alpha = 1$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Покажемо, що G – гіперциклічна група. Якщо G – дедекіндова група, то це очевидно. Нехай G – недедекіндова група. За лемою 1.2.3 та теоремою 1.2.1 G – періодична група. В силу твердження 1 леми 1.2.2 H-групи дедекіндові і тому можна вважати, що група G не є H-групою. Покажемо, що G містить неодиничну нормальну в G підгрупу $\langle x\rangle$. Припустимо, що для будь-якого неодиничного примарного елемента $x \in G$ $\langle x\rangle \not\lhd G$. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп із G, що містять $\langle x\rangle$. Зрозуміло, що тоді $|[\Phi(\langle x\rangle);\langle x\rangle]| > 1$. За означенням ШН( )-груп маємо $(\Phi(\langle x\rangle);\langle x\rangle] \ni N \lhd G$. Звідси $N = \langle x\rangle \lhd G$.

Нехай G – ШН( )-група. Тоді, очевидно, $|[\langle x\rangle;Z]| > 1$. Якщо $\langle x\rangle$ максимальна підгрупа з Z, то за означенням ШН( )-груп $[\langle x\rangle;Z) \ni N$, $N \lhd G$ і, значить, $N = \langle x\rangle$, що неможливо. Нехай $\langle x\rangle < B < Z$. Ясно, що $|[\langle x\rangle;B]| > 1$. Тоді за означенням ШН( )-груп $[\langle x\rangle;B) \ni N \lhd G$. Оскільки $N \neq \langle x\rangle$ і $N < B$, то $N < Z$, що суперечить вибору Z.

Нехай, нарешті, G – УШН( )-група і $|x| = p^{\alpha}$. При $\alpha > 1$ $|[\langle 1\rangle;\langle x\rangle]| > 2$ і з означення УШН( )-груп $(\langle 1\rangle;\langle x\rangle) \ni N \lhd G$. Звідси N – неодинична нормальна в G циклічна підгрупа. При $\alpha = 1$ будь-яка циклічна підгрупа з Z має порядком просте число. Нехай для будь-якого вибраного x циклічна $\langle x\rangle$ – максимальна підгрупа з Z. Тоді $|[\langle 1\rangle;Z]| > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(\langle 1\rangle;Z) \ni N \lhd G$. Ясно, що в силу вибору Z $x \notin N$ і $Z = N \wedge \langle x\rangle$. Якщо N – циклічна група, то доводжуване твердження справедливе. Нехай N – нециклічна група. Тоді $|[\langle 1\rangle;N]| > 2$ і знову за означенням УШН( )-груп $(\langle 1\rangle;N) \ni N_1 < G$. Звідси Z має власну підгрупу $N_1 \wedge \langle x\rangle$, що суперечить максимальності $\langle x\rangle$ в Z. Значить, підгрупа $\langle x\rangle$ немаксимальна в Z. Тоді $|[\langle x\rangle;Z]| > 2$ і за означенням УШН( )-груп $(\langle x\rangle;Z) \ni N \lhd G$ і знову отримали суперечність з вибором Z. Таким чином, група G має неодиничну циклічну нормальну підгрупу $\langle x\rangle$. За теоремою 1.2.1 $G/\langle x\rangle$ – група того ж класу, що і G. Тепер, як і раніше, $G/\langle x\rangle$ містить неодиничну нормальну циклічну підгрупу $X_2/\langle x\rangle$. Покладемо $X_1 = \langle x\rangle$, $X_0 = 1$. Зрозуміло, що $X_0 < X_1 < X_2$. Розглядаючи фактор-групу G/X_2, знаходимо в ній нормальну неодиничну циклічну підгрупу X_3/X_2. Побудову в G такого цілком впорядкованого по зростанню нормального ряду підгруп X_β методом трансфінітної індукції можна продовжити до тих пір, поки для деякого γ одержимо $X_\gamma = G$. За означенням 1.3.4 G – гіперциклічна група.

Ясно, що скінченна гіперциклічна група G надрозв'язна, а нескінченна гіперцентральна група G задовольняє умову теореми 1.2.3 і тому за її твердженням G – розв'язна група.

Перша частина наслідку доведена. Доведемо другу частину наслідку.

Необхідність. Нехай G – УШН( )-група Шмідта. Тоді за попереднім і теоремою 1.2.1 G задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути надрозв'язною групою одного з типів 1 – 3 згаданої теореми. За відомими властивостями надрозв'язних груп Шмідта (див., наприклад, [25]) G – група типу 3 теореми 1.3.1, у якої $\mathcal{L} = 1$, тобто G – нільпотентна метациклічна група Міллера – Морено. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група типу 3 теореми 1.3.1 і $\mathcal{L} = 1$. Тоді $G = P \setminus Q$ – скінченна нільпотентна метациклічна група Міллера – Морено, $|P| = p > 2$, $|Q| = q^{\beta}$, $\beta > 0$. Покажемо, що G – УШН( )-група, тобто для $|[A;B]| > 2$ $(A;B) \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $G' = P$, $P \times \Phi(Q) = U$ – нормальна в G максимальна циклічна підгрупа. Якщо $P \leqslant A$, то за N можна вибрати будь-яку власну підгрупу з B, що строго містить A. Нехай $P \not\leqslant A$. Тоді $P \cap A = 1$. Якщо $B \leqslant U$, то знову N – власна підгрупа з B, що містить A. Звідси $B \not\leqslant U$. Оскільки Q – максимальна підгрупа з G, то $A \leqslant \Phi(Q)$. Якщо $B = G$, то $N = U$. Нехай $B < G$. Тоді $G = UB$. Тепер без порушення загальності можна вважати, що $Q \leqslant B$. Тому $P \cap B = 1$, $B = Q$. Зрозуміло, що $A \leqslant \Phi(\Phi(Q))$. Покладемо $N = \Phi(Q)$ і отримаємо $(A;B) \ni N \lhd G$, що і потрібно було довести. Достатність доведено. Наслідок повністю доведений.

О з н а ч е н н я 1.3.6. Неметациклічна група з метациклічними власними підгрупами називається мінімальною неметациклічною групою.

Т е о р е м а 1.3.3. Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УШН( )-групи G мають вигляд $G = AX$, де $A = \langle a,b \rangle$ – нормальна в G p-підгрупа, а $\neq 1$, X – q-група, p і q – прості числа та вичерпуються групами типів:

1) $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$;

2) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$;

3) $G = A \times X$, A – група кватерніонів порядку 8, $/X/ = 2$;

4) A – група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;

5) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

6) $G = A \lambda X$ – група Шмідта типу 3 теореми 4.3.1, $/A/ = p^2$, $/x/ \in \{q, q^2\}$;

7) $G = A \lambda X$ – група Шмідта типу 4 теореми 4.3.1, A – група кватерніонів порядку 8, $/x/ \in \{3,9\}$;

8) $G = A \lambda X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне число, $X = \langle x \rangle$, $/x/ \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^x \rangle = Z(G)$;

9) $G = A \lambda X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p$ – непарне число, $X = \langle x \rangle$, $/x/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^x \rangle = Z(G)$, A – квазіцентральна підгрупа з G;

10) $G = A \lambda X$, $/A/ = p$ – непарне число, $X = \langle x \rangle \lambda \langle z \rangle$, $/x/ = q^2$, $/z/ = q$ – непарне число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x,z] = x^q$, $C_\chi(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

11) G – квазіциклічна p-група.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Припустимо спочатку, що G – дедекіндова група. Якщо G – гамільтонова група, то в силу твердження 1.1.1 легко бачити, що G – група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай G – абелева група. Якщо $/G/ < \infty$, то G містить неметациклічну силовську p-підгрупу P. Оскільки $P^1 = 1$, то $/w(P)/ > p$. Звідси P містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3, яка, очевидно, є мінімальною неметациклічною групою. Тому G – група типу 1 теореми. Нехай $/G/ = \infty$. Якщо G містить квазіциклічну p-підгрупу U, то U – неметациклічна група. Звідси $G = U$ і G – група типу 11.

Нехай G – періодична абелева група, яка не містить квазіциклічних підгруп. Тоді G в силу відомих результатів (див., наприклад, [18]) містить скінченну неметациклічну підгрупу M. Тоді $M \neq G$, що неможливо.

Нехай G – неперіодична абелева група. Тоді G має періодичну частину T, яка, за попереднім, є скінченною метациклічною групою, і тому $G = T \times Z$, де Z – група без скруту. За відомим результатом (див., наприклад, [18]) G містить базисну підгрупу B, що є вільною

абелевою групою. Підгрупа B^p є також вільною абелевою групою однакового рангу з B і $B^p < B$. Звідси B^p і B – метациклічні групи.

Припустимо, що $F = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, де $/a/ \in \{p, \infty\}$, $/b/ \in \{p, \infty\}$, $/c/ = \infty$. Тоді, очевидно, G містить власну підгрупу $F_1 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c^p \rangle$. Зрозуміло, що F і F_1 – неметациклічні підгрупи, що для F_1 неможливо за означенням групи G. Зрозуміло також, що T і Z не можуть бути одночасно циклічними групами. Звідси і за попереднім при нециклічності T B – циклічна група і при нециклічності B T = 1. Якщо тепер G – скінченно породжена група, то Z – метациклічна група і при нециклічності Z T = 1. Звідси G = Z – метациклічна група, що неможливо в силу означення G. Нехай Z – циклічна група. За попереднім T не містить елементарних підгруп порядку p^2 і тому T – циклічна група, що згідно з попереднім зауваженням теж неможливо. Значить, G може бути нескінченно породженою групою. Оскільки $/T/ < \infty$, то Z – нескінченно породжена група, Z/B – нескінченна періодична група, яка, за попереднім може бути лише квазіциклічною p-групою. Нехай $q \neq p$, q – просте число. Ясно, що Z/B – періодична група, яка містить неодиничну елементарну абелеву q-підгрупу B/B^q і $Z/B^q/B/B^q \cong Z/B$ – квазіциклічна p-група. Звідси Z/B^q – непримарна група. У нашому випадку можна вважати, що B^q – базисна підгрупа з Z і за попереднім Z/B^q – квазіциклічна група і, значить, примарна. Отримали суперечність, яка завершує доведення необхідності у випадку, коли G – дедекіндова група.

Нехай G – недедекіндова група. Тоді G задовольняє умовам теореми 1.2.3, за твердженням якої G – черніковська група. Якщо G містить квазіциклічну підгрупу R, то, очевидно, G = R і G – група типу 11. Тому будемо вважати, що G не містить квазіциклічних підгруп і, значить, $/G/ < \infty$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) G – нільпотентна група; 2) G – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку за результатами з [27] G може бути лише p-групою одного з типів 1 – 5 теореми.

Випадок 2. Якщо G – ненадрозв'язна група, то за результатом з [28] G – група Шмідта одного з типів 1, 3 теореми 1.3.1. Якщо G – група типу 3 згаданої теореми, то $d = 2$ і G – група типу 6 теореми. Якщо G – група типу 1 теореми 1.3.1, то G – група типу 7 теореми.

Нехай далі G – надрозв'язна група. За результатами з [28 – 30]

$G = A \leftthreetimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p$, $\langle a \rangle \lhd G$, $\langle b \rangle \lhd G$, X – примарна, чи біпримарна нільпотентна холлівська підгрупа з G, $/b/ \in \{1, r\}$, r – просте число, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b \rangle \leftthreetimes X \lhd G$.

Припустимо, що $/b/ = r$, $r \neq p$. Тоді за результатами з [28] $\langle b \rangle \leftthreetimes X \not\lhd G$, X – нециклічна силовська q-підгрупа і $q \neq r$. Зрозуміло, що $\langle b \rangle \leftthreetimes X$ не може бути групою жодного з типів теореми 1.2.2 і тому $\langle x \rangle \leftthreetimes X \lhd G$, що не так. Отже, співвідношення $/b/ = r$ і $r \neq p$ неможливі.

Нехай $/b/ = 1$. Тоді в силу [28] $A = \langle a \rangle$, X – недедекіндова ненормальна метациклічна q-підгрупа з G, яка, очевидно, може бути лише групою типу 5 теореми 1.2.2, для якої $X = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, $/x/ = q^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $/z/ = q$, $[x,z] = x^{p^{\beta}-1}$, $p \not\equiv 1 \pmod q$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $C_{\langle x \rangle}(A) = \langle x^{q^{\beta}} \rangle \times \langle z \rangle$, $[X : X^1] > 4$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді у G $\langle x^{q^{\beta}} \rangle$, $/y/ = q^2$. Покладемо $c = yz$. Тоді $X = \langle x \rangle \langle c \rangle$. Оскільки $[x^{q^{\beta}}, z] = 1$, то $\langle c^{q^{\beta}} \rangle = \langle y^{q^{\beta}} \rangle = X^1$. Звідси $\langle c \rangle \lhd G$ і $G = (A \times \langle c \rangle) \cdot \langle x \rangle$ – метациклічна група, що не так. Тому $\alpha = 2$, $q > 2$ і G – група типу 10.

Нехай $/b/ \neq 1$. Тоді в силу [28] $/b/ = p$. Оскільки підгрупа $\langle b \rangle \leftthreetimes X$ ненормальна в G, то за наслідком 1.3.1 X – примарна група. В силу [28] $X = \langle x \rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod q$, $\langle b \rangle \times \langle x^{q^{\beta}} \rangle = H \lhd G$. Звідси $\langle x^{q^{\beta}} \rangle \lhd G$ і тому $Z(G) = \langle x^{q^{\beta}} \rangle$. При $\beta < 3$ G – група типу 8 теореми. Нехай $\beta > 2$. Покладемо $B = T \times \langle x^{q^{\beta}} \rangle$, $T \leqslant A$, $/T/ = p$. Зрозуміло, що $/[T;B]/ > 2$. За означенням УЗН[ ]-груп $[T;B] \ni N \lhd G$, $A \cap N = T \lhd G$ і тому A – квазіцентральна підгрупа з G а, G – група типу 9 теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = AX$ – група одного з типів 1 – 11 розглядуваної теореми. Тоді $A \lhd G$. Очевидно, що G – локально ступінчаста група. Зрозуміло, що група G типу 11 мінімальна неметациклічна. В роботі [27] установлено, що групи кожного з типів 1 – 5 теж мінімальні неметациклічні. У роботі [28] установлено, що групи кожного з типів 6 – 9 теж мінімальні неметациклічні, а для груп типу 10 це встановлено в роботах [29,30]. Отже, залишається показати, що G – УЗН[ ]-група.

В групі G кожного з типів 3, 11 всі підгрупи нормальні і тому G – УЗН[ ]-група.

Нехай $/[T;B]/ > 2$. Покажемо, що $[T;B] \ni N \lhd G$. Якщо $T \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $N = T$, чи $N = B$ і отримаємо, що G –

УШН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що $T \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $T \not\leq Z(G)$, $T \neq 1$, $B \not\leq G'$.

Нехай G – група одного з типів 1 – 5 теореми. Покажемо, що у цьому випадку G – ШН[ ]-група, тобто що при $/[T;B]/ > 1$ $[T;B] \ni N$, $N \lhd G$. Зрозуміло, що G – скінченна p-група. Знову якщо $T \lhd G$, $B \lhd G$, то, як і вище, G – ШН[ ]-група. Тому далі теж $T \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. З умови $B \not\lhd G$ випливає, що B – власна немаксимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що $/T/ \geq p$, $/B/ \geq p^2$, $/G/ \geq p^4$. Оскільки в групах G типу 1 $/G/ = p^3$, то, очевидно, G – ШН[ ]-група. В групах G типу 2 $/G/ = 81$ і $/B/ = 9$, $/T/ = 3$, G містить єдину нормальну елементарну абелеву підгрупу G порядку 9 і нижній шар будь-якої циклічної підгрупи порядку 9 співпадає з $Z(G)$. Звідси з урахуванням того, що $B \not\lhd G$, випливає, що B не є елементарною абелевою групою порядку 9. Якщо B – циклічна група, то $T = w(B) = Z(G)$, що неможливо. Отже, група G типу 2 є ШН[ ]-групою.

Очевидно, що група G типу 3 гамільтонова і тому G – ШН[ ]-група.

Група G типу 4 має порядок 16, $/B/ = 4$ і кожна її підгрупа порядку 4 містить G', що неможливо, оскільки $B \not\lhd G$. Тому група G типу 4 є ШН[ ]-групою.

Група G типу 5 має порядок 32, $w(G) = G' = Z(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$, $\exp(G) = 4$ і G не містить підгруп, ізоморфних підгрупі кватерніонів. Звідси $/T/ = 4$ і $/B/ = 8$. Оскільки G не містить підгрупи кватерніонів, то $w(B)$ – нециклічна група і тому $B \lhd G$, що не так. Таким чином, група G типу 5 є ШН[ ]-групою.

Отже, групи G кожного з типів 1 – 5 є УШН[ ] – групами і навіть ШН[ ]-групами.

Той факт, що група G кожного з типів 6, 7 є УШН[ ]-групою, доведено в теоремі 1.3.1.

Нехай G – група типу 8. Очевидно, що $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, $G > B$ і тому $\beta = 2$. Тепер $/G/$ – добуток чотирьох простих чисел, $/B/$ – добуток трьох простих чисел, $/T/$ – просте число. Звідси B – максимальна підгрупа з G, і має в G простий індекс. Оскільки $B > G$, то $A \not\leq B$, $[G:B] = p$ і $A \cap B = A_4$ – нормальна неодинична силовська p-підгрупа з $B = A_4 \lambda \langle x_4 \rangle$, $/A_4/ = p$, $/x_4/ = q^2$. Оскільки $Z(G) = \langle x^q \rangle$, то $\langle x_4^q \rangle = \langle x^q \rangle = Z(G)$ і $w(B) = A_4 \times \langle x^q \rangle$ – квазіцентральна підгрупа з G, що суперечить співвідношенню $T \leq w(B)$ і $T \not\lhd G$. Значить, у цьому випадку G –

УШН[ ]-група.

Нехай G - група типу 9. Знову $B \cap A = A_1$ - силовська p-підгрупа з B, $/A_1/ \in \{q,p\}$, $A_1 \lhd G$. Оскільки $A \times \langle x^q \rangle$ - квазіцентральна підгрупа з G, то $T \leqslant A \times \langle x^q \rangle$. Останнє співвідношення можливе, коли T містить такий q-елемент g, що $(A \times \langle x^q \rangle)\langle g \rangle = G$. Звідси g не належить підгрупі Фраттіні жодної силовської q-підгрупи з G. Оскільки $\langle x \rangle$ - силовська q-підгрупа з G, $\langle x^q \rangle = \Phi(\langle x \rangle) = Z(G)$ належить будь-якій силовській q-підгрупі з G, то $\langle x^q \rangle = \Phi(\langle g \rangle)$ і $\langle g \rangle$ - силовська q-підгрупа з G. Звідси $B = A_1 \lambda \langle g \rangle$, $\langle g \rangle$ - максимальна підгрупа з B і T - максимальна підгрупа з B, що не так. Отже, група G типу 9 є УШН[ ]-групою.

Нехай G - група типу 10. Тоді $T \not\leqslant A$. Нехай $A \leqslant B$. Тоді $X' \not\leqslant B$. Звідси $B \cap \langle x \rangle = 1$ і $/B/ = pq$, що неможливо. Таким чином, $A \not\leqslant B$ і, значить, $A \cap B = 1$ і B - q-група. Без порушення загальності можна вважати, що $B \leqslant X$ і T - власна немаксимальна підгрупа з X. Зрозуміло, що X - група типу 5 теореми 1.1.1, у якої підгрупа $M = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$ - єдина максимальна підгрупа з X, що містить всі власні немаксимальні підгрупи з X. Якщо $B = X$, то $N = M$. Нехай $B < X$. Тоді $/B/ = q^2$, що неможливо. Отже, група G типу 10 є УШН[ ]-групою. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.6. Нескінченні локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УШН[ ]-групи вичерпуються квазіциклічними групами.

З доведення достатності теореми 1.3.3 випливає такий наслідок.

Наслідок 1.3.7. Група G кожного з типів 1 - 5 теореми 1.3.3 є ШН[ ]-групою.

Твердження 1.3.1. Група $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$ типу 2 теореми 1.3.3 має властивості:

1) $G' = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle = \langle b \rangle \times \langle x^3 \rangle$;

2) всі елементи порядку 3 з G належать G';

3) для будь-якого $f \in G \setminus G'$ маємо $/f/ = 9$ і $Z(G) = \langle a^3 \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle f^3 \rangle$;

4) $G/G' = \langle G'a \rangle \times \langle G'x \rangle$ - група типу (3,3);

5) $\exp(G) = 9$;

6) $w(G) = G'$.

Доведення твердження випливає з [26] та [27].

Наслідок 1.3.8. Неабелеві метациклічні УЩН[ ]-групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 2, $/a/ = 8$; 3; 4, $k = \alpha - 2$; 5 - 9; 11, P - група типу 6 теореми 1.3.2 , $\beta < 4$; 12; 15; 16.

Доведення безпосередньо випливає з теореми 1.3.2.

Означення 1.3.6 [32]. Група, у якої нормальні всі неабелеві підгрупи, називається метагамільтоновою.

Наслідок 1.3.9. Неабелеві метациклічні метагамільтонові УЩН[ ]-групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 2; $/a/ = 8$; 3; 4, $k = \alpha - 2$; 5; 6; 11, P - група типу 6 теореми 1.3.2, $\beta < 4$.

Доведення. Необхідність. Зрозуміло, що G задовольняє умову наслідку 1.3.8 і може бути лише групою одного з типів згаданого наслідку. Те, що групи G кожного з типів 7, 8, 12, 15, 16 з теореми 1.3.2 є метагамільтоновими, випливає з робіт [20 - 22]. Необхідність доведена.

Достатність. Всі групи розглядуваного наслідку є в силу наслідку 1.3.8 скінченними нільпотентними метациклічними УЩН[ ]-p-групами з циклічним комутантом порядку p^2. Звідси $\Phi(G') \leqslant Z(G)$ і тому в силу результатів з роботи [33] G - метагамільтонова група. Достатність доведена. Наслідок доведено.

Наслідок 1.3.10. Метациклічні неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами таких типів теореми 1.3.2: 7 - 9; 12; 15; 16.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 1.3.2 і може бути групою одного з типів 1 - 16 згаданої теореми. Оскільки G - неметагамільтонова група, то $/G'/$ - непросте число. Тоді G - метациклічна неабе-

лева група з комутантом непростого порядку одного з типів 1 – 16, що не є групою жодного з типів наслідку 1.3.9, але є групою одного з типів наслідку 1.3.8. Звідси G – група одного з типів розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 1.3.8. Наслідок доведено.

Т е о р е м а 1.3.4. Нехай G – локально ступінчаста УШН[ ]-група з мінімальною неметациклічною підгрупою C. Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять C.

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою C вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \lambda Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p і q – різні прості числа, $\Phi(P) \lambda Q$ – нільпотентна група Міллера – Морено, $p \neq 3$;

2) $G = (R \times P) \lambda Q$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|Q| = q$, r, p і q – попарно різні прості числа, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod q$, $R \lambda Q$ і $P \lambda Q$ – нільпотентні групи Міллера – Морено.

Доведення. Нехай G і C взяті з умови теореми, $X \supset C$ і $X \not\triangleleft G$. Зрозуміло, що X – неметациклічна підгрупа, яка може бути лише підгрупою типу 6 теореми 1.2.2. Звідси $X = A \lambda \langle x \rangle$ – нільпотентна скінченна група Міллера – Морено, $|A| = p^{\alpha}$, $|x| = q^{\beta}$, p і q – різні прості числа, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Зрозуміло, що G – нільпотентна УШН[ ]-група типу 1 теореми 1.2.3, а X – її підгрупа Шмідта типу 3 теореми 1.3.1. Тоді G – скінченна нільпотентна дисперсивна група і $\alpha \in \{2,3\}$, $\alpha + \beta < 5$.

Припустимо, що $\alpha = 3$. Тоді A – група типу 1 теореми 1.3.3 і $\beta = 1$, $M = A \times \langle x^q \rangle \triangleleft G$. Звідси $A \triangleleft G$. Нехай P – силовська p-підгрупа з G, Q – силовська q-підгрупа з G. Оскільки G – скінченна розв'язна дисперсивна група, то $G = PD$, D – холлівське доповнення P в G. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x \rangle \leqslant Q \leqslant D$ і $PQ = QP$. Ясно, що $X \cap D = \langle x \rangle$. Оскільки $\langle x \rangle \triangleleft X$, то $D \not\triangleleft G$. Тому D – підгрупа одного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2 і $D > M_1 \triangleleft G$. Оскільки G – неделекіндова група, то за теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників і G містить підгрупу $A \times M_1$. Звідси $M_1 = 1$ і тому D може бути лише підгрупою одного з типів 1, 2 теореми 1.2.2, а значить, $|D| = qr$, q, r – необов'язково різні про-

ті числа. Покладемо $Y = A \lambda D$. Якщо $/D/ > q$, то за попереднім і теоремою 1.2.2 $Y \lhd G$ і G/Y - скінченна p-група, ізоморфна P/A. Можливі випадки: 1) D - циклічна група; 2) D - нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $/\langle x\rangle/ = q$, $\langle x\rangle$ - характеристична в D і, значить, X характеристична в Y, а тому $X \lhd G$, що неможливо.

Випадок 2. У цьому випадку D - група типу 2 теореми 1.2.2 і $D = \langle y\rangle\langle x\rangle$, $/y/ = r$, $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = 1$. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $r = q$; 2.2) $r \neq q$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $D = \langle y\rangle \times \langle x\rangle$. В силу відомих результатів (див., наприклад, [31]) без порушення загальності можна вважати, що $A \lambda \langle y\rangle = U$ не є групо Фробеніуса. Оскільки $M_2 = 1$, то U - нільпотентна група, у якої існує елемент a з A такий, що $/a/ = p$, $[a,y] = 1$. Зрозуміло, що $\langle a\rangle \lhd U$. За теоремою Машке (див., наприклад, [17]) $A = A_1 \times \langle a\rangle$, A_1 - елементарна абелева група порядку p^2, $A_1 \lhd U$. Для підгрупи X типу 3 теореми 1.3.1 3 - показник p за модулем q і тому $A_1 \lambda \langle y\rangle$ не містить підгруп Шмідта. Звідси $[A_1,\langle y\rangle] = 1$ і тому $[A,\langle y\rangle] = 1$, а значить, $y \in M_1$, що неможливо, оскільки $M_1 = 1$. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку при $\langle x\rangle \lhd D$ одержимо, що X - характеристична в Y і тому $X \lhd G$, що не так. Отже, $/D/ = qr$, $\langle x\rangle \not\lhd D$, $/x/ = q$. Тоді в силу відомих результатів (див., наприклад, [16]) $D = \langle y\rangle \lambda \langle x\rangle$, $\langle y\rangle = D'$, $/y/ = r$. Знову $U = A \lambda \langle y\rangle$ - характеристична підгрупа з Y і тому $U \lhd G$. Оскільки $M_2 = 1$, то U - нільпотентна група.

Припустимо, що U не є групою Фробеніуса. Тоді в силу [31] $a \in A$, $[a,y] = 1$, $/a/ = p$, $a \in Z(U) < A$. Ясно, що $Z(U)$ - характеристична підгрупа з U, тому $Z(U) \lhd Y$ і A містить власну неодиничну підгрупу з A, допустиму відносно $\langle x\rangle$, що суперечить мінімальності A в $X = A \lambda \langle x\rangle$.

Нехай U - група Фробеніуса. Тоді для будь-яких елементів простих порядків a з A і d з D $[a,d] \neq 1$. В силу [31] Y - група Фробеніуса з ненормальним множником D, який не може бути неабелевою групою порядку qr. Таким чином, випадки 1 і 2 неможливі. Тому при $\mathcal{L} = 3$ залишається розглянути випадок, коли $/D/ = q$. Звідси $D = \langle x\rangle$, і за дисперсивністю G $P \lhd G$, $G = P \lambda \langle x\rangle$. Оскільки $X \not\lhd G$, то $A < P$. Покажемо, що $A \not\leqslant Z(P)$. Дійсно, $Z(P) \lhd G$, $A \cap Z(P) \neq 1$, $Z(P) \cap X$ - неодинична нормальна в X p-підгрупа. Оскільки A - мінімальна нормальна підгрупа в X, то $Z(P) \cap A = A$. Зро-

зумілo, що всі елементи порядку p з P належать A. Звідси $N_P(\langle x\rangle) = C_P(x) = C_A(x) = 1$. Оскільки A – мінімальна неметациклічна підгрупа типу 1 теореми 1.3.1, то, за попереднім ненормальна в G підгрупа X, що містить A, може бути лише нільпотентною підгрупою типу 6 теореми 1.2.2. Звідси $B \lhd G$. Покладемо $V = B \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що $V = BX$, $B \cap X = A$, $V/A = B/A \lambda X/A$ і $/V/A/ = pq$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 3, то V/A – нільпотентна група. Звідси $X \lhd G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $V = XZ$, де $Z = N_V(\langle x\rangle) = \langle x\rangle \lambda B_1 = \langle x\rangle \times B_1$, $B_1 = Z \cap B \lhd Z$. Оскільки $N_A(\langle x\rangle) = 1$, то $B_1 \cap A = 1$, $B = A \times B_1$, $A < B$, $B_1 \neq 1$. Звідси знайдеться такий елемент порядку p з $B_1 \leq B \leq P$, який не належить A, що суперечить попередньому. Отже, випадок $\alpha = 3$ приводить до суперечності.

Таким чином, $\alpha = 2$ і тому X – група типу 6 теореми 1.3.3, за твердженням якої X – мінімальна неметациклічна група, що містить C, і тому $X = G$. Звідси при $X > C$ $X \lhd G$. Перша частина теореми доведена. Доведемо її другу частину.

Необхідність. Нехай $C \not\lhd G$. Тоді за попереднім $G = A \lambda \langle x\rangle$, $/A/ = p^2$, $/x/ = q^\beta$, p і q – різні прості числа, $\beta < 3$, $A \times \langle x^q\rangle \lhd G$. Звідси $A \lhd G$, $\langle x^q\rangle \lhd G$, A – мінімальна нормальна підгрупа з C, $\langle x\rangle$ – максимальна силовська q-підгрупа. Ясно, що C – група типу 6 теореми 1.2.2 і тому $p \neq 3$, 2 – показник p за модулем q, $q > 2$. Як і раніше, за теоремою 1.2.3 $G = PD$, P – силовська p-підгрупа з G, D – її холлівське доповнення, G – скінченна нільпотентна дисперсивна група. Звідси $\langle x\rangle \leq Q \leq D$, Q – силовська q-підгрупа з G. Оскільки G – розв'язна група, то не порушуючи загальності можна вважати, що G містить дисперсивну підгрупу PQ. Тоді або $PQ = P \lambda Q$, або $PQ = Q \lambda P$. Якщо $PQ = Q \lambda P$, то PQ містить C і $C \cap Q = \langle x\rangle \lhd C$, що неможливо оскільки $\langle x\rangle \not\lhd C$. Звідси $PQ = P \lambda Q$ і в G існує підгрупа $H = P \lambda \langle x\rangle$. Зрозуміло, що $Z(P) \lhd H$. Відомо, що $Z(P) \cap A \neq 1$. Оскільки A – мінімальна нормальна підгрупа як в C, так і в G, і $Z(P) \cap C \lhd C$, то $A \leq Z(P)$.

Покажемо, що P – метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді P містить мінімальну неметациклічну підгрупу T, яка за теоремою 1.2.1 є УНН[ ]-групою, що задовольняє умову теореми 1.3.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 5 теореми 1.3.3. Припустимо, що T – група типу 1 теореми 1.3.3. Тоді P містить елемент y, $/y/ = p$ і $\langle y\rangle \cap A = 1$. Без порушення загальності можна вважа-

ти, що $T = A \times \langle y \rangle$. За попереднім $T \lhd G$ і G/T – дедекіндова група. Покладемо $U = T \wedge \langle x \rangle$. Тоді $U/T \lhd G/T$ і, значить, $U \lhd G$. За теоремою Машке (див., наприклад, [17]), не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle y \rangle \lhd U$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 2, то $\langle y \rangle \wedge \langle x \rangle$ – нільпотентна група. Звідси $\langle y \rangle \leqslant Z(U)$, $U = \langle y \rangle \times C$, де C – характеристична підгрупа з U. Отже, $C \lhd G$, що не так. Таким чином, T – не може бути групою типу 1 теореми 1.3.3 і всі елементи порядку p належать $A \leqslant Z(P)$. Звідси $N_p(\langle x \rangle) = C_p(\langle x \rangle) = 1$ і тому $[H : N_H(\langle x \rangle)] = /P/$. Оскільки в групах типу 2 теореми 1.3.3 є нецентральні елементи порядку 3, то T не може бути групою типу 2 згаданої теореми. Нехай T – група одного з типів 3, 4 теореми 1.3.3. Тоді $/T'/ = 2$, $T' \lhd G$, $T' < A$, що суперечить мінімальності A в C. Отже, T не може бути ні групою типу 3 чи 4 теореми 1.3.3.

Нехай T – група типу 5 згаданої теореми. Тоді $/A/ = 4$, $q = 3$ і за теоремою Силова (див., наприклад, [16]) $[H : N_H(\langle x \rangle)] = 32 = 1 + 3k$. Звідси $3l \equiv 0 \pmod 3$. Але, очевидно, $3l \not\equiv 0 \pmod 3$ і тому T не може бути групою типу 5 теореми 1.3.3. Отже, P – метациклічна група.

Покажемо тепер, що $P' = 1$. Нехай це не так. Тоді $w(P') \lhd H$, $w(P') \leqslant A$, $w(P') \neq 1$, що суперечить мінімальності A в H. Звідси P – метациклічна абелева група з нециклічною метациклічною підгрупою $w(P) = A$ і $/A/ = p^2$. Зрозуміло, що $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $w(P) = A = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle$ і тому без порушення загальності можна вважати, що $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geqslant \beta$. Покажемо, що $\alpha = \beta$. Нехай $\alpha > \beta$. Тоді, як відомо, $P^{p^\beta} = \langle a^{p^{\alpha-\beta}} \rangle$ – неодинична характеристична підгрупа з P. Тому $\langle a^{p^{\alpha-\beta}} \rangle \lhd H$. Звідси $w(\langle a \rangle) = w(\langle a^{p^{\alpha-\beta}} \rangle)$ – характеристична підгрупа з P^{p^β} порядку p. Значить, $w(\langle a \rangle) < A$, $w(\langle a \rangle) \lhd H$ і тому $w(\langle a \rangle) \lhd C$, що суперечить мінімальності A в C. Таким чином, $\alpha = \beta$.

Нехай $\beta > 2$. Тоді $P > P_4 = \langle a \rangle \times \langle b^{p^2} \rangle$, $/b^{p^2}/ \geqslant p^2$. Зрозуміло, що P_4 не може бути підгрупою жодного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2. Тому $P_4 \lhd G$, $/a/ > /b^{p^2}/$. Тепер для P_4, як і раніше для P_3 $w(\langle a \rangle) \lhd C$, що неможливо. Таким чином, $\alpha < 3$. Ясно, що G містить підгрупу $V = A \wedge D$. Оскільки $C \cap D = C \cap Q = \langle x \rangle \not\lhd C$, то $D \not\lhd V$ і D – підгрупа одного з типів 1 – 6 теореми 1.2.2, D містить підгрупу M, $M \lhd G$, $C_D(P) = C_D(A) = M$. Оскільки G – неодекіндова група, то за теоремою 1.2.3 з урахуванням того, що G містить підгрупу $A \times M$,

маємо, що M не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток двох неодиничних прямих множників. Можливі два випадки: 1) $V \not\lhd G$; 2) $V \lhd G$.

Випадок 1. У цьому випадку $V < G$, тому $A < P$ і, значить, $\alpha = \gamma = 2$, V - нільпотентна група і тому V - підгрупа типу 5 теореми 1.2.2. За попереднім $V = C$ і тому $D = \langle x \rangle = Q$, $/x/ = p^{\beta}$. Припустимо, що $\beta > 1$. Тоді $\langle x^{p} \rangle \leqslant Z(G)$ і в G існує підгрупа $K = \langle a \rangle \times \langle b^{p} \rangle \times \langle x^{p} \rangle$, яка не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2. Звідси $K \lhd G$, $\langle a \rangle \times \langle b^{p} \rangle = P_1$ - силовська p-підгрупа з K і тому $P_1 \lhd G$. Як і раніше для P_1, $w(\langle a \rangle) \lhd C$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$ і G - група типу 1 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $[V,P] \leqslant V \cap P = A$. Зрозуміло, що $[P,\langle x \rangle] = P$. Тому $P \leqslant A$ і, значить, $A = P$ і $G = P \lambda D = V$. Оскільки підгрупа D кожного з типів 4, 6 теореми 1.2.2 містить підгрупу M, що розкладається в прямий добуток двох неодиничних множників, то D не може бути підгрупою ні типу 4, ні типу 6 згаданої теореми. Якщо припустити, що $\langle x \rangle \lhd D$, то $C \lhd G$, що неможливо. Отже, $\langle x \rangle \not\lhd D$ - недедекіндова група і тому D не може бути ні підгрупою типу 1, ні підгрупою типу 3 теореми 1.2.2. Якщо D - підгрупа типу 5 теореми 1.2.2, то $/M/ = q$, $D = Q$, $Q' = 1$, що неможливо. Значить, залишається випадок, коли D - група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/D/ = qr$, $D' \neq 1$, q і r - різні прості числа. Відомо [16], що $D = R \lambda \langle x \rangle$, де $/R/ = r$, $\langle x \rangle = Q$, $/x/ = q$, $R = \langle y \rangle$, $/y/ = r$, $D' = R$, $r \equiv 1 \pmod q$ і D - нільпотентна група Міллера - Морено. Покладемо $S = P \lambda R$. Тоді $S \lhd G$ і $G = S \lambda Q$. Припустимо, що S - нільпотентна група. Якщо S - група Фробеніуса, то групою Фробеніуса, очевидно, є і підгрупа C. Звідси групою Фробеніуса буде і G з ненормальним множником D порядку qr. Відомо [31], що в групі Фробеніуса D - циклічна група. Суперечність. Отже, S не є групою Фробеніуса. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[a, y] = 1$ і, значить, $a \in Z(S)$. Оскільки S - нільпотентна група, то $Z(S) = \langle a \rangle$ і тому $\langle a \rangle \lhd G$, що суперечить мінімальності A в C. Звідси S - нільпотентна група, $S = P \times R$, і тому G - група типу 2 теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Тоді $G = T \lambda Q$, $T = P \times R$, $/P/ = p^2$, $/R/ \in \{1, r\}$, $/Q/ = q$, p, q, r - попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod q$, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $T = G' = [T,Q]$, $U \lambda Q = V$ - підгрупа Міллера - Морено по-

рядку p^2q, що є мінімальною неметациклічною групою типу 6 теореми 1.3.3 (в групі G типу 1 $U = \Phi(P)$, а в групі G типу 2 $U = P$). Очевидно, що G - скінченна група, а тому вона локально ступінчаста. Покажемо, що $V \not\lhd G$. Нехай $V \lhd G$. Ясно, що $G = TV$, $T \cap V = U$, $[T, V] = [U,V] = U = V'$. Звідси $U \lhd G$, $G/U = T/U \times V/U$ - абелева група. Оскільки $G' = T$, $U < T$, то T/U - неодиничний комутант G/U, що не так. Отже, $V \not\lhd G$.

Покажемо, що G - УШН[ ]-група, тобто що при $/[A;B]/ > 2$ $[A; B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$, чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$. Звідси $/A/ > 1$, $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел, $B < G$, $B \not\leq G'$ і тому $T \cap B = D \lhd B$, $D < T$, $[B:D] \in \{1, q\}$.

Нехай $[B:D] = 1$. Тоді $B = D < T$ і $/D/$ ділиться на добуток трьох простих чисел. В групі G типу 2 $/T/ = rp^2$ і тому в даному випадку G може бути групою типу 1, у якої $T = P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/B/ = /D/ = p^3$. Звідси B - нециклічна група і тому $w(P) = w(B) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$, $A \leqslant w(B) = N = w(P) \lhd G$, що й треба було довести, тобто в цьому випадку G є УШН[ ]-групою.

Нехай, накінець, $[B:D] = q$. Тоді, не порушуючи загальності можна вважати, що $Q \leqslant B = D \setminus Q$ і $G = TB$. В групі G кожного з розглядуваних типів Q - 2-максимальна підгрупа з G, $G > B > Q$ і тому Q - максимальна підгрупа з B. Звідси A не містить q-елементів і, таким чином, $A \leqslant D$. Оскільки $T' = 1$, то $D \lhd G$, і поклавши, $D = N$, будемо мати, що G - УШН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.11. Нехай G - локально ступінчаста УШН[ ]-група і C - її ненормальна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді C - нільпотентна група Міллера - Морено порядку p^2q з нормальною силовською p-підгрупою, p і q - різні прості числа.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 1.3.4.

Наслідок 1.3.12. Нехай G - локально ступінчаста УШН[ ]-група і C - її нільпотентна мінімальна неметациклічна підгрупа. Тоді $C \lhd G$ і G/C - дедекіндова група.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 1.3.4.

4.4. БУДОВА ШН[ ]-ГРУП І ІХ ПІДКЛАСІВ

Лема 4.4.1. В довільній ШН[ ]-групі G нормальні всі нециклічні підгрупи та підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп. Ненормальними в G можуть бути лише примарні циклічні підгрупи.

Доведення. Нехай G – досліджувана група, U – її підгрупа і x – довільний елемент з U. Припустимо спочатку, що U – нециклічна група. Тоді $/[\langle x\rangle;U]/ > 1$ і, значить, $[\langle x\rangle;U] \ni N(x) \lhd G$. Зрозуміло, що підгрупа N, яка породжена всіма підгрупами N(x), для всіх x з U, нормальна в G. Звідси $U = N$ і $N \lhd G$.

Нехай $U = \langle x\rangle$ – циклічна група. Ясно, що при $/U/ \in \{1,p\}$, p – просте число, $\Phi(U) \lhd G$. Нехай /U/ ділиться на добуток двох простих чисел. Якщо $U \lhd G$, то $\Phi(U) \lhd G$. Нехай $U \not\lhd G$. Тоді $/[\Phi(U);U]/ > 1$ і, значить, $[\Phi(U);U] \ni N \lhd G$. Ясно, що $\Phi(U)$ – характеристична підгрупа з N і тому $\Phi(U) \lhd G$. Таким чином, завжди $\Phi(U) \lhd G$.

Покажемо, що U – примарна циклічна група. Нехай це не так, тобто U – непримарна група. Тоді $U = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, $/y/ \neq 1$, $/z/ \neq 1$, $/[\langle y\rangle;U]/ > 1$, $/[\langle z\rangle;U]/ > 1$. За означенням ШН[ ]-груп $[\langle y\rangle;U] \ni N(y) \lhd G$, $[\langle z\rangle;U] \ni N(z) \lhd G$. Звідси $N(y)N(z) = U \lhd G$, що неможливо, оскільки $U \not\lhd G$. Отже, U – примарна циклічна група. Лема доведена.

Лема 4.4.2. Нехай G – ШН[ ]-група, що містить підгрупу $U = A \times B$, $A \lhd G$, $B \neq 1$. Тоді A – квазіцентральна підгрупа з G.

Доведення. Нехай G та U взято з умови леми і X – довільна підгрупа з A. Покажемо, що $X \lhd G$. При $X = 1$, чи $X = A$ це очевидно. Значить, $1 < X < A$. Тоді за лемою 4.4.1 $X \times B \lhd G$ і тому $(X \times B) \cap A = X \lhd G$ і, значить, A – квазіцентральна підгрупа з G. Лема доведена.

Наслідок 4.4.1. Нільпотентна неабелева ШН[ ]-група G є p-групою, у якої нормальні всі нециклічні підгрупи.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G задовольняє умову теореми 4.2.3, за твердженням якої $G = P \times D$, P – неабелева силовська чернівська p-підгрупа з G, D – її черні-

ське холлівське доповнення в G. За лемою 1.4.1 всі нециклічні підгрупи з P нормальні в G. Припустимо, що $D \neq 1$. Тоді за лемою 1.4.2 P – дедекіндова група, що неможливо. Отже, G – p-група. Наслідок доведено.

Л е м а 1.4.3. Локально ступінчасті неінільпотентні ШН[ ]-групи G вичерпуються групами Шмідта типу $G = P \lambda Q$, P – силовська p-підгрупа з G, Q – силовська q-підгрупа з G, p і q – різні прості числа, $/P/ \in \{p, p^2\}$, $/Q/ = q^\beta$, $\beta > 0$; при $/P/ = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; при $/P/ = p^2$ $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1$, 2 – показник p за модулем q.

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з леми. Тоді G задовольняє умову теореми 1.2.3 і може бути лише скінченною дисперсивною неінільпотентною групою типу 1 згаданої теореми. Звідси G містить підгрупу Шмідта $S = P \lambda Q$, яка в свою чергу за теоремою 1.2.1 задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 теореми 1.3.1. За наслідком 1.3.4 S є групою розглядуваної леми.

Покажемо, що $S = G$. Дійсно, за лемою 1.4.1 $S \lhd G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $G = SD$, де $D = N_G(Q)$, $D \cap P = N_P(Q) = 1$. Очевидно, що $P \lhd G$, $G = P \lambda D$, $S \cap D = Q \lhd D$. Зрозуміло, що $D \neq G$ і тому за лемою 1.4.1 D – примарна циклічна q-група, у якої $\Phi(D) \lhd G$. Звідси $D = \langle y \rangle$, $\langle y \rangle \geq Q$, $Q \neq G$, $y^q \in Z(G)$. Тоді $Q \leq \langle y^q \rangle$. Звідси $Q = \langle y \rangle$ і тому $D = Q$, $G = S$. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 1.3.4. Лема доведена.

Т е о р е м а 1.4.1. Локально ступінчасті ШН[ ]-групи G є черніковськими групами, у яких $/G'/ \in \{p, p^2\}$, $[G:Z(G)] \in \{p^2, pq\}$, p і q – необов'язково різні прості числа та вичерпуються групами таких типів:

1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $/b/ = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $/a/ = 8$, $/b/ \in \{4, 8\}$, $/\langle a \rangle \cap \langle b \rangle/ = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = C \times Q$, C – неодинична локально циклічна 2-група, Q – група кватерніонів порядку 8;

4) $G = (C \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[a,b] = c \in C$, $/c/ = p$, $/a/ = /b/ = p$,

$[C,\langle b\rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $[a,x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

7) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $/a/ = /b/ = 4$, $a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$;

8) $G = P \lambda Q$, P – силовська p-підгрупа з G, Q – силовська q-підгрупа з G, p і q – різні прості числа, $/P/ \in \{p, p^2\}$, $/Q/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$; при $/P/ = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; при $/P/ = p^2$ $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ – показник p за модулем q.

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з теореми. Тоді G задовольняє умову теореми 1.2.3, за твердженням якої G – черніковська розв'язна недедекіндова дисперсивна група, для якої можливі випадки: 1) G – скінченна нільпотентна група; 2) G – нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 1.4.3, за твердженням якої G – група типу 8 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову наслідку 1.4.1, за твердженням якого G – p-група з нормальними нециклічними підгрупами. З опису цих груп [34,35] одержимо, що G – група одного з типів 1 – 7 теореми.

Зрозуміло, що групі G кожного з типів 1 – 8 G' і $Z(G)$ мають ті ж властивості, які вказані з початковому формулюванні теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 8 теореми. Зрозуміло, що G – недедекіндова локально ступінчаста група. Покажемо,

що G – ШН[ ]-група. Для груп G типу 8 це доведено в наслідку 1.3.4. Тому в подальшому будемо вважати, що G – нільпотентна p-група одного з типів 1 – 7 теореми.

Зрозуміло, що в силу [34,35] кожна нециклічна підгрупа з G нормальна. Нехай $/[A;B]/ > 1$. Покажемо, що $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$, чи $B = N$ і все доведено. Тому $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$, $B < G$, $B \not\ni G'$ і B – циклічна група. Ясно, що $/B/ > p^2$. Оскільки $/G'/ \leqslant p^2$ і $B = \langle u \rangle$, то, як відомо, $u^{p^2} \in Z(G)$. В силу вибору A та B $A = \langle u^p \rangle$. Звідси при $/G'/ = p$ маємо, що $A \leqslant Z(G)$, що не так. Тоді $/G'/ = p^2$. Зауважимо, що в групах G кожного з типів 5 – 7 $u^2 \in Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так, а в групах G кожного з типів 1, 3, 4 $/G'/ = p$. Отже, в подальшому G може бути лише групою типу 2 теореми. Оскільки $\langle u \rangle = B \not\lhd G$, то $\langle u \rangle$ співпадає з однією з підгруп $\langle b \rangle$, $\langle (ab)^2 \rangle$. Дійсно, $u = a^i b^j$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Звідси при парному j $u^2 = a^{2i} b^{2j} \in \langle a^2 \rangle$, при непарному j $u^2 = b^{2j}$. Оскільки $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $b^2 \in Z(G)$, то $A = \langle u^2 \rangle \lhd G$, що знову неможливо. Отже, G – ШН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1.4.2. Нехай G – локально ступінчаста недедекіндова група. Тоді справедливі такі твердження:

1) будь-яка ШН[ ]-група є групою з нормальними нециклічними підгрупами;

2) існують неперіодичні метациклічні групи G та скінченна група G з нормальною силовською 2-підгрупою, яка ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, у яких нормальні всі нециклічні підгрупи і G – не ШН[ ]-групи;

3) для довільної p-групи G наступні умови еквівалентні:

а) G – ШН[ ] – група; б) G – група з нормальними нециклічними підгрупами.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді твердження 1 випливає з леми 1.4.1. В силу [34,35] серед груп з нормальними нециклічними підгрупами є групи таких типів: $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, і група Шмідта $G = P \lambda \langle x \rangle$, у якої P – група кватерніонів порядку 8, які недедекіндові. За теоремою 1.4.1 вказані типи груп не можуть бути ШН[ ]-групами. Цим твердження 2 наслідку доведено. В силу [34,35] група кожного з типів 1 – 7 теореми 1.4.1 є групою, у якої всі нециклічні підгрупи нормальні. Це й доводить твердження 3 наслідку. Наслідок доведено.

Т е о р е м а 1.4.2. Класи Н–, ШН[ )– , ШН( ]-груп співпадають з класом дедекіндових груп.

Доведення. Необхідність. Якщо G – Н-група, то за лемою 1.2.2 G – дедекіндова група. Нехай G – ШН[ )-група, чи G – ШН( ]-група і X – будь-яка її підгрупа. Покажемо, що $X \lhd G$. Якщо $X = G$, чи $X = 1$, то це очевидно. Тому далі $1 < X < G$. Припустимо, що $X \not\lhd G$. Тоді за лемою 1.2.1 G – ШН[ ]-група, для якої справедливе твердження леми 1.4.1. Звідси $X = \langle x \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x^p \rangle \lhd G$. Для ШН( ]-груп G $(\langle x^p \rangle; \langle x \rangle] \ni N \lhd G$ і тому $\langle x \rangle = N$, що не так. Нехай G – ШН[ )-група. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп з G, які містять $\langle x \rangle$. За вибором $Z > \langle x \rangle$. Ясно, що $|[\langle x \rangle; Z]| > 1$ і тому за означенням ШН[ )-груп $[\langle x \rangle; Z) \ni N \lhd G$. Звідси $N < Z$, що неможливо за вибором Z. Отже, $X \lhd G$ і тому G – дедекіндова група. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

ГЛАВА II

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УШН[ ]-ГРУП

2.1. ДЕЯКІ КОРИСНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Лема 2.1.1. Нехай $G = A \times B$ - УШН[ ]-група і A - її неде-кіндова підгрупа. Тоді $/B/ \in \{1,q\}$, q - просте число. Якщо G - локально ступінчаста група і $/B/ = q$, то A - група одного з типів 1 - 8 теореми 1.4.1.

Доведення. Нехай G з теореми. Тоді G задовольняє умову леми 1.2.5, за твердженням якої B не має власних немаксимальних під-груп. Звідси за лемою 1.1.1 $/B/ \in \{1,q\}$, q - просте число.

Нехай $/B/ = q$. Якщо G - локально ступінчаста група, то, оче-видно, A - локально ступінчаста група. Звідси за теоремою 1.2.1 та лемою 1.2.5 A - локально ступінчаста ШН[ ]-група, що задоволь-няє умову теореми 1.4.1 і може бути групою одного з типів 1 - 8 згаданої теореми. Лема доведена.

Лема 2.1.2. Нільпотентні УШН[ ]-групи G з комутантом по-рядку p, p - просте число, мають вигляд $G = \langle a\rangle \lambda (\langle b\rangle \times \langle z\rangle)$, $/a/ = p > 2$, $/z/ \in \{1, s\}$, s - просте число, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = \langle a\rangle$, та вичерпуються групами типів:

1) $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $q \neq p$ - просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $b^{q^{\alpha}} \in Z(G)$; при $z \neq 1$ $\langle b^{q^{\alpha}}\rangle \lhd G$; при $/z/ = p$ $\beta < 3$;

2) $/b/ = qr$, q і r - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $C_{\langle b\rangle}(\langle a\rangle) = z = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай група G з леми. В силу теореми 1.2.3 та результатами з [36] G - скінченна група вигляду $G = \langle a\rangle \lambda D$, де $\langle a\rangle$ - найменша нормальна підгрупа з G, для якої $G/\langle a\rangle$ - нільпотентна група. Звідси D - скінченна нільпотентна гру-па. Оскільки G - ненільпотентна група і $/G'/ = p$, то $\langle a\rangle = G'$, $/a/ = p$ - просте число. Таким чином, $D' = 1$ і $p \neq 2$. Зрозуміло, що $[\langle a\rangle,D] = \langle a\rangle$, $D \not\lhd G$. Тоді D група одного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2, за твердженням якої D - може бути лише абелевою групою од-ного з типів 1, 2, 4, 5 згаданої теореми і D містить підгрупу M,

$M \lhd G$, $M = C_D(\langle a \rangle)$.

Нехай D – група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ = q$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Зрозуміло, що $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і тому G – група типу 1 розглядуваної леми.

Нехай D – група типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $/z/ = s$, q і s – прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$. Нехай $s = p$. Покладемо $c = az$. Легко бачити, що $/c/ = p$ і $\langle c \rangle \not\lhd G$. Оскільки $b^q \in Z(G)$, то в G існує підгрупа $\langle c \rangle \times \langle b^q \rangle = U$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $/[\langle c \rangle; U]/ > 2$ і за означенням УШН[ ]-груп $[\langle c \rangle; U] \ni N \lhd G$. Оскільки $\langle c \rangle$ – нормальна силовська p-підгрупа нормальної в G підгрупи N, то $\langle c \rangle \lhd G$, що неможливо. Отже $\beta < 3$ і G – група типу 1 леми.

Нехай D – група типу 1 теореми 1.2.2. Тоді $D = \langle b \rangle$, $z = 1$, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $\langle b^{q^2} \rangle \lhd G$ і знову G – група типу 1 леми.

Нехай D – група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/D/ = qr$, q і r – необов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$. Нехай $q = r$. Відомо [16], що $Aut\langle a \rangle$ – циклічна група і D/M – підгрупа із $Aut\langle a \rangle$. При наших допущеннях підгрупа D типу 2 теореми 1.2.2 є елементарною абелевою групою порядку q^2 і $M = 1$. Звідси і попереднього $C_D(\langle a \rangle) = M \neq 1$, що не так. Тому $q \neq r$. Тоді $D = \langle b \rangle$, $/b/ = qr$, $M = 1$, $\langle a \rangle \wr \langle b^q \rangle$ і $\langle a \rangle \wr \langle b^r \rangle$ – неінільпотентні підгрупи. Звідси, як відомо, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$ і G – група типу 2 леми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle \wr D$ – група одного з типів 1, 2 леми. Тоді, очевидно, $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $/z/ \in \{1, s\}$, s – просте число, $z \in Z(G)$. Ясно, що $G' = \langle a \rangle$, $/a/ = p$ – просте число і G – неінільпотентна метациклічна група одного з типів 12, 13 теореми 1.3.2, за твердженням якої G – УШН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Л е м а 2.1.3. Нехай G – примарна недедекіндова УШН[ ]-група G з комутантом порядку p, p – просте число, яка не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп і містить неабелеву підгрупу порядку p^3. Тоді G має вигляд $G = CF$, де C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $C \cap F = C \cap F'$, $F' = G' = \langle c \rangle$, $/c/ = p$, $F = (Q \times \langle a \rangle) \wr \langle b \rangle$, $/a/ \in \{p, p^2\}$, $/b/ =$

$= p$, $[a,b] = c \in Q$, $[Q,\langle b\rangle] = 1$, $Q = \langle u,v\rangle$ – група порядку p, чи p-група Міллера – Морено, $/G/ > p^5$ і є групою одного з типів:

1) $[\langle a\rangle,\langle b\rangle] = Q = C$; при $/a/ > p$ C – група кватерніонів порядку 8;

2) $C = \langle c\rangle$, $Q = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $\Delta > 1$, $[u,v] = [a,b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q,\langle b\rangle] = 1$;

3) $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $/c/ = /u/ = /v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u, v] = [a,b] = c \in C$, $[Q,\langle b\rangle] = 1$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $G > M = \langle x,y\rangle$, $/x/ \in \{p, p^2\}$, $/y/ \in \{p, p^2\}$, $[\langle x\rangle,\langle y\rangle] = \langle c\rangle = G' = M'$, $/c/ = p$, $c \in Z(G)$. За наслідком 1.1.6 $G = MD$, де $D = C_G(M)$, $M \cap D = \langle c\rangle$. За умовою леми та теоремою 1.2.3 G – черніковська група, що не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^4.

Нехай спочатку $D' = 1$. Тоді в силу відомого результату [18] $D = C \times D_1$, де C – сервантна локально циклічна підгрупа з D, що містить $\langle c\rangle$, D_1 – її доповнення в D. Звідси $G = D_1 \times (CM)$ і тому з умови леми $D_1 = 1$ і, значить, $G = CM$. Оскільки $M < G$, то $z \in C$, $/z/ = p^2$ і $z^p = c$. Якщо $/x/ = /y/ = p$, то покладемо $x = a$, $y = b$, $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $[a,b] = c$, $Q = \langle c\rangle$ і одержимо, що G – група типу 1 леми.

Нехай $/x/ = p^2$. Тоді існує i для якого $z^i x = a$, $/a/ = p$ і при $/y/ = p$, покладемо $y = b$. Як і раніше, одержимо, що $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ і G – група типу 1 леми.

При $/x/ = p^2$ і $/y/ = p^2$ знайдуться такі i та j, що $z^i x = a$, $z^j y = b$, $/a/ = /b/ = p$. Знову, як і раніше, $M = F = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ і G – група типу 1 леми.

Нехай тепер $D' \neq 1$. Покажемо, що D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Дійсно, нехай це не так. Тоді $D = D_1 \times D_2$, де $D' = D_2' = G' = \langle c\rangle = D \cap M = D_2 \cap M$. Звідси $G = D_1 \times (D_2 M)$. За умовою леми $D_1 = 1$, що суперечить нашому припущенню. Отже, D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Можливі випадки: 1) $M = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$; 2) M – мегациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку D містить $Q = \langle u,v\rangle$ – p-групу Міллера – Морено і G містить підгрупу $U = D \times \langle b\rangle$, яка за теоремою 1.2.1 задовольняє умову леми 2.1.1. В силу цієї леми D – група одного з типів 1 – 7 теореми 1.4.1, або гамільтонова група. Ос-

кільки $/D'/ = p$ і D не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп, то D може бути лише групою одного з типів 1, 4 теореми 1.4.1 або гамільтоновою групою.

Нехай D – група типу 1 теореми 1.4.1. Тоді $D = \langle u\rangle \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $[u,v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$. Покажемо, що $/v/ = p$. Нехай це не так. Тоді G містить підгрупу $V = \langle v\rangle \times \langle a\rangle$. Ясно, що $V \not\lhd G$ і V – група типу 5 теореми 1.2.2, за твердженням якої $\langle v^p\rangle \times \langle a\rangle \lhd G$. Звідси $a \in Z(G)$, що неможливо. Отже, $/v/ = p$. Покладемо $C = \langle c\rangle$, $F = DM$, $D = Q$ і одержимо, що G – група типу 2 леми.

Нехай D – група типу 4 теореми 1.4.1. Тоді $D = CQ$, C – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $/u/ = /v/ = p$, $[u,v] = c \in C$, $[C,Q] = 1$. Покладемо $F = QM$. Тоді $G = CF$, $[C,F] = 1$ і G – група типу 3 леми.

Нехай, нарешті, D – гамільтонова група. Тоді за попереднім $D = C$ – група кватерніонів порядку 8. Покладемо $Q = \langle c\rangle$, $F = M$ і отримаємо, що $G = CF$ – група типу 1 леми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку M – метациклічна група і можна вважати, що G не містить неабелевої підгрупи $M = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$ порядку p^3. Звідси $M = \langle x\rangle\langle y\rangle$, $/x/ = p^2$. Нехай M не є групою кватерніонів порядку 8. Тоді $M = \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$, $/y/ = p$ і знову G містить підгрупу $U = D \times \langle y\rangle$ і як у випадку 1, D – група кватерніонів порядку 8, чи група одного з типів 1, 4 теореми 1.4.1. Нехай $d \in D$, $/d/ = p^2$, $d^p = c$. Тоді існує ціле число i таке, що $d^i x = a$, $/a/ = p$, $[a,y] = c$ і G містить $M_1 = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \lambda \langle y\rangle$, $/y/ = p$, що суперечить розглядуваному випадку. Отже, D – не може бути ні групою кватерніонів порядку 8, ні групою типу 1 теореми 1.4.1. Звідси $D = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $[u,v] = c$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$. У цьому випадку $/D/ > p^3$. Звідси, без порушення загальності можна вважати, що $/u/ = p^2$. Тому G містить елементарну абелеву підгрупу $v(\langle u\rangle) \times v(\langle v\rangle) \times \langle c\rangle \times \langle a\rangle$ порядку p^4, що неможливо. Значить, M – група кватерніонів порядку 8.

Як і раніше, можна вважати, що $\langle c\rangle$ максимальна циклічна підгрупа з D. Ясно, що D містить підгрупу Міллера-Морено Q, яка задовольняє умову наслідку 1.3.3 і може бути лише групою типу 3 згаданого наслідку. Звідси $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \lambda \langle v\rangle$, $/Q/ > 8$, $[u,v] = c$, $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2, 4\}$. Покажемо, що $/v/ = 2$. Нехай $/v/ = 4$. Зрозуміло, що $/x/ = /y/ = 4$, $x^2 = y^2$. Покладемо $x_1 = ux$, $y_1 =$

= vy. Тоді $/x_1/ = /y_1/ = 4$, $\langle x_1\rangle \cap \langle y_1\rangle = 1$, $[x_1,y_1] = [ux,vy] = c^2 = 1$ і G містить $V_1 = \langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle$. Ясно, що V_1 не може бути групою жодного з типів 1 - 6 теореми 1.2.2 і тому $V_1 \lhd G$, $V_1 \cap G' = 1$ і, значить, $V_1 \leqslant Z(G)$ і тому $QM = V_1 \times M$.

Нехай $Q = D$. Тоді при $/v/ = 4$ $G = V_1 \times M$, що неможливо. Отже, $/v/ = 2$ і G - група типу 1 леми.

Нехай, нарешті, $D > Q$ і нехай d - довільний елемент з D. Тоді одна з підгруп $\langle d, u\rangle$, $\langle d, v\rangle$, $\langle du, v\rangle$, $\langle u, dv\rangle$ є групою типу 3 наслідку 1.3.3. Звідси $/d/ \leqslant 4$ і тому $D/\langle c\rangle$ - скінченна абелева група. Звідси $D/\langle c\rangle = \langle u_1\langle c\rangle\rangle \times \langle v_1\langle c\rangle\rangle \times \langle d\langle c\rangle\rangle \times B/\langle c\rangle$ і без порушення загальності можна вважати, що $[u_1,v_1] \neq 1$. Очевидно, що $\langle u_1,v_1\rangle$ - група типу 3 наслідку 1.3.3 і тому можна вважати, що $Q = \langle u_1,v_1\rangle$ і, значить, $u_1 = u$, $v_1 = v$. Тоді з умови $D > Q$ випливає, що $/d\langle c\rangle/ > \overline{1}$ і тому D містить підгрупу $U_1 = Q \wedge \langle d\rangle$ і $/d/ > 1$. За попереднім $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2, 4\}$, $/d/ \in \{2, 4\}$. Ясно, що $\langle u^2, v^2, d^2\rangle \leqslant Z(G)$. Тоді в G існує підгрупа $K = (\langle c\rangle \times \langle u^2\rangle \times w(\langle v\rangle)) \wedge w(\langle d\rangle)$ порядку 16. За вибором $(\langle c\rangle \times w(\langle v\rangle) \wedge w(\langle d\rangle)$ - абелева група і, значить, K - елементарна абелева група порядку 16, що неможливо. Отже, $Q = D$. Всі випадки розглянуті. Лема доведена.

Теорема 2.1.1. Недедекіндові УШН[ ]-групи G з комутантом порядку p, p - просте число, мають вигляд $G = CF$, C - локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C,F] = 1$, $F = (Q \times \langle a\rangle) \wedge \langle b\rangle$, $[a,b] \in \langle c\rangle = G' = F' \leqslant Q = \langle u,v\rangle$, $/c/ = p$ та вичерпуються групами типів:

1) $G = F = (Q \wedge \langle b\rangle) \times \langle a\rangle$, $Q = \langle c\rangle$, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 0$, $/a/ \in \{1, r\}$, p і q - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $/a/ \neq 1$ $b^q \in Z(G)$; при $/a/ = p$ $\beta < 3$;

2) $G = F = Q \wedge \langle b\rangle$, $/Q/ = p$, $/b/ = qr$, p, q і r - попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $C_{\langle b\rangle}(Q) = 1$;

3) $G = F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = \langle u\rangle \wedge \langle v\rangle$, $/u/ = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $/v/ = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $[u,v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $/a/ \in \{1, r\}$, r - просте число;

4) $G = C \times F$, C - локально циклічна 2-група, $/C/ > 2$, $F = Q \times \langle a\rangle$, Q - група кватерніонів порядку 8, $/a/ \in \{1, r\}$, r - просте число;

5) $F = Q \times \langle a\rangle$, $Q = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \wedge \langle v\rangle$, $[u,v] = c \in C$, $/u/ \in \{p, p^2\}$, $/v/ \in \{p, p^2\}$, $/a/ \in \{1, r\}$, r - просте число, $/C'/ \cdot /u/ \cdot /v/ \neq 32$; при $/a/ \neq 1$ $/u/ = /v/ = p$;

6) $G = F$, $Q = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $/v/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = [a,b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q,\langle b \rangle] = 1$;

7) $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = /v/ = /c/ = /a/ = /b/ = p$, $[u,v] = c = [a,b]$, $[Q,\langle b \rangle] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Припустимо спочатку, що G – нільпотентна група. Тоді G задовольняє умову леми 2.1.2, за твердженням якої G є групою одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми.

Нехай тепер G – нільпотентна група. Нехай спочатку $G = X \times A$, де $X \neq 1$, $A \neq 1$. Оскільки $/G'/ = p$, то або $/X'/ = p$, або $/A'/ = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' = G'$ і тому $A' = 1$. За теоремою 1.2.3 G – неДедекіндова черніковська група. Припустимо, що $/A/ = r$ – просте число. В силу леми 2.1.1 X – може бути групою одного з типів 1, 3, 4 теореми 1.4.1.

Якщо X – група типу 1 теореми 1.4.1, то покладемо $X = Q$, $A = \langle a \rangle$, $C = X'$, $F = X \times A$. Звідси $F = G$ і, значить, G – група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай X – група типу 3 теореми 1.4.1. Тоді $X = C \times Q$, C – локально циклічна 2–група, $/C/ > 2$, Q – група кватеріонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$ і одержимо, що $G = C \times F$ і, значить, G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай X – група типу 4 теореми 1.4.1. Тоді $X = CQ$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $/u/ = /v/ = p$, $[u,v] = c \in C$, $/c/ = p$, $[C,Q] = 1$, C – локально циклічна p-група, чи група кватеріонів порядку 8. Покладемо $F = Q \times A$. Звідси $G = CF$ і тому G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай $/A/$ – непросте число. Тоді за лемою 2.1.1 X – гамільтонова група. В силу твердження 1.1.1 $X = Q \times D \times A_1$, Q – група кватеріонів порядку 8, D – елементарна абелева 2-група, A_1 – періодична абелева група без інволюцій. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X = Q \times D$, $A = A_1 \times A$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників. Звідси $/D/ < 4$.

Нехай $/D/ = 2$. Тоді A – локально циклічна 2-група і оскільки G – неДедекіндова група, то $/A/ > 2$. Покладемо $A = C$, $F = Q \times D$ і одержимо, що G – група типу 4 розглядуваної теореми.

Нехай $/D/ = 1$. Тоді $X = Q$ – силовська дедекіндова 2-підгрупа з

G, A – її періодичне абелеве доповнення. Звідси в силу твердження 4.1.1 G – дедекіндова група, що не так.

Нехай тепер G не розкладається в прямий добуток своїх неодиничних підгруп. Якщо G містить неабелеву підгрупу порядку p^3, то G задовольняє умову леми 2.4.3. Звідси G – група одного з типів 5 – 7 теореми. Нехай G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Тоді всі підгрупи порядку p^2 з G абелеві. Зрозуміло, що G містить підгрупу Міллера – Морено M, яка не може бути ні групою кватерніонів, ні групою діедра порядку 8 і $|M| > p^3$.

Нехай M = G. Тоді G задовольняє умову наслідку 4.3.3 і може бути групою одного з типів 2, 3 цього наслідку. Звідси G – група одного з типів 3, 5 розглядуваної теореми.

Нехай M < G. Тоді $|G| > p^4$. За наслідком 4.3.3 $M = (\langle c\rangle\langle x\rangle)\lambda\langle y\rangle$, $|x| = p^\alpha$, $|y| = p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $[x,y] = c$. Не порушуючи загальності можна вважати, що M – група Міллера – Морено з G найменшого порядку. Покажемо, що підгрупу M можна вибрати так, що M – група типу 3 наслідку 4.3.3. Дійсно, нехай Y – максимальна локально циклічна підгрупа з G, що містить $\langle c\rangle$. Тоді $Y \lhd G$ і G/Y – прямий добуток скінченного числа неодиничних локально циклічних підгруп Y_r/Y, $0 < r \leqslant n$. Зрозуміло, що G породжується всіма підгрупами Y_r, $Y_r \lhd G$. При $i \neq r$ $Y_i \cap Y_r = Y$. Оскільки G – p-група і $|G'| = p$, то $G' \leqslant Z(G)$ і для будь-якого g із G $g^p \in Z(G)$.

Покажемо, що $Y_r = Y \lambda B_r$, де B_r – неодинична локально циклічна p-група. Якщо Y_r/Y – квазіциклічна p-група, то $[Y_r:Y] = \infty$. Нехай $|Y| < \infty$. Тоді Y_r містить квазіциклічну підгрупу B_r, $B_r \leqslant Z(Y_r)$ і, очевидно, $Y_r = Y \times B_r$. Якщо ж $|Y| = \infty$, то Y – квазіциклічна група, $Y \leqslant Z(Y_r)$ і Y_r – розширення центральної квазіциклічної підгрупи Y з допомогою квазіциклічної підгрупи Y_r/Y. Відомо [18], що $Y_r' = 1$ і тоді $Y_r = Y \times B_r$.

Нехай тепер Y_r/Y – циклічна група. Тоді $Y_r = Y\langle x_r\rangle$. Якщо $Y \cap \langle x_r\rangle = 1$, то $B_r = \langle x_r\rangle$, $Y_r = Y \lambda \langle x_r\rangle$, що й треба було довести. Нехай $Y \cap \langle x_r\rangle \neq 1$. Тоді $c \in \langle x_r\rangle$. Коли Y – квазіциклічна група, то з умови $|G'| = p$ випливає, що $Y_r' = 1$ і $Y_r = Y \lambda B_r$.

Нехай $|Y| < \infty$. За вибором $|Y| > |x_r|$ і тому за будовою метациклічних p-груп (див., наприклад, теорему 1.2.1 з [37]) маємо $Y_r = Y \lambda B_r$.

Отже, завжди $Y_r = Y \lambda B_r$, B_r – неодинична локально циклічна група. Зрозуміло, що $[B_r, B_t] \leqslant \langle c\rangle$. Якщо $[B_r, B_t] \neq 1$, то $[B_r,$

$B_\ell] = \langle c\rangle$, $/B_2/ < \infty$, $/B_\ell/ < \infty$ і $(\langle c\rangle \times B_1) \lambda B_\ell$ – підгрупа Міллера – Морено шуканого типу.

Нехай $[B_1, B_\ell] = 1$. Тоді $G = Y \lambda B$, де $B = B_1 \times \ldots \times B_2 \times \ldots \times B_n$. Ясно, що $B \not\trianglelefteq G$. Тоді, очевидно, B – абелева група одного з типів 1, 2, 5 теореми 1.2.2 і $/G/ < \infty$. Зрозуміло, що G не є групою Міллера – Морено і тому G не породжується двома елементами. Звідси B – нециклічна група, B не є групою типу 1 теореми 1.2.2 і $w(B)$ – елементарна абелева група порядку p^2. Якщо B – група типу 5 теореми 1.2.2, то $B = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, $/y/ = p$, B містить підгрупу $\langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$. Звідси $[Y, \langle y\rangle] = 1$ і $G = (Y \lambda \langle x\rangle) \times \langle y\rangle$, що суперечить розглядуваному випадку. Якщо тепер B – група типу 2 теореми 1.2.2, то $B = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, $/x/ = /y/ = p$. Нехай $S = C_B(Y)$. Покажемо, що $S \neq 1$. Якщо $x \in S$, чи $y \in S$, то $S \neq 1$. Нехай це не так, тобто $x \notin S$ і $y \notin S$. Тоді $Y = \langle d\rangle$, $/d/ = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $[d,x] = c^i$, $[d,y] = c^j$, $\langle c^i\rangle = \langle c^j\rangle = \langle c\rangle = \langle d^{p^{\Delta-i}}\rangle$. Зрозуміло, що і та j не кратні p, і, значить, існує таке n, що $ni + j \equiv 0 \pmod p$. Покладемо $z = x^n y$. Тоді $/z/ = p$, $\langle z\rangle \cap \langle x\rangle = 1$, $[d,z] = 1$ і $G = (Y \lambda \langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, що неможливо. Отже, $S \neq 1$. Тоді $z \in S$, $/z/ = p$, $B = F \times \langle z\rangle$ і $G = (Y \lambda F) \times \langle z\rangle$, що знову неможливо. Всі випадки розглянули. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = CF$ – група одного з типів 1 – 7 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – недедекіндова група з комутантом порядку p. Покажемо, що G – УЩН[ ]-група, тобто для будь-якого $/[A;B]/ > 2$ $[A;B] \ni N \lhd G$. Дійсно, для груп G типу 1 чи 2 це встановлено в лемі 2.1.2. Тому в подальшому будемо вважати, що G – група одного з типів 3 – 7 теореми. Зауважимо, що якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то, очевидно, G – УЩН[ ]-група. Звідси $A \not\trianglelefteq G$, $B \not\trianglelefteq G$ і $G' \cap B = 1$. Ясно, що для будь-якого $g \in G$ $g^p \in Z(G)$. Отже, при циклічності B $A \leqslant \Phi(B) \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \not\trianglelefteq G$. Таким чином, B – нециклічна абелева група і $/B/$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел.

Нехай G – група типу 3 теореми. В силу нециклічності B нециклічною буде фактор-група $G/\langle u\rangle$ і підгрупа $\langle v\rangle \times \langle a\rangle$. Звідси $/a/ = p$, G – p-група, $/v/ > p$, і, значить, $w(G) = w(\langle u\rangle) \times w(\langle v\rangle) \times \langle a\rangle \leqslant Z(G)$. Оскільки $G/\langle u\rangle$ – абелева p-група типу (p^γ, p), $\gamma > 1$, то B – теж абелева p-група типу (p^α, p), $\alpha > 1$, тобто $B = \langle z\rangle \times \langle f\rangle$, $/z/ = p^\alpha$, $/f/ = p$ і B – група типу 5 теореми 1.1.1, для якої $A \leqslant M = \langle z^p\rangle \times \langle f\rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \not\trianglelefteq G$ і тому дос-

татність для груп типу 3 теореми доведена.

Нехай G – група типу 4 теореми. Якщо B – локально циклічна група, то за попереднім $/B/ = \infty$ і C – квазіциклічна 2-група. Звідси $C \leqslant B$ і $C \leqslant Z(G)$. Легко бачити, що $w(G) = w(F) \times w(C) \leqslant Z(G)$ і $[B:C] \in \{1, r\}$. Оскільки $B \not\lhd G$, то $B \not\leqslant Z(G)$. Тоді $B > C$ і $B = C \times \langle f \rangle$, де $/f/ = r$, $f \in w(G) \leqslant Z(G)$. Звідси $B \leqslant Z(G)$, що неможливо. Нехай тепер B – не локально циклічна група. Тоді B ізоморфна деякій підгрупі абелевої групи типу $(2^{\alpha},2)$. Звідси $B = \langle z \rangle \times \langle f \rangle$, $/z/ = 2^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $/f/ = 2$. Тоді, як і для груп типу 3 теореми, маємо $A \leqslant \langle z^2 \rangle \times \langle f \rangle \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \not\lhd G$. Достатність для груп типу 4 доведена.

Нехай G – група одного з типів 5 – 7 теореми. Покладемо $U = C$ в групах одного з типів 5, 7 і $U = \langle u \rangle$ – в групі G типу 6 теореми. Тоді $U \lhd G$, U – локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку 8 і тому $G' = \langle c \rangle \leqslant U$ і $U \cap B = 1$. Звідси $[G:U]$ ділиться на $/B/$ і $[G:U]$ є добутком не більше ніж чотирьох простих чисел.

Нехай спочатку $G = U \lambda B$. Припустимо, що при цій умові G містить підгрупу $S = (U \times \langle x \rangle) \lambda \langle y \rangle$, $/x/ = /y/ = p$, $[U,\langle y \rangle] = 1$, $[x,y] = c$. Зрозуміло, що S – група типу 4 теореми 1.4.1, у якої за лемою 1.4.1 нормальні всі нециклічні підгрупи і S/U – елементарна абелева група порядку p^2. Відомо [34,35], що $/w(Z(S))/ = p$. Ясно, що тепер $S = U \lambda D$, де $D = S \cap B$, D – елементарна абелева група порядку p^2. Звідси $D \lhd G$, $S = U \times D$ і $D \leqslant Z(S)$, що суперечить умові $/w(Z(S))/ = p$. Отже, G не містить підгрупи S вищезначеного типу і тому G – група типу 5, у якої $/u/ = p^2$, $/v/ \in \{p, p^2\}$ і $/a/ = 1$. Оскільки $G' \neq 1$ і $B' = 1$, то $U \not\leqslant Z(G)$. Але тоді U – група кватерніонів порядку 8 і $/v/ = 2$. Ясно, що $G > V = U \times \langle v \rangle$, $w(V) = w(U) \times \langle v \rangle \leqslant Z(V)$ і $V = U \times \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = V \cap B$, $/z/ = 2$, $z \in w(V) \leqslant Z(V)$, $G = VB$ і, значить, $z \in Z(G)$. Звідси $v \in w(V) = w(U) \times \langle v \rangle = w(U) \times \langle z \rangle \leqslant Z(G)$ і тоді $v \in Z(G)$, що неможливо. Отже, для розглядуваних типів груп $U \lambda B < G$. Звідси $[G:U]$ – добуток чотирьох простих чисел, $/B/$ – добуток трьох простих чисел, $/A/$ – просте число і, значить, G не є групою типу 6 теореми. Отже, для груп типу 6 теореми достатність доведена.

Нехай G – група типу 5 теореми. Тоді $/u/ = p^2$, $/a/ = 1$, $/v/ = p^2$, $/B/ = p^3$, $/A/ = p$. При цих умовах $w(G) = w(U) \times \langle u^p \rangle \times \langle v^p \rangle \leqslant Z(G)$. Але тоді $A \leqslant Z(G)$, що суперечить умові $A \not\lhd G$. Таким

чином, достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G - група типу 7 теореми. Покладемо $x = u$, $y = v$. Тоді G містить підгрупу $S = (U \times \langle x\rangle) \lambda \langle y\rangle$, яка має ті ж властивості, що і раніше. Як і вище, покладемо $D = S \cap B$. Оскільки $[S:U] = p^2$, $[G:U] = p^4$, $U \cap B = 1$, $|B| = p^3$, то $|D| = p$ і $D = \langle d\rangle$. Із будови підгрупи S [34,35] та умов $D \cap \langle c\rangle = 1$ і $w(Z(S)) = \langle c\rangle$ маємо, що $d \notin Z(S)$.

Нехай $Z = C_G(\langle d\rangle)$. Оскільки $|G'| = p$, $d \notin Z(G)$, то $Z \lhd G$, $[G:Z] = p$ і Z містить підгрупу $\langle B, b, a\rangle$. Припустимо, що $U \leqslant Z$. Тоді $[Z:U] = p^3$ і тому $Z = U \lambda B$, Z містить підгрупу $S_1 = (U \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, яка має всі ті ж властивості, що і раніше підгрупа S. Отже, $S_1 = U \times D_1$, $D_1 = S_1 \cap B$, D_1 - елементарна абелева підгрупа порядку p^2 з $Z(S_1)$, що неможливо [34,35]. Таким чином, $U \not\leqslant Z$. Але тоді $[U,\langle d\rangle] = 1$ і $U \not\leqslant Z(G)$. Остання умова можлива, коли U - група кватерніонів порядку 8. Тому $|G| = 2^8$. Покладемо $H = S \cap Z$. Оскільки $[G:Z] = 2$ і Z не містить U, то $[S:H] = 2 = [U:(U \cap H)]$. Ясно, що $U \cap H = \langle z\rangle$, $|z| = 4$, $U = \langle f, z\rangle$, $|f| = 4$, $[d,z] = 1$, $[f,d] = f^2 = z^2$. Оскільки $d \in H \lhd S$, то $d = gu^i v^j$, де $g \in U$. З умови $[f,u] = [f,v] = 1$ випливає, що $[f,d] \neq 1$. Легко бачити, що $|g| > 2$. Оскільки $[d,f] = [gu^i v^j, f] = [g,f] \neq 1$ і $[g,d] = 1$, то без порушення загальності можна вважати, що $g = z$. З умови $d^2 = (zu^i v^j)^2 = z^2(u^i v^j)^2 = 1$ випливає, що $(u^i v^j)^2 \neq 1$. Звідси і та j не кратні 2. Тому можна вважати, що $i = j = 1$. Покладемо $h = fu$. Тоді $[d,h] = [zu^i v^j, fu] = [z,f][v,u] = c^2 = 1$. Звідси $h \in H$. Очевидно, що $|h| = 4$, $h^2 = z^2$, $[z,h] = z^2$ і H містить $K = \langle h, z\rangle$ - групу кватерніонів порядку 8. Знову $[Z:K] = 8$, $G' = K'$ і тому $Z = K \lambda B$. Отже, Z містить $S_1 = (K \times \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, яка має ті ж властивості, що і раніше введена підгрупа S_1, для якої ми одержали суперечність. Достатність для груп типу 7 доведена. Всі можливі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Лема 2.1.4. Метагамільтонові УШН[ ]-групи G порядку p^n з абеловим нецентральним комутантом типу (p,p) є групами одного з типів:

1) $|G| = p^4$, p - непарне просте число, G' - нецентральна підгрупа з G типу (p,p);

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ - непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді $|G| = p^n$, $n > 3$. В силу твердження 2.1.4 з [37] p – непарне просте число. При $n = 4$ G – група типу 1 леми.

Нехай $n > 4$. Припустимо, що G не містить метациклічних підгруп Міллера – Морено порядку більше p^3. Тоді в силу $n > 4$ і твердження 2.1.8 з [37] $G = ((\langle a\rangle \times \langle\tau\rangle) \lambda \langle z\rangle)\langle b\rangle$, $|a| = p^m$, $m > 1$, $|\tau| = |z| = p$, $[a,z] = \tau \in Z(G)$, $[a,b] = z$, $b^p = \tau^{\varepsilon}$, $[b,z] = \tau^{\Delta}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$; при $\varepsilon = 1$ $\Delta = 0$. Покладемо $M = (\langle a\rangle \times \langle\tau\rangle)\lambda \langle z\rangle$. Тоді $M \lhd G$, $M^p = \langle a^p\rangle \lhd G$. Звідси $a^p \in Z(G)$. Нехай $\varepsilon = 0$. Тоді $G = ((\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle z\rangle) \lambda \langle a\rangle$. В силу теореми 1.2.2 $\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a^p\rangle \lhd G$. Звідси $[a,b] \in \langle z\rangle \cap (\langle\tau\rangle \times \langle b\rangle \times \langle a^p\rangle) = 1$, що неможливо. Отже, $\varepsilon = 1$. Тоді $G = (\langle b\rangle \times \langle z\rangle) \lambda \langle a\rangle$, де $|b| = p^2$. Припустимо, що $|a| > p^2$. Тоді за теоремою 1.2.2 $\langle b\rangle \times \langle a^p\rangle \lhd G$ і знову $[a,b] \in \langle z\rangle \cap (\langle b\rangle \times \langle a^p\rangle) = 1$, що неможливо. Отже, $|a| \in \{p, p^2\}$. Оскільки $n > 4$, то $|a| = p^2$. Покладемо $x = a$, $a = b$, $b = z$ і одержимо, що $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$ і, значить, G – група типу 2 доводжуваної леми.

Нехай тепер G містить метациклічну підгрупу Міллера – Морено A порядку більше p^3. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [37] $G = A\lambda \lambda\langle x\rangle = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|x| = |b| = p$ – непарне просте число, $|a| = p^{\alpha}$, $\alpha > 2$, $[a,x] = b$. Очевидно, що $A \lhd G$ і $\langle a^p\rangle \lhd G$. Якщо $\langle a^p\rangle \lambda \langle x\rangle \lhd G$, то $w(\langle a^p\rangle \lambda \langle x\rangle) = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Якщо $\langle a^p\rangle \lambda \lambda \langle x\rangle \not\lhd G$, то за теоремою 1.2.2 $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Отже, завжди маємо, що $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle x\rangle \lhd G$. Звідси $[a,x] \notin \langle b\rangle$, що неможливо. Отже, розглядуваний випадок неможливий. Лема доведена.

Лема 2.1.5. *Метагамільтонові УНН-групи G порядку p^n з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p,p) є групами типу $G = \langle a\rangle M$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ – непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $[a,x] = a^{\varepsilon} b^{ip}$, $a^p = c^{i+\varepsilon} b^{tp}$, $\langle c\rangle \times \langle b^p\rangle = Z(G)$, $0 < \varepsilon < p$, $0 \leqslant i < p$, всі метациклічні підгрупи з G абелеві і всі елементи порядку p з G належать G'.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [37] $G = G'\langle x\rangle\langle y\rangle$, $|x| = |y| = p^2$, $G' = \langle t\rangle \times$

$x \langle \mathcal{T} \rangle \times \langle \mathcal{Z} \rangle$, $/\mathcal{H}/ = /\mathcal{T}/ = /\mathcal{Z}/ = p$ – непарне просте число, $\mathcal{H} \in Z(G)$, $[x,y] = \mathcal{Z}$, $[y,\mathcal{Z}] = \mathcal{H}$, $[x,\mathcal{Z}] = \mathcal{T}$, $x^p = \mathcal{H}^\beta \mathcal{T}^\alpha$, $y^p = \mathcal{H}^\beta \mathcal{T}$, $\mathcal{T} \in Z(G)$. Зрозуміло, що $\langle \mathcal{H} \rangle \cap \langle y \rangle = 1 = (\langle \mathcal{H} \rangle \times \langle y^p \rangle) \cap \langle \mathcal{Z} \rangle$. Покладемо $b = y$, $x = \mathcal{Z}$, $c = \mathcal{H}$, $a = x$. Тоді G містить нормальну підгрупу $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$. Звідси $G = \langle a \rangle M$, $[a,b] = x$, $[b, x] = c$, $[a,x] = \mathcal{T} = c^\varepsilon b^p$, $\varepsilon = -\beta$, $a^p = c^{\alpha+\varepsilon t} b^{tp}$, $t = \alpha$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $0 \leqslant t < p$. Відомо (див. теорему 2.2.2 з [37]), що всяка неабелева підгрупа з G містить G'. Оскільки G' – неметациклічна підгрупа, то G' не може бути підгрупою метациклічної групи. Звідси в G не існує неабелевих метациклічних підгруп. Зрозуміло, що $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle \times \langle \mathcal{T} \rangle \leqslant Z(G)$. Покажемо, що всі елементи порядку p з G належать G'. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G \setminus G'$ містить d, $/d/ = p$ і в G існує підгрупа $G^1 \lambda \langle d \rangle$ порядку p^4. Зрозуміло, що $[x, d] \in Z(G) = \langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$. Припустимо, що $[x,d] \neq 1$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $(\langle [x,d] \rangle \times \langle x \rangle) \lambda \langle d \rangle$ порядку p^3, яка, очевидно, не містить G'. Суперечність з теоремою 2.2.2 з [37]. Отже, $[x, d] = 1$ і $N = G^1 \lambda \langle d \rangle$ – абелева максимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що $G = M \lambda \langle d \rangle$. За теоремою 1.2.2 $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle d \rangle \lhd G$. Звідси $[\langle d \rangle, M] \leqslant Z(G) = \langle c \rangle \times \langle b^p \rangle$ і $G/Z(G)$ – абелева група, тому $Z(G) \geqslant G'$, що неможливо. Отже, всі елементи порядку p з G належать G'. Лема доведена.

Лема 2.1.6. *Не існують метагамільтонових УШН( )-груп G порядку p^m з абелевим некоммутативним комутантом типу (p^Δ, p), $\Delta > 1$.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Припустимо, що група G існує. Тоді в силу твердження 2.1.8 з [37] $G = M \lambda \langle \mathcal{H} \rangle$, $M = \langle a, b \rangle$ – метациклічна група, $/[a,b]/ > p$, $[a,\mathcal{H}] = \mathcal{Z}$, $[b,\mathcal{Z}] = [b,\mathcal{H}] = [\mathcal{Z},\mathcal{H}] = 1$, $[a,\mathcal{Z}] = \mathcal{T} \in Z(G)$, $/\mathcal{H}/ = /\mathcal{T}/ = /\mathcal{Z}/ = p > 2$, $\langle a \rangle \cap \langle \mathcal{Z} \rangle = 1 = \langle \mathcal{T} \rangle \cap \langle \mathcal{Z} \rangle$. Тоді $w(M) = N \lhd G$ і тому в G існує підгрупа $A = \langle a \rangle N$, $A' \neq 1$. Звідси $A > N$ і $/A/ > p^2$. Зрозуміло, що $[A : \langle a \rangle] = p$ і в силу твердження 2.1.8 з [37] $A = \langle a \rangle \lambda \langle \mathcal{Z} \rangle$, $/a/ = p^\alpha$, $\alpha > 1$, $[a,\mathcal{Z}] = \mathcal{T} = a^{p^{\alpha-1}\varepsilon} \in Z(G)$, A – підгрупа Міллера – Морено. В силу теореми 2.2.2 з [37] $A > G'$. Звідси $A \lhd G$, $\Phi(A) = \langle a^p \rangle \lhd G$. В G існує підгрупа $V = \langle a^p \rangle \times \langle \mathcal{H} \rangle$. Ясно, що $[a,\mathcal{H}] \notin \langle \mathcal{T} \rangle \times \langle \mathcal{H} \rangle$ і, значить, $\langle \mathcal{T} \rangle \times \langle \mathcal{H} \rangle \not\lhd G$. Тоді $V \not\lhd G$ і за теоремою 1.2.2 V – група типу 2 чи 5 цієї теореми. В підгрупі V типу 5 теореми 1.2.2 $w(V) = \langle \mathcal{H} \rangle \times \langle \mathcal{T} \rangle \lhd G$. Супе-

речність. Отже, V - може бути лише підгрупою типу 2 теореми 1.2.2. Але тоді $/V/ = p^2$, $V = \langle a^p \rangle \times \langle r \rangle$ і тому $/A/ = p^3$, $A' \neq 1$, що не так. Всі випадки розглянуто. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.1.2. Локально ступінчасті неодекіндові метагамільтонові УШН[ ]-групи G вичерпуються групами типів:

1) G - неодекіндова УШН[ ]-група з комутантом порядку p, p - просте число (теорема 2.1.1);

2) G - неодекіндова метациклічна метагамільтонова УШН[ ]-група з комутантом непростого порядку (наслідок 1.3.6);

3) $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P - елементарна абелева група порядку p^2, $/x/ = q^\beta$, $\beta \in \{1,2\}$, p і q - різні прості числа, $P \lambda \langle x \rangle$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $/z/ \in \{1,r\}$, r - просте число; при $/z/ = r$ $\beta = 1$;

4) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /x/ = 9$, $/b/ = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$, $/z/ \in \{1,r\}$, $3 \neq r$ - просте число;

5) G - група порядку p^4 з абелевим нецентральним комутантом типу (p,p), p - непарне просте число;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /x/ = p^2$, $/b/ = p$ - непарне просте число, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ - неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $t = s = 1$;

8) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$ - непарне просте число, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = 1$;

9) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/x/ = p$, $[a,b] = a^p$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = a^{sp} b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ - неквадратичний лишок за модулем p; при $p = 2$ $s = 1$;

10) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = /x/ = 4$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2 b^2$;

11) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $/a/ = /b/ = 4$, $/a/ = /x/ = [a,y]$, $a^2 b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$, $/z/ \in \{1, r\}$, r - просте число;

12) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = p^2$, $/c/ = /x/ = p$ - непарне просте число, $[a,b] = x$, $[b,x] = c$, $\langle c \rangle \times \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $[a,x] = c^\varepsilon b^p$, $0 \leqslant \varepsilon < p$, $a^p = c^{\varepsilon + \varepsilon t} b^{tp}$, $0 \leqslant t < p$, всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

13) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a,b] = x^2$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,x] = b^2x^2$;

14) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p^2$, p – непарне просте число, $[b,x] = a^{sp} b^{tp} x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leqslant t < p$, $0 \leqslant l < p$, $[a,b] = x^p$, $[a,x] = b^{fp} x^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leqslant k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G', всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

15) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – група Шмідта, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3,9\}$;

16) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$;

17) $G = P \lambda \langle x \rangle$, $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{2,3\}$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{2,3\}$, $\alpha + \beta < 6$, $P \lambda \langle x^q \rangle$ – нільпотентна група Міллера – Морено, α – показник p за модулем q;

18) $G = P \lambda \langle x \rangle$ – група Фробеніуса, P – елементарна абелева група порядку p^{α}, $\alpha \in \{2,3\}$, $|x| = qr$, p, q і r – попарно різні прості числа, α – показник p за модулем q і дорівнює показнику p за модулем r.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. В силу наслідку 1.2.1 та теореми 6.4 з [1] G' – група порядку p^m, $m > 0$. Якщо $m = 1$, то G задовольняє умову теореми 2.1.1 і тому G – група типу 1 теореми. Нехай $m > 1$. За теоремою 1.2.3 G – чернiковська дисперсивна недедекіндова метагамільтонова група.

Нехай спочатку $G = X \times Z$, $X \neq 1$, $Z \neq 1$. Тоді $X' \neq 1$ або $Z' \neq 1$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $X' \neq 1$. В силу теореми 2.2.2 з [37] $Z' = 1$ і $G' = X'$, $|X'| > p$ і тому X – недедекіндова група. За лемою 2.1.1 $|Z| = r$ і X – група одного з типів 1 – 8 теореми 1.4.1 при умові $|X'| > p$. При цій умові X може бути лише групою одного з типів 2, 5 – 6 теореми 1.4.1.

Нехай $X = \langle a \rangle \langle b \rangle$ – група типу 2 теореми 1.4.1. Тоді $|a| = 8$, $|b| \in \{4,8\}$, $b^{-1} ab = a^{-1}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. Припустимо, що $r \neq 2$. Тоді G – метациклічна група і тому G – група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай $r = 2$. Тоді $Z = \langle z \rangle$, $|z| = 2$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle b \rangle \langle za^2 \rangle$, яка не містить $G' = \langle a^2 \rangle$, що суперечить теоремі 2.2.2 з [37]. Випадок, коли X – група типу 2 теореми 1.4.1 розглянуто.

Нехай X – група типу 8 теореми 1.4.1. Тоді $X = P \lambda \langle x \rangle$ – не-

нільпотентна група Міллера - Морено, $/P/ = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 1$, p і q - різні прості числа, $X' = P$. При $\alpha = 1$ G - група типу 2. Тому в подальшому $\alpha = 2$. За теоремою 1.2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох неодиничних прямих множників. Звідси $/P \times \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle /$ ділиться на добуток не більше ніж трьох простих чисел і тому $\beta = 1$, тобто G - група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай X - група типу 5 теореми 1.4.1. При $r \neq 3$ G - група типу 5 теореми. Нехай $r = 3$. Тоді, очевидно, $G' = X' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$ і G містить неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \lambda \langle bz \rangle$, яка не містить G', що суперечить теоремі 2.2.2 з [37].

Якщо X - група типу 6 чи 7 теореми 1.4.1, то G відповідно група типу 10 чи 11 розглядуваної теореми.

Отже, в подальшому будемо вважати, що G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп. Розглянемо два можливі випадки: 1) G - нільпотентна група; 2) G - ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку за вибором G та теоремою 1.2.3 G - черніковська p-група. Звідси в силу леми 2.3.1 з [37] при $m > 1$ $/G/ < \infty$. Тому $/G/ = p^n$, $1 < m < n > 3$.

Нехай G' - циклічна група. При $G' \not\leq Z(G)$ в силу твердження 2.1.8 з [37] G - метациклічна група і тому G - група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай $G' \leqslant Z(G)$. За лемою 2.3.3 з [37] $G = A \lambda B$, $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - метациклічна група, $G' = A' \leqslant \langle a \rangle$ і G містить підгрупу $X = w(G') \times \langle d \rangle \times B$, де d - породжуючий елемент з A. При $B \neq 1$ за теоремою 1.2.2 $X \lhd G$. Тому $[X,A] \leqslant G' \cap X \leqslant w(G')$. Зрозуміло, що $[A,\langle d \rangle] = A' = G' \leqslant w(G)$. Звідси $G' = w(G')$, $/G'/ = p$, що неможливо. Отже, $B = 1$ і тому G - метациклічна група, тобто G - група типу 2 розглядуваної теореми.

Нехай далі G' - нециклічна група. В силу твердження 2.1.7 з [37] G' - абелева група типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 0$ або група типу (p,p,p). При $n = 4$ G' - група типу (p,p) і G породжується двома елементами. Звідси $G' \not\leq Z(G)$. В силу твердження 2.1.4 з [37] $p > 2$ і G - група типу 5 розглядуваної теореми. Тому в подальшому $n > 4$. Припустимо, що G' - група типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 1$. Тоді за лемою 2.1.6 $G' \leqslant Z(G)$. В силу теореми 2.4.1 з [37] G містить підгрупи $A \lambda \langle x \rangle$ і $X = w(A') \times \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, де $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - метациклічна група, $A' \leqslant \langle a \rangle$, $/A'/ = p$, d - породжуючий елемент з A, $[A,\langle d \rangle] = w(A')$. Тому $/A'/ = p$, що суперечить умові $\Delta > 1$. Отже, G' не може бути гру-

пою типу (p,p^{Δ}), $\Delta > 1$ і, значить, можливі два випадки: 1.1) G'- група типу (p,p); 1.2) G'- група типу (p,p,p).

Випадок 1.1. У цьому випадку при $G' \not\leq Z(G)$ G задовольняє умову леми 2.1.4 і тому G - група типу 2 згаданої леми. Звідси G - група типу 6 розглядуваної теореми.

Нехай $G' \leq Z(G)$. Якщо G не містить підгрупи типу (p,p,p), то в силу леми 2.5.2 з [37] G - група одного з типів 10 чи 11 розглядуваної теореми. Нехай далі G містить підгрупи типу (p,p,p). Тоді за теоремою 2.5.2 з [37] $G = F \times C$, $F = A \lambda \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $/a/ = p^{\alpha}$, $/b/ = p^{\beta}$, $/x/ = p^{\gamma}$, $\alpha \geq \beta > 1$, $\gamma > 0$, $[a,x] = b^{p^{\beta-1}}$, $Z(F) = \langle a^{p}\rangle \times \langle b^{p}\rangle \times \langle x^{p}\rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}}\rangle \leq Z(G)$, $\alpha \neq \beta$. Зрозуміло, що G містить підгрупи $X_1 = \langle b^{p}\rangle \times \langle x\rangle \times C$ і $X_2 = \langle a^{p}\rangle \times \langle x\rangle \times C$. Покажемо, що $X_2 \not\lhd G$. Нехай це не так. Тоді $[x,a] \in X_2 \cap \langle b\rangle = 1$, що неможливо. Отже, $X_2 \not\lhd G$. За теоремою 1.2.2 $C = 1$, $X_2 = \langle x\rangle \times \langle a^{p}\rangle$ і X_2 - може бути лише групою типу 5 теореми 1.2.2.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі X_2 типу 5 теореми 1.2.2 $/x/ = p$, $w(X_2) = \langle x\rangle \times w(\langle a\rangle) \lhd G$. Але тоді $X_2 \lhd G$, що не так. Отже, $\alpha = \beta = 2$.

Припустимо тепер, що $\gamma > \alpha$. Тоді за теоремою 1.2.2 G містить нормальну підгрупу $\langle x^{p}\rangle \times \langle a\rangle$ і тому в G існує нормальна підгрупа $\langle x\rangle(\langle x^{p}\rangle \times \langle a\rangle) = \langle x\rangle\langle a\rangle$. Звідси $[a,x] \in w(\langle x\rangle\langle a\rangle) = w(\langle x\rangle) \times w(\langle a\rangle)$ не містить $w(\langle b\rangle)$, що суперечить умові $[\langle x\rangle,\langle a\rangle] = w(\langle b\rangle)$. Отже, $\gamma < \alpha$ і тому $/x/ = p$. За теоремою 2.5.2 з [37] G - група одного з типів 7 - 9 розглядуваної теореми. Випадок 1.1 розглянуто повністю.

Випадок 1.2. При нецентральності G' в G група G задовольняє умову леми 2.1.5, за твердженням якої G - група типу 13 розглядуваної теореми.

Нехай $G' \leq Z(G)$. Тоді за теоремою 2.6.2 з [37] $G = F \times C$, де $F = \langle a\rangle M$, $/a/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $M = (\langle c\rangle \times \langle b\rangle) \lambda \langle x\rangle$, $/b/ = p^{\beta}$, $/x/ = p^{\gamma}$, $[b,x] = c$, $/c/ = p$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 1$, $G' = \langle c\rangle \times w(\langle b\rangle) \times w(\langle x\rangle) = w(\langle a\rangle) \times w(\langle b\rangle) \times w(\langle x\rangle) \leq Z(G)$, $[\langle a\rangle,F] = [\langle b\rangle,F] = [\langle x\rangle,F] = G' = F'$, $\Phi(F) = \langle a^{p}\rangle \times \langle b^{p}\rangle \times \langle x^{p}\rangle \leq Z(G)$. В групі G існує підгрупа $X_1 = \langle b^{p}\rangle \times \langle x\rangle \times C$, яка, очевидно, не містить G'. Якщо $X_1 \lhd G$, то X_1 містить $[\langle x\rangle,F] = G'$, що неможливо. Тому $X_1 \not\lhd G$ і за теоремою 1.2.2 $C = 1$.

Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді в групі $G = F$ існує підгрупа $X_2 =$

$= \langle a^p \rangle \times \langle x \rangle$, яка за теоремою 1.2.2 нормальна в G і не містить G'. Але, очевидно, $[X_2, F]$ містить $[\langle x \rangle, F] = G'$. Суперечність. Значить, $\alpha = \beta = \gamma = 2$. За теоремою 2.6.2 з [37] G - група одного з типів 13, 14 розглядуваної теореми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку за теоремою 2.2.1 з [37] $G = P \lambda C$, де $G' = P$, $/P/ = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $C = Z\langle x \rangle \not\leq G$, $C_C(P) = Z \leqslant Z(G)$, $Z \cap \Omega\langle x \rangle = \langle x^s \rangle$, $s > 1$, $\Phi(P) \leqslant Z(G)$, $/\Phi(P)/ \leqslant p$, при $0 < k < s$ $\Phi(P)\langle x^k \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм, при $/\Phi(P)/ = p$ P - силовська p-підгрупа з G. Оскільки $G' = P$, то $\alpha = m > 1$. Покладемо $U = \Phi(P) \times C$. Зрозуміло, що $U \not\lhd G$, $U' = 1$ і U - група одного з типів 1, 2, 4, 5 теореми 1.2.2. Оскільки $G = PU$ - скінченна нільпотентна група, то U не може бути p-групою. Зрозуміло, що $\Phi(P) \times Z = M \leqslant Z(G)$, $[U:M] = s$ - добуток не більше ніж двох простих чисел.

Припустимо, що U - група типу 5 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$ - q-група, $q \neq p$, $\Phi(P) = 1$, $M = \langle x^{q^k} \rangle \times \langle z \rangle$ і x індукує на P незвідний автоморфізм, $G = (P \lambda \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $/z/ = q$, що суперечить вибору G (G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп). Отже, U не може бути групою типу 5 теореми 1.2.2.

Нехай U - група типу 4 теореми 1.2.2. Тоді $[U:M] = q$. Без порушення загальності можна вважати, що $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \neq q$ - просте число, $U = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, $z \in Z(G)$, $\langle z \rangle$ - r-група, $r \neq q$. Оскільки за вибором G підгрупа $\langle z \rangle$ не може бути неодиничним прямим множником з G, то $\langle z \rangle \leqslant \Phi(P)$. Але тоді $C = \langle x \rangle$, $G = P \lambda \langle x \rangle$. В силу теореми 2.2.1 з [37] G - група Шмідта, яка, очевидно, задовольняє умову теореми 1.3.1 і може бути лише групою одного з типів 1, 2 цієї теореми. Звідси G - група одного з типів 15, 16 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай U - група типу 2 теореми 1.2.2. Тоді $/U/ = qr$, $q \neq p$, з ділиться на q, r - просте число. Припустимо, що $r = q$. Тоді U - група типу (q,q), $U = C = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, де $\langle z \rangle = Z$, $/z/ = /x/ = q$ і $\langle z \rangle$ виділяється в G прямим множником, що суперечить вибору G. Отже, $q \neq r$. При $r = p$ $U = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$, $z \in Z(G)$, $/z/ = r$, $/x/ = q$. Оскільки підгрупа $\langle z \rangle$ не може бути неодиничним прямим множником групи G, то $\langle z \rangle = \Phi(P)$ і G - група Шмідта (див. теорему 2.2.1 з [37]), яка, як і раніше, може бути групою одного з типів 15, 16 розглядуваної теореми. Нехай тепер $r \neq p$. Тоді $\Phi(P) = 1$, $U = C$,

C - циклічна група порядку qr. За припущенням G не розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп і тому $Z = 1$, $C = \langle x \rangle$, $/x/ = qr$. Звідси G - група типу 18 розглядуваної теореми.

Нехай, нарешті, U - група типу 1 теореми 1.2.2. Тоді $U = \langle x \rangle$, $/x/ = q^{\beta}$, $\beta > 0$, p і q - різні прості числа. Звідси $C = \langle x \rangle$, Z містить x^{q^2}, $\Phi(P) = 1$. Якщо $Z = \langle x^{q} \rangle$, то G - група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, яка при $\alpha = 3$ буде групою типу 16 розглядуваної теореми, а при $\alpha = 2$ $\beta < 3$ і G - група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай $x^{q} \notin Z$. Тоді $Z = \langle x^{q^2} \rangle$ і $P \setminus \langle x^{q} \rangle$ - група Шмідта типу 3 теореми 1.3.1, у якої при $\alpha = 3$ $\beta = 2$ і G - група типу 17 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 18 теореми. Зрозуміло, що G - скінченна, а тому локально ступінчаста недедекіндова група. Залишається показати, що G - метагамільтонова УЩН[ ]-група. Для груп G типу 1 це доведено в теоремі 2.1.1, а для груп G типу 2 це доведено в наслідку 1.3.6.

Нехай G - група одного з типів 3 - 18 теореми і $/[A;B]/ > 2$. Покажемо, що $[A;B] \ni N \lhd G$ і G - метагамільтонова група. Зрозуміло, що при $A \lhd G$ чи $B \lhd G$ покладемо $N = A$ чи $N = B$ і G - УЩН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\lhd G$, $B \not\lhd G$ і, значить, $A \neq 1$, $B \not\leq G'$. Звідси $/B/$ ділиться на добуток трьох простих чисел. Очевидно, що група G типу 5 є метагамільтоновою і вона не має ненормальних підгруп, порядок яких ділиться на добуток трьох простих чисел. Звідси достатність для груп G типу 5 доведена. За теоремою 2.2.1 з [37] нільпотентні групи кожного з розглядуваних типів груп є метагамільтоновими. Тому залишається показати, що нільпотентні групи теореми є УЩН[ ]-групами.

Очевидно, що G' - p-група. Покладемо $P_1 = G' \cap B$. Тоді $P_1 \lhd B$ і $P_1 < G'$.

Нехай G - група типу 4 теореми. Тоді $G = P \times \langle z \rangle$, $P = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$ - силовська 3-підгрупа з G, $/G/ = /P/\cdot/z/ = 3^{\beta}\cdot/z/$, G - нільпотентна група, $G' = P' = \langle b \rangle \times \langle a^3 \rangle$, P - мінімальна неметациклічна група типу 2 теореми 1.3.3. Покажемо, що G - метагамільтонова група. Дійсно, будь-яка неабелева підгрупа X з G містить неабелеву підгрупу P^* з P. Але тоді $/P^*/ \geqslant 3^3$. Звідси $G' = P' \leqslant P^* \leqslant X$, тому $X \lhd G$ і G - метагамільтонова група. З вибору B маємо, що $B' = 1$. Ясно, що $B = P_2 \times \langle y \rangle$, де $P_2 = B \cap P$ - силов-

ська 3-підгрупа з B, <y> - силовська r-підгрупа з B. Зрозуміло, що $/P_2/ < 3^3$, $/y/ \leqslant r$. За вибором B $/B/ = 3^2r$ і $/A/$ - просте число. Легко бачити, що $/y/ = /z/ = r$, $y \in Z(G)$. Звідси $/A/ = 3$ і тому $A \leqslant P_2$. Ясно, що $/P_1/ \leqslant 3$ і $P_1 \leqslant P_2$. За твердженням 1.3.1 всі елементи порядку 3 з P_2 належать $P^1 \cap P_2 = P_1$. Звідси P_2 має єдину циклічну підгрупу $w(P_2) = P_1$. За теоремою 2.5.1 з [16] P_2 - циклічна група порядку 9. Знову за твердженням 1.3.1 $A \leqslant w(P_2) \leqslant Z(P) \cap Z(G)$ і, значить, $A \lhd G$, що неможливо. Отже, група G типу 4 є метагамільтоновою УШН[ ]-групою.

Нехай G - група типу 3 теореми. Тоді G - нільпотентна і за попереднім метагамільтонова група. Покажемо, що G - УШН[ ]-група. Оскільки /B/ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, то /G/ - добуток чотирьох простих чисел, а /B/ - добуток трьох простих чисел. Оскільки $P_1 < P$, $P \lhd G$, P - силовська p-підгрупа з G, то P_1 - нормальна силовська p-підгрупа з B. За відомим результатом [16] $B = P_1 \lambda B_1$, де B_1 - холлівське доповнення P_1 в B. Покладемо $U = PB$. Ясно, що [G:P] - добуток двох простих чисел. Звідси $[B:P_1] = [G:P]$, а тому $/P_1/ = p$. Звідси /U/ - ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Отже, U = G. Але тоді $P_1 \lhd G$, що суперечить мінімальності P в підгрупі Міллера - Морено $P \lambda \langle x \rangle$. Таким чином, група G типу 3 теореми є метагамільтоновою УШН[ ]-групою.

Нехай G - група одного з типів 15, 16 теореми. Тоді G - група Шмідта одного з типів 1, 2 теореми 1.3.1 відповідно. За попереднім і за твердженням указаної теореми достатність для груп G цих типів доведена.

Нехай G - група одного з типів 17, 18 теореми. За попереднім $G = P \lambda \langle x \rangle$ - нільпотентна, а тому метагамільтонова група, $/P/ = p^{\alpha}$, $/\langle x \rangle/ \in \{q, r\}$, $\alpha \in \{2, 3\}$, α - показник p за модулем q, α - показник p за модулем r. Звідси в силу відомих результатів (див., наприклад, [25]) $P \lambda \langle x^{q} \rangle$ та $P \lambda \langle x^{r} \rangle$ - нільпотентні групи Міллера - Морено. Ясно, що [G:P] ділиться на добуток не більше ніж трьох простих чисел.

Нехай $P_1 = 1$. Тоді G - група типу 17, $/B/ = q^{\beta}$, $\beta = 3$, $/A/ = q$. Зрозуміло, що B - силовська q-підгрупа з G і $A = w(B)$. Оскільки $w(\langle x \rangle) \leqslant Z(G)$, то $A = w(B) = w(\langle x \rangle) \leqslant Z(G)$, що суперечить вибору A.

Нехай далі $P_1 \neq 1$. Тоді $B = P_1 \lambda X_1$, де P_1 - нормальна силовська p-підгрупа з B, X_1 - її холлівське доповнення, $1 < P_1 < P$. B

нільпотентній групі Міллера - Морено з нормальною підгрупою P будь-який її елемент індукує на P тотожний або незвідний автоморфізм. Оскільки X_1 індукує на P звідний автоморфізм, то $X_1 \leqslant C_G(P)$. В розглядуваних типах груп $/X_1/ \in \{1,q\}$ і тому $/P/ = p^2$, $/X_1/ = q$ і G - група типу 17. Очевидно, що $\alpha = 3$. Але в групах G типу 17 при $\alpha = 3$ $\beta = 2$ і тому $X_1 = 1$. Суперечність. Отже, достатність для груп G кожного з типів 17, 18 доведена.

Для завершення доведення достатності потрібно розглянути випадок, коли G - група одного з типів 6 - 14 теореми. Група G кожного із згаданих типів нільпотентна і w(G) - абелева підгрупа, порядок якої є добуток двох чи трьох простих чисел.

Нехай G - група одного з типів 10, 11 теореми. Позначимо через X - довільну неабелеву підгрупу з G. Покажемо, що X містить G'. Зрозуміло, що $G = F \times \langle z \rangle$, $/z/ \in \{1,r\}$, F - група типу 6, 7 теореми 1.4.1 відповідно, у якої за лемою 1.4.1 всі нециклічні підгрупи нормальні. Звідси F - метагамільтонова група і за теоремою 2.2.2 з [37] будь-яка неабелева підгрупа з F містить $F' = G'$. Отже, $F \cap X$ містить G' і тому G - метагамільтонова група. За вибором $B' = 1$.

Нехай B - циклічна група. Тоді $A \leqslant B^p \leqslant Z(G)$, що неможливо. Отже, B - нециклічна група. Нехай $F \cap B = F_1$. Якщо F_1 - нециклічна підгрупа, то за теоремою 1.4.1 $G' = F' = w(F) = Z(F) \leqslant F_1$, що суперечить вибору B. Таким чином, F_1 - циклічна група. Очевидно, що $\exp(F) = 4$ і $[B:F_1] \in \{1,r\}$. За вибором B маємо, що $/B/ = 4r$. Звідси $/F_1/ = 4$ і $[B:F_1] = r$. Оскільки B - нециклічна група, то без порушення загальності можна вважати, що $B = F_1 \times \langle z \rangle$ і $/z/ = 2$. Зрозуміло, що $w(B) = w(F_1) \times \langle z \rangle \leqslant w(G) \leqslant Z(G)$ і B - група типу 5 теореми 1.4.1, за твердженням якої $A \leqslant w(B) \leqslant Z(G)$, що неможливо. Таким чином, група G кожного з типів 10, 11 є УЦН[ ]-групою.

Отже, G - група одного з типів 6 - 9, 12 - 14 теореми. Ясно, що в цьому випадку $G = \langle a,b,x \rangle$ - p-група і w(G) - елементарна абелева група порядку p^3.

В групах G кожного з типів 6 - 9 маємо $/G/ = p^5$ і G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Звідси всяка неабелева підгрупа X з G має порядок більше ніж p^3. Але тоді $X \lhd G$ і G - метагамільтонова група. За вибором $/B/ = p^3$, $B' = 1$. Ясно, що $\exp(G) = p^2$. Оскільки $B \not\lhd G$, то $B \neq w(G)$. Припустимо, що $B \leqslant U =$

$= \langle a,b\rangle$. Тоді $B < U$ і B – група типу 5 теореми 1.1.1 і тому $A \leqslant w(B) = G$, що суперечить вибору B. Отже, $B \not< U$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $x \in B$ і тому $G = UB$. Нехай $F_1 = U \cap B$. Тоді $|F_1| = p^2$. Всі підгрупи порядку p^2 з U, відмінні від G', є циклічними групами. Звідси та умови $B' = 1$ маємо, що $F_1 = \langle u\rangle$, $B = \langle u\rangle \times \langle x\rangle$. Але в групах G кожного з розглядуваних типів $C_U(x) = G'$ – елементарна абелева група порядку p^2. З іншого боку, $C_U(x)$ містить u, $|u| = p^2$. Суперечність. Достатність для груп G кожного з типів 6 – 9 теореми доведена.

Нехай G – група типу 12. Тоді $|G| = p^6$, $G' = w(G)$ – елементарна абелева підгрупа порядку p^3 і G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Звідси G – метагамільтонова група. За вибором $B' = 1$. Як і раніше, можна вважати, що $B = \langle u\rangle \times \langle x\rangle$, $|u| = p^2$, $|x| = p$ – непарне просте число, що неможливо, оскільки $C_G(x) = G'$ і $C_G(x)$ містить $\langle u\rangle$. Отже, достатність для груп G типу 12 доведена.

Нехай G – група одного з типів 13, 14 теореми. Тоді $|G| = p^6$, $G' = Z(G) = w(G)$ – елементарна абелева група порядку p^3, G не містить неабелевих підгруп порядку p^3. Зрозуміло, що $|A| > p$, $\exp(G) = p^2$. Нехай X – будь-яка неабелева підгрупа з G. Тоді $X = \langle u,v\rangle$, $|u| = |v| = p^2$ і за умовою, X – неметациклічна група. Тому $|X| = p^5$ і, значить, $X \lhd G$ і G – метагамільтонова група. Отже, $B' = 1$. Оскільки $B \not\lhd G$, то $|B| = p^4$, $B \not< G'$ і тому B містить u, $|u| = p^2$, $u \in \Phi(G) = G'$, $B = \langle u\rangle \times \langle v\rangle$, $|v| = p^2$. Ясно, що $A \not< G'$. Тоді, без порушення загальності можна вважати, що A містить елемент непростого порядку z, тобто $|z| = p^2$. Очевидно, що $z \notin \Phi(G)$. В групах G розглядуваних типів маємо $C_G(z) = G'\langle z\rangle$ і $|C_G(z)| = p^4$. З іншого боку, $C_G(z)$ містить B і $C_G(z) = B \times \langle c\rangle$, де $|c| = p$, $|C_G(z)| = p^5$, що не так. Отже, достатність для розглядуваних типів груп доведена. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 2.1.1. Метагамільтонові УШН[ ]-групи G порядку 2^n з трьома інволюціями є групами одного з типів:

1) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\langle a\rangle \lhd G$, G – метациклічна група одного з типів 1 – 7 теореми 1.1.4, G не містить підгруп кватерніонів та діедра порядку 8, $\Phi(G') \leqslant Z(G)$;

2) $G = Q \times \langle x\rangle$, $Q = \langle a,b\rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $|x| = 2^\gamma$, $\gamma > 0$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Якщо $G' = 1$, то G - метациклічна 2-група типу 1 наслідку. Нехай $|G'| = 2^m$, $m > 0$. Якщо G - метациклічна група, то G задовольняє умову теореми 1.1.4. За твердженням 2.1.4 з [37] метациклічна група G тоді і тільки тоді метагамільтонова, коли $\Phi(G') \leq Z(G)$. Звідси G - група типу 1 розглядуваного наслідку.

Нехай далі G - неметациклічна група. При $m = 1$ G - метагамільтонова група, що задовольняє умову теореми 2.1.1 і може бути лише неметациклічною 2-групою одного з типів 3 - 7 згаданої теореми.

В неметациклічній групі G типу 3 теореми 2.1.1 більше ніж три інволюції і тому G не є групою типу 3. В групі G типу 4 теореми 2.1.1 $|C| < \infty$, $|a| = 1$. Покладемо $C = \langle x \rangle$ і G - група типу 2 розглядуваного наслідку. В групі G кожного з типів 5 - 7 теореми 2.1.1 більше ніж три інволюції і тому G не може бути групою цих типів.

Нехай $m > 1$. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.2 і G може бути групою одного з типів розглядуваної теореми. Легко бачити, що G може бути лише групою типу 2 теореми 2.1.2, що не так в силу вибору G. Наслідок доведено.

Наслідок 2.1.2. Неабелева метагамільтонова УШН[ ]-група G порядку 2^m, що містить елементарну абелеву підгрупу порядку 8 і не містить підгруп кватерніонів порядку 8, є групою одного з типів:

1) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $|x| = 2$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{2^{\alpha-1}}$;

2) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = 2^\gamma$, $\gamma > 0$, $|a| = 4$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1,2\}$, $[c,b] = 1$, $[a,b] = c^{2^{\gamma-1}}$;

3) $G = (U \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $U = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $|u| = 2^\Delta$, $\Delta > 2$, $|v| = |a| = |b| = 2$, $[u,v] = [a,b] = u^{2^{\Delta-1}}$, $[U,\langle b \rangle] = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = 2$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^2b^2$;

5) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|x| = 2$, $[a,b] = a^2$, $[a,x] = b^2$, $[b,x] = a^{2t}b^{2t}$, $0 \leq t < 2$;

6) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| = 2$, $[a,x] = a^2$, $[b,x] = x^2 = a^2b^2$;

7) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $|z| = 2$,

$a^2 = x^2 = [a,y]$, $a^2b^2 = [a,x] = [b,y]$, $b^2 = y^2 = [b,x]$;

8) $G = \langle a \rangle M$, $/a/ = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $/b/ = /x/ = 4$, $[b,x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a,b] = x^2$, $[a,x] = b^2x^2$;

9) $G = ((\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = /b/ = /c/ = /x/ = 2$, $[a,b] = c$, $[c,b] = 1$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.2 і може бути, очевидно, лише групою одного з типів 1, 7, 9 – 11, 13 згаданої теореми.

Нехай G – група типу 1 теореми 2.1.2. Тоді G задовольняє умову теореми 2.1.1 і може бути лише групою одного з типів 3 – 7 згаданої теореми, $/G/ < \infty$, $r = 2$.

Нехай G – група типу 3 теореми 2.1.1. Тоді $/a/ = 2$. Покладемо $a = z$, $b = v$, $a = u$ і одержимо, що G – група типу 1 наслідку.

Ясно, що G не може бути групою типу 4 теореми 2.1.1. Нехай G – група типу 5 теореми 2.1.1. Зрозуміло, що G не може бути групою кватерніонів. Тоді $C = \langle c \rangle$, $/c/ = 2^\gamma$, $\gamma > 0$, $/u/ \in \{2,4\}$, $/v/ \in \{2,4\}$. Нехай $/a/ \neq 1$. Тоді $/u/ = /v/ = 2$. Покладемо $uv = d$. Тоді $/d/ = 4$, $\langle d^2 \rangle = G'$. Якщо $\gamma > 1$, то покладемо $f = zu$, $z \in C$, $/z/ = 4$. Тоді $/f/ = 4$, $[f,d] = f^2 = d^2$ і $\langle f,d \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, що неможливо. Отже, $\gamma = 1$. Покладемо $x = a$, $b = v$, $a = u$ і одержимо, що G – група типу 9 розглядуваного наслідку. Нехай тепер $a = 1$. Тоді з умови наслідку та леми 1.4.1 випливає, що $/u/ > 2$ чи $/v/ > 2$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $/u/ > 2$. Тоді $/u/ = 4$, $/v/ \in \{2,4\}$. Покладемо $a = u$, $b = v$ і G – група типу 2 наслідку.

Нехай G – група типу 6 теореми 2.1.1. Покажемо, що $\Delta > 2$. Нехай це не так. Тоді $/u/ = 4$. Покладемо $d = ab$, $z = vd$. Звідси $d^2 = u^2 = z^2$, $[u,z] = u^2$ і $\langle u,z \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, що неможливо. Отже, $\Delta > 2$. Покладемо $U = C$ і одержимо, що G – група типу 3 розглядуваного наслідку.

Нехай G – група типу 7 теореми 2.1.1. Покладемо $z = uv$, $f = vab$. Тоді $/z/ = /f/ = 4$, $\langle z^2 \rangle = \langle f^2 \rangle = G' = \langle [z,f] \rangle$ і G міститиме підгрупу кватерніонів $\langle z,f \rangle$ порядку 8, що неможливо. Отже, G не може бути групою типу 7 теореми 2.1.1.

Нехай G – група одного з типів 7, 9 – 11, 13 теореми 2.1.2. Тоді G група одного з типів 4 – 8 розглядуваного наслідку. Наслідок доведено.

Наслідок 2.1.3. Локально ступінчасті неметагамільтонові УШН[ ]-групи G, що розкладаються в прямий добуток своїх власних підгруп, є групою одного з типів:

1) $G = Q_1 \times Q_2$, Q_1 і Q_2 – групи кватерніонів порядку 8;

2) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4,8\}$, $|z| = 2$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a,x] = b$, $[b,x] = a^3 = x^6$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді $G = A \times B$, де $A \neq 1$, $B \neq 1$. Нехай $A' \neq 1$ і $B' \neq 1$. За лемою 1.2.5 A і B – гемільтонові групи. Тоді в силу твердження 1.1.1 $G = Q_1 \times Q_2 \times D$, де Q_1 і Q_2 – групи кватерніонів порядку 8, D – періодична абелева група. Покладемо $U = Q_1 \times Q_2$. Тоді $G = U \times D$, де U – неделекіндова група. За лемою 1.2.5 $|D| \in \{1,r\}$ і U – ШН[ ]-група одного з типів 1 – 8 теореми 1.4.1, що неможливо. Отже, $D = 1$ і G – група типу 1 наслідку.

Нехай далі $A' \neq 1$, $B' = 1$. За теоремою 1.2.3 G – періодична група і тому A і B – періодичні групи. Якщо B має власні немаксимальні підгрупи, то за лемою 1.2.5 A – делекіндова група і $|G'| \in \{1,r\}$. Звідси випливає метагамільтоновість групи G, що неможливо. Отже, B не має власних немаксимальних підгруп і тому за лемою 1.1.1 $|B| = r$ – просте число, $B = \langle z\rangle$. Ясно, що $|A'|$ ділиться на добуток двох простих чисел. За лемою 2.1.1 A – група одного з типів 1 – 8 теореми 1.4.1. Якщо A – група одного з типів 1, 3, 4, 6 – 8 згаданої теореми, то за теоремами 2.3.2 та 2.5.2 з [37] G – метагамільтонова група, що не так. Отже, A – група одного з типів 2, 5 теореми 1.4.1. Знову в силу теорем 2.3.2 та 2.5.2 з [37] при $r \notin \pi(A)$ G – метагамільтонова група, що знову не так. Таким чином, $r \in \pi(A)$ і G – група одного з типів 2, 3 розглядуваного наслідку. Наслідок доведено.

Наслідок 2.1.4. Комутант локально ступінчастої метагамільтонової УШН[ ]-групи G має порядок p^m, p – просте число, $m < 4$.

Наслідок випливає з теореми 2.1.2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.- М.:Наука.- 1980.- 384 с.
2. Best E. and Taussky O. A class of groups //Proc.PJA.-XLYII,sect A.- 1942.- P.55-62.
3. Абрамовский И.Н.,Каргаполов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи матем. наук.- 1958.- XIII, вып. 3(81).- С. 242-243.
4. Robinson D. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.- 1964.- 60.- P.21-38.
5. Пилаев В.В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп.- Киев,Ин-т математики АН УССР,1976.- с. 111-139.
6. Курдаченко Л.А.,Горецкий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр.мат.журн.-1983.-35,№.- С.42-46.
7. Курдаченко Л.А.,Кузенный Н.Ф.,Пилаев В.В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субинвариантных подгрупп // Укр.мат. журн.- 1981.- 33,№3.- С.407-410.
8. Горецкий В.Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования.- Киев, Ин-т математики АН УССР,1978.- С.127-138.
9. Mann A. Groups with dense normal subgroups.- Israel J. Math.- 1968.-v.6,№1.- P.13-25.
10. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп.- Киев, 1980.- 17 с.- Деп. в ВИНИТИ, № 19-25-80.
11. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XII Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Новосибирск:Ин-т математики СО АН СССР,1977.-С.57-58.
12. Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы со

строго плотной системой инвариантных подгрупп //VI Всесоюз.симп. по теории групп: Тез. докл.- Киев:Наукова думка,1978.- С.49-50.
13.Кузенный Н.Ф.,Пилаев В.В.Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XY Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск:Изд-во Краснояр. ун-та,1979.- С.84-85.
14.Пилаев В.В.,Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы с строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 //XY Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С. 126.
15.Herstein N. Aremark on finite groups // Proccedings. Amer.Math. Soc.- 1958.- 9,N2.- P.255-257.
16.Холл М. Теория групп.- М.:Изд-во иностр. лит.,1962.-468 с.
17.Каргаполов М.И.,Мерзляков Ю.И. Основы теории групп:3-е изд.-М.: Наука,1982.- 288 с.
18.Курош А.Г. Теория групп.- М.:Наука,1967.- 648 с.
19.Устюжанинов А.Д. Конечные 2-группы с тремя инволюциями // Сиб. мат. журн.- 1972.- 13, N1.- С.182-197.
20.Семко Н.Н.,Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метагамильтоновых групп.- Киев:Киев. пед. ин-т,1983.- 22с.
21.Кузенный Н.Ф.,Семко Н.Н. Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1985.- N2.- С.6-8.
22.Семко Н.Н.,Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения.- Киев: Наукова думка.-1989.- С. 173-183.
23.Dixon J.D. The structure of linear groups.- New.York:Van Norstrand, 1971.- 183 p.
24.Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп //Алгебра и логика.- 1970.- N5.- С.575-611.
25.Левищенко С.С.,Кузенный Н.Ф. Группы с условием дисперсивности для подгрупп.- Киев: Киев. пед. ин-т,1985.- 96 с.
26.Huppert B. Endliche Gruppen I.- Berlin - Heidelberg - New-York: Springer - Verlag, 1967. - 793 p.
27.Blackburn N. Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Maht. Soc.- 1961.- II,N 41.- P.1-22.
28.Curcio M. Classification on finite minimal non- metacyclic groups // Acta Soc. Math.-1984.-47,N 3 - 4.- P. 289-295.

29.Левищенко С.С.,Кузенний Н.Ф.,Семко Н.Н. Конструктивное описание конечних минимальних неметациклических групп.- Киев,1986.-41 с. - Деп.в УкрНИИНТИ 04.01.87,N 33-Ук 87.

30.Левищенко С.С.,Кузенний Н.Ф.,Семко Н.Н.,Томанек Й. Строение конечних минимальних неметациклических групп // Prirodne vedy.Matematika.Zbornik pedagogickej fakulty v presove univerzity P.I. Safarika.- Kosice.1990.- Proc.XXIV,Zvazok I.- S.49-97.

31.Бусаркин В.М.,Горчаков Ю.М. Конечние расщепляемые группи.- М.: Наука, 1967.- 411 с.

32.Ромалис Г.М. О метагамильтонових группах // Успехи матем.наук.- 1962.- 17, N6.- С.228.

33.Махнев А.А. О конечних метагамильтонових группах // Мат. зап. Урал. ун-та.- 1976.- 10.- С.60-76.

34.Ліман Ф.М. Групи з інваріантними нециклічними підгрупами / Доп. АН УРСР.- 1967.- 12.- С.1073-1075.

35.Лиман Ф.Н. 2-группи с неинвариантними нециклическими подгруппами // Мат. заметки.- 1968.- 4, N1.- С.74-83.

36.Schenkmann E. The splitting of certain solvable groups // Proc. Am. Math. Soc.- 1955.- 6.- P.286 - 290.

37.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 232 с.

38.Семко М.М., Кузенний М.Ф. Групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- 61 с.

39.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Про групи, близькі до метациклічних //Укр. мат. журн.- 1996.- 48,N6.- С.782 - 790.

40.Семко М.М.,Кузенний М.Ф. Будова деяких груп, близьких до метациклічних.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1995.-25 с.- Деп. в ДНТБ України 29.11.95, N2608 - Ук95.

41.Семко М.М. Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп .- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 39 с.- Деп. в ДНТБ України 17.01.96, N135 - Ук96.

42.Семко М.М. Будова локально ступінчастих нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 24 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2326 - Ук96.

43.Семко М.М. Про будову груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.-

41 с.- Деп. в ДНТБ України 04.12.96, N2340 - Ук96.

44.Семко М.М. Будова нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп.- К.: Н.-д. ін-т педагогіки АПН України, 1996.- 55 с.- Деп. в ДНТБ України 12.12.96, N2370 - Ук96.

45.Кузенний М.Ф.,Семко М.М. Будова УШН[ ]-груп з комутантом простого порядку//Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ,1996.- С.219.

46.Семко М.М.,Кузенний М.Ф. Будова ШН[ ]-груп //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ,1996.- С.390.

47.Семко М.М. Будова деяких УШН[ ]-груп з нециклічним комутантом //Тези У Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 16 - 18 трав. 1996 р.- Київ, 1996.- С.389.

48.Семко М.М. Будова локально ступінчастих ШН[ ]-груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1996.- Вип.12.- С. 181 - 186.

49.Семко М.М. Про будову УШН[ ]-груп //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ:Ін-т математики НАН України, 1996.- Вип.13.- С. 196 - 203.

З М І С Т

ВСТУП 3

I. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ $UH\{\ \}$-ГРУП 5

1.1. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ 5
1.2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ 19
1.3. ДЕЯКІ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ 29
1.4. БУДОВА $UH\{\ \}$-ГРУП І ІХ ПІДКЛАСІВ 57

II. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ $UUH\{\ \}$-ГРУП 62

2.1. ДЕЯКІ КОРИСНІ РЕЗУЛЬТАТИ 62

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 86

Наукове видання

Семко Микола Миколайович

ПРО БУДОВУ ГРУП З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Підп. до друку 3 02 97. Формат . Папір друк. Офс друк. Ум. друк. арк. 4,65
Ум. фарбо-відб. 4 Обл.-вид. арк. 4,65 Тираж 1000 пр. Зам. 23

Віддруковано в Інституті математики НАН України.
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3