ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

105

Ярова О. А., Скасків Л. В., Терменжи Д. Є.

Вища та прикладна математика

Навчальний посібник



ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. А. Ярова, Л. В. Скасків, Д. Є. Терменжи

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Ірпінь
2026

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Я 76

Рекомендовано до друку Вченою радою
Державного податкового університету
(протокол № 20 від 29 червня 2026 року)

Рецензенти:

Марина Друшляк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри математики, фізики та методики їх навчання, СумДПУ імені А. С. Макаренка;

Оксана Гладченко, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри комп'ютерних та інформаційних технологій і систем Державного податкового університету.

Ярова О. А.

Я 76 **Вища та прикладна математика** : навчальний посібник / О. А. Ярова, Л. В. Скасків, Д. Є. Терменжи. – Ірпінь : Державний податковий університет, 2026. – 254 с.
ISBN 978-966-337-809-1

Навчальний посібник розроблений відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика». У ньому викладені основні базові поняття вищої математики, наведені приклади розв'язування типових завдань.

Рекомендований здобувачам вищої освіти першого (бакалаврського) рівня денної та заочної форм навчання.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

© Ярова О. А., Скасків Л. В.,
Терменжи Д. Є., 2026

ISBN 978-966-337-809-1

© Державний податковий університет, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 7

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1. Вступ. Матриці 9
1.1. Поняття матриці 9
1.2. Дії над матрицями 12

Тема 2. Визначники, їх властивості та обчислення 21
2.1. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення 21
2.2. Основні властивості визначників 23
2.3. Методи обчислення визначників 23

Тема 3. Обернена матриця. Ранг матриці 35
3.1. Обернена матриця 35
3.2. Алгоритм побудови оберненої матриці 36
3.3. Ранг матриці 37
3.4. Методи знаходження рангу матриці 38

Тема 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера. Матричний метод 47
4.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення 47
4.2. Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера 50
4.3. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом 52

Тема 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи Гаусса і Жордана-Гаусса 62
5.1. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса 62
5.2. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса 64
5.3. Системи лінійних однорідних рівнянь 65

РОЗДІЛ ІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 6. Вектори в просторі.
Скалярний, векторний та мішаний добутки 73
6.1. Вектори в просторі. Скалярний добуток двох векторів..... 73
6.2. Векторний добуток векторів 76
6.3. Мішаний добуток векторів..... 77
6.4. Векторний простір, його розмірність і базис 78
6.5. Розклад вектора за базисом..... 80

Тема 7. Пряма на площині 87
7.1. Різновиди рівняння прямої на площині 87
7.2. Кут між двома прямими 93
7.3. Відстань від точки до прямої..... 95

Тема 8. Рівняння кривих другого порядку.
Рівняння поверхонь..... 102
8.1. Коло 103
8.2. Еліпс..... 104
8.3. Гіпербола..... 105
8.4. Парабола..... 106
8.5. Дослідження рівняння другого порядку..... 107

Тема 9. Рівняння прямої та площини в просторі 113
9.1. Рівняння площини в просторі 113
9.2. Кут між площинами 114
9.3. Пряма лінія в просторі..... 114
9.4. Кут між двома прямими в просторі 115
9.5. Кут між прямою та площиною 116

РОЗДІЛ ІІІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 10. Комплексні числа 129
10.1. Поняття комплексного числа..... 129
10.2. Форми запису комплексних чисел 130
10.3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі 132
10.4. Дії над комплексними числами
в тригонометричній формі 133

Тема 11. Границі. Основні теореми про границі 140
11.1. Поняття границі функції 140
11.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції..... 141
11.3. Основні теореми про границю..... 142
11.4. Розкриття деяких невизначеностей..... 143
11.5. Перша та друга важливі границі 145

Тема 12. Диференціальне числення функції однієї змінної 152
12.1. Похідна функції, основні правила її знаходження..... 152
12.2. Фізичний і геометричний зміст похідної 153
12.3. Похідна складеної функції.
Похідна неявно заданої функції.
Логарифмічне диференціювання.
Похідна функції, що задана параметрично 155

Тема 13. Застосування похідної до дослідження функції 163

РОЗДІЛ IV. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Тема 14. Основні поняття функції кількох змінних. Частинні похідні 172
14.1. Функції двох змінних.
Область визначення. Лінії рівня..... 172
14.2. Частинний приріст і частинні похідні 173
14.3. Повний приріст і повний диференціал функції двох змінних 174
14.4. Частинні похідні вищих порядків 174

Тема 15. Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області..... 182
15.1. Безумовні екстремуми функції двох змінних.
Найбільше та найменше значення функції
в замкненій області 182
15.2. Умовний екстремум. Метод Лагранжа..... 184

РОЗДІЛ V. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Тема 16. Первісна та невизначений інтеграл 191
16.1. Первісна функція. Теорема про загальний вигляд усіх первісних 191
16.2. Невизначений інтеграл і його основні властивості 192
16.3. Таблиця невизначених інтегралів 193
16.4. Методи інтегрування 193

Тема 17. Інтегрування раціональних і тригонометричних функцій 202
17.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів 202
17.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів 204
17.3. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції 209

Тема 18. Визначений інтеграл та його властивості 218
18.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла 218
18.2. Означення визначеного інтеграла 220
18.3. Основні властивості визначеного інтеграла 220
18.4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца 221
18.5. Методи наближеного обчислення визначеного інтеграла 224
18.6. Визначений інтеграл у економічних задачах 224

ОПОРНІ КОНСПЕКТИ 232

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 253

ПЕРЕДМОВА

Глобальні трансформації сучасного суспільства, що відбуваються на тлі стрімкого наукового прогресу та масштабної цифровізації економіки, зумовлюють нагальну потребу в якісному підвищенні рівня математичної грамотності майбутніх спеціалістів. У реаліях сьогодення вища та прикладна математика трансформується із суто теоретичної бази в потужний універсальний інструментарій, потрібний для проєктування точних математичних моделей, проведення комплексного кількісного аналізу та дослідження динаміки багатогранних соціально-економічних і технічних систем. Вивчення навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» має на меті закласти в майбутніх бакалаврів систему фундаментальних знань і практичних компетенцій, що є критично важливими для розв'язання прикладних проблем, об'єктивного аналізу реальних процесів і ухвалення виважених управлінських рішень. Опанування курсу не лише сприяє інтелектуальному розвитку через удосконалення стратегічного, логічного та алгоритмічного мислення, а й формує стійкі навички абстрагування й активного застосування математичного апарату в подальшій професійній практиці.

Це навчальне видання підготовлене з дотриманням методичних вимог чинної робочої програми дисципліни для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти та повністю відповідає сучасним освітнім стандартам. Ключовим пріоритетом видання є створення цілісного математичного фундаменту, що дасть змогу студентам ефективно опрацьовувати складні практичні кейси в майбутній кар'єрі та забезпечить безперешкодне засвоєння профільних і міждисциплінарних знань. Навчальний контент систематизовано у 18 тематичних блоків, що об'єднані в 5 логічно завершених модулів. Кожен із розділів пропонує студенту збалансоване поєднання стислого, проте інформативного викладу теоретичних засад, покрокової демонстрації розв'язання типових завдань, а також набору вправ для самостійного виконання. Для забезпечення ефективної діагностики знань передбачено контрольні запитання та тестові модулі для самоперевірки.

Посібник розрахований на використання під час лекційних і практичних занять, для організації самостійної підготовки здобувачів, а також може слугувати ефективним методичним забезпеченням для викладачів закладів вищої освіти.

РОЗДІЛ І
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ТЕМА 1. ВСТУП. МАТРИЦІ

1.1. Поняття матриці.
1.2. Дії над матрицями.

Основні теоретичні відомості

1.1. Поняття матриці

Під ***матрицею*** розміру $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ розуміють систему елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$, що впорядковані у формі прямокутної таблиці, яка складається з $\boldsymbol{m}$ рядків і $\boldsymbol{n}$ стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Фундаторами терміна «матриця» вважаються англійські вчені У. Гамільтон і Д. Келі. У записі елемента a_{ij} перший показник $\boldsymbol{i}$ визначає номер рядка, де він розміщений, другий $\boldsymbol{j}$ – відповідний номер стовпця. Для найменування матриць зазвичай застосовують великі латинські літери (*A, B, C,…)* або компактний запис $A = \left(a_{ij}\right)$, де $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Числа $\boldsymbol{a_{ij}}$, з яких побудована матриця, називають її ***елементами***.

Також у науковій літературі часто вказують розмірність поруч із назвою:

$$A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n} \ldots.$$

Класифікація за типом елементів:

- матриця вважається ***числовою***, якщо всі її складові є числами;
- якщо ж елементами є функції $a_{ij} = f_{ij}(x)$, таку матрицю називають ***функціональною.***

Рівність та типи матриць

Дві матриці ***A*** і ***B*** вважаються однакової розмірності, якщо в них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців.

Матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

називаються ***рівними*** (однаковими), якщо вони мають однакову кількість рядків та стовпців і всі їхні елементи, розташовані на однакових місцях, є рівними (тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх значень *i* та *j*).

Квадратні матриці та їхні особливості

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $\boldsymbol{m = n}$), називається ***квадратною*** матрицею порядку ***n***. Квадратна матриця порядку ***n*** має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють ***головну діагональ*** матриці, а елементи a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, … a_{n1} – ***допоміжну***.

Серед квадратних матриць виділяють кілька специфічних видів. Зокрема, до них належать діагональна, одинична та нульова матриці.

1. Квадратна матриця, у якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають ***діагональною.***

Наприклад, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі, дорівнює одиниці, називається ***одиничною.*** Позначають буквою Е.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку $E_{4\times4} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця *n*-го порядку має вигляд $E_{n\times n} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Квадратна матриця називається ***трикутною,*** якщо всі елементи, розміщені по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, створюючи форму трикутника з ненульових чисел.

Прикладом *верхньої трикутної матриці* (де нулі ***знизу***) є

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

а *нижньої трикутної* (де нулі ***зверху***) –

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Спеціальні види та операція транспонування

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають ***нульовою*** та позначають буквою О.

Вона має вигляд: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Матрицю, яку одержують із матриці А заміною її рядків відповідними стовпцями, називають ***транспонованою*** та позначають A^T.

Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриці-вектори

Матриця, у якої лише один рядок, називається ***матрицею-рядком***.

$$A = (a_{11},\ a_{12}, \dots\ a_{1n}).$$

Матриця, у якої лише один стовпець, називається ***матрицею-стовпцем***.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Матриця найменшого розміру 1×1, що складається з єдиного елемента, зазвичай ототожнюється з цим числом, тобто $(8)_{1\times1}$ є число 8.

1.2. Дії над матрицями

Сумою (різницею) матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$, які мають однакову розмірність (тобто кількість рядків і стовпців матриці A збігається з кількістю рядків і стовпців матриці B), називають матрицю $C = A + B$, елементи якої визначаються за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Операції додавання та віднімання визначені виключно для матриць однакової розмірності.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B = k \cdot A$, кожен елемент якої обчислюється за правилом:

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Отже, множення матриці на число зводиться до множення кожного її елемента на це число.

Властивості додавання матриць

Для довільних матриць A, B, C однакової розмірності та довільних чисел α і β виконуються такі співвідношення:

$A + B = B + A$ (комутативність додавання);

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність додавання);

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

$\alpha(AB) = (\alpha A)B$;

$k \cdot O = O \cdot k = O$;

$A + O = O + A = A$;

A – A = O;

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

$(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$.

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p} = AB$, елементи якої визначаються за формулою:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Множення можливе лише для ***узгоджених матриць***, тобто таких, у яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

Зауважимо, що з існування добутку AB не випливає існування добутку BA. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B називають ***комутативними***. Комутативність можлива лише для квадратних матриць однакового порядку.

Легко показати, що *AE = EA = A,* де *A* – квадратна матриця, *E* – одинична матриця того самого розміру.

Властивості множення матриць

$E \cdot A = A \cdot E = A$ (множення на одиничну матрицю);

$O \cdot A = A \cdot O = O$ (множення на нульову матрицю);

$(A + B)C = AC + BC$;

$C(A + B) = CA + CB$;

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (загалом комутативна властивість не виконується).

Розглянемо добуток двох квадратних матриць другого порядку. Нехай:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток матриць $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти суму матриць A і B.

Розв'язання

Сума матриць визначається додаванням відповідних елементів:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Задано матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток $-5 \cdot A$.

Розв'язання

У разі множення матриці на число кожен її елемент множиться на це число:

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 & -5 \cdot 2 \\ -5 \cdot 3 & -5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток $A \cdot B$.

Розв'язання

Елементи матриці-добутку визначаються множенням відповідного рядка першої матриці на стовпець другої:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. (Некомутативність множення матриць).

Для тих самих матриць A і B знайти добуток $B \cdot A$.

Розв'язання

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A \cdot B \neq B \cdot A,$$

що підтверджує некомутативність множення матриць.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$.

Приклад 5. (Транспонування матриць).

Транспонувати матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Транспонована матриця утворюється заміною рядків відповідними стовпцями:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.

Приклад 6. Чи існує добуток $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Добуток *AB* не визначений, оскільки кількість стовпців матриці *A* не дорівнює кількості рядків матриці *B*. Водночас добуток *BA* визначено:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 7. Знайти матрицю $C = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}^T$ і $Д = \mathrm{B}^T \cdot \mathrm{A}$, якщо $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а) знайдемо матрицю B^T, яка є траспонованою до матриці *B*. Для цього потрібно перший рядок матриці *B* зробити першим стовпчиком, а другий рядок – другим стовпчиком. $\mathrm{B}^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$;

б) добуток $\text{A}\cdot\text{B}^T$ можна утворити, тому що $\underset{3\times2}{\text{A}}\cdot\underset{2\times2}{\text{B}} = \underset{3\times2}{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{pmatrix}$. Знайдемо C_{11}, для цього створимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпчика матриці B^T. Маємо:

$$C_{11} = 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 9 = -15 \qquad C_{12} = 3\cdot 4+(-1)\cdot(-5) = 17$$

$$C_{21} = 8\cdot(-2)+2\cdot 9 = 2 \qquad C_{22} = 8\cdot 4+2\cdot(-5) = 22$$

$$C_{31} = 6\cdot(-2)+(-4)\cdot 9 = -48 \qquad C_{32} = 6\cdot 4+(-4)\cdot(-5) = 44$$

$$C = A\cdot B^T = \begin{pmatrix} -15 & 17 \\ 2 & 22 \\ -48 & 44 \end{pmatrix}.$$

Утворити $Д = B^{\text{T}}\cdot A$ неможливо, оскільки $\underset{2\times2}{B^{\text{T}}}\cdot\underset{3\times2}{A} \neq$ (матриці неузгоджені).

Завдання для самоконтролю

1. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

– знайти $A + B$;

– знайти $A - B$.

2. Задано матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти $4 \cdot A$.

3. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток $A \cdot B$.

4. Для матриць із завдання 3 знайти добуток $B \cdot A$ та порівняти результати.

5. Транспонувати матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $2A - B$.

7. Знайти значення многочлена $f(x)$ від матриць A, якщо:

а) $f(x) = 2x^2 - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

б) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Питання для самоконтролю

1. Що називається матрицею? Як позначають матрицю та її елементи?

2. Що означає розмірність матриці? Як визначають кількість її рядків і стовпців?

3. Які матриці називають рівними?

4. Які матриці називають квадратними? Наведіть приклади квадратної та прямокутної матриць.

5. За якої умови можливе додавання (віднімання) матриць? Як обчислюються елементи суми двох матриць?

6. У чому полягає множення матриці на число? Які властивості має ця операція?

7. За яких умов визначено добуток двох матриць? Якою є розмірність матриці-добутку?

8. За яким правилом обчислюються елементи добутку двох матриць?

9. Що таке транспонування матриці? Як змінюється її розмірність після транспонування?

10. Чому множення матриць не є комутативним? У яких випадках можливе виконання рівності $AB = BA$?

Тести

1. Матрицею називається:

а) впорядкована множина чисел, записаних у один рядок;

б) прямокутна таблиця чисел, розміщених у рядках і стовпцях;

в) довільна числова послідовність;

г) система рівнянь.

2. Розмірність матриці визначається:

а) кількістю її елементів;

б) кількістю рядків;

в) кількістю стовпців;

г) кількістю рядків і стовпців.

3. Яка з наведених матриць є квадратною:

а) 2×3;

б) 3×2;

в) 3×3;

г) 1×4.

4. Додавання матриць можливе, якщо:

а) матриці квадратні;

б) матриці мають однакову кількість елементів;

в) матриці однакової розмірності;

г) одна з матриць нульова.

5. Множення матриці A на число k означає:

а) множення кожного рядка на k;

б) множення кожного стовпця на k;

в) множення кожного елемента матриці на k;

г) додавання числа k до кожного елемента.

6. Множення матриць A · B можливе, якщо:

а) матриці квадратні;

б) кількість рядків матриці A дорівнює кількості стовпців матриці B;

в) кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B;

г) матриці мають однакову розмірність.

7. Яка з наведених рівностей є правильною для будь-яких узгоджених матриць:

а) $AB = BA$;

б) $(A + B)C = AC + BC$;

в) $A(B + C) = AB + CA$;

г) $A + BC = (A + B)C$.

8. Одинична матриця позначається символом:

а) O;

б) E;

в) A;

г) 0.

9. Для будь-якої матриці А виконується рівність:

а) $A \cdot O = A$;

б) $O \cdot A = A$;

в) $A \cdot E = A$;

г) $A + E = A$.

10. Транспонованою до матриці А називається матриця:

а) з протилежними елементами;

б) утворена перестановкою рядків;

в) утворена перестановкою стовпців;

г) утворена заміною рядків відповідними стовпцями.

ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ОБЧИСЛЕННЯ

2.1. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення.
2.2. Основні властивості визначників.
2.3. Методи обчислення визначників.

Основні теоретичні відомості

2.1. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення

Розглянемо систему лінійних рівнянь, що складається з n рівнянь і n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Для такої системи вводиться числова характеристика, що називається ***визначником*** *(або детермінантом)* і позначається detабо Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює кількості його рядків (або стовпців) і в цьому випадку становить n.

Мінором визначника Δ порядку n називають визначник порядку $n-1$, який утворюється в результаті викреслювання i-го рядка та k-го стовпця. Мінор позначається M_{ik}.

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} називається величина:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Приклад. Знайти мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{23}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Значення визначника Δ можна знайти як суму добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення ***(Теорема Лапласа)***:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} +$$

$$a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + + a_{ij} \cdot A_{ij} + a_{in}$$

$$+ a_{in} \cdot \mathrm{A}_{in} = a_{1j} \cdot \mathrm{A}_{1j} + \cdots a_{ij} \cdot \mathrm{A}_{ij} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Приклад: розклад за елементами другого стовпця.

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + \cdots + a_{n2}A_{n2}.$$

Обчислимо визначник другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2.2. Основні властивості визначників

Визначники мають низку властивостей, що широко використовуються під час їхнього обчислення:

1) значення визначника не змінюється в разі заміни рядків відповідними стовпцями;

2) перестановка двох рядків змінює знак визначника;

3) визначник з двома однаковими або паралельними рядками дорівнює нулю;

4) спільний множник елементів рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника;

5) визначник, що містить нульовий рядок або стовпець, дорівнює нулю;

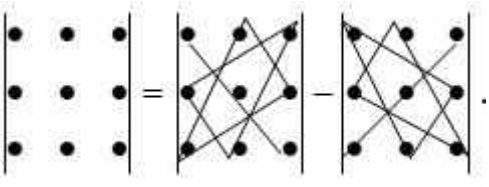
6) якщо два паралельні рядки є пропорційними, визначник дорівнює нулю;

7) додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого, помножених на одне й те саме число, не впливає на значення визначника;

8) якщо кожен елемент деякого стовпця є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників.

2.3. Методи обчислення визначників

Під час обчислення визначників третього порядку зручно користуватися ***правилом трикутника***, яке схематично можна записати так:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

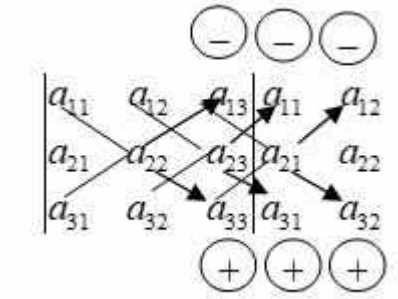
Приклад. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$det\, A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 +$$

$$+3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - -6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

Визначники третього порядку обчислюються за ***правилом Саррюса:*** за альтернативною схемою до матриці A приписують два її перші стовпчики, унаслідок чого утворюється прямокутна матриця відповідного розміру. Після цього додатні та від'ємні доданки визначника обчислюють за встановленим алгоритмом (*подано на схемі).*



Метод розкладання за елементами рядка або стовпця

Значення визначника Δ можна знайти як суму добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення ***(Теорема Лапласа):***

$$\Delta = \sum a_{ik} A_{ik} \quad \text{або} \quad \Delta = \sum a_{ki} A_{ki}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} +$$

$$+a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{ij} \cdot A_{ij} + a_{in} +$$

$$+ a_{in} \cdot \mathrm{A}_{in} = a_{1j} \cdot \mathrm{A}_{1j} + \cdots a_{ij} \cdot \mathrm{A}_{ij} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Розкладання визначника 4-го порядку за елементами другого рядка

Для визначника четвертого порядку Δ_4 можна використати ***розкладання за елементами будь-якого рядка або стовпця***. Наприклад, за другим рядком:

$$\Delta_4 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}.$$

Тут $A_{2k} = (-1)^{2+k}M_{2k}$ – алгебраїчне доповнення відповідного елемента, а M_{2k} – мінор елемента a_{2k}.

Приклад:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}.$$

Метод зниження порядку визначника

Використовуючи ***властивості визначників***, обчислення $\Delta_n \neq 0$ можна звести до визначника $(n-1)$-го порядку. Для цього в одному з рядків (або стовпців) робимо ***всі елементи нульовими, крім одного,*** застосовуючи ***лінійні перетворення рядків чи стовпців***.

Приклад. Нехай задано визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Зробимо нулі в ***третьому стовпці***. Для цього:

- елементи першого та четвертого рядків залишаємо без змін;
- елементи першого рядка множимо на 3 і додаємо до відповідних елементів другого рядка, результат записуємо в другому рядку;
- відповідні елементи першого й третього рядків додаємо та результат записуємо в третьому рядку.

Отримаємо:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далі зробимо нулі в ***третьому рядку***. Для цього:

- елементи першого стовпця залишаємо без змін;
- елементи першого стовпця множимо на 2 і додаємо до відповідних елементів другого стовпця, результат записуємо в другому стовпці;
- елементи першого стовпця множимо на -3 і додаємо до відповідних елементів третього стовпця, результат записуємо в третьому стовпці.

Після виконання цих перетворень маємо:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Ще один ефективний спосіб привести визначник $\Delta_n \neq 0$ до ***верхньої трикутної матриці***, використовуючи лінійні перетворення рядків і стовпців. Тоді значення визначника обчислюється як ***добуток елементів головної діагоналі*** з урахуванням змін знака під час перестановок:

Приклад

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Використовуючи властивості визначників, перетворюємо на трикутну матрицю:

- перестановки стовпців і рядків;
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого, помножених на константу.

2. Отримуємо верхню трикутну форму:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Тоді визначник обчислюється як добуток діагональних елементів:

$$\Delta_4 = 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 7 = -14.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) = 6 + 8 = 14.$$

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix}$

а) за правилом трикутників;

б) за правилом Саррюса.

Розв'язання

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) \cdot 4 + (-3) \cdot 7 \cdot (-1) -$

$(-1) \cdot 6 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-5) \cdot 7 \cdot 2 = -24 - 20 + 21 + 24 - 6 + 70 = 65.$

б) $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & -5 & -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot (-2) + (-3) \cdot 7 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot (-5) -$$

\- \- \- \+ \+ \+

$$-4 \cdot 6 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 7 \cdot (-5) = -24 + 21 - 20 + 24 - 6 + 70 = 65.$$

Відповідь: 65.

Приклад 2. Обчислити всі мінори й алгебраїчні доповнення до елементів другого стовпчика визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 528 - 10 = 18;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) = 7 + 6 = 13;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 5 + 12 = 17;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -18;$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = +M_{22} = 13;$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = -17.$$

Приклад 3. Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Щоб розкласти визначник за елементами рядка (чи стовпчика), потрібно спочатку утворити в цьому рядку (стовпчику) нульові елементи, тоді обчислення будуть менш громіздкими.

Утворимо нульові елементи в першому стовпчику визначника, для цього:

1) елементи першого (робочого) рядка перепишемо без змін у новий визначник;

2) помножимо всі елементи першого рядка на 2 і додамо до відповідних елементів другого рядка. Результат запишемо в другий рядок;

3) помножимо всі елементи першого рядка на –4 і додамо до відповідних елементів третього рядка. Результат запишемо в третій рядок;

4) помножимо всі елементи першого рядка на –3 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка. Результат запишемо в четвертий рядок.

Після цих перетворень значення визначника не змінюється, але він набуває такого вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 14 \\ 0 & -3 & 13 & -21 \\ 0 & -4 & 4 & -14 \end{vmatrix}.$$

Тепер скориставшись означенням визначника та розклавши його за елементами першого рядка, маємо:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 & 14 \\ -3 & 13 & -21 \\ -4 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & -5 & 14 \\ -3 & 13 & -21 \\ -4 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$

винесемо спільний множник 7 з елементів третього стовпчика і 2 з елементів третього рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 14 \\ -3 & 13 & -21 \\ -4 & 4 & -14 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -3 & 13 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 2 \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -3 & 13 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 14 \cdot (-91 - 12 - 30 + 52 + 42 + 15) =$$

$$= 14 \cdot (-24) = -336.$$

Відповідь: –336

Приклад 4. Обчислити визначник, використовуючи метод зведення визначника до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2-1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1-2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Скористаємося основними властивостями визначників. Якщо визначник $\Delta_n \neq 0$, то через елементарні перетворення рядків або

стовпців його можна звести до трикутного вигляду. У цьому разі значення визначника дорівнює добутку елементів головної діагоналі з урахуванням множників, що виникають у процесі перетворень.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \text{поміняємо місцями перший та другий стовпці}$$

Водночас, відповідно до властивостей визначника, його знак змінюється на протилежний. Далі, виконуючи послідовні елементарні перетворення рядків (додавання до одного рядка іншого, помноженого на відповідне число), зводимо визначник до трикутного вигляду. У результаті одержуємо трикутну матрицю, для якої всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 64 = -64.$$

Оскільки визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів, то $\Delta = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 64 = -64$.

Відповідь: $\Delta = -64$.

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити визначники:

а) другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(\Delta_1 = 2) \qquad (\Delta_2 = 25);$$

б) третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\Delta_1 = -19), \quad (\Delta_2 = 0), \quad (\Delta_3 = 8), \quad (\Delta_4 = -94);$$

в) четвертого порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\Delta_1 = 9) \qquad (\Delta_2 = 27).$$

2. Побудувати й обчислити всі можливі мінори визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 8 & -9 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити визначник, розкладаючи його за рядком із букв:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (\Delta = 8a + 15b + 12c - 19d).$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником квадратної матриці? Який зміст має його значення?

2. Для яких матриць визначник невизначений?

3. Які основні властивості визначників ви знаєте?

4. Як змінюється значення визначника в разі перестановки двох рядків (стовпців)?

5. Як впливає множення рядка (стовпця) матриці на число k на значення визначника?

6. За якої умови визначник дорівнює нулю?

7. У чому полягає метод обчислення визначника за правилом Саррюса? Для яких матриць він застосовується?

8. У чому полягає розклад визначника за елементами рядка або стовпця?

9. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?

10. У чому полягає метод зведення визначника до трикутного вигляду?

11. Чому визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів?

Тести

1. Визначником матриці називається:

а) будь-яке число, що відповідає матриці;

б) число, яке обчислюється лише для прямокутних матриць;

в) скаляр, що однозначно відповідає квадратній матриці;

г) добуток елементів головної діагоналі.

2. Для якої матриці визначник невизначений:

а) квадратної;

б) нульової;

в) одиничної;

г) прямокутної.

3. Як змінюється визначник у разі перестановки двох рядків:

а) не змінюється;

б) множиться на 2;

в) змінює знак на протилежний;

г) стає рівним нулю.

4. Якщо всі елементи деякого рядка матриці дорівнюють нулю, то визначник:

а) дорівнює 1;

б) не змінюється;

в) дорівнює сумі інших рядків;

г) дорівнює нулю.

5. Як зміниться визначник, якщо всі елементи одного рядка помножити на число k:

а) не зміниться;

б) збільшиться на k;

в) помножиться на k;

г) поділиться на k.

6. За якої умови визначник дорівнює нулю:

а) якщо матриця квадратна;

б) якщо два рядки (стовпці) пропорційні;

в) якщо всі елементи різні;

г) якщо визначник додатний.

7. Мінором елемента визначника називається:

а) визначник, що дорівнює нулю;

б) елемент матриці;

в) визначник матриці меншого порядку;

г) сума елементів рядка.

8. Алгебраїчне доповнення елемента визначника дорівнює:

а) його мінору;

б) добутку елемента на мінор;

в) мінору з відповідним знаком;

г) сумі мінорів.

9. Визначник трикутної матриці дорівнює:

а) сумі елементів головної діагоналі;

б) добутку елементів головної діагоналі;

в) сумі елементів першого рядка;

г) добутку всіх елементів матриці.

10. Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то матриця:

а) є одиничною;

б) має обернену матрицю;

в) є виродженою;

г) є трикутною.

ТЕМА 3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ

3.1. Обернена матриця.
3.2. Алгоритм побудови оберненої матриці.
3.3. Ранг матриці.
3.4. Методи знаходження рангу матриці.

Основні теоретичні відомості

3.1. Обернена матриця

Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю:

$$\Delta \neq 0 \ (detA \neq 0).$$

Лише для таких матриць існує **обернена матриця**.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця.

Формула для знаходження оберненої матриці

Якщо $detA = \Delta \neq 0$, то:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{ij})^T,$$

де A_{ij} – **алгебраїчні доповнення** елементів a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення визначається за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

Властивості оберненої матриці

1. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det\, A}$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3.2. Алгоритм побудови оберненої матриці

1. Задано квадратну матрицю А.
2. Обчислити визначник матриці:

$$\Delta = det\, A.$$

Перевірити умову існування оберненої матриці:

- якщо $\Delta = 0$, то обернена матриця *не існує*;
- якщо $\Delta \neq 0$, перейти до наступного кроку.

4. Для кожного елемента a_{ij} матриці A знайти мінор M_{ij} (викреслити i-й рядок і j-й стовпець та обчислити визначник матриці, що залишилася).

5. Обчислити алгебраїчні доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

6. Скласти матрицю алгебраїчних доповнень:

$$(A_{ij}).$$

7. Транспонувати матрицю алгебраїчних доповнень, отримавши приєднану матрицю:

$$\left(A_{ij}\right)^T.$$

8. Помножити приєднану матрицю на $\frac{1}{\Delta}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{ij})^T.$$

9. Виконати перевірку результату:

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

3.3. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в цій матриці k рядків і k стовпців, де:

$$k \le \min(m; n).$$

Із елементів, що стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, складаємо визначник k-го порядку підматриці k-го порядку. Усі такі визначники називаються ***мінорами*** цієї матриці.

У матриці A може бути виділений, зокрема, ***мінор 2-го порядку***.

Означення рангу матриці

Рангом матриці називається найбільший порядок мінора цієї матриці, який не дорівнює нулю.

Ранг матриці позначають:

$$r, r(A) \text{ або } rang\, A.$$

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається **базисним**. У матриці може існувати кілька базисних мінорів.

Властивості рангу матриці

1. Ранг матриці дорівнює нулю ***лише тоді,*** коли матриця є нульовою. В інших випадках ранг матриці дорівнює деякому додатному числу.

2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого з її розмірів m чи n, тобто:

$$0 \le r \le \min(m, n).$$

3. Для квадратної матриці n-го порядку виконується рівність $r = n$ ***тоді й лише тоді***, коли матриця є неособливою.

4. Якщо $r < n$, то визначник цієї квадратної матриці дорівнює нулю.

3.4. Методи знаходження рангу матриці

Розглянемо два основні методи знаходження рангу матриці.

1. Метод обвідних мінорів

Метод обвідних мінорів полягає в послідовному обчисленні мінорів, починаючи з мінорів менших порядків і переходячи до мінорів більших порядків.

Якщо знайдено відмінний від нуля мінор k-го порядку, то надалі обчислюють ***лише мінори порядку*** $(k+1)$, які називаються ***обвідними***.

У разі коли всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, ранг матриці дорівнює k.

Зазначений метод є досить громіздким для матриць великого порядку.

2. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

Метод елементарних перетворень полягає в застосуванні елементарних перетворень матриці під час зведення її до діагонального вигляду. Основною перевагою цього методу є те, що в процесі виконання елементарних перетворень ранг матриці не змінюється.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі операції:

1) перестановка місцями довільних двох рядків (або стовпців);

2) транспонування матриць;

3) множення кожного елемента довільного рядка (або стовпця) на число, яке не дорівнює нулю;

4) викреслювання рядка (або стовпця), який містить усі нульові елементи;

5) додавання до елементів довільного рядка (або стовпця) відповідних елементів іншого рядка (або стовпця), помножених на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю.

Під час виконання наведених елементарних перетворень ранг матриці залишається незмінним.

Означення еквівалентних матриць:

Дві матриці називаються ***еквівалентними,*** якщо їхні ранги рівні. Це записують так: *A~B,* тобто *r(A) = r(B).*

За допомогою елементарних перетворень матрицю зводять до діагонального вигляду. Ранг матриці буде дорівнювати кількості діагональних елементів, які не дорівнюють нулю.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. Обчислення визначника.

Обчислимо визначник за правилом трикутника.

$$\Delta = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 7 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot 2$$
$$= 18 + 14 + 0 - 3 - 0 - 28 = 1$$

Крок 2. Обчислення алгебраїчних доповнень (детально):

1) алгебраїчні доповнення першого рядка:

– Мінор M_{11}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 6, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (+1) \cdot 6 = 6.$$

– Мінор M_{12}:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

– Мінор M_{13}:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3, \; A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (+1) \cdot (-3) =$$
$$= -3.$$

2) алгебраїчні доповнення другого рядка:

– Мінор M_{21}:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 14, A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot 14 = -14.$$

– Мінор M_{22}:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (+1) \cdot 5 = 5.$$

– Мінор M_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -7, A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot (-7) = 7.$$

3) алгебраїчні доповнення третього рядка:

– Мінор M_{31}:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 11, A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (+1) \cdot 11 = 11.$$

– Мінор M_{32}:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4, A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

– Мінор M_{33}:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = -5, A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (+1) \cdot (-5) = -5.$$

Матриця алгебраїчних доповнень

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -14 & 5 & 7 \\ 11 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Транспонування та знаходження A^{-1}

$$(A)^T = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 11 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = 1$, маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A)^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -14 & 11 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 11 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Перевіримо правильність знайденої оберненої матриці через множення:

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Виконавши множення матриць,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -14 & 11 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: отже, матриця A^{-1} знайдена правильно.

Зауваження:

- рекомендується *обов'язково* підписувати кожен мінор і алгебраїчне доповнення;
- *особливу увагу* слід звертати на знак $(-1)^{i+j}$.
- після знаходження A^{-1} доцільно виконувати *перевірку множенням*.

Приклад 2. Знайти ранг матриці:

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки в матриці *A* існують мінори 1-го порядку, що не дорівнюють нулю, ранг матриці не менший за 1.

Перевіримо мінори 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 0.$$

Розглянемо інший мінор 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2.$$

Переставимо 2-й і 3-й стовпці, розмістивши цей мінор у лівому верхньому куті:

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обводимо мінор 2-го порядку третім рядком і третім стовпцем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 \cdot (-1) -$$
$$-1 \cdot (-2) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = -10 - 12 - 4 + 10 + 4 + 12 = 0.$$

Аналогічно:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, існує ненульовий мінор 2-го порядку, а всі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю.

Відповідь: $r(A) = 2$.

Приклад 3. Знайти ранг матриці:

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі: спочатку поміняємо місцями перший і другий рядки.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \times (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \end{pmatrix} \times 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: r(A) = 2.

Приклад 4. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} x(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Оскільки можна третій та четвертий стовпці поміняти місцями й отримати третій елемент головної діагоналі, який відмінний від нуля, то *rang (A)* = 3.

Відповідь: rang (A) = 3.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти матриці, обернені до даних:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Питання для самоконтролю

1. Яка матриця називається оберненою до цієї квадратної матриці?
2. За якої умови квадратна матриця має обернену матрицю?
3. Який зв’язок існує між визначником матриці та існуванням оберненої матриці?
4. Запишіть рівність, що визначає обернену матрицю через одиничну матрицю.
5. У чому полягає метод знаходження оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень?
6. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента матриці?
7. Яку роль відіграє транспонування під час побудови оберненої матриці?
8. Чому вироджена матриця не має оберненої?
9. Що називається рангом матриці?
10. Який максимальний можливий ранг матриці розміру $m \times n$?
11. За якої умови ранг матриці дорівнює нулю?
12. Що називається базисним мінором матриці?

13. У чому полягає метод обвідних мінорів для знаходження рангу матриці?

14. Які елементарні перетворення матриці не змінюють її ранг?

15. Як визначити ранг матриці після зведення її до діагонального вигляду?

Тести

1. Яка матриця називається оберненою до даної квадратної матриці:

а) матриця, добуток якої на дану дорівнює нульовій матриці;

б) матриця, добуток якої на дану дорівнює одиничній матриці;

в) матриця, яка має такий самий визначник, як дана;

г) матриця, яка є транспонованою до даної.

2. За якої умови квадратна матриця має обернену матрицю:

а) якщо її визначник не дорівнює нулю;

б) якщо її ранг менший за порядок матриці;

в) якщо вона прямокутна.

3. Який зв'язок існує між визначником матриці та існуванням оберненої матриці:

а) обернена матриця існує тільки, якщо $\det A = 0$;

б) обернена матриця існує тільки, якщо $\det A \neq 0$;

в) визначник матриці не впливає на існування оберненої;

г) обернена матриця існує для будь-якої матриці.

4. У чому полягає метод знаходження оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень:

а) знаходять визначник матриці та транспонують її;

б) усі елементи матриці множать на константу;

в) кожен елемент замінюють на його алгебраїчне доповнення, потім транспонують і ділять на визначник;

г) використовують тільки мінори першого порядку.

5. Яку роль відіграє транспонування під час побудови оберненої матриці:

а) не відіграє жодної ролі;

б) потрібне для обчислення алгебраїчних доповнень;

в) використовується для знаходження мінорів нульового порядку;

г) транспонування замінює обчислення визначника.

6. Вироджена матриця не має оберненої, тому що:

а) її визначник дорівнює нулю;

б) її ранг дорівнює максимальному порядку;

в) вона квадратна;

г) всі елементи додатні.

7. Що називається рангом матриці:

а) максимальна кількість ненульових елементів;

б) найвищий порядок мінору, що не дорівнює нулю;

в) визначник матриці;

г) кількість стовпців у матриці.

8. За якої умови ранг матриці дорівнює нулю:

а) якщо всі її елементи додатні;

б) якщо матриця квадратна;

в) якщо матриця нульова;

г) якщо визначник не дорівнює нулю.

9. Які елементарні перетворення матриці не змінюють її ранг:

а) перестановка рядків і стовпців, множення рядка на нуль;

б) перестановка рядків і стовпців, додавання кратних інших рядків, множення на число $\neq 0$;

в) вилучення рядка з ненульовими елементами;

г) додавання всіх елементів до нуля.

10. Як визначити ранг матриці після зведення її до діагонального вигляду:

а) ранг дорівнює кількості нульових елементів;

б) ранг дорівнює кількості діагональних елементів, що не дорівнюють нулю;

в) ранг дорівнює порядку матриці;

г) ранг дорівнює сумі всіх елементів.

ТЕМА 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МАТРИЧНИЙ МЕТОД

4.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення.

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

4.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.

Основні теоретичні відомості

4.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення

Система співвідношень виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.1)$$

де a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n)$ – довільні дійсні числа, називається ***системою*** m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з*** n ***невідомими*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами системи.*
- Числа b_i *– вільними членами системи.*

Система (1.1) називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, тобто:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Якщо ж хоч один вільний член відмінний від нуля, система називається ***неоднорідною***.

Деяка множина чисел називається ***впорядкованою,*** якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто кожному числу присвоєно порядковий номер.

Упорядкований набір $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ називається ***розв'язком системи* (1.1)**, якщо в разі підстановки цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

Система (1.1) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок.

• ***Однорідна система*** завжди сумісна, оскільки тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

завжди задовольняє її.

• Якщо система не має жодного розв'язку, вона називається ***несумісною***.

Сумісна система називається:

– ***визначеною,*** якщо має єдиний розв'язок;

– ***невизначеною,*** якщо має більше ніж один розв'язок.

Дві системи називаються ***еквівалентними,*** якщо множини їх розв'язків однакові.

Матриці системи

Матриця коефіцієнтів системи (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Розширена матриця системи (1.1):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \qquad (1.3)$$

де:

$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – ***матриця вільних членів;***

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – ***матриця невідомих.***

У матричному вигляді систему (1.1) можна записати як:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

або коротко в матрично-векторній формі СЛАР:

$$AX = B. \tag{1.5}$$

Системи з однаковою кількістю рівнянь і невідомих

Якщо $m = n$, то кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих. Тоді система (1.1) має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{1.6}$$

Відповідні матриці:

Матриця коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Матриці вільних членів і невідомих:

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n), X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тоді систему (1.6) можна записати як:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

або коротко:

$$AX = B. \tag{1.9}$$

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Правило Крамера застосовується для розв'язування систем лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (1.6)$$

в яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник матриці коефіцієнтів системи (1.7) відмінний від нуля.

Правило Крамера

Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.6). Визначник матриці коефіцієнтів системи (1.7):

$$\Delta = \det A \neq 0.$$

Тоді система (1.6) має єдиний розв'язок, який перебуває за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (1.10)$$

де визначник Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отримується із визначника Δ заміною в ньому i-го стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.11)$$

Доведення

Розглянемо першу формулу (1.10). Множимо перше рівняння системи (1.6) на A_{11}, друге – на A_{21}, …, n-е – на A_{n1}, і складаємо отримані рівняння:

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + A_{n1}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) = b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}.$$

Після групування доданків:

$$x_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \cdots + A_{n1}a_{n1}) + x_2(A_{11}a_{12} + \cdots + A_{n1}a_{n2}) + \cdots + x_n(\dots) = b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}.$$

- Сума в першій дужці – розклад визначника матриці (1.7) за елементами першого стовпця.
- Усі інші суми – добутки алгебраїчних доповнень елементів першого стовпця на елементи інших стовпців, які дорівнюють нулю.
- Сума $b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}$ – розклад визначника Δ_1(1.11) за елементами першого стовпця.

Отже:

$$x_1 \cdot \Delta = \Delta_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогічно для довільного x_i множимо перше рівняння на A_{1i}, друге – на A_{2i} тощо, отримуючи формули Крамера (1.10).

Зауваження

Якщо система (1.6) ***однорідна***, то всі визначники (1.11) $\Delta_i = 0$, оскільки i-й стовпець складається з нулів. Тому така система в разі $\Delta \neq 0$ має ***єдиний нульовий розв'язок***.

Найпростіші випадки застосування правила Крамера

1) система двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \qquad (1.12)$$

Визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Можливі випадки:

1. $\Delta \neq 0$ ⇒система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \qquad (1.14)$$

2. $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$або $\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow$ система ***несумісна***.

3. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0 \Rightarrow$ система ***невизначена***, має безліч розв'язків.

2) система трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (1.15)$$

Визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (1.16)$$

4.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (1.17)$$

у якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, та її матричний запис (1.9), тобто рівняння:

$$AX = B.$$

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то існує обернена до неї матриця A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння (1.9) зліва на матрицю A^{-1} та одержимо:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ та $EX = X$, маємо:

$$X = A^{-1}B. \qquad (1.18)$$

Формула (1.18) задає матричний розв'язок системи лінійних рівнянь (1.6). Отже, для розв'язання системи рівнянь (1.6) достатньо знайти матрицю, обернену до матриці коефіцієнтів системи, та помножити її справа на матрицю вільних членів. Зазначимо, що матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь застосовується лише в разі, коли матриця системи є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}.$$

Розв'язання

Обчислюємо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11,\ \Delta \neq 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 67,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{67}{11};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{11}.$$

Отже: $x_1 = \frac{67}{11}$, $x_2 = \frac{-2}{11}$.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) = 5, \quad \Delta \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже:

$$x_1 = \frac{20}{5} = 4, x_2 = \frac{10}{5} = 2, x_3 = \frac{5}{5} = 1,$$

тому $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T$.

Відповідь: розв'язком системи є матриця-стовпець:

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Однорідна система

Розглянемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Крок 1. Записуємо систему в матричному вигляді:

$$AX = B, \text{ де } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Обчислюємо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1(-1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) - 2\big(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)\big) +$$
$$+(-1)(2 \cdot 1 - (-1)(-1)) = -4 - 10 - 1 = -15 \neq 0.$$

Крок 3. Висновок: оскільки $\Delta \neq 0$, система однорідна має **єдиний розв'язок**, і він тривіальний:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Неоднорідна система

Розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\,. \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Крок 1. Записуємо систему в матричному вигляді:

$$AX = B, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Перевіряємо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\big((-1)(-1) - 1 \cdot 3\big) - 1(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) + 1(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1) =$$
$$= -2 + 3 + 7 = 8 \neq 0.$$

Крок 3. Знаходимо визначники для невідомих (формули Крамера):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 16, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Крок 4. Знаходимо невідомі:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{8} = -1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1.$$

Крок 5. Висновок: розв'язком системи є матриця-стовпець:

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пояснення кроків

1. Записати систему в матричній формі $AX = B$.
2. Обчислити визначник матриці коефіцієнтів $\Delta = \det A$.
3. Для кожного невідомого x_i замінити i-й стовпець матриці A на стовпець вільних членів B та обчислити Δ_i.
4. Знайти $x_i = \Delta_i/\Delta$.
5. Записати розв'язок у формі матриці-стовпця.

Зауваження

Якщо $\Delta = 0$, потрібно перевірити сумісність системи:

- якщо хоча б один $\Delta_i \neq 0$ – система несумісна;
- якщо всі $\Delta_i = 0$ – система має безліч розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої системи:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\det A = 12 \neq 0$$

отже, існує обернена матриця A^{-1}.

Знайдемо її, обчисливши відповідні алгебраїчні доповнення за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Складемо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень, отримавши приєднану матрицю:

$$(A_{ij})^T. = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Помножимо приєднану матрицю на $\frac{1}{\Delta}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{ij})^T.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix},$$

остаточно одержуємо:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 40 - 5 - 11 \\ -20 + 7 - 11 \\ -20 + 1 + 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв’язком системи є матриця-стовпець:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Завдання для самоконтролю

1. Розв'язати СЛАР за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x - 3y - 8 = 0 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + 2z = -1; \\ x - y = 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = -1 \\ x + 4y - z = 8 \\ 6x - 4y + 10z = 3 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 18 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$.

2. Розв'язати СЛАР методом оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ 8x - 20y - 5 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + 8y = -1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 8x - 7y + 5z = 4; \\ 2x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь та з яких елементів вона складається?

2. У чому полягає різниця між однорідною та неоднорідною системами лінійних алгебраїчних рівнянь?

3. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною та невизначеною?

4. Що називається матрицею коефіцієнтів системи, матрицею вільних членів і розширеною матрицею системи?

5. За яких умов можна застосовувати правило (формули) Крамера для розв'язування системи лінійних рівнянь?

6. Як утворюються визначники Δ_i у формулах Крамера та який їхній геометричний зміст?

7. Які можливі випадки розв'язності системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими залежно від значень $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$?

8. У чому полягає сутність матричного методу розв'язання систем лінійних рівнянь та за якої умови він застосовується?

9. Як пов'язані між собою визначник матриці коефіцієнтів системи й існування оберненої матриці?

10. У чому полягають переваги та обмеження застосування формул Крамера й матричного методу для розв'язування систем лінійних рівнянь?

Тести

1. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається:

а) система рівнянь, у яких змінні входять лише в першому степені;

б) будь-яка система рівнянь з кількома змінними;

в) система рівнянь, що містить добутки змінних;

г) система рівнянь, у яких змінні входять у квадраті.

2. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо:

а) усі коефіцієнти дорівнюють нулю;

б) усі вільні члени дорівнюють нулю;

в) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих;

г) вона має єдиний розв'язок.

3. Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною, якщо:

а) її визначник дорівнює нулю;

б) вона має хоча б один розв'язок;

в) вона має нескінченно багато розв'язків;

г) вона є однорідною.

4. Матрицею коефіцієнтів системи лінійних рівнянь називається:

а) матриця, складена з вільних членів;

б) матриця змінних системи;

в) матриця, елементами якої є коефіцієнти в разі невідомих;

г) розширена матриця системи.

5. Правило Крамера застосовується до системи лінійних рівнянь, якщо:

а) система є однорідною;

б) кількість рівнянь більша за кількість невідомих;

в) визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю;

г) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і det a ≠ 0.

6. Визначник Δ_i у формулах Крамера отримується за допомогою:

а) заміни *i*-го рядка матриці коефіцієнтів на нульовий;

б) заміни *i*-го стовпця матриці коефіцієнтів стовпцем вільних членів;

в) додавання стовпця вільних членів до матриці;

г) транспонування матриці коефіцієнтів.

7. Якщо для системи двох рівнянь з двома невідомими виконується $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0$, то система:

а) має єдиний розв'язок;

б) є однорідною;

в) є несумісною;

г) має безліч розв'язків.

8. Матричний метод розв'язання системи ґрунтується на формулі:

а) $AX = 0$;

б) $A^T X = B$;

в) $X = A^{-1}B$;

г) $X = AB^{-1}$.

9. Обернена матриця A^{-1} існує тоді й тільки тоді, коли:

а) матриця є прямокутною;

б) матриця є симетричною;

в) det a = 0;

г) det a ≠ 0.

10. Яке твердження є правильним:

а) матричний метод можна застосовувати до будь-якої системи;

б) формули Крамера застосовуються до систем будь-якого розміру;

в) обидва методи застосовуються лише до квадратних невироджених систем;

г) формули Крамера простіші за метод Гауса для великих систем.

ТЕМА 5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОДИ ГАУСА ТА ЖОРДАНА-ГАУСА

5.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

5.2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса.

5.3. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Основні теоретичні відомості

5.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

У разі $n > 3$ обчислення визначників призводить до громіздких і трудомістких перетворень, унаслідок чого використання формул Крамера або матричного методу стає неефективним. Одним із найбільш універсальних і практично важливих методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який ґрунтується на послідовному вилученні невідомих.

Сутність методу полягає в приведенні заданої системи до еквівалентної системи більш простого вигляду через виконання елементарних перетворень над рівняннями.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Етапи методу Гауса

Перший етап (прямий хід)

Послідовно вилучають невідомі:

– x_1 – з усіх рівнянь, починаючи з другого;

– x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього тощо.

У результаті система зводиться до трикутного (або трапеціє-подібного) вигляду, що істотно спрощує подальші обчислення.

Другий етап (обернений хід)

З останнього рівняння знаходять значення x_n, після чого послідовно визначають $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ за допомогою підстановки.

Елементарні перетворення

Перший етап методу Гауса зручно реалізовувати над розширеною матрицею системи за допомогою таких елементарних перетворень:

– додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на деяке число;

– перестановка рядків або стовпців матриці;

– множення рядка на ненульове число.

Застосування цих перетворень не змінює множину розв'язків системи.

Приклад

Користуючись методом Гауса, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Для зручності першим рівнянням обираємо те, в якому коефіцієнт у разі x_1 дорівнює 1. Поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та виконаємо прямий хід. Домножимо перший рядок на (–2) і додамо до другого рядка; перший рядок домножимо на (–4) і додамо до третього рядка.

Наступним етапом домножимо другий рядок на 6 і додамо до третього рядка.

$$\bar{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -6 & -1 & -13 \end{array}\right) \sim$$

Отримаємо:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & -31 & -31\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=2\\ x_2-5x_3=-3\\ -31x_3=-31\end{array}\right.\uparrow\left\{\begin{array}{l}x_1=2-x_2-x_3=-1\\ x_2=-3+5x_3=2\\ x_3=1\end{array}\right..$$

Відповідь: $x_1=-1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=1.$

5.2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса

Метод Жордана-Гауса є модифікацією методу Гауса і дає змогу уникнути виконання оберненого ходу. Його ідея полягає в повному вилученні невідомої не лише нижче, а й вище розв'язувального елемента, що дає нагоду безпосередньо отримати значення змінних.

Алгоритм одного кроку методу Жордана-Гауса:

1. Обирають розв'язувальний елемент $a_{ij}\neq 0$ (бажано рівний 1).
2. Усі елементи i-го рядка (розв'язувального) ділять на a_{ij} і записують в i рядок.
3. У розв'язувальному j-му стовпці замість a_{ij} записують 1, а замість інших елементів – 0.
4. Інші елементи обчислюють за формулою:

$$\overline{a_{kl}}=a_{kl}-\frac{a_{kj}\cdot a_{il}}{a_{ij}}=\frac{a_{ij}a_{kl}-a_{kj}a_{il}}{a_{ij}},k=1,\dots,m,\ l=1,\dots,n.$$

5. Обчислення елементів $\overline{a_{kl}}$ за цією формулою доцільно виконувати за схемою прямокутника:

$$\begin{array}{ccc}a_{il} & & a_{ij}\\ & \times & \\ a_{kl} & & a_{kj}\end{array}$$

$$+\qquad\qquad -$$

6. Після виконання цих перетворень провідний стовпець матриці набуває вигляду одиничного вектора, а отримана матриця є еквівалентною початковій.

Результат одного кроку

У результаті одного кроку методу Жордана-Гауса:

- у вибраному стовпці міститься *одна одиниця* та *всі інші елементи дорівнюють нулю;*
- кількість ненульових елементів у матриці *зменшується*;
- система переходить до *простішого* еквівалентного вигляду.

Повторюючи описані кроки для всіх змінних, матрицю зводять до приведеного ступінчастого вигляду, з якого безпосередньо знаходять розв'язок системи або роблять висновок про його відсутність чи нескінченність.

5.3. Системи лінійних однорідних рівнянь

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$A\vec{x} = 0.$$

Однорідна СЛАР завжди сумісна, оскільки $r(A) = r(A_1)$, і завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Умови існування ненульового розв'язку:

1. Однорідна система має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли:

$$r < n.$$

2. Однорідна система n рівнянь з n невідомими має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки $r = 2,\ n = 3,\ r < n,$ система має безліч розв'язків. x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна.

$$x_1 = 2C, x_2 = 3C, x_3 = C.$$

Відповідь:

$$x_1 = 2C, x_2 = 3C, x_3 = C.$$

Розв’язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти розв’язок СЛАР методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв’язання

Використовуючи елементарні перетворення розширеної матриці, отримаємо:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -7 & -5 & -29 \\ 0 & -9 & -16 & -66 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -7 & -5 & -29 \\ 0 & 0 & -\frac{67}{7} & -\frac{201}{7} \end{array}\right).$$

Перейдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ -7x_2 - 5x_3 = -29, \\ -\frac{67}{7} = -\frac{201}{7} \end{cases} \rightarrow$$

Відповідно до оберненого ходу:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{201}{7} \cdot \frac{7}{67} = 3, \\ x_2 = (-29 + 5 \cdot 3) \div (-7) = 2, \\ x_1 = 14 - 2x_2 - 3x_3 = 14 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Приклад 2. Знайти розв’язок СЛАР методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання

Маємо випадок СЛАР, коли $n = 4, m = 3$. Складаємо розширену матрицю і зводимо її до трикутного виду:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\times(-2)}{\longleftarrow} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A_1) = 2$, тому СЛАР сумісна, оскільки $r = 2, n = 4$ і $r < n$, то система невизначена. Дві невідомі ($r = 2$) базисні та дві $n - r = 2$ будуть вільні. Невідомі x_1 та x_2 можна обрати за базисні, тому що базисний мінор $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, тоді x_3, x_4 – вільні невідомі.

Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + x_4 \\ 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Вільні невідомі перенесли в праву частину:

$$\begin{cases} 2x_1 = x_3 + x_4 + 2 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}.$$

Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення, наприклад $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Загальний розв’язок СЛАР матиме вигляд:

$$x_1 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4} = -\frac{C_1}{4} + \frac{3C_2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{4}$$

$$x_3 = C_1$$

$$x_4 = C_2.$$

Відповідь: $x_1 = 8, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 2$.

Приклад 3. Знайти розв’язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = -6 \\ \quad\quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad = 6 \end{cases}.$$

Розв’язання

Складаємо таблицю ($\sum$ – контрольний стовпчик)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
1	–2	0	–1	–6	–8
0	1	1	3	16	21
2	-3	2	0	6	7

Розв’язуючий елемент $a_{11} = 1$. Перепишемо без змін рядок, який містить розв’язуючий елемент, а всі елементи розв’язуючого стовпчика замінимо на 0. Інші елементи знайдемо за правилом прямокутника.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
0		3	–3	–12	–15
0	-3	1	3	16	21
0	–5	8	–4	–6	–7

Розв’язуючий елемент дорівнює (–3). Поділимо на (–3) елементи 2-го рядка, одержимо:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	–3	2	6	7
0	1	–1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	–5	8	–4	–6	–7

Розв’язуючий 2-й рядок записуємо без змін, елементи розв’язуючого 2-го стовпчика замінимо на 0. Перший стовпчик записуємо без змін. Елементи інших клітинок знаходимо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	–2	1	2	2
0	1	–1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Поділимо 3-й рядок на 2, виберемо розв'язувальний елемент і виконаємо всі перетворення кроку Жордана-Гауса.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	–2	1	2	2
0	1	–1	1	4	5
0	[0]	[1]	1	6	8
0	0	3	1	14	18
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	[0]	[−2]	–4	–6

Поділимо 4-й рядок на (–2), виберемо наступний розв'язувальний елемент і повторимо підрахунки.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	[1]	2	3
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

Відповідь системи міститься в стовпчику b: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти розв'язок СЛАР методом Гауса:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 10 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$.

2. Знайти розв’язок СЛАР методом Жордана-Гауса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$.

Питання для самоконтролю

1. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)? Поясніть визначення та наведіть приклад СЛАР із трьома змінними.

2. Які розв’язки може мати СЛАР? Назвіть усі можливі випадки й дайте приклади для кожного.

3. Що таке розширена матриця СЛАР і як вона формується? Наведіть приклад для системи трьох рівнянь з трьома невідомими.

4. Який принцип прямого ходу методу Гауса? Опишіть, як послідовно вилучаються невідомі.

5. Що таке трикутна (ступінчаста) форма матриці й навіщо вона потрібна?

6. Які елементарні перетворення застосовуються за методом Гауса? Поясніть, чому вони не змінюють множину розв’язків.

7. Як здійснюється обернений хід методу Гауса? Поясніть порядок обчислення змінних після приведення матриці до трикутного вигляду.

8. У чому відмінність методу Жордана-Гауса від класичного методу Гауса? Назвіть ключову особливість одного кроку.

9. Опишіть алгоритм одного кроку методу Жордана-Гауса. Перерахуйте основні дії над провідним елементом і стовпцем.

10. Як змінюються елементи матриці під час занулення стовпця в методі Жордана-Гауса? Наведіть загальну формулу для перерахунку елементів.

Тести

1. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

а) сукупність нелінійних рівнянь з кількома змінними;

б) сукупність рівнянь, у яких змінні входять лише в першому степені;

в) сукупність лінійних рівнянь, що містять одні й ті самі змінні;

г) будь-яка система рівнянь з матрицею коефіцієнтів.

2. Які розв'язки може мати СЛАР:

а) лише один або жодного;

б) лише скінченну кількість розв'язків;

в) єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків або жодного розв'язку;

г) завжди має хоча б один розв'язок.

3. Що таке розширена матриця СЛАР:

а) матриця, що складається лише з вільних членів;

б) матриця, утворена транспонуванням матриці коефіцієнтів;

в) матриця, отримана приєднанням стовпця вільних членів до матриці коефіцієнтів;

г) квадратна матриця системи.

4. У чому полягає принцип прямого ходу методу Гауса:

а) у знаходженні визначника матриці;

б) у підстановці змінних у зворотному порядку;

в) у послідовному вилученні змінних для зведення системи до трикутного вигляду;

г) у нормуванні кожного рядка матриці.

5. Що називають трикутною (ступінчастою) формою матриці:

а) матрицю, у якій усі елементи дорівнюють одиниці;

б) матрицю, у якій усі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю;

в) матрицю з однаковими рядками;

г) матрицю, що має обернену.

6. Які елементарні перетворення застосовуються в методі Гауса:

а) лише додавання рядків;

б) лише множення рядка на число;

в) лише перестановка стовпців;

г) додавання рядків, перестановка рядків, множення рядка на ненульове число.

7. Елементарні перетворення не змінюють множину розв'язків СЛАР тому що:

а) змінюється лише порядок рівнянь;

б) змінюється кількість рівнянь;

в) нова система є еквівалентною початковій;

г) зберігається визначник матриці;

8. Як здійснюється обернений хід методу Гауса:

а) починаючи з першого рівняння;

б) одночасно для всіх змінних;

в) починаючи з останнього рівняння з послідовною підстановкою;

г) за допомогою визначників.

9. Основна відмінність методу Жордана-Гауса від методу Гауса у:

а) використанні лише квадратних матриць;

б) відсутності оберненого ходу;

в) зануленні всіх елементів провідного стовпця, крім одного;

г) знаходженні розв'язку через визначники.

10. Як змінюються елементи матриці під час занулення стовпця в методі Жордана-Гауса:

а) усі елементи ділять на провідний;

б) лише провідний рядок змінюється;

в) усі інші елементи перераховують за формулою з використанням провідного елемента;

г) матриця не змінюється.

РОЗДІЛ ІІ
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ТЕМА 6. ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ

6.1. Вектори в просторі. Скалярний добуток двох векторів.
6.2. Векторний добуток векторів.
6.3. Мішаний добуток векторів.
6.4. Векторний простір, його розмірність і базис.
6.5. Розклад вектора за базисом.

Основні теоретичні відомості

6.1. Вектори в просторі. Скалярний добуток двох векторів

Геометричним вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, початок і кінець якого вказані.

Вектори можна задати двома точками A і B. Якщо точка A має координати $(x_1; y_1; z_1)$, а точка B має координати $(x_2; y_2; z_2)$, тоді вектор $\overline{AB}$ має такі координати: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Довжиною, або ***модулем,*** вектора $\overline{AB}$ називається довжина відрізка АВ, яка позначається символом $|\overline{AB}|$.

Нульовий вектор – це вектор, початок і кінець якого збігаються. Позначається $\bar{0}$.

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Позначення: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ – колінеарні й однаково напрямлені вектори;

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ – колінеарні вектори з різним напрямком.

Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, мають однакову довжину та однаково напрямлені. Водночас усі нульові вектори вважаються рівними.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***, або ***нормованим вектором***.

Три вектори називаються ***компланарними***, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині.

Сумою $\bar{a} + \bar{b}$ двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор, що виходить з початку вектора $\bar{a}$ в кінець вектора $\bar{b}$ за умови, що початок вектора $\bar{b}$ був прикладений до кінця вектора $\bar{a}$ (рис. 6.1). Це правило зазвичай називають правилом трикутника:

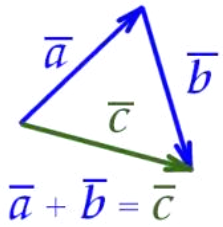


Рисунок 6.1

Властивості додавання векторів:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (комутативність);

2) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ (наявність нейтрального елемента);

3) $\exists\, \bar{a}^*: \bar{a} + \bar{a}^* = \bar{0}$ (наявність протилежного елемента);

4) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (асоціативність).

Існує другий спосіб побудови суми двох векторів, так зване «***правило паралелограму***»: сумою двох векторів $\bar{a}\ i\ \bar{b}$, відкладених від спільного початку O, є вектор $\overline{OC}$, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}\ i\ \bar{b}$ як на сторонах.

Добутком $\alpha \cdot \bar{a}$ вектора $\bar{a}$ на дійсне число α називається вектор $\bar{b}$, колінеарний вектору $\bar{a}$, довжина якого дорівнює $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$, а напрямок співпадає з напрямком вектора $\bar{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний напрямку вектора $\bar{a}$, якщо $\alpha < 0$.

Властивості операції множення вектора на число:

1) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b}$ (дистрибутивність);

2) $\bar{a}(\alpha + \beta) = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a}$;

3) $(\alpha\beta)\bar{a} = (\alpha\bar{a})\beta$ (асоціативність).

Теорема 6.1. Якщо вектор $\bar{b}$ колінеарний деякому ненульовому вектору $\bar{a}$, то існує дійсне число λ таке, що $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Позначення $\bar{a} \cdot \bar{b}$ або $(\bar{a}\bar{b})$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot cos\alpha$$

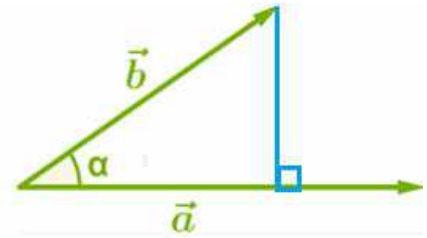


Рисунок 6.2

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проєкцію другого вектора на вісь, що визначається першим із зазначених векторів: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = \left|\bar{b}\right| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$.

Теорема 6.2. Два вектори ортогональні тоді та лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює 0.

Фізичний зміст скалярного добутку

Якщо на будь-яку матеріальну точку діє сила $\bar{F}$, у наслідок чого точка переміщується в напрямку $\bar{S}$, то скалярним добутком сили на переміщення є робота. $A = \bar{F} \cdot \bar{S}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (комутативність);

2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \alpha\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right)$ $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативність);

3) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ (дистрибутивність);

4) $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$, $\bar{a}^2 = 0 \leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$;

5) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot cos\alpha > 0$, коли α – гострий кут;

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot cos\alpha < 0$, коли α – тупий кут.

Ці властивості дають нам змогу із векторами працювати як із числами в разі знаходження скалярного добутку.

Трійка векторів називається ***упорядкованою***, якщо вказано, який із векторів взяти першим, який – другим, який – третім.

6.2. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (позначається $\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}\bar{b}]$) називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє таким трьом умовам:

довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на синус кута між ними, тобто:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\alpha$;

2) вектор $\bar{c}$ ортогональний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ напрямлений так, що трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ є правою.

Вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нульовому вектору.

Геометричний зміст векторного добутку

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\alpha = S.$$

Модуль векторного добутку $|\bar{a} \times \bar{b}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, приведених до спільного початку.

Фізичний зміст векторного добутку

Якщо на точку O діє сила $\bar{F}$, прикладена до точки M, сила позначена вектором $\bar{b}$ і вектор $\bar{a}$ з'єднує точки O та M, то векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ – це момент сили $\vec{F}$ стосовно точки O.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \overline{mom_O \bar{F}}.$$

Ортом будь-якого вектора $\vec{a}$ називається одиничний вектор, колінеарний $\bar{a}$, напрямок якого збігається з напрямком $\bar{a}$.

Якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами, то векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ можна обчислити за допомогою визначника третього порядку.

$\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо координати векторів пропорційні, то векторний добуток дорівнює нулеві, й можна стверджувати, що вектори колінеарні.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ некомутативність множення;

2. $(\alpha\bar{a}) \times \bar{b} = \alpha(\bar{a} \times \bar{b})$ асоціативність щодо скалярного множника;

3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ дистрибутивність стосовно додавання;

4. $\bar{a} \times \bar{a} = 0$.

6.3. Мішаний добуток векторів

Нехай задано три довільні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$. Якщо вектор $\bar{a}$ векторно помножити на вектор $\bar{b}$, а потім отриманий вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ скалярно помножити на вектор $\bar{c}$, то отримаємо число $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, яке називається ***мішаним добутком*** векторів $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$.

Геометричний зміст мішаного добутку векторів

Мішаний добуток $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, який береться зі знаком «+», якщо трійка $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ є правою, та зі знаком «–», якщо трійка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ є лівою. Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, то $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ дорівнює 0. Позначається $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Відповідною та достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулеві їхнього мішаного добутку.

Якщо три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами: $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ дорівнює визначнику, рядки якого, відповідно, дорівнюють координатам векторів, що перемножуються:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

6.4. Векторний простір, його розмірність і базис

Упорядкована множина *n* дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ називається *n-вимірним векторним простором* R_n.

Частинні випадки R_n: R_1 – одномірний простір, елементами якого є вектори з однією координатою, тобто вектори, що належать деякій прямій; R_2 – двовимірний простір, елементами якого є вектори, що належать деякій площині та мають по дві координати; R_3 – тривимірний простір, елементами якого є вектори з трьома координатами.

У *n*-вимірному векторному просторі можна виконувати дії: додавання векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ та множина вектора на число $k \in R$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \ldots a_n + b_n),$$

$$k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; \ldots; ka_n).$$

Вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ називаються рівними, якщо $a_i = b_i, i = \overline{1, n}$.

Роль нуль-вектора відіграє $\vec{O} = (0; 0; \ldots; 0)$.

Вектор $\vec{b}$ є ***лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, якщо існують такі числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, які одночасно не дорівнюють нулю, що $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \ldots + x_m \vec{a}_m$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається ***лінійно залежною***, якщо існують такі числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, які одночасно не дорівнюють нулю, що виконується рівність:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \ldots + x_m \vec{a}_m = 0.$$

Якщо ця рівність можлива лише за умови, що $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними***.

У просторі R_n існує безліч лінійно незалежних систем векторів.

Базисом ***n-вимірного*** векторного простору R_n називається будь-яка сукупність n лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор цього простору.

Максимальне число лінійно незалежних векторів простору називається його ***розмірністю***. Розмірність простору дорівнює кількості базисних векторів цього простору.

Наведемо без доведення такі важливі твердження.

1. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно залежні, то після приєднання до них одного або кількох нових векторів дістанемо знову лінійно залежну систему векторів.

2. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежну систему векторів.

3. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли хоча б один із цих векторів є лінійною комбінацією інших.

4. У просторі R_n будь-яка система $(n + 1)$ векторів є лінійно залежною.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ в просторі R_n за означенням 5 перепишемо рівність $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_n \vec{a}_n = 0$ в координатній формі, де $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}; ...; a_{ni}),\ i = \overline{1, n}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Маємо лінійну однорідну систему рівнянь $(n \times n)$ стосовно невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$

Якщо основний визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, і тоді вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ є лінійно незалежними за означенням.

Якщо $\Delta = 0$, то система має ненульові розв'язки, і тоді вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежними за означенням.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ $(m < n)$ достатньо обчислити ранг матриці, складеної з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Якщо $r(A) = m$, то вектори лінійно незалежні, а якщо $r(A) < m$, то вектори лінійно залежні.

6.5. Розклад вектора за базисом

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ утворюють базис у просторі R_n, то довільний вектор $\vec{a}$ цього простору є лінійною комбінацією базисних векторів, тобто існують такі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, що виконується рівність: $\vec{\alpha} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \ldots + x_n \vec{a}_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$.

Цей вираз називається розкладом вектора $\vec{\alpha}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$. Легко показати, що цей вираз – єдиний для вектора $\vec{\alpha}$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти координати вектора $\bar{b} = (a, 2a, -a)$, якщо його довжина дорівнює $\sqrt{96}$.

Розв'язання

За умовою задачі $|\bar{b}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{96}$, $6a^2 = 96$, $a^2 = 16, a = \pm 4$

Відповідь: $\overline{b_1} = (4; 8; -4), \overline{b_2} = (-4; 8; 4)$.

Приклад 2. Доведіть, що за будь-яких значень чисел $a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3$ три вектори $\bar{a} = (0; a_2; a_3)$, $\bar{b} = (0; b_2; b_3)$ та $\bar{c} = (0; c_2; c_3)$ компланарні.

Доведення

Перші координати заданих векторів – нулі. Якщо відкласти ці вектори від початку координат, усі відповідні їм напрямлені відрізки розміститься в площині yz. Отже, задані вектори компланарні.

Приклад 3. Визначте початок вектора $\bar{a} = (3, -4, -2)$, якщо його кінець розміщений у точці $B(3; -4; 5)$.

Розв'язання

Нехай початок вектора перебуває в точці $A(x, y, z)$, тоді:

$\overline{AB} = (3 - x, -4 - y, 3 - z)$. Маємо $3 - x = 3$, $-4 - y = -4$, $5 - z = -2$, звідки знаходимо $x = 0, y = 0, z = 7$, тобто $A(0; 0; 7)$.

Відповідь: $A(0; 0; 7)$.

Приклад 4. Знайдіть вектор $\bar{x}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\bar{a} = (2,4, -1)$ і $(\bar{x}\bar{a}) = 10$.

Розв'язання

Оскільки вектор $\bar{x}$ колінеарний вектору $\bar{a}$, то його координати пропорційні координатам вектора $\bar{a}$. Отже, $\bar{x} = (2\lambda; 4\lambda; -\lambda)$. Залишилося знайти λ. Для цього скористаємось умовою $(\bar{x}\bar{a}) = 10$.

Відомо, що скалярний добуток двох векторів, заданих координатами, можна обчислити як суму добутків відповідних координат. Маємо: $2\lambda + 4\lambda - \lambda = 10$, звідки $\lambda = 2$. Отже, $\bar{x} = (4; 8; -2)$.

Відповідь: $\bar{x} = (4; 8; -2)$.

Приклад 5. Яку трійку утворюють три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, якщо $\bar{a} = (1,2,3), \bar{b} = (-1,0,2), \bar{c} = (1,-2,5)$?

Розв'язання

Оскільки мішаний добуток

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0,$$

то за властивістю мішаного добутку задані вектори утворюють праву трійку.

Відповідь: права трійка.

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{a} = (2; 2; 1)$ *і* $\vec{b} = (0; 1; 1)$.
2. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$\vec{a} = (2; 3; 0)$,

$\vec{b} = (0; -3; 2)$,

$\vec{c} = (1; 2; 3)$.

3. Дослідити на лінійну залежність системи векторів:

а) $\vec{a}_1 = (-2; 1; 3)$,

$\vec{a}_2 = (3; 0; -1)$,

$\vec{a}_3 = (4; 2; 5)$,

$\vec{a}_4 = (-1; 1; 0)$;

б) $\vec{a}_1 = (-1; 0; 1)$,

$\vec{a}_2 = (2; 1; -3)$,

$\vec{a}_3 = (0; -1; 1)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 0; -1; 2)$,

$\vec{a}_2 = (3; -1; 0; 2)$,

$\vec{a}_3 = (0; 1; 2; -1)$.

4. У декартовій системі координат задано вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$:

1) обчисліть модулі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$;

2) знайдіть вектори $\overrightarrow{a_0}$ – одиничний для вектора $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b_1}$– протилежний до одиничного для вектора $\vec{b}$;

3) знайдіть точку B, з якою збігається кінець вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що його початок збігається з точкою $A(1; 0; -1)$;

4) знайдіть точку C, з якою збігається початок вектора $\vec{b}$, якщо відомо, що його кінець збігається з точкою $D(4; 4; -4)$;

5) обчисліть скалярні добутки $(\vec{a}, \vec{b})$; $(\vec{a}, \vec{a}+2\vec{b})$; $(2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{b})$; $(2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b})$;

6) обчисліть векторні добутки $[\vec{a}, \vec{b}\,]$; $[\vec{a}, \vec{a}+2\vec{b}]$; $[2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{b}]$; $[2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}]$;

7) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на цих векторах;

8) з'ясуйте, чи компланарні вектори $2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{b}$ і $\vec{c}$.

Варіант	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$	$\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$	**Варіант**	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$	$\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$
1	$\vec{a}(1; 2; -1)$	$\vec{b}(-2; 4; 5)$	**11**	$\vec{a}(-1; 4; 1)$	$\vec{b}(2; -2; 5)$
2	$\vec{a}(-1; 2; 3)$	$\vec{b}(2; -1; 0)$	**12**	$\vec{a}(1; -3; 2)$	$\vec{b}(6; 1; -1)$
3	$\vec{a}(4; -3; 2)$	$\vec{b}(-1; 5; 1)$	**13**	$\vec{a}(3; 5; -2)$	$\vec{b}(2; 4; -1)$
4	$\vec{a}(-2; 6; 1)$	$\vec{b}(3; -1; -2)$	**14**	$\vec{a}(5; 3; 1)$	$\vec{b}(-2; 4; 1)$
5	$\vec{a}(3; -1; 2)$	$\vec{b}(4; 5; -3)$	**15**	$\vec{a}(1; 7; -2)$	$\vec{b}(-1; 2; 4)$
6	$\vec{a}(2; -2; 3)$	$\vec{b}(4; 1; -1)$	**16**	$\vec{a}(-5; 3; -2)$	$\vec{b}(1; -1; 4)$
7	$\vec{a}(3; -1; 5)$	$\vec{b}(2; -2; 1)$	**17**	$\vec{a}(4; -1; 0)$	$\vec{b}(5; 1; 2)$
8	$\vec{a}(1; 4; -2)$	$\vec{b}(5; -1; 3)$	**18**	$\vec{a}(-2; 6; 0)$	$\vec{b}(5; 0; 4)$
9	$\vec{a}(-3; 3; 1)$	$\vec{b}(2; -3; 2)$	**19**	$\vec{a}(0; 4; -2)$	$\vec{b}(1; 8; 4)$
10	$\vec{a}(-4; 1; 2)$	$\vec{b}(3; -1; 4)$	**20**	$\vec{a}(4; -2; 0)$	$\vec{b}(2; -3; 3)$

Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором у просторі?
2. Як обчислити довжину (модуль) вектора в тривимірному просторі?
3. За якої умови два вектори в просторі є колінеарними?
4. Що таке скалярний добуток векторів і яке його геометричне значення?
5. Як за допомогою скалярного добутку визначити кут між двома векторами?
6. За якої умови два вектори є перпендикулярними? Як це пов'язано зі скалярним добутком?
7. Що називається векторним добутком двох векторів? Які його основні властивості?
8. Який геометричний зміст має модуль векторного добутку двох векторів?
9. Що таке мішаний добуток трьох векторів і яке його геометричне застосування?
10. Як за допомогою мішаного добутку визначити, чи є три вектори компланарними?

Тести

1. Векторною величиною є:

а) температура тіла;

б) напруженість електричного поля;

в) щільність речовини;

г) енергія взаємодії.

2. Для заданих векторів $\bar{a} = (-1, 2, 5)$, $\bar{b} = (0, 1, 2)$ вектор $\bar{c} = 4\bar{a} - \bar{b}$ має координати:

а) $(-4, 7, 19)$;

б) $(-4, 7, 18)$;

в) $(-4, -7, 18)$;

г) інша відповідь.

3. Три вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах, називаються:

а) паралельними;

б) компланарними;

в) колінеарними;

г) однаково напрямленими.

4. Задано координати двох точок $A(1,-2,3)$ **і** $B(-2,1,6)$. **Координати вектора** $\overline{AB}$ **мають вигляд:**

а) (–1, –1, 9);

б) (3, –3, –3);

в) (–3, 3, 3);

г) (1, 1, –9).

5. Модуль вектора $\bar{c}=3\bar{a}+2\bar{b}$ **, якщо** $\bar{a}=(1;0;4)$ **і** $\bar{b}=(1;0;0)$ **дорівнює:**

а) $\sqrt{17}$;

б) 17;

в) 13;

г) $\sqrt{119}$.

6. За яких значень *p* вектори $\bar{a}=(2;-1;p),\bar{b}=(-4;p;4)$ **будуть колінеарні:**

а) –2;

б) 6;

в) 2;

г) таких *p* немає.

7. Скалярний добуток векторів $\bar{a}=(1;-7;0),\bar{b}=(0;2;7)$ **дорівнює:**

а) –12;

б) –14;

в) 7;

г) –13.

8. За яких значень *p* вектори $\bar{a} = (3; -1; p), \bar{b} = (1; p; 2)$ будуть ортогональними:

а) –2;

б) –3;

в) 3;

г) 1.

9. Кут між векторами $\bar{a} = (\sqrt{3}; 1; 0)$ і $\bar{e} = (1; 0; 0)$ дорівнює:

а) 0;

б) 90;

в) 60;

г) 30.

10. Абсолютна величина вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо $\bar{a} = (1,2,-7)$ і $\bar{b} = (4,7,2)$ дорівнює:

а) 5;

б) 10;

в) 13;

г) інша відповідь.

ТЕМА 7. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

7.1. Різновиди рівняння прямої на площині.
7.2. Кут між двома прямими.
7.3. Відстань від точки до прямої.

Основні теоретичні відомості

7.1. Різновиди рівняння прямої на площині

Означення 1. *Рівняння* $F(x,y)=0$ *називається рівнянням деякої лінії на площині, якщо це рівняння задовольняє координати* (x,y) *будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняє координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.*

Рівняння $F(x,y)=0$ буде рівнянням прямої на площині, якщо функція F є лінійною стосовно x та y.

Пряма на площині може бути задана різними способами: точкою та вектором, паралельним цій прямій; двома точками; точкою та вектором, перпендикулярним до цієї прямої тощо. Різним способам задання прямої відповідають різні види її рівнянь.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно до заданого вектора

Відомі координати точки $M_0(x_0;y_0)$, що належить прямій L, і координати вектора $\vec{l}(m,k)$, паралельного прямій (рис. 7.1).

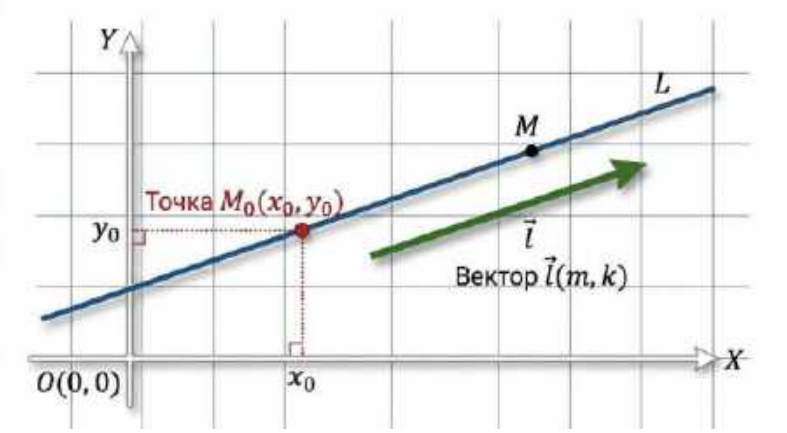


Рисунок 7.1

Потрібно вивести рівняння прямої L як сукупності точок, координати яких задовольняють це рівняння.

Означення 2. *Будь-який вектор* $\vec{l}(m,k)$ *паралельний до прямої або який лежить на цій прямій, називається напрямним вектором прямої.*

Візьмемо змінну точку $M(x;y)$ на прямій L, тоді вектори $\vec{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ і $\vec{l}(m;k)$ є колінеарними.

З умови колінеарності цих векторів випливає пропорційність відповідних координат, тобто $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}$.

Отримане рівняння називається *канонічним рівнянням прямої на площині*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Відомі координати двох точок на прямій L: $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ (рис. 7.2). Складемо рівняння прямої L. Вектор $\vec{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ лежить на прямій L, отже, це напрямний вектор прямої L.

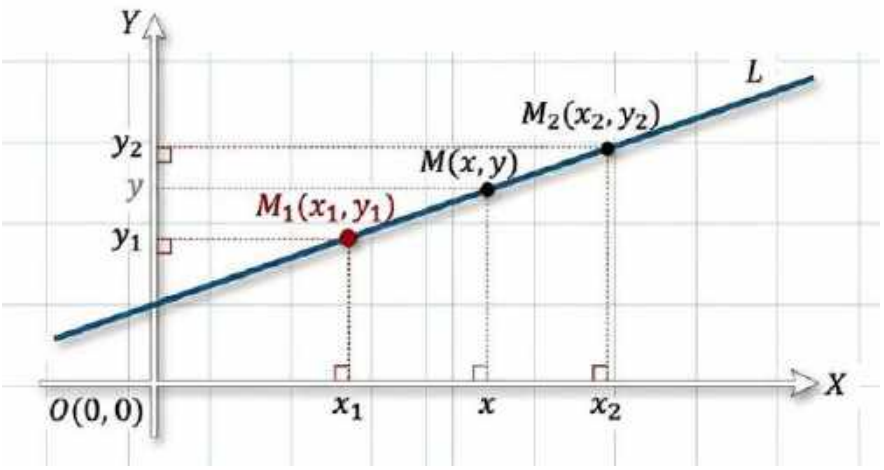


Рисунок 7.2

Якщо в канонічне рівняння прямої замість координат точки $M_0(x_0;y_0)$ підставити координати точки $M_1(x_1;y_1)$, а замість координат цього напрямного вектора $\vec{l}(m;k)$ підставити координати іншого напрямного вектора прямої – вектора $\vec{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$, то одержимо *рівняння прямої за двома точками*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Рівняння прямої у відрізках на осях

Відомо, що пряма L відсікає на осях координат відрізки довжиною a і b (рис. 7.3). Складемо рівняння цієї прямої. Точки перетину прямої L з осями координат: $M_1(a;0), M_2(0;b)$. Використаємо рівняння прямої за двома точками й одержимо:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b},$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях*, де a – довжина відрізка на осі Ox, а b – довжина відрізка на осі Oy.

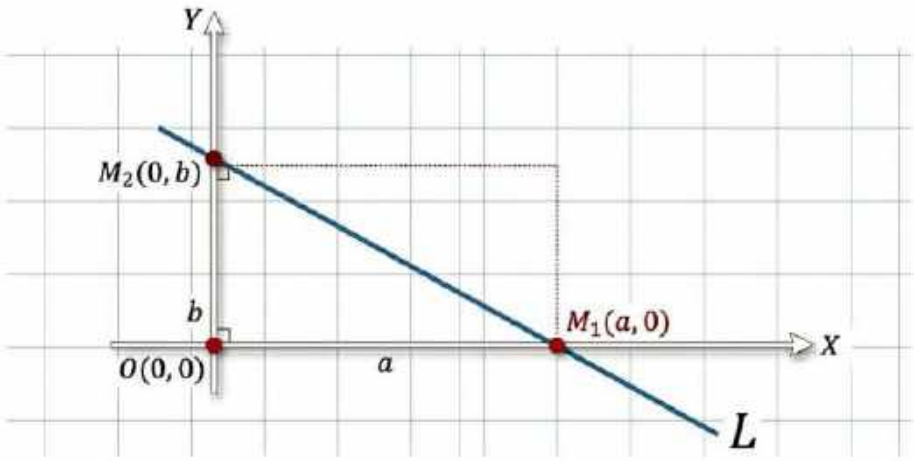


Рисунок 7.3

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора

Відомі координати точки $M_0(x_0;y_0)$ прямої та координати перпендикулярного вектора $\vec{n}(A;B)$ (рис. 7.4). Нехай $M(x;y)$ – деяка змінна точка на прямій, тоді вектори $\vec{M_0M}(x-x_0;\ y-y_0)$ та $\vec{n}(A;B)$ перпендикулярні.

З умови перпендикулярності векторів випливає, що $\vec{M_0M}\cdot\vec{n}=0$, звідки одержимо $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – *рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до цього вектора.*

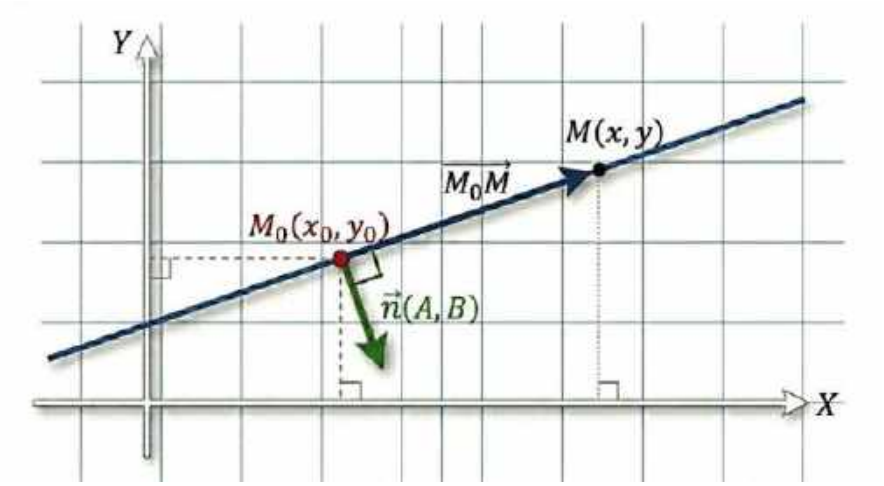


Рисунок 7.4

Загальне рівняння прямої та його частинні випадки

Якщо в рівнянні $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ розкрити дужки й ввести позначення $C=-Ax_0-By_0$, то одержимо *загальне рівняння прямої на площині* $Ax+By+C=0$, де A,B – координати перпендикулярного вектора, причому $A,B\ \neq 0$ одночасно.

Дослідження загального рівняння прямої

– якщо $A=0$, то рівняння $By+C=0$ або $y=-\frac{C}{B}$ визначає пряму, паралельну осі *Ox*;

– якщо $B=0$, то пряма $x=-\frac{C}{A}$ визначає пряму, паралельну осі *Oy*;

– якщо $C=0$, то пряма $y=-\frac{A}{B}x$ визначає пряму, що проходить через початок координат;

– якщо $A=C=0$, то пряма $y=0$ визначає вісь *Ox*;

– якщо $B=C=0$, то пряма $x=0$ визначає вісь *Oy*.

Нормальне рівняння прямої

Означення 3. *Вектор, опущений з початку координат перпендикулярно на пряму, називається вектором нормалі цієї прямої.*

Нехай відома відстань p від точки $O(0;0)$ до прямої L, тобто $p=\left|\vec{OP}\right|$, відомо кут α між вектором нормалі та додатним напрямом осі Ox (рис. 7.5). Потрібно скласти рівняння прямої L.

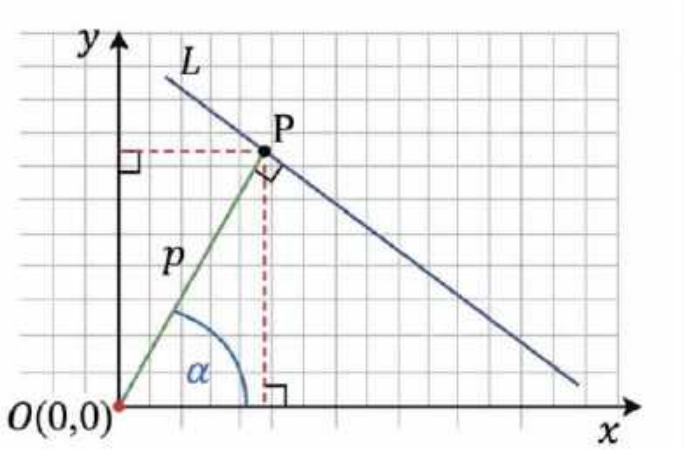


Рисунок 7.5

Координати вектора нормалі $\vec{OP}$ знайдемо як проєкції його на осі координат:

$np._x\ \vec{OP} = p \cdot cos\,\alpha,\ np._y\ \vec{OP} = p \cdot sin\,\alpha$, де α – кут між вектором $\vec{OP}$ і віссю *Ox*.

Точка *P* прямої *L* має такі самі координати, що й вектор $\vec{OP}$, тобто $P(p\,cos\,\alpha\,;p\,sin\,\alpha)$.

Складемо рівняння прямої *L* за точкою $P(p\,cos\,\alpha\,;\ p\,sin\,\alpha)$ і перпендикулярним вектором $\vec{p}(p\,cos\,\alpha\,;\ p\,sin\,\alpha)$:

$p\,cos\,\alpha\,(x - p\,cos\,\alpha) + p\,sin\,\alpha\,(y - p\,sin\,\alpha) = 0$, звідки одержимо *нормальне рівняння прямої на площині:* $x\,cos\,\alpha + y\,sin\,\alpha - p = 0$, де *p* – довжина перпендикуляра, опущеного на пряму з початку координат ($p > 0$), а α – кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом осі *Ox*.

Якщо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ помножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де знак обирається протилежним до знака вільного члена С, то одержимо нормальне рівняння прямої на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Точка $B(0;b)$ і кут β однозначно визначають пряму L на площині (рис. 7.6).

Дійсно, $y = MC + CN = BC \cdot tg\beta + b = x \cdot tg\beta + b$.

Позначимо $k = tg\beta$ та одержимо шукане рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої, β – це кут між прямою та додатним напрямом осі *OX*.

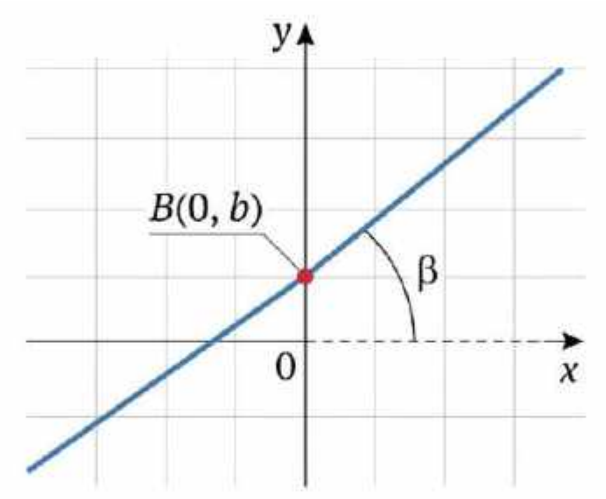


Рисунок 7.6

Рівняння прямої, що проходить через задану точку у вказаному напрямі

Відомі координати деякої точки $M_0(x_0; y_0)$ прямої L та кут нахилу β її до осі Ox (рис. 7.7).

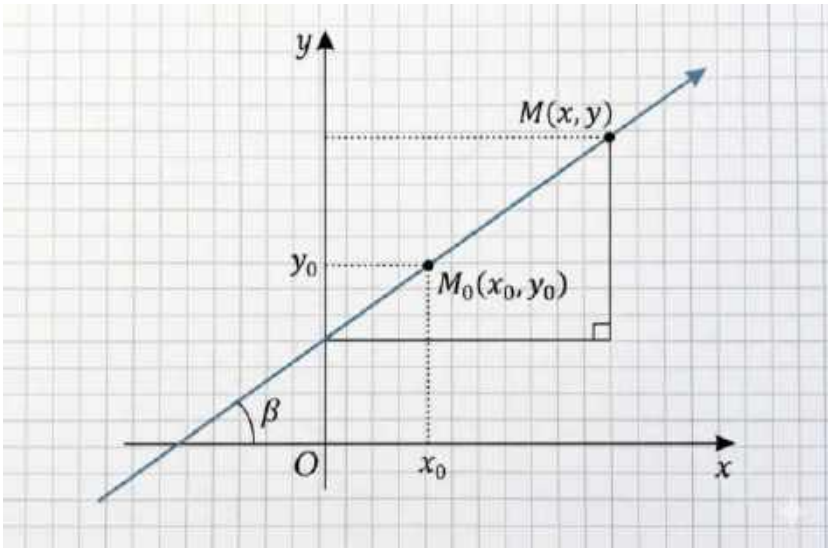


Рисунок 7.7

Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$.

Підставляючи в нього координати цієї точки $M_0(x_0; y_0)$ і кут β, знайдемо значення $b = y_0 - kx_0$. Шукане рівняння прямої набуває вигляду $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Якщо k – змінна величина, то це рівняння описує *пучок прямих*, які проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$.

7.2. Кут між двома прямими

Кут між прямими, заданими канонічними рівняннями, визначається кутом між напрямними векторами цих прямих $\vec{l}_1(m_1;k_1)$ *та* $\vec{l}_2(m_2;k_2)$ (рис. 7.8).

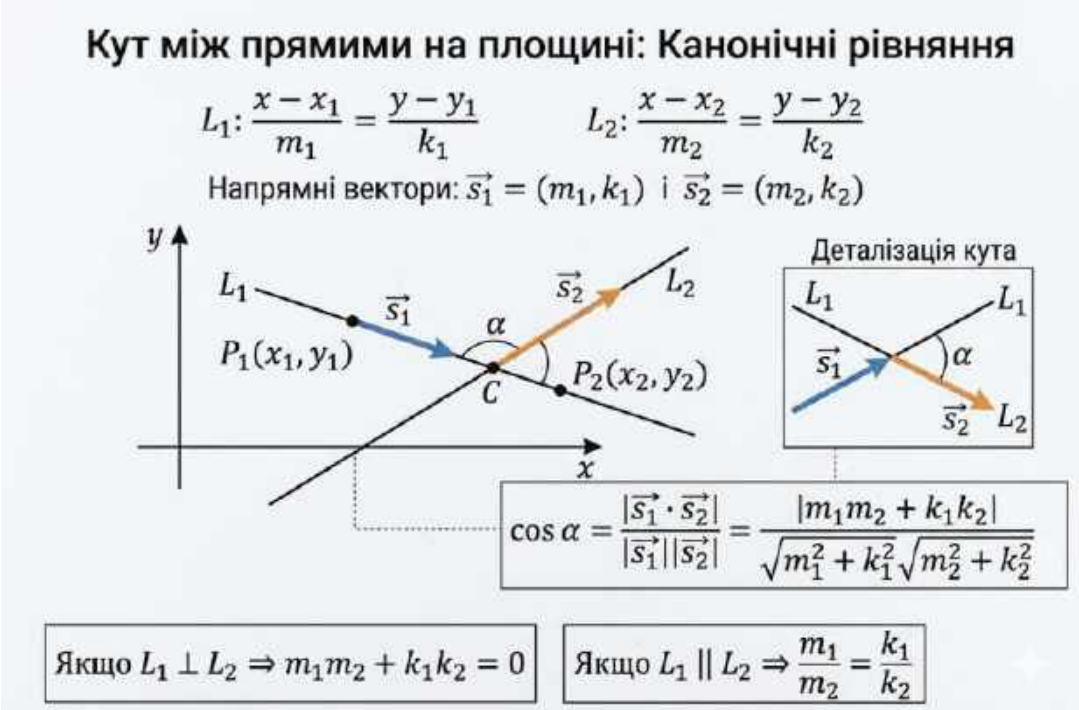


Рисунок 7.8

Косинус кута між ними $cos\,\phi=\frac{\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right|\cdot\left|\vec{l}_2\right|}=\frac{m_1m_2+k_1k_2}{\sqrt{m_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+k_2^2}}$.

Звідси випливають умови паралельності й перпендикулярності прямих L_1 та L_2:

$$||\,L_1 \quad L_2 \Leftrightarrow \left|\vec{l}_1 \quad \vec{l}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{k_1}{k_2},$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+k_1k_2=0.$$

Кут між прямими, заданими загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ *та* $A_2x+B_2y+C_2=0$, визначається кутом між нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1;B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2;B_2)$ цих прямих (рис. 7.9), тобто



Рисунок 7.9

$cos\,\phi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, звідки випливає, що $L_1 \,||\, L_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \,||\, \vec{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Кут між прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$y = k_1x + b_1$ *та* $y = k_2x + b_2$ визначається з рівності $\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$ (рис. 7.10), звідки



Рисунок 7.10

$$\phi = \alpha_2 - \alpha_1, \qquad tg\phi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Отже, маємо $tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, звідки випливають умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 *та* L_2: $L_1 || L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$, $k_1 k_2 = -1$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

7.3. Відстань від точки до прямої

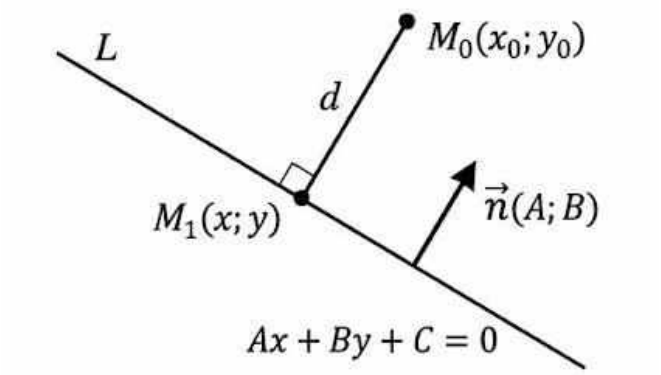


Рисунок 7.11

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої L дорівнює довжині перпендикуляра M_0M_1, опущеного з точки M_0 на пряму (рис. 7.11). Складемо рівняння прямої M_0M_1 як рівняння прямої, що проходить через цю точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до цього вектора $\vec{n}(A; B)$: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$, звідки $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$.

Координати точки $M_1(x; y)$ як точки перетину прямих L і M_0M_1 задовольняють рівняння обох прямих, тобто систему рівнянь: $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0 \end{cases}$.

Після перетворень одержимо $(A^2 + B^2)((x - x_0)^2 + (y - -y_0)^2) = (Ax_0 + By_0 + C)^2$, $(A^2 + B^2) \cdot d^2 = (Ax_0 + By_0 + C)^2$, звідки:

$$d = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} -$$

відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Трикутник АВС заданий своїми вершинами А (–2; –1), В (4; 3), С (6; 1). Знайти: а) рівняння сторони ВС та записати його у відрізках на осях;

б) рівняння прямої, яка проходить через точку А паралельно до ВС;

в) рівняння та довжину висоти АН.

Розв'язання

а) рівняння сторони ВС складемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, підставивши в це рівняння координати точок В (4; 3) і С (6; 1), а саме:

$\frac{x-4}{6-4}=\frac{y-3}{1-3}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-2}$, $x-4=-(y-3)$, звідки $x+y-7=0$ – рівняння сторони ВС.

Перепишемо це рівняння у формі рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, поділивши обидві сторони рівняння $x+y=7$ на 7: $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$. Отже, $a=7,\ b=7$ – відрізки, які відтинає пряма ВС на осі *Ox* і та осі *Oy*, відповідно;

б) застосовуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно до заданого вектора $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}$, підставивши в це рівняння замість точки $M_0(x_0;y_0)$ точку *A* (–2; –1), а замість напрямного вектора $\vec{l}(m;k)$ – вектор $\vec{BC}=(6-4;\ 1-3)=(2;-2)$. Одержимо, $\frac{x-(-2)}{2}=\frac{y-(-1)}{-2}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-2}$, звідки $x+y+3=0$ – рівняння шуканої прямої;

в) складемо рівняння висоти АН, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, підставляючи в це рівняння замість точки $M_0(x_0;y_0)$ точку А (–2; –1), а замість вектора $\vec{n}(A;B)$ – вектор $\vec{BC}(2;-2)$:

$$2(x+2)-2(y+1)=0,$$

звідки $x-y+1=0$ – рівняння висоти *AH*.

Обчислимо довжину висоти AH, використовуючи формулу відстані від точки до прямої, підставляючи в неї замість точки $M_0(x_0; y_0)$ точку $A(-2; -1)$, а замість коефіцієнтів A, B, C – коефіцієнти прямої ВС $(x + y - 7 = 0)$ 1, 1 та –7, відповідно: $AH = d = \frac{|1\cdot(-2)+1\cdot(-1)-7|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

Приклад 2. Скласти рівняння двох прямих, що проходять через точку D (–2; 1), з яких одна – паралельна, а друга – перпендикулярна прямій $5x - 2y + 4 = 0$.

Розв'язання

Застосовуємо рівняння пучка прямих $y - y_0 = k(x - x_0)$, підставляючи замість точки $M_0(x_0; y_0)$ точку D (–2; 1), а замість k – шукані кутові коефіцієнти прямих; одержимо $y - 1 = k(x + 2)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $5x - 2y + 4 = 0$. Для цього виразимо y через x: $y = \frac{5}{2}x + 2$, звідки $k_0 = \frac{5}{2}$.

Якщо шукана пряма $y - 1 = k(x + 2)$ паралельна до заданої, то $k = k_0 = \frac{5}{2}$. Одержимо $y - 1 = \frac{5}{2}(x + 2)$, $2y - 2 = 5x + 10$, звідки $5x - 2y + 12 = 0$ – рівняння шуканої прямої, паралельної до заданої.

Якщо шукана пряма $y - 1 = k(x + 2)$ перпендикулярна до заданої, то $k = -\frac{1}{k_0} = -\frac{2}{5}$, тоді $y - 1 = -\frac{2}{5}(x + 2)$, $5y - 5 = -2x - 4$, звідки $2x + 5y - 1 = 0$ – рівняння шуканої прямої, перпендикулярної до заданої прямої.

Приклад 3. Знайти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2, -1)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = (3, 4)$.

Розв'язання

І спосіб. Записуємо загальну формулу канонічного рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

підставляємо дані $x_0 = 2, y_0 = -1, a_1 = 3, a_2 = 4$:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - (-1)}{4}$$

Оскільки $y-(-1)=y+1$, маємо:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}}$$

II спосіб. Перевірка через параметричний запис

Можемо записати:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+4t \end{cases}.$$

Це означає:

– за $t=0$ отримуємо точку $M_0(2,-1)$;

– у разі зміни t рухаємося вздовж прямої в напрямі вектора $\vec{a}=(3,4)$.

Отже, канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}$$

Завдання для самоконтролю

1. У трикутнику *ABC* з вершинами *A* (–3; –2), *B* (5; 4), *C* (7; –4) знайти:

а) рівняння сторони *AC*;

б) кут *A*;

в) рівняння та довжину висоти *AH*;

г) рівняння прямої, що проходить через точку *A* паралельно стороні *BC*, і прямої, що проходить через точку *A* перпендикулярно стороні *AB*;

д) периметр ΔABC;

е) площу ΔABC.

2. Знайти кут між прямими:

а) $3x-2y+5=0,\ 2x+3y-1=0$;

б) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1, \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}$;

в) $y=2x+5,\ x-y+7=0$;

г) $y=2x+1$і $y=-\frac{1}{2}x+3$.

3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(3, -4)$.

4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(0, -2)$ і паралельна прямій $3x - y + 4 = 0$.

5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(1, 1)$ і перпендикулярна до прямої $x + 2y - 6 = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається рівнянням лінії на площині? Яка умова того, що рівняння задає саме пряму?

2. Що таке напрямний вектор прямої? Яке його геометричне значення?

3. Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору.

4. Як вивести рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

5. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях? Що означають параметри a і b?

6. Запишіть рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора.

7. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині? Що означають коефіцієнти A, B, C?

8. Які частинні випадки загального рівняння прямої відповідають:

– прямій, паралельній осі Ox;

– прямій, паралельній осі Oy;

– прямій, що проходить через початок координат?

9. Що таке нормальне рівняння прямої? Який геометричний зміст параметрів p та α?

10. Що називається кутовим коефіцієнтом прямої? Як записується рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

11. Як визначається кут між двома прямими:

– за напрямними векторами;

– за загальними рівняннями;

– за кутовими коефіцієнтами?

12. За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої на площині? Який геометричний зміст цієї відстані?

Тести

1. Рівнянням прямої на площині називається рівняння, що:

а) задає коло;

б) описує тільки точки прямої;

в) містить квадрат змінної;

г) має лише одну змінну.

2. Що називається напрямним вектором прямої:

а) вектор, що перпендикулярний прямій;

б) вектор, який паралельний прямій;

в) вектор одиничної довжини;

г) вектор, що лежить на осі координат.

3. Який спосіб можна використати для задання прямої на площині:

а) тільки однією точкою;

б) двома точками;

в) тільки кутом нахилу;

г) тільки довжиною відрізка.

4. Що показує кутовий коефіцієнт прямої:

а) довжину прямої;

б) кут нахилу прямої до осі абсцис;

в) відстань до початку координат;

г) координати середини відрізка.

5. Паралельними називаються прямі, що:

а) перетинаються під прямим кутом;

б) мають спільну точку;

в) не перетинаються;

г) проходять через початок координат.

6. Перпендикулярними називаються прямі, що:

а) не мають спільних точок;

б) утворюють прямий кут;

в) лежать на одній осі;

г) мають однаковий напрям.

7. Що називається нормаллю до прямої:

а) вектор, паралельний прямій;

б) вектор, що утворює гострий кут з прямою;

в) вектор, перпендикулярний до прямої;

г) вектор довільного напряму.

8. Відстань від точки до прямої – це:

а) довжина будь-якого відрізка між ними;

б) довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму;

в) відстань до початку координат;

г) довжина напрямного вектора.

9. Яка пряма проходить через початок координат:

а) та, у якої немає спільних точок з осями;

б) та, що перетинає обидві осі;

в) та, що містить точку початку координат;

г) та, що паралельна осі ординат.

10. Що визначає кут між двома прямими:

а) кут між їхніми напрямами;

б) довжину прямої;

в) відстань між прямими;

г) координати точки перетину.

ТЕМА 8. РІВНЯННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ

8.1. Коло.
8.2. Еліпс.
8.3. Гіпербола.
8.4. Парабола.
8.5. Дослідження рівняння другого порядку.

Основні теоретичні відомості

Лінією (кривою) другого порядку називають множину точок площини, декартові координати яких задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_0}$ – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ відмінне від нуля. Рівняння (1) називається загальним рівнянням лінії другого порядку. До ліній другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

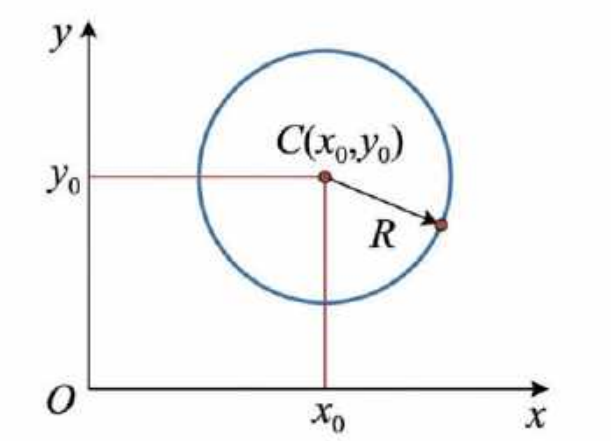
8.1. Коло

Колом називається множина точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

визначає коло з центром у точці $\boldsymbol{C(x_0; y_0)}$ і радіусом $\boldsymbol{R}$.



Якщо центром кола є початок координат, то рівняння кола має вигляд:

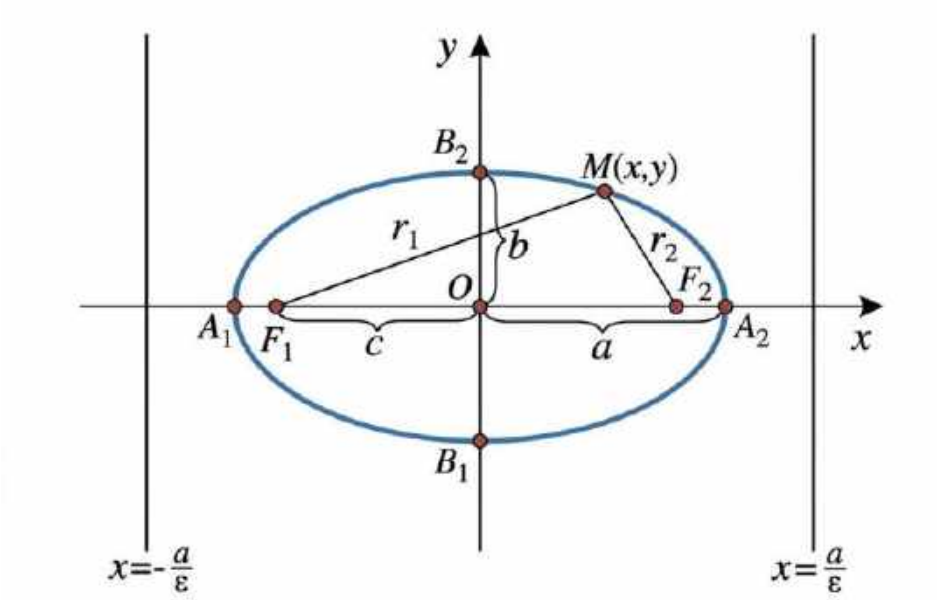
$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$

8.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ (фокусів) є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса з півосями $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, центром у початку координат і вершинами $\boldsymbol{A_1, A_2, B_1, B_2}$, розташованими на осях координат, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$



Відстані між вершинами називаються осями еліпса: $\boldsymbol{A_1A_2 = 2a}$ – велика вісь, $\boldsymbol{B_1B_2 = 2b}$ – мала вісь. Точки $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ називаються фокусами, а $\boldsymbol{F_1F_2 = 2c}$ – фокусна відстань. Відповідно до означення еліпса виконується співвідношення: $\boldsymbol{b^2 = a^2 - c^2}$.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані до довжини великої осі:

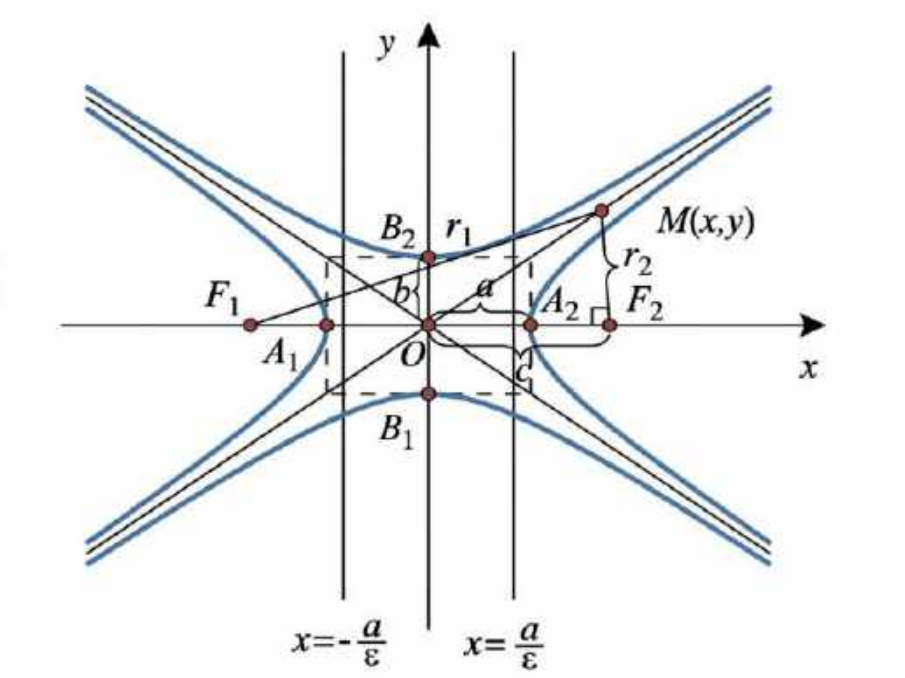
$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}; \quad 0 \le \varepsilon < 1.$$

Директрисами називаються прямі, паралельні до малої осі еліпса, рівняння яких:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

8.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ (фокусів) є величина стала.



Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Параметри $\boldsymbol{2a, 2b}$ називаються дійсною та уявною осями гіперболи, $\boldsymbol{a, b}$ – її півосі, точки $\boldsymbol{A_1(-a;0), A_2(a;0)}$ – вершини, $\boldsymbol{O(0;0)}$ – центр гіперболи.

Прямі $\boldsymbol{y = \pm\frac{b}{a}x}$ називаються асимптотами гіперболи.

Точки $\boldsymbol{F_1(-c;0), F_2(c;0)}$ – фокуси гіперболи. Число $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}$ – ексцентриситет гіперболи, причому $\boldsymbol{1 < \varepsilon < \infty}$. Прямі $\boldsymbol{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$ називаються директрисами гіперболи. Виконується співвідношення $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

Гіпербола, для якої $\boldsymbol{a = b}$, називається рівносторонньою.

Гіпербола, рівняння якої має вигляд:

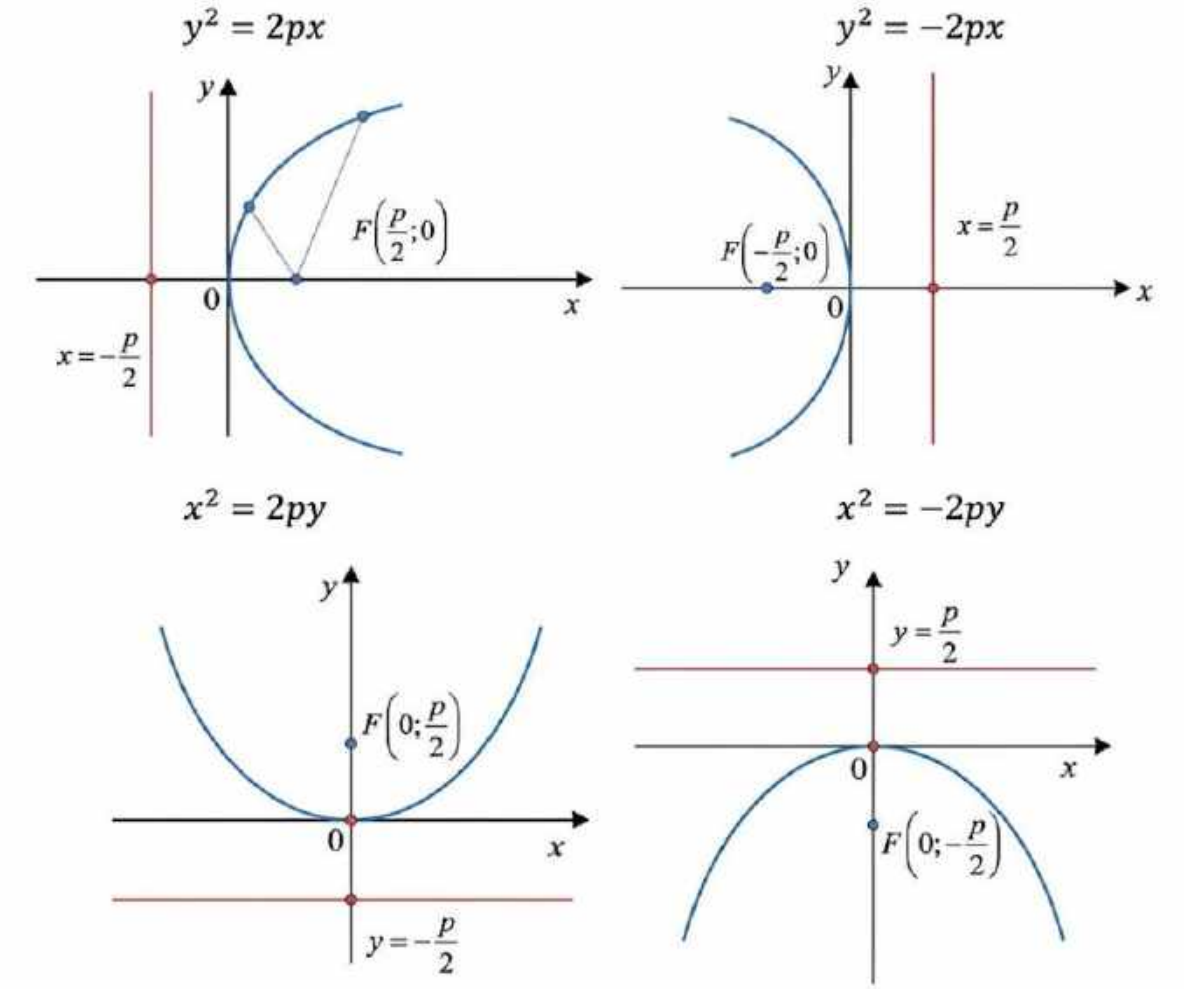
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\,,$$

називається спряженою гіперболою.

8.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок площини, що перебувають на однаковій відстані від даної точки (фокуса) та даної прямої (директриси).

Є чотири види канонічного рівняння параболи:



Ексцентриситет параболи $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$.

8.5. Дослідження рівняння другого порядку

Розглянемо загальне рівняння другого порядку, яке не містить добутку $x \cdot y$, а саме: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$.

Якщо це рівняння є рівнянням деякої кривої другого порядку і, крім того,

1) $A = B$, то це рівняння кола;

2) $A \cdot B > 0$, тобто коефіцієнти A і B одного знаку, але різні за величиною, то це рівняння еліпса;

3) $A \cdot B < 0$, тобто коефіцієнти A і B мають різні знаки, то це рівняння гіперболи;

4) $A = 0$ (або $B = 0$), то це рівняння параболи.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти координати центра та радіус кола, заданого рівнянням $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 61 = 0$.

Розв'язання

Виділимо повні квадрати при x та y

$$4(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) - 61 = 0$$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 61 = 0$$

$$4(x + 1)^2 - 4 + 4(y - 2)^2 - 16 - 61 = 0$$

$$4(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 81 \ |: \ 4$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{81}{4}$$

Отже, центр кола перебуває в точці $M_0(-1; 2)$, а радіус кола $R = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) мала вісь еліпса дорівнює 12, а ексцентриситет еліпса $\frac{4}{5}$;

б) відстань між директрисами еліпса $\frac{100}{3}$, а відстань між фокусами еліпса 12.

Розв'язання

а) за умовою $2b = 12$, звідки $b = 6$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Використаємо співвідношення: $b^2 = a^2 - c^2$, звідки $c^2 = a^2 - b^2$. Піднесемо обидві частини рівності $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ до квадрата, зробимо заміну $c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - 36$ та одержимо рівняння відносно a: $\frac{c^2}{a^2} = \frac{16}{25}$, $\frac{a^2-36}{a^2} = \frac{16}{25}$, після перетворень знайдемо $a^2 = 100$. Маємо $b^2 = 36$, $a^2 = 100$, шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$;

б) за умовою $\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{100}{3}$, звідки $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{50}{3}$. Відстань між фокусами еліпса $2c = 12$, звідки $c = 6$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{6}{a}$.

Підставимо значення $\varepsilon = \frac{6}{a}$ у рівність $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{50}{3}$ і одержимо рівняння відносно a: $\frac{a}{6/a} = \frac{50}{3}$, $\frac{a^2}{6} = \frac{50}{3}$, звідки $a^2 = \frac{6 \cdot 50}{3} = 100$. Знайдемо $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64$.

Одержимо рівняння еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, якщо:

а) рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{5}{12}x$, а відстань між фокусами дорівнює 26;

б) точки $M_1(6;\ -1)$, $M_2\left(-8;\ 2\sqrt{2}\right)$ належать гіперболі.

Розв'язання

а) з означення асимптот гіперболи випливає, що $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, звідки $b = \frac{5}{12}a$. Згідно з умовою $2c = 26$, $c = 13$. Використаємо співвідношення для a, b і c гіперболи $b^2 = c^2 - a^2$. Підставимо в нього значення $b = \frac{5}{12}a$ і $c = 13$ і одержимо рівняння $\left(\frac{5}{12}a\right)^2 = 13^2 - a^2$, звідки $a^2 = 144$, $a = 12$. Знайдемо $b^2 = 169 - 144 = 25$. Маємо рівняння гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$;

б) точки $M_1(6; -1)$, $M_2\left(-8; 2\sqrt{2}\right)$ задовольняють рівняння гіперболи, тому, підставивши ці точки в рівняння гіперболи, одержимо систему двох рівнянь стосовно невідомих a *та* b:

$$\begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Позначимо $\frac{1}{a^2}=u,\ \frac{1}{b^2}=v$. Одержимо систему рівнянь: $\begin{cases}36u-v=1\\64u-8v=1\end{cases}$.

Розв'язавши цю систему, одержимо $36u-4u=1,\ 32u=1,\ u=\frac{1}{32},\ v=4\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{8}$.

Перейдемо до заміни: $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{32}$, звідки $a^2=32,\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{8}$, звідки $b^2=8$.

Шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.

Приклад 4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус перебуває в точці перетину прямої $4x-3y-4=0$ з віссю *Ox*.

Розв'язання

Спочатку знайдемо точку перетину прямої з віссю *Ox*. Для цього в рівняння прямої підставимо $y=0$, одержимо $4x-3\cdot 0-4=0$, звідки $x=1$. Отже, $F(1;\ \ 0)$ – фокус параболи.

Оскільки $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, то $\frac{p}{2}=1$, звідки $p=2$. У рівняння $y^2=2px$ підставимо $p=2$ та одержимо рівняння параболи $y^2=4x$.

Приклад 5. На параболі $y^2=8x$ знайти точку, відстань якої від директриси дорівнює 4.

Розв'язання

З рівняння параболи випливає, що $2p=8,\ p=4,\ \rightleftarrows\frac{p}{2}=2,\ \ x=-2$ – рівняння директриси. Згідно з умовою $d=4$, але $d=2+x$, де *x* – абсциса шуканої точки параболи. Маємо $4=2+x,\ \ x=2$. Підставимо $x=2$ в рівняння параболи й одержимо $y^2=8\cdot 2=16$, звідки $y=\pm 4$.

Отже, одержали дві шуканих точки $M_1(2;4),\ M_2(2;-4)$.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2-10x-4y+25=0$.
2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь 8, а відстань між директрисами 16.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між вершинами 12.

4. Обчислити фокальний радіус точки *M* параболи $y^2 = 20x$, якщо абсциса точки *M* дорівнює 7.

Питання для самоконтролю

1. Що називається кривою другого порядку? Які криві належать до кривих другого порядку?

2. Дайте означення кола. Яке канонічне рівняння кола з центром у точці $(x_0; y_0)$?

3. Як із загального рівняння кола визначити координати центра та радіус кола?

4. Дайте означення еліпса. Що називається фокусами, великою та малою осями еліпса?

5. Запишіть канонічне рівняння еліпса та поясніть зміст параметрів a, b, c.

6. Що таке ексцентриситет еліпса? Які значення він може набувати та що характеризує?

7. Дайте означення гіперболи. Чим означення гіперболи відрізняється від означення еліпса?

8. Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Що називають дійсною та уявною осями гіперболи?

9. Що таке асимптоти гіперболи? Як записують їхні рівняння?

10. Дайте означення параболи. Що називають фокусом і директрисою параболи?

11. Запишіть канонічне рівняння параболи та поясніть геометричний зміст параметра p.

12. За якими ознаками в загальному рівнянні другого порядку

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

можна визначити, чи задає воно коло, еліпс, гіперболу або параболу?

Тести

1. Яка з наведених кривих належить до кривих другого порядку:

а) спіраль;

б) синусоїда;

в) еліпс;

г) ламана.

2. Що називається колом:

а) лінія, що має дві вершини;

б) множина точок, рівновіддалених від центра;

в) лінія з двома фокусами;

г) нескінченна крива.

3. Фокусами еліпса є:

а) точки перетину осей;

б) центри симетрії;

в) дві задані точки, пов’язані з означенням еліпса;

г) вершини еліпса.

4. Яку форму має еліпс:

а) овала;

б) трикутника;

в) прямокутника;

г) спіралі.

5. Що характеризує ексцентриситет еліпса:

а) колір кривої;

б) розтягнення еліпса;

в) кількість вершин;

г) напрям осей.

6. Скільки віток має гіпербола:

а) одну;

б) дві;

в) три;

г) чотири.

7. Прямі, до яких наближаються вітки гіперболи, називаються:

а) радіуси;

б) діаметри;

в) асимптоти;

г) хорди.

8. Що таке парабола:

а) коло з великим радіусом;

б) лінія з двома центрами;

в) геометричне місце точок, рівновіддалених від точки та прямої;

г) замкнена крива.

9. Ексцентриситет параболи дорівнює:

а) нулю;

б) одиниці;

в) двом;

г) трьом.

10. Яка крива другого порядку має ексцентриситет більший за одиницю:

а) коло;

б) еліпс;

в) парабола;

г) гіпербола.

ТЕМА 9. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ

9.1. Рівняння площини в просторі.
9.2. Кут між площинами.
9.3. Пряма лінія в просторі.
9.4. Кут між двома прямими в просторі.
9.5. Кут між прямою та площиною.

Основні теоретичні відомості

9.1. Рівняння площини в просторі

Нехай у прямокутній системі координат $\boldsymbol{Oxyz}$ задано площину точкою $\boldsymbol{M_0(x_0; y_0; z_0)}$ і вектором $\boldsymbol{\vec{n}(A; B; C)}$, перпендикулярним до цієї площини. Тоді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

є рівняння площини, що проходить через точку $\boldsymbol{M_0(x_0; y_0; z_0)}$ і має нормальний вектор $\boldsymbol{\vec{n}(A; B; C)}$.

Якщо позначити $\boldsymbol{D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0}$, то отримаємо загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Окремі випадки загального рівняння площини:

1) $\boldsymbol{D = 0}$ – рівняння площини, що проходить через початок координат;

2) $\boldsymbol{C = 0}$ – рівняння площини, паралельної осі $\boldsymbol{Oz}$;

3) $\boldsymbol{C = D = 0}$ – рівняння площини, що проходить через вісь $\boldsymbol{Oz}$;

4) $\boldsymbol{B = C = 0}$ – рівняння площини, паралельної площині $\boldsymbol{Oyz}$;

5) $\boldsymbol{x = 0, y = 0, z = 0}$ – рівняння координатних площин.

Площина в декартовій системі координат може бути задана також рівняннями:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

рівняння площини у відрізках на осях;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

рівняння площини, що проходить через три точки $\boldsymbol{M_1(x_1; y_1; z_1)}$, $\boldsymbol{M_2(x_2; y_2; z_2)}$, $\boldsymbol{M_3(x_3; y_3; z_3)}$.

9.2. Кут між площинами

Величину кута φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюють за формулою:

$$cos\,\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (5)$$

звідки випливає умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

9.3. Пряма лінія в просторі

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

1. Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

2. Параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}.$$

3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Дві площини, що перетинаються (загальні рівняння прямої):

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},$$

її напрямний вектор визначається за формулою:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

9.4. Кут між двома прямими в просторі

Якщо прямі задані канонічними рівняннями в просторі:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\quad\text{і}\quad\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

то кут між ними визначається за формулою:

$$cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}.$$

Умова паралельності:

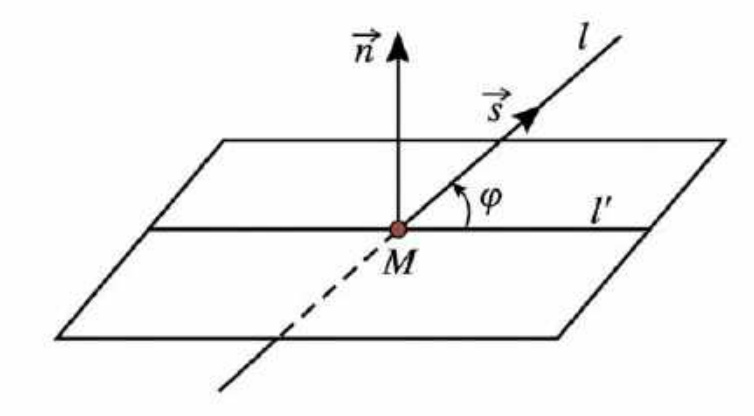
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

9.5. Кут між прямою та площиною

Кутом між прямою та площиною називається кут між прямою l та її проєкцією на площину l':



Величина кута φ між прямою:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

та площиною $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

$$sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти висоту AH піраміди $ABCD$, заданої своїми вершинами $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(-2;\ 0;\ -1)$, $C(-1;\ -1;\ 2)$, $D(0;\ 1;\ 0)$.

Розв'язання

Знайдемо рівняння площини BCD як рівняння площини, що проходить через три заданих точки:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-0 & z+1 \\ -1+2 & -1-0 & 2+1 \\ 0+2 & 1-0 & 0+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{звідки} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x+2)\cdot(-4) - y\cdot(-5) + (z+1)\cdot 3 = 0,\quad -4x - 8 + 5y + 3z + +3 = 0,\ 4x - 5y - 3z + 5 = 0$ – рівняння площини BCD.

Знайдемо висоту AH як відстань від точки $A(1;\ -2;\ 3)$ до площини BCD за формулою відстані від точки площини, а саме:

$$AH = d = \frac{|4\cdot 1 - 5\cdot(-2) - 3\cdot 3 + 5|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A (1; 2; –1)* паралельно векторам $\vec{a} = (3;\ 0;\ 1)$ та $\vec{b} = (-2;\ 1;\ 3)$.

Розв'язання

Шукана площина паралельна площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отже, нормальний вектор площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ може бути нормальним вектором шуканої площини. Знайдемо нормальний вектор площини як векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}, \text{ тобто } \vec{n} = (-1;\ -11;\ 3).$$

Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Одержимо $-1(x-1) - 11(y-2) + 3(z+1) = 0$, звідки $x + 11y - 3z - 26 = 0$ – шукана площина.

Приклад 3. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ і площиною $2x+y+z-6=0$ та точку їхнього перетину.

Розв'язання

Підставляючи у формулу кута між прямою та площиною координати напрямного вектора прямої $\vec{l}(1;\ 1;\ \ 2)$ і нормального вектора площини $\vec{n}(2;\ 1;\ 1)$, одержимо значення синуса шуканого кута:

$$sin\varphi=\frac{1\cdot2+1\cdot1+2\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{6},\ \text{звідки}\ \varphi=arcsin\frac{5}{6}.$$

Для відшукання точки перетину прямої та площини потрібно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}\\2x+y+z-6=0.\end{cases}$

Перейдемо від канонічного рівняння прямої до її параметричних рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=t\\\frac{y-3}{1}=t\\\frac{z-4}{2}=t,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\\z=4+2t.\end{cases}$$

Підставимо значення *x, y, z* із останньої системи рівнянь у рівняння площини $2x+y+z-6=0$ і знайдемо значення параметра *t*: $2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$, звідки $t=-1$.

Підставимо значення $t=-1$ в параметричні рівняння прямої та одержимо шукану точку $\begin{cases}x=2-1=1\\y=3-1=2\\z=4+2\cdot(-1)=2.\end{cases}$

Отже, точка $M(1;\ 2;\ 2)$ – точка перетину прямої та площини.

Приклад 4. Знайти рівняння площини, яка паралельна площині *xOy* та проходить через точку *A*(1, 2, –4).

Розв'язання

Рівняння площини, паралельної до площини *xOy*, має вигляд: $Cz + D = 0$.

Підставляючи координати точки *A*, отримаємо: $–4C + D = 0$, або $D = 4C$.

Підставляючи це значення у $Cz + D = 0$, отримаємо: $Cz + 4C = 0$, а скорочуючи на *C*, будемо мати: $z + 4 = 0$.

Приклад 5. Які відрізки на координатних осях відтинає площина:

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0\ ?$$

Розв'язання

Перенесемо в праву частину рівності вільний член. Це рівняння запишеться у формі $2x + 3y - 5z = -30$.

Поділимо тепер обидві його частини на –30 та отримаємо:

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Величини відрізків, що відтинаються на координатних вісях, дорівнюють

$$a = -15;\ b = -10;\ c = 6.$$

Приклад 6. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$; $M_2(-1, 0, 4)$; $M_3(-2, -1, 1)$.

Розв'язання

Підставляючи в рівняння площини за трьома заданими точками:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -1 - 1 & 0 - 2 & 4 - (-1) \\ -2 - 1 & -1 - 2 & 1 - (-1) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи значення цього визначника, отримаємо:

$$-4(x - 1) - 15(y - 2) + 6(z + 1) + 15(x - 1) + 4(y - 2) - 6(z + 1) = 0.$$

Приклад 7. Розкриваючи дужки й проводячи перетворення, отримаємо $x - y + 1 = 0$. Це рівняння визначає площину, що проходить паралельно до осі *Oz*. Знайдіть точку перетину прямої *AB* і площини $x - 2y + 2z = 0$.

Розв'язання

Рівняння прямої AB нам уже відомо (складали в завданні 1):

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Перейдемо до параметричного вигляду: $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$.

Підставимо значення *x, y, z* у рівняння площини та розв'яжемо це рівняння стосовно t:

$$3t - 1 - 2(t + 2) + 2(-3t + 1) - 4 = 0;$$
$$3\,t - 1 - 2t - 4 - 6t + 2 - 4 = 0;$$
$$-5\,t - 7 = 0;$$
$$t = -\frac{7}{5}.$$

Далі обчислимо координати точки перетину прямої та площини (підставимо значення t у параметричні рівняння прямої):

$$x = 3t - 1 = 3\left(-\frac{7}{5}\right) - 1 = -\frac{26}{5};$$
$$y = t + 2 = -\frac{7}{5} + 2 = \frac{3}{5};$$
$$z = -3t + 1 = -3\left(-\frac{7}{5}\right) + 1 = \frac{26}{5}.$$

Отже, $M\left(-\frac{26}{5}; \frac{3}{5}; \frac{26}{5}\right)$.

Приклад 8. За якого значення параметра *a* пряма *AB* і площина $\alpha x + 3y - 5z + 12 = 0$ паралельні?

Розв'язання

Складемо рівняння прямої *AB*:

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Рівняння площини π: $\alpha x + 3y - 5z + 12 = 0$;

$\bar{l}(3; 1; -3)$ – вектор, що задає напрям прямої;

$\bar{n}(\alpha; 3; -5)$ – нормальний вектор площини.

Пряма *AB* паралельна площині π, якщо $(\bar{l} \cdot \bar{n}) = 0$, отже:

$$3\alpha + 3 + 15 = 0; \quad 3\alpha = -18; \quad \alpha = -6.$$

Приклад 9. За яких значень параметрів *a* та *b* пряма *AB* і площина $ax + by - -3z + 4 = 0$ перпендикулярні?

Розв'язання

Рівняння прямої *AB* уже відомо (складали в завданні 1):

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Рівняння площини π: $ax + by - -3z + 4 = 0$;

$\bar{l}(3; 1 - 3)$ – вектор, що задає напрям прямої;

$\bar{n}(a; b; -3)$ – нормальний вектор площини.

Пряма *AB* і площина π перпендикулярні, якщо вектори $\bar{l}$ та $\bar{n}$ колінеарні, тобто їхні координати повинні бути пропорційними:

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{-3}{-3};\ \frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{1}, \text{звідки знаходимо}$$

$$a = 3, b = 1.$$

Приклад 10. Складіть рівняння площини π, що проходить через точку $P(1; -1; 1)$ і пряму *BC*.

Розв'язання

Рівняння прямої *BC* уже відомо (складали в завданні 1):

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-1}.$$

Оскільки пряма BC лежить у площині, то треба скласти рівняння площини, що проходить через три точки: *B, C, P*.

$$\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B & z - z_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \\ x_P - x_B & y_P - y_B & z_P - z_B \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо визначник, який стоїть у лівій частині рівності:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+2 \\ 1-2 & 4-3 & -3+2 \\ 1-2 & -1-3 & 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-(y-3)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -(x-2) + 4(y-3) + 5(z+2) =$$

$$= -x + 4y + 5z = 0.$$

Отже, рівняння шуканої площини:

$$-x + 4y + 5z = 0, \text{або } x - 4y - 5z = 0.$$

Приклад 11. Попит населення певної країни на товар є сталим і становить 500 кг. Постачальники погоджуються привезти 1 200 кг товару, якщо ціна становитиме 12 гривень за кг. Але якщо ціна знизиться до 9 гривень за 1 кг товару, постачальники привезуть на продаж лише 150 кг товару.

Визначити:

1) скільки товару мають привезти та продати постачальники, щоб ринок товару для цієї країни перебував у стані рівноваги;

2) функцію пропозиції товару за умов її лінійності;

3) чому дорівнює рівноважна ціна 1 кг товару? Знайти відповідь аналітично й графічно;

4) які економічні наслідки матиме примусове встановлення ціни на товар на рівні 11 гривень за 1 кг? Зробити відповідні розрахунки.

Розв'язання

1. У стані рівноваги величина попиту дорівнює величині пропозиції, а оскільки попит сталий (500 кг), то постачальники мають привезти 500 кг товару.

2. Рівняння, що описує функцію пропозиції товару, можна знайти за координатами двох точок: A(1200; 12); B(150; 9):

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y}{x_B - x};$$

$$\frac{12 - 9}{1200 - 150} = \frac{9 - y}{150 - x};$$

$$\frac{3}{1050} = \frac{9 - y}{150 - x};$$

$$3(150 - x) = 1050(9 - y);$$

$$450 - 3x = 9450 - 1050y;$$

$$1050y = 9000 + 3x;$$

$$350y = 3000 + x;$$

$$y = \frac{3000 + x}{350};\ P_s = \frac{3000 + Q_s}{350}.$$

3. Графічно: крива попиту D вертикальна лінія, оскільки за умов величина попиту не змінюється від коливання цін. Криву пропозиції можемо побудувати за двома точками $A(1200; 12); B(150; 9)$.

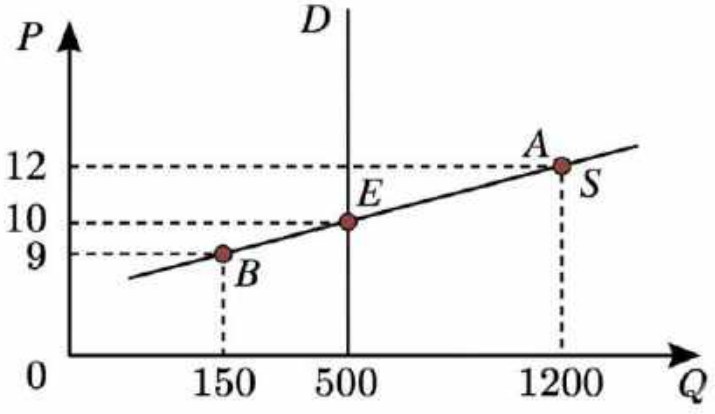


Рисунок 9.1 – Крива пропозиції

Як показує графік, ціна ринкової рівноваги дорівнює 10 грн.

Знайти значення ціни ринкової рівноваги можна, користуючись рівнянням, що описує функцію пропозиції. Оскільки в точці рівноваги величина попиту дорівнює величині пропозиції, тобто 500 кг, то рівноважна ціна:

$$P_E = \frac{3000 + 500}{350} = 10 \text{ грн}$$

4. Якщо ціна на товар буде примусово встановлена на рівні 11 грн за 1 кг, то існуватиме надлишок товару.

Підставимо значення ціни 11 грн у формулу функції пропозиції:

$$\frac{3000 + Q_s}{350} = 1,$$

де $Q_s = 850$.

Оскільки величина попиту є сталою та становить 500 кг, то надлишок становитиме 850 – 500 = 350 кг.

Завдання для самоконтролю

1. Скласти рівняння площини, що проходить:

а) через точку $N(3; -1; 2)$ паралельно площині $5x - 2y + z - -1 = 0$;

б) через три точки $A(-3; 2; 1)$, $B(0; -1; 2)$, $C(5; 1; 0)$;

в) через точки $A(2; -1; 2)$ і $B(1; 3; -1)$ перпендикулярно площині $x - y - z + 3 = 0$.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2; 3)$ паралельно прямій:

а) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{3}$;

б) $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

3. Знайти кут між:

а) площинами $3x - 2y + z - 1 = 0$ та $x + 2y - 3z + 5 = 0$;

б) між прямою $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$ та площиною $2x - y + 3z - -1 = 0$.

4. Попит населення певної країни на товар є сталим і становить α кг. Постачальники погоджуються привезти β кг товару, якщо ціна становитиме γ гривень за 1 кг. Якщо ціна знизиться до η гривень за 1 кг товару, постачальники привезуть на продаж лише μ кг товару.

Визначити:

1) скільки товару мають привезти та продати постачальники, щоб ринок товару для цієї країни перебував у стані рівноваги;

2) функцію пропозиції товару за умов її лінійності;

3) чому дорівнює рівноважна ціна 1 кг товару? Знайти відповідь аналітично та графічно;

4) які економічні наслідки матиме примусове встановлення ціни на товар на рівні 11 гривень за 1 кг? Зробити відповідні розрахунки.

В	α	β	γ	η	μ	**В**	α	β	γ	η	μ
1	350	1150	11	8	130	**11**	390	1370	17	14	145
2	240	1300	15	7	125	**12**	410	1230	18	15	138
3	670	1350	16	6	147	**13**	430	900	14	9	156
4	340	1380	17	5	158	**14**	520	1000	16	8	147
5	210	1230	18	14	123	**15**	250	1100	10	6	169
6	460	1450	15	13	150	**16**	270	1160	15	13	153
7	530	1240	12	7	134	**17**	480	1340	11	7	141
8	580	1280	13	10	168	**18**	490	1170	13	6	197
9	600	1260	14	11	210	**19**	380	1430	12	9	162
10	370	1450	16	13	190	**20**	360	1320	10	8	215

Питання для самоперевірки

1. Які види рівняння прямої на площині ви знаєте? З'ясуйте геометричний зміст параметрів, що входять до складу цих рівнянь.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку *P(a, b):*

а) перпендикулярно до вектора з координатами $\{p;q\}$;

б) паралельно цьому вектору.

3. Написати рівняння прямих, що проходять через точку *M(a, b)* паралельно координатним осям.

4. У чому полягає геометрична сутність процесу нормування загального рівняння прямої?

5. Написати нормальне рівняння прямої, що проходить через початок координат.

6. Написати нормальне рівняння прямих, паралельних координатним осям.

7. Визначити кутовий коефіцієнт прямої:

а) заданої загальним рівнянням;

б) заданої нормальним рівнянням;

в) заданої двома точками;

г) заданої параметричними рівняннями.

8. Написати рівняння прямих, паралельних прямим:

а) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

б) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$;

в) $x = x_0 + bt, \mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + mt$.

9. Написати рівняння прямих, перпендикулярних до прямих, заданих у попередньому прикладі.

10. Які значення параметра λ відповідають двом основним прямим пучка $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

11. Написати рівняння бісектриси кута між двома прямими, заданими загальними рівняннями.

12. Сторони трикутника на площині задано рівняннями:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2 = 0$; $A_3x + B_3y + C_3 = 0$.

Як дізнатися, де розміщена точка *M(a, b):* в середині чи зовні трикутника.

13. Яким умовам мають задовольняти числа *m, n, p* для того, щоб $mx + ny + p = 0$ було рівнянням прямої в нормальному вигляді.

14. Які види рівняння площини ви знаєте? З'ясуйте геометричний зміст параметрів, що входять у ці рівняння.

15. Яке геометричне місце точок задається в просторі рівняннями:

а) $x = a$;

б) $x\cos\alpha - y\sin\alpha - p = 0$;

в) $By + Cz = 0$;

г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$?

16. Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі.

17. Вивести рівняння спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

18. Визначити відстань між двома паралельними площинами.

19. Визначити відстань між двома паралельними прямими в просторі.

20. Вказати рівняння прямої у векторній формі.

21. Вказати рівняння площини у векторній формі.

Тести

1. Що називається загальним рівнянням площини в просторі:

а) рівняння кола;

б) рівняння площини першого степеня;

в) рівняння прямої;

г) рівняння сфери.

2. Нормальним вектором площини називається вектор:

а) що лежить у площині;

б) паралельний площині;

в) перпендикулярний площині;

г) будь-який вектор.

3. Якщо один із коефіцієнтів рівняння площини дорівнює нулю, то площина може бути:

а) перпендикулярною осі;

б) паралельною осі;

в) похилою до осі;

г) збігатися з прямою.

4. Кут між площинами визначається через:

а) відстань між ними;

б) кут між нормальними векторами;

в) кут між осями координат;

г) довжину векторів.

5. Яка умова паралельності двох площин:

а) їхні нормальні вектори перпендикулярні;

б) їхні нормальні вектори пропорційні;

в) їхні рівняння однакові;

г) вони проходять через одну точку.

6. Що задає напрям прямої в просторі:

а) нормальний вектор;

б) координати точки;

в) напрямний вектор;

г) відстань до площини.

7. Кут між двома прямими визначається через:

а) кут між їхніми напрямними векторами;

б) відстань між прямими;

в) кут між площинами;

г) довжину прямої.

8. Яка умова перпендикулярності двох прямих:

а) напрямні вектори однакові;

б) напрямні вектори пропорційні;

в) скалярний добуток напрямних векторів дорівнює нулю;

г) прямі лежать у різних площинах.

9. Кут між прямою та площиною залежить від:

а) напрямного вектора прямої та нормального вектора площини;

б) відстані між прямою та площиною;

в) координат точки;

г) довжини прямої.

10. Для знаходження точки перетину прямої та площини потрібно:

а) побудувати графік;

б) знайти середину відрізка;

в) розв’язати систему рівнянь;

г) обчислити площу.

РОЗДІЛ ІІІ
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ТЕМА 10. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

10.1. Поняття комплексного числа.

10.2. Форми запису комплексних чисел.

10.3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

10.4. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

Основні теоретичні відомості

10.1. Поняття комплексного числа

Комплексним числом називають вираз виду $a + bi$, де a та b – дійсні числа, i – уявна одиниця, яка визначається рівністю $i^2 = -1$. Комплексні числа часто позначають однією літерою: $z = a + bi$. Символічно її позначають так:

$$a = Re\ z,\ \ b = Im\ z.$$

Будь-яке число можна розглядати як комплексне число, в якого уявна частина дорівнює 0: $a = a + 0 \cdot i$.

Комплексне число $z = yi$, в якому $Re\ z = 0$ називають суто уявним числом.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називають рівними тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$, тобто:

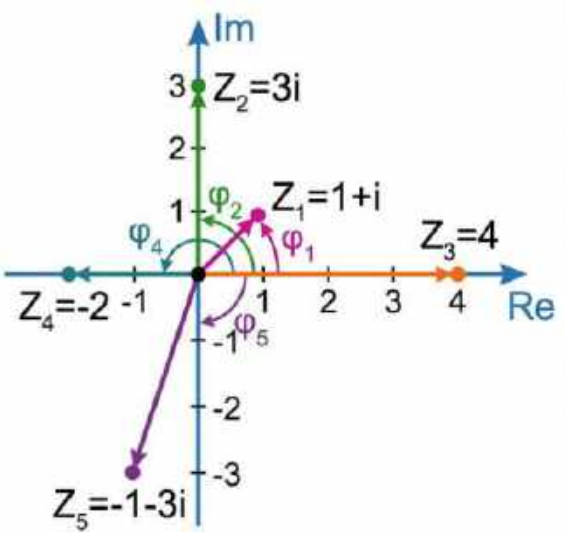
$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Число $a - bi$ називають *спряженим* до комплексного числа $z = a + bi$ та позначають $\bar{z} = a - bi$.

10.2. Форми запису комплексних чисел

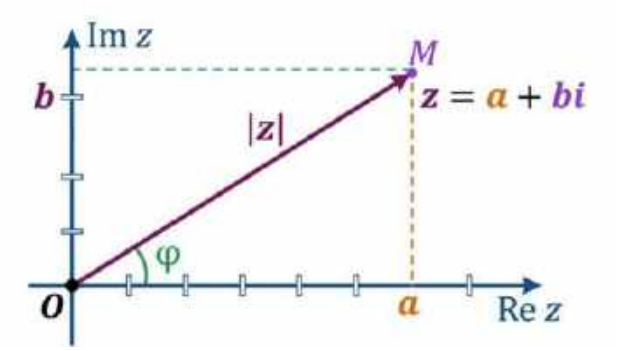
Виберемо на площині прямокутнику декартову систему координат. Якщо кожному комплексному числу $z = x + yi$ поставити у відповідність точку (x, y) площини xOy, то між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини буде встановлено взаємно однозначну відповідність. Дійсні числа водночас зображують точками осі Ox, а суто уявні числа – точками осі Oy. Тому вісь Ox називають дійсною, а вісь Oy – уявною. Числу $z = 0$ відповідає точка $O(0; 0)$.

Наприклад, зобразимо на комплексній площині числа: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 4$, $z_4 = -2$, $z_5 = -1 - 3i$.



Комплексне число $z = x + yi$ можна також зображати вектором, початок якого перебуває в точці (0;0), а кінець – у точці $(x; y)$. Такий вектор називають радіус-вектором точки $(x; y)$. Довжину радіус-вектора називають модулем комплексного числа та позначають $|z|$, або r.

Кут φ, який утворює радіус-вектор точки z з додатним напрямком осі Ox, називають аргументом комплексного числа та позначають $Arg\ z$: $\varphi = Arg\ z$.



Водночас $x = r \cdot \cos\varphi;\ y = r \cdot \sin\varphi;\ z = x + yi = r \cdot \cos\varphi + +r \cdot \sin\varphi \cdot i;$

$$z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

Це так звана *тригонометрична форма* комплексного числа. Кожне комплексне число має модуль, причому $0 \leq |z| < +\infty$, $|z| = 0$, тоді й тільки тоді, коли $z = 0$. Аргумент числа $z = 0$ невизначений, а для всіх інших комплексних чисел аргумент визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданку виду $2\pi k$, $k \in Z$.

Основним значенням аргументу вважається те значення кута φ, яке дозволяє нерівності $-\pi < \varphi < \pi$. Це значення позначають через $arg\ z$.

$Arg\ z = \arg z + 2k\pi, k \in Z.$

Для обчислення $|z|$ та $\arg z$ комплексного числа $z = x + yi$ користуються такими формулами:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(x + yi) = \begin{cases} arctg\ \dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ arctg\ \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0; y \geq 0 \\ arctg\ \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0; y < 0. \end{cases}$$

$$\arg(yi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } y < 0 \end{cases}$$

$$\arg 0 = \text{невизначений.}$$

Показникова форма комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

10.3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання та множення комплексних чисел визначають за такими формулами:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Наприклад, виконаємо дії:

1) $(2+i)+(4-3i)=(2+4)+(1-3)i=6-2i$;

2) $3i+(2-i)=(0+2)+(3-1)i=2+2i$;

3) $(-4+2i)\cdot(7+3i)=-4\cdot 7+2\cdot 7i-4\cdot 3i+2\cdot 3i^2=$
$=-28+14i-12i-6=-34+2i.$

Сума та добуток пряжених чисел завжди є дійсним числом. Дійсно, для будь-якого числа $z=a+bi$:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a;$$
$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2+(ab-ab)i=a^2+b^2.$$

Різницею чисел z_1 та z_2 називають число:

$$z=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Наприклад, $(7-2i)-(5+i)=(7-5)+(-2-1)i=2-3i$.

Часткою двох комплексних чисел z_1 та z_2 $(z_2\neq 0)$ називають комплексне число:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Наприклад, обчислимо вирази:

1) $\dfrac{2-i}{3+5i}=\dfrac{(2-i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\dfrac{2\cdot 3-1\cdot 3i-2\cdot 5i+5i^2}{3^2-(5i)^2}=\dfrac{1-13i}{34}=$
$=\dfrac{1}{34}-\dfrac{13}{34}i$

2) $\dfrac{1}{i-2}=\dfrac{1}{-2+i}=\dfrac{1\cdot(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\dfrac{-2-i}{4-i^2}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$

10.4. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Теорема. Нехай комплексні числа z_1 та z_2 записані в тригонометричній формі:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1) \text{ та } z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2).$$

Тоді:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\big(cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Степінь комплексного числа обчислюють за **формулою Муавра:**

$$\big(|z|(cos\varphi + i\cdot sin\varphi)\big)^n = |z|^n\big(cos(n\varphi) + i\cdot sin(n\varphi)\big).$$

Коренем n-го степеня із комплексного числа z називають комплексне число w, яке в разі піднесення до степеня n дає z, тобто:

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z.$$

Теорема. Існує рівно n значень кореня n-го степеня із комплексного числа $z = |z|(cos\varphi + i\cdot sin\varphi)$. Ці значення визначають формулою:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Розв’язування типових прикладів

Приклад 1. Представити комплексні числа в тригонометричній формі:

1) $z = 2 + 2i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \varphi = arg\, z = arctg\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $z = -1 - \sqrt{3}i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2,$$

$$\varphi = arg\, z = arctg\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

3) $z = 5i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5, \qquad \varphi = arg\, z = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 5\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sin\frac{\pi}{2}\right)$$

4) $z = -3i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3, \qquad \varphi = arg\, z = -\frac{\pi}{2}$$

$$z = 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

5) $z = 4$

$$|z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \qquad \varphi = arg\, z = arctg\frac{0}{4} = 0$$

$$z = 4(cos0 + i \cdot sin0)$$

6) $z = -16$

$$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16, \qquad \varphi = arg\, z = arctg\frac{0}{-16} + \pi = \pi$$

$$z = 16(cos\pi + i \cdot sin\pi)$$

Приклад 2. Представити число $z = -1 + i$ в показниковій формі.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = arg\, z = arctg\frac{1}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Приклад 3. Дано числа $z_1 = -1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i$. Записати їх у тригонометричній формі та виконати дії: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; ${z_1}^{20}$; $\sqrt[3]{z_1}$.

Тригонометрична форма:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(cos\frac{11\pi}{12} + i \cdot sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(cos\frac{7\pi}{12} + i \cdot sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$${z_1}^{20} = \left(\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{20}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20} \cdot \left(cos\frac{20 \cdot 3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{20 \cdot 3\pi}{4}\right) =$$

$$= 1024 \cdot (cos15\pi + i \cdot sin15\pi) = 1024 \cdot (-1 + 0i) =$$

$$= -1024$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2.$$

Звідси:

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{11\pi}{12} + i \cdot sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{19\pi}{12} + i \cdot sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Завдання для самоконтролю

1. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 - 6 \cdot x + 18 = 0$;

2) $x^2 + 4 \cdot x + 5 = 0$;

3) $5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$;

4) $x^2 + 9 = 0$;

5) $x^2 - 6 \cdot x + 25 = 0$;

6) $x^2 + 10x + 41 = 0$.

2. Представити комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах: $z_0 = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}}$.

3. Представити комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$.

4. Виконати дії:

1) $(3 + i) + (-3 - 8i)$;

2) $(5 - 4i) + (7 + 4i)$;

3) $(-6 + 2i) + (-6 - 2i)$;

4) $(0{,}2 + 0{,}1i) + (0{,}8 - 1{,}1i)$;

5) $(2 - 3i) + (5 + 6i) + (-3 - 4i)$.

5. Виконати дії:

1) $(5 - 3i)2i$;

2) $(3 + 4i)(3 - 4i)$;

3) $(5 + 3i)(2 - 5i)$;

4) $(-2 - i)(1 + i)$;

5) $(0{,}2 - 0{,}3i)(0{,}5 + 0{,}4i)$.

6. Виконати дії:

1) $\frac{1-i}{1+i}$;

2) $\frac{3-2i}{1+3i}$;

3) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$;

4) $\frac{(1-2i)\cdot(2+i)}{3-2i}$;

5) $\frac{2+3i}{(4+i)\cdot(2-2i)}$.

Питання для самоконтролю

1. Дати означення комплексного числа.
2. Які є форми комплексних чисел?
3. Які дії можна виконувати над комплексними числами?
4. За якими формулами виконують дії в алгебраїчній і тригонометричній формах?

Тести

1. Комплексне число складається з:

а) дійсної та раціональної частин;

б) раціональної та уявної частин;

в) цілої та дробової частин;

г) дійсної та уявної частин.

2. Як називається число $z = 12i$:
а) комплексним;
б) дійсним;
в) суто уявним;
г) спряженим.

3. Яку назву мають комплексні числа $5 + 7i$ та $5 - 7i$:
а) рівні;
б) спряжені;
в) додатні;
г) протилежні.

4. Комплексні числа $-2 + 3i$ та $2 - 3i$ називають:
а) спряжені;
б) протилежні;
в) рівні;
г) невід'ємні.

5. Сума $(3 + 2i) + (-1 - 5i) + (4 - 5i) + (6 - 3i)$ дорівнює:
а) $12 + 11i$;
б) $12 - 11i$;
в) 0;
г) $-12 - 11i$.

6. Різницею чисел $3 + 5i$ та $10 - 6i$ є:
а) $-7 - 11i$;
б) $-7 + 11i$;
в) $7 + 11i$;
г) $11i$.

7. Геометричним зображенням комплексного числа є:
а) відрізок;
б) пряма;
в) радіус-вектор;
г) промінь.

8. Форма комплексного числа $z = r(cos\alpha + isin\alpha)$ називається:

а) алгебраїчною;

б) показниковою;

в) логарифмічною;

г) тригонометричною.

9. Для того щоб помножити два комплексні числа в тригонометричній формі, потрібно:

а) модулі перемножити, а аргументи додати;

б) модулі розділити, а аргументи відняти;

в) модулі розділити, а аргументи додати;

г) модулі перемножити, а аргументи відняти.

10. Корінь четвертого степеня з 1 має:

а) 2 значення;

б) 8 значень;

в) 4 значення;

г) безліч значень.

ТЕМА 11. ГРАНИЦІ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

11.1. Поняття границі функції.
11.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.
11.3. Основні теореми про границю.
11.4. Розкриття деяких невизначеностей.
11.5. Перша та друга важливі границі.

Основні теоретичні відомості

11.1. Поняття границі функції

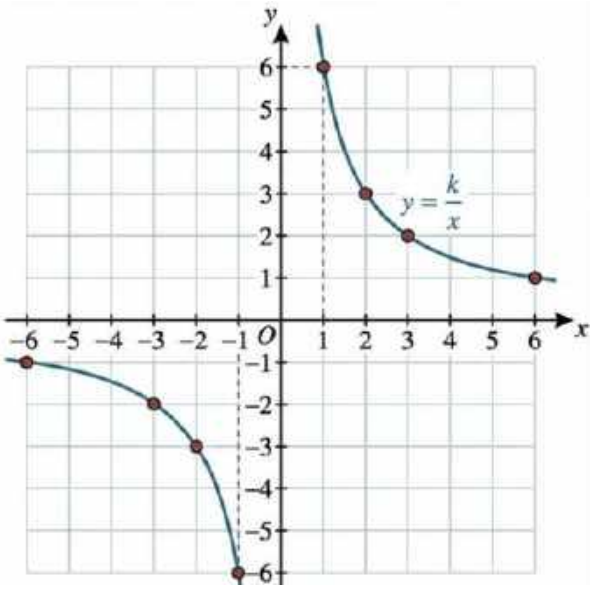
Означення. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена на проміжку* $(-\infty;\ +\infty)$. *Число A називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$, *якщо для будь-якого малого* $\varepsilon > 0$ *існує таке додатнє число* $M = M(\varepsilon) > 0$, *що для всіх x таких, що* $|x| > M$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Означення. *Число A називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ *в точці* x_0, *якщо для будь-якого малого числа* $\varepsilon > 0$ *існує число* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *таке, що при всіх x, що задовольняють нерівність* $|x - x_0| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Зауваження. Означення границі не вимагає існування функції в точці x_0, тобто $x \to x_0$, але $x \neq x_0$.



$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x}=\left[\frac{k}{\infty}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{k}{x}=\left[\frac{k}{0}\right]=\infty$$

11.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення. *Функція* $\alpha(x)$ *називається* ***нескінченно малою*** *при* $x\to x_0(x\to\infty)$, *якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0)$.

Означення. *Функція* $f(x)$ *називається* ***нескінченно великою*** *при* $x\to x_0$, *якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Означення. *Якщо* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *нескінченно малі функції в точці* x_0 *і* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, *то функції* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *називаються* ***еквівалентними*** *нескінченно малими функціями й позначають* $\alpha(x)\sim\beta(x)$ *при* $x\to x_0$.

Ланцюжок еквівалентних нескінченно малих функцій.

Якщо $x\to 0$, *то:*

$$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\frac{a^x-1}{\ln a}\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha},$$

де $\alpha\in R$.

Якщо $x \to x_0$, *то:*

$$x - x_0 \sim sin(x - x_0) \sim tg(x - x_0) \sim arcsin(x - x_0) \sim arctg(x - x_0) \sim$$
$$\sim \frac{a^{x-x_0} - 1}{ln\, a} \sim ln\big(1 + (x - x_0)\big) \sim e^{x-x_0}$$
$$- 1 \sim \frac{\big(1 + (x - x_0)\big)^{\alpha} - 1}{\alpha}, \quad \text{де } \alpha \in R.$$

Ланцюжок еквівалентних нескінченно малих функцій застосовується під час обчислення границь функцій.

Теорема. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to x_0$ та $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_2(x)}$.

Отже, під знаком границі можна заміняти нескінченно малі функції еквівалентними нескінченно малими функціями.

11.3. Основні теореми про границю

Властивості границь функцій

Теорема. Якщо $f(x) = c$, де c – довільне дійсне число, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, тобто границя сталої в довільній точці x_0 дорівнює саме цій сталій.

Теорема. Якщо кожна із функцій $f(x)$ та $\phi(x)$ має границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \phi(x)$, $f(x) \cdot \phi(x)$, $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ($\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) \neq 0$) та формули:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm \phi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \phi(x);$$
$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot \phi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \phi(x);$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x)}.$$

Наслідки

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то для довільного числа c виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тобто сталий множник можна винести за знак границі.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, то для довільного натурального *m:*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^m = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^m.$$

11.4. Розкриття деяких невизначеностей

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка призводить до невизначених випадків.

1. Невизначеність виду $[\infty-\infty]$*:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}\right) = \infty\cdot(1-0) =$
$= \infty\cdot 1 = \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) = [\infty-\infty]=.$

Границя зменшуваного та від'ємника в точці $x_0 = 2$ не існує, тому спочатку виконаємо віднімання дробів, звівши їх до спільного знаменника. Маємо:

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\quad\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Зауваження. Для функцій, які мають границю на нескінченності, залишаються справедливі всі сформульовані теореми.

2. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$*, задана відношенням двох многочленів:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-1}{3x^4+x^2+10x+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^4, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-1}{3x^4+x^2+10x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}} = \frac{1}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^3+5x^2-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =.$

Після ділення чисельника та знаменника на x^3 дістанемо:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$.

Після ділення чисельника та знаменника на x^3 одержимо:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

Отже, щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник поділити на найвищий степінь x цих многочленів.

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$, задана відношенням двох многочленів:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники та скоротимо дріб на спільний множник *(x – 1)*:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3+2x^2-\mathrm{x}-2}{x^2+3\mathrm{x}-4} = \lim_{x\to1} \frac{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2)}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+4)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+3x+2}{x+4} = \frac{6}{5}.$$

Скорочення на $(x - 1)$ можливе тому, що під час означення границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $x \neq x_0$. Тобто при $x \to 1$, $x - 1 \neq 0$.

Множник $x - x_0$ називають ***критичним множником***. Отже, щоб розкрити невизначеність $\frac{0}{0}$, задану відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник скоротити на критичний множник.

4. *Невизначеність виду $\frac{0}{0}$, задана ірраціональними виразами:*

$\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Позбудемось від ірраціональності в чисельнику, домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз, одержимо:

$$\lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{2}{3}.$$

5. Невизначеність $\infty - \infty$, задана ірраціональними виразами:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

11.5. Перша та друга важливі границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Наприклад, обчислимо, використовуючи *першу важливу границю*:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{bx}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot\sin ax}{ax} = a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = a$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a\sin ax}{bax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\right) = \frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx\cos ax} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a\sin ax}{bax}\cdot\frac{1}{\cos ax}\right) = \frac{a}{b}\cdot$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax} = \frac{a}{b}$.

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

Наслідки.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$.
2. $\lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{k}{u})^u = e^k$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$.
4. $\lim\limits_{u\to 0}(1+ku)^{\frac{1}{u}} = e^k$.

Число $e = 2{,}718\ldots$ – одна з фундаментальних величин у математиці. Друга важлива границя часто використовується для обчислення інших границь.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{arcsin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання

а) оскільки $\sin 5x \sim 5x$, $tg2x \sim 2x$ при $x \to 0$, то згідно з теоремою 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2};$$

б) оскільки $arcsin(x-3)\sim(x-3)$ при $x \to 3$, то згідно з теоремою 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{arcsin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+5)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(3x-\frac{2x}{x^2+1})$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+5)=8;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(3x)-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=0-0=0.$

Приклад 3. Обчислити, використовуючи другу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-4}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\ (1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}ln\ \ (1+x)=\lim\limits_{x\to 0}ln\ \ (1+x)^{1/x}=$

$=ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=ln\,e=1;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+1}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}}=e^{-2};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-2}{2x+3}\right)^{5x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{5x-4}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-2}}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right)^{-\frac{2}{2x+3}}\right)^{5x-4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x+8}{2x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10+\frac{8}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e^{-5}.$$

Приклад 4. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to5}(3x^2-4x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Розв'язання

а) границя функції обчислюється безпосередньо, а саме:

$$\lim_{x\to5}(3x^2-4x+1)=3\cdot5^2-4\cdot5+1=75-20+1=56;$$

б) у разі безпосереднього обчислення границі одержимо невизначеність $\frac{0}{0}$. Для розкриття невизначеності потрібно розкласти на множники чисельник і знаменник дробу:

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2);$$
$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

та скоротити дріб на множник $(x-3)$:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x+3}=\frac{5}{6};$$

в) безпосереднє обчислення границі призведе до невизначеності $\frac{0}{0}$. Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до ірраціонального, тобто на вираз $(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2-x-x}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}=\frac{-2}{1+1}=-1;$$

г) домножимо чисельник і знаменник дробу $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{1}$ на вираз, спряжений до чисельника:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)/x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{0}{2}=0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+27}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$.

2. Знайти границі, використовуючи першу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin 8x}$.

3. Знайти границі, використовуючи другу важливу границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-7}\right)^{x+1}$.

4. Знайти зазначені границі:

а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{3x^2+x-10}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

Питання для самоконтролю

1. Що означає поняття «границя функції» і як його можна інтуїтивно пояснити?
2. У чому полягає різниця між границею функції в точці та значенням функції в цій точці?
3. Які умови є потрібними для існування границі функції в точці?
4. Чим відрізняються односторонні границі та коли їх використовують?
5. У яких випадках границя функції не існує?
6. Які основні властивості границь дають змогу спрощувати обчислення складних виразів?
7. Як пов’язане поняття границі з неперервністю функції?
8. Які типові невизначеності виникають під час обчислення границь і як їх можна долати?

Тести

1. Яке з наведених означень відповідає границі функції в точці:

а) максимальне значення функції на проміжку;

б) значення функції під час нескінченного зростання аргументу;

в) число, до якого прямують значення функції в разі наближення аргументу до певної точки;

г) значення функції за будь-якого значення аргументу.

2. Яка з умов НЕ є потрібною для існування границі функції в точці:

а) функція повинна бути визначена в околі точки;

б) функція повинна мати однакові односторонні границі;

в) функція повинна бути визначена в самій точці;

г) односторонні границі повинні бути скінченними.

3. Яка з властивостей границь є правильною:

а) границя суми дорівнює добутку границь;

б) границя суми дорівнює сумі границь;

в) границя суми завжди дорівнює нулю;

г) границя суми дорівнює різниці границь.

4. Яке твердження про неперервність пов'язане з границею:

а) функція неперервна, якщо має похідну;

б) функція неперервна в точці, якщо існує границя й вона дорівнює значенню функції в цій точці;

в) функція неперервна, якщо визначена на всій області;

г) функція неперервна в точці, якщо вона зростає.

5. Який з наведених виразів є невизначеністю:

а) 5/2;

б) 5/0;

в) 0/5;

г) 0/0.

6. Яка з наведених властивостей є важливою для існування границі:

а) функція повинна бути суто монотонною;

б) функція повинна бути періодичною;

в) функція повинна бути обмеженою в околі точки;

г) функція повинна бути диференційованою.

7. Значення функції «прямують до певного числа» означає, що:

а) функція стає сталою;

б) значення функції наближаються до цього числа, але не обов'язково дорівнюють йому;

в) функція перестає змінюватися;

г) функція визначена лише в одній точці.

8. Яке твердження найкраще описує поняття «границя зліва»:

а) значення функції в разі віддалення аргументу;

б) значення функції під час наближення аргументу до точки з менших значень;

в) значення функції в разі наближення аргументу до точки з більших значень;

г) значення функції в самій точці.

9. У якому випадку варто зазначити, що границя функції в точці існує:

а) коли значення функції різко змінюються;

б) коли односторонні границі збігаються;

в) коли функція має розрив;

г) коли функція не визначена в околі точки.

10. У якому випадку варто зазначити про «розрив» функції:

а) коли значення функції збігаються з її границею;

б) коли функція не має області визначення;

в) коли границя в точці існує, але не дорівнює значенню функції;

г) коли функція є сталою.

ТЕМА 12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

12.1. Похідна функції, основні правила її знаходження.

12.2. Фізичний і геометричний зміст похідної.

12.3. Похідна складеної функції. Похідна неявно заданої функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, що задана параметрично.

Основні теоретичні відомості

12.1. Похідна функції, основні правила її знаходження

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, в якому визначаються властивості похідної та диференціала функції, а також їхнього застосування до дослідження функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$. Якщо деякому значенню x_0 надати приросту Δx, то функція отримає відповідний приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Процес знаходження похідної від цієї функції називається ***диференціюванням***.

Загальний порядок знаходження похідної (згідно з означенням):

1) надаємо аргументові x приріст Δx і знаходимо відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) знаходимо відношення приросту функції до приросту аргументу;

3) знаходимо границю цього відношення.

Похідну будь-якої елементарної функції можна знайти за цією схемою, а можна скористатися таблицею похідних:

$C' = 0,\ (C = \text{const})$	$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Під час диференціювання функцій, крім таблиці похідних, застосовують правила диференціювання:

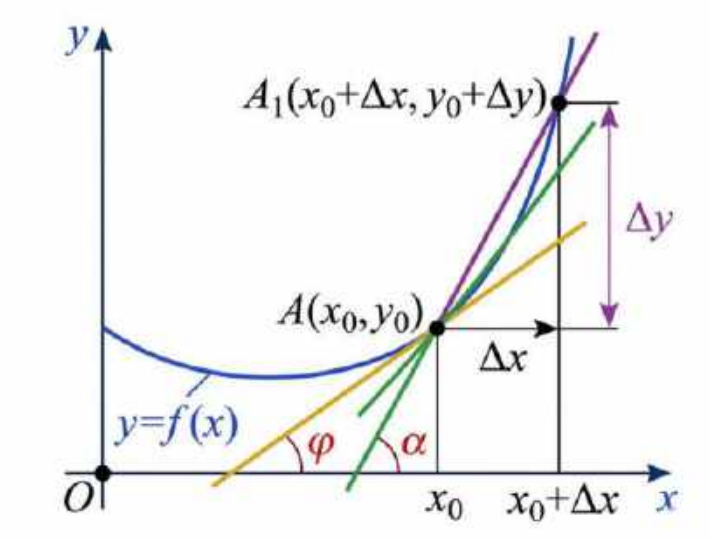
$$(Cu)' = Cu'$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

12.2. Фізичний і геометричний зміст похідної

Фізичний зміст похідної з'ясовує задача про швидкість і прискорення руху. Нехай деяка точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, де t – час, S – шлях, який вона проходить за цей час. Швидкість руху точки в певний момент часу є похідною від функції $S(t)$, а прискорення є похідною другого порядку від цієї функції:

$$v(t) = S'(t)$$
$$a(t) = v'(t) = S''(t)$$

Геометричний зміст похідної з'ясовує задача про дотичну та нормаль до графіка функції. Дотичною до кривої в точці $A(x_0; y_0)$ називається граничне положення січної, яку проведено через точки $A(x_0; y_0)$ й $A_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ за $\Delta x \to 0$.



Позначимо кут нахилу січної через α, а дотичної – через φ. З рівняння дотичної $y - y_0 = k(x - x_0)$ знайдемо кутовий коефіцієнт:

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отже, рівняння дотичної:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

рівняння нормалі (перпендикуляра до дотичної):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

12.3. Похідна складеної функції. Похідна неявно заданої функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, що задана параметрично

Знаходження похідних складених функцій $y = f\big(\varphi(x)\big)$, де $y = f(u), u = \varphi(x)$, посідає центральне місце в техніці диференціювання.

Теорема. Якщо функції $y = f(u), u = \varphi(x)$ диференційовані, то похідну складеної функції $y = f\big(\varphi(x)\big)$ можна знайти за формулою:

$$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) \;\Leftrightarrow\; y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Правило знаходження похідної складеної функції:

1) знайти похідну зовнішньої функції $f(u)$ за аргументом u;

2) знайти похідну внутрішньої функції $\varphi(x)$ за змінною x;

3) записати їхній добуток.

Основним під час знаходження похідної складеної функції є вміння визначати зовнішню та внутрішню функції.

Випадок складеної функції як суперпозиції функцій, кількість яких більша за дві, вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції $y = f\Big(u\big(v(x)\big)\Big)$, що є суперпозицією трьох функцій $y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$, маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Функцію y від x називають заданою в неявній формі, якщо вона визначається рівнянням $F(x; y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, де під символом F розуміють вираз, що містить змінні x та y.

Для знаходження похідної від функції y немає потреби розв'язувати рівняння $F(x; y) = 0$ відносно функції y (це, до речі, не завжди можна зробити). Потрібно знайти похідну лівої частини рівності $F\big(x; y(x)\big) = 0$ як похідну складеної функції, отримати рівняння $\Big(F\big(x; y(x)\big)\Big)'_x = 0$, яке потім розв'язати відносно y'_x.

Інколи щоб спростити задачу диференціювання функції $y = f(x)$, переходять від явного задання функції до неявного. Для цього логарифмують ліву й праву частини рівності $|y| = |f(x)|$, отримуючи $ln|y| = ln|f(x)|$. Для спрощення запису модуль можна опускати. Такий підхід до знаходження похідної називають ***логарифмічним диференціюванням***.

Логарифмічне диференціювання застосовують найчастіше до степенево-показникових функцій $y = \big(u(x)\big)^{v(x)}$.

Функцію y від x називають заданою параметрично, якщо вона визначається за допомогою двох функцій від допоміжної змінної (параметра):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

Функцію, що задана параметрично, можна продиференціювати як і неявну, без подання її в явній формі.

Знайдемо похідну y від x за умови, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають похідні за аргументом t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій:

$$1)\ y = 5x^3 - 2\sqrt{x} + cosx - \frac{4}{x^4} + 3;$$

$$2)\ y = (2x^6 + 3x)e^x;$$

$$3)\ y = \frac{sinx}{\sqrt{x}}.$$

Розв'язок

$$1)\ y' = (5x^3)' - \left(2\sqrt{x}\right)' + (cosx)' - (4x^{-4})' + (3)' =$$

$$= 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - sinx - 4 \cdot (-4x^{-5}) + 0 =$$

$$= 15x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - sinx + \frac{16}{x^5};$$

2) $y' = (2x^6 + 3x)'e^x + (2x^6 + 3x)(e^x)' =$

$= (12x^5 + 3)e^x + (2x^6 + 3x)e^x = (2x^6 + 12x^5 + 3x + 3)e^x;$

3) $y' = \dfrac{(sinx)'\sqrt{x} - sinx\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{cosx\sqrt{x} - sinx\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$= \dfrac{2xcosx - sinx}{2x\sqrt{x}}.$

Приклад 2. Знайти швидкість і прискорення тіла, яке рухається за законом $S(t) = t^3 + 4t$, в кінці 3 секунди.

Розв'язок

$$v(t) = S'(t) = 3t^2 + 4 = 3 \cdot 3^2 + 4 = 31\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}};$$
$$a(t) = v'(t) = (3t^2 + 4)' = 6t = 6 \cdot 3 = 18\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3 - 6x^2$ в точці $x_0 = -1$.

Розв'язок

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 = -1 - 6 = -7$$
$$f'(x_0) = f'(-1) = 3x^2 - 12x = 3(-1)^2 - 12(-1) = 3 + 12 = 15$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y + 7 = 15(x + 1);\ \ 15x - y + 8 = 0$$
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$
$$y + 7 = -\frac{1}{15}(x + 1); 15y + 105 = -x - 1; x + 15y + 106 = 0.$$

Приклад 4. Знайти похідні функцій $y = sin^2x, y = sin\,x^2$.

Розв'язок

Функція $y = sin^2x$ є складеною, де зовнішньою є степенева функція $f(u) = u^2$, а внутрішньою – тригонометрична $u = sinx$, отже,

$$y'_x = 2sinx(sinx)' = 2sinxcosx = sin2x.$$

А ось для функції $y = sin\,x^2$, де $f(u) = sinu, u = x^2$ маємо:

$$y'_x = cosx^2(x^2)' = 2xcosx^2.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = arctg^4 2x$.

Розв'язок

Тут $y = u^4, u = arctgv, v = 2x$, тому:

$$y'_x = 4arctg^3 2x \cdot \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{8arctg^3 2x}{1 + 4x^2}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язок

Перепишемо рівняння: $F\big(x; y(x)\big) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Знайдемо похідну: $2x + 2y \cdot y' = 0$.

Виразимо y':

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = (sinx)^{cosx}$.

Розв'язок

Логарифмуємо обидві частини:

$$lny = ln((sinx)^{cosx})$$

$lny = cosx \cdot ln(sinx)$, оскільки $\log_a x^n = n \log_a x$.

Знаходимо похідну $(u \cdot v)' = u'v + uv'$:

$$\frac{1}{y}y' = -sinx \cdot ln(sinx) + cosx\frac{1}{sinx}cosx$$

$$\frac{1}{y}y' = -sinx \cdot ln(sinx) + cos^2x\frac{1}{sinx}$$

$$y' = y\left(-sinx \cdot ln(sinx) + cos^2x\frac{1}{sinx}\right)$$

$$y' = (sinx)^{cosx}\left(-sinx \cdot ln(sinx) + cos^2x\frac{1}{sinx}\right).$$

Приклад 8. Знайти похідну функції:

$$\begin{cases} x = 2cost \\ y = 3sint \end{cases}.$$

Розв'язок

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(3sint)'}{(2cost)'} = \frac{3cost}{-2sint} = -\frac{3}{2}ctgt.$$

Завдання для самоконтролю

1. Знайти похідну функції:

$$y = 3x^2 - 5x + 1;$$

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3};$$

$$y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1);$$

$$y = \frac{3x^2+1}{x-1};$$

$$y = \frac{2}{x^3-1};$$

$$y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}};$$

$$y = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}, \text{обчислити } y'(0).$$

2. Знайти похідну складної функції:

$$y = (x^2 + 1)^4;$$

$$y = sin3x;$$

$$y = ln^2 x = (lnx)^2;$$

$$y = 3^{sinx};$$

$$y = e^{\sqrt{lnx}};$$

$$y = (1 + sin^2 x)^4;$$

$$y = ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

3. Знайти похідну функції, заданої неявно:

$$5x^3 + 3y - 2 = 0;$$

$$y = cos(x + y);$$

$$x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

4. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = acos^3\varphi \\ y = bsin^3\varphi \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}.$$

5. Знайти похідну за допомогою логарифмічного диференціювання:

$$y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$$

$$y = \sqrt{xsinx\sqrt{1-e^x}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці. Який граничний перехід лежить в основі цього поняття?

2. Опишіть алгоритм знаходження похідної за означенням (кроки з приростом аргументу та функції).

3. Назвіть основні правила диференціювання: для суми, добутку та частки двох функцій.

4. У чому полягає геометричний зміст похідної?

5. Дайте означення дотичної до кривої. Як похідна пов’язана з кутовим коефіцієнтом дотичної?

6. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в заданій точці. Як вони пов’язані між собою геометрично?

7. Поясніть фізичний зміст першої та другої похідних на прикладі прямолінійного руху матеріальної точки.

8. Сформулюйте правило знаходження похідної складеної функції. Як правильно визначити «зовнішню» та «внутрішню» функції?

9. Яку функцію називають заданою неявно? Опишіть процедуру знаходження її похідної.

10. У чому сутність методу логарифмічного диференціювання? Для яких типів функцій його використання є найбільш доцільним (або єдиним можливим)?

11. Як знайти похідну функції, що задана параметрично? Запишіть відповідну формулу.

Тести

1. Процес знаходження похідної від цієї функції називається:

а) інтегруванням;

б) диференціюванням;

в) логарифмуванням;

г) проєктуванням.

2. У чому полягає геометричний зміст похідної в точці:

а) довжина дуги кривої в цій точці;

б) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції;

в) відстань від точки до початку координат;

г) площа криволінійної трапеції.

3. Похідна сталої величини (константи) дорівнює:

а) одиниці;

б) самій константі;

в) нулю;

г) нескінченності.

4. Фізичний зміст першої похідної від руху за часом – це:

а) прискорення руху;

б) сила тертя;

в) миттєва швидкість;

г) маса тіла.

5. Друга похідна від закону прямолінійного руху за часом визначає:

а) потенціальну енергію;

б) прискорення руху;

в) середню швидкість;

г) пройдений шлях.

6. Як поводиться сталий множник під час знаходження похідної:

а) завжди перетворюється на нуль;

б) виноситься за знак похідної без змін;

в) підноситься до квадрата;

г) змінює знак на протилежний.

7. Пряма, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, називається:

а) асимптотою;

б) нормаллю;

в) хордою;

г) бісектрисою.

8. Логарифмічне диференціювання доцільно застосовувати для:

а) сталих функцій;

б) лінійних функцій;

в) степенево-показникових функцій (де основа й показник залежать від x);

г) знаходження коренів квадратного рівняння.

9. Функція називається заданою неявно, якщо:

а) вона записана у формі системи рівнянь через параметр t;

б) вона визначена рівнянням, не розв’язаним стосовно залежної змінної y;

в) її графік проходить через початок координат;

г) вона не має похідної в жодній точці.

10. Граничне положення січної, коли друга точка наближається до першої вздовж кривої, називається:

а) дотичною;

б) радіусом;

в) променем;

г) сігмою.

ТЕМА 13. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Основні теоретичні відомості

Загальна схема дослідження функції:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність і періодичність;
3) знайти інтервали монотонності й екстремуми функції;
4) знайти інтервали опуклості та точки перегину;
5) знайти асимптоти графіка функції;
6) знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо);
7) побудувати графік функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$.

1. *Областю визначення функції* називається множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна x.

2. Функція називається *парною*, якщо: $f(-x) = f(x)$.

Функція називається *непарною,* якщо: $f(-x) = -f(x)$.

Функція $y = f(x)$, задана на множині *M*, називається *періодичною*, якщо існує таке число T ≠ 0, що: 1) для будь-якого *x* є *M*: $x - \text{T}$ і $x + \text{T}$ також належать *M*; 2) для всіх *x* є *M*: $f(x + T) = f(x)$.

3. Монотонність функції $f(x)$ характеризується знаком її першої похідної f'(x): якщо на деякому проміжку $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функція *зростає* (*спадає*) на цьому проміжку. Щоб дослідити функцію на монотонність, треба: а) знайти її першу похідну; б) прирівняти її до нуля, щоб розбити область визначення функції на проміжки, в яких $f'(x)$ зберігає знак; в) методом проб встановити знак похідної на кожному проміжку. Точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує, називаються *критичними точками.* Якщо похідна в разі переходу через критичну точку міняє знак з плюса на мінус, то це *точка максимуму*; якщо похідна під час переходу через

критичну точку міняє знак з мінуса на плюс, то це *точка мінімуму*; якщо похідна в разі переходу через критичну точку не міняє знак, то в цій точці екстремуму немає.

4. Крива називається *опуклою* (*ввігнутою*) на деякому проміжку, якщо вона розміщена нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці цього проміжку. Опуклість чи ввігнутість кривої характеризується знаком другої похідної: якщо $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то крива опукла (ввігнута) на цьому проміжку. *Точкою перегину* кривої називається така її точка, яка відокремлює інтервал опуклості від інтервалу ввігнутості. У разі переходу через точки перегину друга похідна функції міняє знак.

5. Пряма лінія називається *асимптотою* кривої, якщо відстань від точки *M* цієї кривої до прямої прямує до нуля, коли точка *M* рухається по кривій у нескінченість. Розрізняють три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні* та *похилі*.

Якщо хоча б одна границя функції $y = f(x)$ в точці a праворуч або ліворуч дорівнює нескінченості, то пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою*, тобто:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty.$$

Якщо існує скінчена границя функції при x $\to \infty$, тобто:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

то пряма $y = b$ є *горизонтальною асимптотою.*

Якщо існують границі:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k; \qquad \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b,$$

то пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою.*

6. Щоб знайти точки перетину графіка функції з віссю *Ox*, підставимо у функцію *y = 0*, а з віссю *Oy* – підставимо *x = 0*.

7. Будуємо графік функції.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Дослідити на монотонність функцію:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

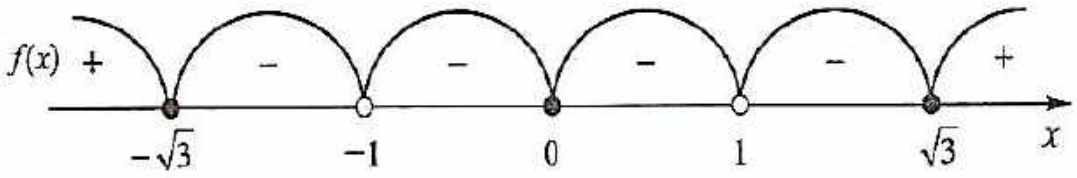
Розв'язок

Функція не визначена при $x = \pm 1$, тобто область визначення складається з трьох інтервалів: $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

Знаходимо критичні точки:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$y' = 0$ у точках $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$, при $x = \pm 1$ похідна не існує.



Ця функція зростає на інтервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$, а спадає на $\left(-\sqrt{3}; -1\right), (-1; 1), \left(1; \sqrt{3}\right)$.

Приклад 2. Дослідити на монотонність функцію:

$$y = ln(x^2 + 2x - 3).$$

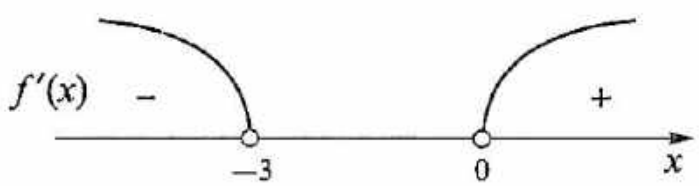
Розв'язок

Область визначення функції: $x^2 + 2x - 3 > 0$, тобто $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Знайдемо похідну функції та точки, в яких вона дорівнює нулю:

$$y' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3};$$

$$2x + 2 = 0, x = -1.$$

Точка $x = -1$ не належить області визначення.



Отже, на інтервалі $(-\infty; -3)$ функція спадає, на $(1; +\infty)$ спадає.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію:

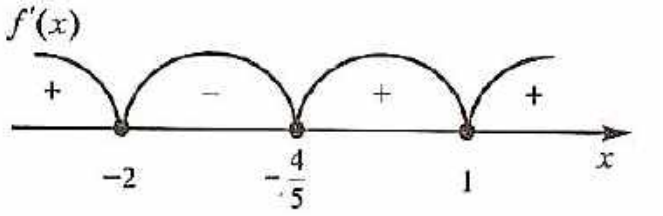
$$y = (x+2)^2(x-1)^3.$$

Розв'язок

Функція визначена на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідну функції та критичні точки:

$$y' = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x-1)^2(x+2)(5x+4).$$

Отже, критичними є точки: $x = -2, x = -\frac{5}{4}, x = 1$. Дослідимо знак похідної:



Точка $x = -2$ є точкою максимуму, $y(-2) = 0$; точка $x = -\frac{5}{4}$ є точкою мінімуму, $y\left(-\frac{5}{4}\right) \approx -8{,}4$; точка $x = 1$ не є точкою екстремуму, оскільки похідна не міняє знак.

Приклад 4. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Розв'язок

1. Функція визначена всюди, крім точки, в якій знаменник перетворюється в нуль $x = 1$. Область визначення складається з двох інтервалів: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Перевірка на парність:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x) \neq y(x), \qquad y(-x) \neq -y(x).$$

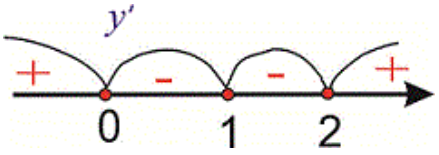
Отже, функція ні парна, ні непарна, неперіодична.

3. Для відшукання інтервалів монотонності обчислюємо похідну функції:

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

Прирівнюючи її до нуля, матимемо точки, підозрілі на екстремум $x = 0;\ x = 2$. Вони розбивають область визначення на інтервали монотонності.

Дослідимо поведінку похідної праворуч та ліворуч від знайдених точок. Графічно інтервали монотонності матимуть вигляд:



Досліджувана функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ та спадає на $(0; 1) \cup (1; 2)$.

Точка $x = 0$ – точка локального максимуму, $x = 2$ – локального мінімуму.

Знайдемо значення функції:

$$y_{max} = 0, \qquad y_{min} = 2.$$

4. Для відшукання інтервалів опуклості знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Друга похідна не перетворюється в нуль, а це означає, що функція немає точок перегину.

5. Точка $x = 1$ – вертикальна асимптота функції. Рівняння похилої асимптоти має вигляд y = kx + b, де *k, b* – границі:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{2(x-1)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2};$$

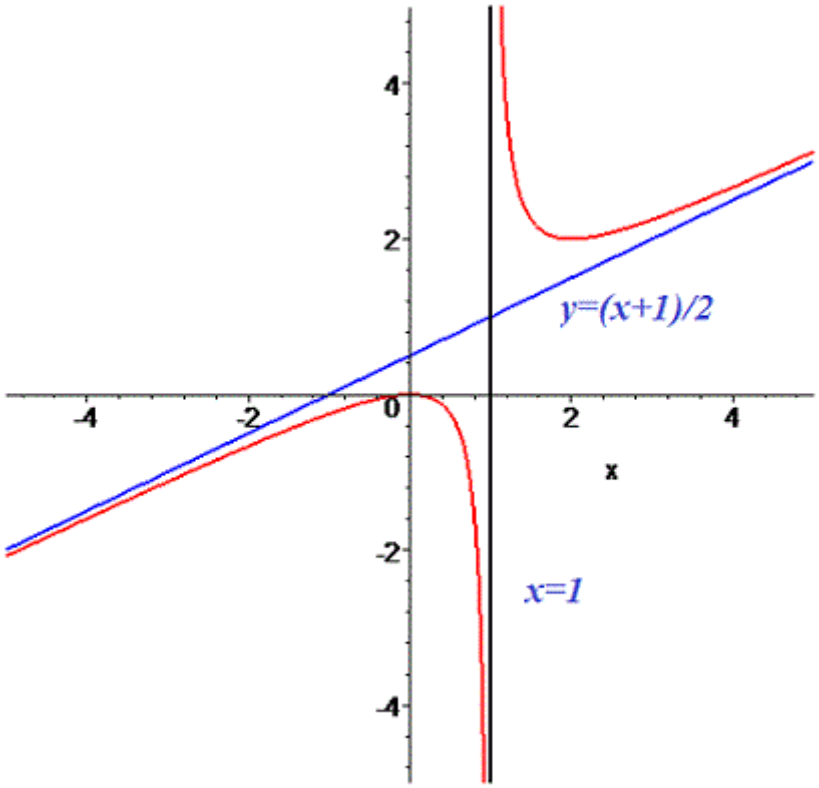
$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Кінцевий вигляд прямої:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad y = \frac{x+1}{2}.$$

6. Точка $x = 0$ – єдина точка перетину з осями координат.

7. Будуємо графік.



Завдання для самоконтролю

Дослідити функцію та побудувати графік:

$y = \dfrac{x^2 + 2x + 33}{x - 1}$;

$y = \dfrac{x^2 + 6x + 34}{-x - 3}$;

$y = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{-x - 4}$;

$y = \dfrac{x^2 + 2x + 49}{-x - 2}$;

$y = \dfrac{x^2 + 5x + 30}{-x + 1}$;

$y = \dfrac{x^2 + 6x + 25}{x + 3}$;

$y = \dfrac{x^2 + 5x + 8}{x + 1}$;

$y = \dfrac{x^2 + 3x + 66}{x + 1}$;

$y = \dfrac{x^2 + 6x + 33}{x + 4}$;

$y = \dfrac{x^2 + 7x + 37}{-x - 4}$.

Питання для самоконтролю

1. Як за допомогою першої похідної визначити інтервали зростання та спадання функції?
2. Що таке критичні точки функції та чи завжди в них існує екстремум?
3. Сформулюйте важливу умову існування екстремуму (теорема Ферма).
4. Як відрізнити точку максимуму від точки мінімуму за знаком першої похідної?
5. За якою ознакою визначають інтервали опуклості вгору та опуклості вниз (увігнутості)?
6. Що називають точкою перегину графіка функції?
7. Які бувають види асимптот і як знайти вертикальну асимптоту?
8. Як впливає парність або непарність функції на побудову її графіка?
9. За яких умов у функції існує похила асимптота?
10. Опишіть основні кроки загального плану дослідження функції.

Тести

1. На інтервалі, де функція зростає, її перша похідна має бути:

а) від'ємною;
б) додатною;
в) дорівнювати нулю;
г) дорівнювати одиниці.

2. Якщо в разі переходу через критичну точку похідна змінює знак з «плюс» на «мінус», то ця точка є:

а) точкою мінімуму;
б) точкою максимуму;
в) точкою перегину;
г) точкою розриву.

3. За якою умовою графік функції є опуклим вгору (має форму купола) на інтервалі:

а) перша похідна додатна;

б) перша похідна від'ємна;

в) друга похідна додатна;

г) друга похідна від'ємна.

4. Точка, під час переходу через яку графік змінює напрям опуклості на увігнутість, називається:

а) точкою максимуму;

б) критичною точкою;

в) точкою перегину;

г) точкою розриву.

5. Пряма, до якої необмежено наближається графік функції під час віддалення точки графіка в нескінченність, називається:

а) дотичною;

б) асимптотою;

в) січною;

г) нормаллю.

6. Якщо функція є парною, то її графік симетричний відносно:

а) початку координат;

б) осі абсцис (OX);

в) осі ординат (OY);

г) прямої y = x.

7. Для непарної функції характерна симетрія графіка відносно:

а) початку координат;

б) осі ординат (OY);

в) горизонтальної асимптоти;

г) осі абсцис (OX).

8. Якщо перша похідна функції на всьому інтервалі дорівнює нулю, то функція на цьому інтервалі:

а) зростає;

б) спадає;

в) є сталою (константою);

г) має розрив.

9. Точки максимуму та мінімуму функції об'єднуються спільною назвою:

а) критичні точки;

б) точки перегину;

в) точки екстремуму;

г) точки розриву.

10. Що варто зазначити про графік функції, якщо на інтервалі її перша похідна від'ємна:

а) функція на цьому інтервалі зростає;

б) функція на цьому інтервалі спадає;

в) функція на цьому інтервалі є опуклою;

г) функція на цьому інтервалі є непарною.

РОЗДІЛ IV
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

ТЕМА 14. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

14.1. Функції двох змінних. Область визначення. Лінії рівня.
14.2. Частинний приріст і частинні похідні.
14.3. Повний приріст і повний диференціал функції двох змінних.
14.4. Частинні похідні вищих порядків.

Основні теоретичні відомості

14.1. Функції двох змінних. Область визначення. Лінії рівня

Означення. *Якщо змінна величина u залежить від n незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, то її називають* ***функцією кількох змінних*** *і позначають:*

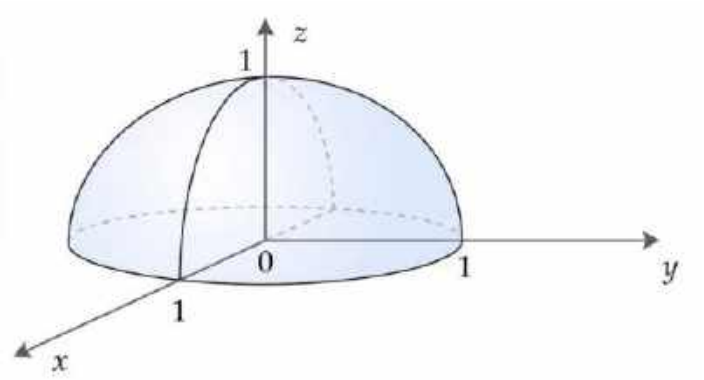
$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ або } u = f(M),\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n,$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні змінні, або аргументи, є рівноправними.

Означення. *Змінна z називається* ***функцією незалежних змінних x та y****, якщо кожній парі $(x; y)$ з деякої області їх зміни відповідає певне єдине значення величини z: $z = f(x; y)$.*

Означення. *Сукупність усіх впорядкованих наборів чисел виду $(x; y)$, за яких функція $z = f(x; y)$ приймає певні дійсні значення, називають* ***областю визначення функції.***

Графіком функції двох змінних $z = f(x; y)$ є деяка поверхня. Так, графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є півсфера з радіусом 1, розташована над площиною *XOY*.



Означення. *Криві лінії, що лежать у площині XOY і мають рівняння* $f(x;y)=c$ $(c-const)$, *називаються* ***лініями рівня функції*** $z=f(x;y)$.

Лінія рівня – це множина всіх точок площини, для яких функція $z=f(x;y)$ приймає одне значення.

14.2. Частинний приріст і частинні похідні

Нехай $z=f(x;y)$ – функція двох змінних. Надамо змінній x приросту Δx, а змінна y залишається незмінною.

Означення. *Функція* z *одержить приріст* $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x;y)$, *який називають* ***частинним приростом по змінній x.***

Функція z *одержить приріст* $\Delta_x z=f(x,y+\Delta y)-f(x;y)$, *який називають* ***частинним приростом по змінній y.***

Означення. *Якщо існує* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, *то її називають* ***частинною похідною функції*** $z=f(x;y)$ ***по змінній x*** *і позначають* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *або* z_x', $f_x'(x;y)$, *тобто:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогічно $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ – ***частинна похідна по змінній y.***

За означенням кожна частинна похідна є похідною функції однієї змінної. Тому під час обчислення частинних похідних можна користуватись відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної.

14.3. Повний приріст і повний диференціал функції двох змінних

Означення. *Нехай маємо функцію двох змінних* $z = f(x; y)$. *Якщо x та y дістають одночасно приріст* Δx *та* Δy, *то різницю* $f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ *називають* ***повним приростом*** *функції та позначають* $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Означення. *Головна, лінійна відносно* Δx *та* Δy *частина повного приросту функції називається* ***повним диференціалом:***

$$dz = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y.$$

Прирости Δx *та* Δy *незалежних змінних x та y називаються* ***диференціалами незалежних змінних*** *і позначаються dx та dy, тому:*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

14.4. Частинні похідні вищих порядків

Означення. *Частинну похідну першого порядку по змінній* x_m *від частинної похідної першого порядку по змінній* x_k, *називають* ***частинною похідною другого порядку*** *функції по змінній* x_k *та* x_m *і позначають:*

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m}$ або $u''_{x_k x_m}$ при $k \neq m$, $\frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2}$ або $u''_{x_k x_k}$ при $k = m$.

Частинні похідні функції $z = f(x; y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ є функціями тих самих змінних, тому вони теж мають похідні по цих змінних.

Приклад. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = ln(x^2 + y)$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = \frac{1}{x^2 + y},$$

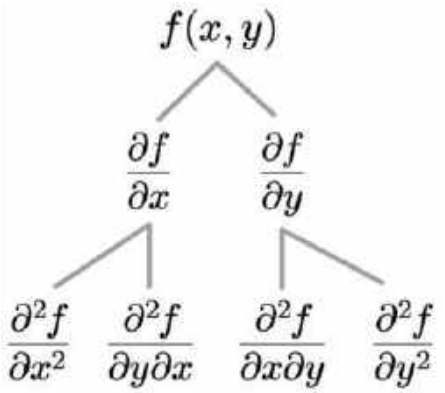
а потім – частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \left(2x\left(x^2 + y\right)^{-1}\right)'_x = 2 \cdot \left(x^2 + y\right)^{-1} + 2x \cdot (-1)\left(x^2 + y\right)^{-2} \cdot 2x = \frac{2}{x^2 + y} - \frac{4x^2}{(x^2 + y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \left(\left(x^2 + y\right)^{-1}\right)'_y = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\left(x^2 + y\right)^{-1}\right)'_x = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{\left(x^2 + y\right)^2}.$$

Для функції двох змінних $z = f(x; y)$



Означення. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *називають* ***мішаними частинними похідними.***

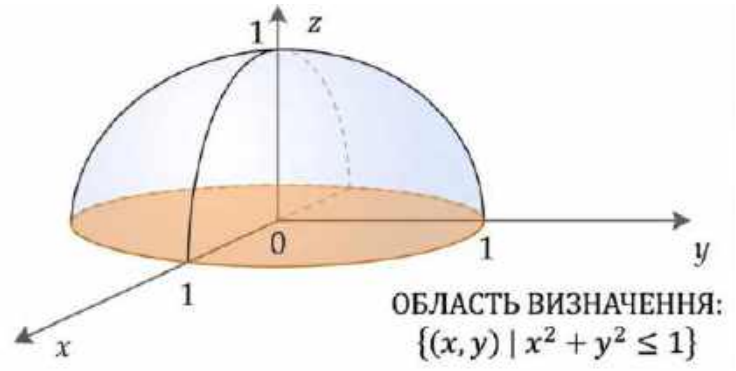
Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ та похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в точці *(x; y)* та в деякому її околі, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Розв’язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв’язання

Функція z набуває дійсних значень тоді, коли $1 - x^2 - y^2 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 1$.



Отже, область визначення функції – круг з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює 1.

Приклад 2. Знайти лінії рівня функції а) $z = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$.

Розв’язання

Лінії рівня функції описуються рівнянням $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = c$. Це коло з центром у точці $(2; -3)$ і радіусом $\sqrt{c}$.

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z = x^4 + y^4 - 3x^2y^2 + 2x - 1$.

Розв’язання

$z_x' = 4x^3 - 6xy^2 + 2$ (змінну y вважаємо сталою);

$z_y' = 4y^3 - 6yx^2$ (змінну x вважаємо сталою).

Частинні диференціали визначаються як основні частини частинних приростів функції $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = ln\sqrt{xy}$.

Розв’язання

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(ln\sqrt{xy}\right)_x' = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(ln\sqrt{xy}\right)_y' = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x = \frac{x}{2xy} = \frac{1}{2y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{2x}dx + \frac{1}{2y}dy$.

Приклад 5. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = ln(x^2 + y)$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ln(x^2 + y))_x' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (ln(x^2 + y))_y' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = \frac{1}{x^2 + y},$$

а потім частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = (2x(x^2 + y)^{-1})_x' = 2 \cdot (x^2 + y)^{-1} + 2x \cdot (-1)(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x =$$

$$= \frac{2}{x^2 + y} - \frac{4x^2}{(x^2 + y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = ((x^2 + y)^{-1})_y' = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x^2 + y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = ((x^2 + y)^{-1})_x' = -1(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Знайти області визначення функцій і побудувати їхнє геометричне зображення:

$$z = x + y$$

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}$$

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$z = ln(4x^2 + 9y^2 - 36).$$

2. Знайти лінії рівня функцій:

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 2x + y$$

$$z = \frac{\sqrt{x}}{y}$$

$$z = \frac{x}{y}.$$

3. Знайти частинні похідні функцій:

$$z = x^3 + 3x^2y - y^3$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = \frac{xy}{x - y}$$

$$z = \frac{x}{3y - 2x}$$

$$u = \ln(\sin(x - 2t))$$

$$z = e^{(x^3+y^2)^2}$$

$$u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке функція кількох змінних? Наведіть приклад.
2. Як визначається область визначення функції двох змінних?
3. Що називають лініями рівня функції? Який їхній геометричний зміст?
4. Дайте означення частинного приросту функції по змінній x та по змінній y.
5. Як формально визначається частинна похідна функції по змінній x?
6. Чому під час обчислення частинних похідних можна користуватися правилами диференціювання функцій однієї змінної?
7. Що таке повний приріст функції двох змінних?
8. Як визначається повний диференціал функції?
9. Що називають частинними похідними другого порядку?
10. Сформулюйте умову рівності мішаних частинних похідних.

Тести

1. Як називається змінна величина u, якщо вона залежить від декількох незалежних змінних (аргументів):

а) функцією кількох змінних;

б) складною функцією однієї змінної;

в) параметричною константою;

г) диференціальним рівнянням.

2. Що розуміють під областю визначення функції кількох змінних:

а) сукупність усіх впорядкованих наборів чисел, за яких функція приймає певні дійсні значення;

б) лише область додатних значень залежної змінної;

в) множину значень, які приймає сама функція на графіку;

г) довжину кривої лінії на площині координат.

3. Що є геометричним зображенням (графіком) функції двох змінних у тривимірному просторі:

а) пряма лінія або плоска ламана;

б) певна поверхня в тривимірному просторі;

в) тіло обертання або сфера;

г) сімейство концентричних кіл.

4. Як називається лінія на площині координат, у кожній точці якої функція двох змінних зберігає одне й те саме постійне значення:

а) лінією рівня функції;

б) асимптотою функції;

в) дотичною лінією;

г) екстремальною кривою.

5. Як називається приріст функції двох змінних, коли змінюється лише один з аргументів, а інший залишається постійним:

а) частинним приростом функції;

б) повним приростом функції;

в) частинним диференціалом;

г) повним диференціалом.

6. Яка основна умова ставиться до іншого аргументу в разі знаходження частинної похідної по змінній *y*:

а) змінна *x* вважається постійною величиною (константою);

б) змінна *x* обов'язково повинна дорівнювати нулю;

в) змінна *x* диференціюється за правилом складної функції;

г) змінна *x* прагне до нескінченності.

7. Повним приростом функції двох змінних називають:

а) різницю між значенням функції в нарощеній точці та її значенням у початковій точці під час одночасного приросту обох аргументів;

б) суму значень функції в початковій та кінцевій точках;

в) добуток частинних приростів за кожної координати окремо;

г) головну лінійну частину приросту функції.

8. Що таке повний диференціал функції кількох змінних за своїм означенням:

а) головна, лінійна відносно приростів аргументів частина повного приросту функції;

б) границя відношення повного приросту до добутку дельта *x* на дельта *y*;

в) сума частинних похідних без множення на диференціали аргументів;

г) похідна від функції за параметром часу.

9. Як називається частинна похідна першого порядку, яку повторно продиференціювали за будь-якою з незалежних змінних:

а) частинною похідною другого порядку;

б) повним диференціалом другого порядку;

в) мішаним повним приростом;

г) первісною функцією.

10. Як називаються частинні похідні вищих порядків, які обчислені за різними змінними (наприклад, спочатку по *x*, а потім по *y*):

а) мішаними частинними похідними;

б) повними диференціалами;

в) однорідними функціями;

г) складними аргументами.

ТЕМА 15. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

15.1. Безумовні екстремуми функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.

15.2. Умовний екстремум. Метод Лагранжа.

Основні теоретичні відомості

15.1. Безумовні екстремуми функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

Означення. *Точка* $M_0(x_0;y_0)$ *називається* ***точкою максимуму*** *функції* $z = f(x;y)$, *якщо існує окіл точки* M_0 *такий, що для всіх точок (x; y) з цього околу виконується нерівність* $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ (рис. 15.1).

Означення. *Точка* $M_0(x_0;y_0)$ *називається* ***точкою мінімуму*** *функції* $z = f(x;y)$, *якщо існує окіл точки* M_0 *такий, що для всіх точок (x; y) з цього околу виконується нерівність* $f(x_0;y_0) < f(x;y)$ (рис. 15.2).

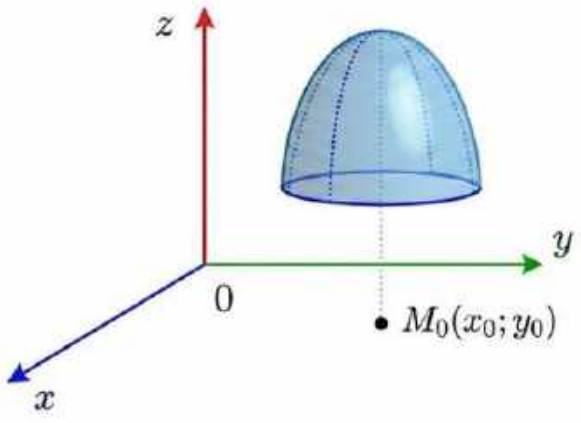


Рисунок 15.1

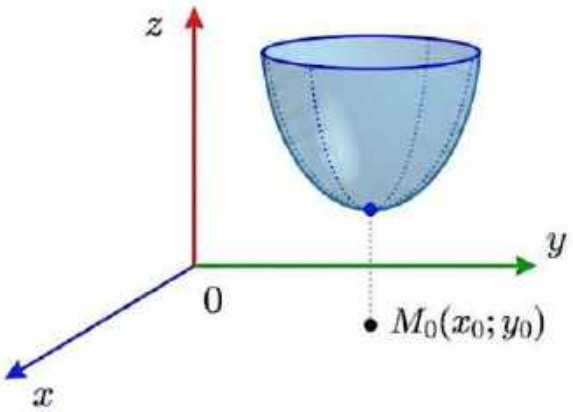


Рисунок 15.2

Означення. *Відповідні значення функції* $f(x_0, y_0)$ *називають* ***максимальним і мінімальним значенням функції.***

Означення. *Максимум і мінімум функції двох змінних називають* ***екстремумами функції.***

Вагомі умови існування екстремуму

Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в яких виконуються відповідні умови, називають критичними або стаціонарними (або підозрілими на екстремум).

Достатні умови існування екстремуму

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі критичної точки $(x_0; y_0)$ і має в цій точці неперервні похідні другого порядку:

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0; y_0);$$
$$a_{22} = f''_{yy}(x_0; y_0);$$
$$a_{12} = f''_{xy}(x_0; y_0).$$

Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $a_{11} < 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має максимум;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $a_{11} > 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має мінімум;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція екстремуму не має;

якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то застосовують іншу ознаку.

Схема дослідження функції на екстремум (безумовний)

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти частинні похідні першого порядку z'_x та z'_y.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ та знайти критичні точки.

4. Знайти частинні похідні другого порядку й обчислити їхнє значення в критичних точках.

5. За достатніми ознаками зробити висновок про екстремум.

6. Знайти значення функції в точках екстремуму.

Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

Найбільше та найменше значення функції знаходять у такій послідовності:

1. Знаходять у цій області критичні точки.

2. На межі області за допомогою рівняння межі функцію зводять до функції однієї змінної, для якої знаходять критичні точки.

3. Знаходять значення функції в усіх знайдених критичних точках і в кутових точках межі області.

4. Серед цих значень вибирають найбільше та найменше.

15.2. Умовний екстремум. Метод Лагранжа

Часто зустрічається задача знаходження екстремуму функції двох змінних за наявності додаткових умов на її аргументи. Такі екстремуми називають ***умовними.***

Нехай потрібно знайти екстремум функції $z = f(x; y)$ за умови $\varphi(x; y) = 0$ (рівняння зв'язку).

Алгоритм знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

1. Записати функцію Лагранжа $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$, де λ – деяке число, що називається множником Лагранжа.

2. Знайти критичні точки функції Лагранжа за відповідними умовами існування екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases}$$

3. Перевірити в кожній критичній точці M_k достатні умови існування екстремуму:

а) якщо $\Delta(M_k)=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix} > 0$, то M_k – точка максимуму;

б) якщо $\Delta(M_k) < 0$, то M_k – точка мінімуму.

4. Знайти значення функції в точках максимуму чи мінімуму.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Розв'язання

Функція визначена для всіх дійсних *x* та *y*.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 2x - y + 3;$$
$$z'_y = -x + 2y - 2.$$

Використаємо відповідну умову існування екстремуму:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -\frac{4}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{matrix}$$

Отже, $M_0\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ – критична точка.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{xy} = -1; \quad z''_{yy} = 2.$$

Знайдемо значення частинних похідних $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$, тобто:

$$a_{11} = 2,\ \ a^2{}_{12} = -1,\ \ a_{22} = 2.$$

Тоді $a_{11}a_{22} - a_{12} = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ і $a_{11} = 2 > 0$, тобто за достатніми ознаками функція має мінімум.

Отже,

$$min\, z = f\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в області D, що обмежена лініями $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$.

Розв'язання

Знайдемо критичні точки функції:

$$\begin{cases} z_x' = 0 \\ z_y' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z_x' = 2x - y - 4 = 0 \\ z_y' = -x + 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 4 = 0 \\ x = 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(\frac{4}{3};\ \frac{8}{3}\right)$ лежить у середині області *D* (рис. 15.3).

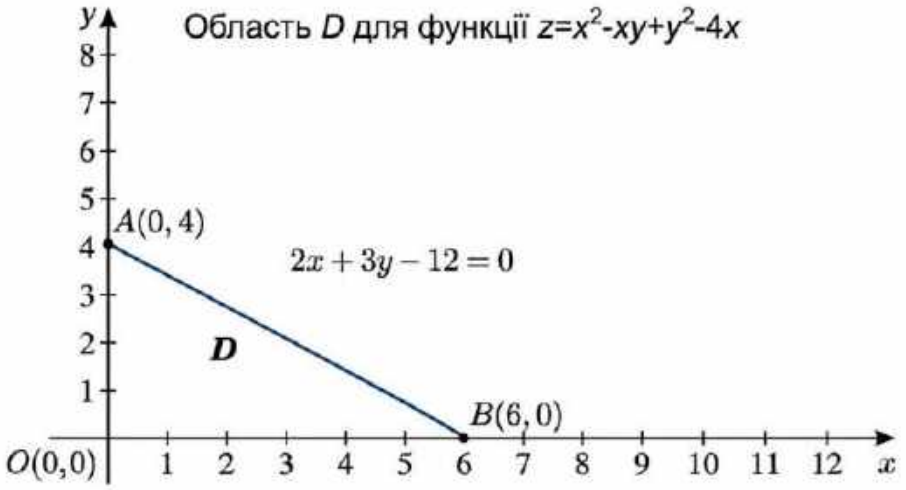


Рисунок 15.3

Знайдемо значення функції в точці M_0:

$$z(M_0) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{48}{9}.$$

Дослідимо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2,\ z' = 2y,\ 2y = 0,\ \ y = 0.$

Критична точка $M_1(0; 0)$. Значення функції в цій точці $z(0; 0) = 0$.

Значення функції в кутовій точці $z(0; 4) = 16$.

Якщо $y = 0$, то $z = x^2 - 4x,\ z' = 2x - 4, 2x - 4 = 0,\ x = 2.$

Критична точка $M_2(2; 0)$. Значення функції в критичній точці $z(2; 0) = 4 - 8 = -4$.

Значення функції в кутовій точці $z(6; 0) = 36 - 24 = 12$.

Якщо $2x+3y-12=0,\ \ y=\frac{12-2x}{3}=4-\frac{2}{3}x$, то

$$z=x^2-x\left(4-\frac{2}{3}x\right)+\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2-4x=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x+16$$

$$z_x^{'}=\frac{38}{9}x-\frac{40}{3}$$

$$\frac{38}{9}x-\frac{40}{3}=0,\ \ x=\frac{60}{19},\ \ y=\frac{36}{19}.$$

Критична точка $M_3\left(\frac{60}{19};\ \frac{36}{19}\right)$. Значення функції в критичній точці $z\left(\frac{60}{19},\ \frac{36}{19}\right)=16.$

Серед знайдених значень вибираємо найбільше $\underset{\bar{D}}{max}z\left(\frac{60}{19};\frac{36}{19}\right)=16$ та $\underset{\bar{D}}{max}z(0,4)=16$, а найменше $\underset{\bar{D}}{minz}\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)=-\frac{48}{9}=-\frac{16}{3}$.

Приклад 3. Знайти екстремум функції $z=x+2y$ за умови $x^2+y^2=5$.

Розв'язання

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5).$$

Потрібна умова існування екстремуму має вигляд:

$$\begin{cases}L_x^{'}=0\\L_y^{'}=0\\L_\lambda^{'}=0,\end{cases}\quad\begin{cases}1+2\lambda x=0\\2+2\lambda y=0\\x^2+y^2-5=0.\end{cases}$$

Розв'язками системи є точки:

$$M_1\left(1;\ 2;\ -\frac{1}{2}\right)\ \ та\ \ M_2\left(-1;\ \ 2;\ \frac{1}{2}\right).$$

Перевіримо достатні умови існування екстремуму:

$$\varphi_x^{'}=2x,\quad \varphi_y^{'}=2y,\quad L_{xx}^{''}=2\lambda,\ \ L_{xy}^{''}=0,\ \ L_{yy}^{''}=2\lambda.$$

Обчислимо визначник $\Delta=\begin{vmatrix}0&2x&2y\\2x&2\lambda&0\\2y&0&2\lambda\end{vmatrix}$.

У точці M_1 маємо: $\Delta(M_1)=\begin{vmatrix}0&2&4\\2&-1&0\\4&0&-1\end{vmatrix}=16+4=20>0.$

Отже, в точці M_1 функція має максимум $max\,z\,(M_1)=1+2\cdot 2=5.$

У точці M_2 маємо:

$$\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16 - 4 = -20 < 0.$$

Отже, в точці M_2 функція має мінімум $min\, z\,(M_2) = -1 + 2 \cdot (-2) = -5$.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти екстремуми функцій:

$$z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + \frac{3}{e};$$

$$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$$

2. Знайти найбільше та найменше значення функції в замкненій області:

$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ *в крузі* $x^2 + y^2 \leq 4$

$z = x^2 + 3y^2 + x - y,$ в області, що обмежена лініями

$$x = 1, y = 1, x + y = 1.$$

3. Знайти умовні екстремуми функцій:

$$u = x + y, \qquad \textit{якщо}\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1;$$

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad \textit{якщо}\ x + y = 1.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке критична точка функції двох змінних і як її знаходять?
2. Які умови першого порядку потрібні для існування екстремуму?
3. Як використовується матриця Гессе для класифікації критичних точок?

4. У чому полягає різниця між локальним мінімумом і локальним максимумом?

5. Що таке сідлова точка та як її розпізнати?

6. У чому полягає метод Лагранжа для знаходження умовного екстремуму?

7. Чим відрізняється умовний екстремум від безумовного?

Тести

1. Критичною точкою функції двох змінних називають:

а) точку, де функція неперервна;

б) точку, де часткові похідні дорівнюють нулю або не існують;

в) точку, де функція має найбільше значення;

г) точку, де функція має найменше значення.

2. Яка умова потрібна для існування локального екстремуму:

а) неперервність функції;

б) наявність похідних другого порядку;

в) наявність критичної точки;

г) обмеженість області визначення.

3. Що означає позитивна визначеність матриці Гессе:

а) критична точка – мінімум;

б) критична точка – максимум;

в) критична точка – сідлова;

г) критична точка не існує.

4. Якщо визначник матриці Гессе від'ємний, то точка є:

а) мінімумом;

б) максимумом;

в) сідловою точкою;

г) точкою виродження.

5. Яка умова першого порядку для екстремуму:
а) часткові похідні дорівнюють нулю;
б) другі похідні додатні;
в) функція неперервна;
г) визначник Гессе додатний.

6. Яка умова другого порядку для екстремуму:
а) неперервність функції;
б) додатність або від'ємність матриці Гессе;
в) наявність критичної точки;
г) обмеженість функції.

7. Сідлова точка – це точка, де:
а) функція має мінімум;
б) функція має максимум;
в) функція має і мінімум, і максимум уздовж різних напрямків;
г) функція неперервна.

8. Для пошуку умовного екстремуму застосовують:
а) метод інтегрування;
б) метод Лагранжа;
в) метод Ньютона;
г) метод Тейлора.

9. Що таке функція Лагранжа:
а) допоміжна функція для знаходження умовного екстремуму;
б) функція для обчислення похідних;
в) функція для інтегрування;
г) функція для апроксимації.

10. Умовний екстремум виникає, коли:
а) функція має похідні другого порядку;
б) функція визначена на всій площині;
в) функція обмежена умовами-обмеженнями;
г) функція неперервна.

РОЗДІЛ V
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ТЕМА 16. ПЕРВІСНА ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

16.1. Первісна функція. Теорема про загальний вигляд усіх первісних.

16.2. Невизначений інтеграл і його основні властивості.

16.3. Таблиця невизначених інтегралів.

16.4. Методи інтегрування.

Основні теоретичні відомості

16.1. Первісна функція. Теорема про загальний вигляд усіх первісних

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення й ділення, піднесення до степеня й добування кореня, логарифмування та потенціювання, диференціювання й інтегрування.

Означення. ***Первісною функцією*** *для заданої функції* $f(x)$ *називають таку функцію* $F(x)$*, похідна якої дорівнює* $f(x)$*, або диференціал якої дорівнює* $f(x)dx$*, тобто:*

$$F'(x) = f(x)$$
$$dF(x) = f(x)dx.$$

Функція $f(x) = 3x^2$, має первісні $F(x) = x^3; x^3 + 1;\ x^3 - 7, \ldots, x^3 + C$.

Теорема. Будь-які дві первісні для заданої функції $f(x)$ відрізняються лише на сталий доданок *C*.

Доведення

Нехай $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ – первісні для функції $f(x)$.

Доведемо, що $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Оскільки $F_1(x)$ і $F_2(x)$ первісні для $f(x)$, то за означенням первісної маємо $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$, тому $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, а це означає, що $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, оскільки $[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$, $(C)' = 0$, тому $F_1(x) - F_2(x) = C$, тобто $F_1(x) = F_2(x) + C$, що й треба було довести.

Наслідок. Щоб знайти всю нескінченну множину (сукупність) первісних для заданої функції, достатньо знайти лише одну первісну функцію, а всі інші одержати додаванням до неї сталої C.

$\begin{cases} F(x)+C - \text{ сукупність первісних} \\ F(x) - \text{ одна з первісних.} \end{cases}$

16.2. Невизначений інтеграл і його основні властивості

Означення. *Сукупність усіх первісних* $F(x)+C$ *для заданої функції* $f(x)$ *називають* ***невизначеним інтегралом*** *і позначають* $\int f(x)dx = F(x)+C$, *де*

$\int$ – знак інтеграла;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

x – змінна інтегрування;

$F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$;

С – довільна стала інтегрування.

Операція знаходження невизначеного інтеграла називається ***інтегруванням.***

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює підінтегральній функції $\int df(x) = f(x) + C$ (комбінація символів $<< d\int >>$ взаємно знищується).

3. Сталий множник A можна виносити за знак інтеграла $\int A\, f(x)dx = A\int f(x)dx$.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює тій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної із функцій – доданків, тобто $\int\left[f(x)\pm g(x)\pm k(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\pm\int k(x)dx$.

16.3. Таблиця невизначених інтегралів

Маючи таблицю похідних, одержимо таблицю основних інтегралів. Результати перевіряються диференціюванням.

1	$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$	9	$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$
2	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	10	$\int e^{x}dx=e^{x}+C$
3	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$	11	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$
4	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$	12	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
5	$\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx=\operatorname{tg}x+C$	13	$\int\frac{dx}{x^{2}+1}=\operatorname{arctg}x+C$
6	$\int\frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\operatorname{ctg}x+C$	14	$\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
7	$\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	15	$\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
8	$\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	16	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right\rvert+C$

16.4. Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування базується на використанні таблиці основних інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла. Але в деяких випадках спочатку потрібно зробити алгебраїчні перетворення підінтегральної функції.

Інтегрування підстановкою (метод заміни змінної)

Для знаходження заданого інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, тоді $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Алгоритм методу заміни змінної

1. Частину підінтегральної функції замінити на нову змінну.
2. Знайти диференціал від обох частин заміни.
3. Весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну, щоб одержати табличний інтеграл.
4. Знайти одержаний інтеграл.
5. Виконати обернену заміну.

Доцільно запам'ятати формули, які легко виводяться методом заміни змінної:

1. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$;
2. $\int a^{kx}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx}}{\ln a} + C$;
3. $\int \sin kxdx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$;
4. $\int \cos kxdx = \frac{1}{k}\sin kx + C$.

Інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під знаком інтеграла є добуток функцій, причому хоча б одна з них не є степеневою.

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовані функції, тоді диференціал добутку буде $d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$, $u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$, проінтегруємо останню рівність: $\int u\cdot dv = \int d(u\cdot v) - \int v\cdot du$ за властивістю невизначеного інтеграла $\int d(u\cdot v) = u\cdot v$, тому

$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$ – це формула інтегрування частинами.

Вона застосовується, коли одержаний інтеграл $\int v\cdot du$ менш складний, ніж даний:

$$\int u\cdot dv.$$

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами

1. В інтегралах вигляду $\int P(x)\cdot e^x\cdot dx; \int P(x)\cdot \sin xdx; \int P(x)\cdot \cos xdx; \int P(x)\cdot a^x dx$, де $P(x)$ – многочлен, позначають: $u = P(x)$, dv – залишок.

2. В інтегралах вигляду $\int P(x)\cdot \ln xdx; \int P(x)\cdot arctgxdx; \int P(x)\arcsin xdx$ (добуток многочлена й оберненої функції) позначають: u – обернена функція, $dv = P(x)dx$.

3. В інтегралах вигляду $\int \sin(kx+b)\cdot e^{px+l}dx$, $\int \cos(kx+b)\cdot a^{px+l}dx$ немає значення, що позначати u, а що позначати dv, але такі позначення треба робити двічі, оскільки двічі відбувається інтегрування частинами. У результаті одержимо рівняння стосовно шуканого інтеграла, розв'язавши яке, знайдемо інтеграл.

Зауваження. Для u знаходимо диференціал $du = u'dx$, а для dv інтеграл $v = \int dv$.

Інтегрування за допомогою довідника

Існують спеціальні довідники, які містять значну кількість інтегралів від досить широкого класу функцій.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int\left(2\cos x - \frac{3}{x} + 5x\right)dx$;

б) $\int(2x-3)^2\,dx$;

в) $\int(x+5)^3\,dx$;

г) $\int\frac{3-5t+7t^2+t^3}{t^2}\,dt$.

Розв'язання

а) $\int\left(2\cos x - \frac{3}{x} + 5x\right)dx = 2\sin x - 3\ln|x| + \frac{5x^2}{2} + C$;

б) $\int(2x-3)^2\,dx = \int\left(4x^2 - 12x + 9\right)dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 9x + C$;

в) $\int(x+5)^3\,dx = \int\left(x^3 + 3x^2\cdot 5 + 3x\cdot 5^2 + 5^3\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{15x^3}{3} + \frac{75x^2}{2} + 125x + C$;

г) $\int\frac{3-5t+7t^2+t^3}{t^2}\,dt = \int\left(3t^{-2} - 5t^{-1} + 7 + t\right)dt = -\frac{3}{t} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^2}{2} + C$.

Приклад 2. За допомогою підстановки знайти інтеграл $\int(3x+1)^5\,dx$.

Розв'язання

$$\int(3x+1)^5\,dx = \left|\begin{array}{c} 3x+1=t \\ (3x+1)'\,dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int\frac{1}{3}t^5\,dt = \frac{1}{3}\int t^5\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6} = \frac{(3x+1)^6}{18} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами $\int x \cdot e^x dx$.

Розв'язання

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = (x)' dx = dx \\ dv = e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I(a) = \int \frac{\cos axdx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a \cdot \sin ax} + C$.

Розв'язання

Для знаходження інтеграла цього класу $I(4) = \int \frac{\cos 4xdx}{\sin^2 4x}$ у відповідь треба тільки підставити значення параметра $a = 4$, маємо $\int \frac{\cos 4xdx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4\sin 4x} + C$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int (3\cos x - 4 \cdot 2^x)dx$.

Розв'язання

$$\int (3\cos x - 4 \cdot 2^x)dx = \int 3\cos xdx - \int 4 \cdot 2^x dx = 3\int \cos xdx - 4\int 2^x dx = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int (4x-3)^2 \cdot x \cdot dx$.

Розв'язання

$$\int (4x-3)^2 \cdot x \cdot dx = \int (16x^2 - 24x + 9) \cdot x \cdot dx = \int (16x^3 - 24x^2 + 9x)dx = \int 16x^3 dx - \int 24x^2 dx +$$

$$+ \int 9xdx = 16\int x^3 dx - 24\int x^2 dx + 9\int xdx = 16 \cdot \frac{x^4}{4} - 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} = 4x^2 - 8x^3 + \frac{9}{2}x^2 + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int \frac{6x^2 - 5 + 3x}{x} \cdot dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{6x^2 - 5 + 3x}{x} \cdot dx = \int (\frac{6x^2}{x} - \frac{5}{x} + \frac{3x}{x})dx = \int (6x - \frac{5}{x} + 3)dx = \int 6xdx - \int \frac{5}{x}dx + \int 3dx = 6\int xdx -$$

$$- 5\int \frac{1}{x}dx + 3\int dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 5\ln|x| + 3x + C.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int \frac{2xdx}{\cos^2(1-3x^2)}$.

Розв'язання

$$\int \frac{2xdx}{\cos^2(1-3x^2)} = \left| \begin{array}{l} 1 - 3x^2 = t \\ (1-3x^2)' dx = dt \\ -6xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \int \frac{2 \cdot (-\frac{1}{6})dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3}tgt = -\frac{1}{3}tg(1-3x^2) + C.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

Розв'язання

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (\cos x)' dx = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int t^3 \cdot (-dt) = -\frac{t^4}{4} = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ (\ln x)' dx = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int x \cdot 3^x dx$.

Розв'язання

$$\int x \cdot 3^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = (x)' dx = dx \\ dv = 3^x dx; v = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| = x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} \cdot dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx =$$

$$= \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} = \frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int 10x \cdot \ln x \cdot dx$.

Розв'язання

$$\int 10x \cdot \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = 10x dx; v = \int 10x dx = 5x^2 \end{array} \right| = 5x^2 \cdot \ln x - \int 5x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = 5x^2 \ln x -$$

$$-5\int x dx = 5x^2 \cdot \ln x - 5\frac{x^2}{2} = 5x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int x^2 \cdot e^x dx$.

Розв'язання

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; du = 2x dx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{array} \right| = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x; du = 2dx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{array} \right| = x^2 \cdot e^x -$$

$$-(2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2dx) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

а) $\int x^4(1-x)^2\,dx$;

б) $\int (x+1)(3x-\frac{1}{x})dx$;

в) $\int \frac{x+4x^3-1}{2x}\,dx$;

г) $\int (x\cdot \ln 5+\frac{1}{x\ln 2})dx$;

д) $\int \frac{4dx}{5+x^2}$.

2. Знайти інтеграли методом заміни змінної:

а) $\int 3\cdot e^{1-5x}dx$;

б) $\int \frac{2dx}{\sin^2(3x-\frac{\pi}{4})}$;

в) $\int tg6xdx$;

г) $\int \sqrt{1-\sin x}\cos xdx$;

д) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

3. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int x\cdot e^{-x}dx$;

б) $\int arctgxdx$;

в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

г) $\int (3-4x)\cdot \sin 2xdx$;

д) $\int x\cdot \arccos xdx$;

е) $\int \cos 3x\cdot e^x dx$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають первісною функцією для заданої функції $f(x)$?
2. Який зв'язок існує між операціями диференціювання та інтегрування?
3. Сформулюйте теорему про загальний вигляд усіх первісних.
4. Чому всі первісні однієї й тієї самої функції відрізняються лише на сталу C?
5. Що називають невизначеним інтегралом? Назвіть його основні елементи.
6. Які основні властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
7. У яких випадках безпосереднє інтегрування є найефективнішим методом?
8. Чому метод заміни змінної спрощує процес інтегрування?
9. Чому інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів?
10. Як перевірити правильність знайденого невизначеного інтеграла?

Тести

1. Первісною для функції $f(x)$ називається функція:

а) похідна якої дорівнює $f(x)$;

б) інтеграл якої дорівнює $f(x)$;

в) похідна якої дорівнює нулю;

г) функція, що має максимум.

2. Невизначений інтеграл функції $f(x)$ позначається:

а) $f'(x)$;

б) $\int f(x)\,dx$;

в) $d(f(x))$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Обчисліть $\int \mathbf{1}\,dx$:
а) $1 + C$;
б) $x + C$;
в) 0;
г) $ln\,x$.

4. Чому дорівнює інтеграл $\int x^2\,dx$:
а) $2x + C$;
б) $\frac{x^2}{2} + C$;
в) $\frac{x^3}{3} + C$;
г) $x^3 + C$.

5. Яка властивість інтеграла є правильною:
а) $\int (f + g)dx = \int f dx + \int g dx$;
б) $\int (f + g)dx = \int f dx \cdot \int g dx$;
в) $\int A f dx = f(x) + A$;
г) $\int f dx = f'(x)$.

6. Обчисліть $\int cosx\,dx$:
а) $-si\,n\,x + C$;
б) $sin\,x + C$;
в) $t\,g\,x + C$;
г) $-cos\,x + C$.

7. Метод заміни змінної використовують для:
а) диференціювання;
б) спрощення підінтегрального виразу;
в) знаходження границь;
г) побудови графіків.

8. Формула інтегрування частинами має вигляд:
а) $\int udv = uv - \int vdu$;
б) $\int udv = \int u \int dv$;
в) $\int udv = vdu$;
г) $\int udv = uv + \int vdu$.

9. Обчисліть $\int e^x dx$:

а) $xe^x + C$;

б) $e^x + C$;

в) $ln\, x + C$;

г) $x + C$.

10. Яка функція є первісною для $sinx$:

а) $cosx + C$;

б) $-cosx + C$;

в) $tgx + C$;

г) $-sinx + C$.

ТЕМА 17. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ І ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

17.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів.

17.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів.

17.3. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції.

Основні теоретичні відомості

17.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Найпростішими раціональними алгебраїчними дробами називаються дроби чотирьох типів, а саме:

$$I.\frac{A}{x-a};\quad II.\frac{B}{(x-b)^n};\quad III.\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad IV.\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

де n – більше за одиницю натуральне число, квадратні тричлени не мають дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$. Ці дроби ще називають ***елементарними***.

Під час знаходження невизначених інтегралів від дробів першого та другого типів не виникає труднощів, вони легко беруться методом безпосереднього інтегрування:

$$I.\int\frac{A}{x-a}dx=Aln|x-a|+C;$$

$$II.\int\frac{B}{(x-b)^n}dx=-\frac{B}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-b)^{n-1}}+C.$$

На практиці такі невизначені інтеграли зазвичай беруться усно: умова – відповідь.

Приклад

$$\int \frac{5}{x-3}\,dx = 5ln|x-3| + C;$$

$$\int \frac{10}{(x+7)^6}\,dx = -\frac{2}{(x+7)^5} + C.$$

Аналогічно діють, коли знаменники дробів є лінійними функціями від x загального виду: $kx+b$, де k, b – сталі:

$$\int \frac{A}{kx+b}\,dx = \frac{A}{k}\,ln|kx+b| + C\,;$$

$$\int \frac{B}{(kx+b)^n}\,dx = -\frac{B}{k(n-1)} \cdot \frac{1}{(kx+b)^{n-1}} + C.$$

Під час інтегрування найпростішого дробу третього типу спочатку в знаменнику виділяємо повний квадрат, а потім вводимо нову змінну.

$III. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ інтегруємо методом підстановки.

Виділяємо в знаменнику повний квадрат двочлена:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Виконуємо заміну змінної та подаємо вихідний інтеграл у формі суми двох невизначених інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \left|\begin{matrix} t = x+\frac{p}{2} \\ x = t-\frac{p}{2} \\ dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dt =$$

$$= \int \frac{At}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dt + \int \frac{B-A\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dt.$$

Оскільки $q-\frac{p^2}{4} > 0$ (многочлен знаменника не має дійсних коренів), то цю сталу можна позначити як a^2. Тоді:

$$\int \frac{At}{t^2+a^2}\,dt + \int \frac{B-A\frac{p}{2}}{t^2+a^2}\,dt = \frac{A}{2}\,ln|t^2+a^2| + \frac{B-A\frac{p}{2}}{a}\,arctg\,\frac{t}{a} + C.$$

Повертаючись до вихідної змінної, отримуємо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\,ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{2a}\,arctg\,\frac{2x+p}{2a} + C,$$

$$\text{де } a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}.$$

Приклад

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+4}\,dx = \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+4}\,dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{t^2+4}\,dt + 5\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}ln(t^2+4) + \frac{5}{2}arctg\,\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}arctg\,\frac{x-2}{2} + C.$$

Розглянутий підхід до інтегрування найпростіших дробів третього типу без принципових змін переносять на деякі неелементарні дроби, знаменник яких містить квадратний тричлен, а саме:

1) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ – невизначений інтеграл, у якому квадратний тричлен має додатний дискримінант ($p^2-4q>0$);

2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ – невизначений інтеграл, у якому знаменником є квадратний тричлен загального виду;

3) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ – невизначений інтеграл, у якого квадратний тричлен стоїть під знаком квадратного кореня.

$$IV.\, I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

Інтегрування дробу IV типу взагалі досить громіздке: способом n-кратного інтегрування частинами його зводять до інтеграла від дробу III типу.

17.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів

Раціональним алгебраїчним дробом $R(x)$ називається відношення двох многочленів відносно змінної x:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Правильним раціональним дробом називається дріб, степінь чисельника якого менший за степінь знаменника, тобто $n < m$, у протилежному випадку, при $n \geq m$, дріб називається ***неправильним***.

Якщо дріб неправильний, то його завжди можна подати як суму многочлена та правильного дробу:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{P_{n_1}(x)}{Q_m(x)},$$

де $T_{n-m}(x)$ називають цілою частиною дробу.

Подання дробу в такій формі називають виділенням цілої частини. Для цього треба виконати ділення «сходинками» чисельника на знаменник.

Наприклад, знайдемо цілу частину неправильного дробу:

$$R(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x + 2}.$$

Ділення «сходинками» дає:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & & & +1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{5-5} 2x^3 & -2x^2 & +4x & & 2x + 2 \\ \cline{1-3} & 2x^2 & -4x & +1 & \\ & 2x^2 & -2x & +4 & \\ \cline{2-4} & & -2x & -3 & \end{array}$$

Отже,

$$R(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x + 2} = 2x + 2 + \frac{-2x - 3}{x^2 - x + 2}.$$

Оскільки інтегрування многочлена не викликає труднощів, то для інтегрування будь-яких – правильних і неправильних – раціональних дробів треба вміти інтегрувати правильні дроби.

Теорема. Будь-який правильний раціональний алгебраїчний дріб можна подати як суму елементарних дробів – розкласти на суму елементарних дробів.

Розклад на суму елементарних дробів здійснюється так:

1) розкладаємо знаменник дробу – многочлен $Q_m(x)$ – на прості множники, тобто подаємо його у формі добутку лінійних множників і квадратичних множників з від'ємними дискримінантами:

$$Q_m(x) = (x - a)^k \cdot \ldots \cdot (x - b)^l \cdot (x^2 + px + q)^s \cdot \ldots \cdot (x^2 + cx + d)^r,$$

де однотипні множники можуть повторюватися (наприклад, множник $(x - b)$ повторюється l разів, а множник $(x^2 + cx + d)$ повторюється r разів);

2) ставимо у відповідність кожному множнику найпростіший раціональний алгебраїчний дріб або їх суму;

3) записуємо $R(x)$ як суму всіх отриманих дробів.

Відповідність між множниками знаменника й найпростішими дробами:

Множник знаменника	Відповідні елементарні раціональні алгебраїчні дроби
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-b)^l$	$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}$
x^2+px+q	$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$(x^2+cx+d)^r$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+cx+d}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+cx+d)^2}+\ldots+\frac{A_rx+B_r}{(x^2+cx+d)^r}$

Отже, отримуємо:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^s\cdot\ldots\cdot(x^2+cx+d)^r}=$$
$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}+\cdots+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\cdots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},$$

де $A_1,\ldots,B_1,\ldots,M_1,\ldots,N_1,\ldots,C_1,\ldots,D_1$ – деякі сталі, які називаються коефіцієнтами розкладу.

Треба зауважити, що в цьому розкладі буде стільки дробів, скільки коренів має многочлен $Q_m(x)$, враховуючи їх кратність, а саме: $k+l+s+\cdots+r$;

4) визначаємо числові параметри розкладу, тобто його коефіцієнти.

Реалізацію цього кроку здійснюють за допомогою так званого методу невизначених коефіцієнтів, згідно з яким знаходження коефіцієнтів розкладу зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. В основі методу лежать такі властивості:

а) рівність не порушиться, якщо обидві її частини помножити на один і той самий вираз, визначений на множині дійсних чисел;

б) у рівних многочленів коефіцієнти за однакових степенів змінної рівні між собою.

Приклад

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо цей дріб на простіші дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Помножимо обидві частини рівності на знаменник $(x-1)(x-2)^2$, в результаті чого отримаємо:

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

$$x+1 = A(x^2-4x+4) + B(x^2-3x+2) + C(x-1)$$

$$0x^2 + 1x + 1 = (A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-3B+C=1 \\ 4A+2B-C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=4A+3B+1 \\ C=4A+2B-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+3B+1=4A+2B-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B=-2, A=2 \end{cases}$$

$$C = 4A+2B-1 = 8-4-1 = 3$$

$$\begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=3 \end{cases}$$

Отже,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x-2}dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}dx =$$
$$= 2ln|x-1| - 2ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C.$$

Приклад

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+4)}dx.$$

Під знаком інтеграла знаменник правильного дробу має лише один дійсний корінь $x = 0$, а рівняння $x^2 + 4 = 0$ не має дійсних коренів, тоді розклад вихідного дробу на суму елементарних матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Помножимо обидві частини на знаменник:

$$x - 1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$
$$0x^2 + 1x - 1 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 4A=-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = 1 \end{cases}.$$

Отже, вихідний інтеграл запишеться як сума двох інтегралів від найпростіших дробів:

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+4)}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}dx =$$
$$= -\frac{1}{4}ln|x| + \frac{1}{8}\int \frac{2xdx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= -\frac{1}{4}ln|x| + \frac{1}{8}ln(x^2+4) + \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C.$$

17.3. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції

Для інтегрування виразів $\int sin\,A\,x \cdot cos\,B\,x dx$; $\int sin\,A\,x\,sin\,B\,x dx$; $\int cos\,A\,x\,cos\,B\,x dx$ зручно користуватися такими формулами, які перетворюють добуток функцій у суму:

$$sin\,A\,x\,cos\,B\,x = \frac{1}{2}(sin(A+B)\,x + sin(A-B)\,x);$$

$$cos\,A\,x\,cos\,B\,x = \frac{1}{2}(cos(A-B)\,x + cos(A+B)\,x);$$

$$sin\,A\,x\,sin\,B\,x = \frac{1}{2}(cos(A-B)\,x - cos(A+B)\,x).$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int sin\,5\,x\,cos\,3\,x dx$.

Розв'язання

$\int sin\,5\,x\,cos\,3\,x dx = \int \frac{1}{2}(sin\,8\,x + sin\,2\,x)dx = \frac{1}{2}\int sin\,8\,x dx +$

$\frac{1}{2}\int sin\,2\,x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}cos\,8\,x\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}cos\,2\,x\right) = -\frac{1}{16}cos\,8\,x - \frac{1}{4}cos\,2\,x + C.$

Для інтегрування виразів $\int sin^p\,x\,cos^k\,x\,dx$ розглянемо два випадки:

а) нехай p *і* k – парні числа, тоді застосовуються формули пониження степеня:

$$cos^2\,x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x);$$

$$sin^2\,x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2\,x);$$

$$sin\,x\,cos\,x = \frac{1}{2}sin\,2\,x.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int cos^4\,x\,dx$.

Розв'язання

$$\int cos^4\,x\,dx = \int (cos^2\,x)^2 dx = \left|cos^2\,x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x)\right| =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\,cos\,2\,x + cos^2\,2\,x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2\,x dx + \frac{1}{4}\int cos^2\,2\,x dx =$$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sin\,2\,x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + cos\,4\,x)dx = = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{8}\int (1 + cos\,4\,x)dx =$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}sin\,4\,x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{32}sin\,4\,x + C;$

б) якщо серед чисел p *і* k хоча б одне непарне, то потрібно відокремити від непарного степеня один множник, застосувати формули: $cos^2\,x = 1 - sin^2\,x$, $sin^2\,x = 1 - cos^2\,x$, і ввести нову змінну $cos\,x = t$ або $sin\,x = t$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int sin^3 x \cdot cos\, x\, dx$.

Розв'язання

$$\int sin^3 x \cdot cos\, x\, dx =$$

$$= \int sin^2 x \cdot sin\, x \cdot cos^2 x\, dx =$$

$$= \int (1 - cos^2 x)\, cos^2 x \cdot sin\, x\, dx = \left| \begin{matrix} cos\, x = t \\ sin\, x\, dx = -dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (1 - t^2) \cdot t^2 \cdot (-dt) =$$

$$= \int (-t^2 + t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3} + C.$$

Для інтегралів вигляду $\int R(sin\, x\, , cos\, x) dx$, де $R(sin\, x\, ; cos\, x)$ означає, що над функціями $sin\, x$ та $cos\, x$ здійснюються операції в межах чотирьох арифметичних дій, застосовується універсальна тригонометрична підстановка $t = tg\frac{x}{2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, тоді $sin\, x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{sin\, x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{sin\, x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, sin\, x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1

$$\int \frac{5}{x-3}dx = 5ln|x-3| + C;$$

$$\int \frac{10}{(x+7)^6}dx = -\frac{2}{(x+7)^5} + C.$$

Приклад 2

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+4}dx = \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+4}dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{t^2+4}dt + 5\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}ln(t^2+4) + \frac{5}{2}arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C.$$

Приклад 3

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо цей дріб на простіші дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Помножимо обидві частини рівності на знаменник $(x-1)(x-2)^2$, в результаті чого отримаємо:

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

$$x+1 = A(x^2-4x+4) + B(x^2-3x+2) + C(x-1)$$

$$0x^2 + 1x + 1 = (A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-3B+C=1 \\ 4A+2B-C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=4A+3B+1 \\ C=4A+2B-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+3B+1=4A+2B-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B=-2, A=2 \end{cases}$$

$$C = 4A + 2B - 1 = 8 - 4 - 1 = 3$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Отже,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= 2ln|x-1| - 2ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C.$$

Приклад 4

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+4)}\,dx.$$

Під знаком інтеграла знаменник правильного дробу має лише один дійсний корінь $x = 0$, а рівняння $x^2 + 4 = 0$ не має дійсних коренів, тоді розклад вихідного дробу на суму елементарних матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Помножимо обидві частини на знаменник:

$$x - 1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$0x^2 + 1x - 1 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ 4A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = 1 \end{cases}$$

Отже, вихідний інтеграл запишеться як сума двох інтегралів від найпростіших дробів:

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+4)}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}ln|x| + \frac{1}{8}\int \frac{2xdx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{4}ln|x| + \frac{1}{8}ln(x^2+4) + \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int sin\,5\,x\,cos\,3\,xdx$.

Розв'язання

$$\int sin\,5\,x\,cos\,3\,xdx = \int \frac{1}{2}(sin\,8\,x + sin\,2\,x)dx = \frac{1}{2}\int sin\,8\,xdx +$$
$$+\frac{1}{2}\int sin\,2\,xdx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}cos\,8\,x\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}cos\,2\,x\right) = -\frac{1}{16}cos\,8\,x -$$
$$-\frac{1}{4}cos\,2\,x + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int cos^4\,x\,dx$.

Розв'язання

$$\int cos^4\,x\,dx = \int (cos^2\,x)^2 dx = \left|cos^2\,x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x)\right| =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x)\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\,cos\,2\,x + cos^2\,2\,x)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int cos\,2\,xdx + \frac{1}{4}\int cos^2\,2\,xdx =$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sin\,2\,x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + cos\,4\,x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{8}\int (1 + cos\,4\,x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}sin\,4\,x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + \frac{1}{32}sin\,4\,x + C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int sin^3\,x \cdot cos\,x\,dx$.

Розв'язання

$$\int sin^3\,x \cdot cos\,x\,dx =$$
$$= \int sin^2\,x \cdot sin\,x \cdot cos^2\,x\,dx =$$
$$= \int (1 - cos^2\,x)\,cos^2\,x \cdot sin\,x\,dx = \left|\begin{matrix} cos\,x = t \\ sin\,x\,dx = -dt \end{matrix}\right| =$$
$$= \int (1 - t^2) \cdot t^2 \cdot (-dt) =$$
$$= \int (-t^2 + t^4)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{cos^5\,x}{5} - \frac{cos^3\,x}{3} + C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$$

$$\int \frac{(5x + 3)\,dx}{x^2 + 10x + 29}$$

$$\int \frac{(x + 1)\,dx}{5x^2 + 2x + 1}$$

2. Знайти невизначені інтеграли:

$$\int sin(3x)\,cos(x)\,dx$$

$$\int sin(3x)\,sin(5x)\,dx$$

$$\int sin(5x - \pi/4)\,cos(x + \pi/4)\,dx$$

$$\int sin(3x)\,sin(x)\,dx$$

$$\int sin(x + \pi/6)\,cos(x)\,dx$$

$$\int \sin^5(x)\,dx$$

$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$$

$$\int \sin^3(x)\cos^3(x)\,dx$$

$$\int \cos^7(x)\,dx$$

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}\,dx$$

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\,dx$$

$$\int \cos^5(x)\,dx$$

Питання для самоконтролю

1. Які основні методи застосовуються для інтегрування раціональних функцій?
2. У чому полягає метод розкладу на прості дроби під час інтегрування?
3. Які типи підстановок використовують для інтегрування виразів із квадратними коренями?
4. Як інтегрувати функції, що містять тангенс і котангенс?
5. Який підхід застосовується для інтегрування функцій, що містять синус і косинус у знаменнику?
6. Як можна використати формули подвійного кута для спрощення інтегралів тригонометричних функцій?
7. У чому полягає метод універсальної тригонометричної підстановки?
8. Як інтегрувати дробово-раціональні вирази відносно тригонометричних функцій?

Тести

1. Який метод найчастіше застосовують для інтегрування раціональних функцій:

а) метод частин;

б) метод розкладу на прості дроби;

в) метод рядів;

г) метод заміни змінної.

2. У чому полягає метод розкладу на прості дроби:

а) у заміні змінної;

б) у використанні тригонометричних формул;

в) у поділі складного дробу на простіші;

г) у застосуванні інтегрування частинами.

3. Який метод застосовують для інтегрування дробово-раціональних виразів відносно синуса та косинуса:

а) універсальна тригонометрична підстановка;

б) метод частин;

в) метод розкладу на прості дроби;

г) метод рядів.

4. Яка підстановка використовується в універсальному методі:

а) тангенс половинного кута;

б) синус подвійного кута;

в) косинус подвійного кута;

г) котангенс кута.

5. Який підхід зручний для інтегрування виразів із синусом у знаменнику:

а) використання тотожностей тригонометрії;

б) метод частин;

в) розклад на прості дроби;

г) метод рядів.

6. Яка функція часто з'являється як результат інтегрування котангенса:

а) логарифмічна;

б) степенева;

в) тригонометрична;

г) константа.

7. Який метод інтегрування застосовують для виразів із синусом і косинусом у степенях:

а) використання формул зведення степенів;

б) метод частин;

в) метод рядів;

г) розклад на прості дроби.

8. Який метод інтегрування застосовують для виразів із добутком синуса й косинуса:

а) використання формул подвійного кута;

б) метод частин;

в) метод рядів;

г) розклад на прості дроби.

9. Який метод інтегрування застосовують для виразів із квадратним коренем у знаменнику:

а) тригонометрична підстановка;

б) метод частин;

в) метод рядів;

г) розклад на прості дроби.

10. Який метод інтегрування застосовують для виразів із дробово-раціональними функціями відносно тригонометричних функцій:

а) універсальна тригонометрична підстановка;

б) метод частин;

в) метод рядів;

г) розклад на прості дроби.

ТЕМА 18. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

18.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

18.2. Означення визначеного інтеграла.

18.3. Основні властивості визначеного інтеграла.

18.4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца.

18.5. Методи наближеного обчислення визначеного інтеграла.

18.6. Визначений інтеграл у економічних задачах.

Основні теоретичні відомості

18.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Означення. *Фігура, обмежена лініями* $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, *називається* ***криволінійною трапецією*** (рис. 18.1).

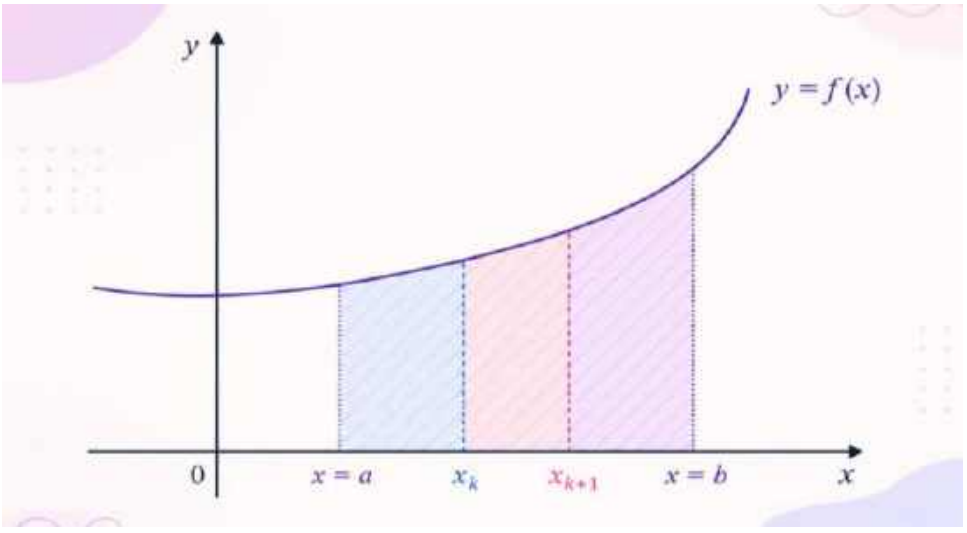


Рисунок 18.1

Для обчислення площі криволінійної трапеції поділимо відрізок [a; b] на n частин так, що $a = x_0 < x_1 < ..x_k < ..x_n = b$.

Довжини цих частин позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Перпендикуляри до осі OX, проведені з точок поділу до перетину з кривою $y = f(x)$, розділяють усю площу на n-вузьких криволінійних трапецій. Замінимо кожну з цих трапецій прямокутником з основою Δx_k та висотою $f(c_k)$, $(x_{k-1} \le c_k \le x_k)$. Площа кожного такого прямокутника $f(c_k)\Delta x_k$. Сума площ усіх прямокутників $S = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. Площа криволінійної трапеції $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. Значення буде точніше, якщо перейти до границі, тобто $S = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Задача про обсяг випущеної продукції

Нехай функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва впродовж часу.

Знайдемо обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу [0; T].

Якщо продуктивність не змінюється впродовж деякого часу, то $f(t)$ – стала функція, а обсяг продукції ΔU, виробленої за проміжок часу Δt, задається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$.

Розіб'ємо відрізок [0; T] на проміжки часу точками $0 = t_0 < t_1 < ..t_n = T$.

Для величини обсягу продукції ΔU, виробленої за проміжок часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, маємо $\Delta U_i = f(c_i)\Delta t_i$, де $t_{i-1} \le c_i \le t_i$. Тоді обсяг продукції за проміжок часу [0; T] $U \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$. Значення буде точніше, якщо перейти до границі, тобто $U = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$.

18.2. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ задана на $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин так, щоб виконувалось співвідношення $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Означення. *У кожному проміжку* (x_{k-1}, x_k) *довжиною* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ *оберемо довільну точку* c_k *та обчислимо значення* $f(c_k)$. *Побудуємо суму* $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, *яку називають* ***інтегральною сумою*** *функції* $f(x)$ *на відрізку [a; b].*

Означення. *Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при* $\Delta x_k \to 0$. *незалежна від способу поділу відрізка [a; b] на частини та вибору точок* c_k, *то ця границя називається* ***визначеним інтегралом*** *від функції* $f(x)$ *на відрізку [a; b] і позначається* $\int_a^b f(x)dx$, *тобто:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Якщо визначений інтеграл існує, то функція $f(x)$ називається ***інтегрованою*** на відрізку $[a; b]$, a і b – нижня та верхня межі інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування.

18.3. Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \ (C = const)$.

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі визначених інтегралів від кожного доданка $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \int_a^b f_n(x)dx$.

3. Якщо змінити межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. Якщо $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$ і $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$ і для будь-якого $x \in [a;b]$, $f(x) \geq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$.

7. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$, m і M – відповідно, найменше та найбільше значення функції на цьому відрізку, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

8. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку існує точка C, для якої $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

18.4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца

Означення. *Визначений інтеграл з постійною нижньою межею та змінною верхньою межею називають* ***інтегралом із змінною верхньою межею*** $\int_a^x f(t)dt$ *– це функція від x, тобто* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема 1. Якщо $f(x)$ неперервна функція, то похідна визначеного інтеграла від неперервної функції за змінною верхньою межею дорівнює значенню цієї функції від цієї верхньої межі $\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dx \right)' = f(x)$.

Доведення

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді $\Phi(x)$ одержить приріст:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

За властивостями визначеного інтеграла з неперервності функції $f(x)$ випливає існування точки $c \in [x, x+\Delta x]$ такої, що $\Delta\Phi(x) = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$.

За означенням похідної, якщо $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, тому $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$, що й треба було довести.

Теорема 2. Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної, обчисленої для верхньої та нижньої меж інтегрування, тобто якщо $F(x)$ є первісна функції $f(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Цю формулу називають ***формулою Ньютона-Лейбніца.***

Доведення

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. За попередньою теоремою $\int_a^x f(t)dt$ – також первісна функції $f(x)$, але дві первісні відрізняються лише на сталий доданок C, тобто $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Нехай $x = a$, тоді $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0$, $F(a) + C = 0$, $-F(a) = C$.

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Нехай $x = b$, тоді $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Замінимо змінну інтегрування t на x, одержимо $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, що й треба було довести.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Заміна змінної у визначеному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \\ \alpha=\varphi(a) \\ \beta=\varphi(b) \\ \alpha\le t\le\beta \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(t)dt\,.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі здійснюється за формулою: $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU\,.$

Геометричне застосування визначеного інтеграла

Геометричне застосування визначеного інтеграла – це знаходження площ фігур, обмежених лініями (рис. 18.2, 18.3).

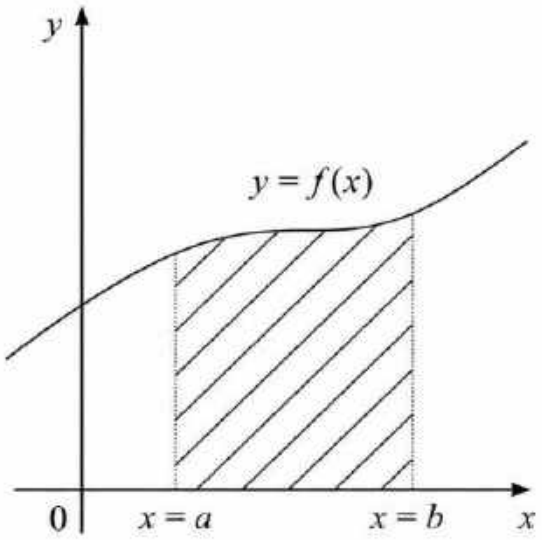


Рисунок 18.2

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

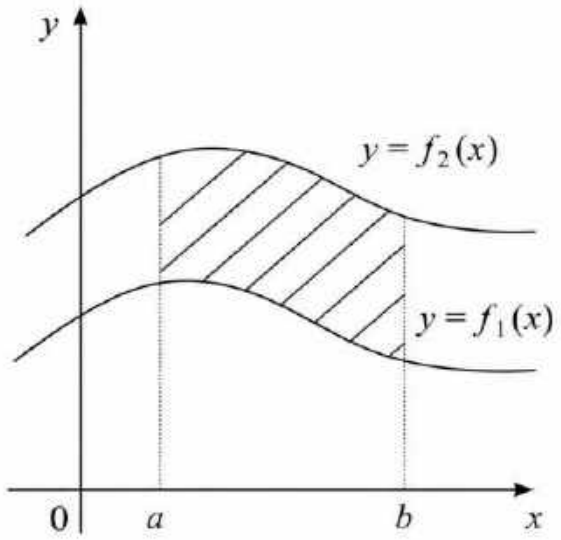


Рисунок 18.3

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$$

18.5. Метод наближеного обчислення визначеного інтеграла

Якщо відрізок інтегрування $[a;b]$ поділити на n рівних частин довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ і позначити c_k середню точку відрізка $[x_{k-1}, x_k]$, то наближене значення визначеного інтеграла можна обчислити за формулою $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(c_1)+f(c_2)+...+f(c_n))$, яку називають *формулою прямокутників.*

Або за формулою $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$, яку називають *формулою трапецій.*

Якщо відрізок інтегрування $[a;b]$ поділити на парну кількість рівних частин $(n=2m)$ і позначити $y_k = f(x_k)$, де $x_k = a + \Delta x \cdot k$ – точки ділення, $k = 0,1,2,...,n$, тоді наближене значення інтеграла можна обчислити за формулою $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}(f(a)+f(b)+2f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n-2}))+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1}))$, яку називають формулою *Сімпсона або парабол*.

В усіх формулах значення буде точніше в разі зростання n і зменшення Δx.

Вказані формули використовують у тому випадку, коли інтеграл у скінченому вигляді не береться.

18.6. Визначений інтеграл у економічних задачах

1. Знайти кількість продукції Q, виробленої за 8 годин, якщо продуктивність праці змінюється за законом $g = -0,6t^2 + 4,8t + 9$.

Розв'язання

$$Q = \int\limits_0^8 (-0,6t^2 + 4,8t + 9)dt = (-0,2t^3 + 2,4t^2 + 9t)\Big|_0^8 = 123,8 \text{ (одиниць)}.$$

2. Функція граничних витрат має вигляд $V'(x) = 23,5 - 0,01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1 000 до 1 500 одиниць.

Розв'язання

$$\int_{1000}^{1500} V'(x)dx = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)dx = (23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2})\Big|_{1000}^{1500} = 23{,}5 \cdot 1500 -$$

$$- \frac{0{,}01 \cdot 1500^2}{2} - (23{,}5 \cdot 1000 - 0{,}005 \cdot 1000^2) = 5500 \text{ (у. о.)}.$$

3. Коефіцієнт розподілу прибуткового податку.

Ступінь нерівності в розподілі доходів населення ілюструє крива Лоренца (рис. 18.6). Це графік, в якому на осі *OX* відкладено відсоток населення від найбідніших до найбагатших, а по осі *OУ* – відсоток одержаного ними доходу.

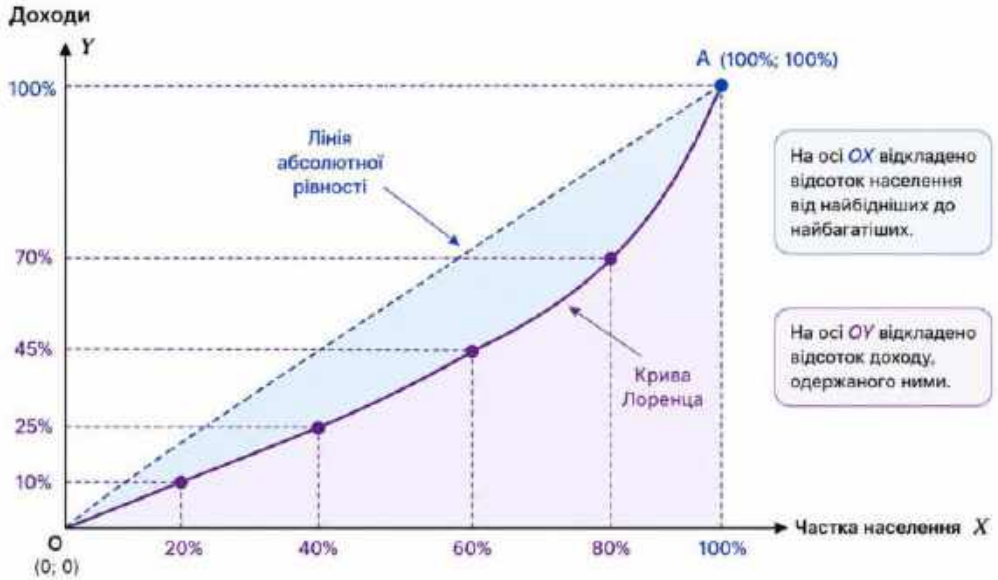


Рисунок 18.6

Заштрихована частина показує різницю між абсолютно справедливим розподілом *OA* і фактичним *OBA*, а відношення S_{OBA} до S_{OAC} називається *коефіцієнтом Джині*.

Нехай крива Лоренца задана рівнянням $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$. Тоді $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, а також:

$$S_{OBA} = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 \left(x - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}x\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2\right)dx = \frac{15}{16}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{32}.$$

Коефіцієнт Джині $K = \frac{S_{OBA}}{S_{OAC}} = \frac{15}{32} \cdot 2 = \frac{15}{16}$.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{-1}^2 3x^2 dx$.

Розв'язання

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$;

б) $\int\limits_{-1}^2 3x^2 dx = 3\int\limits_{-1}^2 x^2 dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = 2^3 - (-1) = 9$.

Приклад 2. Знайти інтеграли, використовуючи формули заміни змінної а) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Розв'язання

а) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{bmatrix} = \int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2$;

б)

$$\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt{1+x} & dx = 2tdt \\ t^2 = 1+x & \alpha = \sqrt{1+0} = 1 \\ x = t^2 - 1 & \beta = \sqrt{1+3} = 2 \end{vmatrix} = \int\limits_1^2 \left(t^2-1\right)2t^2 dt = 2\int\limits_1^2 (t^4 - t^2)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 2\left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = 7\frac{11}{15}.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли: а) $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$; б) $\int\limits_1^4 xe^x dx$.

Розв'язання

а)

$$\int\limits_0^\pi x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x dx = (-\pi)\cdot(-1) + \sin x\Big|_0^\pi = \pi;$$

б)

$$\int\limits_1^4 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_1^4 - \int\limits_1^4 e^x dx = 4e^4 - e - e^x\Big|_1^4 = 4e^4 - e - e^4 + e = 3e^4.$$

Приклад 4. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;

б) $y = \frac{4}{x}$; $y = 5 - x$.

Розв'язання

а) побудуємо фігуру, обмежену лініями (рис. 18.7).

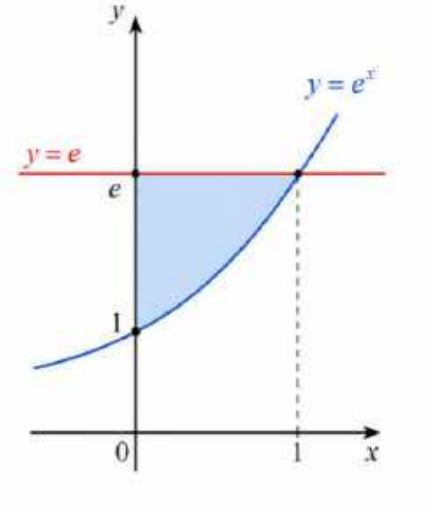


Рисунок 18.7

За формулою площі фігури, обмеженої лініями, одержимо:

$$S = \int_0^1 \left(e - e^x\right)dx = \left(e \cdot x - e^x\right)\Big|_0^1 = e - e - 0 + e^0 = 1 \text{ (кв. од.);}$$

б) виконаємо рисунок (рис. 18.8):

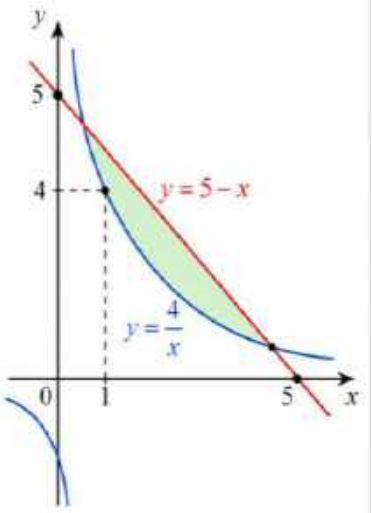


Рисунок 18.8

Знайдемо точки перетину ліній $y = \frac{4}{x}$ та $y = 5 - x$, розв'язавши рівняння:

$$\frac{4}{x} = 5 - x,\ \ 4 = 5x - x^2,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 4.$$

Використовуючи формулу площі, одержимо:

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_1^4 = 20 - 8 - 4\ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 0 = 7\frac{1}{2} - 4\ln 4 \text{ (кв. од.).}$$

Приклад 5. Знайти значення $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з кроком 0, 2.

Розв'язання

Знайдемо $f(0)=e^{-0}=1$

$f(1)=e^{-1}=0{,}368,$

$f(x_1)=f(0{,}2)=e^{-0{,}04}=0{,}961,$

$f(x_2)=f(0{,}4)=e^{-0{,}16}=0{,}85,$

$f(x_3)=f(0{,}6)=e^{-0{,}36}=0{,}698,$

$f(x_4)=f(0{,}8)=e^{-0{,}64}=0{,}527.$

За формулою трапецій маємо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}2\left(\frac{1+0{,}368}{2}+0{,}961+0{,}852+0{,}698+0{,}527\right)=0{,}2\cdot 3{,}722=0{,}74.$$

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити інтеграли за формулою Ньютона-Лейбница:

а) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$;

б) $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

2. Обчислити інтеграли методом підстановки:

а) $\int_1^2\frac{xdx}{1+x^2}$;

б) $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

3. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int_0^e x^2\ln x dx$;

б) $\int_0^{\pi/2} x\cos 2x dx$.

4. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y=\frac{2}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=e^3$;

б) $y=x^2-2x+1,\ y=-x^2+3x-1$.

Питання для самоконтролю

1. Які задачі приводять до поняття визначеного інтеграла?
2. Що називають інтегральною сумою функції?
3. Дайте означення визначеного інтеграла.
4. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
5. Які основні властивості визначеного інтеграла ви знаєте?
6. Як зміниться визначений інтеграл у разі перестановки меж інтегрування?
7. Що називають визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею?
8. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
9. Яке значення має формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів?
10. Які методи наближеного обчислення визначених інтегралів застосовують на практиці?

Тести

1. Визначений інтеграл позначають:

а) $f'(x)$;

б) $\sum f(x)$;

в) $\int_a^b f(x)d$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x))^n$.

2. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то:

а) інтеграл не зміниться;

б) інтеграл стане нулем;

в) інтеграл змінить знак;

г) інтеграл подвоїться.

3. Геометрично визначений інтеграл характеризує:

а) похідну функції;

б) площу фігури;

в) кут нахилу дотичної;

г) максимум функції.

4. Формула Ньютона-Лейбніца має вигляд:

а) $\int_a^b f(x)dx = f(a) - f(b)$;

б) $\int_a^b f(x)dx = f(a) + f(b)$;

в) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$;

г) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

5. Обчисліть $\int_0^1 x\,dx$:

а) 0;

б) 1;

в) $\frac{1}{2}$;

г) 2.

6. Інтеграл із рівними межами дорівнює:

а) 0;

б) -1;

в) C;

г) 1.

7. Яка функція є первісною для $f(x) = 2x$:

а) x^2;

б) $2x^2$;

в) $\frac{x^2}{2}$;

г) $x + 1$.

8. Обчисліть $\int_1^3 2x\,dx$:

а) 4;

б) 6;

в) 8;

г) 10.

9. Формула прямокутників використовується для:

а) точного інтегрування;

б) наближеного обчислення інтеграла;

в) знаходження похідної;

г) розкладу функції.

10. Крива Лоренца використовується для:

а) дослідження границь;

б) побудови похідних;

в) аналізу нерівності доходів;

г) знаходження екстремумів.

ВСТУП. МАТРИЦІ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

1. ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ

Під матрицею розміру $m \times n$ розуміють систему елементів a_{ij}, що впорядковані у вигляді прямокутної таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

У записі елемента перший показник i – номер рядка, другий j – номер стовпця.

Для найменування матриць застосовують великі латинські літери $(A, B, C, \ldots)$, або компактний запис $A = (a_{ij})$.
Числа a_{ij} називають елементами матриці.
Часто вказують розмірність поруч із назвою: $A_{m \times n}$.

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗА ТИПОМ ЕЛЕМЕНТІВ:

- Числова матриця – всі елементи є числами.
- Функціональна матриця – елементами є функції $f(x)$.

2. РІВНІСТЬ ТА ТИПИ МАТРИЦЬ

РІВНІ МАТРИЦІ

Матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називаються рівними (однаковими), якщо вони мають однакову кількість рядків та стовпців і всі їхні елементи, розташовані на однакових місцях, є рівними (тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх i та j).

КВАДРАТНІ МАТРИЦІ

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців $(m = n)$, називається квадратною матрицею порядку n.

Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ, а елементи $a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-1,n}$ – допоміжну.

СПЕЦІАЛЬНІ ВИДИ КВАДРАТНИХ МАТРИЦЬ

1 ДІАГОНАЛЬНА МАТРИЦЯ

Квадратна матриця, у якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 ОДИНИЧНА МАТРИЦЯ

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці. Позначають буквою E.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Одинична матриця n-го порядку має вигляд

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3 ТРИКУТНІ МАТРИЦІ

Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, розміщені по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Верхня трикутна (нулі знизу):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нижня трикутна (нулі зверху):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

НУЛЬОВА МАТРИЦЯ

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Позначають буквою O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНУВАННЯ

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають транспонованою і позначають A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

МАТРИЦІ-ВЕКТОРИ

- Матриця-рядок (один рядок):

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

- Матриця-стовпець (один стовпець):

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матриця найменшого розміру 1×1, що складається з одного елемента, ототожнюється з цим числом, тобто є число (8).

3. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

ДОДАВАННЯ (ВІДНІМАННЯ)

Сумою (різницею) матриць A та B однакової розмірності називають матрицю C, елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),$$
$$i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Операції додавання та віднімання визначені виключно для матриць однакової розмірності.

МНОЖЕННЯ МАТРИЦІ НА ЧИСЛО

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B = (b_{ij})$, елементи якої обчислюються за правилом

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отже, множення матриці на число зводиться до множення кожного її елемента на це число.

ВЛАСТИВОСТІ ДОДАВАННЯ

Для довільних матриць A, B, C однакової розмірності та довільних чисел k, l виконуються співвідношення:

- $A + B = B + A$ (комутативність додавання)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативність)
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$
- $A - A = O$
- $k(\lambda A) = (k\lambda)A$
- $1 \cdot A = A$

ДОБУТОК МАТРИЦЬ

Добутком матриці A на матрицю B називається матриця $C = AB$, елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Множення можливе лише для узгоджених матриць, тобто таких, у яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

ВЛАСТИВОСТІ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ:

- ✓ $AE = EA = A$ (множення на одиничну матрицю)
- ☑ $AO = OA = O$ (множення на нульову матрицю)
- ✓ $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність)
- ✓ $(A + B)C = AC + BC$
- ✓ $A(B + C) = AB + AC$
- ☑ $AB \neq BA$ (загалом комутативна властивість не виконується)

ПРИКЛАД (добуток двох матриць 2×2)

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Знайти добуток матриць AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Матриці – фундамент алгебри та ключ до багатьох застосувань у науці й техніці!

ВИЗНАЧНИКИ,
їх властивості та обчислення

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

1 ВИЗНАЧНИК

Для квадратної матриці порядку n **визначник (детермінант)** – це **числова характеристика**, позначається $\det A$ або $|A|$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

★ Порядок визначника дорівнює кількості його рядків (або стовпців) і в даному випадку становить n.

2 МІНОР І АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ

МІНОР M_{ij}

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник порядку $n-1$, який отримуємо викресливши i-й рядок та j-й стовпчик.

Приклад:

Знайдемо M_{23} для матриці

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ A_{ij}

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Приклад:

Для елемента $a_{23} = 6$ з попередньої матриці маємо

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = -6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -(-6) = 6$$

3 ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА (РОЗКЛАД ЗА РЯДКОМ АБО СТОВПЦЕМ)

Значення визначника можна знайти як суму добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{(розклад за } i\text{-м рядком)}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{(розклад за } j\text{-м стовпцем)}$$

Приклад: розклад за елементами 2-го стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2A_{12} + 5A_{22} + 8A_{32}$$

Обчислимо визначник 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

★ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Значення визначника не змінюється при заміні рядків відповідними стовпцями.
2. Перестановка двох рядків змінює знак визначника.
3. Визначник з двома однаковими або паралельними рядками дорівнює нулю.
4. Спільний множник елементів рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника.
5. Визначник, що містить нульовий рядок або стовпець, дорівнює нулю.
6. Якщо два паралельні рядки є пропорційними – визначник дорівнює нулю.
7. Додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого, помножених на одне й те саме число, не впливає на значення визначника.
8. Якщо кожен елемент деякого стовпця є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників.

5 МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

ПРАВИЛО САРРЮСА (для 3-го порядку)

Допишемо праворуч два стовпчики і обчислюємо суму добутків елементів діагоналей знак «+» мінус суму добутків діагоналей зі знаком «–».

РОЗКЛАД ЗА РЯДКОМ/СТОВПЦЕМ (Теорема Лапласа)

Розкладаємо визначник за елементами зручного рядка або стовпця.

МЕТОД ТРИКУТНОЇ МАТРИЦІ

За допомогою елементарних перетворень приводимо визначник до трикутного вигляду.
Тоді $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ (добуток діагональних елементів з урахуванням знака при перестановках).

ПРАВИЛО САРРЮСА

Для матриці 3-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

\+ додатні діагоналі

– від'ємні діагоналі

ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕННЯ

Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Розв'язання (правило Саррюса):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1) - (3 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-2)) = (2 + 16 + 0) - (-6 + 4 + 0) = 24$$

МЕТОД ТРИКУТНОЇ МАТРИЦІ

Приклад:

Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Після елементарних перетворень $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

(з урахуванням знака при перестановках рядків/стовпців)

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

ПАМ'ЯТАЙ!

- Визначник використовується для розв'язування систем рівнянь (правило Крамера).
- Якщо $\det A = 0$, то матриця вироджена і не має оберненої.
- Практикуй розкладання та перетворення – це ключ до швидкого обчислення!

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

1. Обернена матриця
2. Алгоритм побудови оберненої матриці
3. Ранг матриці
4. Методи знаходження рангу матриці

1 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю:

$$\det A \neq 0$$

Лише для таких матриць існує обернена матриця.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

ФОРМУЛА ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Якщо $\det A \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj\, A$$

де $adj\, A$ – приєднана матриця (транспонована матриця алгебраїчних доповнень).

Алгебраїчне доповнення визначається за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.
- M_{ij} – визначник, отриманий викресленням i-го рядка і j-го стовпця.

ВЛАСТИВОСТІ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \quad k \neq 0$

2 АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

1. Задано квадратну матрицю A.
2. Обчислити визначник матриці $\det A$.
3. Перевірити умову існування оберненої матриці:
   - якщо $\det A = 0$, то обернена матриця не існує;
   - якщо $\det A \neq 0$, перейти до наступного кроку.
4. Для кожного елемента матриці знайти мінор M_{ij} (викреслити i-й рядок і j-й стовпець та обчислити визначник матриці, що залишилася).
5. Обчислити алгебраїчні доповнення:
   $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
6. Скласти матрицю алгебраїчних доповнень A_{ij}.
   $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
7. Транспонувати матрицю A_{ij}, отримавши приєднану матрицю:
   $adj\, A = (A_{ij})^T$
8. Помножити приєднану матрицю на $\frac{1}{\det A}$:
   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj\, A$$
9. Виконати перевірку результату:
   $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

3 РАНГ МАТРИЦІ

Розглянемо прямокутну матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виділимо в цій матриці k рядків і k стовпців, де $k \leq \min(m, n)$. З елементів, що стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, складаємо визначник k-го порядку (мінор k-го порядку). Усі такі визначники називаються **мінорами** цієї матриці.

ОЗНАЧЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

Рангом матриці називається найбільший порядок мінора цієї матриці, який не дорівнює нулю.

Позначення: $rank\, A$ або $r(A)$

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається **базисним**. У матриці може існувати кілька базисних мінорів.

ВЛАСТИВОСТІ РАНГУ МАТРИЦІ

1. Ранг матриці дорівнює нулю лише тоді, коли матриця є нульовою. В інших випадках ранг матриці дорівнює деякому додатному числу.
2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого з її розмірів m чи n, тобто $r(A) \leq \min(m, n)$.
3. Для квадратної матриці n-го порядку виконується рівність $r(A) = n$ тоді й лише тоді, коли матриця є **неособливою**.
4. Якщо $r(A) < n$, то визначник даної квадратної матриці дорівнює нулю.

ПАМ'ЯТАЙ!

- ✓ Якщо $\det A \neq 0$, матриця A невироджена і має обернену матрицю A^{-1}.
- ✓ Ранг матриці – це розмір найбільшого мінору, відмінного від нуля.
- ✓ Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці!

4 МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

МЕТОД ОБВІДНИХ МІНОРІВ

- Послідовно обчислюємо мінори, починаючи з менших порядків і переходячи до більших.
- Якщо знайдено мінор k-го порядку, відмінний від нуля, обчислюємо лише мінори порядку $k+1$ (обвідні).
- Якщо всі обвідні мінори k-го порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = k - 1$.

ПРИКЛАД

Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Мінори 1-го порядку: є ненульові $\Rightarrow r(A) \geq 1$

Мінори 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Усі мінори 2-го порядку $= 0 \Rightarrow r(A) = 1$

МЕТОД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Застосовуємо елементарні перетворення до матриці, приводячи її до діагонального (або ступінчастого) вигляду.

Ранг матриці дорівнює кількості ненульових діагональних елементів.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ:

1. Перестановка двох рядків (або стовпців).
2. Транспонування матриці.
3. Множення рядка (стовпця) на ненульове число.
4. Викреслювання нульового рядка (стовпця).
5. Додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на ненульове число.

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці. Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо їх ранги рівні: $A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

ПРИКЛАД ЗНАХОДЖЕННЯ РАНГУ МЕТОДОМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \qquad R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \qquad R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

Діагональний вигляд: ненульових діагональних елементів $= 2 \Rightarrow r(A) = 2$

ЗАСТОСУВАННЯ

- Обернена матриця – для розв'язування систем рівнянь, обернення лінійних перетворень.
- Ранг матриці – у дослідженні систем рівнянь, лінійної незалежності, визначенні базисів.

МІНІ-ШПАРГАЛКА

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj\, A \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$r(A)$ = порядок найбільшого мінору $\neq 0$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МАТРИЧНИЙ МЕТОД

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

1 ЩО ТАКЕ СЛАР?

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ddots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

a_{ij} – коефіцієнти системи, b_i – вільні члени.

Однорідна система
$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

Неоднорідна система
хоча б один $b_i \neq 0$

Сумісність системи
- Сумісна – має хоча б один розв'язок.
- Несумісна – не має жодного розв'язку.

Сумісна система буває:
- визначена – має єдиний розв'язок;
- невизначена – має більше ніж один розв'язок.

Упорядкований набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – розв'язок системи, якщо після підстановки всі рівняння перетворюються на тотожності.

2 МАТРИЦІ СИСТЕМИ ТА МАТРИЧНИЙ ЗАПИС

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Розширена матриця

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Матриця вільних членів

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матриця невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матричний запис системи:

$$AX = B$$

Коротко: $AX = B$

Якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$), система має вигляд (1.1) і записується так само: $AX = B$.

3 ФОРМУЛИ КРАМЕРА

Нехай $AX = B$ та $\Delta = \det A \neq 0$.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Тоді система має єдиний розв'язок:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

де $\Delta = \det A$ – визначник матриці коефіцієнтів.

Δ_i – визначник, отриманий із Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів B.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

$\Delta \neq 0$	система має єдиний розв'язок (за формулами Крамера)
$\Delta = 0$, але хоча б один $\Delta_i \neq 0$	система несумісна (розв'язків немає)
$\Delta = 0$ і всі $\Delta_i = 0$	система невизначена (безліч розв'язків)

ПРИКЛАД (2 невідомі)

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

4 МАТРИЧНИЙ МЕТОД

Нехай $AX = B$ і $\det A \neq 0$ (матриця A – невироджена).
Тоді існує обернена матриця A^{-1}.

ФОРМУЛА МАТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

$$X = A^{-1}B$$

АЛГОРИТМ

1. Записати систему у матричному вигляді: $AX = B$.
2. Знайти обернену матрицю A^{-1} (через алгебраїчні доповнення або елементарні перетворення).
3. Помножити A^{-1} на B: $X = A^{-1}B$.
4. Записати розв'язок у вигляді вектора X.

Доведення ідеї: помножимо рівняння $AX = B$ зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Коли застосовувати?
- якщо $\det A \neq 0$;
- матричний метод зручний для великих систем;
- потребує знаходження оберненої матриці.

5 НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКИ (КРАМЕР)

2 рівняння, 2 невідомі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

3 рівняння, 3 невідомі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

(аналогічно для Δ, Δ_i)

ПАМ'ЯТАЙ!
- ✓ Однорідна система завжди сумісна: $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$.
- ✓ Якщо $\det A \neq 0$ – єдиний розв'язок.
- ✓ Крамер – тільки при $\det A \neq 0$.
- ✓ Матричний метод – універсальний, зручний та компактний.

ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ
- A – матриця коефіцієнтів $(n \times n)$
- B – матриця вільних членів $(n \times 1)$
- X – матриця невідомих $(n \times 1)$
- $AX = B$ – матричний запис СЛАР
- A^{-1} – обернена матриця
- E – одинична матриця
- $\det A$ – визначник матриці A
- Δ_i – визначник Крамера (i-й стовпець замінено)

СЛАР – основа багатьох задач: фізика, економіка, інженерія, програмування!

МЕТОДИ ГАУССА І ЖОРДАНА–ГАУССА

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

1. МЕТОД ГАУССА

ІДЕЯ МЕТОДУ

Метод Гаусса ґрунтується на послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень над рівняннями (або над розширеною матрицею системи) з приведенням системи до трикутного вигляду, після чого розв'язок знаходять зворотним ходом (підстановкою).

ЕТАПИ МЕТОДУ ГАУССА

1. ПРЯМИЙ ХІД

Послідовно виключають невідомі:

- x_1 – з усіх рівнянь, починаючи з другого;
- x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього;
- … і т.д.

У результаті система зводиться до трикутного (трапецієподібного) вигляду.

↓

2. ОБЕРНЕНИЙ ХІД

З останнього рівняння знаходять x_n, після чого послідовно знаходять $x_{n-1}, \dots, x_1$ шляхом підстановки.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Не змінюють множину розв'язків системи

⇄	Перестановка рядків (або стовпців)
$k\times$	Множення рядка на ненульове число $k \neq 0$
$+$	Додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на число k

ПРИКЛАД МЕТОДУ ГАУССА

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1 Крок. Запишемо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

2 Крок. Прямий хід:

$$R_2 \leftarrow R_2 - \tfrac{1}{2}R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - \tfrac{3}{2}R_1 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

3 Крок. Обернений хід:

$$11x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{6}{11}$$

$$\tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 = \tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{4}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{6}{11}$ ✓

ПАМ'ЯТАЙ!

Метод Гаусса зручний для систем великого порядку та реалізується без обчислення визначників.

2. МЕТОД ЖОРДАНА–ГАУССА

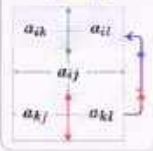
ІДЕЯ МЕТОДУ

Метод Жордана–Гаусса – це модифікація методу Гаусса. Виключення невідомої виконується не лише в рядках нижче, а й вище розв'язувального елемента, що дозволяє одразу отримати значення змінних без зворотного ходу.

АЛГОРИТМ ОДНОГО КРОКУ

1. Обрати розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$ (бажано $a_{ij} = 1$).
2. Усі елементи i-го рядка поділити на a_{ij}:
$$a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{ij}}.$$
3. У стовпці j: замість a_{ij} записати 1, інші елементи замінити на 0.
4. Інші елементи обчислити за формулою:
$$a_{kl}^{(new)} = a_{kl}^{(old)} - a_{kj}^{(new)} \cdot a_{il}^{(old)} \quad (k \neq i, l \neq j).$$
5. Обчислення елементів доцільно виконувати за схемою прямокутника.
6. Після виконання перетворень провідний стовпець набуває вигляду одиничного вектора.

Схема прямокутника для a_{kl}



РЕЗУЛЬТАТ ОДНОГО КРОКУ

- У вибраному стовпці одна одиниця, інші – нулі.
- Кількість ненульових елементів у матриці зменшується.
- Система переходить до простішого еквівалентного вигляду.

ПРИКЛАД (перший крок)

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

1) Обираємо $a_{21} = 1$ (розв'язувальний елемент) →

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

2) Ділимо другий рядок на 1 →

3) Обнуляємо стовпець 1 вище і нижче →

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

4–6) Оновлюємо інші елементи

ПОРЯДОК РОБОТИ МЕТОДУ ЖОРДАНА–ГАУССА

Повторюємо описані кроки для всіх стовпців (змінних), поки розширена матриця не набуде приведеного ступінчастого вигляду.

ПРИВЕДЕНИЙ СТУПІНЧАСТИЙ ВИГЛЯД

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ x_3 = b_3 \\ \cdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

ПЕРЕВАГИ МЕТОДУ ЖОРДАНА–ГАУССА

- ✓ Не потребує зворотного ходу (підстановки).
- ✓ Дає розв'язок безпосередньо.
- ✓ Зручний для комп'ютерної реалізації.

ВАЖЛИВО! Обидва методи ґрунтуються на елементарних перетвореннях рядків (або стовпців), які не змінюють множину розв'язків системи лінійних рівнянь.

ВЕКТОРИ

КООРДИНАТИ І МОДУЛЬ



$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

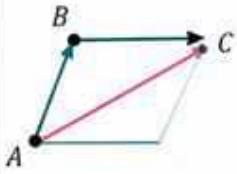
МОДУЛЬ вектора:

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

якщо $\vec{a}(x, y, z)$

НУЛЬОВИЙ ВЕКТОР: $|\vec{0}| = 0$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



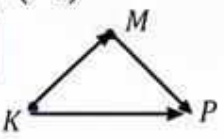
ВЛАСТИВОСТІ

- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

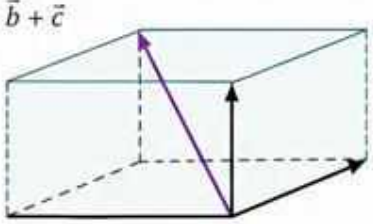
$\vec{a} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PM}$



$\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \quad \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$

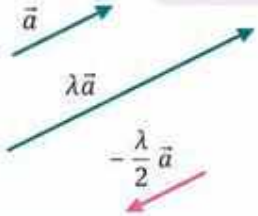
$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



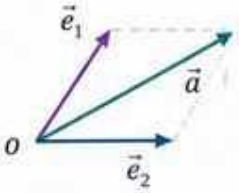
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. БАЗИС.

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$



- $\lambda\vec{a}\ (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$
- $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$
- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$



БАЗИС

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

КОЛІНЕАРНІСТЬ:

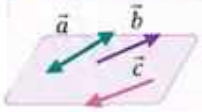


$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow$

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$

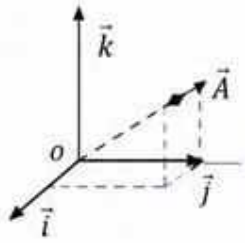
$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

КОМПЛАНАРНІСТЬ:



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

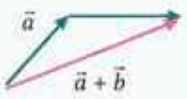


РАДІУС-ВЕКТОР

$\overrightarrow{OA} = a_i\vec{i} + a_j\vec{j} + a_k\vec{k}$

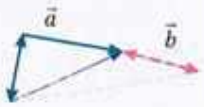
ДОДАВАННЯ

Правило трикутника



ВІДНІМАННЯ

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



МОДУЛЬ

Довжина вектора

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

КОЛІНЕАРНІСТЬ

Вектори лежать на одній прямій



КОМПЛАНАРНІСТЬ

Вектори лежать в одній площині



ВЕКТОРИ

КООРДИНАТИ І МОДУЛЬ



$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

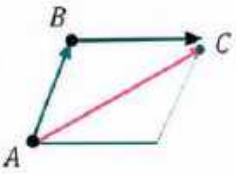
МОДУЛЬ вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

якщо $\vec{a}(x, y, z)$

НУЛЬОВИЙ ВЕКТОР: $|\vec{0}| = 0$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



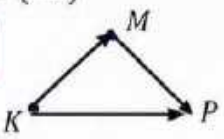
ВЛАСТИВОСТІ

- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

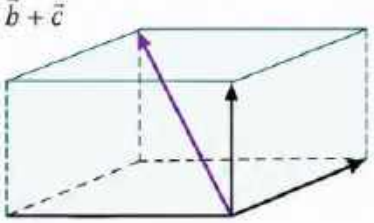
$$\vec{a} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PM}$$



$\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \quad \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$

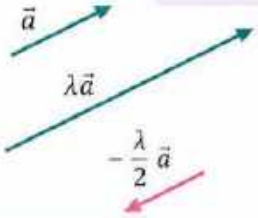
$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



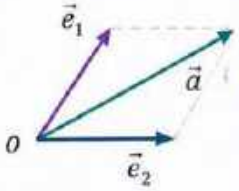
$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$$

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. БАЗИС.

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}$$



- $\lambda\vec{a}\ (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$
- $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$
- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$



БАЗИС

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

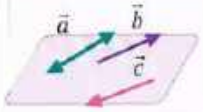
КОЛІНЕАРНІСТЬ:



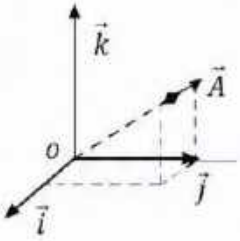
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$



КОМПЛАНАРНІСТЬ:



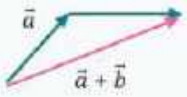
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$



РАДІУС-ВЕКТОР

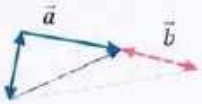
$$\overrightarrow{OA} = a_i\vec{i} + a_j\vec{j} + a_k\vec{k}$$

ДОДАВАННЯ
Правило трикутника



ВІДНІМАННЯ

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



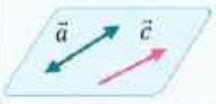
МОДУЛЬ
Довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

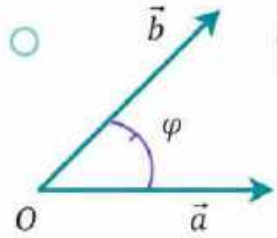
КОЛІНЕАРНІСТЬ
Вектори лежать на одній прямій



КОМПЛАНАРНІСТЬ
Вектори лежать в одній площині



СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ



ВИЗНАЧЕННЯ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$$

КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ НА ПЛОЩИНІ

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ВЛАСТИВОСТІ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \forall\,\lambda\in R$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ У ПРОСТОРІ

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- $(\vec{a}\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b},\ \vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0$
- $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b}),\ \forall\,\lambda\in R$
- $\vec{a}\vec{a} = a = |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a}$

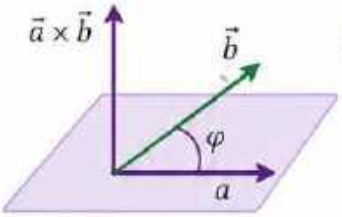
ІНШІ ВЛАСТИВОСТІ

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$$

КООРДИНАТНА ФОРМА: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ



ВИЗНАЧЕННЯ

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi\cdot\vec{n}$$

$\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до обох $\vec{a}$ і $\vec{b}$, напрямлений за правилом правого гвинта

КООРДИНАТНА ФОРМА

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

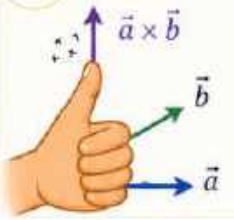
ВЛАСТИВОСТІ

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}),\ \forall\,\lambda\in R$
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$
- $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0},\ \ \vec{0}\times\vec{a} = \vec{0}$

НАСЛІДКИ

- $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b},\ \ \vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$ – площа паралелограма
- $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$
- $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

ЗА ПРАВИЛОМ ПРАВОГО ГВИНТА



Якщо від повороту $\vec{a}$ до $\vec{b}$ кут найменший, то напрям $\vec{a}\times\vec{b}$ збігається з напрямком поступального руху правого гвинта.

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ $\vec{a}\parallel\vec{b}$ або $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$

$|\vec{a}\times\vec{b}|$ – площа паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Напрям $\vec{a}\times\vec{b}$ завжди перпендикулярний до $\vec{a}$ і $\vec{b}$

МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

ОЗНАЧЕННЯ

Мішаний добуток трьох векторів:

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$$

КОМПЛАНАРНІСТЬ

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні $\Rightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні

ВЛАСТИВОСТІ

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c}, \vec{a}]$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}) = (\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b})$$

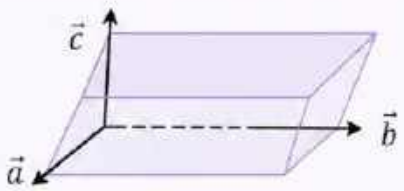
$$(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b})(\lambda\vec{c}) = \alpha\beta\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$ = об'єм паралелепіпеда



ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів і змінює знак при перестановці двох будь-яких векторів.

ПРИКЛАД

$\vec{a} = (1, 2, 3)$
$\vec{b} = (0, -1, 4)$
$\vec{c} = (2, 1, 0)$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 19$$

ВИСНОВКИ

- Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ – вектори компланарні.
- Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0$ – вектори не компланарні.

КОЛИ ВИКОРИСТОВУЄМО?

- Перевірка компланарності
- Знаходження об'єму паралелепіпеда
- Розв'язування задач у просторі

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

$$Ax + By + C = 0$$

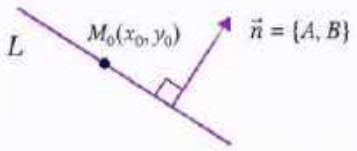
$\vec{n} = \{A, B\}$ – координати нормального вектора

A, B, C – будь-які сталі такі, що:

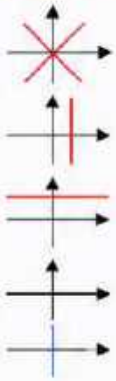
$$A^2 + B^2 \neq 0$$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $M_0(x_0, y_0)$ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ВЕКТОРУ $\vec{n} = \{A, B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$



НЕПОВНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ



$C = 0,\ Ax + By = 0$

$B = 0,\ Ax + C = 0$

$A = 0,\ By + C = 0$

$C = 0, B = 0,\ Ax = 0$

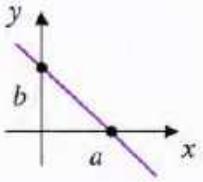
$C = 0, A = 0,\ By = 0$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a = -C/,\ A \neq 0$

$b = -C/,\ B \neq 0$



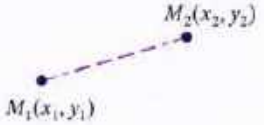
КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$$

$\vec{q} = \{l, m\}$ – напрямний вектор

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ $M_1(x_1, y_1)$ І $M_2(x_2, y_2)$

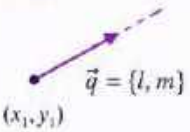
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

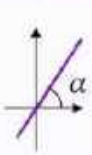
$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

t – параметр, $-\infty < t < +\infty$



РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ $k = \tan\alpha$

$$y = kx + b$$



або через точку $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

де $M_1(x_1, y_1)$ – точка, через яку проходить пряма

ПАМ'ЯТАЙ

- Вектор $\vec{n} = \{A, B\} \perp$ прямій $Ax + By + C = 0$
- Вектор $\vec{q} = \{l, m\} \parallel$ прямій
- Якщо $A = 0$, пряма паралельна осі Oy
- Якщо $B = 0$, пряма паралельна осі Ox

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

$$Ax + By + C = 0$$

$$A^2 + B^2 \neq 0$$

ЧЕРЕЗ ТОЧКУ І НОРМАЛЬНИЙ ВЕКТОР

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\vec{n} = \{A, B\}$$

У ВІДРІЗКАХ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}$$

ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

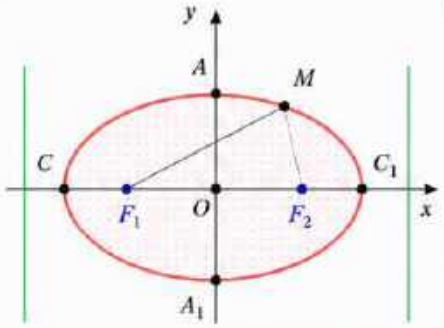
ПАРАМЕТРИЧНЕ

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

$$t \in R$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

ЕЛІПС



$m.M(x,y)$

AA_1, CC_1 – півосі

Рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ексцентриситет => $e=\frac{c}{a}$

$b^2=a^2-c^2$

Фокуси еліпса:

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокуси еліпса

Вершини:

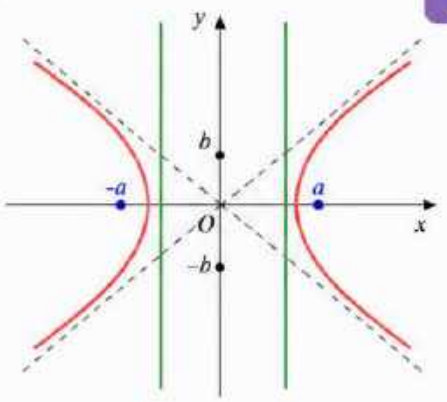
$A(0,b)$, $A_1(0,-b)$, $C(-a,0)$, $C_1(a,0)$

Рівняння директрис:

$D_2: x=a/e$

$D_1: x=-a/e$

ГІПЕРБОЛА



Рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a, $-a$ – вершини гіперболи

OX – головна вісь

OY – побічна вісь

$b^2=c^2-a^2$

Рівняння асимптот:

$y=\frac{b}{a}x$ $\quad y=-\frac{b}{a}x$

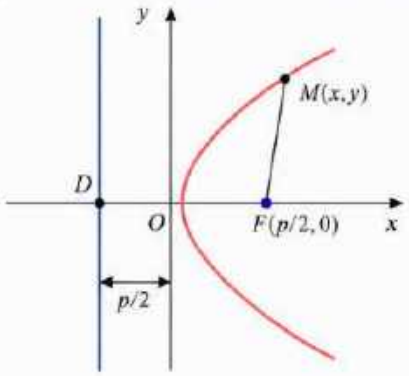
Ексцентриситет => $e=\frac{c}{a}$

Рівняння директрис:

$D_1: x=a/e$

$D_2: x=-a/e$

ПАРАБОЛА



Рівняння параболи:

$$y^2=2px$$

$F(p/2,0)$ – фокус

p – параметр параболи

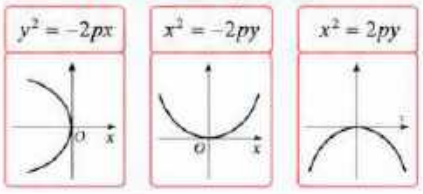
$DF=p$

Рівняння директриси:

$y=-p/2$

D-директриса

Різновиди параболи:



ЕЛІПС

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$e=\frac{c}{a}$, $b^2=a^2-c^2$

$D_{1,2}: x=\pm\frac{a}{e}$

ГІПЕРБОЛА

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$e=\frac{c}{a}$, $b^2=c^2-a^2$

$D_{1,2}: x=\pm\frac{a}{e}$

Асимптоти: $y=\pm\frac{b}{a}x$

ПАРАБОЛА

$y^2=2px$

$F(p/2,0)$, $DF=p$

Директриса:

$y=-p/2$

ПОЗНАЧЕННЯ

a, b – півосі

c – фокальна відстань

e – ексцентриситет

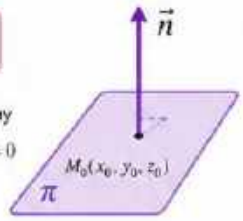
p – параметр параболи

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

A, B, C, D – будь-які сталі, причому
$A \neq 0$ або $B \neq 0$ або $C \neq 0$ або $D \neq 0$



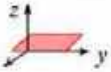
Площина π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Якщо т. M лежить на площині $\pi \Rightarrow \vec{n} = \{A, B, C\}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ортогональні

Якщо т. M не лежить на площині $\pi \Rightarrow \vec{n} = \{A, B, C\}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ не є ортогональним

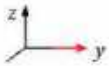
НЕПОВНІ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ



$D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ проходить через початок координат



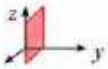
$A = 0$, $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox



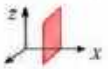
$B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ паралельна осі Oy



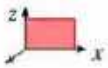
$C = 0$, $Ax + By + D = 0$ паралельна осі Oz



$A = 0$, $By + Cz + D = 0$ паралельна площині Oyz



$B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ паралельна площині Oxz



$C = 0$, $Ax + By + D = 0$ паралельна площині Oxy

$A = 0, B = 0, D = 0 \Rightarrow Cz = 0$ задає площину Oxy

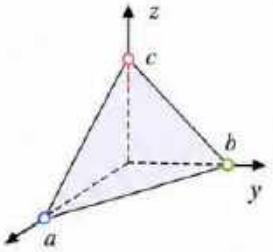
$A = 0, C = 0, D = 0 \Rightarrow By = 0$ задає площину Oxz

$B = 0, C = 0, D = 0 \Rightarrow Ax = 0$ задає площину Oyz

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ВІДРІЗКАХ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$a = -\frac{D}{A} \qquad b = -\frac{D}{B} \qquad c = -\frac{D}{C}$$



НОРМОВАНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

$$x \cos\alpha + y \sin\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

α, β, γ – кути між нормаллю до площини та осями Ox, Oy, Oz відповідно.
p – відстань від початку координат до площини вздовж нормалі

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ТОЧКИ, ЯКІ НЕ ЛЕЖАТЬ НА ОДНІЙ ПРЯМІЙ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

КУТ МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Умова паралельності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Умова перпендикулярності:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ПАМ'ЯТАЙ!

- Нормальний вектор площини: $\vec{n} = \{A, B, C\}$
- Якщо $D = 0$, площина проходить через початок координат
- Будь-яке рівняння площини можна подати у загальному вигляді $Ax + By + Cz + D = 0$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка на прямій

$\vec{q}=\{l, m, n\}$ – напрямляючий вектор (паралельний прямій)

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$

ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

$$x=x_1+lt \qquad y=y_1+mt \qquad z=z_1+nt$$

t – параметр, $-\infty < t < +\infty$

КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Умова паралельності:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

Умова перпендикулярності:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

УМОВИ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

УМОВА ТОГО, ЩО ДВІ ПРЯМІ НАЛЕЖАТЬ ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Рівняння виконується тоді і тільки тоді, коли прямі лежат в одній площині.

КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0$$

$$L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

φ – кут між прямою L і площиною π, $0° \le \varphi \le 90°$

Якщо $Al+Bm+Cn=0$, то пряма паралельна площині.

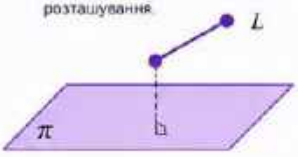
УМОВА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМОЇ L ТА ПЛОЩИНИ π

$$Al+Bm+Cn=0$$

УМОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ L ТА π

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

Якщо виконується одна з умов – робимо висновок про взаємне розташування.



КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$\vec{q}=\{l, m, n\}$

ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ

$$x=x_1+lt$$
$$y=y_1+mt$$
$$z=z_1+nt$$

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1 ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексним числом називають вираз виду

$$z = a + bi$$

де a, b – дійсні числа,

i – уявна одиниця, $i^2 = -1$

a – дійсна частина b – уявна частина

- Позначення: $z = a + bi$
- Будь-яке дійсне число a можна розглядати як комплексне: $a = a + 0i$
- Суто уявне число: bi $(a = 0)$
- Два числа рівні тоді і тільки тоді, коли їх дійсні та уявні частини рівні:

$$z_1 = a_1 + b_1 i = z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$\Leftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$$

- Спряжене число: $\bar{z} = a - bi$

2 ФОРМИ ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

2.1. Алгебраїчна форма

Загальний вигляд:

$$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1$$

- a – дійсна частина
- b – уявна частина
- $Re\, z = a$
- $Im\, z = b$

Приклади:

$3 - 2i$, $\sqrt{2} + 5i$,

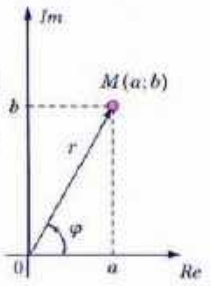
-4 (тобто $-4 + 0i$)

2.2. Тригонометрична форма

Нехай $z = a + bi$ відповідає точці $M(a;b)$ на комплексній площині.

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(r > 0)$ – модуль
- φ – аргумент: кут між додатним напрямком осі Re та радіус-вектором OM.

$$\tan\varphi = \frac{b}{a},\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$\varphi = \arg z = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Головне значення: $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$

2.3. Показникова форма

$$z = re^{i\varphi}$$

де $r = |z|,\ \varphi = \arg z$

3 ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ ФОРМІ

Додавання:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Віднімання:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Множення:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ділення:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

$c^2 + d^2 \neq 0$

Приклади

1) $(2 + 3i) + (1 - 4i) = 3 - i$

2) $(2 + 3i)(1 - 4i) = 14 - 5i$

3) $\dfrac{2 + 3i}{1 - i} = \dfrac{(2 + 3i)(1 + i)}{2}$

$\dfrac{-1 + 5i}{2}$

Властивості спряжених чисел

Нехай $z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi$

$z + \bar{z} = 2a$ $\quad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Сума та добуток спряжених чисел – дійсні числа.

4 ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ У ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Множення:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Ділення:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Формула Муавра (степінь)

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\quad n \in \mathbb{Z}$$

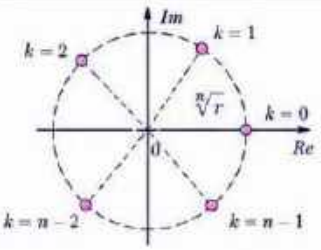
5 КОРЕНІ n-ГО СТЕПЕНЯ З КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Коренем n-го степеня з комплексного числа z називають число w, що $w^n = z$.

Теорема. Існує рівно n різних значень кореня n-го степеня з z. Вони визначаються формулою:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n - 1$



Геометрично корені n-го степеня розташовані у вершинах правильного n-кутника на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат.

КОРОТКО ПРО ГОЛОВНЕ

Комплексне число: $z = a + bi$, $i^2 = -1$.

Комплексна площина: точка $M(a;b)$ відповідає числу $z = a + bi$.

$r = |z|$ – модуль, $\varphi = \arg z$ – аргумент.

Тригонометрична та показникова форми дуже зручні для дій і степенів.

Формула Муавра та формула кореня – ключ до степенів і коренів.

ГРАНИЦІ

Основні теореми про границі

Математика — це мова закономірностей

I ♥ math

1 Поняття границі функції

Означення.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

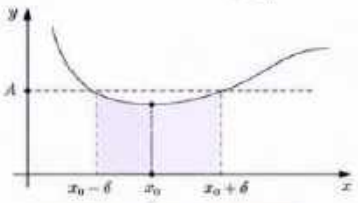
Означення.

Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при всіх x, що задовольняють $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Зауваження.

Означення границі не вимагає існування функції в точці x_0, тобто $f(x_0)$ може не існувати, але $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує.



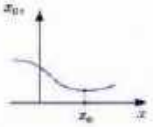
$f(x)$ наближається до A, коли x наближається до x_0.

2 Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення.

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо $\alpha(x) \to 0$ $(x \to x_0)$.

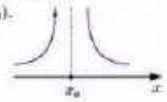
$\alpha(x) \to 0$



Означення.

Функція $\beta(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо $|\beta(x)| \to \infty$ $(x \to x_0)$.

$|\beta(x)| \to \infty$



Означення.

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції в точці x_0 і $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими функціями і позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to x_0)$.

Ланцюжок еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$

$(x \to 0)$

Теорема.

Якщо $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = A$.

Під знаком границі можна замінювати нескінченно малі функції еквівалентними.

3 Основні теореми про границю (властивості границь)

Теорема (стала).

$\lim\limits_{x \to x_0} c = c$

Теорема (сума).

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Теорема (добуток).

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Теорема (частка).

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Наслідки

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (c f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (сталий множник виноситься за знак границі)
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^m = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^m$, де $m \in \mathbb{N}$

4 Розкриття деяких невизначеностей

Основні невизначеності: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0 \cdot \infty}{0}$

1 $\infty - \infty$

Звести вираз до спільного знаменника або виконати перетворення.

Приклад:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x-1}{x} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 0$

2 $\frac{\infty}{\infty}$ (многочлени)

Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь x.

Приклад:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - 4x} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 2$

3 $\frac{0}{0}$ (многочлен)

Розкласти на множники і скоротити на критичний множник.

Приклад:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

4 $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ (ірраціональний вираз)

Позбутися ірраціональності: домножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

Приклад:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0}$

$= \dfrac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

5 $\frac{0 \cdot \infty}{0}$

Перетворити вираз так, щоб звести до однієї з попередніх невизначеностей.

Приклад:

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$

(далі – за правилом Лопіталя)

Зауваження: для функцій, які мають границю на нескінченності, залишаються справедливими всі теореми про границі.

5 Перша та друга важливі границі

Перша важлива границя

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{kx} = \dfrac{1}{k} \quad (k \neq 0)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Приклади (з першою важливою):

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2$

Друга важлива границя

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

або $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$e \simeq 2{,}71828$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a \in \mathbb{R})$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + ax)^{bx} = e^{ab}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

КОРОТКО ПРО ГОЛОВНЕ

- Границя описує поведінку функції при наближенні до точки або нескінченності.
- Нескінченно малі функції прямують до нуля.
- Еквівалентні н.м. ф-ції можна взаємозамінювати під знаком границі.
- Невизначеності розкриваємо алгебраїчним перетворенням або за правилом Лопіталя.
- Число e – одне з найважливіших констант математики.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідною функції $f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx – приріст аргументу

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приріст функції

2 ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ПОХІДНИХ

$(C)'$	$=$	0	$(\ln x)'$	$=$	$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$
$(x)'$	$=$	1	$(\log_a x)'$	$=$	$\frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$
$(kx + b)'$	$=$	k	$(\operatorname{arctg} x)'$	$=$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$(x^n)'$	$=$	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{R})$	$(\arcsin x)'$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(\lvert x \rvert < 1)$
$(\sqrt{x})'$	$=$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(\arccos x)'$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(\lvert x \rvert < 1)$
$(\sin x)'$	$=$	$\cos x$			
$(\cos x)'$	$=$	$-\sin x$			
$(e^x)'$	$=$	e^x			
$(a^x)'$	$=$	$a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$			

3 ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Сума
$(u + v)' = u' + v'$

Різниця
$(u - v)' = u' - v'$

Добуток
$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Сталий множник
$(ku)' = ku'$

4 ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

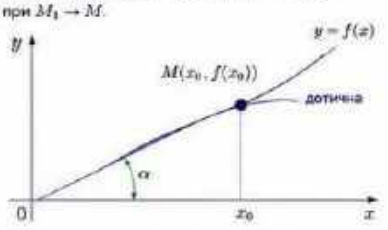
Нехай точка рухається прямолінійно за законом $s = s(t)$ – шлях залежить від часу t.

Швидкість руху:
$$v(t) = s'(t)$$

Прискорення руху:
$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

5 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0,\ f(x_0))$ називається граничне положення січної, яку проведено через точки M і M_1, при $M_1 \to M$.



Кутовий коефіцієнт дотичної: $k = f'(x_0)$

Рівняння дотичної: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Рівняння нормалі: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

де $y_0 = f(x_0)$

6 ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ (ПРАВИЛО ЛАНЦЮГА)

Нехай $y = f(u)$, де $u = g(x)$. Тоді $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Правило знаходження похідної складеної функції:

1. Знайти похідну зовнішньої функції $f'(u)$ за аргументом u.
2. Знайти похідну внутрішньої функції $u' = g'(x)$ за змінною x.
3. Записати їх добуток: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Якщо $y = f(g(h(x)))$ (три функції), то

$$y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

7 ПОХІДНА НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Якщо функція y задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної диференціюємо обидві частини рівняння.

$F(x, y) = 0$ → диференціюємо → $F_x(x, y) + F_y(x, y)\, y' = 0$

звідси $y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$

де $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$

8 ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Для спрощення диференціювання степенево-показникових функцій логарифмуємо обидві частини:

$y = f(x)$ ⟶ $\ln y = \ln f(x)$

↓ диференціюємо

знаходимо y'

Найчастіше для $y = u(x)^{v(x)}$

Модуль можна опускати!

9 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДАНА ПАРАМЕТРИЧНО

Якщо функція задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

де t – параметр, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

(за умови $\frac{dx}{dt} \neq 0$)

КОРОТКО ПРО ГОЛОВНЕ

- Похідна показує швидкість зміни функції в точці.
- Геометрично похідна – це кутовий коефіцієнт дотичної.
- Ланцюгове правило допомагає в складених функціях.
- Логарифмічне диференціювання спрощує складні вирази.
- Параметричне та неявне задання дозволяє знаходити похідну без виразження $y(x)$.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Опорний конспект

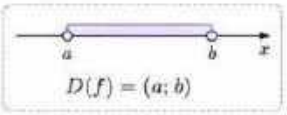
ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність та періодичність.
3. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції.
4. Знайти інтервали опуклості та точки перегину.
5. Знайти асимптоти графіка функції.
6. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).
7. Побудувати графік функції.

1 ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Область визначення функції $y = f(x)$ — множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна x.

$D(f)$

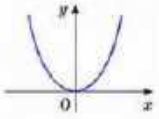


2 ПАРНІСТЬ І ПЕРІОДИЧНІСТЬ

Парна функція

$f(-x) = f(x)$

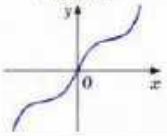
Графік симетричний відносно осі Oy



Непарна функція

$f(-x) = -f(x)$

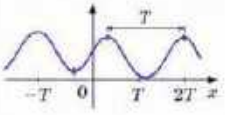
Графік симетричний відносно початку координат



Періодична функція

$f(x + T) = f(x)$

$T \neq 0$ – період



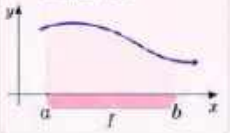
3 МОНОТОННІСТЬ ФУНКЦІЇ

Характеризується знаком першої похідної $f'(x)$

Якщо $f'(x) > 0$ на проміжку I, то функція зростає на I



Якщо $f'(x) < 0$ на проміжку I, то функція спадає на I



Щоб дослідити функцію на монотонність:

1) знайти $f'(x)$; 2) розв'язати $f'(x) = 0$ і знайти точки, де $f'(x)$ не існує;
3) розбити область визначення на проміжки;
4) встановити знак $f'(x)$ на кожному проміжку (метод проб).

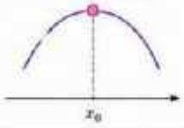
4 КРИТИЧНІ ТОЧКИ ТА ЕКСТРЕМУМИ

Критичні точки – це точки, де $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

Екстремуми:

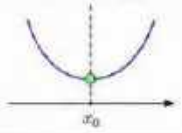
$f'(x)$: + → −

точка максимуму



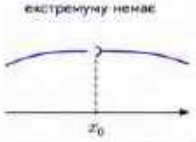
$f'(x)$: − → +

точка мінімуму



$f'(x)$: + → + або − → −

екстремуму немає



5 ОПУКЛІСТЬ ТА ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Якщо $f''(x) > 0$ на проміжку, то крива опукла (вгору)

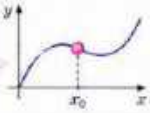


Якщо $f''(x) < 0$ на проміжку, то крива ввігнута (вниз)



Точка перегину – точка, яка відокремлює інтервал опуклості від інтервалу ввігнутості.

У точці перегину $f''(x) = 0$ і при переході через неї друга похідна змінює знак.



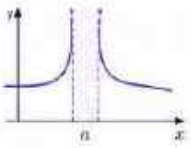
6 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Вертикальна

$x = a$

якщо хоча б одна з границь дорівнює ∞ або $-\infty$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$

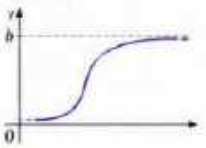


Горизонтальна

$y = b$

якщо існує скінчена границя при $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$



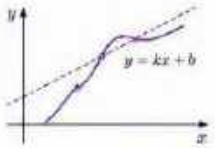
Похила

$y = kx + b$

якщо існують границі

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$



7 ПЕРЕТИН З ОСЯМИ КООРДИНАТ

З віссю Ox

покласти $y = 0$

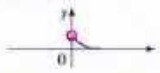
розв'язати $f(x) = 0$



З віссю Oy

покласти $x = 0$

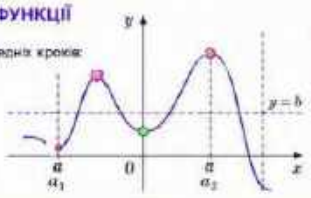
$y = f(0)$



8 ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Використовуємо результати попередніх кроків:

- ☑ область визначення
- ☑ монотонність і екстремуми
- ☑ опуклість і точки перегину
- ☑ асимптоти
- ☑ перетини з осями



- максимум
- мінімум
- точка перегину
- асимптоти

ВАЖЛИВО ЗАПАМ'ЯТАТИ

Перша похідна відповідає за монотонність та екстремуми. $(f'(x))$

Друга похідна відповідає за опуклість та точки перегину. $(f''(x))$

Критичні точки – це кандидати на екстремуми та перегини.

Асимптоти описують поведінку графіка на нескінченності та в особливих точках.

Повне дослідження функції – запорука правильного графіка!

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

1 ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення.

Якщо змінна величина z залежить від двох незалежних змінних x, y, то її називають функцією двох змінних і позначають

$$z = f(x, y)$$

x, y – незалежні змінні (аргументи), z – рівноправними.

Означення.

Функція $z = f(x, y)$ визначена на множині $D(f)$, якщо кожній парі $(x, y) \in D(f)$ відповідає єдине значення z.

2 ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ

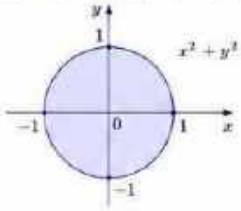
Означення. Сукупність усіх точок (x, y), при яких функція приймає дійсні значення, називають областю визначення функції $D(f)$.

Приклад.

Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання.

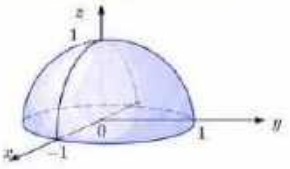
$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ – диск з центром у початку координат і радіусом 1.



3 ГРАФІК ФУНКЦІЇ ТА ЛІНІЇ РІВНЯ

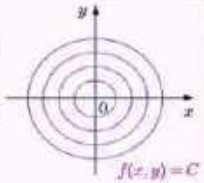
Графік функції двох змінних – поверхня у просторі.

Приклад: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – півсфера радіуса 1 над площиною XOY.



Лінії рівня

Криві на площині XOY, що мають рівняння $f(x, y) = C$. Це множина всіх точок, для яких функція приймає одне значення C.



4 ЧАСТИННИЙ ПРИРІСТ ФУНКЦІЇ

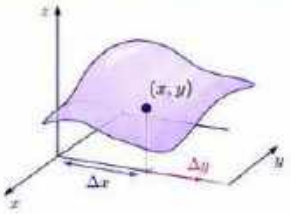
Нехай $z = f(x, y)$.

Частинний приріст по x (при сталому y):

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

Частинний приріст по y (при сталому x):

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$



5 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Частинна похідна по x (при сталому y):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

(y – стала)

Частинна похідна по y (при сталому x):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

(x – стала)

За означенням можна частинну похідну з похідною функції однієї змінної, тому використовуються правила диференціювання функції однієї змінної.

Приклад.

$z = x^2 y + \sin xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y\cos(xy)$ (y – стала)

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x\cos(xy)$ (x – стала)



6 ПОВНИЙ ПРИРІСТ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

Повний приріст функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Повний диференціал (головна лінійна частина повного приросту):

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

$dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – диференціали незалежних змінних.

Приклад.

$z = x^2 y + \sin xy$

$dz = (2xy + y\cos xy)\,dx + (x^2 + x\cos xy)\,dy$



7 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Означення.

Частинну похідну першого порядку по змінній x_m від частинної похідної першого порядку по змінній x_k називають частинною похідною другого порядку по змінних x_k та x_m.

Позначення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Приклад. $z = x^2 y + \sin xy$

Спочатку знайдено похідні першого порядку:

$f_x = 2xy + y\cos xy, \quad f_y = x^2 + x\cos xy$

Похідні другого порядку:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + y\cos xy) = 2y + y(-\sin xy)\cdot y = 2y - y^2 \sin xy$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x\cos xy) = -x^2 \sin xy - x\sin xy = -(x^2 + x)\sin xy$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + y\cos xy) = 2x + \cos xy + y(-\sin xy)\cdot x = 2x + \cos xy - xy\sin xy$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + x\cos xy) = 2x + \cos xy + x(-\sin xy)\cdot y = 2x + \cos xy - xy\sin xy$$

8 МІШАНІ ПОХІДНІ ТА ТЕОРЕМА ПРО ЇХ РІВНІСТЬ

Мішані частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

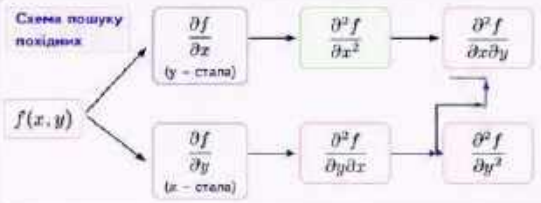
Називають мішаними частинними похідними.

Теорема (про рівність мішаних похідних).

Якщо функція $f(x, y)$ та похідні f_{xy} і f_{yx} неперервні в точці (x, y) та в деякому її околі, то

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Схема пошуку похідних



КОРОТКО ПРО ГОЛОВНЕ

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ задає поверхню у просторі.

Лінії рівня $f(x, y) = C$ – рівні функції на площині.

Частинні похідні – зміна функції за однією змінною при сталій іншій.

dz – Повний диференціал: $dz = f_x dx + f_y dy$ – лінійна частина приросту.

Якщо похідні неперервні, то мішані похідні рівні $f_{xy} = f_{yx}$.

ПЕРВІСНА ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1 ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ

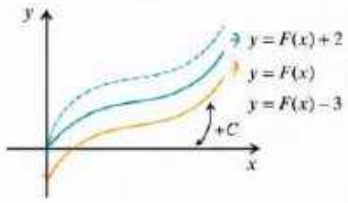
Означення

Функція $F(x)$ називається первісною для $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

$$F'(x) = f(x)$$

Приклад

$f(x) = 3x^2$ має первісні:
$F(x) = x^3;\ x^3 + 1;\ x^3 + 7;\ \ldots;\ x^3 + C$



Теорема

Будь-які дві первісні для заданої функції $f(x)$ відрізняються лише на сталий доданок C.

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Доведення (ідея)

Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні для $f(x)$. Тоді $F_1'(x) = F_2'(x)$, звідси $(F_1 - F_2)' = 0$ і тому $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Наслідок

Щоб знайти всі первісні достатньо знайти одну первісну $F(x)$, а інші маємо у вигляді $F(x) + C$.

2 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для заданої функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом.

- $\int$ – знак інтеграла
- $f(x)dx$ – підінтегральний вираз
- $f(x)$ – підінтегральна функція
- x – змінна інтегрування
- $F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$
- C – довільна стала інтегрування

Операція знаходження невизначеного інтеграла називається *інтегруванням*.

3 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. **Диференціал інтеграла**
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

2. **Інтеграл від диференціала**
$$\int df(x) = f(x) + C$$
(символи $\int$ і d взаємно знищуються)

3. **Винесення сталої за знак інтеграла**
$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

4. **Інтеграл від суми**
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4 ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int 1\,dx = x + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int \frac{dx}{a+x} = \ln|a+x| + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$



5 МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

а) Безпосереднє інтегрування

Використовує таблицю інтегралів і властивості інтегралів, можливі алгебраїчні перетворення.

Приклад:
$$\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

б) Підстановкою (заміна змінної)

Заміна $x = \varphi(t)$,
$dx = \varphi'(t)\,dt$

Алгоритм:
1. Заміна частини виразу
2. Знайти dx
3. Виразити інтеграл через t
4. Проінтегрувати
5. Повернутись до x

Див. формули для швидкого інтегрування в таблиці.

в) Частинами

Формула:
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Коли використовувати:
- $P(x)e^x$, $P(x)\sin x$, $P(x)\cos x$, $P(x)a^x$
- $P(x)\ln x$, $P(x)\operatorname{arctg} x$, $P(x)\arcsin x$

u – те, що спрощується при диференціюванні

г) За допомогою довідника

Спеціальні довідники містять велику кількість інтегралів від широкого класу функцій.

Приклад:
$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

ПАМ'ЯТАЙ!
- ✓ Первісна – обернена до похідної
- ✓ Інтеграл – множина всіх первісних
- ✓ Не забувай про сталу $+C$
- ✓ Інтегрування – це пошук первісної

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ І ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

ПЛАН

1. Інтегрування елементарних раціональних дробів
2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів
3. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Комплексним раціональним дробом називають відношення двох многочленів $P(x)$, $Q(x)$.

Правильний дріб: $\deg P(x) < \deg Q(x)$

Неправильний дріб: $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$

Елементарні дроби (найпростіші раціональні дроби):

$$\frac{A}{x-a} \qquad \frac{A}{(x-a)^k} \qquad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ D<0 \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$; $D = p^2 - 4q < 0$ (квадратичний тричлен не має дійсних коренів)

КОРИСНО ПАМ'ЯТАТИ

- $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
- $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
- C – довільна стала

1 ІНТЕГРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1) Дроби 1-го та 2-го типів

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C,\quad k \neq 1$$

Приклад. $\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C$

2) Дроби 3-го типу: $\int \frac{dx}{x^2+px+q},\ D<0$

1. Виділяємо повний квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

2. Заміна: $t = x + \frac{p}{2}$, $dt = dx$

3. $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

де $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Повертаємось до x:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

Приклад. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C$

Деякі неелементарні дроби з квадр. тричленом

1) $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2},\ D>0$

2) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (загальний вигляд)

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Інтегрування дробу типу $\frac{P_n(x)}{(ax^2+bx+c)^k}$ громіздке: зводиться до інтегралів від дробів типу (2).

2 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ДРОБІВ

1. Виділення цілої частини (якщо дріб неправильний)

Якщо $\deg P \geq \deg Q$, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},\quad \deg R < \deg Q$$

$S(x)$ – ціла частина (многочлен)

Приклад.

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = x + \frac{x+1}{x^2-1}$$

2. Розклад на суму елементарних дробів

1) Розкладаємо знаменник $Q(x)$ на прості множники:

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_kx+q_k)^{s_k},\quad D_i<0$$

2) Ставимо у відповідність кожному множнику найпростіші дроби:

Множник знаменника	Відповідні дроби
$(x-a)$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
$x^2+px+q,\ D<0$	$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^k,\ D<0$	$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$

3) Записуємо розклад: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = сума елементарних дробів

4) Знаходимо невідомі коефіцієнти методом невизначених коефіцієнтів (помноживши на $Q(x)$ та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x).

Приклад.

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A+C=3 \\ -B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$$

Отже, $\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}$

Після розкладу інтеграл зводиться до суми інтегралів від елементарних дробів.

3 ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1) Перетворення добутку у суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

Приклад. $\int \sin x\cos 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int[\sin 3x + \sin(-x)]\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 3x}{3} + \cos x\right) + C$$

2) Понижение степеня

а) m, n – парні (формули понижения степеня)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8},\dots$$

б) якщо серед m, n є непарне

відокремити один множник:

$$\sin^3 x = \sin^2 x\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$$

заміна $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$

або $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$

3) Тригонометрична підстановка

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$t = \tan\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\int \frac{2dt}{(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\,dt = \int \frac{1+t^2}{(t+1)^2}\,dt$$

ВАЖЛИВО ЗАПАМ'ЯТАТИ

Типи елементарних дробів

1) $\frac{1}{x-a}$
2) $\frac{1}{(x-a)^k}$
3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ D<0$
4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},\ D<0$

Алгоритм для раціональних дробів

1. Виділити цілу частину (якщо потрібно)
2. Розкласти знаменник на множники
3. Розкласти на суму елементарних дробів
4. Знайти невідомі коефіцієнти
5. Проінтегрувати кожен доданок

Тригонометричні інтеграли

- перетворення добутку у суму
- понижения степеня
- відокремлення множника та заміна
- універсальна підстановка $t = \tan\frac{x}{2}$

Формули Муавра та корені

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

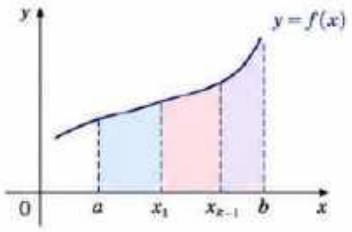
$$a_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ
та його властивості

1 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Задача про площу криволінійної трапеції



Фігура, обмежена лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції

$$S=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Задача про обсяг випущеної продукції

Нехай $f(t)$ – продуктивність (обсяг продукції за одиницю часу) у момент t.
Тоді обсяг продукції за час $[0;T]$ дорівнює

$$U=\int_0^T f(t)dt$$

2 ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай $f(x)$ – функція, задана на $[a;b]$.
Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин:
$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.
У кожному проміжку $(x_{k-1};x_k)$ виберемо точку c_k.

Інтегральна сума: $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми при $\max\Delta x_k\to 0$, яка не залежить від розбиття відрізка та вибору точок c_k, то вона називається визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a;b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

- a – нижня межа інтегрування
- b – верхня межа інтегрування
- $f(x)$ – підінтегральна функція
- x – змінна інтегрування

3 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1 Винесення сталого множника за знак інтеграла

$$\int_a^b C\,f(x)dx=C\int_a^b f(x)dx \quad (C=\text{const})$$

2 Інтеграл від суми функцій

$$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int_a^b f_n(x)dx$$

3 Зміна меж інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

4 Інтеграл з рівними межами

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

5 Адитивність за проміжком

Якщо $c\in[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

6 Монотонність

Якщо $f(x)\ge\varphi(x)$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b \varphi(x)dx$

7 Оцінка інтеграла

Якщо $m\le f(x)\le M$ на $[a;b]$, то $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

8 Теорема про середнє

Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$, то існує $c\in[a;b]$, така що

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

4 ІНТЕГРАЛ ІЗ ЗМІННОЮ ВЕРХНЬОЮ МЕЖЕЮ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНІЦА

Інтеграл із змінною верхньою межею

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

– функція від x

Теорема 1

Якщо $f(x)$ – неперервна, то

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$$

Теорема 2 (формула Ньютона–Лейбніца)

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Формула Ньютона–Лейбніца дозволяє легко обчислювати визначений інтеграл, зводячи задачу до знаходження первісної.

5 МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ

Якщо відрізок $[a;b]$ поділити на n рівних частин, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ і обрати середні точки c_k на $[x_{k-1};x_k]$, то наближене значення:

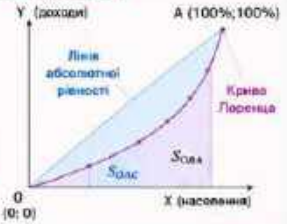
$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

6 ЗАСТОСУВАННЯ: ЕКОНОМІЧНИЙ ПРИКЛАД

Коефіцієнт Джині

Ступінь нерівності в розподілі доходів населення ілюструє крива Лоренца.
- На осі OX – населення від найбідніших до найбагатших.
- На осі OY – відсоток доходу, що належить їм.

Коефіцієнт Джині: $K=\frac{S_{ОВА}}{S_{ОАС}}$



ПІДСУМОК

Визначений інтеграл – потужний інструмент для обчислення площ, обсягів, накопичених величин і розв'язування економічних задач.

- Дає точні значення для неперервних функцій
- Має важливі властивості
- Широко застосовується на практиці

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика : підручник / за ред. В. С. Пономаренка. Харків : Фоліо, 2020. 669 с.

2. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з елементами інформаційних технологій : навчальний посібник. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. 232 с.

3. Лосєва Н. М., Губар Д. Є. Аналітична геометрія в інтерактивній формі: практичний курс : навч. посіб. для студентів. К. : Кафедра, 2014. 236 с.

4. Лосєва Н. М., Терменжи Д. Є., Пузирьов В. Є. Індивідуальні завдання з курсу «Аналітична геометрія» : навч.-метод. посібник. Вінниця : ДонНУ, 2015. 60 с.

5. Лосєва Н. М., Терменжи Д. Є. Практичні і лабораторні роботи з дисципліни «Аналітична геометрія». 1 семестр. Вінниця : ДонНУ, 2016. 100 с (електронний формат).

6. Скасків Л. В. Теорія чисел та основні структури сучасної математики : навчальний посібник. Ірпінь : Університет ДФС України, 2021. 70 с.

7. Філатова Л. Д. Вища та прикладна математика : навчально-методичний посібник. Харків : Нац. ун-т ім. Ярослава Мудрого, 2020. 194 с.

8. Фортуна В. В., Бескровний О. І. Вища та прикладна математика : навчальний посібник. Львів : Магнолія 2006, 2021. 647 с.

Навчальне видання

Ярова Оксана Анатоліївна,
Скасків Лілія Василівна,
Терменжи Дар'я Євгенівна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск	*Н. Б. Добрянська*
Редактор	*М. М. Грабарчук*
Форматування та комп'ютерна верстка	*Д. П. Завальніцька*

Здано до друку 17.09.2026. Формат 29,7 × 41,99
Папір офсетний № 1. Гарнітура «Times New Roman»
Ум. друк. арк. 7.3
Наклад 300 прим. Замовлення № 1195

Підготовлено до друку науково-організаційним відділом
Державного податкового університету
08205, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська область,
Україна

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 7669 від 20.09.2022*