

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

М. М. СЕМКО, М. Ф. КУЗЕННИЙ

**ГРУПИ З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ
НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП**

Київ 1996

УДК 519.41/47

Групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп /

Семко М. М., Кузенний М. Ф. — Ін-т математики НАН України, 1996.

— 61 с.

Розглядаються групи, у яких багато нормальних підгруп, що називається щільністю нормальності для підгруп. Вводяться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості груп по кожному з них. Наведено кілька окремих класів груп із найбільш загальним означенням щільності. Конструктивно описані локально ступінчасті групи G , у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A \leq B$, існує нормальна підгрупа N в G і $A \leq N \leq B$.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

Бібліогр.: 85 назв.

Відповідальний редактор доктор фізико-математичних наук професор
С. С. Левченко

© М. М. Семко, М. Ф. Кузенний, 1996

ВСТУП

У багатьох роботах (див., наприклад, [1 - 14]) вивчаються групи, в яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G . Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G , якщо для будь-якої підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. Групи такого роду, де V - властивість нормальності, вивчалися, наприклад, у роботах [7 - 14]. У згаданих роботах A завжди була власною немаксимальною підгрупою з B . Зрозуміло, що ця умова при вивченні таких груп необов'язкова.

В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які є значним узагальненням груп із робіт [9 - 14].

Робота складається з чотирьох параграфів. В параграфі 1 розглядаються групи, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами. Конструктивний опис локально ступінчастих груп такого роду дано в теоремі 1.1. В цьому ж параграфі описані метациклічні групи з трьома інволюціями (теорема 1.4).

У параграфі 2 вводяться означення восьми класів груп з умовами щільності нормальності для підгруп (означення 2.3). Теорема 2.1 встановлює замкненість введених класів груп за підгрупами та фактор-групами і виключення кожного з них класів в інший. Всі розглядувані класи груп належать класу $UHN[]$ -груп, тобто груп G , у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A - власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$. Теорема 2.2 описує всі типи ненормальних підгруп локально ступінчастої $UHN[]$ -групи. Теорема 2.3 присвячена характеристиці локально ступінчастих $UHN[]$ -груп.

Параграф 3 присвячений конструктивному опису деяких підкласів $UHN[]$ -груп, що мають самостійне значення і використовуються в подальших дослідженнях. У теоремі 3.1 конструктивно описані всі локально ступінчасті $UHN[]$ -групи Шмідта. Теорема 3.2 описує всі метациклічні $UHN[]$ -групи; а теорема 3.3 - локально ступінчасті мінімальні неметациклічні групи такого роду. У теоремі 3.4 описані локально ступінчасті $UHN[]$ -групи, які мають ненормальні мінімальні неметациклічні підгрупи.

Параграф 4 присвячений опису локально ступінчастих $\text{SH}[]$ -груп та їх підкласів. $\text{SH}[]$ -групою називається така група G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A \leq B$, існує нормальна в G підгрупа N і $A \leq N \leq B$. Теорема 4.1 дає конструктивний опис всіх локально ступінчастих $\text{SH}[]$ -груп з виділенням восьми типів груп такого роду. Теорема 4.2 показує, що всі виділені в означенні 2.3 підкласи $\text{SH}[]$ -груп вичерпуються дедекіндовими групами.

1. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

О в н а ч е н н я 1.1. Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G , якщо в G не існує такої підгрупи B , що $A < B < G$. Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G .

При $n > 0$ підгрупа A групи G називається n -максимальною в G , коли вона є максимальною підгрупою деякої $(n-1)$ -максимальної підгрупи A групи G .

Скінченні неодиначні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиначні та деякі нескінченні групи, наприклад, квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Л е м а 1.1. Нехай G - довільна група. Тоді справедливі наступні твердження:

1) група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $|G| \in \{1, p\}$, p - просте число;

2) $G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми максимальними підгрупами, тобто всі її максимальні підгрупи породжують власну підгрупу M групи G , коли $|g| = p^L$, p - просте число, $L \geq 0$; при $L = 0$ підгрупа M не існує; при $L > 0$ $M = \Phi(\langle g \rangle)$ - єдина максимальна підгрупа із G ;

3) $G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, тобто всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну підгрупу M із G , коли $|g| = p^L q^\beta$, p, q - різні прості числа, $L > 0$, $\beta \in \{0, 1\}$; при $L + \beta < 2$ підгрупа M не існує; при $L + \beta = 2$ $M = E$ - 2-максимальна підгрупа з G ; при $L + \beta > 2$ і $\beta = 0$ $M = \Phi(\Phi(G)) = G$ - 2-максимальна підгрупа з G ; при $L + \beta > 2$ і $\beta = 1$ M - максимальна підгрупа з G порядку $p^{L-1} q$.

Доведення. Необхідність. Твердження 1 леми очевидне. Покажемо, що при умовах 2 і 3 леми $|G| < \infty$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G = \langle g \rangle$, $|g| = \infty$ і $G = \langle g^2 \rangle \langle g^3 \rangle = \langle g^4 \rangle \langle g^5 \rangle$, що неможливо, і тому $|g| < \infty$. При $g \in \{1, p\}$ справедливі твердження 1 леми. Тому будемо вважати, що $|g| \notin \{1, p\}$. Звідси $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, де $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle$ — силовська p -підгрупа з G , p — просте число, $\langle y \rangle$ — її холлівське доповнення. Якщо $|y| = 1$, то твердження 2 та 3 леми справедливі. Нехай $|y| \neq 1$. Тоді в G існують щонайменше 2 максимальні підгрупи $M_1 = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$ і $M_2 = \langle x \rangle \times \langle y_1 \rangle$, де $\langle y_1 \rangle$ — власна максимальна підгрупа з $\langle y \rangle$. Зрозуміло, що $G = M_1 M_2$, і тому умова 2 леми не виконується. Якщо тепер $|y| \in \{1, q\}$ (q — просте число), то необхідність твердження 3 доведена.

Нехай $|y| \notin \{1, q\}$. Тоді $\langle y \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$, $|g_1| = q^{\beta}$, q — просте число, $q \neq p$, $\beta > 0$ і $|\Phi(\langle g_1 \rangle) \langle g_2 \rangle| > 1$. Звідси $\langle x \rangle$, $\langle g_1 \rangle$, $\langle g_2 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G , що породжують всю групу G . А це неможливо за умовою леми. Отже, $|g_2| = 1$, $|g_1| = q$ в умовах твердження 3 леми.

При $|g| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують $\Phi(G)$. При $|g| = q$ $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle g_1 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G і тому вони породжують максимальну підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle g_1 \rangle$ із G . Звідси $|M| = p^{\alpha-1} q$. Необхідність доведена.

Достатність. Достатність для твердження 1 леми очевидна. Нехай G — група типу 2 леми. Тоді $\Phi(G)$ — єдина власна максимальна підгрупа з G . Звідси $M = \Phi(G)$ і достатність доведена. Нехай G — група типу 3 леми. У цьому випадку $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $|y| = q^{\beta}$, $\beta \in \{0, 1\}$. При $\alpha = 1$ $|G| = pq$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G співпадають з єдиничною підгрупою E . Тому $M = E$. Нехай тепер $\alpha > 1$. Тоді $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle y \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи із G , які породжують підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$, $[G:M] = p$. Звідси M — максимальна підгрупа з G . Достатність для груп типу 3 леми доведена. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1. Група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $|G| \in \{1, p\}$, p — просте число.

Доведення випливає з леми 1.1.

Лема 1.2. Нехай G - довільна група, що має власні немаксимальні підгрупи, які всі породжують власну підгрупу M групи G . Тоді $M \triangleleft G$, для будь-якого примарного елемента x із $G \setminus M$ $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G , $G = \langle g, x \rangle$, де g - будь-який елемент із $G \setminus \langle x \rangle$, $|G| \notin \{1, r\}$, r - просте число і виконується тільки одне з тверджень:

1) M - 2-максимальна підгрупа з G , G - циклічна група порядку p^k , $k > 1$, або $|G| = pq$, p, q - не обов'язково різні прості числа;

2) $M = \Phi(\langle x \rangle)$, G - періодична група;

3) M - максимальна підгрупа циклічної групи G , $|G| = p^k q$, p і q - різні прості числа, $k > 1$, $M_1 = p^{k-1} q$;

4) M - максимальна підгрупа нециклічної групи G , $G = M \cdot \langle x \rangle$, $M \cap \langle x \rangle = \Phi(\langle x \rangle)$, для будь-якого примарного елемента g із $G \setminus M$ $\langle g \rangle$ - максимальна підгрупа із G , $\hat{\pi}(\langle x \rangle) = \hat{\pi}(\langle g \rangle)$.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми. Покажемо спочатку, що $M \triangleleft G$. При $|M| = 1$ це очевидно. Тому будемо вважати, що $|M| > 1$. Якщо $M = \langle a \rangle$, $|a| = r^k$, r - просте число, $k > 0$, то за твердженням 2 леми 1.1 всі власні підгрупи з M породжують $\Phi(M)$. Але M містить елемент c такий, що $c \notin \Phi(M)$ і $\langle c \rangle$ - власна немаксимальна підгрупа з G . Звідси $M = \langle c \rangle$ і тому для будь-якого z із G підгрупа $z^{-1} \langle c \rangle z$ - власна немаксимальна з G . Таким чином, $z^{-1} c z \in M$ і, значить, $M \triangleleft G$.

Нехай тепер M - нециклічна група. Тоді $M = \langle x_i \rangle$, i - елемент множини індексів I , $\langle x_i \rangle < M$. Звідси $\langle x_i \rangle$ - власна немаксимальна підгрупа з G і тому для будь-якого z із G $z^{-1} x_i z \in M$ і, значить, $M \triangleleft G$.

Нехай G - циклічна група. Якщо G - примарна група, то для G справедливо твердження 3 леми 1.1 і вірне твердження 3 розглядуваної леми.

Нехай тепер G - нециклічна група і $x \in G \setminus M$. Тоді $G > \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $x \notin M$ і тому $\langle x \rangle$ не породжується своїми власними підгрупами. За лемою 1.1 $\langle x \rangle$ - примарна, максимальна підгрупа з G . Для будь-якого елемента g із $G \setminus \langle x \rangle$ $\langle g, x \rangle$ не може бути власною підгрупою з G і, таким чином, $G = \langle g, x \rangle$. Якщо M - немаксимальна підгрупа з G , то $\Phi(\langle x \rangle) = M \cap \langle x \rangle$, $[M \cdot \langle x \rangle] = |M| \cdot r$, r - просте число. З умови $G > M \cdot \langle x \rangle$ і максимальності $\langle x \rangle$ в G випливає $M > \langle x \rangle$ і тому $M = \Phi(\langle x \rangle)$. Оскільки x - довільний елемент із $G \setminus M$, то G - періодична група і для G виконується твердження 2 леми. Якщо ж M - макси-

мальна підгрупа з G , то для G виконується твердження 4 леми. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 1.2 [1]. Група G називається локально ступінчастою, коли будь-яка її неодиначна скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.

Н а с л і д о к 1.2. Локально ступінчасті групи. G з леми 2 є скінченими розв'язними групами.

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми 1.2. Якщо G - циклічна група, то твердження наслідку очевидне. Нехай G - нециклічна група. Тоді можна вважати, що для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.2. Покажемо, що $|G| < \infty$. Дійсно, нехай $|G| = \infty$. Тоді за лемою 1.2 G містить такий елемент x , що $|x| = p^{\lambda}$, $\lambda > 0$, p - просте число, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з $G = \langle g, x \rangle$. Із означення 1.2 легко випливає, що G має нескінченний ланцюг нормальних підгруп G_i , $G_i \triangleleft G_{i+1}$. Зрозуміло, що знайдеться таке i , для якого $|G/G_i| > p^{\lambda}$. Звідси $G_i \langle x \rangle < G$, що суперечить максимальності підгрупи $\langle x \rangle$ у групі G . Таким чином, $|G| < \infty$ і G має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За основною теоремою з [15] G - розв'язна група. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 1.1. Локально ступінчасті групи G , що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p - просте число) і скінченими розв'язними 2-породженими групами, в яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M і G ізоморфна групі одного з типів:

1) G - циклічна група порядку p^{λ} , p - просте число, $\lambda > 0$, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G ;

2) $|G| = pq$, p і q - необов'язково різні прості числа, $M = B$ - 2-максимальна підгрупа з G ;

3) G - група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G ;

4) G - циклічна група порядку $p^{\lambda}q$, p і q - різні прості числа, $\lambda > 1$, M - максимальна підгрупа із G , $|M| = p^{\lambda-1}q$;

5) $G \cong \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = p^{\lambda}$, $|z| = p$, $\lambda > 1$, $[x, z] \in \langle x \rangle^{p^{\lambda-1}}$, $|G/G'| > 4$.

$M = \langle x^r \rangle \times \langle z \rangle$ - максимальна підгрупа з G ;

6) $G = R \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r^d > 2$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $d + \beta > 2$, r і q - різні прості числа, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G , $M = R \rtimes \langle x^q \rangle$ - максимальна підгрупа з G .

Доведення. Необхідність. Якщо $|G| \in \{1, p\}$ (p - просте число), то твердження теореми очевидне. Нехай $|G| \notin \{1, p\}$. За наслідком 1.1 G має власні немаксимальні підгрупи і задовольняє умову леми 1.2, за твердженням якої всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну нормальну підгрупу M і вірне одне з 4 тверджень згаданої леми. За наслідком 1.2 G - скінченна розв'язна 2-породжена група. Якщо $|G| = pq$, де p і q - не обов'язково різні прості числа, то $M = E - 2$ -максимальна підгрупа з G і, значить, G - група типу 1 чи 2 теореми.

Нехай G - циклічна група. Тоді за твердженням 3-леми 1.1 $|G| = r^d q$, p і q - різні прості числа, $d > 1$, M - максимальна підгрупа з G , $|M| = r^{d-1} q$ і G - група типу 4.

Нехай G - нециклічна група. Тоді для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 1.2, за яким G містить елемент x такий, що $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q - просте число, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з G . Розглянемо два можливі випадки: 1) G - нільпотентна група; 2) G - не нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку $G = Q \times D$, де Q - слівська q -підгрупа з G , D - її холлівське доповнення в G . Зрозуміло, що $Q \rtimes \langle x \rangle$. Оскільки підгрупа $\langle x \rangle$ максимальна в G , то $[G : \langle x \rangle]$ - просте число і тому $|D| \in \{1, r\}$ (r - просте число). При $|D| = r$ і $Q = \langle x \rangle$ G - циклічна група, що суперечить вибору G . Звідси $|D| = 1$, $G' = Q$, $[G : \langle x \rangle] = q = r$ і, значить, G - примарна група, що має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За теоремою 12.5.1 із [16] G - група типу 5 розглядуваної теореми, у якій $[G : G'] > 4$, або $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^d$, $|b| \in \{2, 4\}$, $d > 1$, $G' \neq 1$. При $d = 2$ G - неабелева група порядку 8, що не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, ізоморфна групі кватерніонів і тому G є групою типу 3 теореми, $M = \Phi(G)$ - 2-максимальна підгрупа з G .

Нехай $d > 2$ і G не є групою типу 5 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою 12.5.1 із [16] G має власні циклічні підгрупи порядку 2 та 4, які немаксимальні в G і породжують групу G , що неможливо. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Розглянемо два випадки: 2.1) $\langle x \rangle \triangleleft G$; 2.2) $\langle x \rangle \not\triangleleft G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $[G:\langle x \rangle] = r$, r - просте число, $r \neq q$. При $|x| = q$ $M = E$ і G - група типу 2. Нехай $|x| > q$. Тоді $G = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, $|y| = r$, $\langle y \rangle$ - ненормальна силовська r -підгрупа в G , $\langle y \rangle$ - немаксимальна підгрупа в G . Позначимо через N підгрупу в G , породжену всіма силовськими r -підгрупами із G . Тоді $N \triangleleft G$. Покажемо, що $G = N$. Дійсно, нехай $G \neq N$. Тоді за лемою Фраттіні (див. ,наприклад; [17]) $G = ND$, де $D = N_q(\langle y \rangle)$. Звідси $D = T \times \langle y \rangle$, де $T = D \cap \langle x \rangle$. Відомо, що $\langle x \rangle = TT_1$, де T_1 - силовська q -підгрупа в N . Але тоді $T = \langle x \rangle$ і G - нільпотентна група, що не так. Таким чином, $G = N$, а це суперечить умові теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. У цьому випадку $N_q(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ - максимальна підгрупа в G . Звідси $\langle x \rangle$ - силовська q -підгрупа в G , що належить центру свого нормалізатора. За теоремою 14.3.1 із [16] $G = R \lambda \langle x \rangle$, де R - коллізійне доповнення $\langle x \rangle$ в G . Оскільки $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа в G , то R - мінімальна нормальна підгрупа із G . Відомо, що $|R| = r^{\alpha} > 2$, r - просте число. При $\alpha + \beta = 2$ група G типу 2 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha + \beta > 2$. Ясно, що R - елементарна абелева група, всі власні циклічні підгрупи якої є власними немаксимальними підгрупами в G . Зрозуміло також, що підгрупа $\langle x^q \rangle$ немаксимальна в G і тому $x^q \in M$. Покажемо, що $M \geq R$. Дійсно, при $\beta > 1$ R - власна немаксимальна підгрупа в G і тому R належить M . При $\beta = 1$ $\alpha > 1$ і R породжується своїми власними циклічними підгрупами, які за попереднім зауваженням належать M . Звідси $M \geq R$. За умовою теореми $G > M$, $M = R \lambda \langle x^q \rangle$ - максимальна підгрупа в G і, таким чином, G - група типу 6 теореми. Випадок 2.2 повністю розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що в групах G порядку 1 чи r (r - просте число) взагалі немає власних немаксимальних підгруп і тому G не породжується такими підгрупами. Будемо вважати, що $|G| \notin \{1, r\}$ і, таким чином, G - група одного з типів 1 - 6 розглядуваної теореми. За твердженням леми 1.1 група G типу 1 чи 4 не породжується своїми власними підгрупами і тому для груп цих типів достатність доведена.

В групі G типу 2 всі власні немаксимальні підгрупи співпадають з одиничною підгрупою E , а в групі G типу 3 всі підгрупи такого роду співпадають з $\Phi(G)$. Звідси випливає достатність для цих типів груп.

Нехай G - група типу 5 і M_1 - підгрупа з G , породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G . Зрозуміло, що $x^p \in M_1, z \in M_1$. Звідси $M_1 \langle x^p \rangle x \langle z \rangle = M$ - максимальна підгрупа із G . Покажемо, що $M_1 = M$. Нехай $M_1 \neq M$. Тоді існує власна немаксимальна підгрупа X із G така, що $MX = G$. Значить, X містить елемент u , а M - елемент a такі, що $x = au$. Ясно, що $a = x^{ip} z^j$. Звідси $x = x^{ip} z^j u$ і тому $x^{-ip} x = z^j u$. Зрозуміло, що $\{x^{-ip} x\} = \{x\} = p^k, k > 1$. Оскільки $z^j \in \{1, p\}$, то з умови $[G:G'] > 4$ маємо $|u| = |x|$. Але тоді $\langle u \rangle$ - максимальна підгрупа з G , що суперечить вибору X . Це означає, що $M_1 = M$ і достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G - група типу 6. Оскільки $\alpha + \beta > 2$, то всі власні підгрупи з R є власними немаксимальними підгрупами з G і $\langle x^q \rangle$ - єх власна немаксимальна підгрупа з G . Тому $N \geq M$ - максимальна підгрупа із G , породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G . Покажемо, що $N = M$. Справді, якщо це не так, то $N = G = M \langle u \rangle$, де u - q -елемент. Легко бачити, що $\langle x^q \rangle \langle u \rangle$ - силовська q -підгрупа з G . Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle u \rangle$ - власна немаксимальна підгрупа з G . Будь-яка силовська q -підгрупа із G циклічна і тому $[x^q, u] = 1, |x^q u| = |x|$. Звідси $|u| > |x^q|$, значить, $|u| = |x|$. Таким чином, $\langle u \rangle$ - силовська q -підгрупа з G , яка максимальна в G , що не так і тому $N = M$. Достатність для груп типу 6 доведена. Теорема доведена.

Означення 1.3 [16]. Група G , у якій всі підгрупи нормальні, називається дедекіндовою групою.

Твердження 1.1 [16]. Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q - група кватерніонів, D - елементарна абелева 2-група, A - періодична абелева група без інволюцій.

Для дедекіндових груп G справедливі твердження:

- 1) якщо G' містить елемент нескінченного порядку чи 8 порядку, то $G' = 1$;
- 2) циклічні 2-підгрупи G порядку більше двох містять G' .

Т е о р е м а 1.2. Нехай G - група, що містить нормальні підгрупи

N_1 і N_2 , для яких $N_1 \cap N_2 = I$ і G/N_1 та G/N_2 - дедекіндові групи. Тоді G - дедекіндова група, якщо в ній виконуться хоча б одна з умов:

1) N_1 - періодична група без інволюцій, N_2 - група без інволюцій, або група, що містить елемент порядку 8;

2) N_1 - неперіодична група без інволюцій або з елементами порядку 8, N_2 - група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8.

Доведення. Нехай G , N_1 і N_2 задовольняють умови теореми. Якщо $G' = I$, то твердження теореми очевидне. Нехай $G' \neq I$. Оскільки $N_1 \cap N_2 = I$, то можливі два випадки: 1) $N_1 \not\subseteq G'$; 2) $N_1 \subseteq G'$.

Випадок 1. У цьому випадку G/N_1 - неабелева група, а тому періодична гамільтонова група, яка за твердженням 1.1 не містить елементів порядку 8. Звідси за умовою теореми N_2 - періодична група, що не містить інволюцій. Зрозуміло, що $N_2 \cap G' = I$, звідки $N_2 \subseteq Z(G)$. Тепер G/N_2 - неабелева група, а значить, періодична нільпотентна гамільтонова група. Таким чином, маємо, що і G - періодична нільпотентна група. Нехай D - силовська 2-підгрупа з G . Тоді $D \cap N_2 = I$, D - гамільтонова 2-група і $G = D \times A$, де A - періодична нільпотентна група без інволюцій. Оскільки G/N_1 і G/N_2 - гамільтонові групи, $N_1 \cap N_2 = I$, то $G' = 2$ -група. Звідси $A' = I$. За твердженням 1.1 G - гамільтонова група. Лема у випадку 1 доведена.

Випадок 2. В цьому випадку G/N_2 - неабелева група, а тому вона гамільтонова нільпотентна періодична група, у якій $N_1 \times N_2/N_2$ - періодична абелева група без інволюцій. Звідси $N_1 \times N_2/N_2$ не може містити комутант групи G/N_2 . Таким чином, $G' \not\subseteq N_2$. Суперечність. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.3. Якщо група G містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 такі, що $N_1 \cap N_2 = I$ і G/N_i - дедекіндова група ($i \in \{1, 2\}$), N_i - локально циклічна група з силовською 2-підгрупою D , для якої $|D| \notin \{2, 4\}$, то G - дедекіндова група.

Наслідок випливає з теореми 1.2.

Т е о р е м а 1.3. Нехай G - група, N - її нормальна підгрупа і G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів, тобто для будь-якого

елемента g із G і всіх елементів x із N в G існує елемент a такий, що $g^{-1} x g = a^{-1} x a$. Тоді $G = N \cdot C_G(N)$. Зокрема, при $Z(N) = I$ $G = N \times C_G(N)$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді для елемента g із G та будь-якого x із N маємо $g^{-1} x g = a^{-1} x a$, де $a \in N$. Звідси $ag^{-1} xga = x = u^{-1} x u$, де $u = ga^{-1}$, $u \in C_G(N)$, і тому $g = ua$ і g належить добутку $NC_G(N)$ і $G = NC_G(N)$. Зрозуміло, що $N \cap C_G(N) \leq Z(N)$. Якщо $Z(N) = I$, то $G = N \times C_G(N)$. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1.4. Нехай G - група, N - така її 2-породжена нормальна підгрупа, що $G' \cap N = N' / Z(N)$. Тоді $G = N \cdot C_G(N)$.

Доведення. Нехай $G, N = \langle a, b \rangle$ задовольняють умови леми. Тоді $G' \cap N = \langle c \rangle < Z(N)$, $c = [a, b]$. Нехай g - елемент із G . Ясно, що $g^{-1} a g = a c^i$, $g^{-1} b g = b c^j$. Звідси $g^{-1} c g = (g^{-1} a g)^{-1} (g^{-1} b g)^{-1} (g^a g) = (g^{-1} b g) = a^{-1} c^i b^{-1} c^j a c^i b c^j = c$, а значить, $[c, g] = I$.

Нехай $d = a^{-1} b^{-1} a^2 b^2$. Оскільки $\langle c \rangle < Z(N \langle g \rangle)$, то за відомими комутантними співвідношеннями (див., наприклад, [16]) $[d^{-1} g, a] = I$, а значить, $d^{-1} g \in C_G(N)$. Тому група G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів. За теоремою 1.3 $G = NC_G(N)$. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.5. Нехай G - група з центральним циклічним комутантом G' . Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' \cap N' = N'$ маємо $G = NC_G(N)$.

Н а с л і д о к 1.6. Якщо G - група з комутантом порядку p і N - будь-яка її 2-породжена неабелева p -підгрупа, то $G = NC_G(N)$.

О з н а ч е н н я 1.4 [18]. Підгрупа $w(G)$ групи G , породжена всіма елементами з G , що мають порядком просте число, називається нижнім шаром групи G .

Т в е р д ж е н н я 1.2 [18]. Нижній шар групи G є характеристичною і тому нормальною підгрупою групи G .

Т в е р д ж е н н я 1.3 (теорема Б із [4]). В скінченній 2-групі G , клас нільпотентності якої не більше 2, кількість інволюцій

тоді і тільки тоді рівна 3, коли G - група одного з наступних класів:

1) G - нециклічна метациклічна група, яка відрізняється від групи кватерніонів і групи дієдра порядку 8;

2) $G = A \rtimes B$, де кожна з підгруп A і B або циклічна, або ізоморфна групі кватерніонів 8-го порядку, причому інволюція з B лежить у $Z(G)$;

3) $G = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = a^2$, $\{a, c\} = b^2$, $\{b, c\} = c^2$, $\{a, b\} = I$;

4) $G = \langle a, b, c, d \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = b^2$, $d^2 = a^2 b^2$, $\{a, b\} = \{c, d\} = I$, $\{a, c\} = a^2$, $\{a, b\} = \{a, d\} = \{b, c\} = a^2 b^2$, $\{b, d\} = b^2$.

Л е м а 1.3. Метациклічна 2-група G тоді і тільки тоді має три інволюції, коли вона нециклічна і не має підгрупи кватерніонів та групи дієдра порядку 8.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Зрозуміло, що G - нециклічна група. В групі дієдра порядку 8 п'ять інволюцій і тому G не містить групи дієдра порядку 8. Припустимо, що G містить підгрупу кватерніонів Q . Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^2 a b = a^2$, r - шле непарне число. Оскільки Q - абелева група, то $G' \neq I$ і $\alpha > 1$. Нехай $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. За теоремою про ізоморфізм груп $Q/\langle x \rangle$ - циклічна група. Звідси $|x| = 4$, $Q = \langle x, y \rangle$. Таким чином, існує підгрупа $A = \langle a \rangle Q = \langle a \rangle \langle y \rangle$, $|y| = 4$, $y^2 = x^2 = a^{2^{\alpha-1}}$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$, $[A : \langle a \rangle] = 2$, $\langle a \rangle$ - максимальна підгрупа з A . За теоремою 12.5.1 із [16] G не може бути групою кватерніонів порядку 8, чи узагальненою групою кватерніонів. Звідси $|G| > 8$. Знову за теоремою 12.5.1 із [16] A - група кватерніонів порядку 8, або узагальнена група кватерніонів. Звідси $w(A) = 2$ і тому G містить τ , $v\tau = 2$, $\langle v \rangle \cap A = I$. Значить, існує підгрупа $B = A \rtimes \langle v \rangle$. Оскільки $B/\langle a \rangle$ - елементарна абелева група порядку 4 і $G/\langle a \rangle$ - циклічна, то дійшли до суперечності. Отже, G не містить групи кватерніонів порядку 8. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - нециклічна метациклічна 2-група, що не містить підгруп кватерніонів та групи дієдра порядку 8. Тоді $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\langle a \rangle \trianglelefteq G$. Нехай $\langle a \rangle$ - максимальна циклічна підгрупа з G . Тоді G містить $A = \langle a \rangle$ і $[A : \langle a \rangle] = 2$. Значить,

A - нециклічна група з максимальною циклічною підгрупою $\langle a \rangle$. За теоремою 12.5.1 із [16] $A = \langle a \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|y| = 2$, $[A:A'] > 4$, $w(A) = w(\langle a \rangle) \rtimes \langle y \rangle$, $|w(A)| = 4$. Покажемо, що $w(A) = w(G)$. Дійсно, нехай це не так. Тоді G/A містить v , $|v| = 2$, і G містить підгрупу $A \rtimes \langle v \rangle$. Звідси маємо, що $B/\langle a \rangle$ - елементарна абелева група порядку 4, яка міститься в циклічній групі $G/\langle a \rangle$. Суперечність. Тому $w(A) = w(G)$ і, значить, G містить три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.7. Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:

1) G - нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку 8, $G' \leq Z(G)$;

2) $G = U \rtimes X$, де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою, чи групою кватерніонів, $|U| > 1$, $|X| > 1$, $w(X) \leq Z(G)$, $[U, X] \leq w(U)$;

3) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, x] = a^2 b^2$, $[b, x] = b^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді вона задовольняє умови твердження 1.3, за яким G - група одного з типів 1 - 4 згаданого твердження. Нехай G - група типу 1 твердження 1.3. За лемою 1.3 G не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8 і тому G - група типу 1 наслідку. Нехай G - група типу 2 твердження 1.3. Тоді $G' = U \rtimes X$, де U, X - неодмінні циклічні 2-групи, чи групи кватерніонів. Оскільки $G' \leq Z(G)$, то $w(X) \leq Z(G)$. Підгрупа $X = \langle x, y \rangle$ - циклічна, чи група кватерніонів. Якщо $|X| = 2$, то $G = U \rtimes X$ - група типу 2. Нехай $|X| > 2$. Якщо U та X одночасно циклічні, то G - група типу 1 наслідку. Нехай X - циклічна група. Звідси U - нециклічна група і, значить, група кватерніонів. Із умови $G' \leq Z(G)$ випливає, що $[U, X] \leq U \cap Z(G) = w(U)$ і знову G - група типу 2 наслідку.

Нехай тепер X - нециклічна група. При нециклічності U , як і раніше, $[U, X] \leq w(U)$ і знову G - група типу 2 наслідку. Нехай $U = \langle u \rangle$ - циклічна група, $|u| = 2^A$. При $A = 1$ $G = U \rtimes X$ і G - група типу 2. Нехай $A > 1$. Тоді G містить підгрупи $\langle u \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $\langle u \rangle \rtimes \langle y \rangle$ з центральним комутантом. Оскільки $w(X) = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \leq Z(G)$, то $\langle x \rangle$ та $\langle y \rangle$ індукують на $\langle u \rangle$ автоморфізм порядку 2. За відомими кому-

тантиними співвідношеннями (див., наприклад, [16]) $[u, x]^2 = [u, x^2] = 1$, $[u, y]^2 = [u, y^2] = 1$. Звідси $\{u, X\} \leq w(\langle u \rangle)$ і знову G - група типу 2 наслідку.

І нарешті нехай G - група типу 3 чи 4 твердження І.3. Можна вважати, що G - метациклічна група. Легко показати, що в групах типу 3 згаданого твердження $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і тому G - група типу 3 наслідку.

Аналогічно в групах G типу 4 твердження І.3 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і $G = \langle a, b, c, d \rangle$. Покладемо $x = ad$, $y = bc$ і одержимо, що G - група типу 4 наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що G - скінченна нециклічна 2-група і $G \leq Z(G)$. Покажемо, що G містить три інволюції. За лемою І.3 в групах G типу І точно три інволюції. Групи G одного з типів 2 - 4 наслідку є групами відповідно кожного з типів твердження І.3. За цим твердженням в G точно три інволюції. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а І.4. Метациклічні 2-групи з трьома інволюціями мають вигляд $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^4ab = a^r$ (r - ціле непарне число) і вичерпуються групами типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $r = 1$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $r = -1$;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 1$, $r = -(1+2^k)$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $r = 1+2^k$, $1 < k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$;
- 5) $G = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^k} \rangle$, $r = 1+2^k$, $1 < k < \alpha < \alpha - \beta$, $|d| = 2^2$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $| \langle a \rangle \cap \langle b \rangle | = 2$, $r = -1$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $| \langle a \rangle \cap \langle b \rangle | = 2$, $r = -(1+2^k)$, $1 < k < \alpha - 1$, $\beta > \alpha - k + 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - метациклічна 2-група з трьома інволюціями. Тоді за лемою І.3 $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - нециклічна метациклічна група, що не містить підгруп кватерніонів та груп дієдра порядку 8, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^4ab = a^r$, r - ціле непарне число. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\langle a \rangle$ - максимальна циклічна підгрупа з G . Оскільки G - нециклічна група, то $G \geq A \geq \langle a \rangle$, де A - нециклічна підгрупа з G , $[A: \langle a \rangle] = 2$. Тоді A - нециклічна 2-група з циклічною максимальною підгрупою $\langle a \rangle$, яка не

містить підгрупи кватерніонів та групи дієдра порядку 8. За теоремою І2.5.І із [16] $A' = I$ або $[A:A'] > 4$ і танки $A = \langle a \rangle \ltimes \langle u \rangle$, $|u| = 2$, $w(A) = w(\langle a \rangle) \times \langle u \rangle \trianglelefteq G$. Якщо $G' \not\trianglelefteq I$, то без порушення загальності $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ - група типу 3 теорема.

Нехай тепер $G' \not\trianglelefteq I$. Тоді $\mathcal{L} > I$. Якщо $G = A$, то $A' \neq I$, A не містить груп дієдра порядку 8. Отже, $\mathcal{L} > 2$, $u^{-1}au = a^{1+2^{k-1}}$. Покладемо $b = u$ і тоді G - група типу 4 розглядуваної теореми. Нехай $G \neq A$, значить, $[G:\langle a \rangle] > 2$. В роботах [20 - 22] вивчені всі нециклічні метациклічні 2-групи $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \trianglelefteq G$, $[G:\langle a \rangle] > 2$, які при умові $G' \not\trianglelefteq I$ можуть бути одного з типів 2 - 7 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - група одного з типів І- 7 теорема. Легко бачити, що G - нециклічна метациклічна 2-група. Покажемо, що G містить точно три інволюції, або іншими словами, $w(G) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle$ - елементарна абелева група порядку 4, де $\langle c \rangle = w(\langle a \rangle)$, $w(\langle a \rangle) \leq Z(G)$, $|c| = 2$, $|v| = 2$. За лемою І.3, досить показати, що G не містить ні підгруп кватерніонів, ні групи дієдра порядку 8. Для груп типу І теорема не зрозуміло. Нехай G - група одного з типів 2 - 7 і G містить неабелеву підгрупу Q порядку 8. Покладемо $A = \langle a \rangle Q$ і $\langle K \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. Оскільки $A/\langle a \rangle$ - підгрупа циклічної групи $G/\langle a \rangle$, то $A/\langle a \rangle$ - циклічна група. Звідси $|x| = 4$ і тому $[A:\langle a \rangle] = 2 = [Q:\langle K \rangle]$. Ясно, що $A = \langle a \rangle \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$, $z^2 \in \langle a \rangle$ і $A' \neq I$. В групах G кожного з типів 2 - 4 $A = \langle a \rangle \ltimes \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = w(\langle b \rangle)$. В групі G типу 2 $w(\langle b \rangle) \leq Z(G)$ і тому $A' \neq I$. В групі G типу 3 та 4 при $\beta \neq k - k$ $w(\langle b \rangle) \leq Z(G)$ і $A' = I$. Тому G - група типу 3 чи 4 і $\beta = \mathcal{L} - k$.

Нехай G - група типу 4. Тоді з умови $I < k < \mathcal{L}$ і за теоремою І2.5.І із [16] $A' \leq \langle a^k \rangle$ і тому $A' = \langle a^{2^{k-1}} \rangle$ і A не містить неабелевих підгруп порядку 8, що суперечить вибору A .

В групах типу 3 при $\mathcal{L} - k = I$ $\beta > I$, що неможливо. Тому $\mathcal{L} - k > I$. Але тоді $\langle z \rangle = w(\langle b \rangle) \leq \langle b^2 \rangle$. Зрозуміло, що $b^2 ab^2 = a^{r^2}$, де $r^2 = (1+2^k)^2 = 1+2^{k+1}+2^{2k} = 1+2^{k+1}(1+2^{k-1}) = 1+2^{k+1}$, де $(3,2) = 1$. Звідси $b^2 ab^2 = a^{1+2^{k+1}}$. Тепер підгрупа $G_1 = \langle a \rangle \ltimes \langle b^2 \rangle$ може бути групою лише типу 4, в якій A не містить неабелевих підгруп порядку 8, що неможливо.

Нехай тепер G - група одного з типів 5 - 7 теорема. В групі G кожного з цих типів $[G:\langle a \rangle] > 2$, $\mathcal{L} > 2$, $|A| > 8$. У групі типу 5 $A' \leq \langle a^2 \rangle$ і знову за теоремою І2.5.І із [16] A - абелева група, чи

група Міллера - Морено, яка не містить неабелевої підгрупи порядку 8. В групах типів 6 чи 7 $\langle z \rangle = \langle b^{2^{k-2}} \rangle \leq Z(G)$ і тому $A^1 = I$, що неможливо. Отже, наше припущення в усіх випадках приводить до суперечності і тому в G точно три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Н а с л і д о к 1.8. Метациклічні групи $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ кожного з типів 1 - 7 теореми 1.4 не містять неабелевих підгруп порядку 8, але містять підгрупу $A = \langle a \rangle \lambda \langle v \rangle$, яка може бути неабелевою групою лише в групах G типу 3 чи 4 згаданої теореми при $\beta = 2 - k$ і A - група Міллера - Морено.

Наслідок випливає із леми 1.3 та доведення достатності теореми 1.4.

Н а с л і д о к 1.9. Неодиначні метациклічні 2-групи G з числом інволюцій відмінним від числа 3 вичерпуються групами типів:

- 1) G - неодиначна циклічна 2-група, в G одна інволюція;
- 2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ - група кватерніонів, $|a| = 2^k$, $|b| = 4$, $k > 1$, $a^{2^{k-1}} = b^2$, $b^4 a b = a^{-1}$, в G одна інволюція;
- 3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ - група дієдра, $|a| = 2^k$, $|b| = 2$, $k > 1$, $b^2 a b = a^{-1}$, в G не менше 5 інволюцій;
- 4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ - квазідієдральна група, $|a| = 2^k$, $k > 2$, $|b| = 2$, $b^2 a b = a^{-1} z^{2^{k-1}}$, в G не менше 5 інволюцій.

Доведення. Необхідність. Нехай G - неодиначна метациклічна 2-група. Тоді вона має центральну інволюцію c . Якщо c - єдина інволюція з G , то за теоремою 12.5.1 із [16] G - група типу 1 чи 2 розгляданого наслідку. Тому будемо вважати в подальшому, що в G інволюцій більше 3. За лемою 1.3 та попереднім $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ містить неабелеву підгрупу порядку 8, $|a| = 2^k$, $|b| = 2^l$, $\langle a \rangle \trianglelefteq G$, $\langle a \rangle$ - максимальна циклічна підгрупа з G , $G > Q$, $Q' \neq I$, $|Q| = 8$, $k > 1$, $\beta > 0$. Ясно, що $G \geq A = \langle a \rangle Q$, $A \cap Q = \langle z \rangle$, $|A| = 4$, $Q = \langle x, y \rangle$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle \langle y \rangle = \langle a \rangle \langle z \rangle$, $[A : \langle a \rangle] = 2$ і тому $y^2 \in \langle a \rangle$, $z^2 \in \langle a \rangle$, це $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$. Відмітимо, що $y^{-1} x y = z^{-1} x z = x^{-1}$. Покажемо, що $A = G$. Дійсно, нехай це не так. Покажемо спочатку, що $\langle \langle a \rangle, \langle z \rangle \rangle = \langle a^2 \rangle$. При $k=2$ $A = Q$ і $\langle \langle a \rangle, \langle z \rangle \rangle = Q' = \langle a^2 \rangle$. При $k > 2$ і з припущення $\langle \langle a \rangle, \langle z \rangle \rangle \leq \langle a^2 \rangle$ за теоремою 12.5.1 із [16] одержимо, що $A = \langle a b a b \rangle$.

ва група, чи група Міллера - Морено, яка не містить неабелевих підгруп порядку 8. Суперечність. Тому завжди $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] = \langle a^2 \rangle$ і за теоремою 12.5.1 із [16] $z^t a z = a^t$, $t \in \{-1, -1 + 2^{k-1}\}$. Оскільки $A \neq G$, то $\langle z \rangle \leq \langle b^2 \rangle$. В силу [20 - 22] $b^2 a b = a^t$, $t \in \{-1, -(1+2^k), -(1+2^k)\}$, $1 < k < \infty$. Зрозуміло, що $b^2 a b^2 = a^{t^2}$, де, очевидно, t^2 конгруентно $1 + s2^{k+1}$ по модулю 2^k , s - непарне число. Зрозуміло, що $A \leq \langle a \rangle \langle b^2 \rangle$. Але тоді g конгруентно $t2^{k+1}$ по модулю 2^k , $z = b^{2^{k+1}}$, n - ціле невід'ємне число. Звідси $g \notin \{-1, -1+2^{k-1}\}$. Суперечність. Значить, $A = G$. Оскільки G не може бути групою кватерніонів, то за теоремою 12.5.1 із [16] G - група типу 3 чи 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена. Достатність очевидна.

Н а с л і д о к I.10. Нехай G - нециклічна метациклічна 2-група і $\langle a \rangle$ - її циклічна підгрупа найбільшого порядку, що містить G' . Якщо $[G: \langle a \rangle] > 2$, то в G точно три інволюції.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle < G$, $\langle b \rangle < G$. Припустимо, що в G не три інволюції. Тоді G - група одного з типів 2 - 4 наслідку I.9 і $[G: G'] = 4$. Зрозуміло, що $G' < \langle a^2 \rangle$. Але $[G: G'] = [\langle a \rangle: G'] [G: \langle a \rangle] > 4$. Суперечність. Значить, в G точно три інволюції. Наслідок доведено.

2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

О з н а ч е н н я 2.1. Нехай G - група, A та B - її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A, B]$ ((A, B)) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $(A, B]$ чи $[A, B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

О з н а ч е н н я 2.2. Множина підгруп M , яка не містить жодного елемента, називається пустою і позначається O .

Через $|M|$ позначаємо відповідно: $|O| = 0$; для скінченної множини $M - |M| = n$, де n - число елементів в M або $|M| < \infty$; для нескінченної множини $M - |M| = \infty$.

Л е м а 2.1. Для понять, введених в означенні 2.1. справедливі

твердження:

- 1) $[A, B] \neq 0$, тобто $\{[A, B]\} \neq 0$. Тоді і тільки тоді $\{[A, B]\} = I$, чи $\{[A, B]\} = 0$, чи $\{[A, B]\} = 0$, коли $A = B$;
- 2) тоді і тільки тоді $\{[A, B]\} = 2$, чи $\{[A, B]\} = I$, чи $\{[A, B]\} = I$, коли A - максимальна підгрупа з B ;
- 3) тоді і тільки тоді $\{[A, B]\} > 2$, чи $\{[A, B]\} > I$, чи $\{[A, B]\} > I$, коли A - власна немаксимальна підгрупа з B ;
- 4) тоді і тільки тоді $\{[A, B]\} = 0$, коли $A = B$ або A - максимальна підгрупа з B .

Твердження леми випливає з означень 2.1 та 2.2.

О з н а ч е н н я 2.3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A, B]$ існує нормальна підгрупа N із G така, що:

- 1) при $\{[A, B]\} \geq I$: 1.1) $N \subseteq [A, B]$;
- 2) при $\{[A, B]\} > I$: 2.1) $N \subseteq (A, B]$; 2.2) $N \subseteq [A, B)$; 2.3) $N \subseteq (A, B)$;
- 3) при $\{[A, B]\} > 2$: 3.1) $N \subseteq (A, B)$; 3.2) $N \subseteq (A, B)$; 3.3) $N \subseteq [A, B)$;
- 3.4) $N \subseteq [A, B]$.

Тоді G називається відповідно: N - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - групою.

Всім класів визначення тут груп будемо позначати відповідно через $K(N)$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$, $K(\{N\})$.

Л е м а 2.2. Нехай G - група. Тоді справедливі твердження:

1) група G тоді і тільки тоді N -група, коли вона дедекіндова група;

2) група G тоді і тільки тоді є $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - групою, коли для будь-якої пари підгруп $A \leq B$ існує нормальна підгрупа N групи G , що відповідно $N \subseteq (A, B]$, $N \subseteq [A, B)$, $N \subseteq [A, B]$;

3) група G тоді і тільки тоді є $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - , $\{N\}$ - групою, коли для будь-якої пари підгруп $A < B$ і A немаксимальна в B існує нормальна підгрупа N групи G , що відповідно $N \subseteq (A, B)$, $N \subseteq (A, B)$, $N \subseteq [A, B)$, $N \subseteq [A, B]$;

- 4) $K(N) \subseteq K(\{N\}) \subseteq K(\{N\}) \subseteq K(\{N\})$,
 $K(N) \subseteq K(\{N\}) \subseteq K(\{N\})$,
 $K(\{N\}) \subseteq K(\{N\}) \subseteq K(\{N\})$,
 $K(\{N\}) \subseteq K(\{N\}) \subseteq K(\{N\})$,

$$K(N) \subseteq K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}()) \cap K(U_{\infty}())).$$

Доведення. Нехай G - довільна група. Припустимо, що G - H -група. Тоді для будь-якої підгрупи X із G за означенням 1.3 маємо $[X, X] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$. Звідси $N = X \trianglelefteq G$ і G - дедекіндова група. Зрозуміло, що будь-яка дедекіндова група є H -групою і твердження 1 леми доведено.

Нехай в G $[A, B] > 1$. Тоді за означенням 2.1 та лемою 2.1 $A < B$ і A - власна підгрупа в B . В силу означення 2.3 G має таку нормальну підгрупу N , що відповідно $N \in (A, B]$, $N \in [A, B)$, $N \in [A, B]$. Оскільки для власної підгрупи A підгрупи B із G $[A, B] > 1$ і відповідно $(A, B) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, то твердження 2 доведено.

Нехай тепер в G $[A, B] > 2$. За означенням 2.2 та лемою 2.1 A - власна немаксимальна підгрупа в B . За означенням 2.3 G має таку нормальну підгрупу N , що відповідно $N \in (A, B)$, $N \in [A, B]$, $N \in [A, B]$. Оскільки для власної немаксимальної підгрупи A підгрупи B із G $[A, B] > 2$ і відповідно $(A, B) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, то твердження 3 доведено.

За твердженням 1 розглядуваної леми $K(N)$ належить всім іншим семи класам груп означення 2.3. Якщо $[A, B] > 1$ і $(A, B) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, то $N \in [A, B]$ і тим більше це справджується і при умові $[A, B] > 2$. Звідси $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$, $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$, $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$, $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$. Нехай далі $[A, B] > 2$. Тоді із співвідношення $(A, B) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ маємо $N \in (A, B]$, $N \in [A, B)$. Звідси $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}()) \cap K(U_{\infty}())$. Нарешті, із співвідношень $(A, B) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ випливає, що $N \in [A, B]$ і тому $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$, $K(U_{\infty}()) \subseteq K(U_{\infty}())$. Твердження 4 доведено. Лема доведена.

Л е м а 2.3. Нехай G - неперіодична $U_{\infty}[1]$ -група, тобто для будь-якого $[A, B] > 2$ і $|A| = \infty$ маємо $[A, B] \trianglelefteq N \trianglelefteq G$. Тоді G - абелева група.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Тоді G містить елемент g , $|g| = \infty$. Покладемо $\langle g \rangle = B$, $A_1 = \langle g^2 \rangle$, $A_2 = \langle g^3 \rangle$. За умовою леми $[A_1, B] \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq G$, $[A_2, B] \trianglelefteq N_2 \trianglelefteq G$. Зрозуміло, що $\langle g \rangle = N_1 \cdot N_2$ і, зна-

чить, $\langle g \rangle \triangleleft G$. Отже, всі нескінченні циклічні підгрупи нормальні в G . Нехай x - довільний примарний елемент із G . Тоді група G містить підгрупу $Y = \langle g \rangle \lambda \langle x \rangle$. Покладемо $A = \langle g^2 \rangle \lambda \langle x \rangle$, $B = \langle g^3 \rangle \lambda \langle x \rangle$. Тоді $|\{A, B\}| > 2$, $|A| = \infty$ і за умовою леми $[A, B] \in N \triangleleft G$. Ясно, що $x \in N$, $N = \langle g^2 \rangle \lambda \langle x \rangle$, $3 \leq 2 \leq 5$ і $Y' \subseteq \langle g^2 \rangle$ і тому $Y' \subseteq \langle g^3 \rangle$. Відомо, що $x^{-1}gx = g^{-1}$, або $x^{-1}gx = g$. Звідси з умови $Y' \neq \langle g^2 \rangle$ випливає, що $x^{-1}gx = g$, $Y = \langle g \rangle \times \langle x \rangle$, $N = \langle g^2 \rangle \times \langle x \rangle$ і $\langle x \rangle$ - періодична частина N . Звідси $\langle x \rangle \triangleleft G$ і тому, як відомо, G - абелева група. Лема доведена.

О з н а ч е н н я 2.4 [23]. Підгрупа A групи G називається квазіцентральною підгрупою в G , якщо всі її підгрупи нормальні в G .

Л е м а 2.4. Нехай УШН[]-група G має підгрупу $D = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $|a_i| = p_i$, p_i - просте число, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді G - дедекіндова група.

Доведення. Нехай G та D задовольняють умови леми. Якщо G - неперіодична група, то твердження леми справедливе за лемою 2.3. Нехай G - періодична група. Покажемо, що $\langle a_1 \rangle \triangleleft G$. Покладемо $B_{12} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, $B_{13} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $B_{14} = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, $A = \langle a_4 \rangle$. Тоді $|\{A, B_{ij}\}| > 2$, $i \in \{2, 3, 4\}$. За означенням УШН[]-груп $[A, B_{ij}] \in N_j \triangleleft G$. Ясно, що $\bigcap_{j=1}^4 N_j = \langle a_1 \rangle \triangleleft G$. Аналогічно доводимо, що для будь-якого i , $i \in \{2, 3, 4\}$, $\langle a_i \rangle \triangleleft G$. Нехай x - будь-який p -елемент із G . Тоді G містить підгрупу $X = D \langle x \rangle$ і $\{D \cap \langle x \rangle\} \in \{1, p\}$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle$ має одиничний перетин хоча б з однією із підгруп $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $\langle a_1 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$, $\langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x \rangle \cap U = 1$, де $U = \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$ і в G існує підгрупа $V = U \lambda \langle x \rangle$. Покладемо $A = \langle x \rangle$, $B_1 = (\langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $B_2 = (\langle a_2 \rangle \times \langle a_4 \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $B_3 = (\langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle) \lambda \langle x \rangle$. Тоді за означенням УШН[]-груп маємо $[A, B_i] \in N_i \triangleleft G$, $i \in \{2, 3, 4\}$. Тепер $\bigcap_{i=1}^4 N_i = \langle x \rangle \triangleleft G$. Отже, будь-яка циклічна примарна підгрупа в G нормальна в G і тому G - дедекіндова група. Лема доведена.

Л е м а 2.5. Нехай G - УШН[]-група і $X = U \times V$ - її підгрупа. Тоді справедливі твердження:

І) якщо $|V| = r$ (r - просте число), то U - УШН[]-група і при ні-

льнотентності U вона є $UHN()$ -групою;

2) якщо V містить власні немаксимальні підгрупи, то U - дедекіндова група і при $U \triangleleft G$ U - квазіцентральна підгрупа з G .

Доведення. Нехай G та X задовольняють умови леми 1 $|[A, B]| > 0$, $B \in U$. При умові твердження 2 леми V містить V_1 , де V_1 - власна не-максимальна підгрупа з V і G містить підгрупу $B_1 = A \times V_1$, $|[A, B_1]| > 2$. За означенням $UHN()$ -груп маємо $[A, B_1] \ni N \triangleleft G$, $N = (U \cap N) \times V_2$, де V_2 - підгрупа з V , $A \in N \cap U \subseteq U \cap B_1 = A$. Звідси $A \triangleleft X$. Якщо при цьому $U \triangleleft G$, то $A \triangleleft G$. Оскільки A - довільна підгрупа з U , то U - дедекіндова група і при $U \triangleleft G$ будь-яка її підгрупа нормальна в G . За означенням 2.3 U - квазіцентральна підгрупа з G . Твердження 2 леми доведено.

Нехай виконується умова твердження 1 леми 1 $|[A, B]| > 1$. Покладемо $B_1 = B \times V$. Тоді $|[A, B_1]| > 2$ і знову за означенням $UHN()$ -груп $[A, B_1] \ni N_1 \triangleleft G$. Нехай $N_1 = N \cap U$. Тоді $N_1 < U$ і $N_1 \in [A, B]$. Звідси U - $UHN()$ -група.

Нехай U - нільпотентна група і $|[A, B]| > 2$. Покажемо, що $A < N_1 < B$. Справді, оскільки $|[A, B]| > 2$, то $A < C < B$. Покладемо $C_1 = C \times V$. Тоді $|[A, C_1]| > 2$ і $|[C, B_1]| > 2$. За означенням $UHN()$ -груп маємо $[A, C_1] \ni N_2 \triangleleft G$, $[C, B_1] \ni N_3 \triangleleft G$. Покладемо $N_2 = U \cap N_2$, $N_3 = U \cap N_3$. Тоді $N_2 \triangleleft U$, $N_3 \triangleleft U$. Зрозуміло, що $A \leq N_2$, $A < N_3$, $N_2 < B$, $N_3 \leq B$. Якщо $A < N_2$, то $(A, B) \ni N_2 \triangleleft U$ і U - $UHN()$ -група. Якщо $N_3 < B$, то $A < N_3 < B$ і, значить, U - $UHN()$ -група. В протилежному разі $N_2 = A$, $N_3 = B$. Відомо [18], що в нільпотентній групі U при умові $A \triangleleft U$, $B \triangleleft U$, A - власна немаксимальна підгрупа з B , маємо $(A, B) \ni N_4 \triangleleft U$ і знову U - $UHN()$ -група. Лема доведена.

Т е о р е м а 2.1. Класи $K(N)$, $K(UHN())$, $K(UHN[])$, $K(UHN[])$, $K(UHN[])$, $K(UHN[])$, $K(UHN[])$ замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.

Доведення. Нехай G - група одного із восьми класів груп теореми, X - довільна підгрупа з G і $A \leq X \leq B$. За умовою теореми маємо нормальну підгрупу N із G , яка задовольняє відповідні співвідношення означення 3. Зрозуміло, що $N \triangleleft X$ і тому всі розглядувані класи груп замкнені за підгрупами.

Нехай $\bar{G}$ - довільна фактор-група одного з розглядуваних класів

груп, $\bar{A} \in \bar{B} \in \bar{G}$. Тоді $A \in B \in G$, де A і B - повні прообрази $\bar{A}$ і $\bar{B}$ в групі G відповідно і G - група одного з класів означення 2.3. За цим же означенням G має нормальну підгрупу N , яка задовольняє відповідні співвідношення означення. Зрозуміло, що образ $\bar{N}$ в $\bar{G}$ підгрупи N із G теж задовольняє співвідношення означення 2.3. Значить, всі розглядувані класи груп замкнені за фактор-групами.

Зрозуміло, що група кватерніонів восьмого порядку Q буде групою кожного з розглядуваного класу груп. Нехай $G = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4$, де Q_i - група кватерніонів порядку 8, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Зрозуміло, що G - недедекіндова група, яка містить елементарну абелеву підгрупу порядку 2^4 . За лемою 2.4 G - недедекіндова група. Суперечність. Звідси, жоден із розглядуваних класів груп не є замкненим за прямими добутками. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 2.1. Недедекіндова локально ступінчаста УШН[]-група є розв'язною черніковською групою.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. За лемою 2.3 G - періодична група, а за лемою 2.4 G не має абелевих підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неединичних множників. Отже, G - задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп і тому за відомим результатом із [24] G - черніковська група з повною частиною R . За теоремою 2.1 G/R - скінченна УШН[]-група.

Нехай $R = I$. Тоді $|G| < \infty$. Покажемо, що G - розв'язна група. Зрозуміло, що G має головний ряд $I = G_0 \triangleleft \dots \triangleleft G_i \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$, фактори якого є елементарними абелевими групами, чи простими групами. Якщо всі фактори вибраного ряду абелеві, то G - розв'язна група. Припустимо, що для деякого $i > 0$ G_i/G_{i-1} - неабелева і тому проста група. Тоді G_i/G_{i-1} містить $B/G_{i-1} > A/G_{i-1} \in I$ і $[A/G_{i-1}, B/G_{i-1}] > 2$. За означенням 2.3 $[A, B] \in N \triangleleft G$ і N/G_{i-1} - неединична власна нормальна підгрупа з G_i/G_{i-1} , що суперечить простоті G_i/G_{i-1} . Таким чином, при $R = I$ G - розв'язна група.

При $R \neq I$ G/R - скінченна УШН[]-група, яка за попереднім розв'язна. Звідси G - розв'язна група. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 2.2. Недедекіндова локально ступінчаста УШН[]-група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа її якої може бути лише власною підгрупою одного з типів:

1) U - циклічна підгрупа порядку p^{λ} , $\lambda > 0$, p - довільне просте число, $\Phi(\Phi(U))' = M \triangleleft G$;

2) U - група порядку pq , $p \nmid q$ - необов'язково різні прості числа, $M = E \triangleleft G$;

3) U - група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M \triangleleft G$;

4) U - циклічна підгрупа порядку $p^{\lambda}q$, $\lambda > 1$, $p \nmid q$ - різні прості числа, $M \in U$, $M \triangleleft G$, $|M| = p^{\lambda-1}q$;

5) $U = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$, $|x| = p^{\lambda}$, $\lambda > 1$, $|y| = p$, p - довільне просте число, $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in \langle x^{p^{\lambda-1}} \rangle$, $[U:U'] > 4$, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U' , $\langle x^p \rangle x \langle y \rangle = M \triangleleft G$;

6) $U = R \lambda \langle x \rangle$, R - елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $r^{\gamma} > 2$, $|x| = p^{\beta}$, $p \nmid r$ - різні прості числа, $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з U , $U' = R$, $R \times \langle x^{\beta} \rangle = M \triangleleft G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови теореми. Тоді $I < U < G$ і за наслідком 2.1 G - розв'язна черніковська група. Якщо $|U|$ - просте число, то U - група типу 1. Нехай $|U|$ - не просте число. Тоді за умовою 1 леми 1.1 U має власні немаксимальні підгрупи X . Звідси $[X, U] > 2$ і за означенням 2.3 $[X, U] \ni N(X) \triangleleft G$. Якщо U породжується своїми власними немаксимальними підгрупами X , то U породжується і підгрупами $N(X)$. Тому $U \triangleleft G$, що неможливо. Таким чином, U не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами і тому U задовольняє умову теореми 1.1. За цією теоремою U і M можуть бути типу 1 - 6. Якщо U та M - групи типу 1 - 5 згаданої теореми, то тоді U та M - підгрупи одного з типів 1 - 5 розглядуваної теореми.

Нехай U - група типу 6 теореми 1.1. Тоді $U = R \lambda \langle x \rangle$, R та $\langle x \rangle$ задовольняють ті ж співвідношення, що в теоремі 1.1, тобто $|R| = r^{\gamma} > 2$, $|x| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, r і p - різні прості числа. Оскільки G - недедекіндова група, то за лемою 2.4 вона не містить елементарних абелевих підгруп порядку r^{γ} . Звідси $\gamma \in \{1, 2, 3\}$. Покажемо, що $|G| < \infty$. Дійсно, нехай $|G| = \infty$. Тоді G містить квазіциклічну підгрупу K , яка за попереднім не може бути ненормальною в G . Звідси $K \triangleleft G$. Зрозуміло, що $K \cap R = I$ і, значить, в G існує підгрупа $V = K \langle x \rangle$, яка за попереднім теж нормальна в G . Але тоді $V \cap U = \langle x \rangle \triangleleft U$, що неможливо. Отже, $|G| < \infty$. За теоремою 1.1 $M = R \lambda \langle x^{\beta} \rangle \triangleleft G$. Покажемо, що $M' = I$. Дійсно, нехай це не так. Тоді

за допомогою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $G = MD = RD$, де $D = N_G(\langle x^p \rangle)$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle \in D$. Оскільки $M' \neq I$, то $R \cap D = R' -$ власна підгрупа в R , $R' \triangleleft D$, $R' \triangleleft R$, а тому $R' \triangleleft G$. Оскільки $R -$ мінімальна нормальна підгрупа в U , то $R' = I$ і $G = R \rtimes D$, $D \triangleleft G$. Зрозуміло, що $D -$ скінченна група одного з типів I - 6 теорему I.I. Оскільки $U \not\triangleleft G$, то $\langle x \rangle \not\triangleleft D$. Звідси $D -$ недедекіндова група і тому $D -$ неабелева група типу 2,5,6 теорему I.I. Зрозуміло, що $\langle x \rangle \nmid p$. Тому $|D|$ ділиться на добуток більше ніж двох простих чисел. Звідси $|D|$ не може бути групою типу 6 теорему I.I. За твердженням цієї теорему $\langle x \rangle$ містить D' , $\langle x \rangle \triangleleft D$, що суперечить попередньому. Таким чином, D може бути групою типу 6 теорему I.I і містить $M_1 \triangleleft G$, $D/M_1 -$ група простого порядку. Зрозуміло, що $[R, M_1] = I$, $x^p \in M_1$, $[R, x^p] = I$. Звідси $M' = I$, що не так, і тому $M = R \rtimes \langle x^p \rangle$.

Нехай $\gamma > 1$. Припустимо, що $\gamma + \beta > 4$. Тоді R містить підгрупу A , $\{A\} > I$, $A < R$, $U -$ підгрупу $B = A \rtimes \langle x^p \rangle$ і $|\{A, B\}| > 2$. За означенням УШН[]-груп $\{A, B\} \ni N \triangleleft G$. Оскільки $R \triangleleft G$, $N \triangleleft G$, то $R \cap N = N_1 \triangleleft G$, $A \leq N_1 < R$, що суперечить мінімальності R в U . Значить, $\gamma + \beta < 5$ і U -група типу 6 розглядуваної теорему. Теорема доведена.

Означення 2.3. Група G називається дисперсивною, якщо вона має силівський ряд, тобто ряд нормальних в G підгруп $I = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_i \leq \dots \leq G_n = G$ таких, що при $n < 2$ $G - p$ -група ($p -$ просте число), при $n > 1$, $i > 0$, $G_i/G_{i-1} - p_i$ -група ($p_i -$ просте число), а при $i \neq j$, $i > 0$, $p_i, p_j -$ різні прості числа.

Група G називається дисперсивною за Оре, якщо при $1 < i < n$ $p_i > p_j$.

Т е о р е м а 2.3. Недедекіндові локально ступінчасті УШН[]-групи мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неединичних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з типів:

- 1) $G -$ скінченна нелінійна група;
- 2) $G -$ скінченна лінійна не більше ніж біпримарна група;
- 3) G має центральну квазіциклічну p -підгрупу R , для якої $G/R -$ скінченна дедекіндова група.

Доведення. Нехай $G -$ досліджувана група. Тоді за наслідком 2.1 G

розв'язна черніковська група, яка за лемою 2.4 не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток не більше ніж трьох неодичинних множників. Можливі випадки: 1) $|G| = \infty$; 2) $|G| < \infty$.

Випадок 1. У цьому випадку G містить квазіциклічну p -підгрупу R , яка за теоремою 2.2 нормальна в G . Нехай x - довільний примарний елемент із G . Тоді в G існує підгрупа $X = \langle x \rangle$ і $\{ \langle x \rangle, X \} > 2$. За означенням УШН[]-груп $\langle x \rangle, X \in N \triangleleft G$. Ясно, що $X = RN \triangleleft G$. Звідси $X/R = \langle Rx \rangle \triangleleft G/R$ і, таким чином, всі примарні циклічні підгрупи нормальні в G/R і тому G/R - дедекіндова група.

Припустимо, що повна частина G має більше ніж одну квазіциклічну підгрупу. Тоді в G існують квазіциклічні підгрупи R_1 і R_2 такі, що $R_1 \cap R_2 = I$. За попереднім $R_1 \triangleleft G$, G/R_1 - дедекіндова група, $i \in \{1, 2\}$. За теоремою 1.2 G - дедекіндова група, що не так. Звідси повна частина G співпадає з квазіциклічною p -підгрупою R .

За попереднім, для будь-якого примарного елемента x із G $X = \langle x \rangle = RN$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $|N| < \infty$. Звідси $[R, \langle x \rangle] \in N \cap R$, $|N \cap R| < \infty$ тому $|X'| < \infty$. Отже, квазіциклічна підгрупа R лежить у центрі X . Оскільки G - черніковська нільпотентна група, то $G \not\leq R$ і, значить, $|G| < \infty$. Звідси G - група типу 3 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку $|G| < \infty$. Нехай G - нільпотентна група. Тоді $G = U \times V$, де V - недедекіндова силовська p -підгрупа з G , V - її холлівське доповнення в G . За лемою 2.5 $|V| \in \{1, r\}$, r - просте число, $r \neq p$ і, значить, у цьому випадку G - група типу 2 теореми.

Нехай G - скінченна ненільпотентна група. Покажемо, що G - дисперсивна група. Припустимо, що це не так. Тоді G містить мінімальну недисперсивну підгрупу X , яка, очевидно, розв'язна.

Нехай X' не містить жодної примарної силовської підгрупи із X . Тоді в силу [25] $X = SD$, де S - група Шмідта, D - ненільпотентна підгрупа із X , $[S, D] = I$, $S \cap D = Z \leq Z(X)$, $Z \leq \Phi(S)$, $Z \leq \Phi(D)$. За теоремою 2.1 $X/Z = S/Z \times D/Z \sim$ УШН[]-група. Відомо [25], що S/Z і D/Z - ненільпотентні групи. За лемою 2.5 S/Z чи D/Z має бути дедекіндовою групою, що неможливо. Отже, X' містить хоча б одну примарну силовську підгрупу з X . В силу [25] $X = PQ$, P - силовська ненормальна в X p -підгрупа, Q - ненормальна в X силовська q -підгрупа, $p \neq q$, $P' \neq I$. P ізоморфна групі кватерніонів порядку 8. За теоремою 2.2 $P = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|x| = p^4$, $|y| = p$, $\Delta > 1$, $[x, y] = x^{p^{\Delta-1}}$,

$\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle \trianglelefteq G$, $[P:P'] > 4$. Знову в силу [25] $X = AB$, $D = Q \wedge \langle b \rangle$, $D \trianglelefteq G$ і D - нелінійпотентна підгрупа, яка задовольняє умову теореми 2.2 і може бути підгрупою типу 2,6 згаданої теореми. Якщо припустити, що D - підгрупа типу 6 теореми 2.2, то $Q \times \langle b^p \rangle = M \trianglelefteq G$ і, значить, $Q \trianglelefteq G$, що неможливо.

Нехай тепер D - група типу 2 теореми 2.2. Тоді $|D| = qr$, $q > p$. Оскільки A належить метациклічній підгрупі P , то A - нециклічна метациклічна група. При $|A| = 4$ P - група діедра порядку 8, яка не може бути групою типу 5 теореми 2.2. Суперечність. Значить, $|A| > 4$. Зрозуміло, що $A \wedge Q$ - нелінійпотентна група, яка містить підгрупу Шмідта S з нормальною метациклічною силовською p -підгрупою і не-нормальною силовською q -підгрупою, $q > p$. За відомими результатами (див., наприклад, [25]) $p = 2$, $q = 3$. Звідси $|A| \geq 8$ і знову в силу [25] $|P'| > 2$ і, таким чином, P не може бути підгрупою типу 5 теореми 2.2. Отже, G - дисперсивна група типу 1' теореми. Теорема доведена.

3. ДЕЯКІ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

Означення 3.1 [26]. Група $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ називається метациклічною групою, якщо $\langle a \rangle \trianglelefteq G$.

Твердження 3.1 [26]. Клас метациклічних груп замкнений за підгрупами та фактор-групами, незамкнений за прямими добутками і замкнений за скінченними прямими добутками скінченних прямих множиликів попарно взаємно простих порядків.

Означення 3.2. Нелінійпотентна група з нелінійпотентними власними підгрупами називається групою Шмідта.

Означення 3.3. Неабелева група з абелевими власними підгрупами називається групою Міллера - Морено.

Лема 3.1. Нехай G - локально ступінчаста $U\text{-}CH[]$ -група, U - її ненормальна підгрупа. Тоді справедливі твердження:

- 1) U - скінченна, не більше ніж біпримарна підгрупа з абелевими власними підгрупами;
- 2) U - нелінійпотентна група Міллера - Морено, що може бути під-

групою одного із типів 2,6 теореми 2.2;

3) U - неметадичлічна група, коли вона підгрупа з G типу 8 теореми 2.2, $\gamma > 1$, $\gamma + \beta < 5$;

4) U' - r -група, r - просте число, будь-яка циклічна r -підгрупа в U порядку більше r містить U' .

Доведення. Нехай G та U задовольняють умови наслідку. Тоді U - підгрупа одного з типів 1 - 6 теореми 2.2. Очевидно, що U - скінченна, не більше ніж біпримарна група. Очевидно також, що всі власні підгрупи з U є абелевими групами і тому справедливе твердження 1 наслідку. Ненільпотентна підгрупа U групи G може бути лише r -групою одного з типів 2,6 теореми 2.2. Але тоді за твердженням 1 наслідку всі власні підгрупи з U абелеві і тому за означенням 3.3 U - ненільпотентна група Міллера - Морено. Таким чином, твердження 2 наслідку доведено.

Ясно, що U' - r -група, r - просте число. Нехай g - елемент із G і $|g| = r^2$. Покажемо, що $\langle g \rangle \geq U'$. При $U' = 1$ це очевидно. Нехай $U' \neq 1$. Тоді U - підгрупа одного з типів 2,3,5,6 теореми 2.2. В підгрупі U одного з типів 2,6 згаданої теореми немає циклічних підгруп порядку r^2 і тому $\langle g \rangle \geq U'$. Підгрупа U типу 3 теореми 2.2 є групою кватерніонів порядку 8, у якій всі підгрупи порядку 4 містять U' . У підгрупі U типу 5 теореми 2.2 за умовою цієї теореми будь-яка підгрупа порядку r^2 містить U' . Отже, завжди $\langle g \rangle \geq U'$, що доводить твердження 4 наслідку. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 3.1. Локально ступінчасті $U_{n1}[1]$ -групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P - нормальна в G силова p -підгрупа порядку $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, $G' = P$, Q - ненормальна циклічна силова q -підгрупа з G порядку q^{β} , $\beta > 0$, p і q - різні прості числа, $P' = \Phi(P) \in Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^{\Delta}$, $\Delta \in \{0, 1\}$, $\Delta = \Delta$ - показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ - максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, та вичерпуються групами типів:

1) P - група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;

2) $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;

3) P - елементарна абелева, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умови теореми. За теоремою 2.3 G - скінченна ненільпотентна група, яка в силу (див.,

наприклад, [25]) має вигляд $G = P \rtimes Q$, де P і Q взяті з теореми 3.1. Покажемо, що G – група одного з типів теореми. Якщо $\ell = 1$, то G – група типу 3 теореми. Тому будемо вважати, що $\ell > 1$. При $\ell = 2$ в силу [25] G – група типу 3. Нехай $\ell > 3$ і M – будь-яка максимальна підгрупа з P . Як відомо [25], $\Phi(P) < M$ і $M \not\trianglelefteq G$ і в силу наслідку 3.1 M – метациклічна група.

Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді, очевидно, G має ненормальну підгрупу $U = M \rtimes \Phi(Q)$, яка може бути лише підгрупою типу 5 теореми 2.2 і тому є циклічною групою порядку $p^{\Delta} q$. Але $|U| = |M| |\Phi(Q)| \geq p^2 q^2$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\beta < 3$.

Нехай $P' = 1$. Тоді знову в силу [25] P – елементарна абелева група порядку p^{Δ} , $\Delta > 2$. Ясно, що $G > P \rtimes \Phi(Q)$. За теоремою 2.3 неабелева група G не має підгруп, що розкладається в прямий добуток більше ніж трьох неодиначних прямих множників. Звідси $P \rtimes \Phi(Q)$ – елементарна абелева група порядку p^{β} , $\Delta = 3$, $\beta = 1$, $\Delta + \beta < 5$ і G – група типу 3 теореми.

Покажемо, що при $\Delta = 2$ $\Delta + \beta < 5$. Якщо $\beta < 3$, то це очевидно. Нехай $\beta > 2$. Тоді G містить підгрупу $U = M \rtimes \Phi(Q)$, де M – максимальна підгрупа із P , $|M| = p$, $|\Phi(Q)| = q^{\beta-1}$. Якщо припустити, що $U \not\trianglelefteq G$, то знову U – підгрупа типу 5 теореми 2.2, яка містить нормальну в G підгрупу M_1 порядку $p q^{\beta-2}$. Звідси $P \cap M_1 = M \trianglelefteq G$, що суперечить відомим результатам про групи Шмідта при $\Delta = 2$ (див., наприклад, [25]). Таким чином, при $P' = 1$ і $\Delta > 1$ $\Delta + \beta < 5$.

Нехай далі $P' \neq 1$. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] $P' = \Phi(P) = Z(P)$ і $U = \Phi(P) \rtimes Q \trianglelefteq G$. Значить, U задовольняє умову теореми 2.2 і може бути тільки циклічною групою. Звідси $\Phi(P)$ – циклічна група. За властивістю груп Шмідта [25] $\exp(\Phi(P)) = p$ і при $p > 2$ $\exp(P) = p$.

Припустимо, що P – метациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] P – група кватерніонів порядку 8 і в цьому випадку G – група типу 1 теореми.

Припустимо тепер, що P – неметациклічна група. Тоді за властивістю груп Шмідта [25] і теоремою 2.1 $G/\Phi(P)$ – УШН[]-група Шмідта з нормальною силовською p -підгрупою $P/\Phi(P)$ порядку $p^{\Delta-1}$, яка є нециклічною групою Міллера – Морево типу 3 розглядуваної теореми, $\Delta > 2$ і $\Delta - 1$ є показником p за модулем q . Для групи зі типу 3 розглядуваної теореми $\Delta - 1 \in \{2, 3\}$. Знову за властивістю груп Шмідта при $\Delta - 1 = 3$ $\Phi(P) = 1$, що неможливо. Таким чином, $\Delta - 1 = 2$

і, значить, $\mathcal{L} = 3$ і P - неметабілічна неабелева група порядку p^3 , яка, як відомо, має експоненту p , $p > 2$, 2 є показником p за модулем q . Звідси $q > 2$. Знову за властивістю груп Шмідта [25] $P/\Phi(P)$ не може бути елементарною абелевою групою порядку 3^2 . Звідси $p > 3$.

Покажемо, що $\beta = 1$. Нехай це не так. Тоді $P > M = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$, $|c| = p$, $\langle c \rangle = \Phi(P)$, $M \not\trianglelefteq G$. Покладемо $N = M \times \Phi(Q)$. За припущенням N - абелева непримарна нециклічна підгрупа з G порядку $p^2 q^{\beta-1}$. Зрозуміло, що N не може бути групою одного із типів I - 6 теорем 2.2. Тому за цією теоремою $N \triangleleft G$, $P \cap N = M \triangleleft G$, що суперечить ненормальності M в G . Отже, $\beta = 1$ і G - група типу 2 теорем. Всі випадки розглянутої тим самим необхідності доведено.

Достатність. Нехай $G = P \rtimes Q$ - група одного з типів розглядуваної теореми. За властивістю загального вигляду групи G маємо, що G - скінченна група Шмідта (див., наприклад, [25]).

Покажемо, що G - УШНГ-група. Дійсно, нехай $|[A, B]| > 2$. Покажемо, що $[A, B] \ni N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то покладемо відповідно $M = A$ чи $N = B$ і все доведено. Звідси $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $|A| > 1$, $B \not\triangleleft G'$. Оскільки $G' = P \cap B$ - власна підгрупа з G , то B - власна нільпотентна підгрупа вигляду $P_1 \times Q_1$, де $P > P_1 = P \cap B$ - силовська p -підгрупа з B , Q_1 - її ховлівське доповнення в B . Оскільки $|A| \neq 1$, то $|B|$ є добутком не менше ніж трьох простих чисел. Далі, оскільки $|P| \leq p^2$, то в групі G типу 2 $|Q| \geq q$ і тому $|P'| = p^2$, $|Q| = q$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = Q_1$. Звідси в P існує максимальна підгрупа P_1 і $P_1 \triangleleft G$, що не так в групах Шмідта (див., наприклад, [25]). Значить, для груп типу 2 достатність доведена.

Аналогічно доводимо достатність для груп G типу 3 при $\mathcal{L} = 3$ і для груп G типу I при $\beta = 1$.

Нехай G - група типу I і $\beta = 2$. При цій умові нижній шар $w(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q) \in Z(G)$ і тому всі елементи з G простого порядку належать $Z(G)$. Звідси та за попереднім $|A|$ є добутком не менше ніж двох простих чисел, $|B|$ - добутком не менше ніж чотирьох простих чисел, $|G|$ - добутком п'яти простих чисел, $[G:B]$ ділиться на 2. Звідси $|B| = 2^2 3^2$, $|P_1| = 4$, $|Q| = 9$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $Q_1 = Q$, і тому $P_1 \triangleleft G$, що в групах Шмідта неможливо [25]. Таким чином для груп G типу I достатність доведена.

Нехай, нарешті, G - група типу 3. За попереднім $\mathcal{L} \in \{1, 2\}$. Нехай $\mathcal{L} = 1$. Вище доведено, що $P_1 > P$ і тому $|P_1| = 1$, B - q -група, яка без порушення загальності належить циклічній підгрупі Q . Ясно, що

A - власна немаксимальна підгрупа як і B , так і O . Звідси $A \in \Phi(O) \in Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що не т.к. Тому $\Delta = 2$ і $\Delta + \beta < 5$. Зрозуміло, що $[G:B]$ ділиться на p , $|G|$ - добуток більше ніж чотирьох простих чисел, $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси $|B| = pq^2$, $|O| = q^2$. Знову без порушення загальності можна вважати, що $O = Q_1$, $P_1 \triangleleft G$, що в групах Шмідта неможливо [25]. Отже, всі випадки розглянуті і тим самим достатність доведена. Теорема доведена.

При доведенні достатності теореми 3.1 встановлено такий результат.

Н а с л і д о к 3.2. В локально ступінчастій УШН[]-групі Шмідта G з умови $|[A,B]| > 2$ випливає, що або $A \triangleleft G$, або $B \triangleleft G$.

Н а с л і д о к 3.3. Локально ступінчасті УШН[]-групи Міллера - Морено вичерпуються групами типів:

- 1) G - група кватерніонів порядку 8;
- 2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\Delta$, $|b| = p^\beta$, $\Delta > 1$, $\beta > 0$, $[a,b] = a^{p^{\Delta-1}}$, p - довільне просте число;
- 3) $G = \langle c \rangle \times \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^\Delta$, $|b| = p^\beta$, $\Delta \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p(\Delta + \beta) > 4$, $[a,b] = c$, $[c,b] = I$;
- 4) $G = P \rtimes Q$ - група Шмідта типу 3 теореми 3.1.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. За відомими результатами (див., наприклад, [25]) і за теоремою 2.3 G - скінченна примарна p -група, чи скінченна група Шмідта.

Нехай G - p -група, що не є групою одного з типів 1, 2 розглядуваного наслідку. Тоді в силу [25] $G = \langle c \rangle \times \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|c| = p^\Delta$, $|a| = p$, $|b| = p^\beta$, $\Delta > 0$, $\beta > 0$, $[a,b] = c$, $[c,b] = I$. При $p(\Delta + \beta) = 4$ G - група дієдра порядку 8, яка, очевидно, є групою типу 2 розглядуваного наслідку. Тому будемо вважати, що $p(\Delta + \beta) > 4$. Відомо також, що $Z(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle = \Phi(G)$, $\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \triangleleft G$, $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle \triangleleft G$. В силу теореми 2.2 підгрупи $\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$, $\langle b^p \rangle \times \langle a \rangle$ можуть бути лише p -підгрупами одного з типів 1, 2, 5 цієї теореми. Для підгруп згаданих типів $\Delta < 3$, $\beta < 3$ і G - група типу 2. Випадок, коли G - примарна група, розглянуто повністю.

Нехай G - непримарна група. Тоді $G = P \rtimes Q$ - група Шмідта, у якій

$P' = I \wr G$ задовольняє умову теореми, 3.1. і тому є групою типу 3 згаданої теореми. Звідси G - група типу 4 розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 4 розглядуваного наслідку. Тоді в силу [25] G - скінченна група і, значить, локально ступінчаста група Міллера - Морено. Покажемо, що G - УШН[]-група. Для груп G типу 4 це встановлено в теоремі 3.1, а для груп G типу 1 це очевидно. Тому в подальшому будемо вважати, що G - група одного з типів 2, 3 наслідку.

Нехай $[A, B] > 2$. Покажемо, що $[A, B] \in N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то це очевидно. Тому $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $A \not\leq Z(G)$, $B \cap G' = I$. У групах одного з типів 2, 3 наслідку для будь-якого $g \in G$ маємо $g^p \in Z(G)$. Зрозуміло, що $|B| \geq p^2$. Для груп G типу 2 $B = \langle g \rangle$, $A \in \Phi(B) = \langle g^p \rangle \in Z(G)$, що суперечить вибору A , і тому для груп G типу 2 достатність доведена. В групах G типу 3 $[G; \langle c \rangle] \leq p^4$. Звідси $|B| \leq p^4$. Оскільки $\langle c \rangle$ не доповнюється в G , то $|B| < p^4$ і, значить, $|B| = p^3$, $\alpha = \beta = 2$, $|A| = p$. Але за цих умов $A \in w(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \in Z(G)$, що суперечить вибору A , і тим самим достатність для груп G типу 3 доведена. Наслідок доведений.

Т е о р е м а 3.2. Метациклічні УШН[]-групи G вичерпуються групами типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;
- 2) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 3) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 4) $G = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leq k < \alpha$, $\alpha - k \leq \beta$;
- 5) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = I$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 8) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $\beta \in \{3, 4\}$, $b^{-1}ab = a^7$;
- 10) $G = P \times D$, P - група кватерніонів порядку 8, D - скінченна абелева метациклічна група;
- 11) $G = P \times D$, P - силовська p -підгрупа G , $|D| = p$, $p \nmid q$ - різні

прості числа, P - група одного з наступних типів розглядуваної теорему: 2. $|P| = 2$; 4. $|P| = p$; 6. $\beta < 4$;

12) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = pr$, $p \nmid r$ - не обов'язково рівні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^q \in Z(G)$;

13) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $|z| \in \{1, r\}$, r - просте число, $\Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \in Z(G)$; при $|z| = r$ $b^q \in Z(G)$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;

14) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, $q \nmid r$ - різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $C_{\langle b \rangle}(\langle a \rangle) = 1$;

15) $G = \langle a \rangle \times \langle z \rangle \langle b \rangle$, $|a| = p$ - непарне просте число, $\langle z \rangle \langle b \rangle$ - група кватерніонів порядку 8, $b^4 a b = a^{-1}$;

16) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \lambda \langle z \rangle)$, $|a| = p$ - непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $|z| = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $\{a, b^q\} = \{a, z\} = 1$, $\{b, z\} = b^{q^{\beta-1}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умови теореми. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \triangleleft G$. Якщо $G' = 1$, то G - група типу I. Нехай далі $G' \neq 1$. Якщо G - гамільтонова група, то в силу твердження I.I G - група типу IO. Тому в подальшому будемо вважати, що G - недедекіндова метациклічна група. За теоремою 2.3 G - скінченна недедекіндова метациклічна група і в силу твердження 3.I всі підгрупи G та її фактор-групи метациклічні. Розглянемо два можливі випадки: 1) G - скінченна нільпотентна група; 2) G - скінченна ненільпотентна група.

Випадок I. Можливі випадки: I.1) G - p -група; I.2) G - не p -група.

Випадок I.I. В цьому випадку в силу [20] $|a| = p^\ell$, $|b| = p^\beta$, $\ell > 1$, $\beta > 0$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^k} \rangle$, $p^k > 2$, $0 < k < \ell$, $G' = \langle c \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, $\langle c \rangle \in Z(G)$, $|c| = p^k$, $\langle b \rangle \not\triangleleft G$. Якщо $\ell - k = 1$, то $|G| = p$ і G - метациклічна недедекіндова група Міллера - Морено, яка може бути лише групою типу 2 наслідку 3.3. Звідси G - група типу 2 або 4 розглядуваної теореми. Нехай далі $\ell - k > 1$ і тому $\ell > 2$, $\ell - k \leq \Delta$, $1 < \Delta \leq \ell$. Значить, в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle \langle a^{p^{\ell-\Delta-2}} \rangle$. Покажемо, що $\langle b \rangle \in N \leq B \leq N \triangleleft G$. Якщо $B \triangleleft G$, то $B = N$, і все доведено. Нехай $B \not\triangleleft G$. Зрозуміло, що B - нециклічна p -група, $\exp(B) > p$. Тому B задовольняє умову теореми 2.2 і може бути лише групою типу 5 згаданої теореми, для якої $\langle b \rangle$ - немасимальна в B і $\langle b \rangle \in M \triangleleft G$, M -

одна з максимальних підгруп B . Отже завжди, $M \in B$, $\langle b \rangle \in M \triangleleft G$. З цього випливає, що $\{\langle a \rangle, \langle b \rangle\} = G' \in N \in B$. Але тоді $k \geq \Delta - \Delta - 2$. При $\Delta = 0$ $k = \Delta - 2$. Тепер при $k = 1$ $\Delta = 3$ і в силу [20] G - група одного з типів 2, 3, 4 розглядуваної теореми. Якщо $k > 1$, то в силу [20] G - група типу 4 теореми.

Нехай тепер $\Delta > 0$. При $p^k > 2$ в силу [20] $G = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $\{d\} = p^{\Delta}$. В G існує підгрупа $B = \langle a^{p^{\Delta-2}} \rangle \lambda \langle d \rangle$, для якої, як це показано вище, або $B = M \triangleleft G$, або $\langle a^{p^{\Delta-1}} \rangle \times \langle d \rangle = M \triangleleft G$. Знову $G' \in N$, $k = \Delta - 2$ і G - група типу 5 теореми.

Нехай $p^k = 2$. Тоді $p = 2$, $k = 1$, $\Delta > 2$, $\{\langle a \rangle \cap \langle b \rangle\} = 2$ (див. [20]). При $\Delta = 3$ в силу [20] $b^4 ab = a^{-1}$, $\beta > 1$ і G - група типу 6 теореми. Нехай тепер $\Delta > 3$. Зрозуміло, що $\Delta = 1$, $1 = k \geq \Delta - \Delta - 2 = \Delta - 3$. Звідси $\Delta = 4$.

Нехай $b^4 ab = a^{-1}$. Якщо припустити, що $\beta > 4$, то $d = ab^{2^{\beta-4}} + 1 \in G$ і тому $\langle a \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Тепер знову $B = \langle a^4 \rangle \lambda \langle d \rangle \in G$. За теоремою 2.2 $B \triangleleft G$, $G' \in B$ і тому $G' \in \langle a^4 \rangle$, що неможливо. Отже, $\beta \leq 4$ і G - група типу 7 теореми.

Нехай тепер $b^4 ab \neq a^{-1}$. Тоді в силу [20] $b^4 ab = a^{k+2^k}$, $k \in \{2, 3\}$. Як і при умові $b^4 ab = a^{-1}$, легко встановити, що $2 < \beta \leq 4$ і при $k = 2$, $\beta = 4$ G - група типу 8 теореми, а при $k = 3$ G - група типу 9 розглядуваної теореми. Випадок 1.1 розглянуто повністю.

Випадок 1.2. В цьому випадку $G = P \rtimes D$, де P - неабелева спільська p -підгрупа з G , D - неединична нільпотентна скінченна колінська підгрупа з G . Зрозуміло, що P містить власні немаксимальні підгрупи і за лемою 2.5 D - додекіндова група. Оскільки G - недедекіндова група, то і P - недедекіндова група. Звідси в силу леми 2.5 $|D| = q$, $p \neq q$. Зрозуміло, що P - група одного з типів 2 - 9 розглядуваної теореми і $|P'| > 1$.

Нехай $|P'| = p$. Тоді P - може бути групою одного з типів 2, 4 теореми і G - група типу 10 розглядуваної теореми.

Нехай $|P'| > p$. Коли P - група типу 6 розглядуваної теореми, то G - група типу 10. Нехай P - група одного з типів 2 - 5, 7 - 9 розглядуваної теореми. В групі P кожного з типів 2 - 5 існує підгрупа $X = \langle e \rangle \times \langle x \rangle$, $\langle e \rangle = w(G')$, $x \notin \Phi(P)$ і G містить підгрупу $B = X \rtimes D$. Очевидно, що B не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теореми 2.2. Звідси $B \triangleleft G$, $P' \in B \cap P' = \langle e \rangle$ і тому $|P'| < p$, що суперечить вибору P .

Нехай P - група одного з типів 7 - 9 теореми. Тоді P містить

підгрупу $X = \langle a^g \rangle \langle b \rangle$, $G \ni B = X \times D$. Як і раніше, $B \triangleleft G$, $P' \in \langle B \cap P' \rangle \leq \langle a^g \rangle$, що неможливо. Отже, у випадку 1.2 всі можливості вичерпані і тому випадок 1 повністю розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку за теоремою 2.3 G - скінченна ненійпотентна метациклічна група. В смілу [20] $G = \langle a \rangle \lambda D$, $[\langle a \rangle, D] = \langle a \rangle$, $\langle a \rangle$ не містить інволюцій, D - нійпотентна метациклічна ненормальна підгрупа з G . Ясно, що D - група одного з типів 1 - 5 теореми 2.2. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $|a|$ - непросте число; 2.2) $|a|$ - просте число.

Випадок 2.1. У цьому випадку $\langle a \rangle \in \langle c \rangle$, $|c| = r$, $\langle c \rangle \triangleleft G$. Оскільки $[\langle a \rangle, D] = \langle a \rangle$, G - ненійпотентна група, то за відомим результатом (див., наприклад, [16]) $[\langle c \rangle, D] = \langle c \rangle$. Покладемо $N = \langle c \rangle \lambda D$. Припустимо, що $N \triangleleft G$. Тоді G/N - абелева група і $G' \leq N$, що неможливо, оскільки $G' \in \langle a \rangle$, $\langle a \rangle > \langle c \rangle$. Отже, $N \not\triangleleft G$. Зрозуміло, що N - ненійпотентна надрозв'язна підгрупа. Нехай $\langle c \rangle$ - немаксимальна підгрупа з $\langle a \rangle$, M_1 - максимальна підгрупа з $\langle a \rangle$, що містить $\langle c \rangle$. Тоді $M_1 \triangleleft G$ і G містить ненійпотентну підгрупу $N_1 = M_1 \lambda D$. Як і раніше для N , $N_1 \not\triangleleft G$. Але тоді N_1 - ненійпотентна надрозв'язна ненормальна підгрупа з G , яка може бути лише підгрупою одного з типів 2, 6 теореми 2.2.

Зрозуміло, що $D \neq I$, $|M_1|$ - непросте число. Тому $|N_1|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і N_1 не може бути підгрупою типу 2 теореми 2.2.

Нехай N_1 - підгрупа типу 6 згаданої теореми. Тоді за наслідком 3.1 N_1 - метациклічна група Міллера - Морено з нормальною силовською підгрупою простого порядку r і в N_1 доповнюється єдина неодиначна власна нормальна підгрупа порядку r . За нашим вибором в N_1 доповнюється підгрупа M_1 , $M_1 \neq I$, $M_1 < N_1$, $|M_1|$ - непросте число. З цієї суперечності випливає, що $\langle c \rangle$ - максимальна підгрупа з $\langle a \rangle$. Знаючи, $|a| = pr$, p і r - не обов'язково різні прості числа. Ясно, що N - підгрупа одного з типів 2, 6 теореми, $N = \langle c \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q - просте число, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$. За теоремою 2.2 $\langle c \rangle \times \langle b \rangle = M \triangleleft G$. Звідси $\langle b \rangle \triangleleft G$, $\langle b \rangle = Z(G) \cap G$ - група типу 12 розглядуваної теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. $|a| = p$ - непарне число і D - підгрупа одного з типів 1 - 5 теореми 2.2. Якщо D - підгрупа типу 1 згаданої теореми, то $D = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$ і G - група типу 13.

Нехай D - підгрупа типу 2 згаданої теореми. Тоді $|D| = qr$. Якщо

$q = r$, то $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, не без порушення загальності можна вважати, що $[a, z] = I$, $|z| = q$. Оскільки G - неабелева група, то $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $|b| = q$, $p \equiv 1 \pmod{q}$ і G - група типу 13 теорема.

Нехай $q \neq r$. Тоді $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $|b| = q$, $|z| = r$. Якщо $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \neq I$, $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] \neq I$, то $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $Z(G) = I$. Можна вважати, що $D = \langle b \rangle$, $|b| = q$ і G - група типу 14 теорема.

Нехай $[\langle a \rangle, \langle z \rangle] = I$. Тоді $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $|b| = q$, $|z| = r$, $p \equiv 1 \pmod{q}$ і G - група типу 13 теорема. Випадок, коли D - група типу 2 теорема 2.2, розглянуто повністю.

Нехай $D = \langle z, b \rangle$ - група кватерніонів, тобто D - група типу 3 теорема 2.2. Оскільки $C_G(\langle a \rangle) \trianglelefteq G$, $G/C_G(\langle a \rangle) \cong \text{Aut}\langle a \rangle$ і $\text{Aut}\langle a \rangle$ - циклічна група, то без порушення загальності можна вважати, що $[a, z] = I$. Оскільки G - неабелева група і $b^2 \in Z(G)$, то b індукує на $\langle a \rangle$ автоморфізм порядку 2. Звідси $b^2 a b = a^{-1}$ і G - група типу 15 теорема.

Нехай D - підгрупа типу 4 теорема 2.2. Тоді D - циклічна група порядку $q^{\beta-1}r$, яка містить нормальну в G підгрупу M порядку $q^{\beta-1}r$, $\beta > 1$. Звідси $M = C_G(\langle a \rangle)$, $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $|z| = r$, $|b| = q^{\beta}$, $[a, z] = I$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{q}$. Якщо $r = p$, то $\beta < 3$. Справді, нехай це не так. Тоді $G \supseteq B = \langle b^q \rangle \times \langle az \rangle$, $|B| = q^{\beta-1}p$. Покажемо, що $B \geq M \geq \langle az \rangle$. Якщо $B \trianglelefteq G$, то $M = B$. Припустимо, що $B \not\trianglelefteq G$. Тоді B може бути підгрупою типу 4 теорема 2.2, $B \supseteq M \trianglelefteq G$, $|M| = q^{\beta-2}p$. Звідси $za \in M$ і тому $[\langle b \rangle, \langle az \rangle] = [\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in M \cap \langle a \rangle = I$, що неможливо. Отже, $\beta < 3$ і G - група типу 13.

Нехай, нарешті, D - група типу 5 теорема 2.2. Тоді $D = \langle b \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|b| = q^{\beta}$, $|z| = q$ - просте число, $\beta > 1$, $[b, z] \in \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$, $C_G(\langle a \rangle) = \langle b^{q^{\beta}} \rangle \times \langle z \rangle$, $[D:D'] > 4$. Оскільки G - неабелева група, то $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і $p \equiv 1 \pmod{q}$. При $D' = I$ $D = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $[a, z] = I$ і G - група типу 13. Нехай $D' \neq I$. Оскільки G - метациклічна група, то $\langle c \rangle \trianglelefteq D$, $[a, c] = I$ і $D/\langle c \rangle$ - циклічна група. Припустимо, що $c \in \langle b \rangle$. Тоді $\langle c \rangle \in \langle b^{q^{\beta}} \rangle$, $D/\langle c \rangle$ - нециклічна група. Значить, $c \notin \langle b \rangle$ і тому $D = \langle c \rangle \rtimes \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $D' \in \langle c \rangle$, $c = b^i z^j$, $(j, q) = 1$. Оскільки $[a, c] = I$, $C_G(\langle a \rangle) = \langle b^{q^{\beta}} \rangle \times \langle z \rangle$, то $i \equiv 0 \pmod{q}$. Звідси $c^q = b^{iq}$ і $\langle c^q \rangle \geq D' = \langle b^{q^{\beta-1}} \rangle$. Тому $b^{iq} \neq I$. Але $iq \equiv 0 \pmod{q^2}$. Отже, $\beta > 2$ і G - група типу 16 розглядуваної теорема. Випадок 2.2 розглянуто повністю, а з ним і випадок 2. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 16 теорема. То-

ді, очевидно, G - метациклічна група. Покажемо, що $G = \text{UHN}[]$ -група, тобто для будь-якого $\{A, B\} > 2$ $\{A, B\} \ni M \triangleleft G$. Якщо G - дедекіндова група, то це очевидно і тому для груп G одного з типів I, 9 достатність доведена.

Нехай G - недедекіндова група. Якщо $A \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$, чи $B = M$ і все доведено. Тому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$. Звідси $A \neq I$, $A \notin Z(G)$, $B \notin Z(G)$, $B \not\triangleleft G'$. Зрозуміло, що G - скінченна група і $|B|$ - добуток не менше ніж трьох простих чисел, $B < G, a|G|$ - добуток не менше ніж чотирьох простих чисел. Значить, для груп G типу I4 достатність доведена. Розглянемо два можливих випадки: 1) $|G'| = p$; 2) $|G'|$ - непросте число.

Випадок 1. У цьому випадку G - група одного з типів 2, 4, II, I3. Група G кожного з типів 2, 4 є метациклічною p -групою Міллера - Морено типу 2 наслідку 3.3, за твердженням якого $G = \text{UHN}[]$ -група. В групах G кожного з типів II, I3 $G' \cap B = I$. В групі G типу II для будь-якого g із G маємо $g^p \in Z(G)$. Ясно, що $B = \langle g \rangle, A \in \langle g^p \rangle = N \triangleleft G$, що й потрібно було довести, тобто група G типу II є $\text{UHN}[]$ -групою.

Нехай G - група типу I3. Тоді $G' = \langle a \rangle, |a| = p$. Нехай $g \notin p$. Тоді $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ - циклічна холлівська підгрупа з G . Без порушення загальності можна вважати, що $B \in \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $z \in Z(G)$. При $|Z| \neq I$ $\langle b^p \rangle \times \langle z \rangle \in Z(G)$. За теоремою 1.1 $A \in \langle b^p \rangle \times \langle z \rangle = N \triangleleft G$. При $|Z| = I$ $A \in \Phi(\Phi(\langle b \rangle)) \in Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що не так. Таким чином, $r = p$, тобто $|Z| = p$. Тоді $\beta < 3$. Оскільки $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, то $\beta = 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $b \in B = \langle g \rangle$. Підгрупа $\langle b \rangle \times \langle z \rangle$ ненормальна в G , $\langle b \rangle < B$ і тому $|B| = q^2 p$, $B = \langle b \rangle \times \langle z_1 \rangle$, $|z_1| = p$, $[a, z_1] = I$ і, значить, $z_1 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle b^p \rangle \times \langle z \rangle$. Звідси $z_1 = z$ і тому $A \in w(B) = \langle b^p \rangle \times \langle z \rangle = Z(G)$. Отже, $A \triangleleft G$, що не так, і, таким чином, група G типу I3 є $\text{UHN}[]$ -групою. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. В цьому випадку G - непросте число і G може бути групою одного з типів 2 - 9, II, I2, I5, I6. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $\langle a \rangle \cap B = I$; 2.2) $\langle a \rangle \cap B \neq I$.

Випадок 2.1. В цьому випадку для груп G кожного з типів 2 - 9, II для будь-якого g із G такого, що $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = I$, маємо $\langle g^{p^2} \rangle \triangleleft G$. Ясно, що $G/\langle a \rangle$ - циклічна група. Звідси $B = \langle g \rangle$, $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = I$, $A \in \langle g^{p^2} \rangle$ і тому $A \triangleleft G$, що суперечить вибору A . Для груп G типу I2 B - q -група, $\langle b \rangle$ - силовська q -підгрупа з G , $\langle b^q \rangle \in Z(G)$. Зрозумі-

ло, що $A \in \langle b^q \rangle$ і тому $A \triangleleft G$, що знову суперечить вибору A . В групах G кожного з типу 15, 16 B - теж q -група, $\langle b, z \rangle$ - силовська q -підгрупа з G , що містить нормальну в G максимальну підгрупу M . У групах типу 15 $M = \langle z \rangle$, а в групах G типу 16 $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Зрозуміло, що M належить будь-якій силовській q -підгрупі з G і A - власна немаксимальна підгрупа деякої силовської q -підгрупи з G . За теоремою 1.1 $A \in M$. Якщо $M = \langle z \rangle$, то $A \triangleleft G$, що не так. Нехай $M = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$. Тоді G - група типу 16, $\beta > 1$. Зрозуміло, що $A < M$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $B \in \langle b \rangle \wedge \langle z \rangle$. Якщо $A \triangleleft \langle b \rangle \wedge \langle z \rangle$, то $A \triangleleft G$. Отже, $A \not\triangleleft \langle b \rangle \wedge \langle z \rangle$, а це можливо, коли $|A| = q$. Але $|B| > q^2$ і при $B \in M$, $B \triangleleft G$, що знову не так. Таким чином, $B \notin M$. Звідси $\langle b \rangle \wedge \langle z \rangle = M \langle b \rangle$, $M \cap \langle b \rangle = N$, $A < N$, $|N| > p$, а тому $N \triangleleft G$ і, значить, N - шукана підгрупа. Випадок 2.1 розглянуто повністю.

Випадок 2.2. Нехай G - група типу II. Тоді $G = P \rtimes D$, P - 2-група типу 6 розглядуваної теореми, $|D| = q$, $q \neq 2$. Зрозуміло, що $B \cap \langle a \rangle = \langle a^q \rangle = \langle c \rangle \in Z(G)$. Оскільки $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел і $G/\langle a \rangle$ - циклічна група простого порядку, $[G:P] = q$, то $B/\langle c \rangle$ - циклічна група парного порядку. Якщо $B \in P$, то $|B| = 2^3 = 16 \in [B:\langle c \rangle]$. Звідси $\beta = 3$ і при $B = \langle g \rangle$ маємо $A \in \langle g^2 \rangle$, $A \in Z(G)$, а тому $A \triangleleft G$, що неможливо. При нециклічності підгрупи B маємо $B = \langle g \rangle \langle a^2 \rangle$, $B > G'$ і тому $B \triangleleft G$, що теж неможливо. Таким чином, $B \notin P$. Тоді $D \in B$, $B = X \rtimes D$, де $X = P \cap B$, $|X| > 2$. Якщо X - нециклічна група, то $X \geq w(P) \triangleleft G$ і $G/w(P)$ - дедекіндова група, а тому $B \triangleleft G$, що неможливо. Отже, $X = \langle g \rangle$, $|g| \in \{4, 8\}$, $c \in \langle g \rangle$. При $|g| = 4$ $A \in w(B) = \langle g^2 \rangle \times D \in Z(G)$ і тому знову $A \triangleleft G$, що неможливо. При $|g| = 8$ за теоремою 1.1 $A \in \langle g^2 \rangle \times D \in Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що теж неможливо. Достатність для груп типу II доведена.

Нехай G - група одного з типів 2 - 9. Покладемо $\langle u \rangle = \langle a \rangle \cap B$. Тоді $\langle u \rangle \triangleleft G$, $B = \langle u \rangle \langle x \rangle$, $|u| \in \{p, p^2\}$. Зрозуміло, що $A \notin \langle a \rangle$, $\langle u \rangle \in \Phi(G)$ і $G/\langle u \rangle = \bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \wedge \langle \bar{b} \rangle$, де $\langle \bar{a} \rangle = \langle a \rangle \langle u \rangle / \langle u \rangle = \langle bu \rangle$. Оскільки $A \notin \langle u \rangle$, то $|\bar{A}| > 1$, де $\bar{A} = \langle u \rangle A / \langle u \rangle$ і $\langle \bar{a} \rangle \cap \bar{A} = 1$. Очевидно, що $\bar{B} \in Z(\bar{G})$ і $B/\langle u \rangle = \bar{B}$. Зрозуміло, що $|B| > p$.

Нехай $|u| = p$. Оскільки $|B| > p^2$, то $|\bar{B}| > p$. Тоді $\bar{A} \in \Phi(\bar{B}) \in Z(\bar{G})$. Звідси $\langle u \rangle A = N \triangleleft G$ і $N < B$.

Нехай тепер $|u| = p^2$. Тоді G може бути 2-групою одного з типів 7 - 9. Група G кожного з цих типів не має циклічних максимальних підгруп, що містять $\langle u \rangle$ і відмінних від $\langle a \rangle$. Звідси B - нецикліч-

на група. Якщо B - група кватерніонів, то $A = \Phi(B) = \psi(\langle a \rangle) \triangleleft G$, що неможливо. Нехай B не є групою кватерніонів. Тоді $B' \in \langle y^2 \rangle \in Z(G)$, $|y^2| = 2$ і B - абелева метациклічна група, чи група Міллера - Морено. З будови цих груп (див. наприклад, [16]) B містить інволюцію d таку, що $\langle d \rangle \triangleleft \langle y \rangle = I$. З цього випливає, що G не може бути узагальненою групою кватерніонів і G містить нормальну підгрупу $\langle a \rangle \times \langle d \rangle$, $w(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$, $\langle y^2 \rangle \times \langle d \rangle \triangleleft G$. Легко бачити тепер, що $\langle y \rangle \times \langle d \rangle = \langle y \rangle \cdot \varphi(G) \triangleleft G$ і $G/(\langle y \rangle \times \langle d \rangle)$ - група кватерніонів порядку 8. Звідси $B \triangleleft G$, що теж неможливо, і тому достатність для груп G кожного з типів 2 - 9 доведена.

Нехай G - група типу I2. Зрозуміло, що тоді $A \not\subseteq \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \cap B = \langle y \rangle$, $|y| = p$, $B = \langle y \rangle \lambda Q_1$. (без порушення загальності можна вважати, що $Q_1 = B \cap \langle \phi \rangle$), $\langle y \rangle \triangleleft G$, $b^4 \in Z(G)$. За теоремою 1.1 $A \in \langle y \rangle \times \langle \phi^2 \rangle$ і тому $A \triangleleft G$, що не так і, значить, для груп G типу I2 достатність доведена.

Нехай, навпаки, G - група одного з типів I5, I6. Припустимо, що $a \in B$. Тоді в групі G типу I5 $G/\langle a \rangle$ - дедекіндова група і тому $B \triangleleft G$, що неможливо. В групі G типу I6 $B = \langle a \rangle \lambda Q_1$, де $Q_1 = B \cap \langle \phi \rangle \times \langle z \rangle$ і $|Q_1| = q$. Звідси $Q_1 \leq [b, z]$ і тому $G < B \triangleleft G$, що теж неможливо. Припустимо тепер, що $a \notin B$. Тоді $\langle a \rangle \cap B = I$ і B - q -підгрупа з G , яка без порушення загальності належить силовській q -підгрупі $Q = \langle z, b \rangle$ із G . Зрозуміло, що A - власна немасимальна підгрупа з Q . Звідси $A \in M \triangleleft G$, де $M = \langle z \rangle$ в групі G типу I5, і $M = \langle \phi^2 \rangle \times \langle z \rangle$ в групі G типу I6. Як і вище, або $A = \langle z^2 \rangle \in Z(G)$, що неможливо, або $A < Q_1 = M \cap B \triangleleft G$. Покладемо $Q_1 = N$ і будемо мати, що розглядувані типи груп G є УШН[]-групами. Всі випадки розглянуті. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.4. Локально ступінчасті ШН[]-групи G вичерпуються групами типу 3 теореми 3.1, у яких $\mathcal{L} \in \{1, 2\}$ і при $\mathcal{L} = 2$ $\beta = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Тоді за лемою 2.2 G - УШН[]-група, що задовольняє умову теореми 3.1 і може бути групою одного з типів I - 3 згаданої теореми. В групі G одного з типів I, 2 покладемо $A = Q$, $B = \Phi(P) \times Q$. За означення УШН[]-груп маємо $\{A, B\} \ni N \triangleleft G$. Звідси N - нормальна підпотенція підгрупа з G , силовська q -підгрупа якої є підгрупою Q . Тому $Q \triangleleft G$,

що в групах Шмідта неможливо і, значить, G не є групою одного з типів 1, 2 теорема 3.1.

Нехай G - група типу 3 теорема 3.1. Тоді $G = P \rtimes Q$, $|P| = p^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$. Якщо $d = 1$, то G - група з наслідку. Нехай $d = 3$. Тоді P - елементарна абелева група порядку p^3 . Нехай $B \in P$, $|B| = p^2$, $A \in B$, $|A| = p$. За означенням $\text{ШН}[\]$ -груп $[A, B] \ni N \triangleleft G$, що в групах Шмідта неможливо. Звідси $d = 2$. Нехай $\beta > 1$. Покладемо $B = A \rtimes \Phi(0)$, $|A| = p$. Тоді $[A, B] > 1$ і за означенням $\text{ШН}[\]$ -груп $[A, B] \ni N \triangleleft G$, $P \rtimes N = A \triangleleft G$, що суперечить будові груп Шмідта. Таким чином, $\beta = 1$. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група з наслідку. Тоді $G = P \rtimes Q$ - група типу 3 теорема 3.1, $|P| = p^d$, $d \in \{1, 2\}$, Q - циклічна група порядку q^β , $\Phi(0) \in Z(G)$ і при $d = 2$ $\beta = 1$. Зрозуміло, що G - локально ступінчаста група Шмідта. Покажемо, що для будь-якого відрізка $[A, B] > 1$ існує підгрупа N така, що $[A, B] \ni N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то покладемо відповідно $N = A$, чи $N = B$ і все доведено.

Нехай $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$. Тоді $B \not\triangleleft G'$, $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел. Звідси при $d = 2$ $G = B \triangleleft G$, що не так. Тому $d = 1$. Ясно, що $|G'| = p$. Тоді $B \cap G' = 1$. Без порушення загальності можна вважати, що B належить силовській q -підгрупі $Q = \langle b \rangle$ із G . Але тоді $A \in \Phi(Q) \in Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що знову не так. Всі можливі випадки розглянуті. Достатність доведена. Наслідок доведений.

О з н а ч е н н я 3.4 [18]. Група G називається гіперциклічною, якщо вона має цілком впорядкований ряд нормальних в G підгруп, фактори якого циклічні.

Гіперциклічна група G з скінченним згаданим рядом називається надрозв'язною [18].

Н а с л і д о к 3.5. Всі: N -, $\text{ШН}[\]$ -, $\text{ШН}[\]$ -, $\text{УШН}[\]$ -групи є розв'язними гіперциклічними групами. Всі $\text{УШН}[\]$ -групи Шмідта вичерпуються невідлупотентними метациклічними групами Міллера - Морено і співпадають з групами типу 3 теорема 3.1 при $d = 1$.

Доведення. Нехай G - досліджувана група. Покажемо, що G - гіперциклічна група. Якщо G - дедекіндова група, то це очевидно. Нехай G - недедекіндова група. За лемою 2.3 та теоремою 2.1 G - періо-

лична група. В силу твердження І леми 2.2 H -групи дедекіндові і тому можна вважати, що група G не є H -групою. Покажемо, що G містить неодиначну нормальну в G підгрупу $\langle x \rangle$. Припустимо, що для будь-якого неодиначного примарного елемента x із G $\langle x \rangle \ntriangleleft G$. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп із G , що містять $\langle x \rangle$. Зрозуміло, що тоді $[[\Phi(\langle x \rangle), \langle x \rangle]] > I$. За означенням $\text{ШН}()$ -груп маємо $(\Phi(\langle x \rangle), \langle x \rangle) \in N \triangleleft G$. Звідси $N = \langle x \rangle \triangleleft G$.

Нехай $G = \text{ШН}()$ -група. Тоді, очевидно, $[[\langle x \rangle, Z]] > I$. Якщо $\langle x \rangle$ максимальна підгрупа з Z , то за означенням $\text{ШН}()$ -груп $[\langle x \rangle, Z] \in N$, $N \triangleleft G$ і, значить, $N = \langle x \rangle$, що неможливо. Нехай $\langle x \rangle < B < Z$. Ясно, що $[[\langle x \rangle, B]] > I$. Тоді за означенням $\text{ШН}()$ -груп $[\langle x \rangle, B] \in N \triangleleft G$. Оскільки $N \neq \langle x \rangle$ і $N < B$, то $N < Z$, що суперечить вибору Z .

Нехай, нарешті, $G = \text{УШН}()$ -група і $|x| = p^d$. При $d > 1$ $[[\langle I \rangle, \langle x \rangle]] > 2$ і з означення $\text{УШН}()$ -груп $(\langle I \rangle, \langle x \rangle) \in N \triangleleft G$. Звідси N - неодиначна нормальна в G циклічна підгрупа. При $d = 1$ будь-яка циклічна підгрупа з Z має порядком просте число. Нехай для будь-якого вибраного x циклічна $\langle x \rangle$ - максимальна підгрупа з Z . Тоді $[[\langle I \rangle, Z]] > 2$ і за означенням $\text{УШН}()$ -груп $(\langle I \rangle, Z) \in N \triangleleft G$. Ясно, що в силу вибору Z $x \notin N$ і $Z = N \setminus \langle x \rangle$. Якщо N - циклічна група, то доводжуване твердження справедливе. Нехай N - нециклічна група. Тоді $[[\langle I \rangle, N]] > 2$ і знову за означенням $\text{УШН}()$ -груп $(\langle I \rangle, N) \in N_1 \triangleleft G$. Звідси Z має власну підгрупу $N_1 \setminus \langle x \rangle$, що суперечить максимальності $\langle x \rangle$ в Z . Значить, підгрупа $\langle x \rangle$ немаксимальна в Z . Тоді $[[\langle x \rangle, Z]] > 2$ і за означенням $\text{УШН}()$ -груп $(\langle x \rangle, Z) \in N \triangleleft G$ і знову отримали суперечність з вибором Z . Таким чином, група G має неодиначну циклічну нормальну підгрупу $\langle x \rangle$. За теоремою 2.1 $G/\langle x \rangle$ - група того ж класу, що і G . Тепер, як і раніше, $G/\langle x \rangle$ містить неодиначну нормальну циклічну підгрупу $X_2/\langle x \rangle$. Покладемо $X_1 = \langle x \rangle$, $X_0 = I$. Зрозуміло, що $X_0 < X_1 < X_2$. Розглядаючи фактор-групу G/X_2 знаходимо в ній нормальну неодиначну циклічну підгрупу X_3/X_2 . Побудову в G такого цілком впорядкованого по зростанню нормального ряду підгруп X_i методом трансфінітної індукції можна продовжити до тих пір, поки для деякого i одержимо $X_i = G$. За означенням 3.4 G - гіперциклічна група.

Ясно, що скінченна гіперциклічна група G надрозв'язна, а нескінченна гіперцентральна група G задовольняє умову теореми 2.3 і тому за її твердженням G - розв'язна група.

Перша частина наслідку доведена. Доведемо другу частину наслідку.

Необхідність. Нехай G - $U\mathcal{H}(n)$ -група Міллта. Тоді за попереднім і теоремою 2.1 G задовольняє умову теореми 3.1 і може бути надрозв'язною групою одного з типів I - 3 згаданої теореми. За відомими властивостями надрозв'язних груп Міллта (див., наприклад, [25]) G - група типу 3 теореми 3.1, у якій $\mathcal{L} = I$, тобто G - неінильпотентна метациклічна група Міллера - Морено. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група типу 3 теореми 3.1 і $\mathcal{L} = I$. Тоді $G = P \rtimes Q$ - скінченна неінильпотентна метациклічна група Міллера - Морено, $|P| = p > 2$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$. Покажемо, що G - $U\mathcal{H}(n)$ -група, тобто для $|(A, B)| > 2$ $(A, B) \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $G' = P$, $P \times \Phi(Q) = U$ - нормальна в G максимальна циклічна підгрупа. Якщо $P \in A$, то за N можна вибрати будь-яку власну підгрупу з B , що строго містить A . Нехай $P \notin A$. Тоді $P \cap A = I$. Якщо $B \in U$, то знову N - власна підгрупа з B , що містить A . Звідси $B \notin U$. Оскільки Q - максимальна підгрупа з G , то $A \in \Phi(Q)$. Якщо $B = Q$, то $N = U$. Нехай $B < Q$. Тоді $G = UB$. Тепер без порушення загальності можна вважати, що $Q \in B$. Тому $P \cap B = I$, $B = Q$. Зрозуміло, що $A \in \Phi(Q)$. Покладемо $N = \Phi(Q)$ і отримаємо $(A, B) \ni N \triangleleft G$, що і потрібно було довести. Достатність доведено. Наслідок повністю доведений.

О з н а ч е н н я 3.6. Неметациклічна група з метациклічними власними підгрупами називається мінімальною неметациклічною групою.

Т е о р е м а 3.3. Доказно ступінчасті мінімальні неметациклічні $U\mathcal{H}(n)$ -групи G мають вигляд $G = AX$, де $A = \langle a, b \rangle$ - нормальна в G p -підгрупа, $a \neq I$, X - q -група, p і q - прості числа та вичерпуються групами типів:

- 1) $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$;
- 2) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $\{b, x\} = a^3 = x^6$;
- 3) $G = A \times X$, A - група кватерніонів порядку 8, $|X| = 2$;
- 4) A - група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $|x| = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;
- 5) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $\{b, x\} = x^2 = a^2 b^2$;
- 6) $G = A \rtimes X$ - група Міллта типу 3 теореми 3.1, $|A| = p^2$, $X \in \{q, q^2\}$;
- 7) $G = A \rtimes X$ - група Міллта типу I теореми 3.1, A - група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle$, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle, \langle b^q \rangle = Z(G)$;

9) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, A - квазіцентрально підгрупа з G ;

10) $G = A \rtimes X$, $|A| = p$ - непарне число, $X = \langle x \rangle \ltimes \langle z \rangle$, $|x| = q^2$, $|z| = q$ - непарне число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

II) G - квазіциклічна p -група.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Припустимо спочатку, що G - дедекіндова група. Якщо G - гамільтонова група, то в силу твердження I легко бачити, що G - група типу 3 розглядуваної теореми.

Нехай G - абелева група. Якщо $|G| < \infty$, то G містить неметациклічну силовську p -підгрупу P . Оскільки $P' = I$, то $|w(P)| > p$. Звідси P містить елементарну абелеву підгрупу порядку p^3 , яка, очевидно, є мінімальною неметациклічною групою. Тому G - група типу I теореми. Нехай $|G| = \infty$. Якщо G містить квазіциклічну p -підгрупу U , то U - неметациклічна група. Звідси $G = U \wr G$ - група типу II.

Нехай G не містить квазіциклічних підгруп. Тоді G в силу відомих результатів (див., наприклад, [18]) містить скінченну неметациклічну підгрупу M . Тоді $M = G$, що неможливо.

Нехай G - неперіодична абелева група. Тоді G має періодичну частину T , яка, за попереднім, є скінченною метациклічною групою, і тому $G = T \times Z$, де Z - група без скруту. За відомих результатів (див., наприклад, [18]) G містить базисну підгрупу B , що є вільною абелевою групою. Підгрупа B^p є також вільною абелевою групою одного рангу з B і $B^p < B$. Звідси B^p і B - метациклічні групи.

Припустимо, що $F = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, де $|a| \in \{p, \infty\}$, $|b| \in \{p, \infty\}$, $|c| = \infty$. Тоді, очевидно, G містить власну підгрупу $F_1 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c^p \rangle$. Зрозуміло, що F і F_1 - неметациклічні підгрупи, що для F_1 неможливо за означенням групи G . Зрозуміло, що T і Z не можуть бути одночасно циклічними групами. Звідси і за попереднім при нециклічності T B - циклічна група і при нециклічності B $T = I$. Якщо тепер G - скінченно породжена група, то Z - метациклічна група і при нециклічності Z $T = I$. Звідси $G = Z$ - метациклічна група, що неможливо в силу означення G . Нехай Z - циклічна група. За по-

переднім, T не містить елементарних підгруп порядку p і тому T - циклічна група, що згідно з попереднім зауваженням теж неможливо. Значить, G може бути нескінченно породженою групою. Оскільки $|T| < \infty$, то Z - нескінченно породжена група, Z/B - нескінченна періодична група, яка, за попереднім, може бути лише квазіциклічною p -групою. Нехай $q \neq p$, q - просте число. Ясно, що Z/B - періодична група, яка містить неодиначну елементарну абелеву q -підгрупу B/B^q і $Z/B^q/B/B^q \cong Z/B$ - квазіциклічна p -група. Звідси Z/B^q - непримарна група. У нашому випадку можна вважати, що B^q - базисна підгрупа з Z і за попереднім, Z/B^q - квазіциклічна група і, значить, примарна. Отримали суперечність, яка завершує доведення необхідності у випадку, коли G - ледекіндова група.

Нехай G - неледекіндова група. Тоді G задовольняє умовам теореми 2.3, за твердженням якої G - черніковська група. Якщо G містить квазіциклічну підгрупу R , то, очевидно, $G = R$ і G - група типу II. Тому будемо вважати, що G не містить квазіциклічних підгруп і, значить, $|G| < \infty$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) G - вільно-потентна група; 2) G - невольно-потентна група.

Випадок 1. У цьому випадку за результатами з [27] G може бути лише p -групою одного із типів 1 - 5 теореми.

Випадок 2. Якщо G - неадрозв'язна група, то за результатом з [28] G - група Бюдта одного з типів 1,3 теореми 3.1. Якщо G - група типу 3 згаданої теореми, то $L = 2$ і G - група типу 6 теореми. Якщо G - група типу 1 теореми 3.1, то G - група типу 7 теореми.

Нехай далі G - адрозв'язна група. За результатами з [28 - 30] $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p$, $\langle a \rangle \triangleleft G$, $\langle b \rangle \triangleleft G$, X - примарна, чи біпримарна вільно-потентна холлівська підгрупа з G , $|b| \in \{1, r\}$, r - просте число, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b \rangle \rtimes X \triangleleft G$.

Припустимо, що $|b| = r$, $r \neq p$. Тоді за результатами з [28] $\langle b \rangle \rtimes X \not\triangleleft G$, X - нециклічна силовська q -підгрупа і $q \neq r$. Зрозуміло, що $\langle b \rangle \rtimes X$ не може бути групою жодного з типів теореми 2.2 і тому $\langle x \rangle \rtimes X \triangleleft G$, що неможливо. Отже, співвідношення $|b| = r$ і $r \neq p$ неможливе.

Нехай $|b| = 1$. Тоді в силу [28] $A = \langle a \rangle$, X - неледекіндова не-нормальна метациклічна q -підгрупа з G , яка, очевидно, може бути лише групою типу 5 теореми 2.2, для якої $X = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = q^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|z| = q$, $[x, z] = x^{q^{\Delta-1}}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$, $[X : X'] > 4$. Припустимо, що $\Delta > 2$. Тоді $y \in \langle x^q \rangle$, $|y| = q^2$.

Покладемо $c = uz$. Тоді $X = \langle x \rangle \langle c \rangle$. Оскільки $[x^q, z] = 1$, то $\langle c^q \rangle = \langle u^q \rangle = X'$. Звідси $\langle c \rangle \triangleleft G$ і $G = (A \times \langle c \rangle) \langle x \rangle$ - метациклічна група, що не так. Тому $\Delta = 2$, $q > 2$ і G - група типу 10.

Нехай $|b| \neq 1$. Тоді в силу [28] $|b| = p$. Оскільки $\langle b \rangle \ntriangleleft X$ ненормальна в G , то за наслідком 3.1 X - примарна група. В силу [28] $X = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$. $\langle b \rangle \times \langle x^q \rangle = M \triangleleft G$. Звідси $\langle x^q \rangle \triangleleft G$ і тому $Z(G) = \langle x^q \rangle$. При $\beta < 3$ G - група типу 8 теореми. Нехай $\beta > 2$. Покладемо $B = T \times \langle x^q \rangle$, $T \in A$, $|T| = p$. Зрозуміло, що $[[T, B]] > 2$. За означенням $\text{UHN}[]$ -груп $[T, B] \in N \triangleleft G$, $A \cap N = T$, $T \triangleleft G$ і тому A - квазіцентральна підгрупа з G а, G - група типу 9 теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = AX$ - група одного з типів I - II розглядуваної теореми. Тоді $A \triangleleft G$. Очевидно, G - що локально ступінчаста група. Зрозуміло, що група G типу II мінімальна неметациклічна. В роботі [27] встановлено, що групи кожного з типів I - 5 теж мінімальні неметациклічні. У роботі [28] встановлено, що групи кожного з типів 6 - 9 теж мінімальні неметациклічні, а для груп типу 10 це встановлено в роботах [29, 30]. Отже, залишається показати, що G - $\text{UHN}[]$ -група.

В групі G кожного з типів 3, II всі підгрупи нормальні і тому G - $\text{UHN}[]$ -група.

Нехай $[[T, B]] > 2$. Покажемо, що $[T, B] \in N \triangleleft G$. Якщо $T \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то покладемо відповідно $N = T$, чи $N = B$ і отримаємо, що G - $\text{UHN}[]$ -група. Тому в подальшому будемо вважати, що $T \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$, $T \notin Z(G)$, $T \neq 1$, $B \neq 1$.

Нехай G - група одного з типів 1 - 5 теореми. Покажемо, що у цьому випадку G - $\text{UHN}[]$ -група, тобто що при $[[T, B]] > 1$ $[T, B] \in N \triangleleft G$. Зрозуміло, що G - скінченна p -група. Знову якщо $T \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, то, як і вище, G - $\text{UHN}[]$ -група. Тому далі тек $T \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$. З умови $B \ntriangleleft G$ випливає, що B - власна немаксимальна підгрупа з G . Зрозуміло, що $|T| \geq p$, $|B| \geq p^2$, $|G| \geq p^4$. Оскільки в групах G типу I $|G| = p^3$, то, очевидно, G - $\text{UHN}[]$ -група. В групах G типу 2 $|G| = 3^4$ і $|B| = 3^2$, $|T| = 3$. G містить єдину нормальну елементарну абелеву підгрупу G' порядку 3^2 і нижній шар будь-якої циклічної підгрупи порядку 3^2 співпадає з $Z(G)$. Звідси з урахуванням того, що $B \ntriangleleft G$, випливає, що B не є елементарною абелевою групою порядку 3^2 . Якщо B - циклічна група, то $T = w(B) = Z(G)$, що неможливо. Отже, група G типу 2 є $\text{UHN}[]$ -групою.

Очевидно, що група G типу 3 гамільтонова і тому $G \in \text{UHN}[]$ -група.

Група типу 4 має порядок 2^4 , $|B| = 2^2$ і кожна її підгрупа порядку 2^2 містить G' , що неможливо, оскільки $B \ntriangleleft G$. Тому група G типу 4 є $\text{UHN}[]$ -групою.

Група G типу 5 має порядок 2^5 , $w(G) = G' = Z(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$, $\exp(G) = 4$ і G не містить підгруп, ізоморфних підгрупі кватерніонів. Звідси $|T| = 2^2$ і $|B| = 2^3$. Оскільки G не містить підгрупи кватерніонів, то $w(B)$ - нециклічна група і тому $B \ntriangleleft G$, що не так. Таким чином, група G типу 5 є $\text{UHN}[]$ -групою.

Значить, групи G кожного з типів 1 - 5 є $\text{UHN}[]$ -групами і навіть $\text{UHN}[]$ -групами.

Той факт, що група G кожного з типів 6, 7 є $\text{UHN}[]$ -групою, доведено в теоремі 3.1.

Нехай G - група типу 8. Очевидно, що $|B|$ ділиться на добуток не менше ніж трьох простих чисел, $G > B$ і тому $\beta = 2$. Тепер $|G|$ - добуток чотирьох простих чисел, $|B|$ - добуток трьох простих чисел, $|T|$ - просте число. Звідси B - максимальна підгрупа з G і має в G простий індекс. Оскільки $B > G$, то $A \notin B$, $[G:B] = p$ і $A \cap B = A_1$ - нормальна неединична силовська p -підгрупа з $B = A_1 \ltimes \langle x_1 \rangle$, $|A_1| = p$, $|x_1| = q^2$. Оскільки $Z(G) = \langle x_1^q \rangle$, то $\langle x_1^q \rangle = \langle x_1^p \rangle = Z(G)$ і $w(B) = A_1 \times \langle x_1^q \rangle$ - квазіцентральна підгрупа з G , що суперечить співвідношенню $T \in w(B)$ і $T \ntriangleleft G$. Значить, у цьому випадку $G \in \text{UHN}[]$ -група.

Нехай G - група типу 9. Знову $B \cap A = A_1$ - силовська p -підгрупа з B , $|A_1| \in \{1, p\}$, $A_1 \ntriangleleft G$. Оскільки $A \times \langle x_1^q \rangle$ - квазіцентральна підгрупа з G , то $T \in A \times \langle x_1^q \rangle$. Останнє співвідношення можливе, коли T містить такий q -елемент g , що $(A \times \langle x_1^q \rangle) \langle g \rangle = G$. Звідси g не належить підгрупі Фраттіні жодної силовської q -підгрупи з G . Оскільки $\langle x \rangle$ - силовська q -підгрупа з G , $\langle x_1^q \rangle = \Phi(\langle x \rangle) = Z(G)$ належить будь-якій силовській q -підгрупі з G , то $\langle x_1^q \rangle = \Phi(\langle g \rangle)$ і $\langle g \rangle$ - силовська q -підгрупа з G . Звідси $B = A_1 \ltimes \langle g \rangle$, $\langle g \rangle$ - максимальна підгрупа з B і T - максимальна підгрупа з B , що не так. Отже, група G типу 9 є $\text{UHN}[]$ -групою.

Нехай G - група типу 10. Тоді $T \notin A$. Нехай $A \in B$. Тоді $X' \ntriangleleft B$. Звідси $B \cap \langle X \rangle = 1$ і $|B| = pq$, що неможливо. Таким чином, $A \notin B$ і, значить, $A \cap B = 1$ і B - q -група. Без порушення загальності можна вважати, що $B \in X$ і T - власна немаксимальна підгрупа із X . Зро-

зуміло, що X - група типу 5 теореми 1.1, у якій підгрупа $M = \langle x^q \rangle \times x \langle z \rangle$ - єдина максимальна підгрупа з X , що містить всі власні не-максимальні підгрупи з X . Якщо $B = X$, то $N = M$. Нехай $B < X$. Тоді $|B| = q^2$, що неможливо. Значить, група G типу 10 є $U\mathcal{N}[]$ -групою. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.6. Нескінченні локально ступінчасті мінімальні неметациклічні $U\mathcal{N}[]$ -групи вичерпуються квазіциклічними групами.

З доведення достатності теореми 3.3 випливає такий наслідок.

Н а с л і д о к 3.7. Група G одного з типів I - 5 теореми 3.3 є $\mathcal{N}[]$ -групою.

Т е о р е м а 3.4. Нехай G - локально ступінчаста $U\mathcal{N}[]$ -група з мінімальною неметациклічною підгрупою C . Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять C .

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою C вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p і q - різні прості числа, $\Phi(P) \rtimes Q$ - ненільпотентна група Міллера - Морено, $p \neq 3$;

2) $G = (R \times P) \rtimes Q$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|Q| = q$, r, p і q - попарно різні прості числа, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $R \rtimes Q$ і $P \rtimes Q$ - ненільпотентні групи Міллера - Морено.

Доведення. Нехай G і C взяті з умови теореми і $X \geq C$, $X \not\leq C$. Зрозуміло, що X - неметациклічна підгрупа, яка може бути лише підгрупою типу 6 теореми 2.2. Звідси $X = A \rtimes \langle x \rangle$ - ненільпотентна скінченна група Міллера - Морено, $|A| = p^\alpha$, $|x| = q^\beta$, p і q - різні прості числа, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Зрозуміло, що G - ненільпотентна $U\mathcal{N}[]$ -група типу I теореми 2.3, а X - її підгрупа Шмідта типу 3 теореми 3.1. Тоді G - скінченна ненільпотентна дисперсивна група і $\alpha \in \{2, 3\}$, $\alpha + \beta < 5$.

Припустимо, що $\alpha = 3$. Тоді A - група типу I теореми 3.3 і $\beta = 1$, $M = A \times \langle x^q \rangle \trianglelefteq G$. Звідси $A \trianglelefteq G$. Нехай P - силовська p -підгрупа з G , Q - силовська q -підгрупа з G . Оскільки G - скінченна розв'язна дисперсивна група, то $G = \langle P, Q \rangle$. D - холлівська доповнення P в G . Не

порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x \rangle \in 0 \in D$ і $PQ = OP$. Ясно, що $X \cap D = \langle x \rangle$. Оскільки $\langle x \rangle \triangleleft X$, то $D \not\triangleleft G$. Тому D - підгрупа одного з типів I - 6 теореми 2.2. і $D > M_4 G$. Оскільки G - недедекіндова група, то за теоремою 2.3 G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неединичних прямих множників і G містить підгрупу $A \times M_4$. Звідси $M_4 = I$ і тому D може бути лише підгрупою одного з типів I, 2 теореми 2.2, а значить, $|D| = qr, q, r$ - необов'язково різні прості числа. Покладемо $Y = A \rtimes D$. Якщо $|D| > q$, то за попереднім і теоремою 2.2 $Y \triangleleft G$ і G/Y - скінченна p -група, ізоморфна P/A . Можливі випадки: 1) D - циклічна група; 2) D - нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $|\langle x \rangle| = q$, $\langle x \rangle$ - характеристична в D і, значить, X характеристична в Y , а тому $X \triangleleft G$, що неможливо.

Випадок 2. У цьому випадку D - група типу 2 теореми 2.2 і $D = \langle y \rangle \langle x \rangle$, $|y| = r$, $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = I$. Розглянемо далі два можливих випадки: 2.1) $r = q$; 2.2) $r \neq q$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $D = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$. В силу відомих результатів (див. наприклад, [31]) без порушення загальності можна вважати, що $A \rtimes \langle y \rangle = U$ не є групою Фробеніуса. Оскільки $M_4 = I$, то U - ненільпотентна група, у якій існує елемент $a \in A$ такий, що $|a| = p$, $[a, y] = I$. Зрозуміло, що $\langle a \rangle \triangleleft U$. За теоремою Машке (див. наприклад, [17]) $A = A_1 \rtimes \langle a \rangle$, A_1 - елементарна абелева група порядку p^2 , $A_1 \triangleleft U$. Для підгрупи X типу 3 теореми 3.1 3 - показник p за модулем q і тому $A_1 \rtimes \langle y \rangle$ не містить підгруп Шмідта. Звідси $[A_1, \langle y \rangle] = I$ і тому $[A, \langle y \rangle] = I$, а значить, $y \in M_4$, що неможливо, оскільки $M_4 = I$. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку при $\langle x \rangle \triangleleft D$ одержимо, що X - характеристична в Y і тому $X \triangleleft G$, що не так. Отже, $|D| = qr$, $\langle x \rangle \not\triangleleft D$, $|x| = q$. Тоді в силу відомих результатів (див. наприклад, [16]) $D = \langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $\langle y \rangle = D'$, $|y| = r$. Знову $U = A \rtimes \langle y \rangle$ - характеристична підгрупа в Y і тому $U \triangleleft G$. Оскільки $M_4 = I$, то U - ненільпотентна група.

Припустимо, що U не є групою Фробеніуса. Тоді в силу [31] $a \in A$, $[a, y] = I$, $|a| = p$, $a \in Z(U) < A$. Ясно, що $Z(U)$ - характеристична підгрупа в U , тому $Z(U) \triangleleft Y$ і A містить власну неединичну підгрупу $z \in A$, допустиму відносно $\langle x \rangle$, що суперечить мінімальності A в $X = A \rtimes \langle x \rangle$.

Нехай U - група Фробеніуса. Тоді для будь-яких елементів простих

порядків $a \in A$ і $d \in D$ $[a, d] \neq I$. В силу $\{3I\}$ Y - група Фробеніуса з ненормальним множителем D , який не може бути неабелевою групою порядку q . Таким чином, випадки 1 і 2 неможливі. Тому при $\ell = 3$ залишається розглянути випадок, коли $|D| = q$. Звідси $D = \langle x \rangle$, і за дисперсивністю $G/P \trianglelefteq G$, $G = P \rtimes \langle x \rangle$. Оскільки $X \not\trianglelefteq G$, то $A < P$. Покажемо, що $A \in Z(P)$. Дійсно, $Z(P) \trianglelefteq G$, $A \cap Z(P) \neq I$, $Z(P) \cap X$ - неединична нормальна в X p -підгрупа. Оскільки A - мінімальна нормальна підгрупа в X , то $Z(P) \cap A = A$. Зрозуміло, що всі елементи порядку $p \in P$ належать A . Звідси $N_P(\langle x \rangle) = C_P(x) = C_A(x) = I$. Оскільки A - мінімальна неметациклічна підгрупа типу I теореми 3.1, то, за попереднім, ненормальна в G підгрупа X , що містить A , може бути лише неінильпотентною підгрупою типу 6 теореми 2.2. Звідси $B \trianglelefteq G$. Покладемо $V = B \rtimes \langle x \rangle$. Ясно, що $V = BX$, $BA \rtimes X = A$, $V/A = B/A \rtimes X/A$ і $|V/A| = pq$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 3, то V/A - нільпотентна група. Звідси $X \trianglelefteq G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [17]) $V = XZ$, де $Z = N_V(\langle x \rangle) = \langle x \rangle \rtimes B_1 = \langle x \rangle \rtimes B_2$, $B_1 = Z \cap B \trianglelefteq Z$. Оскільки $N_A(\langle x \rangle) = I$, то $B_1 \cap A = I$, $B = A \rtimes B_1$, $A < B$, $B_1 \neq I$. Звідси знайдеться такий елемент порядку p із $B_1 \in B \in P$, який не належить A , що суперечить попередньому. Отже, випадок $\ell = 3$ приводить до суперечності.

Таким чином, $\ell = 2$ і тому X - група типу 6 теореми 3.3, за твердженням якої X - мінімальна неметациклічна група, що містить O , і тому $X = O$. Звідси при $X > O$ $X \not\trianglelefteq G$. Перша частина теореми доведена. Доведемо її другу частину.

Необхідність. Нехай $C \not\trianglelefteq G$. Тоді за попереднім $C = A \rtimes \langle x \rangle$, $|A| = p^2$, $|x| = q^\beta$, p і q - різні прості числа, $\beta < 3$, $A \rtimes \langle x \rangle \trianglelefteq G$. Звідси $A \trianglelefteq G$, $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, A - мінімальна нормальна підгрупа з $C, \langle x \rangle$ - максимальна силовська q -підгрупа. Ясно, що C - група типу 6 теореми 2.2 і тому $p \neq 3$, 2 - показник p за модулем q , $q > 2$. Як і раніше, за теоремою 2.3 $G = PD$, P - силовська p -підгрупа з G , D - її холівське доповнення, G - скінченна неінильпотентна дисперсивна група. Звідси $\langle x \rangle \in O \in D$, O - силовська q -підгрупа з G . Оскільки G - розв'язна група, то не порушуючи загальності можна вважати, що G містить дисперсивну підгрупу PQ . Тоді або $PQ = P \rtimes Q$, або $PQ = Q \rtimes P$. Якщо $PQ = Q \rtimes P$, то PQ містить C і $C \cap Q = \langle x \rangle \trianglelefteq C$, що неможливо оскільки $\langle x \rangle \not\trianglelefteq C$. Звідси $PQ = P \rtimes Q$ і в G існує підгрупа $H = P \rtimes \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $Z(P) \trianglelefteq H$. Відомо, що $Z(P) \cap A \neq I$. Оскільки A - мінімальна нормальна підгрупа як в C , так і в G , і $Z(P) \cap C \trianglelefteq C$,

то $A \in Z(P)$.

Покажемо, що P - метациклічна група. Дійсно, нехай це не так. Тоді P містить мінімальну неметациклічну підгрупу T , яка за теоремою 2.1 є $U(3n)$ -групою, що задовольняє умову теореми 3.3 і може бути лише групою одного з типів 1 - 5 теореми 3.3. Припустимо, що T - група типу 1 теореми 3.3. Тоді P містить елемент $u, |u| = p$ і $\langle u \rangle \triangleleft A = I$. Без порушення загальності можна вважати, що $T = A \times \langle u \rangle$. За попереднім, $T \triangleleft G$ і G/T - дедекіндова група. Покладемо $U = T \triangleleft \langle x \rangle$. Тоді $U/T \triangleleft G/T$ і, значить, $U \triangleleft G$. За теоремою Машке (див., наприклад, [17]), не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle u \rangle \triangleleft U$. Оскільки показник p за модулем q дорівнює 2, то $\langle u \rangle \triangleleft \langle x \rangle$ - нільпотентна група. Звідси $\langle u \rangle \in Z(U)$, $U = \langle u \rangle \times C$, де C - характеристична підгрупа з U . Таким чином, $C \triangleleft G$, що не так. Отже, T не може бути групою типу 1 теореми 3.3 і всі елементи порядку p належать $A \in Z(P)$. Звідси $N_P(\langle x \rangle) = C_P(\langle x \rangle) = I$ і тому $[N : N_H(\langle x \rangle)] = |P|$. Оскільки в групах типу 2 теореми 3.3 є нецентральні елементи порядку 3, то T не може бути групою типу 2 згаданої теореми. Нехай T - група одного з типів 3, 4 теореми 3.3. Тоді $|T| = 2$, $T \triangleleft G$, $T' \subset A$, що суперечить мінімальності A в G . Отже, T не може бути ні групою типу 3 чи 4 теореми 3.3.

Нехай T - група типу 5 згаданої теореми. Тоді $|A| = 4$, $q = 3$ і за теоремою Силова (див., наприклад, [16]) $[N : N_H(\langle x \rangle)] = 2^5 = 1 + 3k$. Звідси $2^5 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Але, очевидно, $31 \not\equiv 0 \pmod{3}$ і тому T не може бути групою типу 5 теореми 3.3. Отже, P - метациклічна група.

Покажемо тепер, що $P' = I$. Нехай це не так. Тоді $w(P') \triangleleft N$, $w(P') \in A$, $w(P') \neq I$, що суперечить мінімальності A в N . Звідси P - метациклічна абелева група з нециклічною метациклічною підгрупою $w(P) = A$ і $|A| = p^2$. Зрозуміло, що $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^4$, $|b| = p^2$, $w(P) = A = \langle a^{p^2} \rangle \times \langle b^{p^2} \rangle$ і тому без порушення загальності можна вважати, що $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geq \beta$. Покажемо, що $\alpha = \beta$. Нехай $\alpha > \beta$. Тоді, як відомо, $P^{p^2} = \langle a^{p^{\alpha}} \rangle$ - неединична характеристична підгрупа в P . Тому $\langle a^{p^{\alpha}} \rangle \triangleleft N$. Звідси $w(\langle a \rangle) = w(\langle a^{p^{\alpha}} \rangle)$ - характеристична підгрупа з P^{p^2} порядку p . Значить, $w(\langle a \rangle) \subset A$, $w(\langle a \rangle) \triangleleft N$ і тому $w(\langle a \rangle) \triangleleft C$, що суперечить мінімальності A в C . Таким чином, $\alpha = \beta$.

Нехай $\beta > 2$. Тоді $P > P_1 = \langle a \rangle \times \langle b^{p^2} \rangle$, $|b^{p^2}| \geq p^2$. Зрозуміло, що P_1 не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теореми 2.2. Тому

$P_1 \triangleleft G$, $|a| > |b|^p$. Тоді для P_1 , як і раніше для P , $w(\langle a \rangle) \triangleleft C$, що неможливо. Таким чином, $\ell < 3$. Ясно, що G містить підгрупу $V = A \rtimes D$. Оскільки $C \cap D = C \cap Q = \langle x \rangle \triangleleft C$, то $D \triangleleft V$ і D - підгрупа одного з типів 1 - 6 теорема 2.2. D містить підгрупу $M \triangleleft G$, $C_D(P) = C_D(A) = M$. Оскільки G - недедекіндова група, то за теоремою 2.3 з урахуванням того, що G містить підгрупу $A \times M$, маємо, що M не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток двох неодиначних прямих множників. Можливі два випадки: 1) $V \triangleleft G$; 2) $V \not\triangleleft G$.

Випадок 1. У цьому випадку $V < G$, тому $A < P$ і, значить, $\ell = 2$, V - неінволюційна група і тому V - підгрупа типу 5 теорема 2.2. За попереднім, $V = C$ і тому $D = \langle x \rangle = Q$, $|x| = p^f$. Припустимо, що $\beta > 1$. Тоді $\langle x^p \rangle \in Z(G)$ і в G існує підгрупа $K = \langle \langle a \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle \rangle$, яка не може бути підгрупою жодного з типів 1 - 6 теорема 2.2. Звідси $K \triangleleft G$, $\langle a \rangle \times \langle b^p \rangle = P_1$ - силовська p -підгрупа з K і тому $P_1 \triangleleft G$. Як і раніше для P_1 , $w(\langle a \rangle) \triangleleft C$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$ і G - група типу 1 теорема.

Випадок 2. У цьому випадку $[V, P] \in V \cap P = A$. Зрозуміло, що $[P, \langle x \rangle] = P$. Тому $P \triangleleft A$, значить, $A = P$ і $G = P \rtimes D = V$. Оскільки підгрупа D кожного з типів 4, 6 теорема 2.2 містить підгрупу M , що розкладається в прямий добуток двох неодиначних множників, то D не може бути підгрупою ні типу 4, ні типу 6 згаданої теорема. Якщо припустити, що $\langle x \rangle \triangleleft D$, то $C \triangleleft G$, що неможливо. Отже, $\langle x \rangle \not\triangleleft D$ - недедекіндова група і тому D не може бути ні підгрупою типу 1, ні підгрупою типу 3 теорема 2.2. Якщо D - підгрупа типу 5 теорема 2.2, то $|M| = q$, $D = Q$, $Q' = 1$, що неможливо. Значить, залишається випадок, коли D - група типу 2 теорема 2.2. Тоді $|D| = qr$, $D' \neq 1$, q і r - різні прості числа. Відомо [16], що $D = R \rtimes \langle x \rangle$, де $|R| = r$, $\langle x \rangle = Q$, $|x| = q$, $R = \langle y \rangle$, $|y| = r$, $D' = R$, $r \equiv 1 \pmod{q}$ і D - неінволюційна група Міллера - Морено. Покладемо $S = P \rtimes R$. Тоді $S \triangleleft G$ і $G = S \rtimes Q$. Припустимо, що S - неінволюційна група. Якщо S - група Фробеніуса, то групою Фробеніуса, очевидно, є і підгрупа C . Звідси групою Фробеніуса буде і G з ненормальним множником D порядку qr . Відомо [31], що в групі Фробеніуса D - циклічна група. Суперечність. Отже, S не є групою Фробеніуса. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $\{a, y\} = 1$ і, значить, $a \in Z(S)$. Оскільки S - неінволюційна група, то $Z(S) = \langle a \rangle$ і тому $\langle a \rangle \triangleleft G$, що суперечить мінімальності A в C . Звідси S - інволюційна група, $S = P \times R$, і тому G - група типу 2 теорема. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1,2 розглядуваної теореми. Тоді $G = T \rtimes Q$, $T = P \rtimes R$, $|P| = p^2$, $|R| \in \{1, r\}$, $|Q| = q$, p, q, r - попарно різні прості числа, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $p \neq 3$, $q \neq 2$. $T = G' = [T, Q]$, $U \rtimes Q = V$ - підгрупа Міллера - Морено порядку p^2q , що є мінімальною неметациклічною групою типу 6 теореми 3.3 (в групі G типу 1 $U = \Phi(P)$, а в групі G типу 2 $U = P$). Очевидно, що G - скінченна група, а тому вона локально ступінчаста. Покажемо, що $V \not\trianglelefteq G$. Нехай $V \trianglelefteq G$. Ясно, що $G = TV$, $T \cap V = U$, $[T, V] = [U, V] = U = V'$. Звідси $U \trianglelefteq G$, $G/U = T/U \times V/U$ - абелева група. Оскільки $G' = T$, $U < T$, то T/U - неединичний комутант G/U , що не так. Отже, $V \not\trianglelefteq G$.

Покажемо, що G - УШН[]-група, тобто що при $|[A, B]| > 2$ $[A, B] \in N$ і $N \trianglelefteq G$. Якщо $A \trianglelefteq G$, чи $B \trianglelefteq G$, то покладемо відповідно $A = N$, чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\trianglelefteq G$, $B \not\trianglelefteq G$. Звідси $|A| > 1$, $|B|$ ділиться на добуток трьох простих чисел, $B < G$, $B \not\leq G'$ і тому $T \cap B = D \trianglelefteq B$, $D < T$, $\{B : D\} \in \{1, q\}$.

Нехай $\{B : D\} = 1$. Тоді $B = D < T$ і $|B|$ ділиться на добуток трьох простих чисел. В групі G типу 2 $|T| = gr^2$ і тому в даному випадку G може бути групою типу 1, у якій $T = P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|B| = |D| = p^3$. Звідси B - нециклічна група і тому $w(P) = w(B) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$, $A \in w(B) = N = w(P) \trianglelefteq G$, що й треба було довести, тобто в цьому випадку G є УШН[]-групою.

Нехай, накінєць, $\{B : D\} = q$. Тоді, не порушуючи загальності можна вважати, що $Q \in B = D \rtimes Q$ і $G = TB$. В групі G кожного з розглядуваних типів Q - 2-максимальна підгрупа з G , $G > B > Q$ і тому Q - максимальна підгрупа з B . Звідси A не містить q -елементів і, таким чином, $A \leq D$. Оскільки $T' = 1$, то $D \trianglelefteq G$, і поклавши, $D = N$, будемо мати, що G - УШН[]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3.8. Неабелеві метациклічні УШН[]-групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 3.2: 2; $|a| = 8$; 3; 4; $k = 1$; 3; 5 - 9; 11; P - група типу 6 теореми 3.2, $\beta < 4$; 12; 15; 16.

Доведення безпосередньо випливає з теореми 3.2.

О з н а ч е н н я 3.6 [32]. Група, у якій нормальні всі неабелеві підгрупи, називається метаміліттовою.

Н а с л і д о к 3.9. Неабелеві метациклічні метатамільтонові $U\mathcal{M}[n]$ -групи G з комутантом непростого порядку вичерпуються групами таких типів теореми 3.2: 2, $|a| = 8$; 3; 4, $k = 2$; 5; 6; II, P - група типу 6 теореми 3.2, $\beta < 4$.

Доведення. Необхідність. Зрозуміло, що G - задовольняє умову наслідку 3.8 і може бути лише групою одного з типів згаданого наслідку. Те, що групи G кожного з типів 7, 8, 12, 15, 16 із теореми 3.2 є метатамільтоновими, випливає із робіт [20 - 22]. Необхідність доведена.

Достатність. Всі групи розглядуваного наслідку є в силу наслідку 3.8 скінченними нільпотентними метациклічними $U\mathcal{M}[n]$ - p -групами з циклічним комутантом порядку p^2 . Звідси $\Phi(G') \in Z(G)$ і тому в силу результатів із роботи [33] G - метатамільтонова група. Достатність доведена. Наслідок доведено.

Н а с л і д о к 3.10. Метациклічні неметатамільтонові $U\mathcal{M}[n]$ -групи G вичернюються групами таких типів теореми 3.2: 7 - 9; 12; 15; 16.

Доведення. Необхідність. Нехай G - досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 3.2 і може бути групою одного з типів I - 16 згаданої теореми. Оскільки G - неметатамільтонова група, то $|G'|$ - непросте число. Тоді G - метациклічна неабелева група з комутантом непростого порядку одного із типів I - 16, що не є групою жодного з типів наслідку 3.9, але є групою одного з типів наслідку 3.8. Звідси G - група одного з типів розглядуваного наслідку. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 3.8. Наслідок доведено.

4. БУДОВА $U\mathcal{M}[n]$ -ГРУП І ЇХ ПІДКЛАСІВ

Л е м а 4.1. В довільній $U\mathcal{M}[n]$ -групі G нормальні всі нециклічні підгрупи та підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп. Ненормальними в G можуть бути лише примарні циклічні підгрупи.

Доведення. Нехай G - досліджувана група, U - її підгрупа і x -

довільний елемент із U . Припустимо спочатку, що U - нециклічна група. Тоді $[[\langle x \rangle, U]] > 1$ і, значить, $[\langle x \rangle, U] \in N(x) \triangleleft G$. Зрозуміло, що підгрупа N , яка породжена всіма підгрупами $N(x)$, для всіх x із U нормальна в G . Звідси $U = N \cap U \triangleleft G$.

Нехай $U = \langle x \rangle$ - циклічна група. Ясно, що при $101 \in \{1, p\}$, p - просте число, $\Phi(U) \triangleleft G$. Нехай $|U|$ ділиться на добуток двох простих чисел. Ясно $U \triangleleft G$, то $\Phi(U) \triangleleft G$. Нехай $U \not\triangleleft G$. Тоді $[[\Phi(U), U]] > 1$ і, значить, $[\Phi(U), U] \in N \triangleleft G$. Ясно, що $\Phi(U)$ - характеристична підгрупа в N і тому $\Phi(U) \triangleleft G$. Таким чином, завжди $\Phi(U) \triangleleft G$.

Покажемо, що U - примарна циклічна група. Нехай це не так, тобто U - непримарна група. Тоді $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$, $[[\langle y \rangle, U]] > 1$, $[[\langle z \rangle, U]] > 1$. За означенням $\text{ШН}[]$ -груп $[\langle y \rangle, U] \in N(y)$, $N(y) \triangleleft G$, $[\langle z \rangle, U] \in N(z) \triangleleft G$. Звідси $N(y)N(z) = U \triangleleft G$, що неможливо, оскільки $U \not\triangleleft G$. Отже, U - примарна циклічна група. Лема доведена.

Л е м а 4.2. Нехай G - $\text{ШН}[]$ -група, що містить підгрупу $U = A \times B$, $A \triangleleft G$, $B \neq 1$. Тоді A - квазіцентральна підгрупа в G .

Доведення. Нехай G та U взято з умови леми і X - довільна підгрупа з A . Покажемо, що $X \triangleleft G$. При $X = 1$, чи $X = A$ це очевидно. Значить, $1 < X < A$. Тоді за лемою 4.1 $(X \times B) \triangleleft G$ і тому $(X \times B) \triangleleft A = X \triangleleft G$ і, значить, A - квазіцентральна підгрупа в G . Лема доведена.

Н а с л і д о к 4.1. Нільпотентна недедекіндова $\text{ШН}[]$ -група G є p -групою, у якій нормальні всі нециклічні підгрупи.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3, за твердженням якої $G = P \times D$, P - недедекіндова силовська черніківська p -підгрупа в G , D - її черніківське нехвалівське доповнення в G . За лемою 4.1 всі нециклічні підгрупи з P нормальні в G . Припустимо, що $D \neq 1$. Тоді за лемою 4.2 P - недедекіндова група, що неможливо. Отже, G - p -група. Наслідок доведено.

Л е м а 4.3. Локально ступінчасті нільпотентні $\text{ШН}[]$ -групи G вичерпуються групами Шмідта типу $G = P \rtimes Q$; P - силовська p -під-

група з G , Q - силовська q -підгрупа з G , p і q - різні прості числа, $|P| \in \{p^2, p\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; при $|P| = p$, $p \equiv 1 \pmod{q}$; при $|P| = p^2$, $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1$, 2 - показник p за модулем q .

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з леми. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3 і може бути лише скінченною дисперсивною неінильпотентною групою типу I згаданої теореми. Звідси G містить підгрупу Шмідта $S = P \rtimes Q$, яка в свою чергу за теоремою 2.1 задовольняє умову теореми 3.1 і може бути лише групою одного з типів I - 3 теореми 3.1. За наслідком 3.4 S є групою розглядуваної леми.

Покажемо, що $S = G$. Дійсно, за лемою 4.1 $S \triangleleft G$. За лемою Фратіні (див., наприклад, [17]) $G = SD$, де $D = N_G(Q)$, $D \cap P = N_P(Q) = 1$. Очевидно, що $P \triangleleft G$, $G = P \rtimes D$, $S \cap D = Q \triangleleft D$. Зрозуміло, що $D \not\triangleleft G$ і тому за лемою 4.1 D - примарна циклічна q -група, у якій $\Phi(D) \triangleleft G$. Звідси $D = \langle y \rangle$, $\langle y \rangle \geq Q$, $Q \ntriangleleft G$, $y^q \in Z(G)$. Тоді $Q \not\subseteq \langle y^q \rangle$. Звідси $Q = \langle y \rangle$ і тому $D = Q$, $G = S$. Необхідність доведена.

Достатність доведена в наслідку 3.4. Лема доведена.

Т е о р е м а 4.1. Локально ступінчасті $\text{SH}[p]$ -групи G в черніковських групах, у яких $\{G^q\} \subseteq \{p, p^2\}$, $[G:Z(G)] \in \{p^2q, pq\}$, p і q - не обов'язково різні прості числа та вичерпуються групами таких типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^4ab = a^{-1}$;
- 3) $G = C \times Q$, Q - неединична локально циклічна 2-група, Q - група кватерніонів порядку 8;
- 4) $G = (C \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, C - локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[a, b] = c \in C$, $|c| = p$, $|a| = |b| = p$, $[C, \langle b \rangle] = 1$;
- 5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 8$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = a^{x^6}$;
- 6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = b^{x^2} = a^2b^2$;
- 7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;
- 8) $G = P \rtimes Q$, P - силовська p -підгрупа з G , Q - силовська q -підгрупа з G , p і q - різні прості числа, $|P| \in \{p, p^2\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; при $|P| = p$, $p \equiv 1 \pmod{q}$; при $|P| = p^2$, $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1$, 2 - показник p за модулем q .

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з теореми. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3, за твердженням якої G - черніковська розв'язна недедекіндова дисперсивна група, для якої можливі випадки: 1) G - скінченна неінильпотентна група; 2) G - нильпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 4.1, за твердженням якої G - група типу 8 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову наслідку 4.1, за твердженням якого G - p -група з нормальними нециклічними підгрупами. З опису цих груп [34,35] одержимо, що G - група одного з типів 1 - 7 теореми.

Зрозуміло, що групі G кожного з типів 1 - 8 G і $Z(G)$ мають ті ж властивості, які вказані в початковому формулюванні теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G - група одного з типів 1 - 8 теореми. Зрозуміло, що G - недедекіндова локально ступінчаста група. Покажемо, що G - $\text{HN}[]$ -група. Для груп G типу 8 це доведено в наслідку 3.4. Тому в подальшому будемо вважати, що G - нильпотентна p -група одного з типів 1 - 7 теореми.

Зрозуміло, що в силу [34,35] кожна нециклічна підгрупа A G нормальна. Нехай $|[A,B]| > 1$. Покажемо, що $[A,B] \not\leq N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$, чи $B \triangleleft G$, то покладемо відповідно $A = N$, чи $B = N$ і все доведено. Тому $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$, $B < G$, $B \not\leq G'$ і B - циклічна група. Йсно, що $|B| > p^2$. Оскільки $|G'| \leq p^2$ і $B = \langle u \rangle$, то, як відомо, $u^{p^2} \in Z(G)$. В силу вибору A та B $A = \langle u^p \rangle$. Звідси при $|G'| = p$ маємо, що $A \in Z(G)$, що не так. Тоді $|G'| = p^2$. Зауважимо, що в групах G кожного з типів 5 - 7 $u^2 \in Z(G)$ і тому $A \triangleleft G$, що не так, а в групах G кожного з типів 1,3,4 $|G'| = p$. Отже, в подальшому G може бути лише групою типу 2 теореми. Оскільки $\langle u \rangle = B \not\triangleleft G$, то $\langle u \rangle$ співпадає з однією з підгруп $\langle b \rangle$, $\langle (ab)^2 \rangle$. Дійсно, $u = a^4 b^3$, $b^4 ab = a^4$. Звідси при парному j $u^{2j} = a^{2j} b^{2j} \in \langle a^2 \rangle$, при непарному j $u^{2j} = b^{2j}$. Оскільки $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $b^2 \in Z(G)$, то $A = \langle u^2 \rangle \triangleleft G$, що знову неможливо. Отже, G - $\text{HN}[]$ -група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 4.2. Нехай G - локально ступінчаста недедекіндова група. Тоді справедливі такі твердження:

1) будь-яка $\text{HN}[]$ -група є групою з нормальними нециклічними підгрупами;

2) існують неперіодичні метациклічні групи G та скінченна група G в нормальному словесному 2-підгрупі, ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, у яких нормальні всі нециклічні підгрупи і G - не SHN -група;

3) для довільної p -групи G наступні умови еквівалентні:

а) $G - \text{SHN}$ - група; б) G - група з нормальними нециклічними підгрупами.

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді твердження 1 випливає з лемми 4.1. В силу [34,35] серед груп з нормальними нециклічними підгрупами є групи таких типів: $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \infty$, $b^4 a b = a^4$, і група Шмідта $G = P \rtimes \langle x \rangle$, у якій P - група кватерніонів порядку 8, які недедекіндові. За теоремою 4.1 вказані типи груп не може бути SHN -групою. Цим твердження 2 доведено. В силу [34,35] група кожного з типів 1 - 7 теореми 4.1 є групою, у якій всі нециклічні підгрупи нормальні. Це й доводить твердження 3 наслідку. Наслідок доведено.

Т е о р е м а 4.2. Класи N -, SHN - , SHN - груп співпадають з класом недедекіндових груп.

Доведення. Необхідність. Якщо G - N -група, то за лемою 2.2 G - недедекіндова група. Нехай $G - \text{SHN}$ -група, чи $G - \text{SHN}$ -група і X - будь-яка її підгрупа. Покажемо, що $X \trianglelefteq G$. Якщо $X = G$, чи $X = 1$, то це очевидно. Тому далі $1 < X < G$. Припустимо, що $X \not\trianglelefteq G$. Тоді за лемою 2.1 $G - \text{SHN}$ -група, для якої справедливе твердження лемми 4.1. Звідси $X = \langle x \rangle$, $|x| = p^4$, $p > 0$, $\langle x^p \rangle \trianglelefteq G$. Для SHN -груп G $\langle x^p \rangle, \langle x \rangle \in N \trianglelefteq G$ і тому $\langle x \rangle = N$, що не так.

Нехай $G - \text{SHN}$ -група. Позначимо через Z перетин всіх нормальних підгруп з G , які містять $\langle x \rangle$. За вибором $Z > \langle x \rangle$. Ясно, що $[\langle x \rangle, Z] > 1$ і тому за означенням SHN -груп $[\langle x \rangle, Z] \in N \trianglelefteq G$. Звідси $N < Z$, що неможливо за вибором Z . Отже, завжди $X \trianglelefteq G$ і тому G - недедекіндова група. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. - М.: Наука. - 1980. - 384 с.
2. Best E. and Taussky O. A class of groups // Proc. RJA. - XLVIII, sect A. - 1942. - P. 55-62.
3. Абрамовский И.Н., Карганолов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи матем. наук. - 1958. - XIII, вып. 3(81). - С. 242-243.
4. Robinson D. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1964. - 60. - P. 21-38.
5. Пилаев В.В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп. - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1976. - с. III-139.
6. Курдаченко Л.А., Горещий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, XI. - С. 42-46.
7. Горещий В.Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 127-138.
8. Кузенин Н.Ф., Курдаченко Л.А., Пилаев В.В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп // Укр. мат. журн. - 1981. - 33, N3. - С. 407-410.
9. Mann A. Groups with dense normal subgroups. - Israel J. Math. - 1968. - v. 6, XI. - с. 13-25.
10. Пилаев В.В., Кузенин Н.Ф. Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. - Киев, 1980. - 17 с. - Деп. в ВИНТИ, N 19-26-80.
11. Пилаев В.В., Кузенин Н.Ф. Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XIV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. - С. 57-58.
12. Пилаев В.В., Кузенин Н.Ф. Конечные ненильпотентные группы со

- строга плотной системой инвариантных подгрупп //VI Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл.- Киев:Наукова думка,1978.- С.49-50.
13. Кузенный Н.Ф., Пилаев В.В. Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск:Изд-во Краснояр. ун-та,1979.- С.84-85.
14. Пилаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы с строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 //XV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.- Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.- С. 126.
15. Hegerstein N. A remark on finite groups // Proceedings. Amer. Math. Soc.- 1958.- 9, N2.- P.255-257.
16. Холл М. Теория групп.- М.:Изд-во иностр. лит.,1962.-468 с.
17. Каргачов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп:3-е изд.-М.: Наука,1982.- 288 с.
18. Куроп А.Г. Теория групп.- М.:Наука,1967.- 648 с.
19. Устижанинов А.Д. Конечные 2-группы с тремя инволюциями // Сиб. мат. журн.- 1972.- 13, N1.- С.182-197.
20. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метатамилтоновых групп.- Киев:Киев. пед. ин-т,1983.- 22с.
21. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение разрешимых метатамилтоновых групп // Докл. АН УССР, Сер. А.- 1985.- N2.- С.6-8.
22. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Строение метациклических метатамилтоновых групп // Современный анализ и его приложения.- Киев: Наукова думка.-1989.- С. 173-183.
23. Dixon J.D. The structure of linear groups.- New York:Van Nostrand, 1971.- 183 p.
24. Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп //Алгебра и логика.- 1970.- N5.- С.575-611.
25. Левченко С.С., Кузенный Н.Ф. Группы с условием дисперсивности для подгрупп.- Киев: Киев. пед. ин-т,1985.- 96 с.
26. Huppert B. Endliche Gruppen I.- Berlin - Heidelberg - New-York: Springer - Verlag, 1967. - 793 p.
27. Blackburn N. Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Math. Soc.- 1961.- II, N 41.- P.1-22.
28. Curcio M. Classification on finite minimal non-metacyclic groups // Acta Soc. Math.-1984.-47, N 3 - 4.- P. 289-295.

29. Лавищенко С.С., Кузенин Н.Ф., Семко Н.Н. Конструктивное описание конечных минимальных неметациклических групп. - Киев, 1966. - 41 с. - Деп. в УкрНИИТИ 04.01.87, N 33-Ук 87.
30. Лавищенко С.С., Кузенин Н.Ф., Семко Н.Н., Томилек Л. Строение конечных минимальных неметациклических групп // Prirodne vedy, Matematika. Zbornik pedagogickej fakulty v prešovskej univerzity P.I. Safarik. - Kosice, 1990. - Proc. XXIV, Zvazok I, - S. 49-97.
31. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. - М.: Наука, 1967. - III с.
32. Ромалис Г.М. О метамильтоновых группах // Успехи матем. наук. - 1962. - 17, №6. - С. 228.
33. Махнев А.А. О конечных метамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та. - 1976. - 10. - С. 60-76.
34. Ліман Ф.М. Групи з інваріантними нецикліческими підгрупами / Док. АН УРСР. - 1967. - 12. - С. 1073-1075.
35. Ліман Ф.Н. 2-групи з неінваріантними нецикліческими підгрупами // Мат. заметки. - 1968. - 4, №1. - С. 74-83.

З М І С Т

ВСТУП	3
1. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ	4
2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ	18
3. ДЕЯКІ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ	27
4. БУДОВА ІННІ 1-ГРУП І ЇХ ПІДКЛАСІВ	53
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	58

Наукове видання

Семко Микола Миколайович
Кузенний Микола Феодосійович

ГРУПИ З ДЕЯКИМИ УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ
НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

Підписано до друку 02.98. Формат А- . Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 3,34 . Ум. фарбо-відб. 3,34. Обл.-вид. арк. 3,05
Тираж 1000 пр. Зам. 50

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3