

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

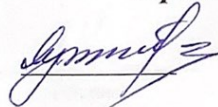
КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

**Формування умінь учнів доводити твердження в курсі
алгебри і початків аналізу**

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, СОМ-23-1 групи,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Чорного Ігоря Олеговича

Науковий керівник



Оксана ЯРОВА, к.ф.-м.н., доцент

Керівник освітньо-професійної програми



Микола СЕМКО, д.ф.-м.н., професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
кібернетики та прикладної математики
протокол від «29» 01 2024 № 1

Завідувач кафедри



Оксана ЯРОВА, к.ф.-м.н., доцент

Ірпінь – 2024

Реєстрація № 9

19.12.2024
(дата)

І.В. Сасків
(підпис відповідальної особи)

Результати перевірки

до захисту
(до захисту, на доопрацювання)

13.12.2024
(дата)

І.В. Сасків
(підпис)

Результат захисту

90.8
(оцінка)

19.01.2025
(дата)

І.В. Сасків
(підпис)

Голова комісії:

І.В. Сасків
(підпис)

Григорівський М.В.
(ініціали, прізвище)

Члени комісії:

І.В. Сасків
(підпис)

Сасків М.М.
(ініціали, прізвище)

І.В. Сасків
(підпис)

Сасків І.В.
(ініціали, прізвище)

І.В. Сасків
(підпис)

Дрова О.А.
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії, членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	27		29.01.25
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	8		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	45		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	10		29.01.25
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	5		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	25		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	45		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	90		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
90	A	5 (відмінно)	29.01.25	

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

АНОТАЦІЯ

Ігор Чорний. «Формування вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу»

Проаналізовано види і структуру математичних тверджень курсу алгебри і початків аналізу, визначено твердження, які доцільно доводити, та логічні основи і раціональні методи їх доведення.

Запропоновано підходи до вивчення теоретичних тверджень окремих тем курсу алгебри і початків аналізу та розроблено конкретні методичні рекомендації для навчання учнів доведенню цих тверджень.

Ключові слова: методика навчання математики, твердження, доведення, алгебра і початки аналізу.

ANNOTATION

Ihor Chorny. «Formation of pupils' ability to prove statements in the course of algebra and the beginnings of analysis»

The types and structure of mathematical statements in the course of algebra and the beginnings of analysis are analysed. The statements that should be proved and the logical foundations and rational methods of their proving are determined. Approaches to the study of theoretical statements of certain topics of the algebra course and the beginnings of analysis are proposed. Specific methodological recommendations for teaching pupils to prove these statements are developed.

Key words: mathematics teaching method, statement, proof, algebra and beginnings of analysis

ЗМІСТ

Вступ	6
Розділ 1. Теоретичні основи доведення тверджень курсу алгебри і початків аналізу	11
1.1. Види і структура математичних тверджень курсу алгебри і початків аналізу	11
1.2. Методичні засади доведення математичних тверджень курсу алгебри і початків аналізу	14
Розділ 2. Методика формування вмінь старшокласників доводити математичні твердження	21
2.1. Методичні особливості доведення теоретичних положень тем «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», «Степенева функція», «Тригонометричні функції», «Показникова та логарифмічна функції»	24
2.2. Методичні особливості доведення теоретичних положень тем «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування»	44
Висновки	52
Список використаних джерел	54

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасне реформування освітньої галузі відображає тенденцію до забезпечення розвитку кожної особистості, враховуючи її унікальні особливості, індивідуальні можливості, нахили та здібності. І хоч розвиток особистості, підвищення рівня інтелектуального розвитку та творчих здібностей є важливими аспектами, мета реформування освіти полягає також у підготовці молодих людей до життя в сучасному суспільстві та розвитку їхніх навичок, які будуть корисними в майбутньому.

Забезпечення різнобічного розвитку особистості та вдосконалення освіти є важливими аспектами сучасної національної школи. Освіта має надавати знання, які є практично корисними у житті та професійній діяльності, а також сприяти розвитку критичного й творчого мислення, інтелектуальних здібностей, формувати вміння застосовувати набуті знання у різних ситуаціях.

Перебудова навчально-виховного процесу та переорієнтація методів навчання на проблемно-діяльнісний підхід є важливими кроками у цьому напрямку. Проблемно-діяльнісний підхід дозволяє учням активно залучатися до вирішення реальних проблем, застосовувати отримані знання у практичній діяльності, розвивати навички самостійного мислення та проблемного аналізу.

У сучасних умовах навчання має спрямовуватися не на засвоєння готових знань, а на розвиток вмінь і навичок учнів застосовувати знання для досягнення певних цілей. Цей підхід сприяє інтелектуальному розвитку учнів, оскільки вони навчаються мислити самостійно, розв'язувати проблеми і застосовувати знання у нових ситуаціях.

Цього можна досягнути шляхом створення педагогічних ситуацій, де учні активно досліджують проблему, висувають гіпотези, роблять самостійні відкриття, доводять нові для себе математичні твердження. Тому зміст навчального матеріалу має бути спрямованим на розвиток самостійності учнів розвивати вміння мислити творчо, критично та логічно, що є ключовими навичками в сучасному світі.

Одним із найоптимальніших шляхів досягнення цієї мети є включення до змісту навчального матеріалу доведення математичних тверджень, адже цей процес сприяє глибокому розумінню математичних концепцій, розвитку аналітичних навичок та формуванню вмінь раціонально й творчо застосовувати математичні знання у нових ситуаціях.

У роботах з вікової психології та психології навчання старшокласників [6] відмічається, що поряд з інтересом до фактів, у старшокласників проявляється інтерес до теоретичних проблем, до методів наукового дослідження, до самостійної пошукової роботи з розв'язування складних задач, до яких відносять і задачі на доведення.

Проблему навчання учнів доведенню тверджень шкільного курсу математики досліджували видатні вчені-методисти: О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. Г. Болтянський, М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. В. Погорєлов, З. А. Скопец, А. А. Столяр, В. О. Тадеєв, Н. А. Тарасенкова, І. Ф. Шаригін та ін. [4, 10]

Ця проблема розглядалася з різних боків. З точки зору побудови шкільного курсу математики на дедуктивній основі її розробляли О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Болтянський, О. В. Погорєлов, В. О. Тадеєв, І. Ф. Шаригін та ін. [13]

На основі формування в учнів узагальнених умінь та прийомів евристичної діяльності цю проблему досліджували М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань, В. С. Прач, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швець та ін. [1, 3]

З точки зору врахування різних рівнів та профілів навчання проблема знайшла відображення у роботах А. І. Акуленко, М. І. Бурди, С. В. Іванової, К. В. Недялкової, І. А. Сверчевської, П. О. Сиваківського та ін. [8]

У шкільному курсі математики доведенням приділяють достатню увагу, але часто у процесі вивчення теорем і їх доведень спостерігається формалізм у знаннях і вміннях учнів. Основна причина в тому, що в підручниках доведення теорем звичайно викладено синтетичним методом і учні просто вивчають готове

доведення. Це призводить швидше до тренування пам'яті, ніж до формування і розвитку вмінь доводити. У результаті учні вивчають доведення окремого твердження, слабо володіють узагальненими методами і способами доведень для широкого кола тверджень. Особливо вчителі математики недооцінюють роль доведень в курсі алгебри і початків аналізу, вважаючи, що доведеннями достатньо займаються в курсі геометрії. Тому вчителі дуже часто під час вивчення алгебри і початків аналізу орієнтують учнів на ознайомлення з фактами, на їх практичне застосування, а не на методи доведення цих фактів.

Рівень логічної строгості курсу «Алгебра і початки аналізу» є значно вищим ніж рівень курсу «Алгебра». Якщо в курсі алгебри основними твердженнями, що підлягають доведенню, є задачі на доведення, то в курсі алгебри і початків аналізу з'являється чимало теорем, властивостей, формул, які доводяться.

Курс алгебри і початків аналізу характеризується наявністю багатьох способів, прийомів, методів доведень. З'являються не тільки нові методи доведень (метод математичної індукції, метод границь, методи диференціального і інтегрального числення), а й окремі прийоми доведень, характерні для доведення властивостей певних класів об'єктів. Наприклад: теореми про похідну суми, добутку, частки двох функцій, окремих елементарних функцій доводяться на основі означення похідної.

Алгебра і початки аналізу є фундаментом для вивчення математичних дисциплін у закладах вищої освіти, які викладаються у вигляді дедуктивної теорії, що передбачає доведення великої кількості тверджень. Досить часто студентам важко дається доведення теорем виведення формул тощо. Це може бути спричинено тим, що шкільна програма не завжди забезпечує достатню підготовку учнів до роботи з доведенням, або через недостатню практику у цій царині. Усвідомлення необхідності доведення математичних тверджень приходить не само собою, а є результатом тривалої копіткої праці. Таке усвідомлення є запорукою успішного вивчення математичних дисциплін у закладах вищої освіти.

Від рівня розвитку критичного, творчого та логічного мислення школярів залежить не тільки якість навчання їх навчання у закладах вищої освіти, а й їх подальший успіх у трудовій діяльності та житті загалом. [17, 18]

У сучасному світі, де інновації та зміни відбуваються з «космічною» швидкістю, важливо бути здатним аналізувати нову інформацію, відокремлювати факти від спекуляцій, встановлювати зв'язки між фактами і аргументами, приймати обґрунтовані рішення, генерувати нові ідеї, розв'язувати нестандартні завдання та інноваційно підходити до проблем.

Усе сказане вище обумовило вибір теми даного дослідження: «Формування вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу».

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри і початків аналізу у закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження – методика формування вмінь учнів доводити математичні твердження в курсі алгебри і початків аналізу.

Мета дослідження – визначення й експериментальне обґрунтування шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження у закладах загальної середньої освіти.

Відповідно до об'єкта і предмета дослідження для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі завдання:

- 1) проаналізувати навчально-методичну літературу з проблеми дослідження та стан розробленості цієї проблеми в шкільній практиці;
- 2) визначити в курсі алгебри і початків аналізу математичні твердження, які доцільно доводити, встановити їх структуру та раціональні методи доведення;
- 3) розробити методику формування вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу.

Для розв'язання поставлених завдань використовувалися такі методи досліджень: теоретичний аналіз, порівняння, узагальнення наукової, психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, змісту

програм і підручників з алгебри і початків аналізу для 10 та 11 класів; спостереження, бесіди, аналіз досвіду роботи учителів.

Результати дослідження: визначено твердження курсу «Алгебра і початки аналізу», які доцільно доводити, встановлено їх структуру та раціональні методи доведення; запропоновано підходи до вивчення теоретичних тверджень деяких тем цього курсу та розроблено методику формування вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕНЬ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1. Види і структура математичних тверджень курсу алгебри і початків аналізу та логічні основи їх доведення

Математичні доведення і виведення виникли на основі реальних зв'язків речей і їх властивостей. Логічне доведення стає в математиці методом тоді, коли воно безпосередньо не відбувається за зв'язками реального світу, а навпаки, за зв'язками логічними визначаються зв'язки реальні. Необхідність появи математичного доведення випливає з абстрактного характеру предмета математики. Варто погодитися з думкою М. Кованцова, що «необхідність у спеціальному математичному доведенні є вимушеним наслідком нашої відмови дати яку-небудь фізичну характеристику нашим об'єктам. Необхідність доведення – це свого роду розплата за те, що ми надали такий абстрактний характер нашій науці».

Доведення істинності твердження якраз і складається з ланцюжка обґрунтувань твердження, що доводиться, за допомогою інших тверджень, які вважаються на момент доведення даного твердження істинними. Лейбніц під доведенням деякого судження розумів такий розклад його суб'єкта на частини, який показує, що в цьому суб'єкті як частина міститься і предикат твердження, що доводиться.

Проаналізуємо різні тлумачення поняття «доведення». У Філософській енциклопедії під доведенням розуміють процес встановлення об'єктивної істинності шляхом практичних і теоретичних дій (і засобів). М. Кондаков розглядає доведення як логічну дію, в процесі якої істинність якої-небудь думки обґрунтовується за допомогою інших думок. У підручниках з логіки маємо таке: «Доведення – це логічний прийом, який обґрунтовує істинність якого-небудь судження за допомогою інших суджень, істинність яких встановлена»; «доведення – процес думки, який полягає в обґрунтуванні істинності якого-небудь положення за допомогою інших положень, істинність яких уже

встановлено»; «З логічної точки зору доведення не є самий процес обґрунтування. Доведення – особлива логічна форма, що виражає логічний результат процесу обґрунтування, який уже відбувся» [24].

Як бачимо, в одних випадках під доведенням розуміють процес, який встановлює зв'язок між твердженням, яке доводиться, і вже відомими твердженнями, в інших – особливу логічну форму обґрунтування твердження. Останні розглядають доведення як результат процесу, що вже відбувся, як результат вже виконаної пізнавальної діяльності. Ми розглядатимемо доведення як особливу логічну форму обґрунтування твердження.

Оскільки одним із головних завдань навчання математики, зокрема алгебри і початків аналізу, є формування вмінь встановлювати істинність математичного висловлення (найчастіше за допомогою доведення), а значення істинності висловлення залежить від його логічної структури, то для розвитку вмінь доводити математичні твердження важливими є знання про види та логічну структуру висловлень.

Треба відмітити, що терміни «формула», «теорема», «ознака», «властивість», «наслідок», «лема» виражають з логічної точки зору один і той самий зміст – істинне твердження, що виражає ту чи іншу властивість об'єкта (геометричного, арифметичного чи алгебраїчного) або зв'язок між різними властивостями.

Будь-яку теорему курсу алгебри і початків аналізу можна записати у вигляді категоричного або умовного судження. Наприклад, категоричне судження: логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів; умовне судження: якщо послідовність (x_n) має границю a , то ця границя єдина. Не змінюючи суті теореми для встановлення її структури, тобто складових частин теореми і зв'язків між ними, можна, а часто і треба, від категоричної форми судження перейти до умовної.

Під умовним судженням розуміють таку форму думки, в якій відображається залежність того чи іншого явища від яких-небудь умов і в якій основа і наслідок з'єднуються з допомогою логічної зв'язки «якщо ... , то...».

Теорема складається з трьох частин: преамбули, умови, висновку. Якщо теорема записана у вигляді умовного судження, тобто $(\forall x): A(x) \Rightarrow B(x)$, то

$\forall x$ – пояснювальна частина теореми (преамбула);

$A(x)$ – умова (основа);

$B(x)$ – наслідок (висновок).

Умова теореми – це те, що в теоремі задано як відоме. Висновок теореми – те, що треба довести, використовуючи умову. Отже, теорему можна розглядати як складне висловлення, утворене з двох висловлень – умови теореми і висновку теореми.

Теореми можна поділити умовно на прості й складені. Якщо умова і висновок – прості висловлення, то й теорема проста; якщо умова чи висновок – складені висловлення, то й теорема складена. Так, теорема «Якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою послідовністю, то число a є границею послідовності (y_n) » – проста, бо її умова «різниця між y_n і числом a є нескінченно малою послідовністю» і висновок «число a є границею послідовності (y_n) » є простими висловленнями, а теорема Вейерштрасса «Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю» – складена, бо її умова «послідовність монотонна і обмежена» є складеним висловленням. Аналіз підручників з алгебри і початків аналізу [2, 5, 7, 12, 25, 26] засвідчив, що в курсі алгебри і початків аналізу зустрічаються як прості, так і складені теореми.

Оскільки більшість теорем курсу алгебри і початків аналізу можна записати в умовному вигляді і теорема – це висловлення, то за умови істинності всіх вказаних видів висловлень матимемо відповідні види теорем: пряма, обернена, протилежна, обернена до протилежної (протилежна до оберненої).

1.2. Методичні засади доведення математичних тверджень курсу алгебри і початків аналізу

Курс алгебри і початків аналізу характеризується наявністю багатьох методів і способів доведення. У методиці математики під методом доведення розуміють сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій та операцій, за допомогою яких доводиться великий клас теорем. Поняття «спосіб доведення» – вужче поняття. Спосіб доведення – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій та операцій, які використовуються у разі доведення окремої теореми або невеликої сукупності теорем певного виду.

У курсі алгебри і початків аналізу розглядаються не тільки методи і способи доведень, а й окремі прийоми доведень, характерні для доведення властивостей певних класів об'єктів.

Усі доведення, які розглядаються в курсі алгебри і початків аналізу, можна поділити на прямі і непрямі за методом їх проведення. Під прямим доведенням розумітимемо таке, що має істинну посилку, з якої за допомогою законів логіки отримуємо істинність твердження, що доводимо. Непряме доведення – це таке, в якому істинність твердження обґрунтовується за допомогою заперечення твердження, що даному суперечить.

До прямих методів доведення відносяться: аналітичний, синтетичний, аналітико-синтетичний, метод математичної індукції, метод повної індукції. Доведення методом від супротивного – непряме доведення. Розглянемо логічну основу кожного з названих методів.

У сучасних Програмах з математики для загальноосвітніх навчальних закладів у 10–11 класах для різних рівнів і профілів навчання визначені завдання щодо навчання учнів доводити математичні твердження. Так, до загальних завдань шкільної математичної освіти належить завдання щодо «формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач ...». У програмі з математики для 10–11 класів (рівень

стандарту) вказано: випускник загальноосвітнього закладу «вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі...» [15], а на профільному рівні «логічно мислить (аналізує та порівнює, прогнозує результат, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклад, висуває та перевіряє гіпотези); володіє алгоритмами та евристиками...» [14].

Таким чином, проведенням аналізом нормативних документів щодо цільової моделі шкільного курсу математики встановлено: навчання учнів доводити математичні твердження віднесено до основних завдань шкільної математичної освіти. Виконання цього завдання забезпечується використанням базових основ і результатів актуальних досліджень методики навчання математики. Домовимося про трактування важливих положень щодо базових основ методики навчання учнів доводити математичні твердження.

Навчання учнів доведенню передбачає:

- 1) аналіз готових доведень, запропонованих вчителем або представлених у підручнику, та їх відтворення;
- 2) «самостійне відкриття», безперечно, на основі підготовчої роботи, організованої вчителем, математичного факту (тобто теоретичного положення: властивості, ознаки, формули);
- 3) висунення ідеї доведення, створення і реалізацію плану доведення;
- 4) аналіз доведення з метою виправлення можливих неточностей та помилок.

Ураховуючи важливість навчання учнів, особливо тих, які вивчають математику на поглибленому рівні, доведенню математичних тверджень різними способами, вважаємо за доцільне до вказаних 4-х аспектів трактування поняття «навчання учнів доведенню тверджень» додати і п'ятий, – аналіз різних способів доведення математичних тверджень, їх порівняння і вибір раціонального [16]. Навчання доведенням у шкільному курсі математики проводиться поступово. Спочатку в учнів формується потреба у логічних обґрунтуваннях та уміння виконувати дедуктивні висновки у простих випадках (5–6 класи). Потім учнів

ознайомлюють з евристичними прийомами, їх використанням і навчають виконувати ланцюжок логічних кроків при індуктивних та простіших дедуктивних міркуваннях (6–7 класи). У 7-ому класі починається навчання учнів самостійному аналізу готового доведення, виділенню окремих його етапів та визначенню ідеї доведення. Під час навчання учнів у 7–9 класах формуються уміння використовувати методи доведення, визначені програмою; самостійно доводити твердження; виправляти помилки і окремі огріхи у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження, порівнювати їх і визначати переваги кожного, вибирати серед декількох способів доведення раціональніший.

Така робота щодо навчання учнів доведенню математичних тверджень продовжується, поглиблюється та узагальнюється при навчанні учнів у 10–11 класах. Одна з важливих закономірностей методики навчання математики полягає в тому, що рівень навчання багато в чому визначається як насиченістю курсу математики теоретичними положеннями, які передбачено обов'язково доводити (теореми, опорні задачі-факти), так і відповідним ступенем навчання доведенням: сформованістю в учнів умінь використовувати різні методи під час доведення тверджень; виправляти помилки у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження та ін.

Таким чином, провідною ознакою поглибленого навчання математики є наявність у його змістовій складовій великої кількості тверджень, які передбачено доводити, у тому числі і самостійно, та високий рівень сформованості в учнів умінь доводити такі твердження. Разом із тим, ураховуючи загальне завдання шкільної математичної освіти щодо формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження на будь-якому рівні навчання математики передбачено обов'язкове доведення центральних, ключових теорем [27].

Розглянемо деякі особливості методики навчання учнів доводити математичні твердження. З нашої точки зору, під час проектування роботи з учнями над вивченням математичних тверджень, зокрема теорем або опорних задач-фактів, важливим є виокремлення етапів такої роботи. У методиці навчання

математики існують різні підходи до визначення етапів організації роботи над вивченням теорем. За підходом, запропонованим З. І. Слєпкань, виділяються такі етапи [20]:

- 1) актуалізація опорних знань та умінь учнів;
- 2) мотивація вивчення теореми;
- 3) введення назви (за можливістю) і формулювання;
- 4) скорочений запис;
- 5) пошук, проведення і запис доведення;
- 6) закріплення (повторне формулювання теореми; визначення її виду; домовленість про скорочену назву; зв'язування до яких об'єктів можна застосувати цю теорему; з'ясування плану доведення теореми);
- 7) використання теореми.

Недялкова К. В. виокремлює наступні етапи роботи з учнями над твердженням:

- 1) підготовча робота (актуалізація опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивація назви поняття (терміну), експеримент, висування гіпотези та ін.);
- 2) формулювання теореми (аналіз умови, побудова рисунка, короткий запис «дано – довести»);
- 3) доведення теореми;
- 4) закріплення доведення;
- 5) застосування й узагальнення теореми.

Ця систематизація має певні переваги – скорочення кількості етапів за рахунок об'єднання 1 і 2 етапів, а також 3 і 4. Але наш досвід аналізу уроків математики вчителів-початківців свідчить: вони часто утруднюються при розробці мотивації вивчення теореми і тому її не проводять. Виділення мотивації у окремий етап має сприяти приділенню більшої уваги такій важливій складовій роботи з теоремою. Щодо етапу засвоєння формулювання теореми, то деяким учителям така робота здається марною витратою часу, оскільки для них формулювання теореми добре відоме і вони не припускають можливих

утруднень учнів. Але така точка зору є помилковою. Саме тому вважаємо доцільним виокремити етап роботи над засвоєння формулювання теореми. З урахуванням результатів проведеного аналізу методичної літератури та експериментальних досліджень, нами були внесені часткові корективи та уточнення у систему етапів роботи над математичним твердженням, запропановану у навчальному посібнику.

Вважаємо за доцільне рекомендувати вчителям під час підготовки уроків із вивчення теорем користуватися такою системою етапів роботи над теоремою:

- 1) актуалізація опорних знань і умінь учнів;
- 2) мотивація вивчення теореми;
- 3) робота над введенням і засвоєнням формулювання теореми;
- 4) побудова рисунка (у геометрії), короткий запис умови і вимоги теореми;
- 5) робота над доведенням теореми;
- 6) застосування теореми у найпростіших випадках;
- 7) застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики.

Розглянемо детальніше сутність роботи на кожному із запропонованих етапів.

1. Актуалізація опорних знань і умінь учнів. На цьому етапі передбачено повторення основних відомостей (означень понять, математичних фактів, ідеї та етапів застосування окремих методів доведень), які використовуються у формулюванні та доведенні теореми. При повторенні конкретного методу доведення (від супротивного, векторного, або координатного та ін.) або прийому доведення (використання допоміжної побудови, введення допоміжних елементів та ін.) доцільно на попередньому уроку повторити ідею і етапи застосування даного методу або сутність прийому і включити у домашнє завдання задачу, яка розв'язується за допомогою цього методу або прийому. У такому випадку під час перевірки домашнього завдання відбувається і актуалізація опорних знань і умінь учнів.

2. *Мотивація вивчення теореми.* Тут доцільно використовувати: цікаві історичні відомості, пов'язані з даною теоремою; наочність (моделі, креслення, комп'ютерну графіку), проведення експерименту; встановлення доцільності вивчення даного твердження для подальшого застосування при розв'язуванні задач практичного змісту або доведенні інших теорем.

3. *Робота над введенням і засвоєнням формулювання теореми.* При введенні формулювання теореми користуємося або конкретно-індуктивним, або абстрактнодедуктивним методами. У першому випадку вчитель створює проблемну ситуацію (на основі виконання побудов, або проведення вимірювань, або розв'язування задач на обчислення або виявлення певних залежностей), яка вирішується учнями самостійно або з частковою допомогою вчителя. Підсумком такої роботи є висування варіантів твердження і уточнення його до правильного формулювання теореми. У другому випадку вчитель самостійно формулює теорему, а завдання учнів – зрозуміти її зміст. Вважається, що використання конкретно-індуктивного методу сприяє свідомому засвоєнню теореми, кращому розумінню її сутності. Недоліки даного методу: 1) потребує значних часових витрат; 2) має обмежену область використання, оскільки підвести учнів до «самостійного відкриття» можна лише в окремих випадках.

4. *Побудова рисунка, короткий запис умови і вимоги теореми.* При виконанні цього етапу дуже важливо, щоб учитель звертав увагу учнів на необхідність дотримання вимог щодо правильності і наочності рисунка, коректного застосування типових позначень, чіткого оформлення короткої умови і висновку.

5. *Робота над доведенням теореми.* Рекомендуємо проводити трикратне доведення, тобто прогін доведення у три рази з певними варіаціями. Так, при першому прогоні акцентуємо увагу учнів на ознайомленні з ідеєю доведення; для другого прогону головне – виділення окремих кроків доведення, детальне їх обґрунтування та оформлення відповідних зразків-записів на дошці; мета третього прогону - повторення послідовності кроків доведення і формування в учнів уміння доводити теорему цілком.

6. *Застосування теореми у найпростіших випадках.* На даному етапі передбачається розв'язування найпростіших задач на застосування доведеної теореми, що реалізується, як правило, усно або за готовими рисунками з коротким записом розв'язання. Також на цьому етапі можна запропонувати учням довести дану теорему за зміненим рисунком.

7. *Застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики.* Цей етап, відповідно, передбачає роботу у 2-х напрямках: розв'язування більш складних задач із застосуванням доведеної теореми та встановлення зв'язків даної теореми із вивченими раніше теоремами.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ДОВОДИТИ МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Доведення тверджень тісно пов'язане матеріалом, що вивчається, і не може бути відірвано від його змісту. Кожне доведення складається із тези, аргументів і демонстрації. Аргументами у доведенні виступають означення, аксіоми і раніше доведені теореми.

Розглянемо теоретичний матеріал курсу «Алгебра і початки аналізу» і з'ясуємо: які твердження і в якій послідовності вивчаються у цьому курсі; наявність аргументів для їх доведення; методику навчання учнів доведенням розглянутих тверджень.

Структура матеріалу шкільного курсу «Алгебра і початки аналізу» (профільний рівень) у 10 класі викладає так [14].

Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності (множини, операції над множинами; числові функції; способи задання функцій; область визначення і множина значень функції; графік функції; парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції; властивості графіків парних і непарних функцій; побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій; оборотні функції; взаємно обернені функції; графік оберненої функції; найпростіші рівняння з параметрами; нерівності. метод інтервалів; ділення многочленів; теорема Безу та наслідки з неї; метод математичної індукції).

Тема 2. Степенева функція (корінь n -го степеня; арифметичний корінь n -го степеня, його властивості; перетворення виразів з коренями n -го степеня; функція та її графік; степінь з раціональним показником, його властивості; перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником; степенева функція, її властивості та графік; ірраціональні рівняння; ірраціональні нерівності; ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами).

Тема 3. Тригонометричні функції (радіанне вимірювання кутів; синус, косинус, тангенс, котангенс кута; тригонометричні функції числового

аргументу; періодичність функцій; властивості та графіки тригонометричних функцій; основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу; формули зведення; тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрібного аргументу, формули половинного аргументу; вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу).

Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності (обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки; найпростіші тригонометричні рівняння; основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь; тригонометричні нерівності; тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами; рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції).

Тема 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування (границя функції в точці; основні теореми про границі функції в точці; неперервність функції в точці і на проміжку; задачі, які приводять до поняття похідної; похідна функції, її геометричний і фізичний зміст; рівняння дотичної до графіка функції; правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій; складена функція; похідна складеної функції; похідні степеневі та тригонометричних функцій; ознака сталості функції; достатні умови зростання і спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції на проміжку; застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей; друга похідна; поняття опуклості функції; точки перегину; знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину; застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків; асимптоти графіка функції; застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту).

Структура матеріалу шкільного курсу «Алгебра і початки аналізу» (профільний рівень) у 11 класі викладає так [14].

Тема 1. Показникова та логарифмічна функції (ступінь із дійсним показником; показникова функція; логарифми та їх властивості; логарифмічна функція; показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами; похідні показникової та логарифмічної функцій).

Тема 2. Інтеграл та його застосування (первісна та її властивості; таблиця первісних; невизначений інтеграл та його властивості; визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст; формула Ньютона-Лейбніца; обчислення площ плоских фігур; обчислення об'ємів тіл обертання).

Тема 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей (Елементи комбінаторики. Перестановки, розміщення, комбінації. Аксиоми теорії ймовірностей. Операції над подіями. Основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей. Незалежні події. Умовна ймовірність. Випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків).

Тема 4. Рівняння, нерівності та їх системи (методи розв'язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо); методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо); системи рівнянь та методи їх розв'язування (рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо).

2.1. Методичні особливості доведення теоретичних положень тем «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», «Степенева функція», «Тригонометричні функції», «Показникова та логарифмічна функції»

Теми «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», «Степенева функція»

Відповідно до навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна і тому особлива увага приділяється дослідженням властивостей функцій [14].

У 10-му класі спочатку вивчаються основні елементарні функції (ступенева, тригонометричні, обернені тригонометричні), а після цього – диференціальне числення. Тому вивчення цих функцій і доведення їх основних властивостей відбувається у два етапи: спочатку – засобами алгебри; в пізніше – засобами математичного аналізу.

В 11-му класі після вивчення похідної вивчаються показникова та логарифмічна функції. Тому вивчення цих функцій і доведення їх основних властивостей відбувається засобами алгебри так і засобами математичного аналізу. У курсі алгебри формується уявлення про функцію, вивчаються окремі види функцій ($y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$), їх властивості та графіки. На цьому етапі ознайомлення з властивостями окремих видів функцій відбувається за схемою: за аналітичним виразом, яким задана функція, учні складають таблицю, будують за точками із таблиці графік функції і «читають» за графіком властивості функції. Властивості функцій не доводяться.

У 10-му класі відбувається повторення, розширення і систематизація відомостей про функції, а також розглядається побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. Основні твердження про розглядувану побудову можна сформулювати у вигляді теорем і довести. Наявність новітніх інформаційних технологій навчання (НІТН) дає

змогу реалізувати евристичну орієнтованість навчання у процесі вивчення розглядуваного матеріалу, оскільки дозволяє підвести учнів до самостійного узагальнення щодо побудови графіків функцій шляхом геометричних перетворень. За умови застосування НІТН процес вивчення матеріалу інтенсифікується, стає ефективнішим. В учнів з'являється інтерес до вивчення матеріалу, зацікавленість. Це створює позитивну емоційну атмосферу, яка, в свою чергу, сприяє активному і свідомому вивченню і засвоєнню теоретичних фактів.

Розглянемо конкретний приклад. Перед учнями ставиться проблемне завдання: Як побудувати графік функції $y = -f(x)$, якщо задано графік функції $y = f(x)$? Для розв'язання цього завдання їм пропонується побудувати графіки функцій $y = x^2 + 3$ і $y = -(x^2 + 3)$; $y = \sqrt{x+1}$ і $y = -\sqrt{x+1}$. Варто запропонувати учням розглянути графіки побудованих функцій і відповісти на питання щодо їх розміщення відносно осі Ox . Чи для всіх функцій це виконується? Висунуті учнями гіпотези узагальнюються у вигляді теореми. Учитель звертає увагу учнів, що узагальнення було зроблено на основі розгляду графіків конкретних функцій, а тому має бути доведене. Доведення пропонується провести сильнішим учням. Для попередження формалізму в уміннях учнів доцільно колективно на уроці скласти план доведення:

1. З'ясувати, які координати має точка A , що належить графіку функції $y = f(x)$.
2. З'ясувати, які координати має відповідна їй точка B з тією самою абсцисою, що належить графіку функції $y = -f(x)$.
3. З'ясувати розміщення точок A і B на координатній площині, використавши знання з геометрії про координати симетричних відносно прямої точок.

Далі доцільно організувати групову роботу, розбивши клас на групи і кожній із груп запропонувати побудувати по два графіки функцій за допомогою геометричних перетворень. Наприклад, перша група (слабші учні) будують

графіки функцій $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$; друга група – $y = f(x) \pm b$, $y = af(x)$; третя – $y = f(-x)$, $y = f(|x|)$; четверта – $y = f(x \pm a)$, $y = f(ax)$.

Після завершення роботи варто разом з класом скласти алгоритм побудови графіка функції $y = af(cx + b) + k$.

Відповідно до чинної програми учні старших класів мають розглянути тригонометричні функції та їм обернені, степеневу, показникову і логарифмічну функції, їх графіки та властивості.

Підвищення логічної строгості курсу алгебри і початків аналізу порівняно із курсом алгебри основної школи, врахування вікових можливостей і психологічних особливостей розумового розвитку старшокласників змінюють підхід до вивчення основних елементарних функцій.

Рівень логічної строгості курсу «Алгебра і початки аналізу» є значно вищим ніж рівень курсу «Алгебра» і тому змінюється підхід до вивчення основних елементарних функцій.

Існує два підходи до вивчення властивостей функцій: 1) спочатку формулюються і доводяться всі властивості функції, що розглядається, а потім будується графік конкретної функції даного виду; 2) по точках будують графіки певних функцій даного виду, за графіками з'ясовують властивості функції, а потім доводять ці властивості аналітично.

Кожен із цих підходів має як переваги, так і недоліки. Зокрема, перший підхід сприяє вихованню потреби доводити, мотивує доведення, але є важким для сприймання учнями. Другий підхід вдаліший з методичної точки зору, оскільки учні беруть активну участь у «відкритті» властивостей функції. Але за такого підходу знижується необхідність, мотивація доведення «прочитаних» властивостей.

Якщо використовувати другий підхід до вивчення функції, то виникає питання: які властивості слід «читати» із графіка функції і які із «прочитаних» властивостей доводити?

Вважаємо, що вивчення всіх основних елементарних функцій доцільно проводити за таким алгоритмом:

- 1) використовуючи означення та інтуїтивні уявлення знайти область визначення функції (область визначення функції є проекцією графіка на вісь Ox);
- 2) використовуючи означення та інтуїтивні уявлення знайти область значень функції (область значень функції є проекцією графіка на вісь Oy);
- 3) дослідити функцію на парність і непарність, тобто довести, що функція є парною, непарною або ні парною, ні непарною;
- 4) дослідити функцію на періодичність, тобто довести, що функція є періодичною або неперіодичною;
- 5) знайти нулі функції, тобто довести, що саме ці точки з області визначення є нулями функції й інших нулів функція не має;
- 6) знайти проміжки знакосталості функції і довести, що саме ці проміжки є проміжками знакосталості;
- 7) знайти проміжки монотонності функції і довести, що саме ці проміжки є проміжками знакосталості;
- 8) використовуючи означення, інтуїтивні уявлення та графік функції знайти точки екстремуму і екстремуми функції.

Дотримання такого алгоритму привчатиме учнів до певного порядку, сприятиме кращому осмисленню, запам'ятовуванню і відтворенню властивостей функцій і їх графіків.

Для формування і розвитку вмінь старшокласників доводити твердження істотним є їхні уміння розрізняти ті твердження, які потребують доведення, від тих, які доводити не потрібно. Так, зокрема, доведення непарності функції залежить від того, яке твердження взяти за означення. Якщо непарною вважати таку функцію, графік якої симетричний відносно точки O – початку координат, то твердження «Область визначення непарної функції симетрична відносно точки $x = 0$ і для кожного x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$ » потребує доведення. Якщо ж останнє твердження розглядати як означення непарної функції, то тоді необхідно довести, що її графік симетричний відносно початку координат.

Більшість авторів підручників з математичного аналізу розглядають останній варіант. Тому, на нашу думку, для забезпечення наступності у навчанні, учням 10-го класу доцільно давати саме таке означення. У такому разі твердження «Графік непарної функції симетричний відносно початку координат» та «Графік парної функції симетричний відносно осі Oy » необхідно довести.

Окрім цього, формулювання та доведення твердження «Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то ця функція непарна» демонструє зв'язок між алгеброю і початками аналізу та геометрією. Адже для доведення такого твердження використовуються поняття симетричності відносно точки та ознаки рівності трикутників.

Отже, перед тим, як вивчати властивості конкретного класу функцій, треба з'ясувати і привести в систему основні загальні означення і твердження, які в подальшому будуть слугувати аргументами для доведення властивостей конкретних функцій. Доцільно це зробити на перших уроках алгебри і початків аналізу у 10-му класі.

Такими основними означеннями є: означення області визначення функції; означення області значень функції; означення графіка функції; означення зростаючої функції; означення спадної функції; означення парної функції; означення непарної функції; означення періодичної функції; означення точок екстремуму і екстремумів функції. Доцільно також ознайомити учнів з поняттями нуль функції та проміжки знакосталості функції.

Основними твердженнями про властивості функції, які доцільно сформулювати і довести на уроках у 10-му класі, є такі твердження:

- ✓ якщо функція парна, то її графік симетричний відносно осі Oy ;
- ✓ якщо графік функції симетричний відносно осі Oy , то функція парна;
- ✓ якщо функція непарна, то її графік симетричний відносно початку координат;
- ✓ якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція непарна;

✓ якщо графік функції не симетричний відносно початку координат, то функція не може бути непарною;

✓ якщо графік функції не симетричний відносно осі Oy , то функція не може бути парною;

✓ якщо T – період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT , де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, також є періодами функції $y = f(x)$.

Друге і четверте твердження дають змогу за побудованим графіком встановити властивості парності та непарності; перше і третє твердження використовуються на наступному етапі вивчення функції – для дослідження функції засобами математичного аналізу.

У доведенні властивості функції основною є дія підведення об'єкта під поняття. Тому в кожному з означень необхідно виділити ознаки поняття і з'ясувати, якими логічними сполучниками вони з'єднані. Це доцільно зробити у вигляді евристичної бесіди.

Тема «Тригонометричні функції»

Після означення періодичності функції доцільно з учнями довести твердження про періодичність сталої функції, функції $y = \{x\}$, а також таке твердження «Якщо T – період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT , де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, також є періодами функції $y = f(x)$ ».

Обов'язково необхідно звернути увагу учнів на те, що міркування виду

$$\begin{aligned} f(x + 3T) &= f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = \\ &= f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x) \end{aligned}$$

не є доведенням, а лише допомагають висунути гіпотезу, яка доводиться методом математичної індукції.

Оскільки до вивчення періодичних функцій учні знайомляться з методом математичної індукції, то вчителю доцільно організувати доведення твердження «Якщо T – період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT , де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, також є періодами функції $y = f(x)$ » наступним чином:

- ✓ виокремити умову і твердження;
- ✓ довести твердження для довільного натурального числа n методом математичної індукції.

У процесі доведення, яке може виконати вчитель або сильніший учень, необхідно обґрунтовувати всі кроки доведення.

З метою формування вмінь учнів доводити періодичність функції, доцільно розглянути функцію, яка не є періодичною, і довести її неперіодичність методом від супротивного.

Запропонований алгоритм вивчення функцій доцільно використовувати для вивчення тригонометричних функцій. Розкриємо методику навчання учнів доведенням властивостей тригонометричних функцій на прикладі функції $y = \sin x$.

Побудова графіка функції $y = \sin x$ найчастіше здійснюється за точками, використовуючи означення цієї функції та її періодичності. Тому після означення функції, встановлення факту, що число 2π є періодом функції $y = \sin x$ і знаходження значень цієї функції в окремих точках, варто сформулювати і довести два твердження:

- 1) найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ є число 2π ;
- 2) будь-яке число $2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, є періодом функції $y = \sin x$.

Перше твердження доводиться методом від супротивного і учні 10-го класу успішно справляються з доведенням, якщо: 1) колективно пригадати алгоритм доведення методом від супротивного; 2) звернути їхню увагу на те, що рівність $f(x + T) = f(x)$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а, отже, і для $x = \pi/2$.

Друге із записаних тверджень є наслідком такого твердження «Якщо T – період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT , де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, також є періодами функції $y = f(x)$ » та першого твердження і доцільно, щоб учні самостійно прийшли до такого висновку. Якщо ж учні самостійно не прийшли до такого висновку, то доцільно знайти відповіді на запитання: «які ще числа є періодом

функції $y = \sin x$?»; «як записати загальний вигляд таких чисел?»; «з якого твердження випливає дане твердження?»

Після побудови графіка функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ і продовження його за межі проміжка з урахуванням періодичності, варто перейти до «читання» властивостей функції $y = \sin x$ за її графіком.

З метою встановлення і доведення властивостей функції $y = \sin x$ вчитель ставить учням такі завдання і запитання:

✓ Спроектуйте графік функції на вісь Ox . Яку множину отримали? Яка область визначення функції?

✓ Спроектуйте графік функції на вісь Oy . Яку множину отримали? Яка область значень функції?

✓ Назвіть період функції $y = \sin x$. Назвіть найменший додатний період цієї функції.

✓ Проаналізуйте графік функції $y = \sin x$, зверніть увагу на його розміщення відносно точки O – початку координат (відповідь: графік симетричний відносно початку координат). Який із цього випливає висновок (відповідь: функція непарна)? На основі якого твердження можна зробити такий висновок (відповідь: якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція непарна)? Чи можна вважати, що непарність функції $y = \sin x$ доведена (відповідь: ні, бо ми не доводили, що графік цієї функції симетричний відносно початку координат і тому висновок є тільки гіпотезою)?

✓ Який найменший додатний період функції $y = \sin x$? Проаналізуйте графік функції, що відповідає проміжку $[0; 2\pi]$. Назвіть точки, в яких графік функції перетинає вісь Ox . Враховуючи періодичність функції, назвіть точки, в яких графік перетне вісь Ox за межами проміжка $[0; 2\pi]$. Запишіть це одним виразом.

✓ Проаналізуйте графік функції, що відповідає проміжку $[0; 2\pi]$. Назвіть проміжок, на якому графік знаходиться вище осі Ox , нижче осі Ox . Враховуючи періодичність, запишіть проміжки знакосталості функції.

✓ Для знаходження проміжків монотонності функції $y = \sin x$ розгляньте частину графіка, що відповідає проміжку $[-\pi/2; 3\pi/2]$ довжиною 2π . Назвіть проміжок, на якому функція зростає, спадає. Враховуючи періодичність, вкажіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = \sin x$.

✓ Проаналізуйте графік функції $y = \sin x$, що відповідає проміжку $[0; 2\pi]$. Яке найбільше значення функції і у якій точці воно досягається? Яке найменше значення функції і у якій точці воно досягається? Враховуючи періодичність, запишіть точки максимуму, точки мінімуму. На цьому етапі вивчення функцій сформульовану властивість приймемо без доведення. Доведення проведемо після вивчення застосування похідної до дослідження функції. На новому етапі властивість буде сформульована у вигляді задачі на доведення.

Аналогічну роботу варто організувати для навчання учнів доводити властивості інших тригонометричних функцій.

Вивчення тотожностей має великі можливості для формування вмінь старшокласників доводити математичні твердження.

Під час вивчення тригонометричними тотожностей певного виду доцільно виокремити і довести одну з них (основну) і, використовуючи, вміти доводити інші аналогічні тотожності.

Тригонометричні формули додавання є основою доведення формул зведення. Не потрібно доводити всі формули зведення, але довести кілька з них треба. Самостійне доведення формул зведення дозволяє учня відчувати себе відкривачами формул, спонукає до вивчення тригонометричних формули додавання.

Після доведення деяких формул зведення доцільно спільно з учнями проаналізувати отримані формули, знайти закономірності, узагальнити отримані результати та сформулювати відповідні правила.

Тема «Показникова та логарифмічна функції»

Запропоновану схему вивчення функцій доцільно використовувати для вивчення показникової функції.

На початку під керівництвом вчителя учні по точках будують графіки функцій $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і «читають» властивості функції із побудованих графіків.

Наведемо фрагмент уроку.

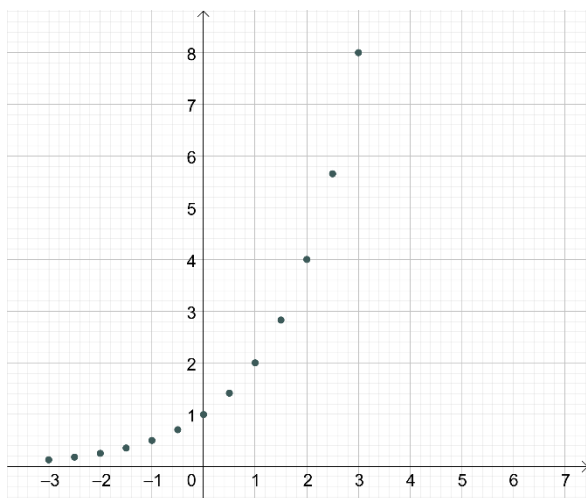
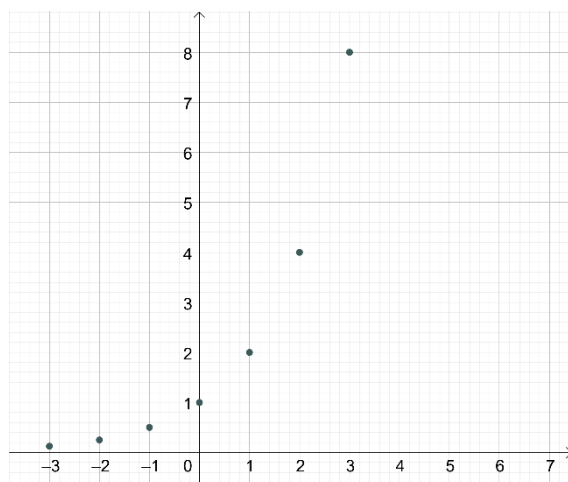
Вивчення нового матеріалу

• Показникова функція

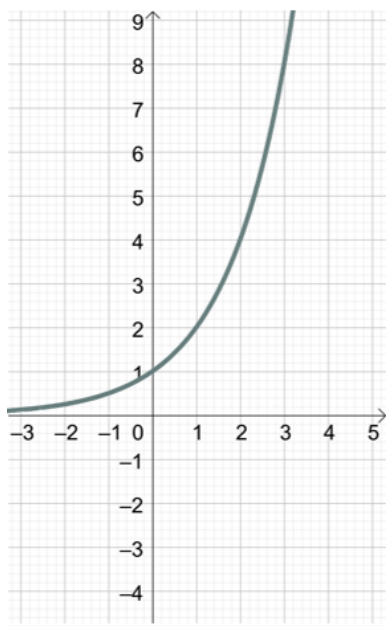
Функція виду $y = a^x$ $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ називається **показниковою**.

Наприклад: $y = 2^x$, $y = 0,3^x$, $y = (\sqrt{2})^x$

Побудуємо $y = 2^x$ для деяких цілих значень.



Тепер на цьому ж графіку побудуємо деякі дробові значення функції $y = 2^x$

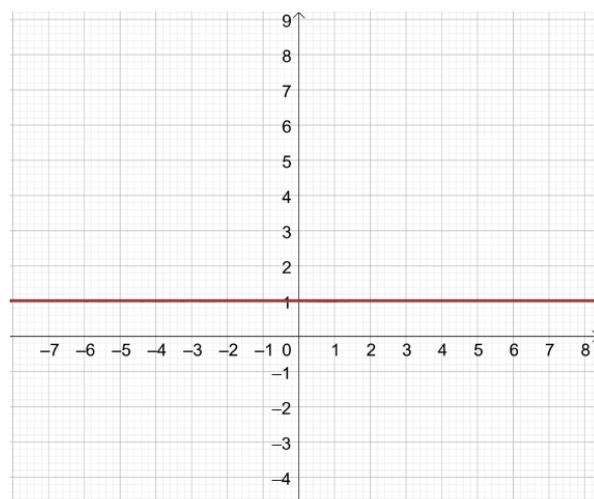


Якщо побудуємо всі значення з множини $x \in \mathbb{R}$, то отримаємо графік показникової функції $y = 2^x$ (можливий інший запис, наприклад: $g(x) = 2^x$).

**Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником x .*

- Чи існує функція при $a = 1$?

- Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.

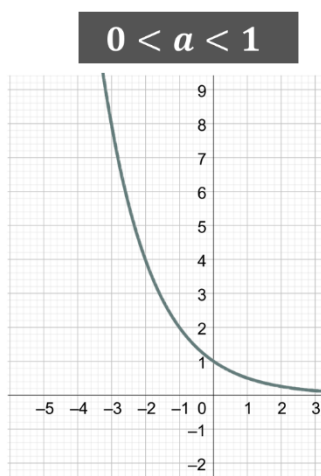
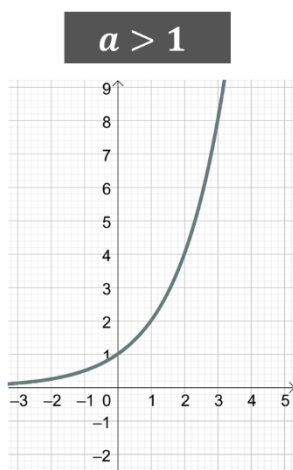


- Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?
- Ні, навіть якщо ми візьмемо від'ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення $\left(x^{-n} = \frac{1}{x^n}; 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}\right)$

Отже, **вісь x є асимптотою цього графіка.**

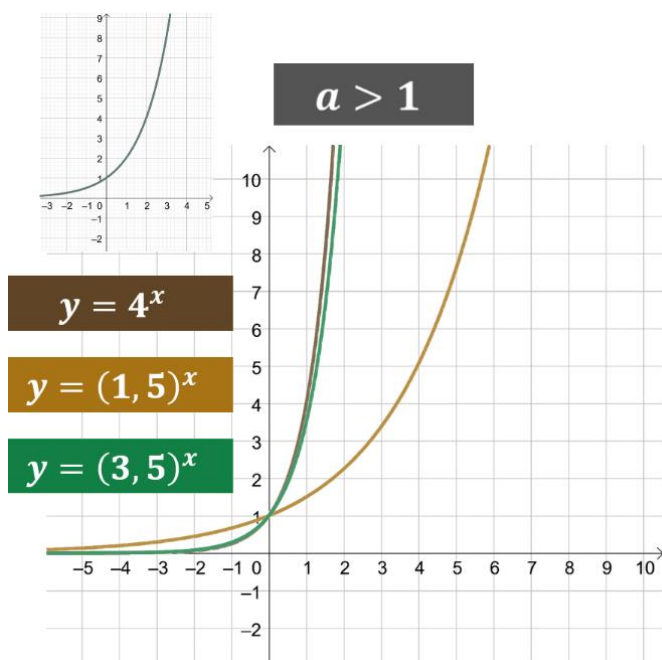
**Асимптота кривої (грец. ασυμπτωτος — що не збігається, не дотикається) — це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.*

Проаналізуємо графіки показникової функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$:



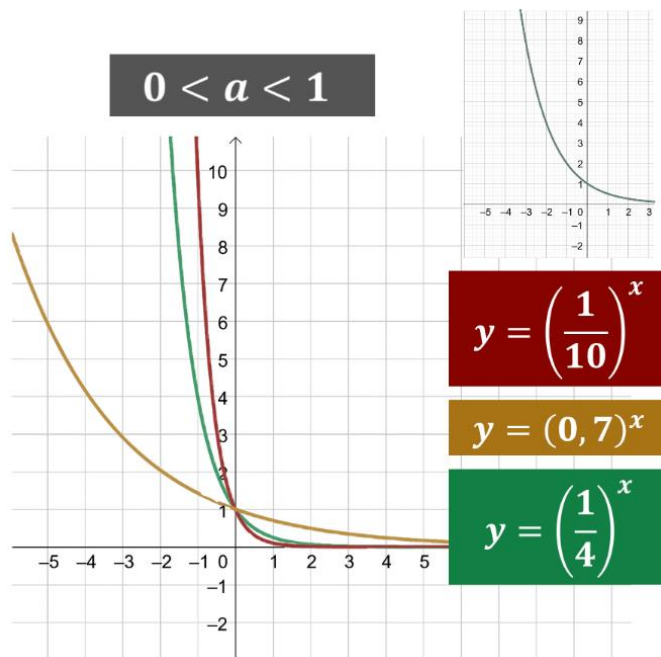
- Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?
(при $a > 1$ функція зростаюча, при $0 < a < 1$ функція спадає)

Побудуємо деякі графіки функцій $y = a^x$ при $a > 1$ і $0 < a < 1$



Чим більшою є основа $a > 1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y = a^x$, якщо рухатися вправо.

Чим меншою є основа $0 < a < 1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y = a^x$, якщо точка рухається вліво.



- Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

$a^x a^y = a^{x+y}$
$a^x : a^y = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$(ab)^x = a^x b^x$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Всі ці властивості справедливі для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y

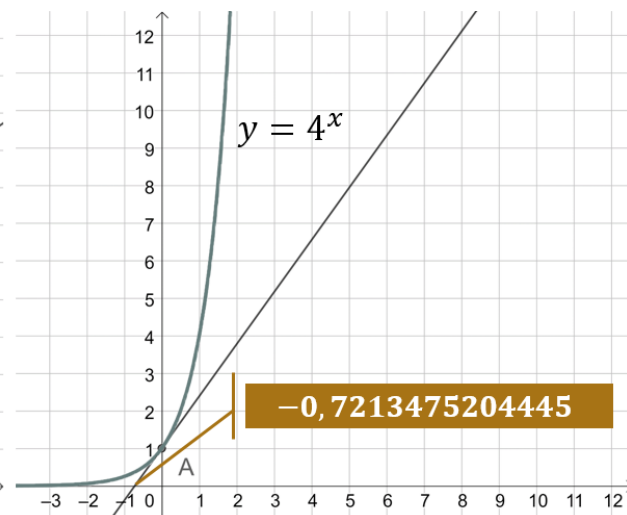
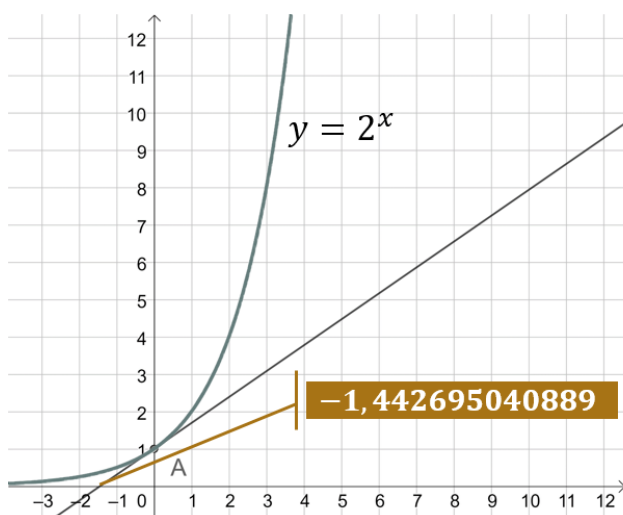
- **Властивості показникової функції**

1. $D(f) = \mathbb{R}$ (Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)
2. $E(f) = (0; \infty)$ (Областю значень показникової функції є множина $(0; \infty)$)
3. $y > 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$ (Показникова функція немає нулів, і проміжок $(-\infty; +\infty)$ є проміжком її знакосталості)
4. При $a > 1$ зростаюча (При $a > 1$ зростає на всій області визначення)
При $0 < a < 1$ спадає (При $0 < a < 1$ спадає на всій області визначення)

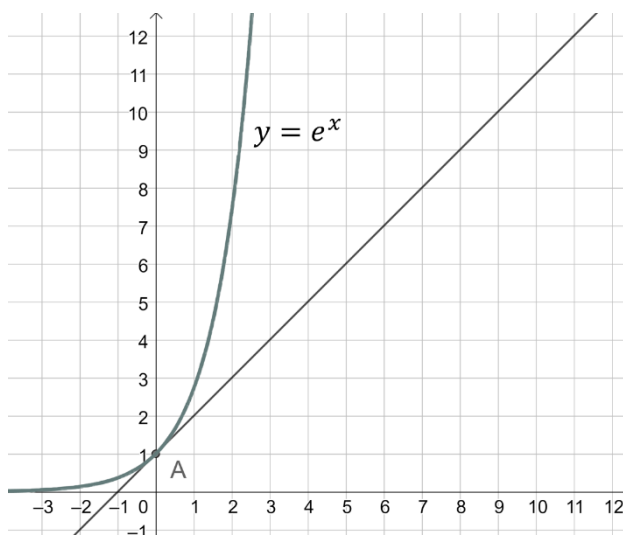
- **Цікаво**

Розглянемо графіки показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 4^x$.

У них кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці $A(0; 1)$ до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.



- Чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в т.А(1; 0) дорівнював 1?



Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число $e = 2,71828 \dots$

Така показникова функція називається **експонентою**.

- Чому графік кожної показникової функції обов'язково проходить через точку $A(0; 1)$?

$$y = a^x \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1$$

Зупинимось на формуванні вмінь учнів доводити основні властивості логарифма. Під час вивчення теми «Логарифм числа» доведення тверджень про логарифм добутку, логарифм частки, логарифм степеня та логарифм кореня виконуються однаковим методом. Доведення першого твердження про логарифм добутку

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

доцільно провести вчителю на дошці, чітко виділяючи і записуючи три кроки, з яких складається доведення:

✓ від нового поняття переходимо до раніше вивченого, через яке нове поняття визначається (від рівностей $\log_a x = u$ і $\log_a y = v$ переходимо до рівностей $x = a^u$ і $y = a^v$;

✓ дію (операцію), про яку йде мова в теоремі, виконуємо над старими об'єктами ($x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$);

✓ від старого поняття переходимо до нового ($\log_a(x \cdot y) = u + v = \log_a x + \log_a y$).

Щоб уникнути прогалин і попередити формалізм в умінні доводити, вчитель повинен у процесі доведення звертати увагу учнів на логічні обґрунтування кожного етапу доведення.

З метою уникнення одноманітності та формування вмінь учнів самостійно конструювати доведення, вчителю доцільно запропонувати учням довести твердження про логарифм степеня, використовуючи основну логарифмічну тотожність.

Фрагмент уроку.

Вивчення нового матеріалу

• Проблемне питання

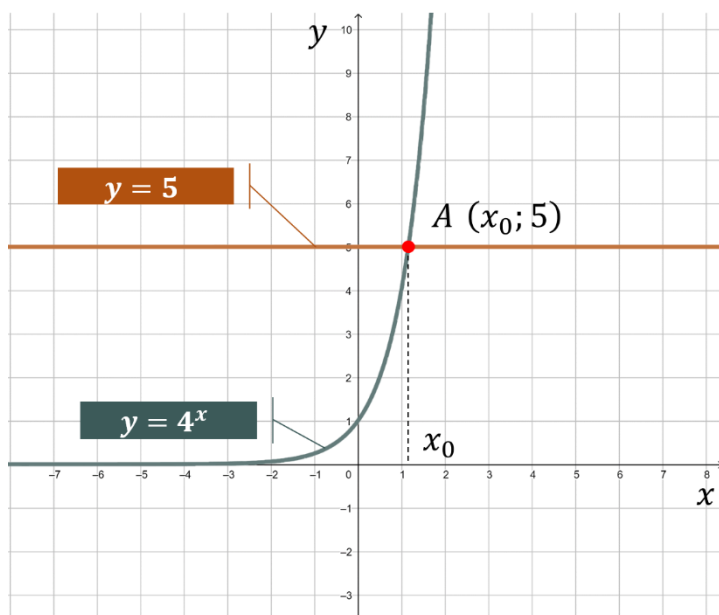
➤ Які саме числа будуть коренями цих рівнянь?

$$\begin{array}{l} 4^x = 16 \\ 4^x = 64 \end{array} \Big| (2 \text{ і } 3)$$

➤ Чи буде мати розв'язки це рівняння?

$$4^x = 5$$

**Звернемося до графічної інтерпретації, щоб переконатися, що рівняння $4^x = 5$ має єдиний корінь.*



➤ Що можемо сказати про « x_0 »?
(Це показник степеня, до якого треба піднести число 4, щоб отримати число 5)

**Отже, розв'язком рівняння $4^x = 5$ буде логарифм числа 5 за основою 4
Записується так: $\log_4 5$*

➤ Спробуйте сформулювати означення логарифма
(Показник степеня, до якого треба піднести число a , щоб отримати число b)

➤ Які обмеження має рівняння $a^x = b$?
($a > 0, a \neq 1$)

➤ За якої умови рівняння $a^x = b$ має розв'язок?
($b > 0$)

➤ Чи може основа логарифма дорівнювати 0 або 1?
(Ні)

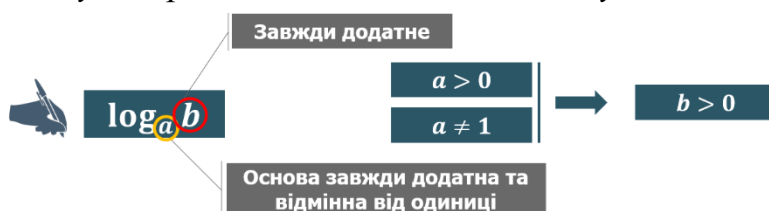
➤ Чи матиме зміст вираз $\log_a b$, якщо $b < 0$?
(Ні, так як $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$)

• Логарифм і його властивості

Означення

Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

**Отже, розглянувши рівність $4^3 = 64$, знаючи будь-які два числа – можемо*



знайти третє.

$4^3 = 64$	Відомо	Знайти	Розв'язок	
	4 і 3	64	$4^3 = 64$	Степінь
	64 і 3	4	$\sqrt[3]{64} = 4$	Корінь
	4 і 64	3	$\log_4 64 = 3$	Логарифм

Обчисліть:

	Відповідь	Розв'язок
$\log_2 8$	3	$2^3 = 8$
$\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$	2	$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$
$\log_7 \frac{1}{49}$	-2	$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

Поясніть, чому не існують:

$$\frac{\log_3(-9)}{\log_7 0}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} -4$$



Логарифм від'ємного числа і нуля не існує.

• Логарифмування

*Операцію знаходження логарифма числа називають логарифмуванням

Піднесення до степеня	Логарифмування
$4^3 = 64$	$\log_4 64 = 3$
$(\sqrt{4})^4 = 16$	$\log_{\sqrt{4}} 16 = 4$
$(0,1)^4 = 0,0001$	$\log_{0,1} 0,0001 = 4$

• Логарифми з власними назвами

$$\log_{10} a = \lg a$$

Десятковий логарифм

$$\log_e a = \ln a$$

Натуральний логарифм

• Основна логарифмічна тотожність

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b \\ a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{array} \right| \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$

$$x = \log_a b$$



$$10^{\lg b} = ?$$

$$10^{\lg b} = b$$

$$\log_a 1 = ?$$

Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = ?$$

Логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1$$

• Основні властивості логарифмів

Теорема (логарифм добутку)

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Теорема (логарифм частки)

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

*« $\forall$ » - для будь-якого



$\forall a > 0, a \neq 1$ і $x > 0, y > 0$:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника

Доведемо теорему про логарифм добутку:

$$a^{\log_a xy} = ?$$

- Використовуючи основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a xy} = xy$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = ?$$

- Використовуючи властивості степеня і основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$$

➤ Який робимо висновок?

$$\left. \begin{aligned} a^{\log_a xy} &= xy \\ a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy \end{aligned} \right| \Rightarrow a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Доведено



Творче д/з:

Доведіть теорему про логарифм частки

Теорема (логарифм степеня)

Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, то $\forall \beta \in \mathbb{R}$:
 $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня

➤ Ми знаємо, що при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Як можемо узагальнити формулу логарифму степеня?



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, то $\forall \beta \in \mathbb{R}$:
 $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$
 $\log_a \sqrt[\beta]{x} = \frac{1}{\beta} \log_a x$

Теорема (перехід від однієї основи логарифма до іншої)

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$



$\forall a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a \neq 1$, $c \neq 1$
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Логарифм додатного числа b за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа b за

новою основою c , поділеному на
логарифм старої основи a за новою
основою c

Наслідок 1



Якщо $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, то:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Наслідок 2



Якщо $a > 0, a \neq 1, b > 0$, то $\forall \beta \neq 0$:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

• Узагальнення

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

Об'єднуючи ці дві властивості, що
можемо сказати про: $\log_{a^m} x^n = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \log_a x^n = n \log_a x \\ \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \end{array} \right| \Rightarrow \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

➤ Чи можемо знайти логарифм добутку, у випадку коли x і y від'ємні?
 $\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right| \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \log_a(xy) \text{ — існує}$

➤ Чи можемо скористатися формулою, обґрунтованою для додатних значень
 x і y ?
(Не можна)

*Для випадку $xy > 0$:

$$xy > 0 \Rightarrow xy = |x| \cdot |y| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x| > 0 \\ |y| > 0 \end{array} \right|$$

➤ Як можемо узагальнити формулу логарифму добутку, якщо $x < 0$ і $y < 0$?

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$x < 0 \text{ і } y < 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

Також можливі інші узагальнення:

$$\text{Якщо } \frac{x}{y} > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\text{Якщо } x \neq 0$$

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a|x|$$

2.2. Методичні особливості доведення теоретичних положень тем «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування»

Тема «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування»

Поняття границі функції є одним із найскладніших для сприймання і розуміння як учнями, так і студентами. На нашу думку причинами цього є: складність поняття границі функції, яка обумовлена переходом від скінченного до нескінченного; мала кількість годин, яка відводиться для вивчення границь у шкільному курсі математики; відсутність завдань на використання границь; відірваність границь від інших розділів математики. Але чи не найважливішою причиною є недостатня методична розробка вивчення елементів теорії границь у шкільному курсі математики.

Університетський підхід до вивчення теорії границь передбачає введення поняття границі числової послідовності конкретно-індуктивним методом, формулювання і доведення теорем, що стосуються властивостей збіжних послідовностей, і теорем про арифметичні дії над границями; введення поняття границі функції, формулювання теорем про границю функції і їх доведення на основі відповідних теорем про границю числової послідовності тощо.

В умовах дефіциту часу використовувати університетський підхід до вивчення теорії границь у шкільній практиці неможливо. З іншого боку, відмовитися від вивчення границі функції також неправильно, бо поняття границі є одним із найважливіших, найфундаментальніших понять математичного аналізу. Відмова від вивчення елементів теорії границь не дає можливості чітко сформулювати означення похідної, усвідомити поняття неперервної функції, визначеного інтеграла.

Логічною основою виведення формул похідних основних елементарних функцій, доведення теорем про похідну суми, різниці, добутку і частки є теореми про арифметичні дії над границями.

Подання без доведення правил диференціювання функцій, таблиці похідних основних елементарних функцій призведе тільки до набуття учнями механічних навичок знаходження похідних функцій.

В умовах дефіциту часу основні теореми про границі можна вивчати без доведення, використавши для усвідомлення змісту їх геометричну інтерпретацію. У цьому випадку необхідно звернути увагу учнів на те, що геометрична інтерпретація теореми про границі не є їх доведення, а довести сформульовані теореми про границі можна на факультативних заняттях або математичних гуртках.

З поняттям границі функції в точці пов'язане поняття неперервності функції в точці. У підручниках [2, 5, 7, 12, 25, 26] не тільки сформульовано різні означення неперервності функції в точці, а й сформульовано та доведено теореми про арифметичні дії над неперервними функціями та про неперервність складеної функції.

Вважаємо, що означення неперервності функції в точці доцільно вводити через рівність границі функції в точці значенню функції в цій точці та через приріст функції. Означення неперервності функції в точці через рівність границі функції в точці значенню функції в цій точці дає можливість вивести правило знаходження границі неперервної функції. Означення неперервності функції в точці через приріст функції дає можливість довести теореми похідну суми, добутку та частки функцій.

Після введення означення неперервності функції в точці через рівність границі функції в точці значенню функції в цій точці доцільно разом з учнями скласти алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на неперервність в точці.

В умовах дефіциту часу теореми про арифметичні дії над неперервними функціями та про неперервність складеної функції доцільно тільки сформулювати. Ці теореми, а також неперервність основних елементарних функцій на їх області визначення можна довести на факультативних заняттях або математичних гуртках.

У процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» можна і необхідно формувати вміння старшокласників доводити твердження. Для цього, крім навчання доведенням у ході вивчення теорем, необхідно включати в систему задач вправи на доведення. Зрозуміло, що довести всі твердження, вивести всі формули, які розглядаються у цій темі, у шкільному курсі неможливо. Учителю повинен організувати процес навчання так, щоб активізувати навчальну діяльність кожного учня, щоб привчати до логічної строгості умовиводів, розвивати логічне мислення і самостійність учнів.

Під час вивчення теми «Похідна та її застосування» головною метою вважаємо глибоке осмислення та усвідомлення основного поняття – похідної функції, а не вироблення навичок знаходження похідної функції. Цій меті сприяють доведення правил диференціювання, виведення формул похідних основних елементарних функцій.

Розглянемо можливості формування і розвитку умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення застосування похідної.

Для вивчення достатніх умов зростання (спадання) функції можна використати два підходи. Усе залежить від означення зростаючої (спадної) функції. Якщо спочатку формулюється означення зростаючої (спадної) функції в точці, то достатня ознака зростання (спадання) формулюється так: «Якщо функція $y = f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку I має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція $y = f(x)$ в точці x_0 зростає (спадає)».

Якщо ж спочатку формулюється означення зростаючої (спадної) функції на проміжку, то достатня ознака зростання (спадання) формулюється так: «Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку I і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) в кожній точці проміжку I , то функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на проміжку I ».

Доведення як першого, так і другого тверджень у шкільному курсі алгебри і початків аналізу мають логічні прогалини: доведення першого твердження спирається на теорему про граничний перехід у нерівності; доведення другого – на теорему Лагранжа. Обидва ці твердження у курсі «Алгебра і початки аналізу»

не вивчаються. Отже, доведення достатніх ознак у різних формулюваннях знаходяться на одному логічному рівні строгості.

Ми надаємо перевагу другому підходу, оскільки з означенням зростаючої (спадної) функції на проміжку учні знайомі з десятого класу і на даному етапі формувати це поняття не треба. Тут варто лише активізувати знання учнів з цього питання і приступати до вивчення ознак.

Вважаємо також за доцільне сформулювати у явному вигляді теорему Вейєштрасса про найбільше і найменше значення неперервної функції на проміжку і підкреслити, що вона тільки стверджує існування таких значень.

Для формування вмінь старшокласників доводити твердження курсу алгебри і початків аналізу важливим є вміння учнів самостійно сформулювати твердження. Підвести учнів до «відкриття» достатніх умов зростання (спадання) функції на проміжку і достатніх умов існування екстремуму можна на конкретних прикладах.

Тема «Інтеграл та його застосування»

У процесі вивчення теми «Інтеграл та його застосування» зустрічаються логічні прогалини, особливо це стосується визначеного інтеграла. По-перше, для розв'язування задачі про площу криволінійної трапеції, для введення визначеного інтеграла, для виведення формули об'єму тіла через площу поперечного перерізу у шкільному курсі алгебри і початків аналізу використовується поняття границі числової послідовності. По-друге, для введення поняття визначеного інтеграла розглядається лише інтегральна сума спеціального виду, а саме коли проміжок розбивається на n рівних частин і беруться значення функції у лівому кінці проміжка розбиття. По-третє, під час виведення формули Ньютона–Лейбніца використовується твердження про можливість граничного переходу під знаком неперервної функції. Але це твердження у шкільному курсі не розглядається.

Сучасний порядок викладення математичного аналізу істотно відрізняється від того шляху, за яким він історично розвивався. Так, наприклад,

диференціальне і інтегральне числення зародилося в XVII ст. і бурхливо розвивалося в XVIII ст., а теорія границь стала фундаментом для математичного аналізу на початку XX ст. Задача про площу криволінійної трапеції була однією з перших, яка привела до поняття визначеного інтеграла ще задовго до поняття границі послідовності. Розв'язання цієї задачі було обґрунтоване наявними на той час засобами, а сам результат знаходив багаточисленні і важливі застосування, приводячи до правильних результатів.

Враховуючи історичний розвиток математичного аналізу як науки і можливості шкільного курсу алгебри і початків аналізу, ми вважаємо можливим вивчення питань, пов'язаних з визначенням інтегралом, на наочно-інтуїтивному рівні. При цьому введенні поняття і сформульовані факти отримують лише геометричне обґрунтування, вживання терміну «доведення» не є доцільним. Ознайомлення з поняттям визначеного інтеграла варто розглядати як пропедевтику вивчення цього поняття у вищій школі.

Зупинимось на методиці навчання учнів доведенню тверджень у процесі вивчення первісної. Зауважимо, що доведення теореми про існування первісної у шкільному курсі алгебри і початків аналізу неможливе, а тому її варто тільки сформулювати.

Після ознайомлення учнів з означенням первісної доцільно розв'язати з ними декілька задач на доведення того, що функція є первісною для заданої. Лише після такої роботи варто переходити до складання таблиці первісних для деяких функцій.

Методика виведення формул первісних може бути такою:

✓ Чому дорівнює похідна функції $y = x$? $y = 2x$? $y = 3x$? $y = kx$? Який загальний вигляд має первісна функції $y = kx$? Чому? Доведіть це.

✓ Знайдіть первісну функцій $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$. Узагальніть отримані формули. Доведіть висунуту гіпотезу. Яка ідея доведення?

Теорему про загальний вигляд первісної учні можуть сформулювати самостійно. Якщо виникнуть проблеми, то необхідно дати учням наочне зображення загального вигляду первісної для конкретної функції. Організувати

роботу потрібно так, щоб підвести учнів до самостійного формулювання відповідних тверджень. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Після формулювання означення первісної функції, учням пропонується усно розв'язати задачу: назвіть первісну для функції $f(x) = 3x^2$. Як правило, всі називають функцію $F(x) = x^3$. Чи існують інші первісні? У ході бесіди виявляється, що існують, і учні називають інші первісні цієї функції: $F(x) = x^3 + 1$, $F(x) = x^3 - 4$ тощо. Далі пропонується назвати первісну для функції $f(x) = \cos x$. Для геометричного описання загального вигляду первісної функцій $f(x) = 3x^2$ і $f(x) = \cos x$ вчитель пропонує побудувати учням графіки таких функцій: $F(x) = x^3$, $F(x) = x^3 + 1$, $F(x) = x^3 - 4$, $F(x) = \sin x$, $F(x) = \sin x + 1$, $F(x) = \sin x - 1$.

Далі учням пропонується відповісти на запитання:

- ✓ Як називається графік функції $F(x) = x^3$? $F(x) = \sin x$?
- ✓ Як із графіка функції $F(x) = x^3$ отримати графік функції $F(x) = x^3 + 1$? Як із графіка функції $F(x) = \sin x$ отримати $F(x) = \sin x + 1$?
- ✓ Як із графіка функції $F(x) = x^3$ отримати графік функції $F(x) = x^3 - 4$? Як із графіка функції $F(x) = \sin x$ отримати $F(x) = \sin x - 1$?
- ✓ Опишіть геометрично загальний вигляд первісної для функції $f(x) = 3x^2$, $f(x) = \cos x$.

Такий підхід до введення поняття первісної не тільки унаочнює саме поняття, але і сприяє повторенню раніше вивченого матеріалу (побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень) та висуненню гіпотези щодо загального вигляду первісних довільної функції, яка має первісну.

Підвести старшокласників до необхідності доведення теореми можна запитанням: Чи буде виконуватися встановлена закономірність для всіх функцій? Провести доведення учні можуть самостійно. Варто з'ясувати, які теоретичні факти (тобто, які аргументи) у доведенні були використані (похідна суми дорівнює сумі похідних; похідна сталої дорівнює нулеві; означення первісної функції на проміжку).

Підвести учнів до формулювання оберненого твердження можна запитанням: Чи може функція f мати ще інші первісні, крім $F(x) + C$, де C – стала? Якщо гіпотези старшокласників розділяться, то вчителів варто сформулювати і довести відповідну властивість.

Після формулювання теореми і з'ясування умови і висновку теореми, доцільно, щоб доведення на дошці провів один із сильніших учнів. Якщо виникнуть труднощі, то вчителю варто вказати ідею доведення: розглянути різницю двох довільних первісних і скористатися наслідком із теореми Лагранжа.

Як правило, формулювання і доведення основних правил знаходження первісних не викликають в учнів труднощів. Варто лише попередньо активізувати відповідні знання учнів:

- ✓ Сформулюйте означення первісної.
- ✓ Сформулюйте правило знаходження похідної суми двох функцій.
- ✓ Що можна робити зі сталим множником при знаходженні похідної?
- ✓ Як знайти похідну складеної функції?
- ✓ Спробуйте по аналогії із правилами знаходження похідної дати відповідь

на запитання: Як знайти первісну для суми двох функцій, якщо відомі первісні кожної із них? Як довести сформульовану властивість? Як знайти первісну добутку функції на число, якщо відома первісна функції? Доведіть це.

Варто підкреслити, що на відміну від правил знаходження похідної, нема властивості, яка дозволяє зразу знайти первісну добутку і первісну частки двох функцій, навіть якщо первісні кожної функції відомі. Аналогічну справу маємо і з первісною складеної функції. Але для окремого виду складеної функції, коли внутрішня є лінійною функцією, можна сформулювати властивість. Довести сформульовану властивість варто запропонувати учням самостійно.

Під час знаходження первісних (обчисленні невизначеного інтеграла) часто доводиться шукати первісну для суми двох і більше доданків. Доцільно запропонувати учням обґрунтувати правило знаходження таких первісних. Відповідь, як правило, така: спочатку знайдемо первісну суми двох функцій (за сформульованою і доведеною властивістю), потім первісну третьої функції і

отримані первісні додамо. А якщо функцій-доданків буде 5? 10? 15? 20? Після такого питання переважна частина учнів узагальнює доведену властивість на випадок n доданків і правильно вказує метод доведення – метод математичної індукції. Варто запропонувати сильнішим учням довести це зауваження вдома; при цьому необхідно вказати або з'ясувати це у бесіді з учнями, що треба використати узагальнений принцип математичної індукції і перший крок у доведенні вже проведений – це доведення властивості про первісну суми двох функцій.

Під час вивчення теоретичного матеріалу курсу «Алгебра і початки аналізу» є великі можливості для розвитку вмінь старшокласників доводити математичні твердження. На формування і розвиток умінь доводити впливають як послідовність вивчення тверджень, так і логічна структура твердження та всього теоретичного матеріалу. Формувати і розвивати вміння доводити треба цілеспрямовано і систематично, використовуючи традиційні і новітні технології навчання.

ВИСНОВКИ

Одним з основних завдань сучасної школи є розвиток мислення учнів загалом, а також математичного мислення зокрема. Вміння доводити математичні твердження в є важливим елементом розвитку логічного мислення та розвитку аналітичних та критичних навичок учнів.

Шкільний курс алгебри і початків аналізу має значний потенціал для формування вмінь учнів доводити, але цей потенціал не використовується в повній мірі. Формування вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу повинно відбуватися не лише за допомогою доведення теоретичних тверджень, а й розв'язування задач.

Створення сприятливих умов є ключовим фактором для підвищення рівня вмінь учнів доводити твердження в курсі алгебри і початків аналізу. Для створення таких сприятливих умов необхідно:

- ✓ забезпечити готовність учнів до включення їх в активну діяльність для пошуку плану доведення твердження і його реалізації;
- ✓ виокремити твердження, які доцільно доводити, і твердження, доведення яких недоцільне у процесі вивчення шкільного курсу алгебри і початків аналізу;
- ✓ чітко розмежовувати доведення від пояснення і геометричної інтерпретації;
- ✓ виділити основні поняття і твердження, які є аргументами доведень решти тверджень цієї теми і встановити послідовність їх вивчення;
- ✓ поступово ускладнювати діяльність учнів з доведення тверджень як за змістом завдань, так і за формою організації навчально-пізнавальної діяльності;
- ✓ у навчальному процесі чергувати активні види діяльності з репродуктивними, традиційні засоби навчання з новітніми.

Використання різних прийомів та форм організації навчальної діяльності учнів значно підвищує ефективність навчання доведенню тверджень курсу алгебри і початків аналізу. Доцільно використовувати: аналіз та відтворення готових доведень; самостійний пошук і конструювання доведення твердження;

самостійне відкриття математичних тверджень; заперечення готових доведень, знаходження помилок у готових доведеннях.

Проведені нами експериментальні дослідження дозволили уточнити способи реалізації диференційованого навчання під час доведення теорем різними способами, пов'язані із розширенням кола варіантів організації роботи над доведенням твердження.

Обґрунтовано, що чітка організація навчання доведення теорем різними методами та способами, яка містить їх порівняння, вибір раціональнішого, роботу щодо конкретизації та узагальнення та ін., сприяє розвитку логічного мислення учнів.

Виокремимо позитивні сторони використання різних способів доведень математичних тверджень загалом, і теорем, зокрема:

- 1) розширення діапазону можливостей для кожного учня щодо засвоєння доведення конкретного математичного твердження;
- 2) створення можливостей для реалізації особистісно орієнтованого навчання (самостійний вибір учнем способу доведення, який він краще зрозумів, який відповідає його інтересам та рівню підготовки);
- 3) слушна нагода повторення різних методів і прийомів доведення та порівняння їх використання у конкретних випадках;
- 4) повторення більшої кількості теоретичних фактів, на які спираємося під час доведень.

До негативних сторін використання різних способів доведень математичних тверджень віднесемо:

- 1) збільшення витрат навчального часу;
- 2) ускладнення роботи вчителя при підготовці до уроку.

Формування вмінь учнів доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу має відбуватися з урахуванням вікових особливостей та рівня інтелектуального розвитку учнів старшої школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А. Індукція і дедукція у міркуванні школярів. Математика в школі. 2005. № 7. С. 9–17.
2. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. - 288 с.
3. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184-189.
4. Бриштан Т. Проблемне навчання на уроках математики //Газета «Математика». – 2007. – № 13. – С. 20-22.
5. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти /М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. - К.: УОВЦ «Оріон», 2018. - 288 с.
6. Василенко А. В. Психолого-педагогічні умови розвитку просторового мислення учнів /А. В. Василенко //Наука і школа. - 2013. - № 12 - С. 69-72.
7. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти /О.С. Істер. - Київ: Генеза, 2018. - 384 с.
8. Кірман В. К. Методична система вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю. – Черкаси, 2010. – 180 с.
9. Королук О. М., Прус А. В. Методика навчання математики в старшій школі: навчально-методичний посібник. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. - 61 с.
10. Кугай Н. В. Розвиток умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу. – К., 2007. – 184 с.

11. Кузнецов І. В. НАОЧНІ ЗАДАЧІ І ДОВЕДЕННЯ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ І НАЧАЛАМ АНАЛІЗУ В ШКОЛІ. – Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. – ВІПУСК 27, 2011. – с.126-132.

12. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: Гімназія, 2018. - 256 с.

13. Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики: навчальний посібник. – Харків: ХНПУ імені Г. С. Сковороди, Скорпіон, 2008. – 112 с.

14. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: <http://surl.li/xxthjt>

15. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Рівень стандарту). URL: <http://surl.li/xxthjt>

16. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). URL: <http://surl.li/xxthjt>

17. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика. – /за заг. ред. З. І. Слєпкань. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. – 293 с.

18. Прач В. С. Евристичне навчання математики: Подорож у світ евристики. Донецьк: Ноулідж, 2012. – 275 с.

19. Розвиток творчих здібностей у процесі навчання математики: зб. метод. матеріалів [Г. В. Мовчан та ін.; уклад. Т. В. Світлова]. - Харків: Основа, 2019. – 91 с.

20. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. - Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.

21. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
22. Сухомлинський В. О. Проблеми виховання всебічно розвиненої особистості //Вибрані твори: У 5 т. - Київ, 1976.
23. Тарасєнкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: монографія /Н.А. Тарасєнкова. - Черкаси: Відлуння-плюс, 2002. - 400 с.
24. Фіцула М. М. Педагогіка: навч. посіб. – К.: Академія, 2001. – 528 с.
25. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальн. освіт, навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 272 с.
26. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальн. освіт, навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 311 с.
27. Шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження /С.В. Іванова //Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти: монографія. – Одеса: Видавець ФОП Бойчук А. Б., 2021. – С. 102 – 113.