МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ФІНАНСІВ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:

Методичні особливості формування геометричних понять в учнів 5-9 класів

Здобувача вищої освіти
другого (магістерського) рівня, II курсу, групи СОМ-24-1,
спеціальності 014 «Середня освіта»
освітня програма «Середня освіта: математика»

Гітіна Сергія Олександровича

Науковий керівник Лілія СКАСКІВ, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Гарант освітньо-професійної програми Микола СЕМКО, д-р фіз.-мат. наук, професор

Допущено до захисту за рішенням кафедри
вищої та прикладної математики
протокол від 29.12.[illegible]

Завідувач кафедри Оксана ЯРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ірпінь – 2025

Реєстрація № 1 20.01.2026 Семків І.В.
(дата) (підпис відповідальної особи)

Результати перевірки до захисту 13.01.2026
(до захисту, на доопрацювання) (дата) (підпис)

Результат захисту 85 б 06.02.2026
(оцінка) (дата) (підпис)

Голова комісії: Н.М. Лосєва
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії:

(підпис) М.М. Семко
(ініціали, прізвище)

(підпис) І.В. Сакаків
(ініціали, прізвище)

(підпис) О.Н. Мірова
(ініціали, прізвище)

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ ВИПУСКНОЇ РОБОТИ

Об'єкти контролю	Діапазон оцінки в балах	Фактична кількість балів	Примітки	Дата, П.І.П.: керівника, голови комісії членів комісії, секретаря, (підписи)
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КЕРІВНИКОМ ТА РЕЦЕНЗЕНТОМ				
1. Зміст випускної роботи (якість теоретичного матеріалу, його зв'язок з практичним, вміння представляти матеріал в логічній послідовності, наявність висновків та пропозицій)	від 0 до 30	27		Спасків В.В.
2. Дотримання вимог щодо оформлення	від 0 до 10	7		
3. Вчасне виконання роботи на всіх етапах у встановлені кафедрою терміни	від 0 до 5	5		
4. Рецензент	від 0 до 5	5		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	43		
ОЦІНЮВАННЯ РОБОТИ КОМІСІЄЮ ПО ЗАХИСТУ				
1. Доповідь	від 0 до 10	10		Голова екз. ком. Лосєва К.М. Члени комісії: Семко В.М. Спасків В.В. Ярова О.А.
2. Роздатковий матеріал	від 0 до 5	4		
3. Знання теоретичного та практичного матеріалу, вміння відповідати на запитання	від 0 до 25	22		
4. Апробація (участь у конференціях)	від 0 до 10	6		
РАЗОМ БАЛІВ	від 0 до 50	42		
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	від 0 до 100	85		

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЕКТС	Оцінка за національною шкалою	Дата	П.І.П.: голови, членів комісії, секретаря, (підпис)
85	B	4 (добре)	06.02.2026	Голова екз. ком. Лосєва К.М. Члени комісії: Семко М.М. Спасків В.В. Ярова О.А.

ПЕРЕВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ ДО НАЦІОНАЛЬНОЇ ШКАЛИ

Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	5 (відмінно)
80-89	B	4 (добре)
70-79	C	
60-69	D	3 (задовільно)
50-59	E	
35-49	X	2 (незадовільно)

Анотація

Сергій Гітін. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ В УЧНІВ 5 – 9 КЛАСІВ

У дослідженні аналізуються аспекти організації навчального процесу, які сприяють ефективному засвоєнню геометричних понять на уроках математики для учнів 5-9 класів. Деталізовано структуру геометричних знань школярів, розглянуто етапи формування ключових геометричних понять, а також запропоновано методичні підходи до пропедевтики викладання геометрії у 5-6 класах. Крім того, розроблено практичні рекомендації щодо організації роботи на різних рівнях засвоєння теорем.

Ключові слова: освітній процес, учні, методика, геометричні поняття, теорема.

Abstract

Serhiy Gitin. METHODOLOGICAL FEATURES OF THE FORMATION OF GEOMETRIC CONCEPTS IN STUDENTS OF GRADES 5-9

The study analyzes the aspects of the organization of the educational process, which contribute to the effective learning of geometric concepts in mathematics lessons for students of grades 5-9. The structure of geometric knowledge of students is detailed, the stages of formation of key geometric concepts are considered, as well as methodological approaches to propedeutics of teaching geometry in 5-6 grades. In addition, practical recommendations for organizing work at different levels of mastering theorems have been developed.

Keywords: educational process, students, technique, geometric concepts, theorem.

ЗМІСТ

Вступ 6

Розділ 1. Особливості формування геометричних понять 9

1.1. Складові структури геометричних знань 9

1.2. Ключові етапи розвитку геометричних понять 13

1.3. Підготовка учнів 5-6 класів до освоєння систематичного курсу геометрії 20

1.4. Засвоєння фундаментальних геометричних знань на першому етапі планіметрії у 7 класі 26

Розділ 2. Методи формування практичних вмінь і навичок у процесі вивчення геометрії в 7-9 класах 30

2.1. Впорядкування навчального процесу учнів на різних стадіях формування геометричних понять 30

2.2. Методичні аспекти викладання теорем в рамках геометрії для 7-9 класів 33

Висновки 66

Список використаних джерел 68

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку шкільної освіти педагогічна спільнота активно цікавиться методами і формами навчання, які здатні стимулювати самостійну розумову діяльність учнів, поглиблювати їхній пізнавальний інтерес, розкривати творчі здібності та формувати вміння самостійно опановувати й застосовувати отримані знання у практичному житті. Такий підхід до навчання дозволяє виховувати у школярів не лише навички запам'ятовування фактів, а й важливі компетенції для критичного мислення та творчого вирішення задач.

Зокрема, особливої уваги заслуговує викладання геометрії у школі, яке ставить перед собою ключове завдання – сформувати в учнів уміння логічно міркувати, глибоко аргументувати власні твердження та грамотно доводити їх послідовність і правильність. Цю думку яскраво підкреслює О.В. Погорєлов, вказуючи на те, що вивчення геометрії спрямоване не лише на засвоєння формул чи теорем, але й на розвиток фундаментальних навичок мислення.

Варто зазначити, що серед випускників школи лише невелика кількість зможе стати професійними математиками, а тим паче геометрами. Деякі з них, ймовірно, ніколи не застосують теорему Піфагора у своїй професійній діяльності. Однак складно уявити людину, якій би не довелося аналізувати ситуацію, робити логічні висновки або доводити правильність своїх суджень хоча б одного разу в житті. Саме через це геометрія, попри її спеціалізованість у загальному контексті математики, виконує важливу роль у формуванні широких когнітивних здібностей учнів.

Вивчення геометрії в школі має багаторічну історію, яка ґрунтується на багатому педагогічному досвіді, накопиченому поколіннями вчителів математики. Сучасний учитель отримав у спадок ці здобутки та володіє широким арсеналом методів навчання: словесних, наочних, практичних, репродуктивних і пошукових.

Питання про повний перегляд цих підходів не виникає навіть за умов упровадження нового навчального посібника чи сучасних технологій. Натомість

акцент робиться на майстерному поєднанні перевірених часом методів із новими підходами, які найбільш ефективно відповідають вимогам систематичного вивчення геометрії й сприяють формуванню логічного мислення школярів.

Учні, приступаючи до вивчення планіметрії, зазвичай мають лише емпіричні знання і ще не відчувають потреби в доведенні тверджень. Їхні уявлення базуються на безпосередньому сприйнятті форм і відношень, доступних чутливому спогляданню. Ці особливості учнів не можна ігнорувати при переході до систематичного курсу геометрії. Навпаки, вчителю важливо враховувати цей початковий рівень, аби забезпечити плавний перехід від емпіричних знань до теоретичних. Це необхідно для того, щоб навчання проходило безперервно і логічно.

Особливу увагу варто приділити способу викладу учням аксіом, які є фундаментом геометрії. Його ретельний вибір стає вирішальним у забезпеченні поступового освоєння предмета та підготовки школярів до глибшого розуміння математичної теорії.

Магістерська робота присвячена аналізу та удосконаленню окремих компонентів методичної системи, що спрямована на формування геометричних понять у учнів 5–9 класів під час уроків математики.

Основна мета дослідження полягає у розробці ефективних підходів і рекомендацій для покращення цього процесу. Для її досягнення визначено такі завдання:

- провести аналіз методичних посібників, навчальних програм та підручників з математики для 5–9 класів з урахуванням досліджуваної проблеми;

- оцінити вплив окремих компонентів методичної системи на формування геометричних понять школярів;

- розробити практичні рекомендації щодо вдосконалення пропедевтики у вивченні систематичного курсу геометрії;

- визначити оптимальні підходи до організації навчальної діяльності учнів на уроках геометрії у 7–9 класах;

- створити методичні рекомендації з організації процесу засвоєння теорем на уроках геометрії.

Об’єктом дослідження виступає процес формування геометричних понять у школярів середніх класів, тоді як предметом є компоненти методичної системи, що впливають на цей процес у контексті уроків математики для учнів 5–9 класів.

Практичне значення цього дослідження полягає у розробці детальних методичних рекомендацій, які стосуються процесу викладання геометрії для учнів 5–9 класів. У роботі запропоновано конкретні вдосконалення окремих складових методичної системи формування геометричних понять у школярів середньої ланки. Ці вдосконалення мають на меті поглиблення розуміння учнями основних геометричних принципів, підвищення рівня міцності та системності їхніх знань, а також сприяння розвитку навичок самостійної освітньої діяльності, що є важливим елементом сучасного навчального процесу.

Дослідження знайшло своє практичне застосування, а його результати пройшли апробацію: Скасків Л. В., Гітін С. О. Особливості підготовки учнів до вивчення курсу геометрії. - Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2025), м. Черкаси, 10-11 квітня 2025 р. С.96-97. Ця конференція стала платформою для обговорення результатів дослідження, що посприяло їх подальшій адаптації та інтеграції до педагогічної практики.

Уся структура роботи логічно побудована таким чином, щоб максимально відповідати заявленій меті та визначеним завданням дослідження. Вона добре організована і складається зі вступної частини, де окреслюються ключові аспекти проведеного аналізу, двох змістовних розділів основного тексту, які детально розкривають тему дослідження, висновків, що підсумовують результати роботи, а також окремого списку використаних джерел. Останній служить фундаментом для формування теоретичної бази та забезпечення наукової обґрунтованості проведеного дослідження.

РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ

1.1. Складові структури геометричних знань

Сучасна математика є аксіоматичною наукою, побудованою на глибоких теоретико-множинних засадах, де ключову роль відіграють фундаментальні поняття, такі як відношення, множина, операція чи композиція, функція, перетворення й відображення. Серед найзначущіших концептів також вирізняються категорії груп та інші математичні структури. У сучасному підході числові об'єкти, величини й традиційні обчислювальні операції вже не займають домінуючої позиції, поступаючись місцем більш узагальненим і системним ідеям. На цій основі виникає необхідність адаптації навчальних програм середньої школи, зокрема у викладанні геометрії, для впровадження відповідних узагальнюючих концепцій, які формують структуру геометричних знань учнів.

Однією з найважливіших дидактичних умов новітньої програми є осягнення учнями не лише окремих понять, але й усвідомлення взаємозв’язків між ними, що лежать у серці всієї геометрії як навчального предмета. Ефективне сприйняття структури предмета дозволяє учням краще інтегрувати ідеї та поняття, сприяючи глибшому розумінню матеріалу. Чим ґрунтовніше вони опанують загальні концепції, тим легше засвоюється весь курс геометрії, водночас стимулюючи роботу пам’яті та розвиток аналітичного мислення. Більше того, учні здобувають навички застосування геометричних знань у суміжних дисциплінах, таких як фізика, трудове навчання або креслення, а також у реальних практичних ситуаціях. Від самого бачення структури знань значною мірою залежить продуктивність їхнього використання.

Історичні дані свідчать, що людство накопичувало геометричні знання протягом століть. Уже понад три тисячі років тому в розпорядженні людей був вагомий запас геометричних фактів. З найдавніших часів люди прагнули впорядкувати ці знання, створюючи систематизований підхід до їхнього опису. Такий процес вимагав залучення абстрактного мислення й елементарних

елементів логічного доведення, що поступово привело до відкриття перших теорем і геометричних закономірностей. Встановлені основи стали важливим внеском у розвиток математичних наук.

Поняття геометричної теореми та її доведення, засновані на правилах залежностей і зв’язків між геометричними фігурами, стали ключовими для трансформації розрізнених знань у систематизовану математичну теорію. Дослідження цих взаємозв'язків дозволило відокремити геометричну складову від прикладної, перетворюючи її в абстрактну наукову дисципліну.

При створенні курсу геометрії особливу увагу приділяють двом основним типам відношень: взаємному розміщенню та величині.

Перша група охоплює питання щодо положення елементів у просторі, зокрема взаємне розміщення точок, прямих і кривих, наприклад: відносини між двома прямими, між точкою і прямою, прямою і колом, точкою і колом, а також між вписаними чи описаними фігурами (кола, многокутники, кути), елементами в просторі (точки, площини, прямі), та складними об'єктами — площинами, кулями і многокутниками.

Друга група акцентує увагу на метричних властивостях фігур. Ці відношення виражаються через знаки «=», «>» і «<», торкаючись питань, пов'язаних із розміром та величинами: відстань, площа, об'єм, величина кутів тощо.

Таким чином, геометрія як наука досліджує просторові форми та відношення реальних тіл у їхньому абстрактному вигляді. Це дозволяє знаходити закономірності та принципи, що лежать в основі організації просторових структур.

Геометричні поняття зазвичай вводяться за допомогою чітко сформульованих означень, кожне з яких супроводжується спеціальним терміном, що дає назву цьому поняттю. До прикладу, такі терміни, як «відрізок», «трикутник», «коло», «центр», «діаметр», «паралельні прямі» чи «подібність», стають частиною мовної інструменталії геометрії.

При введенні нового терміну завжди необхідно пояснити його точний зміст, обґрунтувати його через уже визначені поняття та показати, з яких компонентів він утворений. Наприклад, визначаючи паралельні прямі як прямі, що знаходяться в одній площині та не мають спільних точок (або збігаються), ми базуємося на таких раніше введених поняттях, як пряма, точка, площина та положення елементів одне щодо одного. Важливо зазначити, що в означеннях надаються лише необхідні ознаки поняття, які достатньо характеризують його сутність і водночас відокремлюють його від інших понять.

Неминучим є факт, що процес розкриття всіх геометричних змістів через уже визначені терміни не може продовжуватись безкінечно. У певний момент доводиться зупинитися й прийняти окремі поняття без додаткових означень, вважаючи їх початковими. Саме вони утворюють фундаментальні основи геометрії. Такі базові поняття, як точка, пряма чи відстань, беруться з найпростішого досвіду і отримують статус основних або первісних. Усі інші поняття геометрії визначаються через ці базові елементи, а на більш розвинутому етапі — через раніше сформульовані означення.

Крім цього, між геометричними поняттями існують певні зв’язки й співвідношення. Наприклад, поняття паралелограма — чотирикутника, у якого протилежні сторони попарно паралельні — тісно пов’язане з такими поняттями, як чотирикутник і паралельні відрізки (сторони).

У математичній теорії відношень найбільш уживаними є кілька основних типів, серед яких виокремлюються наступні:

1. «Відношення належності»: Воно відображає зв’язок між елементами геометричних конструкцій, таких як точка, пряма чи площина. Наприклад, точка належить прямій, пряма розташована в площині, площина проходить через задану точку, дві прямі перетинаються чи утворюють кут тощо.

2. «Відношення порядку»: Це характеризує взаємне розташування елементів просторових об'єктів. Такі висловлювання, як "точка А передує точці В", "елементи лежать по різні боки прямої або площини", або "одна фігура йде слідом за іншою", демонструють використання цього відношення.

3. «Відношення рівності»: Застосовується для порівняння параметрів об'єктів, наприклад, коли говорять про рівність кутів, відрізків чи фігур.

4. «Відношення подібності»: Це відношення описує схожість форми та структури геометричних об'єктів, наприклад, у випадку подібних многокутників, пірамід чи інших фігур.

Деякі з зазначених відношень отримують своє точне математичне формулювання через означення. Наприклад, подібність двох трикутників визначається через рівність їх відповідних кутів або співвідношення пропорційності між сторонами. Однак, як і для понять, не всі відношення піддаються визначенню. Чимало з них беруться за вихідні та вважаються фундаментальними в математиці. До таких базових відношень належать, зокрема, належність та рівність.

Схожий принцип проявляється при доведенні теорем: кожне доведення ґрунтується на попередньо доведених теоремах або аксіомах. Коли виникає необхідність довести найперші теореми, їх обґрунтування здійснюється з опертям на елементарні твердження, перевірені на практиці й прийняті без додаткових логічних аргументів. Ці твердження, що служать основою для всієї математичної системи, називаються аксіомами.

З вищезазначеного можна стверджувати, що для побудови систематичного курсу геометрії, а також для впорядкування геометричних знань необхідно:

1. Перелічити основні (базові) неозначувані поняття.

2. Сформулювати аксіоми як вихідні твердження.

3. Визначити неозначувані відношення, які використовуються для опису основних понять і формування означень усіх наступних геометричних термінів.

Цей підхід називається дедуктивним методом побудови геометрії, де часткові положення (твердження) виводяться із загальних принципів.

Зокрема, аксіоматична форма цього методу передбачає чітку структуру побудови геометрії:

А. Кожне геометричне поняття повинно бути або віднесене до базових (основних) і включено у перелік таких понять, або чітко визначене через основні та раніше описані поняття.

Б. Кожне твердження геометрії має бути або аксіомою (з попередньо складеним списком), або теоремою, яку необхідно логічно довести, спираючись виключно на аксіоми та вже доведені теореми.

В. Повинен бути визначений список основних відношень та загальновживаних термінів, завдяки яким аксіоматично описуються неозначувані поняття. До цього переліку входять такі терміни: "всі", "якщо... то", "необхідні", "достатні", "існує" та інші.

У 5–6 класах варто зосередити особливу увагу на формуванні базових понять "точка" та "відстань", які є ключовими у аксіоматичній структурі курсу геометрії для 7–9 класів. Правильне засвоєння цих концепцій учнями стає одним із найважливіших завдань педагога.

Практичний досвід використання нових програм і навчальних матеріалів у середніх класах підтверджує ефективність запропонованої методики, спрямованої на організацію навчального процесу. Цей підхід сприяє тому, що в 7 класі учні значно легше опановують роль і взаємозв’язок основних понять і аксіом у систематизованому курсі геометрії. Окрім того, важливим аспектом є розвиток у школярів потреби у логічному обґрунтуванні тверджень та висновків, що формує основи критичного мислення.

1.2. Ключові етапи розвитку геометричних понять

Засвоєння геометричного матеріалу учнями 7-го класу досягається найбільш ефективно завдяки систематичному і цілеспрямованому формуванню базових геометричних понять, розпочатому ще в 5-6 класах. У Державному стандарті середньоосвітніх навчальних закладів зазначено, що геометричний компонент курсу математики для цих класів охоплює дві ключові змістовні лінії: перша стосується геометричних фігур та особливостей їх властивостей, а друга

присвячена геометричним величинам, включаючи процеси їх вимірювання та обчислення.

Практичні аспекти запровадження геометричних понять у школі, а також дослідження у сфері психології навчання свідчать, що в середніх класах найефективнішим методом для засвоєння матеріалу є конкретно-індуктивний підхід. Цей метод передбачає активне використання наочності, що спрощує сприйняття нових понять. Нові геометричні концепції формуються поступово внаслідок здійснення учнями розумових та практичних дій, які опираються на їхній попередній досвід і реальні об'єкти. Особливо важливою є інтеграція таких понять в процес розв’язування спеціально розроблених задач.

Розробка методики формування геометричних понять у нашій роботі ґрунтувалася на дослідженнях видатних педагогів і методистів, зокрема М.І. Бурди, О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань та І.Ф. Тесленка. Враховуючи закономірності навчального процесу, вікові та індивідуальні особливості школярів, а також структуру їхньої пізнавальної діяльності (яка включає такі елементи: мета, мотив, об’єкт, зразок, операція, результат, корекція), ми виокремили і детально опрацювали п'ять ключових етапів формування понять. Для кожного з цих етапів підібрали відповідні типи вправ, що сприяють не лише засвоєнню знань, але й їх глибшому розумінню та закріпленню у практиці навчання.

І. Діагностично-пропедевтичний етап

Метою цього етапу є:

1) визначення рівня засвоєних раніше понять, їх глибини, точності й наукової обґрунтованості;

2) актуалізація знань і уявлень, які слугують базою для осмислення нових понять;

3) перевірка та корекція базових понять.

Цей етап є надзвичайно важливим, адже він дозволяє вчасно виявити та усунути помилкові уявлення, які можуть впливати на формування нових знань.

Він також сприяє аналізу життєвого досвіду учнів та здобутих раніше знань із попередніх класів.

У рамках діагностично-пропедевтичного етапу широко застосовуються спеціальні завдання та вправи, які можна виконувати як перед введенням нового поняття, так і заздалегідь до його вивчення. Це можуть бути питання, що потребують усної чи письмової відповіді, практичні завдання на побудову геометричних фігур тощо.

Наприклад, для оцінки сформованих уявлень про кут, доцільно запропонувати учням вправи на визначення різних видів кутів за малюнками та серед об’єктів довкілля. Перед введенням поняття кута важливо зосередитися на повторенні ключових аспектів, таких як визначення променя та принципи взаємодії двох променів зі спільним початком. Це можна здійснити через виконання пропедевтичних завдань:

1. Визначити кількість променів (півпрямих), які утворюються при перетині двох прямих. Позначити їх буквами та записати відповідні назви.

2. Оцінити правильність тверджень: а) промінь характеризується прямолінійністю і обмеженістю в одному напрямку; б) у прямої, променя та відрізка є спільні властивості.

3. З огляду на точки А і С провести всі можливі промені, що виходять із точки А і: а) проходять через точку С; б) не проходять через точку С.

4. Розрахувати кількість променів, які можна побудувати з точкою К як початком.

5. Дано точку О як початок променя ОК. Визначити, скільки різних променів можуть мати точку О як початок.

6. Побудувати промінь ОК із точки О так, щоб на ньому знаходилась задана точка А.

ІІ. Етап ознайомлення з новим математичним поняттям

Цей етап є важливим компонентом навчального процесу, спрямованого на систематизацію знань учнів та поглиблення їхнього розуміння ключових концепцій. У цьому етапі здійснюється ретельне обґрунтування необхідності

введення нової дефініції, пояснюється її роль у структурі шкільного курсу математики, а також її зв’язок із раніше відомими поняттями. Особлива увага приділяється формуванню в учнів чітких уявлень про нове поняття через поступове уточнення його властивостей, що сприяє будуванню ефективної когнітивної бази знань.

На цьому етапі особливої важливості набувають спеціально розроблені вправи, які слугують інструментом для глибокого аналізу та осмислення поняття. Вони реалізуються за кількома ключовими напрямками, зокрема:

а) детальне вивчення ознак поняття (з акцентом як на суттєві, так і несуттєві аспекти);

б) чітке відмежування істотних ознак від несуттєвих, щоб уникнути плутанини при формуванні визначення;

в) узагальнення отриманих ознак, що дозволяє зробити загальний висновок про природу поняття;

г) синтезування істотних характеристик у чітко сформульоване означення;

д) конкретизація поняття через застосування на прикладах.

Розглянемо детальніше процес ознайомлення з поняттям паралельних прямих для учнів 6 класу. Організація уроку може бути побудована таким чином: спершу дітям пропонують дослідити всі можливі конфігурації двох прямих на площині, показуючи різноманітні варіанти їх положень. На дошці вчитель зображує серії прямих, серед яких є ті, що перетинаються, і ті, які не мають точок перетину. Запропоновані малюнки варіюються: представлені приклади горизонтальних, вертикальних та похилих прямих. Для наочного сприйняття окремі пари не перетинаються, але позначаються ситуації, коли існує ймовірність їх перетину при продовженні ліній.

Для систематизації й осмислення нового матеріалу учням пропонуються різноманітні завдання:

1. Виявити серед запропонованих пар прямих ті, які характеризуються спільними істотними ознаками. У результаті прямі поділяються на дві групи:

перша включатиме пари прямих, що перетинаються, а друга — ті, які не перетинаються.

2. Назвати несуттєві ознаки паралельних прямих, такі як їхнє положення на площині або відстань між ними.

3. Визначити істотну ознаку паралельних прямих, яка полягає в тому, що вони не перетинаються незалежно від продовження їх у просторі.

4. На основі виконаних завдань сформулювати власне означення паралельних прямих: прямі називаються паралельними тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині та ніколи не мають точок перетину.

Таким чином, завдяки поетапному й інтерактивному підходу учні отримують змогу не лише засвоїти нове математичне поняття, а й розвивати здатність до аналізу та узагальнення, що є необхідним елементом математичного мислення.

III. Етап застосування поняття та адаптації його до нових умов і ситуацій

Рівень освоєння поняття, а також ступінь його усвідомлення найповніше проявляється в процесі практичного застосування, де відбувається перенесення цього поняття в різні контексти та оперування ним відповідно до нових завдань. Основною метою цього етапу є не лише закріплення найважливіших характеристик понять, термінів і визначень, але й глибше їх осмислення та формування вміння активно використовувати ці знання у структурованих і нестандартних ситуаціях.

На цьому рівні навчального процесу широко впроваджуються різноманітні тренувальні та творчі вправи, які допомагають учням ефективно інтегрувати отримані знання. До тренувальних завдань можна віднести:

- Завдання за зразком, які базуються на повному зображенні орієнтовного алгоритму дій, що учень має повторити з максимальною точністю.

- Завдання за інструкцією, де учню надається набір загальних рекомендацій щодо виконання роботи, проте він самостійно організовує її виконання.

- Самостійні вправи, що передбачають виконання без отримання додаткових інструкцій з боку вчителя або організатора навчального процесу.

У свою чергу, творчі вправи слугують для більш глибокого та всебічного розвитку навичок оперування поняттями, особливо в умовах нестандартних проблем. Такі завдання доцільно використовувати на етапі, коли учень уже накопичив достатній багаж знань, досвіду й сформував сталі прийоми мисленнєвої діяльності.

Наприклад, у процесі закріплення поняття осьової симетрії завдання тренувального характеру може полягати в тому, щоб запропонувати учням побудувати фігуру, яка буде симетрична заданій відносно осі X. Це можна зробити за запропонованим алгоритмом або без нього, залежно від рівня підготовки та поставлених цілей. Разом із цим така вправа може стати творчою, якщо додати варіант, де учень самостійно вибирає тип геометричної фігури та на основі власних знань будує її симетричну копію.

Таким чином, вправи даного етапу дозволяють не лише закріпити ключові складові понять, але й сприяють їхній інтеграції в нестандартні умови, забезпечуючи фундамент для подальшого розвитку навчальних і мисленнєвих компетенцій.

IV. Етап систематизації понять

На цьому етапі навчального процесу особлива увага приділяється уточненню нового поняття, його чіткому відділенню від уже засвоєних знань, а також встановленню взаємозв’язків і логічних відносин між поняттями, які входять до загальної системи. У межах даного етапу актуальними є завдання, спрямовані на створення класифікаційних схем і таблиць, які сприяють глибшому осмисленню інформації та формуванню структурованого розуміння навчального матеріалу.

Наприклад, у 5-му класі, після вивчення основного поняття про кути та їх різновиди, викладач може організувати діяльність учнів таким чином, щоб вони не лише давали відповіді на питання, а й самостійно формували класифікаційну схему. Для цього можна запропонувати такі запитання:

1. Які види кутів вам відомі?

2. Які загальні властивості притаманні всім кути?

3. Які особливості різняться між видами кутів?

У процесі відповіді на ці запитання учні готують класифікаційну схему, що відображає поділ кутів на прямі, гострі та тупі. Наведений підхід мотивує учнів до самостійного аналізу і розуміння навчального матеріалу.

Аналогічно можна організувати роботу після опрацювання теми «Трикутники. Види трикутників». Учням пропонується створити класифікаційну схему з відповідної тематики, але перед тим вони повинні проаналізувати ключові аспекти і відповісти на запитання:

1. Які типи трикутників ви знаєте?

2. Що означає термін "гострокутний трикутник"?

3. Як визначити прямокутний трикутник?

4. Що характерно для тупокутного трикутника?

5. Як зрозуміти, що трикутник є рівностороннім?

6. Що собою являє різносторонній трикутник?

7. Які властивості характеризують рівнобедрений трикутник?

Відповідаючи на ці запитання, учні мають можливість не лише закріпити свої знання про трикутники та їхні властивості, але й структурувати отриману інформацію у зрозумілій і логічній формі, що сприяє більш ефективному сприйняттю теми. Завдяки такому підходу учні розвивають навички аналітичного мислення, класифікації та узагальнення понять, що є важливими складовими навчального процесу.

V. Контрольно-оцінювальний етап

Контроль засвоєння понять здійснюється регулярно, щоб оперативно виявляти та усувати прогалини, помилки і неточності. На даному етапі впроваджуються спеціально розроблені оцінювальні вправи. Їх основна мета — перевірити рівень засвоєння сформованих понять, а також сприяти їх систематизації та узагальненню. Ці завдання відрізняються за змістом, формою подання і рівнем складності.

Ось приклад самостійної роботи після вивчення поняття кута та його видів:

1. Чому всі розгорнуті кути є рівними між собою?

2. Накресліть кут та позначте точки, які йому належать і не належать.

3. Накресліть прямий кут і з його вершини проведіть промені OM і ON. Визначте множину кутів, менших за прямий, що утворилися на малюнку.

4. Накресліть два прямі кути таким чином, щоб їх спільною областю була точка, відрізок або промінь.

Згадані етапи формування понять і типи вправ є взаємопов'язаними, забезпечуючи основу для вибору вчителем ефективних завдань, спрямованих на розвиток геометричних уявлень у учнів.

1.3. Підготовка учнів 5-6 класів до освоєння систематичного курсу геометрії

Підготовка учнів до усвідомленого й цілісного опанування систематичного курсу геометрії в 5-6 класах є однією з найскладніших задач математичної освіти в даний період. Обмежений обсяг геометричного матеріалу, а також його певна відокремленість від інших розділів програми часто стають причиною фрагментарного вивчення без необхідного узагальнення та систематичного підходу.

Недостатня увага вчителя до розвитку базових геометричних понять, формування просторової уяви, графічних навичок та здібностей у дітей цього віку може призвести до пригнічення образного мислення, уповільнення інтелектуальних операцій і, як наслідок, до механічного запам’ятовування матеріалу та формалізму в знаннях.

У процесі викладання математики в 5-6 класах одним із ключових завдань є цілеспрямоване створення у школярів здатності формувати чіткі зорові образи математичних понять, що сприяє розвитку просторової уяви, а також оволодіння прийомами мислення, необхідними для вирішення широкого спектру завдань. Паралельно з цим важливим аспектом навчання є виховання творчої

індивідуальності учнів, що допомагає їм розкривати свій потенціал у здобутті нових знань і застосуванні їх на практиці.

Програма з математики для 5-6 класів ставить за мету систематизувати та узагальнити вже засвоєні учнями знання, а також суттєво розширити і збагатити їхній математичний багаж, накопичений у процесі навчання в молодших класах. Ці знання слугують підґрунтям для переходу до вивчення більш складних і структурованих курсів алгебри та геометрії. У межах цього етапу навчання школярам пропонується поглиблене ознайомлення з геометричними об'єктами, де вони навчаються впізнавати і правильно відтворювати ці об'єкти за допомогою креслярських інструментів. Важливо також забезпечити учнів практичними навичками побудови геометричних фігур та виконання вимірювань їхніх характеристик, таких як довжина сторін, площа та об'єм.

Засвоєння теоретичних аспектів, пов'язаних із геометричними фігурами, відбувається через практичну роботу із їх конкретними прообразами. Виконуючи нескладні вимірювання і креслення, а також розв’язуючи задачі різного ступеня складності, учні розуміють взаємозв’язки між абстрактними поняттями і їх реальними застосуваннями. Наприклад, такі завдання можуть включати обчислення довжини відрізка, площі багато-кутника або об’єму геометричних тіл.

Хоча геометричний компонент програми для 5-6 класів є відносно компактним за обсягом, його значення важко переоцінити. Геометричні концепції навіть на цьому рівні вивчення відіграють важливу роль у створенні наочної бази для розгляду числових величин, виконання арифметичних операцій над числами та аналізу властивостей дробів. Крім того, ці концепти застосовуються при графічному моделюванні змісту задач на нерівності чи рівняння. Використання функціонального підходу до тлумачення математичних понять у поєднанні із загальною буквеною символікою забезпечує інтеграцію геометричного матеріалу з іншими темами курсу математики.

Особливий акцент робиться на розвиток обчислювальних і графічних навичок у школярів, одночасно приділяючи значну увагу формуванню логічного

мислення. Це досягається завдяки дотриманню принципу системності в навчальному процесі, який дозволяє закладати міцний фундамент для подальшого успішного опанування більш складних розділів математичної науки. Таким чином, навчально-виховний процес у 5-6 класах сприяє широкоформатному розвитку когнітивних здібностей учнів, їхньому творчому мисленню та готовності до вирішення математичних задач різного рівня складності.

На кожному занятті, незалежно від його тематики, має сенс відводити кілька хвилин на виконання усних вправ, геометричних диктантів, практичних вимірювань і побудов, а також на наочне обґрунтування графічних математичних тверджень. Зміст геометричних вправ можна урізноманітнювати, вдосконалюючи їх шляхом внесення додаткових даних і запитань, що спрямують учнів на уточнення понять, повторення й систематизацію знань, а також засвоєння термінології.

Особливо корисним є розв’язування задач за готовими графічними схемами та малюнками. Раціональна організація навчання геометрії сприяє розвитку практичних умінь і навичок, посиленню міжпредметних зв’язків та створенню важливої бази для розвитку дедуктивного мислення. Формування геометричних понять варто будувати на основі спостережень навколишньої реальності, сформованих зорових образів і набутого досвіду. Учні мають вчитися бачити геометричну фігуру як цілісну структуру, а також самостійно поділяти її на складові частини, виокремлювати суттєві особливості, спільні риси і розглядати ті самі елементи з різних перспектив. Такі підходи допомагають учителю поступово підвести учнів до розуміння взаємозв’язку між фігурами та їх елементами і сприйняття геометрії як цілісної системи понять.

Враховуючи, що основними об’єктами геометрії є просторові фігури, їх взаємозв’язки і властивості, а всі твердження базуються на графічній наочності, необхідно приділяти значну увагу роботі з геометричними малюнками. Вони відіграють ключову роль у візуалізації понять, розкритті їхньої сутності та властивостей, сприяють просторовому усвідомленню об’єктів і полегшують

засвоєння матеріалу. Отже, навички створення графічних зображень мають постійно розвиватися та вдосконалюватися. Учнів потрібно навчати читати й створювати різноманітні зображення та обґрунтовувати їх логіку.

Наприклад, оскільки дітям із дошкільного віку знайомі такі фігури, як квадрат, прямокутник і ромб, а їхні базові властивості вже проявляються на інтуїтивному рівні, у початкових класах доцільно поглиблювати ці навички через практику вимірювань і обчислення периметрів. Для цього можна використовувати побудови фігур на аркушах у клітинку або за допомогою креслярського інструментарію, як-от циркуль чи лінійка.

Працюючи зі зміною розмірів і положень фігур, учні мають змогу переконатися у таких властивостях: у квадрата всі кути прямі, а сторони рівні; у прямокутника всі кути прямі, а протилежні сторони рівні за довжиною; у ромба діагоналі перетинаються під прямим кутом, а всі сторони мають однакову довжину.

У подальшій роботі з геометрією, після ознайомлення учнів із поняттями бісектриси кута, основними видами трикутників, а також паралельними і перпендикулярними прямими, варто перейти до детальнішого вивчення властивостей різних геометричних фігур. Зокрема, слід дослідити, для яких саме фігур діагоналі є бісектрисами кутів, у яких видах чотирикутників діагоналі перетинаються під прямим кутом, а також визначити, які види трикутників можуть утворитися при перетині діагоналей чотирикутника. Варто поставити питання про те, чи серед утворених трикутників існують рівні за властивостями форми і розмірами, та проаналізувати це більш детально.

Практична робота з побудовою і вимірюванням таких фігур дозволяє учням наочно уявити їхні властивості. Створення моделей цих фігур та їх порівняння, наприклад, шляхом накладання одна на одну після попереднього розрізування, допомагає учням сформувати уявлення на наочно-образному рівні. Завдяки цьому вони розвивають навички просторового сприйняття видів фігур, визначення рівних елементів та величин. Ця діяльність також сприяє їхньому

вмінню обґрунтовувати правильність зроблених висновків через використання простих логічних міркувань.

Щоденні короткотривалі вправи з використанням креслярського інструментарію є ефективним методом поглиблення геометричних знань школярів. Як показує педагогічний досвід, такі вправи стимулюють розвиток графічної культури учнів, сприяють їхньому загальному інтелектуальному зростанню і закладають основи для успішного виконання подальших задач практичного характеру. Крім того, варто заохочувати учнів до виконання невеликих практичних завдань вдома. Наприклад, це можуть бути побудова геометричних фігур у спеціальних альбомах, виконання вимірювання та обчислення периметрів, площ і об’ємів предметів у домашньому середовищі, а також проведення аналогічних робіт на місцевості.

Для якісної освіти в 5-6 класах необхідно приділяти особливу увагу формуванню логічного мислення учнів. Це передбачає розвиток умінь обґрунтовувати власні думки, робити узагальнення та проводити дедуктивні міркування із використанням послідовних логічних кроків. Поступово учнів слід підводити до розуміння важливості доведення геометричних тверджень. Важливо акцентувати увагу на тому, що багато речей, які на перший погляд видаються очевидними, не завжди є такими у реальності. Це можна підтвердити завдяки аналізу прикладів оптичних ілюзій, неточних вимірювань або недбалих побудов.

Особливо змістовним і корисним буде введення вправ із визначення паралельності та рівності відрізків прямих. Такі вправи можуть бути пов’язані з аналізом малюнків, де прями паралельності здаються викривленими через вплив ілюзій зору. Це дозволить учням краще розуміти сутність паралельних і перпендикулярних прямих у геометрії й розвивати точність у роботі з кресленнями та вимірюваннями.

З огляду на вікові особливості учнів, їхній рівень мислення, запас просторових уявлень, знань, умінь і навичок, важливо поступово та доступно для кожного класу графічно демонструвати основні властивості, акцентуючи увагу

на ключових аспектах. Для досягнення цієї мети учні повинні оволодіти умінням виконувати різнопланові вправи, які сприяють як розвитку їхнього просторового уявлення, так і зміцненню навичок з геометричних побудов.

Основні завдання включають такі дії:

1. Проведення прямої, променя та відрізка.

2. Позначення точок на прямій, площині та відрізку.

3. Побудова прямих через дві задані точки.

4. Доповнення заданої півпрямої.

5. Визначення точок, що належать або не належать прямій, відрізку чи променю.

6. Позначення точок перетину прямих та визначення, чи перетинаються прямі.

7. Визначення точок, що знаходяться з одного боку або з різних боків від заданої точки.

8. Побудова точки на прямій, яка розташована між двома іншими точками.

9. Поділ відрізка навпіл.

10. Встановлення точок, що належать різним півплощинам.

11. Побудова кута заданої величини, порівняння кутів і визначення їх градусної міри.

12. Визначення кутів, що утворюють даний кут.

13. Проведення через задану точку прямої, перпендикулярної або паралельної до даної прямої.

14. Пізнання елементів кута, трикутника чи чотирикутника.

15. Побудова трикутника з урахуванням заданих умов.

Ці вправи закладають основу для глибшого розуміння геометричних принципів і розвитку аналітичного мислення учнів шляхом виконання практичних завдань на кожному етапі навчання.

1.4. Засвоєння фундаментальних геометричних знань на першому етапі планіметрії у 7 класі

У процесі роботи над матеріалом першого параграфу було визначено кілька ключових завдань:

1) навчити учнів опановувати структуру навчального посібника, формуючи в них навички самостійного пошуку відповідей на задані питання;

2) сприяти вихованню потреби у чітких логічних обґрунтуваннях;

3) ознайомити з загальною структурою курсу геометрії;

4) розвивати вміння застосовувати аксіоми для аргументованого розв’язання простих задач.

Планомірне використання навчального посібника під час уроків допомогло успішно вирішити перше із зазначених завдань. Друге і четверте завдання реалізовувалися через роботу з аксіомами, що стосуються приналежності точок і прямих, а також розташування точок на прямій і площині. Крім того, застосовувалися аксіоми для вимірювання відрізків і кутів.

Особливі труднощі у школярів викликало обґрунтування вирішення задач типу 9 і 10 із §1, які потребували використання властивостей поділу площини. Досвід показав, що подолати ці складнощі легше, якщо учням пропонувати зразки поетапного запису алгоритму розв’язку задач.

Для більш ефективного засвоєння аксіом, пов'язаних із вимірюванням відрізків та кутів, а також їх застосуванням для розв'язування задач, широко застосовувалася методологія аналогій між цими двома аксіомами. З метою полегшення навчального процесу у кабінеті математики протягом певного часу були розміщені таблиці, на яких паралельно записувалися ці аксіоми, що підкреслювало їх взаємозв’язок. Одночасно учні ознайомлювалися з відповідними задачами, які вимагали аналітичного застосування цих аксіом. Така практика, що створювала умови для порівняння та виявлення ідентичних методів обґрунтування розв'язків, позитивно впливала на формування та закріплення практичних навичок учнів.

Початкове ознайомлення з іншими аксіомами здійснювалося у вступному форматі під час вивчення матеріалу першого параграфа. Це дозволило сформувати базове уявлення про структуру курсу загалом. Проте детальніше опрацювання таких важливих аксіом, як аксіома відкладання відрізків і кутів, аксіома існування трикутника, рівного заданому, а також аксіома паралельності, планомірно проводилося на більш пізніх етапах навчання, коли ці фундаментальні принципи безпосередньо використовувалися у відповідних темах.

Формування чіткої бази логічних обґрунтувань під час розбору задач із першого параграфа потребувало значних зусиль як від учителів, так і від самих учнів. Незважаючи на трудомісткість процесу, ці старання мали тривалий позитивний ефект. Учні почали сприймати логічне обґрунтування як невід'ємну складову розв'язання будь-якої математичної проблеми. У подальшому матеріалі вже не виникало суперечок щодо необхідності пояснень та доказів: учні засвоїли, що кожне завдання повинно бути розв'язане з опорою на визначені аксіоми, теореми та поняття. Вимоги щодо обґрунтування змінювались залежно від рівня складності задачі; чим більш комплексною ставала проблема, тим менш детальними ставали окремі формулювання. З часом посилання на аксіоми поступово зменшувалися, адже обсяг накопиченого теоретичного матеріалу дозволяв використовувати його в обґрунтуваннях без нагадувань.

Дослідження традиційної частини другого параграфа, присвяченої суміжним і вертикальним кутам, не викликало значних труднощів у засвоєнні учнями. Теорема про перпендикулярні прямі та метод доведення "від супротивного" були значною мірою зрозумілі завдяки ретельній підготовці у ході роботи з попереднім параграфом.

Учням досить складно опанувати доведення теореми 2.4, яка стосується кутів, розташованих в одній напівплощині. Особливо важким виявляється момент переходу від співвідношення між градусними мірами двох кутів до аналогічного співвідношення для суміжних з ними кутів.

Основним змістом навчальної програми для 6 класу слід вважати відомості про ознаки рівності трикутників, поняття паралельності, а також теорему про суму кутів трикутника. Враховуючи значущість цих тем, матеріал параграфів 3 та 4 потребує особливої уваги.

У параграфі 3 представлено невелику кількість нескладних задач, що сприяють розвитку обчислювальних навичок учнів. Крім того, тут містяться вправи, для розв’язання яких використовується лише одна ознака рівності трикутників (наприклад, завдання типу 1, 2, 5–9). Однак для ефективної роботи недостатньо дидактичних матеріалів, які могли б стати основою для організації усної і письмової діяльності учнів за готовими малюнками.

При вивченні § 4 відчувався гострий брак задач, що зв'язують ознаки паралельності, властивості кутів при паралельних прямих і січній з ознаками рівності трикутників.

Зміст матеріалу, викладеного у §5, вже частково знайомий учням з попереднього курсу 5 класу, але практичний досвід показує, що відсутність логічної взаємозв’язку між окремими задачами часто призводить до неефективного використання навчального часу. На основі проведеної роботи над цим розділом ми дійшли висновку, що організація вивчення матеріалу в певній послідовності є більш доцільною і сприяє оптимізації процесу навчання.

Пропонується наступний порядок викладання:

1. Введення понять: коло, його центр, радіус, хорда, діаметр. Розв’язування задач, що ілюструють діаметр, перпендикулярний до хорди.

2. Огляд властивостей кутів, вписаних у коло.

3. Метод поділу відрізка навпіл.

4. Дослідження кола, описаного навколо трикутника.

5. Особливості дотичної до кола в заданій точці, а також розгляд взаємного розташування двох кіл.

6. Побудова бісектриси даного кута та дослідження кола, вписаного у трикутник.

7. Методи побудови прямої, перпендикулярної даній, та кута, рівного заданому.

8. Побудова трикутника за трьома відомими елементами.

9. Вивчення геометричного місця точок та застосування методу геометричних місць.

Таке впорядкування навчального матеріалу гарантує більшу логічну цілісність між темами і допомагає ефективніше використовувати навчальний час у межах загальної програми.

Ключовим етапом кожного уроку було введення нового поняття або пропозиції згідно з розробленою схемою планування, яка сприяла глибокому й усвідомленому засвоєнню учнями навчального матеріалу:

1. Проведення практичних завдань для підготовки учнів до "відкриття" нового поняття чи твердження.

2. Заохочення учнів до формулювання здогадок щодо відповідного вирішення чи визначення.

3. Ознайомлення з текстом підручника або навчального посібника для закріплення теоретичних знань.

4. Усне повторення ключових моментів з прочитаного тексту, щоб забезпечити міцне засвоєння інформації.

5. Виконання задач для закріплення і застосування отриманих теоретичних знань.

6. Аналіз і пояснення домашнього завдання із визначенням додаткових питань, які можуть виникнути під час його виконання.

Після запису домашнього завдання, за декілька хвилин до завершення заняття, учням пропонувалося самостійно знайти відповіді на поставлені питання в підручнику під контролем вчителя. Такий підхід дозволяв готувати учнів до виконання домашніх задач таким чином, щоб вони могли самостійно працювати над закріпленням знань у позаурочний час.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ ВМІНЬ І НАВИЧОК У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ В 7-9 КЛАСАХ

2.1. Впорядкування навчального процесу учнів на різних стадіях формування геометричних понять

У процесі формування практичних навичок доцільно розрізняти чотири основні етапи: підготовчий, ознайомлювальний, формування навичок і вдосконалення практичних умінь. Далі розглянемо підходи, які можуть застосовувати вчитель та учні на кожному з цих етапів.

На початку роботи педагогу важливо визначити сукупність умов, які будуть основою для успішного засвоєння учнями практичних дій. Наприклад, якщо метою є навчити учнів будувати з використанням циркуля та лінійки кут, рівний заданому, необхідно забезпечити їх знанням базових аспектів:

1. Геометричні поняття, такі як півпрямі, півплощини, кути (їх визначення, відмінності, зображення та позначення).

2. Чітке розуміння мети дій — у цьому випадку побудови кута, рівного заданому.

3. Інструменти, необхідні для виконання задачі.

4. Конкретні конструктивні операції, а також їх послідовність виконання.

Окрім того, учні мають бути здатні логічно обґрунтувати правильність виконаної побудови й довести її коректність. Для цього їм потрібні навички роботи з елементарними геометричними операціями, такими як:

- побудова півпрямої, що проходить через задану точку та має певний початок;

- створення круга з довільним або визначеним радіусом із заданим центром тощо.

Цей підхід дозволяє поступово і ефективно формувати у школярів практичні навички, необхідні для подальшого розвитку в геометричних заняттях та інших галузях.

Отже, вчитель має дотримуватися таких кроків:

I. На підготовчому етапі необхідно актуалізувати знання учнів, які стосуються базових математичних понять. Для учнів 7-го класу можна запропонувати наступні завдання:

1. Побудувати півпряму, позначити її та сформулювати визначення поняття "півпряма".

2. Намалювати пряму, позначивши півплощини (наприклад, α і β), на які ця пряма розділяє площину.

3. Відмітити точку та побудувати коло з центром у зазначеній точці. Після цього пояснити поняття кола.

4. Власноруч побудувати трикутник із рівними сторонами, а потім перевірити точність побудови шляхом вимірювання довжини сторін.

5. Серед кількох кутів, зображених на дошці за допомогою транспортира, визначити рівні кути й пояснити, які з них називаються рівними.

6. У рівних трикутниках позначити рівні кути та обґрунтувати вибір.

II. На ознайомлювальному етапі учням слід навчитися виділяти дані умови задачі, визначати, що саме потрібно зробити, а також обирати необхідні інструменти й операції для виконання завдання у правильній послідовності. Наприклад, при ознайомленні з процесом побудови кута, що дорівнює даному, доцільно поставити такі запитання:

- Які геометричні фігури згадані в задачі? (Дано кут, півпряма, півплощина).

- Що потрібно виконати? (Відкласти від даної півпрямої у заданій півплощині кут, що дорівнює заданому).

Такі методичні кроки сприятимуть формуванню уявлень про послідовність вирішення геометричних задач та розвитку аналітичного мислення.

Після того, як учні завершать виконання малюнка у своїх зошитах, наступним етапом уроку може стати детальне пояснення плану побудови методом аналізу. Для максимально ефективного засвоєння матеріалу вчитель

пропонує структурований ланцюжок міркувань, який полегшить вирішення поставленої задачі.

Передусім варто нагадати учням, що доведення рівності двох кутів часто спирається на знаходження двох трикутників, котрі мають рівні сторони і кути та до складу яких входять ці два досліджувані кути. І тут виникає ключове питання: чи можемо ми побудувати трикутник, який матиме кут, уже нанесений у зошитах? Для цього достатньо провести перетин сторін цього кута довільною прямою, що дозволить сформувати необхідні геометричні фігури.

Таким чином, суть задачі поступово зводиться до побудови трикутника, що є рівним заданому. Такий підхід не лише формує логічне мислення, але й демонструє практичне застосування теоретичних знань у розв'язанні конкретних геометричних завдань.

III. На етапі формування практичних навичок перед учнями ставиться завдання навчитися виконувати необхідні практичні дії не лише точно, але й самостійно, без втручання з боку інших осіб. Це вміння має проявлятися у знайомих і звичних для них ситуаціях, з урахуванням раніше представленого зразка виконання. Саме тому на даному етапі передбачено виконання вправ, які мають схожу структуру із вже розглянутими, але з певними змінами в умовах, що сприяють розвитку гнучкого мислення та адаптивності учнів.

У рамках таких завдань можна запропонувати учням наступну вправу:

1. У півплощині β проведіть кут від заданої півпрямої a, який дорівнює куту A.

2. Побудуйте кут із градусною мірою 72°. Використовуючи циркуль та лінійку, зробіть конструкцію, що відповідає цьому куту.

3. Створіть довільний тупий кут A та намалюйте півпряму з початком у точці O. З допомогою циркуля й лінійки відкладете від півпрямої кут O, рівний заданому куту A.

На останньому етапі процесу вдосконалення практичних навичок учні досягають більшої усвідомленості у виконанні дій, розвивають автоматизм і

здатність до перенесення вмінь у нові умови. Для ефективного навчання рекомендується використовувати прості практичні задачі, наприклад:

1. Побудова трикутника за двома сторонами й кутом між ними.

2. Побудова трикутника за стороною та двома прилеглими до неї кутами. Запропонований підхід можна також застосувати для формування інших конструктивно-графічних навичок.

2.2. Методичні аспекти викладання теорем в рамках геометрії для 7-9 класів

Математичні судження, які формулюють властивості понять, розкривають умови їх взаємодії та демонструють змістові зв’язки між ними, представляються через теореми — універсальні елементи математичного мислення. Ці концентровані блоки теоретичних знань відіграють фундаментальну роль у навчанні геометрії, стаючи логічним каркасом всього освітнього процесу. Етап опрацювання теорем потребує особливого методичного підходу, враховуючи їх значний вплив на розвиток учнів:

— системні взаємозв’язки теорем формують інтелектуальний базис курсу геометрії, забезпечуючи чітку послідовність та структурованість матеріалу;

— вивчення та глибоке розуміння теорем дозволяють розвивати переважну більшість пізнавальних здібностей учнів, створюючи сприятливі умови для їхньої інтелектуальної активності;

— процес доведення теорем є прикладом логічного аналізу, демонструючи зразки конструктивного мислення, чітку послідовність виконання розумових операцій та інтеграцію теоретичних знань;

— виконання доведення наближає учня до реального процесу розв’язання геометричних задач, а також формує навички грамотної технічної організації записів і аргументації.

Сучасний освітній підхід базується на рівневій диференціації навчальних досягнень, що, своєю чергою, орієнтоване на освоєння стандартів математичних

знань у межах відповідних рівнів. Така модель допомагає уникнути багатьох організаційних недоліків, властивих традиційній системі навчання. За своїм характером вона переходить до технологічної складової викладання геометрії, яка поступово стає ключовим компонентом освітньої діяльності педагогів і учнів.

Особливу увагу привертає питання про необхідність вивчення теорем усіма учнями та їх здатність відтворювати доведення у навчальному процесі. Якщо вимога опанування доведення обмежується лише двома рівнями підготовки, виникає логічна дилема: чому весь клас має сприймати однакову інформацію під час пояснень? Водночас володіння основами доведення безпосередньо впливає на розвиток мислення, і нехтування цим аспектом може суттєво послабити культуротворчу функцію математичної освіти.

Варто зауважити, що рівневий підхід до навчання впливає не лише на змістовну складову матеріалу, але й принципово змінює спосіб його опрацювання. Конкретний формат організації самого процесу вивчення теореми залежить від її значущості та місця в загальній системі геометричних понять. Таким чином, структурована методика опрацювання теорем дає змогу сформувати цілісний підхід до математичного мислення учня та забезпечити більш продуктивне засвоєння геометричних знань як на базовому, так і на поглибленому рівнях.

Твердження, що потребують від учнів обов'язкового доведення та його чіткого відтворення, слід вважати ключовими. Їхня важливість проявляється не лише через часте використання в розв’язанні задач і обґрунтуванні інших тверджень, але й через їхнє освітнє значення, яке сприяє активній взаємодії та обговоренню в класному середовищі. Такі теореми відіграють суттєву роль у формуванні аналітичних здібностей учнів.

Водночас існують теореми, які через вузьке навчальне призначення або надмірну складність рідко використовуються в системному курсі геометрії. Їхнє доведення може бути організовано вибірково, наприклад, у рамках роботи з групою учнів, які проявляють зацікавлення до більш глибокого розгляду теми. Це

дозволяє більш ефективно розподілити час, зважаючи на пізнавальні можливості класу та функціональність змісту матеріалу.

Оцінювання важливості теорем у шкільному курсі геометрії залишається складним завданням. Воно потребує балансу між забезпеченням доступності навчального матеріалу та практичною необхідністю тих чи інших тверджень для формування математичних компетенцій учнів. Наприклад, порівняння ступеня важливості ознаки паралельності прямих на площині з теоремою про перетворення симетрії відносно прямої лише через геометричний зміст явно втрачає сенс. Однак, якщо в якості критерія важливості взяти частоту використання цих тверджень у доведеннях інших теорем чи при розв'язанні задач, питання набуває практичної актуальності.

Ознака паралельності прямих стає базовою для доведення багатьох теорем з різних розділів геометрії, таких як властивості паралельних прямих, сума кутів трикутника, умови існування перпендикуляра, ознака паралелограма тощо. Навпаки, твердження про те, що симетрія є рухом, найчастіше зустрічається лише у процесі визначення рівності геометричних фігур.

Запропоновані рівневі підходи до організації роботи над теоремами являють собою спробу продемонструвати взаємозв'язок між нормативними цілями викладання та особистісно значущим підходом до навчання учнів. Вони надають можливість учневі самостійно вирішувати, чи включати певний зміст у власний освітній багаж на конкретному етапі уроку. Така модель сприяє реалізації дійсно активного освітнього процесу, орієнтованого на індивідуальні потреби та діяльнісний підхід до навчання.

Текст акцентує увагу на багатогранності і варіативності технологічних підходів до створення та реалізації навчальних ситуацій, які враховують рівні навчальних досягнень учнів. З одного боку, йдеться про забезпечення відповідного змісту навчальної інформації, яка відповідає тематичним запитам та когнітивним можливостям школярів. З іншого боку, необхідно передбачити різноманітні умови для самонавчання — від комунікативних аспектів до

організаційних методик, що стимулюють процес індивідуальної активної роботи над навчальним матеріалом на доступному для учня рівні.

Для того щоб збагатити наведений контекст, важливо уточнити деякі базові положення. У процесі опрацювання теореми можна виокремити два ключових аспекти: навчання методам пошуку доведення та практичне виконання самого доведення. Цей взаємопов'язаний процес полягає не лише у формуванні навичок знаходження логічних аргументів, але й у вмінні ефективно реалізувати знайдений спосіб доведення, дотримуючись чіткої структури обґрунтування.

Перший напрям навчальної діяльності реалізується посередньо через розв'язування підготовчих задач, які подібні до прийомів або способів доведення. На завершальному етапі такого аналізу учні повинні словесно формулювати провідну ідею розв'язання проблеми, що надалі стане основою для застосування вже відомих прийомів до нових ситуацій. У такій спосіб теоретичний матеріал переходить у практичну площину, де кожен рівень навчальних досягнень отримує свій адаптований підхід через розв'язування спеціально підібраних задач теоретичного чи практичного характеру.

Підготовча задача має особливе місце у навчальному процесі, оскільки її призначення полягає в моделюванні способу використання ідеї доведення у наближених до реальної теореми умовах. Основний акцент підготовчих задач робиться на дослідженні нових для учня аспектів теми. Їхня структура зазвичай передбачає виконання одного або двох ключових кроків, що дозволяє поступово розкрити зміст теореми через словесне формулювання основної ідеї доведення.

Головна освітня мета таких задач полягає в підготовці учнів до усвідомленого засвоєння нового матеріалу шляхом актуалізації їхніх попередніх знань, накопиченого досвіду та способів виконання дій. Це сприяє трансформації навчального процесу у більш інтерактивний формат. Форма опрацювання таких навчальних задач варіює залежно від організаційного підходу: вона може бути груповою або колективною, що забезпечує взаємодію між учнями та надихає їх до обговорення і спільного пошуку рішень.

Дидактичне призначення:

— актуалізація змісту, обсягу геометричних понять, їх особливостей у процесі розв'язання;

— поновлення у пам'яті учнів змісту математичної символіки;

— мотивація доповнення системи знань новими теоретичними відомостями;

— аналіз формальної схожості з ситуацією вивченої теореми (сюжет і малюнок до задачі обов'язково мають бути частинами сюжету та малюнка до теореми або взагалі співпадати).

Вибір підготовчої задачі зумовлюється змістом теореми та ступенем складності доведення. Іноді раціонально розглянути кілька підготовчих задач. Тоді аналіз та розв'язання цієї послідовності вправ (комплексне підготовче завдання) моделює ще й покроковий план доведення відповідної теореми.

Розглянемо ще один позитивний фактор. Використання підготовчих задач базується на пошуку прихованих зв'язків між уже набутим особистим досвідом і майбутніми умовами доведення. Перетворення цих неявних асоціацій на очевидні шляхом власних розумових зусиль і знань стає джерелом особистої творчості.

Після завершення доведення, під час узагальнюючого обговорення, відбувається чергове непряме звернення до результатів розв’язання попереднього завдання. При цьому уточнюються ключові аспекти: яка ідея лежить в основі доведення, чому саме вона виявилася ефективною і які умови вказували на її продуктивність.

Отримані дані формують продуману систему — від аналізу умови завдання до практичного застосування висновків теореми. Як демонструють авторські дослідження, ефективною виявилася також позаурочна форма роботи з підготовчими задачами, що включає їх самостійне розв’язання вдома з наступним колективним аналізом у класі.

Особливої уваги заслуговує вимога чіткої структури доведення теореми: воно має бути представлене як план із послідовністю тверджень, кожне з яких отримує відповідне теоретичне обґрунтування. Така укладена форма подання

доведень давно відома у методиці викладання геометрії, однак її практичне застосування залишається обмеженим.

Запис доведень у дві колонки (зліва — твердження, справа — аргументація їх правильності) використовується лише невеликою кількістю педагогів і майже не зустрічається в підручниках. Таким чином, цінний практичний досвід так і не набув статусу обов’язкової методичної вимоги.

Пропонуємо методику рівневої організації роботи з теоремами на уроці. Варто зазначити, що у класі функціонують три групи: резервна, основна та перспективна. Їхня діяльність адаптована до рівнів навчальних досягнень, визначених під час першої вправи.

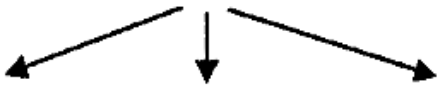
Процес спільної роботи над теоремою може включати такі етапи:

1. Розв'язування підготовчих задач, які відображають геометричну ситуацію, пов’язану з доведенням.

2. Формулювання теореми та її доказ.

3. Вивчення змісту теореми, аналіз випадків її практичного використання і перевірка наслідків.

4. Первинне закріплення засвоєного матеріалу.



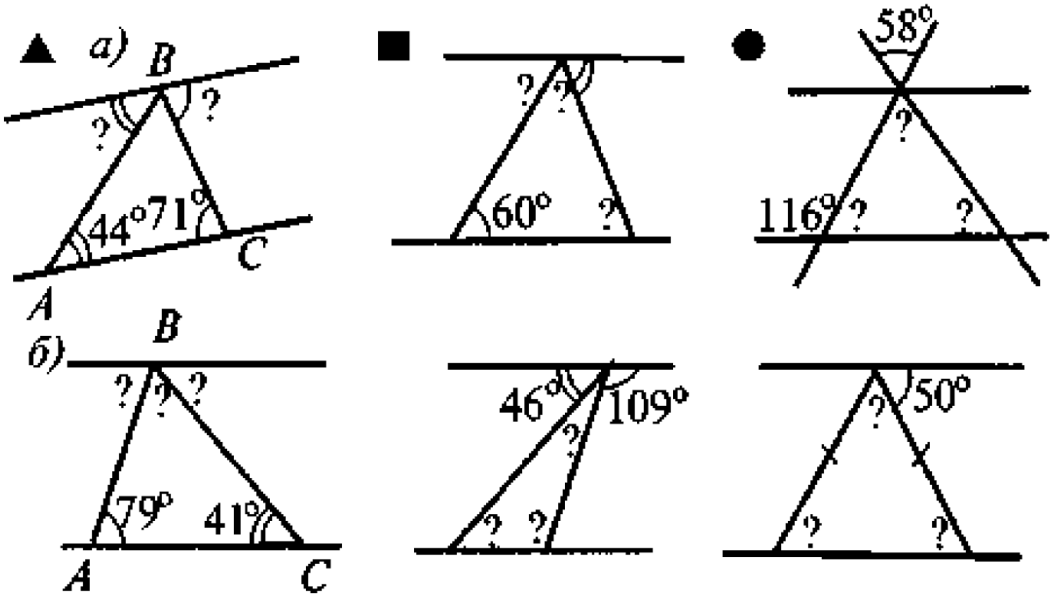
▲ Групове розв'язування стандартних вправ на пряме застосування теореми (із правом взаємодопомоги)

■ Письмове обґрунтування плану доведення або заповнення пропусків у аргументації

● Відтворення доведення за змінених обставин (малюнок, позначення, спосіб)

Деталізуємо зміст кожного етапу на прикладі теореми про суму внутрішніх кутів трикутника. 1. Підготовчі вправи мають чітке методичне навантаження — показати рівноскладеність усіх кутів трикутника з розгорнутим кутом шляхом використання властивості внутрішніх різносторонніх кутів.

Вправа 1. Вкажіть градусні міри невідомих кутів, позначених на малюнках, якщо трикутники вміщено між паралельними прямими:



Узагальнюючий коментар до вправи.

а) Градусна міра якого найбільшого кута була відома на всіх малюнках?

б) Введіть, де треба, позначення і назвіть внутрішні різносторонні кути при січній *AB.* Яку властивість вони мають?

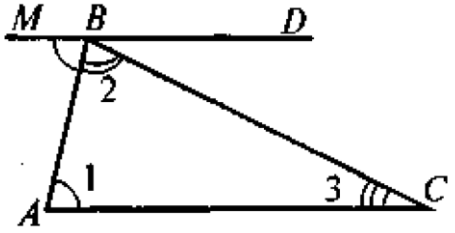
в) Відшукайте аналогічні кути при січній *BC.*

г) Вкажіть вершину, при якій три кути утворюють розгорнутий.

д) Як обчислити величину кута *ABC?*

е) Який висновок можна зробити про суму кутів кожного з даних трикутників?

2. Формулювання теореми стає узагальненням відповіді на попереднє запитання. План доведення зводиться до відтворення в загальному вигляді послідовності розв'язування підготовчої вправи та оформлення записів. Після виконання необхідних побудов план доведення може записувати на дошці учень основної групи, а вчитель або учень перспективної групи дублюватиме запитання підготовчого етапу (пояснення у формі узагальнення знань та способів виконання дій).



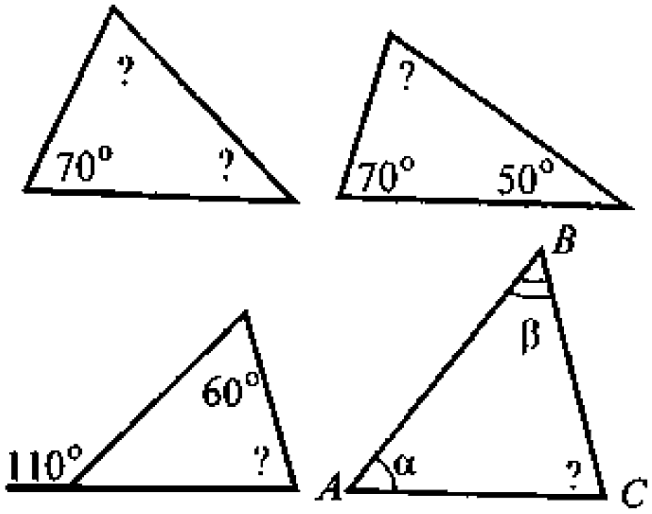
Дано: трикутник *ABC*.

Довести: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

План доведення	***Супровідний коментар***
1. Проведемо через вершину В пряму MD? паралельну АС. 2. $\angle MBA + \angle ABC + \angle CBD = 180°$ 3. $\angle MBA = \angle 1$. 4. $\angle CBD = \angle 3$ 5. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$.	1. Проаналізуйте умову теореми і виявіть спорідненість із розв'язаною вправою. Яку добудову потрібно виконати, щоб використати одержаний результат? 2. Які три кути утворюють розгорнутий кут? 3. Назвати кут при вершині В, що дорівнює $\angle 1$. 4. Знайдіть на малюнку кут, що дорівнює $\angle 3$. 5. У записі п.2 замініть кути

3. Опрацювання змісту теореми відбувається у колективній формі і зводиться до аналізу проблемної ситуації, що виникає при розв'язуванні вправ: до якої фігури застосовується теорема та як можна знайти величину невідомого кута трикутника?

Пропонується вправа за малюнками. Обчисліть, де можна, всі невідомі кути трикутника:



У результаті узагальнення записується формула для обчислення третього внутрішнього кута трикутника за двома відомими: $x = 180° - (\alpha + \beta)$.

Дослідження цієї формули на максимальну кількість у трикутнику гострих, прямих та тупих кутів виконають удома учні перспективної та основної груп, але вперше ця проблема постане на практичному рівні перед учнями резервної групи на наступному етапі.

4. Первинне закріплення змісту вивченого диференційоване: учні резервної групи відпрацьовують техніку застосування теореми.

За останнім малюнком попередньої вправи відшукайте невідомий кут трикутника, якщо кути α і β мають такі величини:

α	40°	73°	145°	46°	90°	91°	100°	120°	110°
β	60°	27°	12°	47°	30°	82°	10°	40°	60°
x									

Учні основної групи ще раз повертаються до суттєвих моментів доведення, виконуючи завдання.

Пояснити і записати праворуч від плану доведення його обґрунтування.

Визначити, яка геометрична залежність виявилась провідною у доведенні.

Учні перспективної групи виконують вправу за вибором: а) Відшукати інший спосіб доведення теореми для тупокутного трикутника *MPO* з використанням властивості внутрішніх односторонніх кутів. За бажанням можна використати підручник.

б) Наочно продемонструйте доведення теореми шляхом згинання паперового трикутника.

Пропонуємо розробки уроків з геометрії для 7-9 класів, на яких формуються геометричні поняття.

ГЕОМЕТРІЯ **7 клас**

УРОК **02**

Тема: Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Рівність відрізків. Середина відрізка. Відстань між двома точками.

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти поняття відрізка, рівності відрізка, середини відрізка, довжини відрізка; навчати вимірювати та відкладати відрізки;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати отримані знання, правильно користуватися креслярським приладдям; будувати та вимірювати відрізки;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

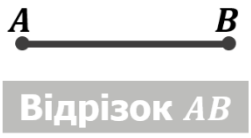
II. Актуалізація опорних знань

- На які геометричні фігури, точка, що знаходиться на прямій, розбиває пряму?
- Скільки прямих можна побудувати через одну точку?

- Скільки прямих можна побудувати через дві точки?
- Яка геометрична фігура є найпростішою геометричною фігурою?
- Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?

III. Вивчення нового матеріалу

>> Відрізок <<



Відрізок – це частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать між її точками, разом із цими точками. Ці точки називаються кінцями відрізка.



Відрізок позначають називаючи його кінці



Відрізок AB;

Відрізок BA;

- Чи може для будь-яких двох точок існувати два різні відрізки?

(Ні, відрізок – це частина прямої. Пряма, а отже і відрізок двома точками задаються однозначно)

// Цікаво

- Чи може відрізок бути нескінченним?

(Учні висловлюють власну думку)

«Велика» та «Мала» нескінченність прямої

- Точка не має форми, ширини, довжини
- Між будь-якими двома різними точками прямої існує хоча б одна точка, яка належить цій прямій
- Отже між будь-якими двома точками прямої є нескінченно багато точок цієї прямої
- За означенням відрізка – будь-який відрізок є нескінченним, так як він складається з точок а між будь-якими двома точками прямої є нескінченно багато точок цієї прямої
- Математика є дуже цікавою наукою, яка ще має багато цікавих речей і запитань, що є не розв'язаними на цей момент але відповідь на них є дуже цінною для людей, тому за відповідь на такі задачі наразі можна отримати 1 000 000$

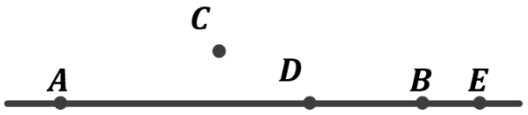
На уроках математики ми не будемо з вами розглядати прямі і відрізки у «малому» розумінні. Всі відрізки, що ми будемо вивчати – можна виміряти.



- Якщо розглянути відрізок AB і точки, що є відмінними від точок A і B, як можуть розміщуватися ці точки?

(Учні висловлюють власну думку)

Точки, що є відмінними від точок A і B можуть або належати відрізку AB, або не належати відрізку AB. Точки, що належать відрізку AB – це його **внутрішні точки**.

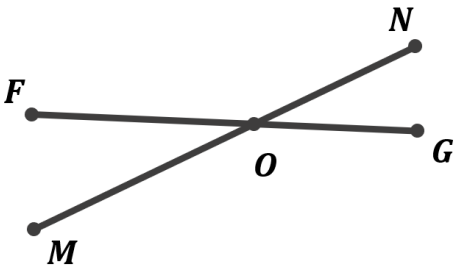


$C \notin AB$

$E \notin AB$

$D \in AB$

Точка D – внутрішня точка відрізка AB, так як точка D лежить між точками A і B



Два відрізки можуть мати тільки одну спільну точку – це точка їх перетину.

$FG \cap MN = O$

>> Вимірювання відрізків <<



Аксіома 4

Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль

- Які ви вже знаєте одиниці вимірювання довжини?

(Учні висловлюють власну думку)

Одиниці вимірювання довжини:

1 мм	1 см	1 дм
1 м	1 км	1 миля



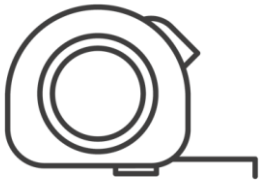
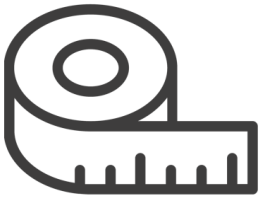
Одиницею вимірювання довжини може буди будь-що. Наприклад, 1889-1960 роках еталон метра був матеріальним і зберігався в палаті мір і ваг.

(Наразі 1 метр дорівнює довжині шляху, який проходить у вакуумі світло за 1/299 792 458 частину секунди)

- Придумайте власну одиницю вимірювання, якою можна було б виміряти довжину вашої парти

(Парту, наприклад, можна виміряти ручкою – скільки разів парта вміститься у своїй довжині ручку, такою і буде її довжина. Тобто довжина парти, наприклад, може дорівнювати 9 ручкам або 7 ручкам. Взагалі одиницею вимірювання може бути будь-що, але для зручності користуються метричною системою. В 7 класі на уроках фізики учні більше детальніше познайомляться з міжнародною системою одиниць)

- Для вимірювання довжини відрізка у побуті та виробництві використовують різні ***вимірювальні інструменти***, наприклад:

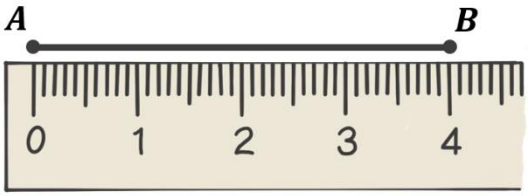
Рулетка	Штангенциркуль	Клейончастий сантиметр
		
Використовують для вимірювання відстаней на місцевості	Використовують для вимірювання циліндричних предметів та діаметрів труб	Використовують швачки щоб зняти мірки

- Які ви знаєте прилади для вимірювання довжини відрізка?

(Учні висловлюють власну думку)

- На уроках математики ви вже використовували лінійку, як за допомогою лінійки можна виміряти довжину відрізка?

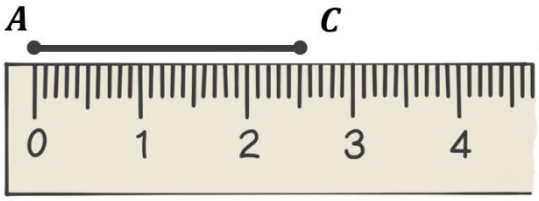
(Учні висловлюють власну думку)



- Яка довжина відрізка AB?

($AB = 4$ см)

- Яка довжина відрізка AC?



($AC = 2{,}5$ см)

- Чи можемо виразити довжину відрізка AC інакше?

(Якщо учні говорять так – нехай наведуть власні приклади)

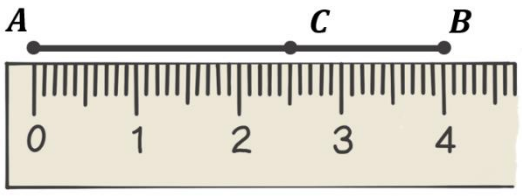
$AC = 25$ мм

$AC = 0{,}25$ дм

$AC = 0{,}025$ м

$AC =$ $0{,}000025$ км

Довжина відрізка – це відстань між його кінцями



- Яка довжина відрізка CB?

($CB = 1{,}5$ см)

- Що можемо сказати про довжину відрізка AB?

(Учні висловлюють власну думку)

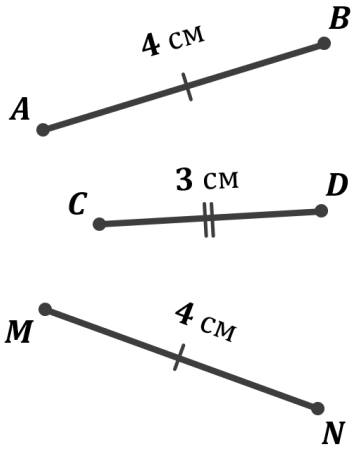
$AB = AC + CB = 4$ см

Аксіома 5

Основна властивість вимірювання відрізків:

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається його внутрішньою точкою.

>> Рівні відрізки, середина відрізка <<



Два відрізки називають ***рівними***, якщо рівні їх довжини.

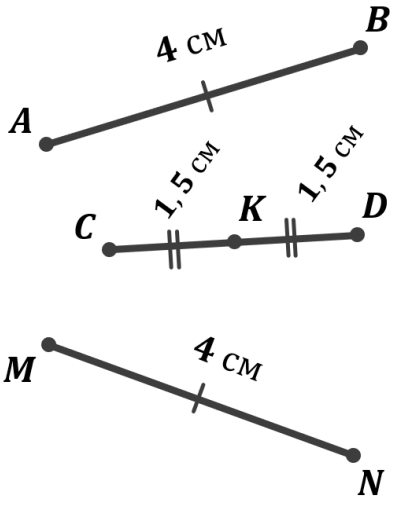
Рівні відрізки позначаються однаковою кількістю рисочок.

$AB = CD$

З двох відрізків більшим є той, довжина якого є більшою

$AB > CD$

Серединою відрізка називають таку точку, яка ділить його на два відрізки рівної довжини.



Точка K – середина відрізка CD, так як вона ділить його на два рівні відрізки $CK = KD = 1{,}5$ см

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Накресліть відрізки AB і MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN

Розв'язок:



$AB = 7$ см 2 мм

$MN = 6$ см 3 мм

$AB > MN$

$AB = 7$ см 2 мм

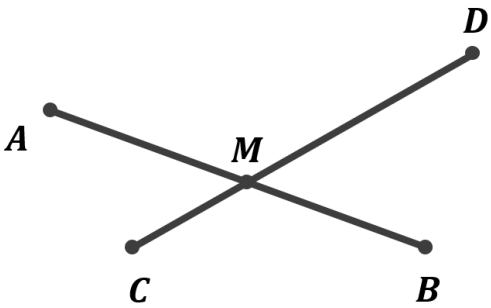
$MN = 6$ см 3 мм

$AB > MN$

№2

1. Побудуйте відрізки AB і CD так, щоб вони перетиналися в точці M
2. Скільки утворилося відрізків?
3. Виміряйте довжину двох будь-яких відрізків та запишіть її

Розв'язок:



1. В кожного учня буде унікальний рисунок;
2. Утворилося 6 відрізків;
3. Кожен учень отримає власну довжину відрізків;

№3

Точка C лежить між точками A і B. Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;
2) BC, якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм;

Розв'язок:



1) $AB = AC + CB = 5 + 2 = 7$ см;
2) $BC = AB - AC = 12 - 9 = 3$ дм;

Відповідь: 1) 7 см; 2) 3 дм;

№4

Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:

1) $KL = 8$ см, $LM = 3$ см, $KM = 11$ см;
2) $KL = 5$ см, $LM = 9$ см, $KM = 8$ см;

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

Розв'язок:

За основною властивістю вимірювання відрізків, *довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається його внутрішньою точкою.*

Отже, щоб перевірити чи лежать три точки на одній прямій, необхідно перевірити, чи дорівнює найбільша відстань між точками сумі двох інших відстаней.

1)

$$\left.\begin{array}{c} KM = KL + LM = 8 + 3 = 11 \text{ см} \\ KM = 11 \text{ см} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Точки } K,\ L \text{ і } M \text{ лежать} \\ \text{на одній прямій} \end{array}$$

Точка L лежить між точками K і M

2)

$$\left.\begin{array}{c} LM = KM + KL = 8 + 5 = 13 \text{ см} \\ LM = 8 \text{ см} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Точки } K,\ L \text{ і } M \text{ не лежать} \\ \text{на одній прямій} \end{array}$$

№5

На прямій позначено точки $P,\ L$ і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0{,}74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язок:

$PL = 42$ мм

$PM = 3$ см 2 мм $= 32$ мм

$LM = 0{,}74$ дм $= 74$ мм

За основною властивістю вимірювання відрізків, *довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається його внутрішньою точкою.* ***Отже, найбільша довжина дорівнює сумі двох інших довжин.***

$$LM = PL + PM = 42 + 32 = 74 \text{ мм} \\ LM = 74 \text{ мм} \Big| \Rightarrow \text{Точка } P \text{ знаходиться між точками } L \text{ і } M$$

Відповідь: точка P знаходиться між точками L і M

№6

Точки C і D належать відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см

Розв'язок:



Знайдемо довжину відрізків AD і CB, потім зможемо знайти довжину відрізка CD.

$AD = AB - BD = 40 - 32 = 8$ см

$CB = AB - AC = 40 - 25 = 15$ см

$DC = AB - AD - CB = 40 - 8 - 15 = 17$ см

Відповідь: 17 см

№7

Точка C належить відрізку $AB = 7{,}6$ дм. Визначте довжини відрізків AC і BC, якщо:

1) AC втричі менший від BC;
2) AC більший за BC на 2,8 дм;

Розв'язок:

1) Нехай $AC = x \Rightarrow BC = 3x$

Складемо рівняння:

$x + 3x = 7{,}6$

$4x = 7{,}6$

$x = \frac{7{,}6}{4} = 1{,}9$

Отже, $AC = 1{,}9$ дм; $BC = 3 \cdot 1{,}9 = 5{,}7$ см;

2) Нехай $AC = x \Rightarrow BC = x - 2{,}8$

Складемо рівняння:

$x + (x - 2{,}8) = 7{,}6$

$2x - 2{,}8 = 7{,}6$

$2x = 10{,}4$

$x = 5{,}2$

Отже, $AC = 5{,}2$ дм; $BC = 5{,}2 - 2{,}8 = 2{,}4$ дм;

Відповідь: 1) $AC = 1{,}9$ дм; $BC = 5{,}7$ см; 2) $AC = 5{,}2$ дм; $BC = 2{,}4$ дм;

V. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення відрізка
- Чи може відрізок бути від'ємним? Чому?
- Яка точка називається внутрішньою точкою відрізка?
- Яка точка є серединою відрізка?
- Сформулюйте основну властивість вимірювання відрізків
- На які геометричні фігури розділяють відрізок дві позначені на ньому точки, що не є кінцями цього відрізка?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §2

Виконати №17, 22, 26, 32

ГЕОМЕТРІЯ 8 клас
УРОК 03

Тема: Чотирикутник та його елементи

Мета: Узагальнити поняття чотирикутника та його елементів, сформувати вміння класифікувати опуклі й неопуклі чотирикутники, обґрунтовувати суму їх кутів і знаходити периметр, одночасно розвиваючи просторове мислення, точне математичне мовлення та старанність у побудовах

Компетенції:

- Математична

Уміння	Ставлення
- розрізняти елементи чотирикутника; класифікувати опуклі й неопуклі чотирикутники; доводити властивість суми кутів; обчислювати периметр і застосовувати знання до практичних задач.	- готовність перевіряти аргументи, усвідомлення значущості математики як мови науки й технологій.

- Вільне володіння державною мовою

Уміння	Ставлення
- чітко формулювати запитання й висновки, використовувати коректну геометричну термінологію.	- визнання цінності лаконічних формулювань та повага до державної мови.

- Інформаційно-комунікаційна

Уміння	Ставлення
- структурувати дані, діяти за алгоритмом, оцінювати достовірність інформації.	- критичне ставлення до джерел інформації та роль ІКТ у вивченні математики.

- Навчання впродовж життя

Уміння	Ставлення
- планувати власну роботу, самостійно поповнювати знання, рефлексувати результати діяльності.	- зацікавленість у пізнанні, прагнення до самовдосконалення.

- Соціальні компетентності

Уміння	Ставлення
- співпрацювати в парі чи групі, аргументувати й відстоювати позицію, слухати інших.	- відповідальність, ініціативність, рівне ставлення до однокласників.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Привітання, налаштування на роботу.

Як на Вашу думку людина висловлює свої думки?

(відповіді дітей)

Так – за допомогою мови, одні це роблять чітко, аргументовано та зрозуміло а інші навпаки – заплутано та не зрозуміло.

Як на Вашу думку люди відносяться до першого типу людей і як до другого?

(відповіді дітей)

Кому простіше адаптуватись до життя, влаштуватись на роботу, познайомитись з новими друзями, добитись своїх цілей?

(відповіді дітей)

Кожен з Вас хоча б один раз мріяв про щось, можливо дехто вже поставив цілі для себе але не знає як їх досягти.

Як на Вашу думку, вміння говорити чітко, зв’язано, аргументовано та переконливо допоможе Вам у досягненні поставлених цілей або в подальшому житті?

(відповіді дітей)

Саме геометрія є однією з найвеличніших наук яка допоможе Вам говорити саме так, адже вивчаючи геометрію Ви на прикладі доведення теорем або

висловлюванні своєї позиції стосовно Вашої думки вже навчаєтесь правильно аргументувати свої твердження, переконання та погляди. Прямо на уроках Ви навчаєтесь мистецтву ораторства. Геометрія, як і математика в цілому навчає Вас признавати свої помилки під час розв'язування задач, що є достатньо корисним в реальному житті. Геометрія навчає Вас вирішувати свої проблеми та життєві задачі поступово, відрізняти головне від другорядного і ці навички залишаться з Вами впродовж всього життя, навіть коли Ви забудете всі ті теореми та доведення.

Пояснити дітям особливості та мету даної теми. Сформувати завдання уроку.

II. Актуалізація опорних знань

(запитання дублюються на слайдах наукової презентації)

Опитування

- Як Ви розумієте твердження: "точки на лежать на одній прямій"?
- На вікні сиділи 2 мухи, одна з них злетіла. Через який час вони опиняться на одній прямій? *(Вони завжди на одній прямій)*
- Чи завжди дві точки лежать на одній прямій? *(Так. Аксіома.)*
- Чи завжди три точки будуть лежати на одній прямій? *(Ні)*
- Як можна назвати фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки? *(Трикутник)*
- Перелічіть всі відомі Вам елементи трикутника *(вершини, сторони, кути)*
- Які існують види трикутників? *(Гострокутні, Тупокутні, Прямокутні)*
- Як правильно позначати кути трикутника?

III. Вивчення нового матеріалу

Вивчаючи дану тему, ми з Вами дізнаємось більше про всім Вам відому геометричну фігуру – чотирикутник, які він має елементи та властивості.

Наведіть приклади чотирикутників з власного життя.

(відповіді дітей, потім показ слайдів наукової презентації)







.....

Моделі чотирикутника в реальному житті

Мистецтво:

- Квадрат Малевича *(Так, перший варіант «Квадрата» був саме* ***чотирикутником****, оскільки його сторони не були паралельні і рівні з геометричної точки зору.);*
- Вишивка;

Архітектура:

- Різнокольоровий будинок у Відні;
- Будинок-корзина у США;
- Будинок-унітаз у Південній Кореї;
- Будинок-книга, Канзас (США);
- “Заморожений будинок” у Роттердамі;

Комп’ютерні ігри:

- Minecraft;

Державні прапори:

- Державний прапор України;

Як Ви вважаєте, в яких саме шкільних предметах також використовують чотирикутники?

(відповіді дітей, потім показ слайдів наукової презентації)

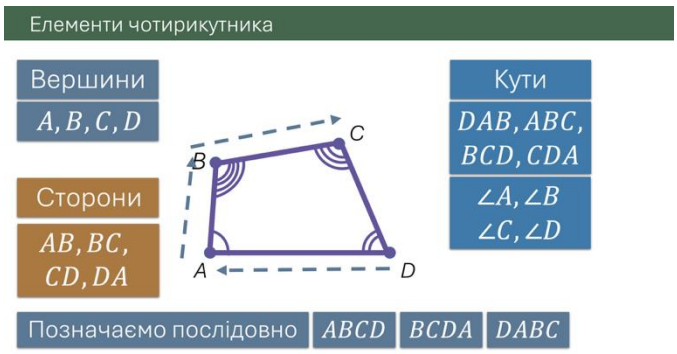


Тож коли ми переконались, що чотирикутники – важливий елемент, давайте детальніше розглянемо його **елементи**.

Точки A, B, C, D - ***вершини*** чотирикутника.

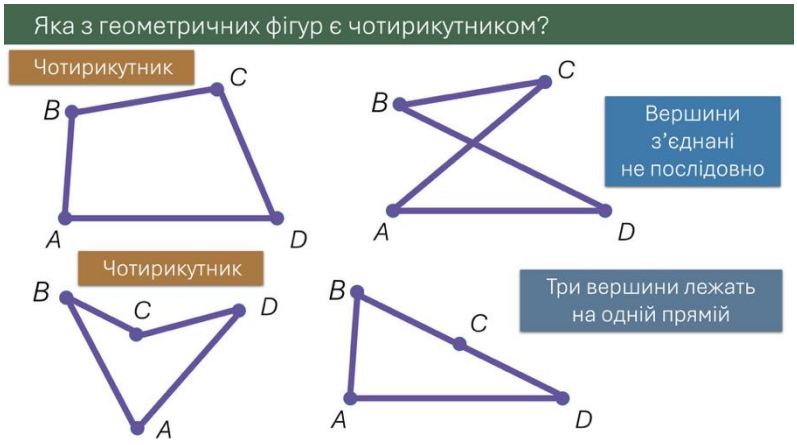
Відрізки AB, BC, CD, DA - ***його сторони***.

Кути DAB, ABC, BCD, CDA – це ***кути*** чотирикутника. Їх також позначають й однією буквою: $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$.



Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини, починаючи з довільної. Наприклад: $ABCD, BCDA, DABC$.

(завдання дітям з навчальної презентації)

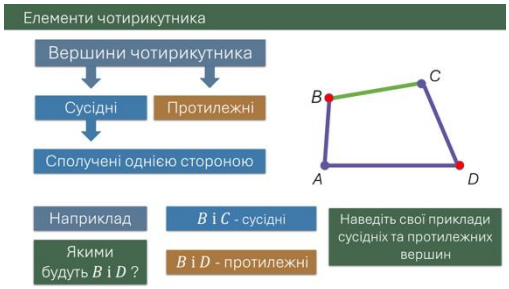


Елементи чотирикутника

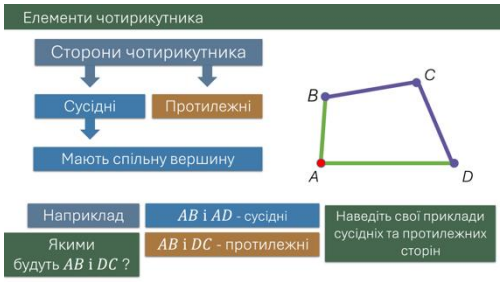
Дві вершини, два кути або дві сторони чотирикутника можуть бути або *сусідніми*, або *протилежними.*

Як Ви розумієте значення “сусідніми” або “протилежними”?

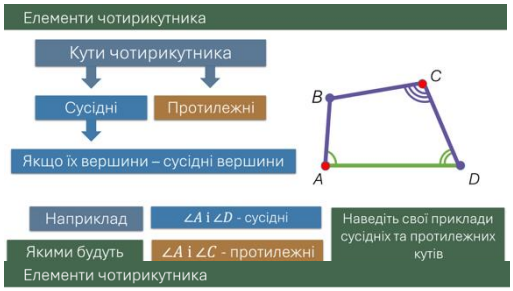
(пояснення за навчальною презентацією або малюнком на дошці)



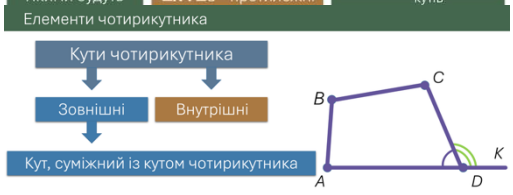
Дві вершини чотирикутника називаються сусідніми, якщо вони сполучені однією стороною.



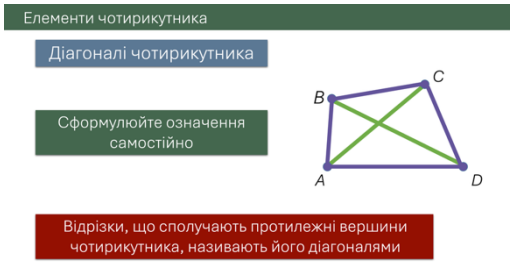
Дві сторони чотирикутника називають сусідніми, якщо вони мають спільну вершину



Два кути чотирикутника називають сусідніми, якщо їх вершини – сусідні вершини.

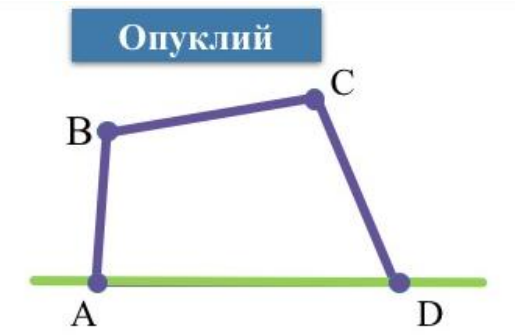


Кут, суміжний із кутом чотирикутника, називають зовнішнім кутом чотирикутника

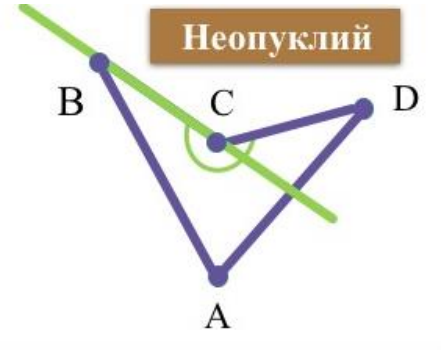


Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають його діагоналями

Опуклі та неопуклі чотирикутники



Якщо чотирикутник лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини, то він ***опуклий***

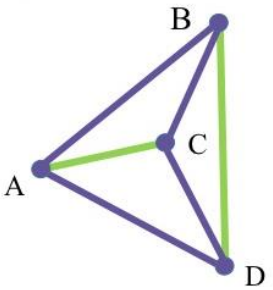


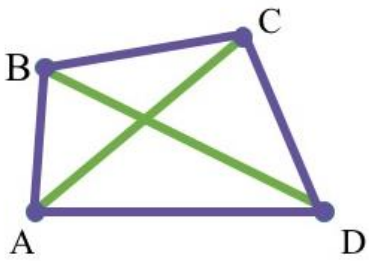
Неопуклий чотирикутник має кут більший за 180°

Ми будемо вивчати лише опуклі чотирикутники.

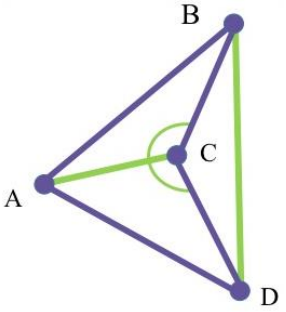
(завдання дітям)

Спробуйте накреслити два чотирикутники, діагоналі одного з яких перетинаються, а другого – ні.



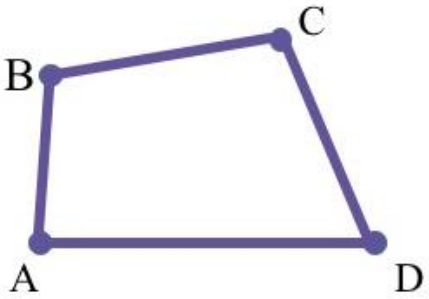


Діагоналі якого чотирикутника не перетинаються?



Діагоналі неопуклого чотирикутника не перетинаються.

Периметр чотирикутника



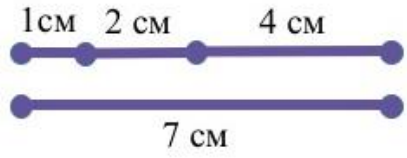
Периметр *позначають* буквою P і коротко записують, наприклад $P_{ABCD} = 40$ см.

Як знайти периметр?

Периметр дорівнює сумі довжин усіх сторін

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

Чи може чотирикутник мати такі сторони: 1 см, 2 см, 4 см, 7 см?



Не може, бо найбільша сторона дорівнює сумі трьох інших.

Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший із чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.

Властивість кутів чотирикутника

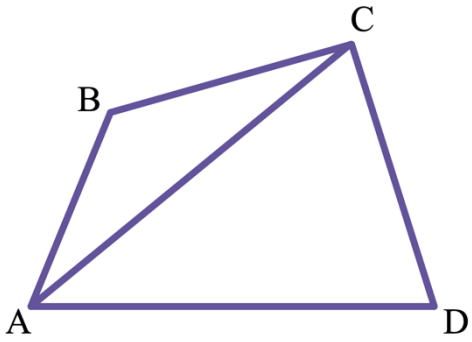
Теорема (про суму кутів чотирикутника)

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°

- Які будуть пропозиції стосовно доведення?
- Пригадайте, чому дорівнює сума кутів трикутника?

Дано:

$ABCD$ – чотирикутник.



Довести:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Доведення:

Побудуємо діагональ AC.

Розглянемо трикутники ABC і ADC:

$\angle A = \angle CAD + \angle BAC$

$\angle C = \angle BCA + \angle ACD$

Отже:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle CAD + \angle BAC + \angle B + \angle BCA + \angle ACD + \angle D$$
$$= (\angle BAC + \angle B + \angle BCA) + (\angle CAD + \angle ACD + \angle D)$$
$$= 180° + 180° = 360°$$

- Якою на Вашу думку буде сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника?
- Чому не можна визначити суму зовнішніх кутів неопуклого чотирикутника? *(Якщо чотирикутник неопуклий, то при вершині найбільшого його кута поняття зовнішнього кута визначити важко, тому далі розглядатимемо зовнішні кути тільки опуклих чотирикутників)*

**Наступна теорема не включена до підручника М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова*

Теорема (про суму зовнішніх кутів опуклого чотирикутника)

Сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°

- 12 балів за тему, тому хто нарисує чотирикутник з усіма гострими кутами!
- Чи може бути чотирикутник з усіма гострими кутами? *(ні, бо тоді сума цих кутів була б меншою від 360°)*
- Можливо хтось бажає за «12» нарисувати чотирикутник у якого два кути більші за розгорнутий?
- Чому це не можливо? *(Тоді сума цих кутів була б більшою від 360°)*

- Чи існує чотирикутник, сума кутів якого відмінна від 360°? *(Так існує, +2 бали за роботу на уроці, тому хто відповів)*
  Це неплоскі (просторові) чотирикутники, не всі точки яких лежать в одній площині, про них ми дізнаємось в старших класах.

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 140 см, а одна з його сторін у 9 разів менша від кожної з них.

Дано: $\boldsymbol{P = 140}$ см; $\boldsymbol{x}$ **см** – менша сторона чотирикутника; $\boldsymbol{9x}$ – інші сторони чотирикутника;	***Розв'язок:*** $x + 9x + 9x + 9x = 140$ $28x = 140$ $x = 5$ (см) – менша сторона $5x \cdot 9 = 45$ (см) – інші сторони чотирикутника.
Знайти: Сторони чотирикутника - ?	**Відповідь:** 5 см, 45 см, 45 см, 45 см – сторони чотирикутника.

№2

За даними на рисунках 1 і 2 визначте невідомі кути чотирикутника *ABCD*

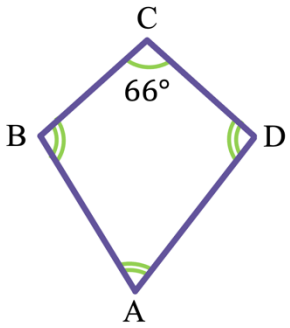


Рис. 1

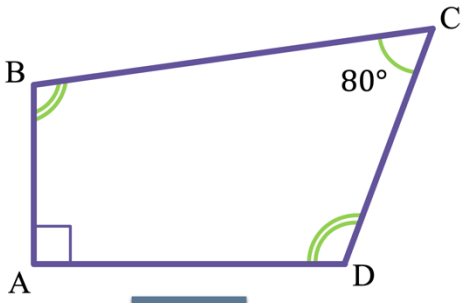


Рис. 2

Рис.1:

$$\angle A = \angle D = \angle B = (360^\circ - 66^\circ) : 3 = 294^\circ : 3 = 98^\circ$$

Рис.2:

$$\angle B = \angle D = (360^\circ - 90^\circ - 80^\circ) : 2 = 95^\circ$$

№3

Чи може чотирикутник мати такі сторони:

1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см; 2) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см;

1) Так, може, бо для кожної сторони виконується умова: сторона чотирикутника менша за суму трьох інших сторін.

2) Ні, не може, бо $18 > 6 + 5 + 6$ (не виконується умова, тому що сторона менша за суму трьох інших сторін)

№4

Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

1) $55°, 75°, 100°, 80°$ 2) $145°, 85°, 70°, 65°$

1) Ні, $55^\circ + 75^\circ + 100^\circ + 80^\circ = 310^\circ$, тому кути чотирикутника не можуть дорівнювати $55^\circ, 75^\circ, 100^\circ, 80^\circ$;

2) Ні, $145^\circ + 85^\circ + 70^\circ + 65^\circ = 365^\circ$, що суперечить теоремі про суму кутів чотирикутника;

№5

Якщо чотирикутник має два прямі кути, то чому дорівнює сума решти його кутів?

Дано:	***Розв'язок:***
$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$	$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ - сума двох прямих кутів Тоді, згідно до теореми про суму кутів чотирикутника: $\angle 3 + \angle 4 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$
Знайти: $\angle 3 + \angle 4 - ?$	**Відповідь:** $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

№6

Знайдіть зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$, якщо:

1) $\angle C = 75°$ 2) $\angle A = \angle B = \angle D = 90°$

Дано: $\angle C = 75^\circ$	***Розв'язок:*** Оскільки зовнішній кут чотирикутника при даній вершині – це кут суміжний з даним кутом, а сума суміжних кутів рівна 180°, то: $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ - зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$.
Знайти: Зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$ - ?	**Відповідь:** 105°

Дано: $\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$	***Розв'язок:*** Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360°, то: $\angle C = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 90^\circ$ Оскільки зовнішній кут чотирикутника при даній вершині – це кут суміжний з даним кутом, а сума суміжних кутів рівна 180°, то: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ - зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$.
Знайти: Зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$ - ?	**Відповідь:** 90°

№7

Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша за третю, а четверта сторона – у три рази більша за другу.

Дано: x см – довжина першої сторони; $(x - 8)$ см – друга сторона; $(x + 8)$ см – третя сторона; $(x - 8) \cdot 3$ см – четверта сторона; $P = 66$ см.	***Розв'язок:*** За умовою, $P = 66$, отже: $x + (x - 8) + (x + 8) + (x - 8) \cdot 3 = 66$ $3x + 3x - 24 = 66$ $6x = 90$ $x = 15$ 15 см – перша сторона; $15 - 8 = 7$ см - друга сторона; $15 + 8 = 23$ см - третя сторона; $7 \cdot 3 = 21$ см - четверта сторона
Знайти: Сторони чотирикутника	**Відповідь:** 15 см; 7 см; 23 см; 21 см

V. Підсумок уроку

Опитування:

- Яку фігуру називають чотирикутником? *(Чотирикутником називають фігуру, що складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні з трьох точок не лежать на одній прямій)*
- Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які - протилежними? *(Вершини чотирикутника називають сусідніми, якщо вони сполучені однією стороною.)*
- Що називають периметром чотирикутника? *(Периметр дорівнює сумі довжин усіх сторін)*
- Які кути чотирикутника називають сусідніми, а які – протилежними? *(Кути чотирикутника називаються сусідніми, якщо їх вершини – сусідні вершини)*
- Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим? *(Якщо чотирикутник лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини, то він опуклий. Неопуклий чотирикутник має кут більший за* 180°*)*
- Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника *(Сума кутів чотирикутника дорівнює* 360°*)*

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1
Виконати №1.3; 1.6; 1.10; 1.17

О. С. Істер
(2025)

ВИСНОВКИ

Провідною метою уроків геометрії для учнів 7–9 класів є розвиток звички осмислено відповідати на питання “Чому це так?”. У підручнику з геометрії постійно зустрічаються вислови на кшталт “тому, що...”, “тоді...”, “отже...” чи “таким чином...”, які тісно пов’язані з формуванням логічного мислення в учнів.

Викладання матеріалу найкраще організовувати у форматі двох типів уроків: вивчення нового матеріалу та формування практичних навичок. Час слід розподіляти у співвідношенні 1 : 3, що сприяє ефективній роботі як вчителя, так і учнів. Такий формат дозволяє оптимально поєднувати теоретичне засвоєння знань із їхньою практичною реалізацією.

Процес ознайомлення з новим матеріалом рекомендується починати із представлення плану уроку. Це дає змогу учням краще розуміти етапи навчальної діяльності, систематизувати отримані знання та спрощує процес підготовки домашніх завдань.

Окрім традиційного підходу, коли вчитель безпосередньо передає факти, варто активно інтегрувати евристичні методи навчання. Ці методи дозволяють учням самостійно формулювати визначення нових понять, відкривати нові геометричні твердження та доводити їх за допомогою підказок і спрямовуючих дій вчителя. У розроблених уроках цього зазвичай досягається завдяки ретельному поясненню перед формулюванням дефініцій або висновків.

Для активізації пізнавальної діяльності учнів рекомендується використовувати різноманітні види роботи з підручником: прочитання тексту і переказ, знаходження в книзі додаткових відомостей до пояснень вчителя тощо. Також слід залучати творчі завдання, як-от доведення тверджень за наданим планом, обґрунтування результатів роздумів, опис малюнка або створення власних задач зі щойно пройденої теми.

Закріплення раніше засвоєного матеріалу можна організувати за допомогою виконання усних вправ, розв'язування задач або повторного

ознайомлення з текстом підручника після пояснень вчителя. Такий підхід допоможе поглибити розуміння нових знань і забезпечить якісне їх закріплення.

Методи навчання учнів доведенню теорем значною мірою залежать від підходу, обраного для введення теореми. У випадку застосування індуктивного методу введення доцільно орієнтуватися на проблемний, частково-пошуковий, евристичний або дослідницький методи навчання. Натомість при використанні абстрактно-дедуктивного методу введення краще зосередитися на пояснювально-ілюстративному та репродуктивному методах.

Також можна зазначити існування певної залежності між методом введення теореми і способом її доведення. Наприклад, якщо теорема доводиться синтетичним способом, логічно припустити застосування індуктивного методу введення, що автоматично передбачає використання відповідних методів навчання, таких як проблемний, частково-пошуковий, евристичний або дослідницький. У випадку аналітичного способу доведення теореми доцільним є застосування абстрактно-дедуктивного методу введення та відповідних навчальних підходів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Математика: Проб. підруч. для 7 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1994. – 176с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Нав. Посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367с.
3. Бевз Г.П. Математика: Проб. підруч. для 7 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1994. – 176с.
4. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Нав. Посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367с.
5. Бурда М. І., Капіносов А.М., Рибалко Л.Ю. Дидактичні матеріали для тематичного оцінювання з геометрії. 8 клас. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2001. – 152с.
6. Бурда М.І. Вивчення геометрії в 7 класі: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1984. – 112с.
7. Бурда М.І. Вивчення геометрії в 8 класі: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1984. – 112с.
8. Бурда М.І., Савченко Л.М. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 2001. – 240с.
9. Верченко С.Б. Розвиток просторових уявлень в учнів IV-V класів //Математика в школі. — №5, 1980.
10. Геометрія: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів /Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2002. – 224с.
11. Геометрія: Підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закладів /Г.П. Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2001. – 272с.
12. Гібалова Н.В. Методична система навчання учнів 5-6 класів елементів геометрії: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ун-т педагогіки. – Київ, 2000.– 237с.
13. Голодюк Л.С. Властивості трикутників. – Х.: Вид. гр. ”Основа”, 2003. – 80с. – (Серія «Бібліотека журналу “Математика в школах України”»; Вип. 9).
14. Голодюк Л.С. Геометричний матеріал як змістова основа спілкування учнів на уроці //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики:

Збірник наукових праць: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ КДПУ, 2001. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – С. 52-54.

15. Голодюк Л.С. Методика вивчення властивостей трикутника в умовах рівневої диференціації в основній школі. Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. /Кіровоградський ДПУ ім. Володимира Винниченка – Кіровоград, 2004. – 227 с.
16. Гришина Т.В. Рівнева організація роботи над теоремою// Математика в школі. – 2001. – №6. – С. 20-23.
17. Гришина Т.В. Рівнева організація роботи над теоремою// Математика в школі. – 2002. – №1. – С. 17-20.
18. Гришина Т.В. Розвиваючі вправи з геометрії для 7 класу: Навч.-метод. посібник. – Кіровоград, 1998. – 141с.
19. Грузін О.І., Неліна О.С. Система опорних фактів шкільного курсу геометрії. – Х.: Світ дитинства, 2000. – 128с.
20. Гібалова Н. Формування геометричних понять в учнів 5-6 класів// Математика в школі. — №1, 1998.
21. Гора Т.П., Федотова Н.М. Навчання учнів геометричних побудов в V-VI класах // Методика викладання математики і фізики. — К., 1986.
22. Карнацевич Л.С., Грузин О.І. Вивчення геометрії в 6 класах. — К.: Рад.шк., 1983. — 120с.
23. Капіносов А. Посібник для рівневого навчання з геометрії. 7 клас. Частина І. Навчальні завдання. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 304с.
24. Коваленко В.П. Дидактичні матеріали з геометрії для 7 класу: Метод. посіб. – К.: Пед. преса, 1999. – 36с.
25. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. Книжка для вчителя. – К.: Абрис, 1994. – 462с.
26. Кушнір І.А. Побудова трикутника. Енциклопедія розв’язування задач: Навч. посібник для серед. загальноосвіт. шкіл, гімназій та ліцеїв. – К.: Либідь, 1994. – 80с.
27. Левитас Г.Г. Введення в геометрію (5-6 клас) // Математика в школі. — №6, 1990.

28. Мацько Н.Д., Тітова Г.І. Підготовка учнів 5-6 класів до вивчення систематичного курсу геометрії //Методика викладання математики і фізики. — К., 1990. Випуск 6

29. Макаревич Н.Е. Осьова симетрія в 5 класі //Математика в школі. — №4, 1990.

30. Медяник А.Г. Учителеві про шкільний курс геометрії. Кн. Для учителя. — К.: Рад.шк. 1988. — 158с.

31. Погорелов А.В. Геометрія. Підручник для 7 –11 кл.серд.шк. — 2-е вид. — К.: Освіта, 1992. — 352с.

32. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії. Навч.-метод.посібн. — К.: “Магістр – С”, 1998. — 256с.

33. Програми з математики для 5 –11 кл. Загальноосвітньої школи/ М-во освіти України. — К., 2020. — 82с.

34. Семушин А.Д. Про вивчення геометричного матеріалу в IV-V класах за новими підручниками //Математика в школі. – №5, 1985.

35. Тесленко І.Ф. Методика викладання математики в IV-V класах. — К., Радянська школа, 1984.