ISSN 1025-6415

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

ГОЛОВНИЙ
РЕДАКТОР ЖУРНАЛУ
академік НАН УКРАЇНИ
П.Г. КОСТЮК

9
1997

Засновник – Президія Національної академії наук України

Свідоцтво про державну реєстрацію журналу –
серія КВ N 127, видане 10 жовтня 1993 р.

Адреса редакції:

Україна, 252004 Київ–4, вул. Терещенківська, 3

Тел. (044) 225-12-16

"ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ" публікують короткі повідомлення про оригінальні і ніде не надруковані дослідження в галузі математики, природознавства і техніки, авторами яких є дійсні члени та члени-кореспонденти НАН України. Журнал публікує також повідомлення інших авторів, подані дійсними членами та членами-кореспондентами НАН України з відповідної спеціальності, які тим самим беруть на себе відповідальність за наукові достоїнства поданої статті.

Призначення "ДОПОВІДЕЙ НАН УКРАЇНИ" полягає перш за все в публікації повідомлень про нові наукові дослідження, що мають пріоритетний характер.

"ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ" не публікують статті полемічні, класифікаційні і вузькоспеціальні, що містять розв'язки стандартних задач; статті описові, оглядові та методичні (якщо метод не є принципово новим); статті з систематики рослин, тварин і мікроорганізмів; статті, в яких викладаються окремі етапи досліджень або матеріал, поділений на кілька послідовних публікацій; статті про рядові дослідження, що не становлять загального інтересу і не містять значущих висновків.

Публікація в "ДОПОВІДЯХ НАН УКРАЇНИ" не перешкоджає опублікуванню розширеного варіанта статті в інших періодичних виданнях.

ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 1997

Науково–теоретичний журнал Президії Національної академії наук України

Заснований у 1939 р.

Виходить щомісяця

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ ЖУРНАЛУ

П.Г. КОСТЮК (головний редактор), С.А. АНДРОНАТІ, В.Г. БАР'ЯХТАР, Г.М. ГАВРИЧКОВА (заст. головного редактора), Ю.Ю. ГЛЄБА, О.М. ГУЗЬ, А.А. ДОЛІНСЬКИЙ, І.М. КОВАЛЕНКО, В.С. КОРОЛЮК, В.П. КУХАР, Ю.С. ЛІПАТОВ, В.О. МАРЧЕНКО, Г.Х. МАЦУКА, Ю.О. МИТРОПОЛЬСЬКИЙ, В.В. НЕМОШКАЛЕНКО (заст. головного редактора), С.В. ПЕЛЕТМІНСЬКИЙ, В.Д. ПОХОДЕНКО, В.І. СКОК, В.О. ТОПАЧЕВСЬКИЙ, М.П. ЩЕРБАК

© Президія Національної академії наук України, 1997

Зміст

Математика

Булавацький В.М., Юрик І.І. Математичне моделювання процесу підземного вилужування на основі моделі біпараболічної фільтрації 7

Вірченко Н.О., Гайдей В.О. Про деякі типи узагальнених (за Райтом) m–Бессель функцій та їх застосування 10

Григорків В.С. Моделювання сіткових макровиробничих функцій багатьох змінних 14

Коваленко В.І. Деякі класи скінченних груп з нормальними неметациклічними підгрупами 17

Ленюк М.П., Пилипюк Т.М. Один клас гібридних інтегральних перетворень (Лежандра – Фур'є – Фур'є) 21

Лопушанський О.В., Дмитришин М.І. Базисність систем кореневих векторів операторів з компактною резольвентою 28

Орлов И.В. Теорема Хана – Банаха в индуктивных шкалах пространств 32

Працьовитий М.В. Згортки сингулярних розподілів 36

Сейфуллин Т.Р. Гомологии комплекса Кошуля системы полиномиальных уравнений. 43

Семко М.М. Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп 49

Механіка

Береславский Э.Н., Матвеев В.В., Цицкишвили А.Р. К задаче о построении подземного контура флютбета 54

Бурак Я.Й., Бугрій М.І. Оптимізація напружень в пустотілому циліндрі при силовому навантаженні 58

Kashtalyan M.Yu., Stronge W.J. On Saint–Venant's principle in the two–dimensional theory of elasticity of anisotropic bodies 62

Комиссарова Г.Л. Обобщенные волны Стоунли в составном упруго–жидкостном волноводе 66

Ложкин В.Н. Определение упругих и пластических перемещений в изгибаемой изотропной полосе с круговым отверстием 73

Фізика

Борщ А.О., Бродин М.С., Старков В.М. Конструктивна модель нестаціонарного двопучкового енергообміну при записуванні пропускаючих динамічних голограм 78

Булавин Л.А., Одинаев С. О высокочастотных спектрах коллективных колебаний в жидкостях 81

Островский И.В., Лысых В.А., Чуприна Р.Г. Сонолюминесценция в системе ниобат лития – газ среднего давления 88

Панин С.Б. Дисперсионные закономерности плазменно–штарковских междутиповых колебаний в полупроводниках со сверхрешеткой вблизи морсовской критической точки ...94

Хижун О.Ю., Жураковский Е.А., Зауличный Я.В., Режец И.Я. Преобразование электроннной структуры мононитрида тантала в результате необратимых полиморфных превращений под воздействием высоких давлений 99

1. *Сейфуллин Т.Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов. // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Сейфуллин Т.Р.* Корневые функционалы и корневые соотношения полиномов системы полиномов. // Там же. – № 6. – С. 7–10.
3. *Бурбаки Н.* Алгебра. Гомологическая алгебра. – М.: Наука, 1987. – 182 с.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.10.96

УДК 519.41/47

© 1997

М.М. Семко

Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп

(Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком)

Groups characterized by the density of normality of their subgroups are considered. For these groups, there exist a normal subgroup N and subgroups A and B such that $A \leqslant N \leqslant B$. Eight distinct definitions of normality are introduced and, for each of them, properties of groups are studied. Two classes of locally graduated groups of such a kind are described.

У багатьох роботах (див., наприклад, літературу в [1, 2]) вивчалися групи, в яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leqslant N \leqslant B$. В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. В пункті 1 роботи наведені результати, які суттєво використовуються при доведенні основних результатів. Пункт 2 присвячений повному опису локально ступінчастих УЩН[ ]–груп.

1. Означення 1. Нехай G – група, A та B – її підгрупи, $A \leqslant B$ Відрізком (інтервалом) $[A;B]$ $((A;B))$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A \leqslant X \leqslant B$ $(A < X < B)$.

Півінтервалом $(A;B]$ або $[A;B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A < X \leqslant B$ або $A \leqslant X < B$.

Означення 2. Модулем відрізка $|[A;B]|$ називається число його елементів.

Означення 3. Нехай у групі G для будь–якого відрізка $[A;B]$ існує нормальна підгрупа N із G така, що: 1) при $|[A;B]| \geqslant 1$: 1.1) $N \in [A;B]$; 2) при $|[A;B]| > 1$: 2.1) $N \in (A;B]$; 2.2) $N \in [A;B)$; 2.3) $N \in [A;B]$; 3) при $|[A;B]| > 2$: 3.1) $N \in (A;B)$; 3.2) $N \in (A;B]$; 3.3) $N \in [A;B)$; 3.4) $N \in [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: Н–, ЩН( )–, ЩН[ )–, ЩН[ ]–, УЩН( )–, УЩН( ]–, УЩН[ )–, УЩН[ ]–групою.

Теорема 1. *В нededекіндовій локально ступінчастій УЩН[ ]–групі ненормальними підгрупами U можуть бути лише власні підгрупи одного з типів: 1) U – циклічна підгрупа порядку $p^\alpha, \alpha > 0, p$ – довільне просте число, $\Phi(\Phi(U)) = M \triangleleft G$; 2) U – група порядку pq, p і q – необов'язково різні прості числа, $M = E \triangleleft G$; 3) U – група кватерніонів порядку*

$8, \Phi(U) = M \lhd G$; *4)* U *– циклічна підгрупа порядку* $p^\alpha q, \alpha > 1, p$ *і* q *– різні прості числа,* $M \leqslant U, M \lhd G, |M| = p^{\alpha-1}q$; *5)* $U = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$, $|x| = p^\Delta, \Delta > 1$, $|y| = p, p$ *– довільне просте число,* $[\langle x\rangle, \langle y\rangle] \leqslant \langle x^{p^{\Delta-1}}\rangle, [U : U'] > 4$, *кожна підгрупа з* U *порядку* p^2 *містить* U', $\langle x^p\rangle \times \langle y\rangle = M \lhd G$; *6)* $U = R \leftthreetimes \langle x\rangle, R$ *– елементарна абельова мінімальна нормальна підгрупа в* U *порядку* $r^\gamma > 2, |x| = p^\beta$, p *і* r *– різні прості числа,* $\gamma \in \{1,2,3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x\rangle$ *– максимальна підгрупа з* U, $U' = R$, $R \times \langle x^p\rangle = M \lhd G$, *при* $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Теорема 2. *Недедекіндова локально ступінчаста УЩН[ ]-група* G *має скінченний комутант, не має підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників, і є черніковською дисперсивною групою одного з типів: 1)* G *– скінченна ненільпотентна група; 2)* G *– скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група; 3)* G *має центральну квазіциклічну* p*-підгрупу* R, *для якої* G/R *– скінченна дедекіндова група.*

Теорема 3. *Метациклічні УЩН[ ]-групи* G *вичерпуються групами типів: 1)* $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$; *2)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \in \{2,3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; *3)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta, \beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$; *4)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leqslant k < \alpha$, $\alpha - k \leqslant \beta$; *5)* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle d\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle$, $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$; *6)* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; *7)* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2,3,4\}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; *8)* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$; *9)* $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $\beta \in \{3,4\}$, $b^{-1}ab = a^7$; *10)* $G = P \times D$, P *– група кватерніонів порядку 8,* D *– скінченна абельова метациклічна група; 11)* $G = P \times D$, P *– силовська* p*-підгрупа* G, $|D| = q$, p *і* q *– різні прості числа,* P *– група одного з наступних типів розглядуваної теореми: 2,* $|P'| = 2$; *4,* $|P'| = p$; *6,* $\beta < 4$; *12)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = pr$, p *і* r *– необов'язково різні прості числа,* $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $r \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $b^q \in Z(G)$; *13)* $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = p$ *– непарне просте число,* $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $|z| \in \{1, r\}$, r *– просте число,* $\Phi(\Phi(\langle b\rangle)) \leqslant Z(G)$; *при* $|z| = r$ $b^q \in Z(G)$; *при* $|z| = p$ $\beta < 3$; *14)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, q *і* r *– різні прості числа,* $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, r)$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $C_{\langle b\rangle}(\langle a\rangle) = 1$; *15)* $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle b\rangle$, $|a| = p$ *– непарне просте число,* $\langle z\rangle\langle b\rangle$ *– група кватерніонів порядку 8,* $b^{-1}ab = a^{-1}$; *16)* $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle)$, $|a| = p$ *– непарне просте число,* $|b| = q^\beta$, $|z| = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $[a, b^q] = [a, z] = 1$, $[b, z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Теорема 4. *Локально ступінчасті УЩН[ ]-групи Шмідта мають вигляд* $G = P \leftthreetimes Q$, *де* P *– нормальна в* G *силовська* p*-підгрупа порядку* $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{1,2,3\}$, $G' = P$, Q *– ненормальна циклічна силовська* q*-підгрупа з* G *порядку* q^β, $\beta > 0$, p *і* q *– різні прості числа,* $P' = \Phi(P) \leqslant Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^\Delta$, $\Delta \in \{0,1\}$, $\alpha - \Delta$ *– показник* p *за модулем* q, $\Phi(P) \times Q$ *– максимальна підгрупа з* G, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ *та вичерпуються групами типів: 1)* P *– група кватерніонів,* $q = 3 > \beta$; *2)* $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3, q > 2, \beta = 1$; *3)*$P$ *– елементарна абельова група, при* $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Теорема 5. *Локально ступінчасті мінімальні неметациклічні УЩН[ ]-групи* G *мають вигляд* $G = AX$, *де* $A = \langle a, b\rangle$ *– нормальна в* G p *-підгрупа,* $a \neq 1, X - q$*-група,* p *і* q *– прості числа та вичерпуються групами типів: 1)* $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$; *2)* $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$; *3)* $G = A \times X$, A *– група кватерніонів порядку 8,* $|X| = 2$; *4)* A *– група кватерніонів порядку 8,* $X = \langle x\rangle$, $|x| = 4$, $\langle x^2\rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$; *5)* $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $X = \langle x\rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$; *6)* $G = A \leftthreetimes X$ *– група Шмідта типу 3 теореми 4,* $|A| = p^2, |x| \in \{q, q^2\}$; *7)* $G = A \leftthreetimes X$ *– група Шмідта типу 1 теореми 4,* A *– група кватерніонів порядку 8,* $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = A \leftthreetimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ *– непарне просте число,* $X = \langle x \rangle$, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$; *9)* $G = A \leftthreetimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ *– непарне просте число,* $X = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta, \beta > 2$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, A *– квазіцентральна підгрупа з* G; *10)* $G = A \leftthreetimes X$, $|A| = p$ *– непарне просте число,* $X = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|x| = q^2$ $|z| = q$ *– непарне просте число,* $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$; *11)* G *– квазіциклічна* p*–група.*

Теорема 6. *Нехай* G *– локально ступінчаста УЩН[ ]-група з мінімальною нецикліч-ною підгрупою* C. *Тоді в* G *нормальні всі підгрупи, що строго містять* C. *Всі локально ступінчасті групи* G *з ненормальною підгрупою* C *вичерпуються групами таких типів: 1)* $G = P \leftthreetimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p *і* q *– різні прості числа,* $\Phi(P) \leftthreetimes Q$ *– нільпотентна група Міллера – Морено,* $p \neq 3$; *2)* $G = (R \times P) \leftthreetimes Q$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|Q| = q$, r, p *і* q *– попарно різні прості числа,* $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $R \leftthreetimes Q$ *і* $P \leftthreetimes Q$ *– нільпотентні групи Міллера – Морено.*

Теорема 7. *Локально ступінчасті нededекіндові ЩН[ ]-групи* G *вичерпуються групами таких типів: 1)* $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha, |b| = p^\beta, \alpha > 1, \beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$; *2)* $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8, |b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; *3)* $G = C \times Q$, C *– неодинична локально циклічна 2–група,* Q *– група кватерніонів порядку 8; 4)* $G = (C \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, C *– локально циклічна* p*–група, або група кватерніонів порядку 8,* $[a, b] = c \in C, |c| = p, |a| = |b| = p, [C, \langle b \rangle] = 1$; *5)* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9, |b| = 3, [a, x] = b, [b, x] = a^3 = x^6$; *6)* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$; *7)* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4, a^2 = x^2 = [a, y], a^2b^2 = [a, x] = [b, y], b^2 = y^2 = [b, x]$; *8)* $G = P \leftthreetimes Q, P$ *– силовська* p*–підгрупа з* G, Q *– силовська* q*–підгрупа з* G, p *і* q *– різні прості числа,* $|P| \in \{p, p^2\}, |Q| = q^\beta, \beta > 0$; *при* $|P| = p$ $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$; *при* $|P| = p^2$ $p \neq 3, q > 2, \beta = 1, 2$ *– показник* p *за модулем* q.

Теорема 8. *Класи Н–, ЩН[ )–, ЩН( ]-груп збігаються з класом дедекіндових груп.*

2. Теорема 9. *Нededекіндові УЩН[ ]-групи* G *з комутантом порядку* p *(*p *– просте число) мають вигляд* $G = CF, C$ *– локально циклічна* p*–група, або група кватерніонів порядку 8,* $[C, F] = 1$, $F = (Q \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $[a, b] \in \langle c \rangle = G' = F' \leqslant Q = \langle u, v \rangle$, $|c| = p$, *та вичерпуються групами таких типів: 1)* $G = F = (Q \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle a \rangle$, $Q = \langle c \rangle, |b| = q^\beta, \beta > 0, |a| \in \{1, r\}$, p *і* q *– різні прості числа,* $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $b^{q^2} \in Z(G)$; *при* $a \neq 1$ $b^q \in Z(G)$; *при* $|a| = p$ $\beta < 3$; *2)* $G = F = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|Q| = p, |b| = qr, p, q$ *і* r *– попарно різні прості числа,* $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, r)$, $C_{\langle b \rangle}(Q) = 1$; *3)* $G = F = Q \times \langle a \rangle$, $Q = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = p^\Delta, \Delta > 1, |v| = p^\gamma, \gamma > 0, [u, v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $|a| \in \{1, r\}, r$ *– просте число; 4)* $G = C \times F, C$ *– локально циклічна 2–група,* $|C| > 2$, $F = Q \times \langle a \rangle$, Q *– група кватерніонів порядку 8,* $|a| \in \{1, r\}, r$ *– просте число; 5)* $F = Q \times \langle a \rangle$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $[u, v] = c \in C$, $|u| \in \{p, p^2\}, |v| \in \{p, p^2\}, |a| \in \{1, r\}, r$ *– просте число,* $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; *при* $a \neq 1 |u| = |v| = p$; *6)* $G = F, Q = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle, |u| = p^\Delta$, $\Delta > 1, |v| = |a| = |b| = p, [u, v] = [a, b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$; *7)* $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p, [u, v] = c = [a, b], [Q, \langle b \rangle] = 1$.

Теорема 10. *Локально ступінчасті метагамільтонові УЩН[ ]-групи* G *з нециклічним комутантом вичерпуються групами таких типів: 1)* $G = (P \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P *– елементарна абельова група порядку* p^2, $|x| = q^\beta, \beta \in \{1, 2\}, p$ *і* q *– різні прості числа,* $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ *– нільпотентна група Міллера – Морено,* $|z| \in \{1, r\}, r$ *– просте число; при* $|z| = r$ $\beta = 1$; *2)* $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9, |b| = 3, [a, x] = b, [b, x] = a^3 = x^6, |z| \in \{1, r\}$, $3 \neq r$ *– просте число; 3)* G *– група порядку* p^4 *з абелевим нецентральним комутантом типу* $(p, p), p$ *– непарне просте число; 4)* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ $|a| = |x| = p^2, |b| = p$ *– непарне*

просте число, $[a,x]=b,[b,x]=a^{sp},0<s<p$; *5)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=|b|=p^2,|x|=p,[a,x]=b^p,[b,x]=a^{sp}b^{tp},0<s<p,0\leqslant t<p$; *при* $p>2$ t^2+4s *– неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p=2$ $t=s=1$; *6)* $G=A\leftthreetimes\langle x\rangle,A=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$, $|a|=|b|=p^2,|x|=p$ *– непарне просте число,* $[a,b]=a^p,[a,x]=b^p,[b,x]=1$; *7)* $G=A\leftthreetimes\langle x\rangle,A=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$ $|a|=|b|=p^2,|x|=p$, $[a,b]=a^p,[a,x]=b^p,[b,x]=a^{sp}b^{tp},0<s<p,0\leqslant t<p$; *при* $p>2$ t^2+4s *– неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p=2$ $s=1$; *8)* $G=(((\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\langle x\rangle)\times\langle z\rangle$ $|a|=|b|=|x|=4$, $|z|\in\{1,r\},r$ *– просте число,* $[a,x]=a^2,[b,x]=x^2=a^2b^2$; *9)* $G=(((\langle a\rangle\times\langle b\rangle)(\langle x\rangle\times\langle y\rangle))\times\langle z\rangle$, $|a|=|b|=4,a^2=x^2=[a,y],a^2b^2=[a,x]=[b,y],b^2=y^2=[b,x],|z|\in\{1,r\},r$ *– просте число; 10)* $G=\langle a\rangle M,M=(\langle c\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=|b|=p^2,|c|=|x|=p$ *– непарне просте число,* $[a,b]=x,[b,x]=c,\langle c\rangle\times\langle b^p\rangle=Z(G)$, $[a,x]=c^\varepsilon b^p,0\leqslant\varepsilon<p,a^p=c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0\leqslant t<p$, *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві; 11)* $G=\langle a\rangle M,|a|=4$, $M=(\langle a^2\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$ $|b|=|x|=4,[a,b]=x^2,[b,x]=a^2b^2\in Z(G)$, $[a,x]=b^2x^2$; *12)* $G=\langle a\rangle M,|a|=p^2,M=(\langle a^p\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|b|=|x|=p^2,p$ *– непарне просте число,* $[b,x]=a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0<s<p$, $0\leqslant t<p$, $0\leqslant l<p$, $[a,b]=x^p,[a,x]=b^{fp}x^{kp}$, $0<f<p$, $0\leqslant k<p$, *неквадратичними лишками за модулем* p *є числа:* t^2+4fs,l^2+4f,k^2+4s; *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві; 13)* $G=P\leftthreetimes\langle x\rangle$ *– група Шмідта,* P *– група кватерніонів порядку 8,* $|x|\in\{3,9\}$; *14)* $G=P\leftthreetimes\langle x\rangle$ *– група Шмідта,* $|P|=p^3,\exp(P)=p,|x|=q$; *15)* $G=P\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|P|=p^\alpha,\alpha\in\{2,3\},|x|=q^\beta,\beta\in\{2,3\}$, $\alpha+\beta<6,P\leftthreetimes\langle x^q\rangle$ *– ненільпотентна група Міллера – Морено,* α *– показник* p *за модулем* q; *16)* $G=P\leftthreetimes\langle x\rangle$ *–група Фробеніуса,* P *– елементарна абельова група порядку* $p^\alpha,\alpha\in\{2,3\}$, $|x|=qr,p,q$ *і* r *– попарно різні прості числа,* α*–показник* p *за модулем* q *і дорівнює показнику* p *за модулем* r.

Теорема 11. *Нільпотентні неметагамільтонові УЩН[ ]-групи* G *вичерпуються групами таких типів: 1)* $G=(\langle a\rangle\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle z\rangle$, $|a|=8,|b|=2^\beta,\beta\in\{2,3\}$, $|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=|z|=2$, $b^{-1}ab=a^{-1},[b,z]=1,[a,z]\in\langle a^4\rangle$; *2)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)(\langle x\rangle\times\langle z\rangle)$, $|a|=|x|=9,|b|=|z|=3$, $[a,x]=b,[b,x]=a^3=x^6,[b,z]=1,[a,z]\in\langle a^3\rangle$; *3)* $G=(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|x|=p,|a|=p^2,|b|=p^\beta,\beta>2,[a,b]=a^p$, $[a,x]=b^{p^{\beta-1}},[b,x]=1$; *4)* $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a|=16,|b|=2^\beta,\beta\in\{2,3,4\}$, $|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=2$, $b^{-1}ab=a^{-1}$; *5)* $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a|=16,|b|=2^\beta,\beta\in\{3,4\}$, $|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=2$, $b^{-1}ab=a^7$; *6)* $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a|=|b|=16$, $|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=2$, $b^{-1}ab=a^3$; *7)* $G=(\langle a,b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=|b|=|x|=4,\langle a,b\rangle$ *– група кватерніонів,* $[a,x]=a^2$, $[b,x]=a$; *8)* $G=U\leftthreetimes X$, U *– циклічна група, чи група кватерніонів порядку 8,* $|U|>2$, X *– група кватерніонів порядку 8,* $[U,X]\leqslant w(U)$; *при* $U'=1$ $[U,X]=w(U)$; *при* $U'\neq1$ $[U,X]=1$; *9)* $G=(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a|=8,|x|=4,|b|=2,[a,b]=x^2=a^4,[a,x]=b,[b,x]=1$; *10)* $G=(\langle a\rangle\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a|=|b|=8$, $|x|=4$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle)\cap\langle x\rangle=\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle a^4\rangle$, $b^{-1}ab=a^{-1}$, $[a,x]=b^2$, $[b,x]=a^2b^2$.

Теорема 12. *Локально ступінчасті ненільпотентні неметагамільтонові УЩН[ ]-групи* G *вичерпуються групами таких типів: 1)* $G=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$, $|a|=pr,p$ *і* r *– необов'язково різні прості числа,* $|b|=q^\beta,\beta>0,q$ *– просте число,* $p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$, $r\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$, $[\langle a\rangle,\langle b\rangle]=\langle a\rangle$, $Z(G)=\langle b^q\rangle$; *2)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a|=p$ *– непарне просте число,* $x^{-1}ax=a^{-1},\langle b,x\rangle$ *– група кватерніонів порядку 8; 3)* $G=\langle a\rangle\leftthreetimes(\langle x\rangle\leftthreetimes\langle z\rangle)$, $|a|=p$ *– непарне просте число,* $|b|=q^\beta,\beta>2,|z|=q$ *– просте число,* $p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle]=\langle a\rangle$, $[a,x^q]=[a,z]=1,[x,z]=x^{q^{\beta-1}}$; *4)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=|b|=p$ *– непарне просте число,* $|x|=q^\beta,\beta<3$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle]=\langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle]=\langle b\rangle$, $Z(G)=\langle x^q\rangle$, $p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$; *5)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=|b|=p$ *– непарне просте число,* $|x|=q^\beta,\beta>2$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle]=\langle a\rangle$, $[\langle b\rangle,\langle x\rangle]=\langle b\rangle$, $Z(G)=\langle x^q\rangle$, $p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$, $\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ *– квазіцентральна підгрупа з* G; *6)* $G=\langle a\rangle\leftthreetimes(\langle x\rangle\leftthreetimes\langle z\rangle)$, $|a|=p$ *– непарне просте число,* $|x|=q^2,|z|=q$ *– непарне просте число,* $p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle]=\langle a\rangle$, $[a,x^q]=[a,z]=1,[x,z]=x^q$; *7)* $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$,

$|a| = |b| = p^2, p$ – *просте число,* $p \neq 3, |x| = q$ – *просте число, 2 – показник* p *за модулем* q, $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ – *нільпотентна група Міллера – Морено; 8)* $G = (R \times P) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|R| = r, |P| = p^2, |x| = q, p, q$ *і* r – *попарно різні прості числа,* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, *2 – показник* p *за модулем* $q, q > 2, R \leftthreetimes \langle x \rangle$ *і* $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ – *нільпотентні групи Міллера – Морено; 9)* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ – *ненадрозв'язна група Фробеніуса,* $|a| = |b| = p$ – *непарне просте число,* $|x| = qr$ q *і* r – *необов'язково різні прості числа,* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r)$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x^q \rangle$ *і* $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x^r \rangle$ – *мінімальні неметациклічні групи.*

1. *Семко М.М.* Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгрупп. – Київ: Вид. Ін–ту математики НАН України, 1997. – 90 с.
2. *Семко М.М.* Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгрупп. – Київ: Вид. Ін–ту математики НАН України, 1997. – 63 с.

Інститут педагогіки АПН України, Київ

Надійшло до редакції 26.03.96.