



Наукові перспективи
Видавнича група

№ 5 (19)
2023

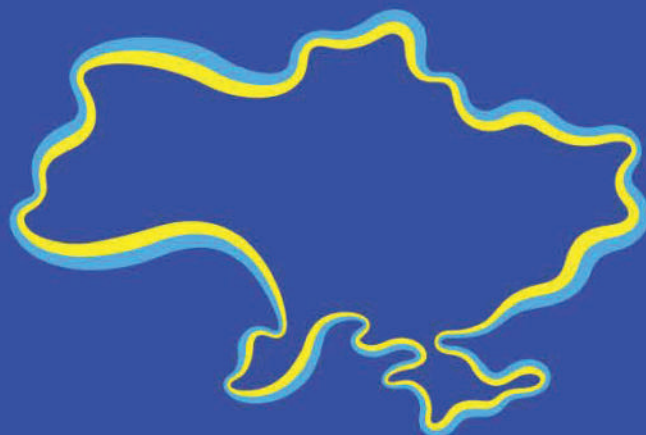
НАУКА і ТЕХНІКА

СЬОГОДНІ

Серія: Техніка



З Україною
в серці!



Видавнича група «Наукові перспективи»

**Громадська наукова організація «Всеукраїнська Асамблея
докторів наук із державного управління»**

Громадська організація «Асоціація науковців України»

«Наука і техніка сьогодні»
(Серія «Техніка»)

Випуск № 5(19) 2023

Київ – 2023

Publishing Group «Scientific Perspectives»

**Public Scientific Organization «Ukrainian Assembly of Doctors of
Sciences in Public Administration»**

Public organization «Association of Scientists of Ukraine»

"Science and technology today"
("Technology" series)

Issue № 5(19) 2023

Kiev – 2023

ISSN 2786-6025 Online
УДК 001.32:1 /3](477)(02)



DOI: [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-5\(19\)](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-5(19))

**«Наука і техніка сьогодні» (Серія «Техніка»):
журнал. 2023. № 5(19) 2023. С. 145.**



**Згідно наказу Міністерства освіти і науки України від 07.04.2022 № 320
журналу присвоєно категорію "Б" із економіки та педагогіки**

**Згідно наказу Міністерства освіти і науки України від 06.06.2022 № 530
журналу присвоєно категорію "Б" із права.**

**Згідно наказу Міністерства освіти і науки України від 10.10.2022 № 894 журналу присвоєно
категорію "Б" із техніки (спеціальність - 122 Комп'ютерні науки).**

*Журнал видається за підтримки Інституту філософії та соціології Національної Академії наук Азербайджану,
громадської організації «Християнська академія педагогічних наук України» та громадської організації
«Всеукраїнська асоціація педагогів і психологів з духовно-морального виховання»*

*Рекомендовано до видавництва Президією громадської наукової організації «Всеукраїнська Асамблея
докторів наук з державного управління» (Рішення від 15.05.2023, № 5/5-23)*



Журнал включено до міжнародної наукометричної бази
Index Copernicus (IC), міжнародної пошукової системи Google
Scholar та до міжнародної наукометричної бази даних Research Bible

Головний редактор: Сопілко Ірина Миколаївна - доктор юридичних наук, професор,
Відмінник освіти України, Лауреат Премії Президента України для молодих вчених, Лауреат Премії
Верховної Ради України найталановитішим молодим ученим в галузі фундаментальних і прикладних
досліджень та науково-технічних розробок, академік Академії наук вищої школи України, Заслужений
юрист України (Київ, Україна)

Редакційна колегія:

- Артемчук Володимир Олександрович - доктор технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (Київ, Україна)
- Бахов Іван Степанович — доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри іноземної філології та перекладу Міжрегіональної академії управління персоналом (Київ, Україна)
- Будник Вікторія Анатоліївна - кандидат економічних наук, професор, професор кафедри бізнес-логістики та транспортних технологій Державного університету інфраструктури та технологій (Київ, Україна)
- Волк Павло Павлович — доцент кафедри водної інженерії та водних технологій Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
- Гирка Ольга Ігорівна - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри товарознавства, митної справи та управління якістю Львівського торговельно-економічного університету (Львів, Україна)
- Гнатюк Сергій Олександрович - кандидат технічних наук, доцент, заступник декана факультету аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Дацій Олександр Іванович - доктор економічних наук, професор, Заслужений працівник освіти України, завідувач кафедри фінансів, банківської та страхової справи Міжрегіональної академії управління персоналом (Київ, Україна)
- Дівізінюк Михайло Михайлович - доктор фізико-математичних наук, професор, Завідувач відділу Відділу цивільного захисту та інноваційної діяльності Державної установи "Інститут геохімії навколишнього середовища Національної академії наук України" (Київ, Україна)
- Дяденчук Альона Федорівна - кандидат технічних наук, старший викладач кафедри вищої математики і фізики Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного (Мелітополь, Україна)
- Забулонов Юрій Леонідович - доктор технічних наук, професор, Член-кореспондент НАН України, директор Державної установи «Інститут геохімії навколишнього середовища Національної академії наук України» (Київ, Україна)
- Льїн Валерій Юрійович - доктор економічних наук, професор (Київ, Україна)

- Ільїна Анастасія Олександрівна - кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри публічного управління і адміністрування Національного торговельно-економічного університету (Київ, Україна)
- Кардаш Оксана Любомирівна — кандидат економічних наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики Навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне, Україна)
- Квасніков Володимир Павлович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Коваленко Валентин Васильович - доктор юридичних наук, професор, провідний науковий співробітник сектору авторського права та суміжних прав лабораторії авторського права та інформаційних технологій Науково-дослідного центру судової експертизи з питань інтелектуальної власності Міністерства юстиції України (Київ, Україна)
- Коваленко Олена Михайлівна - кандидат педагогічних наук, провідний науковий співробітник відділу профільного навчання Інституту педагогіки НАПН України (Київ, Україна)
- Комнатний Сергій Олександрович - докторант кафедри філософії права та юридичної логіки Національної академії внутрішніх справ (Київ, Україна)
- Кравчук Володимир Миколайович — доктор юридичних наук, доцент, доцент кафедри конституційного, адміністративного та міжнародного права Волинського національного університету імені Лесі Українки (Луцьк, Україна)
- Кузьмич Людмила Володимирівна - доктор технічних наук, головний науковий співробітник Інституту водних проблем і меліорації Національної академії аграрних наук України (Київ, Україна)
- Куницький Сергій Олегович - кандидат технічних наук, старший дослідник, провідний науковий співробітник науково-дослідної частини Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
- Лук'ячук Олександр Петрович — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельних, дорожніх, меліоративних, сільськогосподарських машин та обладнання Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
- Маджд Світлана Михайлівна - доктор технічних наук, професор, професор кафедри зеленої економіки та економіки природокористування Державної екологічної академії післядипломної освіти та управління (Київ, Україна)
- Мануель Давид Массено - доцент відділу права та захисту даних, старший науковий співробітник і член координаційного комітету лабораторії UbiNET, запрошений член PDPC, член-консультант комісії цифрового права муніципальних адвокатських колегій Кампінаса та Прая-Гранде (Сан-Паулу), а також Комісії з інновацій, управління та технологій муніципальної адвокатської колегії Гуарульюса, коментатор IODA, почесний член IDEIA Institute, член Наукового комітету MICHN, член EDEN, член-кореспондент RedNAC, член UMAU, член-кореспондент UBAU (Португалія)
- Микитин Тарас Миронович - кандидат технічних наук, завідувач кафедри менеджменту Рівненського державного гуманітарного університету (Рівне, Україна)
- Миргород-Карпова Валерія Валеріївна - кандидат юридичних наук, заступник директора з наукової роботи, старший викладач кафедри адміністративного, господарського права та фінансово-економічної безпеки Сумського державного університету (Суми, Україна)
- Мізюк Вікторія Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету управління, адміністрування та інформаційної діяльності Ізмаїльського державного гуманітарного університету (Ізмаїл, Україна)
- Мірошніченко Валентина Іванівна - доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри психології, педагогіки та соціально-економічних дисциплін Національної академії Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького (Хмельницький, Україна)
- Міхальський Томаш — доктор наук, доцент кафедри географії регіонального розвитку Гданського університету (Польща)
- Огієнко Микола Миколайович - кандидат технічних наук, професор кафедри організації авіаційних робіт та послуг Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Одарченко Роман Сергійович - завідувач кафедри телекомунікаційних та радіоелектронних систем Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Оніщенко Наталія Миколаївна - доктор юридичних наук, професор, Заслужений юрист України, академік НАПрН України, завідувач відділу теорії держави і права Інституту держави і права ім. В.М.Корецького НАН України (Київ, Україна)
- Опанасенко Володимир Миколайович — доцент кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Охріменко (Жмурко) Тетяна Олександрівна - старший науковий співробітник кафедри комп'ютеризованих систем управління Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Павлов Костянтин Володимирович — доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри підприємництва і маркетингу Волинського національного університету імені Лесі Українки (Луцьк, Україна)
- Поліщук Віталій Васильович — кандидат сільськогосподарських наук, завідувач відділу зрошення, відділення меліорації Інституту водних проблем і меліорації Національної академії аграрних наук України (Київ, Україна)
- Приходькіна Наталія Олексіївна - доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки, адміністрування і спеціальної освіти Навчально-наукового інституту менеджменту та психології ДЗВО «Університет менеджменту освіти» НАПН України (Київ, Україна)

- Стахова Анжеліка Петрівна — старший викладач кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій Національного авіаційного університету (Київ, Україна)
- Турчинова Ганна Володимирівна — кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету природничо-географічної освіти та екології Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (Київ, Україна)
- Федоренко Владислав Леонідович — доктор юридичних наук, професор, DrHb - доктор хабілітований наук правничих (Польська академія наук), Заслужений юрист України, директор Науково-дослідного центру судової експертизи з питань інтелектуальної власності Міністерства юстиції України ((Київ, Україна)
- Фесенко Андрій Олексійович - кандидат технічних наук, асистент кафедри кібербезпеки та захисту інформації Київського національного університету імені Тараса Шевченка. (Київ, Україна)
- Черненко Варвара Петрівна - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського (Кременчук, Україна)
- Чернуха Надія Миколаївна — доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри соціальної реабілітації та соціальної педагогіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, Україна)
- Чумак Оксана Володимирівна - доктор економічних наук, доцент, науковий співробітник відділу статистики і аналітики вищої освіти Державної наукової установи «Інститут освітньої аналітики», (Київ, Україна)
- Шандра Наталія Андріївна - кандидат педагогічних наук, доцент кафедри іноземних мов для природничих факультетів Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, Україна)
- Шеремет Інеса Володимирівна - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри медикобіологічних та валеологічних основ охорони життя і здоров'я Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова (Київ, Україна)
- Якимчук Аліна Юріївна - доктор економічних наук, професор, Академік економічних наук України, професор кафедри державного управління, документознавства та інформаційної діяльності Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
- Якимчук Олег Феодосійович - керівник групи білінгу Відділу бізнес-систем Департаменту інформаційних технологій ПРАТ «Рівнеобленерго» (Рівне, Україна)
- Яцишин Андрій Васильович - доктор технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Відділу цивільного захисту та інноваційної діяльності Державної установи "Інститут геохімії навколишнього середовища Національної академії наук України" (Київ, Україна)

ЗМІСТ

СЕРІЯ «Техніка»

Мельник О.М.	8
<i>АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ СУДНОВОДІННЯ, ЇЇ РОЛЬ У ЗАБЕЗПЕЧЕННІ БЕЗПЕКИ ТА ПІДВИЩЕННІ ЕФЕКТИВНОСТІ МОРСЬКИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ</i>	
Носко С.В., Костюк Д.В., Галецький О.С.	19
<i>МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ ПНЕВМАТИЧНОГО ПРИВОДА ОДНОСТОРОННЬОЇ ДІЇ НА ЙОГО ДИНАМІКУ</i>	
Павельчук Ю.Ф.	28
<i>ТОЧНЕ ЗЕМЛЕРОБСТВО – ІННОВАЦІЯ У СИСТЕМІ РЕСУРСОЗБЕРІГАЮЧИХ ТЕХНОЛОГІЙ</i>	
Параниця Н.В., Скасків Л.В., Чернобай О..	42
<i>СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ</i>	
Струнгар А.В., Плисенко Г.П.	50
<i>ОГЛЯД НАЦІОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ OPEN UKRAINIAN CITATION INDEX (OUCI)</i>	
Чмир В.М., Корсхов А.О., Партика С.В.	58
<i>МЕТОДИКА ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІКИ ЗМІН ТА ГОТОВНОСТІ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ДО ЕКСПЛУАТАЦІЇ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ</i>	
Щелкунов В.І., Андріанов О.А., Залізнюк В.П., Жукова І.В., Балакан Г.Г., Дудар О.Г., Шустер М.М.	72
<i>ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ ЕНЕРГОСИСТЕМИ, ЇЇ ЗДАТНОСТІ ДО БАЛАНСУВАННЯ НАВАНТАЖЕННЯМ У НАДЗВИЧАЙНИХ УМОВАХ АБО ПРИ ЧАСТОТНОМУ РЕГУЛЮВАННІ</i>	



Твердохлєбова Н.Є.

97

*ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ТЕХНОГЕННОЇ БЕЗПЕКИ В
УКРАЇНІ*

Стратонов В.М.

107

*ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ ВІЙСЬКОВИХ БПЛА УКРАЇНСЬКОГО
ВИРОБНИЦТВА ДЛЯ РОБІТ З РОЗМІНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ*

Гирка О.І., Бодак М.П., Філь М.І.

122

*ДОСЛІДЖЕННЯ СТАБІЛІЗУЮЧОЇ ДІЇ РОСЛИННИХ ДОБАВОК НА
РІДКИХ І ТВЕРДИХ РОСЛИННИХ ЖИРАХ*

Скасків Л.В., Лаговський В.В.

133

*ПРО БУДОВУ ОДНОГО КЛАСУ ГРУП З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ
НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ НЕАБЕЛЕВИХ ПІДГРУП*

УДК 512.54

[https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-5\(19\)-133-144](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-5(19)-133-144)

Скасків Лілія Василівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібернетики та прикладної математики, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, 08205, тел.: (096) 437-77-01, <https://orcid.org/0000-0001-9090-6700>

Лаговський Володимир Вікторович кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри кібернетики та прикладної математики, вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, 08205, тел.: (067) 295-53-06, <https://orcid.org/0000-0002-2154-5427>

ПРО БУДОВУ ОДНОГО КЛАСУ ГРУП З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ НЕАБЕЛЕВИХ ПІДГРУП

Анотація. Групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Наявність великої кількості нормальних підгруп дуже сильно впливає на структуру групи. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то неабелеві групи з такою властивістю мають дуже просту будову, як показують результати робіт [1, 2]. Із цих робіт Р. Дедекінда та Р. Бера почалося вивчення довільних груп G , у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності. Цей напрям є одним з важливих в теорії груп. Його головною метою є опис узагальнень дедекіндових груп. Одне із таких узагальнень здійснюється шляхом звуження системи підгруп Σ , що є нормальними в усій групі. Назване узагальнення дедекіндових груп можна знайти в роботах багатьох авторів.

У 1968 році А. Манн [3] почав вивчати групи, у яких нормальні не всі підгрупи системи Σ , а ті групи G , що мають нормальну підгрупу N , розміщену між будь-якими двома підгрупами A і B із Σ , де A – власна немаксимальна підгрупа з B . У нього Σ – система всіх підгруп групи G . Групи, введені А. Манном, С. М. Черніков у 1975 році назвав групами з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Він же ввів поняття умов щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т. д.) системи підгруп Σ [4, розділ 7]. Будемо говорити, що група G має щільну систему нормальних Σ -підгруп, якщо для будь-якої такої пари підгруп $A < B$, що A не максимальна в B , існує нормальна в G підгрупа N , розташована між A і B , тобто $A \leq N \leq B$. Якщо Σ –

система всіх підгруп групи G , то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для всіх підгруп ($УЩН[]$ -груп). Локально ступінчасті такого роду описані у роботах [5 – 14].

Будемо говорити, що неабелева група G має щільну систему нормальних неперіодичних неабелевих підгруп, якщо для будь-якої такої пари неперіодичних неабелевих підгруп $A < B$, що A не максимальна в B , існує нормальна в G підгрупа N , розташована між A і B , тобто $A \leq N \leq B$ ($УЩН[НН]$ -група).

Ключові слова: неперіодична неабелева підгрупа, нормальна підгрупа, комутант групи, дедекіндова група, метagamільтонова група, локально ступінчаста група.

Skaskiv Liliia Vasylivna PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics, University St., 31, Irpin, 08205, tel.: (096) 437-77-01, <https://orcid.org/0000-0001-9090-6700>

Lagovskyi Volodymyr Viktorovych PhD of economic sciences, associate professor, head of the department of cybernetics and applied mathematics, University St., 31, Irpin, 08205, tel.: (067) 295-53-06, <https://orcid.org/0000-0002-2154-5427>

ON THE COMMUTANT OF NON-PERIODIC NON-ABELIAN GROUPS WITH A DENSE SYSTEM OF NON-PERIODIC NON-ABELIAN SUBGROUPS

Abstract. Groups with large systems of normal subgroups are a rather old object of research in group theory. The presence of a large number of normal subgroups greatly affects the structure of the group. For example, if all subgroups of the group are normal, then non-Abelian groups with this property have a very simple structure, as shown by the results of works [1, 2]. From these works of R. Dedekind and R. Behr, the study of arbitrary groups G began, in which some system of subgroups Σ of the group G satisfies the condition of normality. This direction is one of the important ones in group theory. Its main purpose is to describe generalizations of dedekind groups. One of such generalizations is carried out by narrowing the system of subgroups Σ that are normal in the whole group. The named generalization of dedekind groups can be found in the works of many authors.

In 1968, A. Mann [3] began to study groups in which not all subgroups of the system Σ are normal, but those groups G that have a normal subgroup N placed

between any two subgroups A and B of Σ , where A is a proper is a non-maximal subgroup of B . It has Σ – the system of all subgroups of group G . The groups introduced by A. Mann and S. M. Chernikov in 1975 called them groups with the density condition of normality for all subgroups. He also introduced the concept of density conditions for any group-theoretic property V (complementarity, subnormality, near-normality, etc.) of the system of subgroups Σ [4, Chapter 7]. We will say that a group G has a dense system of normal Σ -subgroups if, for any pair of subgroups $A < B$ such that A is not maximal in B , there exists a normal subgroup N in G located between A and B , that is, $A \leq N \leq B$. If Σ is the system of all subgroups of the group G , then we obtain the definition of groups with normality density conditions for all subgroups (USCHN[]-groups). Locally stepped of this kind are described in works [5 – 14].

We will say that a non-Abelian group G has a dense system of normal non-periodic non-Abelian subgroups if for any such pair of non-periodic non-Abelian subgroups $A < B$ such that A is not maximal in B , there exists a normal subgroup N in G located between A and B , i.e. $A \leq N \leq B$ (USCHN[NN]-group).

Keywords: nonperiodic non-Abelian subgroup, normal subgroup, group commutator, Dedekind group, metahamiltonian group, locally stepped group.

Постановка проблеми. Якщо Σ – система всіх неперіодичних неабелевих підгруп групи G , то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для неперіодичних неабелевих підгруп (коротко УЩН[НН]-груп). В даній роботі доведено, що локально ступінчаста УЩН[НН]-група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Поняття щільності для нормальних підгруп почав розглядати А. Манн [21]. Поняття щільності було узагальнено С. М. Черніковим (див., наприклад, [3, розділ 7]). Він же ввів поняття умов щільності і строгої щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V системи підгруп Σ . Зауважимо, що вивчення метагамільтонових груп розпочали М. Ф. Сесекін та Г. М. Ромаліс [15 – 17]. Воно було продовжено В. Т. Нагребецьким [18] та О. О. Махньовим [19] і завершено у циклі робіт М. Ф. Кузенного та М. М. Семка [20–31].

Мета статті - дослідження будови одного класу груп з умовою щільності нормальності для неперіодичних неабелевих підгруп. Доведено, що локально ступінчаста УЩН[НН]-група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.

Виклад основного матеріалу.

Лема 1. Якщо комутант G' УЩН[НН]-групи скінченний, то він абелевий.

Доведення. Нехай $C_G(G')$ – централізатор комутанта G' в групі G . Тоді $C_G(G')$ має в G скінченний індекс і тому містить елемент a нескінченного

порядку. Нехай підгрупа G' неабелева, p, q і r – різні прості непарні числа і A – максимальна неабелева підгрупа із G' . За означенням УЩН[НН]-груп в G існує нормальна неперіодична неабелева підгрупа X така, що:

$$A < a^{8^9 p^9 q^9 r^9} > \leq X \leq A < a^{8pqr} >.$$

Очевидно, що фактор-група G/X є УЩН[]-групою. Тоді завдяки теоремі 1.2.3 із [14] G/X – абелева група і тому $A = G'$. Отже, комутант G' є скінченною мінімальною неабелевою групою (групою Міллера-Морено). Но тоді завдяки будові груп Міллера-Морено G' має таку нормальну абелеву підгрупу D і такі елементи d і b , що підгрупа D є мінімальною нормальною підгрупою із G' , яка містить елемент d і $G' = D \langle b \rangle$ (див., наприклад, [4]).

Розглянемо підгрупу $B = D \langle a^m b \rangle$, де $m = 8pqr$. Вона є неперіодичною неабелевою групою і тому за означенням УЩН[НН]-груп в групі G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X_1 , що:

$$D \langle a^{ms^2} b^{s^2} \rangle \leq X_1 \leq D \langle a^m b \rangle,$$

де s – просте число, s не ділить m . Фактор-група G/X_1 , очевидно, є УЩН[]-групою, яка містить елемент порядку 8. Но тоді завдяки теоремі 1.2.3 із [14] група G/X_1 абелева і тому X_1 містить G' , що не так. Отже, G' – абелева група. Лема доведена.

Лема 2. Нехай комутант G' локально ступінчастої УЩН[НН]-групи G періодична абелева група. Тоді G' є скінченною абелевою групою.

Доведення. Нехай група G задовольняє умові леми. Оскільки G' – періодична абелева група, то враховуючи цей факт, доведення леми можна звести до розгляду наступних випадків.

Підгрупа G' міститься в центрі $Z(G)$ групи G . Неважко переконатися, що тоді в групі G існує елемент нескінченного порядку, який не міститься в $Z(G)$. Нехай елемент d має цю властивість і $b \notin C_G(d)$. Тоді існує, очевидно,

таке просте число p , що при довільному $i, i = 1, 2, \dots b \notin C_G(d^{p^i})$. Отже,

групи $B = \langle d, b \rangle, B_1 = \langle d^{p^2}, b \rangle$ і $B_2 = \langle d^{p^2}, b \rangle$ неперіодичні неабелеві. Оскільки $B' \leq Z(B)$, то $B_2 < B_1 < B$. За означенням УЩН[НН]-груп в G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що $B_2 \leq X \leq B$. Так як всі підгрупи із B мають скінченне число твірних елементів, то підгрупа $X \cap G' = X_1$ скінченна. Таким чином, фактор-група G/X нескінченна і, очевидно, є розв'язною УЩН[]-групою. Використовуючи тепер теорему 1.2.3 із [14] одержимо, що комутант K/X групи G/X скінченна група, що неможливо, оскільки індекс підгрупи X_1 в G нескінченний. Одержана суперечність показує, що даний випадок неможливий. Користуючись цим, легко

переконалися, що в групі G існують елементи нескінченного порядку, які не належать $C_G(G')$.

Підгрупа G' непримарна. Якщо G' розкладається в прямий добуток $G' = A \times B$ двох нескінченних нормальних в G підгруп A і B , то в силу сказаного вище, в групі G існує елемент a нескінченного порядку, який не належить централізатору одній із підгруп A або B , наприклад, $C_G(A)$. Легко встановити, що знайдеться таке просте число q , для якого $a^{q^i} \notin C_G(A)$ при

деякому натуральному числі i . Тоді підгрупи $A_1 = A \langle a^{q^2} \rangle$, $A_2 = A \langle a^q \rangle$ і $A_3 = A \langle a \rangle$ неперіодичні неабелеві і утворюють ланцюг $A_1 < A_2 < A_3$. За означенням УЩН[НН]-груп в G існує така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Y , що $A_1 \leq Y \leq A_3$. Фактор-група G/Y , очевидно, УЩН[]-група і за теоремою 1.2.3 із [14] має скінченний комутант. Звідси випливає, що індекс перетину $Y \cap G'$ в підгрупі G' скінченний, що суперечить припущенню про нескінченність B . Таким чином, G' не розкладається в прямий добуток $G' = A \times B$ двох нескінченних нормальних в G підгруп A і B .

Позначимо через V – добуток всіх скінченних силовських p -підгруп групи G . Тоді фактор-група G/V є УЩН[НН]-групою з нескінченним примарним комутантом. Отже, залишилось розглянути випадок, коли комутант G' є нескінченною примарною групою.

1. Підгрупа G' примарна і містить елементи як завгодно великих порядків. У цьому випадку, очевидно, $G' = U \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, де $G_k = \omega_k(G')$. За попереднім, в групі G існує такий елемент a_1 нескінченного порядку, що $a_1 \notin C_G(G')$. Но тоді для деякого n $a_1 \notin C_G(G_n)$ і тому в G за означенням УЩН[НН]-груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Z , що:

$$G_n \langle a_1^{q^2} \rangle \leq Z \leq G_n \langle a_1 \rangle$$

для деякого простого числа q . Фактор-група G/Z є УЩН[]-групою і тому за теоремою 1.2.3 із [14] має скінченний комутант, що суперечить нескінченності індексу $[G' : G_n]$. Отже, залишилось розглянути такий випадок.

2. Підгрупа G' нескінченна примарна і має обмежені в сукупності порядки елементів. Нехай вона є p -групою. Покажемо, що $A_1 = \omega(G') \leq Z(G)$. Дійсно, нехай d – елемент нескінченного порядку із G і $d \notin C_G(A_1)$ (якщо всі елементи нескінченного порядку із G належать $C_G(A_1)$, то легко показати, що $A_1 \leq Z(G)$). Для довільного елемента $a \in A_1$ і $a \notin C_G(d)$ існує, очевидно, таке просте число q , що при довільному i $d^{q^i} \notin C_G(d)$. Тому підгрупи: $\langle a, d^{q^2} \rangle$, $\langle a, d^q \rangle$ і $\langle a, d \rangle$ неперіодичні неабелеві і утворюють ланцюг:

$$\langle a, d^{q^2} \rangle < \langle a, d^q \rangle < \langle a, d \rangle.$$

Тоді за означенням $УЩН[НН]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа N , що:

$$\langle a, d^{q^2} \rangle \leq N \leq \langle a, d \rangle.$$

Очевидно, що не порушуючи загальності, можна вважати, що $\langle a, d \rangle \triangleleft G$. Оскільки фактор-група $G/\langle a, d \rangle$ є, очевидно, $УЩН[I]$ -групою і тому завдяки теоремі 1.2.3 із [14] має скінченний комутант. Звідси перетин $B = \langle a, d \rangle \cap G'$ має скінченний індекс в G' . Але тоді група B нескінченна і, значить, її твірні елементи $b_k = d^{-k} a d^k$, де k – довільне ціле число, лінійно незалежні над полем лишків по модулю p . Отже,

$$B = \dots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_{-1} \rangle \times \langle b_0 \rangle \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$$

Підгрупа

$$B_1 = \dots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_0 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$$

із B нормальна відносно підгрупи $\langle d^2 \rangle$ і тому підгрупа $B_1 \langle d^2 \rangle$ неперіодична неабелева. Тоді для деякого простого числа r підгрупи $B_1 \langle d^{2^{2r^j}} \rangle$, $j = 0, 1, 2$ неперіодичні неабелеві і тому за означенням

$УЩН[НН]$ -груп знайдеться нормальна підгрупа виду $B_1 \langle d^{2^t} \rangle$, де t – деяке просте число. Но це неможливо, оскільки підгрупа $B_1 \langle d^{2^t} \rangle$ не містить спряженого з b_0 елемента $b_1 = b_0^d = a^d$. Ця суперечність показує, що всі елементи нескінченного порядку із G містяться в $C_G(A_1)$ і тому за попереднім $A_1 \leq Z(G)$. Но тоді $G' \neq A$ і тому фактор-група $G/A_1 \in УЩН[I]$ -групою і G'/A_1 – її комутант. Якщо останній нескінченний і $A_2/A_1 = \omega(G'/A_1)$, то за доведеним вище,

$A_2/A_1 = Z(G'/A_1)$ і $A_2/A_1 \neq G'/A_1$. Продовжуючи ці міркування, побудуємо зростаючий ланцюг нормальних в G підгруп:

$$\langle 1 \rangle = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < A_{n+1} = G' < G,$$

кожний фактор A_{k+1}/A_k , $0 \leq k \leq n-1$ яких скінченний і $A_{k+1}/A_k \leq Z(G/A_k)$, а фактор A_{n+1}/A_n скінченний і неединичний.

Нехай $C/A_k = C_{G/A_n}(G'/A_n)$. Тоді:

$$\langle 1 \rangle = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < A_{n+1} = G' < C$$

центральний ряд групи G і, значить, група C нільпотентна. Очевидно, фактор-група C/A_n має скінченний індекс в G/A_n і тому містить елемент нескінченного порядку. Звідси випливає, що група C неперіодична.

Покажемо, що група C абелева. Для цього, очевидно, достатньо показати, що всі елементи нескінченного порядку належать $Z(G)$. Справді, нехай елемент d_1 нескінченного порядку із G і $a_1 \in C$, $a_1 \notin C_G(d_1)$. Тоді існує

таке просте число s , що підгрупи $\langle a_1, d_1^{s^i} \rangle$, $i = 0, 1, 2$ неперіодичні

неабелеві. За означенням $УЩН[НН]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що:

$$\langle a_1, d_1^{s^2} \rangle \leq X \leq \langle a_1, d_1 \rangle.$$

Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що $\langle a_1, d_1 \rangle \triangleleft G$. Оскільки підгрупа $\langle a_1, d_1 \rangle$ нільпотентна група із скінченним числом твірних елементів, то її максимальна періодична частина скінченна і, значить, перетин $\langle a_1, d_1 \rangle \cap G'$ має нескінченний індекс в G' . З іншої сторони, комутант фактор-групи $G'/\langle a_1, d_1 \rangle$ скінченний і тому перетин $\langle a_1, d_1 \rangle \cap G'$ має в G' скінченний індекс. Одержана суперечність показує, що підгрупа C абелева.

Нехай підгрупа C містить елемент f нескінченного порядку такий, що $f \notin Z(G)$. Підгрупа $F = \langle f^g, g \in G \rangle$ (очевидно, що F скінченна підгрупа) нормальна в G і має скінченну максимальну періодичну підгрупу. Нехай g елемент із G і $g \notin C_G(F)$. Тоді максимальна періодична підгрупа із $F\langle g \rangle$ скінченна. Легко переконатися в існуванні в F таких неперіодичних неабелевих підгруп F_1 і F_2 , що підгрупи $F_2\langle g \rangle$, $F_1\langle g \rangle$ і $F\langle g \rangle$ задовільняють умову:

$$F_2\langle g \rangle < F_1\langle g \rangle < F\langle g \rangle.$$

Тоді за означенням $УЩН[НН]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа X , що:

$$F_2\langle g \rangle \leq X \leq F\langle g \rangle.$$

Фактор-група G/X є, очевидно, $УЩН[]$ -групою і тому завдяки теоремі 1.2.3 із [14] має скінченний комутант, що як і раніше, суперечить нескінченності комутанта G' . Отже, всі елементи нескінченного порядку із C належать центру $Z(G)$. Але тоді, як легко встановити, $C \leq Z(G)$. Оскільки $G' < C$, то $G' < Z(G)$, що неможливо за попереднім твердженням. Таким чином, і в цьому випадку отримали суперечність.

Тепер із попереднього випливає, що комутант G' групи G скінченний і, значить, за лемою 1 абелевий. Лема доведена.

Теорема. Локально ступінчаста $УЩН[П]$ -група з абелевим періодичним комутантом метагамільтонова.

Доведення. В силу леми 2 комутант G' групи G скінченний. Тоді для довільної скінченної неабелевої підгрупи H із $УЩН[НН]$ -групи G скінченна підгрупа $H_1 = HG'$ нормальна в G і тому в $C_G(H_1)$ міститься нескінченна циклічна підгрупа $\langle a \rangle$. За означенням $УЩН[НН]$ -груп знайдеться така нормальна неперіодична неабелева підгрупа Z , що:

$$H\langle a^4 \rangle \leq Z \leq H\langle a \rangle.$$

Оскільки підгрупа H характеристична в Z , то $H \triangleleft G$. Таким чином, в групі G нормальні всі скінченні неабелеві підгрупи і, значить, всі періодичні неабелеві підгрупи.

Розглянемо тепер неперіодичну неабелеву скінченно породжену підгрупу M із G . Очевидно, що елементи скінченного порядку із M породжують в M скінченну нормальну підгрупу P і групу M можна представити у вигляді:

$$M = (\dots (P \lambda \langle a_1 \rangle) \lambda \dots) \lambda \langle a_n \rangle,$$

де елементи a_i мають нескінченний порядок. Якщо підгрупа P неабелева, то за означенням УЩН[НН]-груп в G існують такі нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи X_1 і Y_1 , що:

$$(\dots (P \lambda \langle a_1^{q^2} \rangle) \lambda \dots) \lambda \langle a_n^{q^2} \rangle \leq X_1 \leq (\dots (P \lambda \langle a_1 \rangle) \lambda \dots) \lambda \langle a_n \rangle$$

$$(\dots (P \lambda \langle a_1^{p^2} \rangle) \lambda \dots) \lambda \langle a_n^{p^2} \rangle \leq Y_1 \leq (\dots (P \lambda \langle a_1 \rangle) \lambda \dots) \lambda \langle a_n \rangle,$$

де q і p – різні прості числа. Оскільки, очевидно, $M = \langle X_1, Y_1 \rangle$, то $M \triangleleft G$.

Нехай тепер підгрупа P абелева і q, p – такі різні прості числа, що $(|P|, p) = ([G : C_M(P)], p) = (|P|, q) = ([G : C_M(P)], q) = 1$.

За означенням УЩН[НН]-груп в G існують такі нормальні неперіодичні неабелеві підгрупи X_2 і Y_2 , що:

$$PM^{p^2} \leq X_1 \leq M \text{ і } PM^{q^2} \leq Y_2 \leq M.$$

Оскільки, очевидно, $M = \langle X_2, Y_2 \rangle$, то $M \triangleleft G$ і, значить, всі неперіодичні неабелеві підгрупи групи G нормальні.

Таким чином, в групі G нормальні всі неабелеві підгрупи, тобто вона метабільтова. Теорема доведена. Зауважимо, що вивчення метабільтових груп розпочали М. Ф. Сесекін та Г. М. Ромаліс [17]. Воно було продовжено В. Т. Нагребєцьким [18] та О. О. Махньовим [19] і завершено у циклі робіт М. Ф. Кузенного та М. М. Семка [20–31].

Висновки. Доведено, що локально ступінчаста УЩН[НН]-група з абелевим періодичним комутантом метабільтова.

Література:

1. Dedekind R. *Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind* //Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548–561.
2. Baer R. *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe* //S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – 2. – S. 12–17.
3. Mann A. *Groups with dense normal subgroups* //Israel J. Math. – 1968. – 6, № 1. – P. 13–25.
4. Черников С. Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Семко М. М. *Будова нільпотентних УЩН[]-груп* //Класи груп з обмеженнями для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – С. 27–41.
6. Семко М. М. *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[]-груп* //Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 789–798.

7. Семко М. М. Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп //Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8. – С. 1 148–1 151.
8. Семко М. М. Про будову УЩН[J]-груп з елементарним комутантом рангу два //Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1 396–1 403.
9. Семко М. М. Про будову УЩН[J]-груп //Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1 250–1 261.
10. Семко М. М. Будова локально ступінчастих УЩН(J)-груп //Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 11. – С. 1 532–1 536.
11. Семко М. М. Будова локально ступінчастих УЩН[J]-груп //Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 383–388.
12. Семко М. М. Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.
13. Курдаченко Л.А., Кузенний М.Ф., Семко М. М. Групи з щільною системою нескінченних підгруп //Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1985. – № 3. – С. 7–9.
14. Kurdachenko L.A., Kuzennyi M.F., Semko M.M. Groups with dense systems of infinite subgroups //Dokl. Akad. Nauk SSR, Ser. A. – 1985. – № 3. – С. 7–9.
15. Kurdachenko L.A., Kuzennyi N.F., Semko N.N. Groups with a dense system of infinite almost normal subgroups //Ukrain. Math. J. – 1991. – 43, № 7. – С. 904–908.
16. Курдаченко Л.А., Кузенний Н.Ф., Семко Н. Н. Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп //Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 7. – С. 969–973.
17. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метабильтоновых группах I //Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45–49.
18. Нагребцкий В. Т. Конечные нильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна //Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – 6, № 1. – С. 80–88.
19. Махнев А. А. О конечных метабильтоновых группах //Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – 10, № 1. – С. 60–75.
20. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение разрешимых нильпотентных метабильтоновых групп //Мат. заметки. – 1983. – 34, № 2. – С. 179–188.
21. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Строение метациклических метабильтоновых групп. – К.: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22 с.
22. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. О строении бесконечных нильпотентных периодических метабильтоновых групп //Строение групп и их подгрупповая характеристика. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101–111.
23. Кузенный М. Ф., Семко М. М. Будова розв'язних метабильтонових груп // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6–9.
24. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. О строении непериодических метабильтоновых групп //Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32–40.
25. Кузенный М. Ф., Семко М. М. Метабильтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
26. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение периодических метабелевых метабильтоновых групп с неэлементарным коммутантом //Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 2. – С. 180–185.
27. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Строение периодических метабелевых метабильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два //Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 6. – С. 743–750.

28. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. О строении периодических неабелевых метегамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три //Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 2. – С. 170–176.

29. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Структура метациклических метегамильтоновых групп //Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173–183.

30. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. О метегамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два //Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 2. – С. 168–175.

31. Kuzennyi M.F., Semko M.M. *Metahamiltonian groups and their generalizations*. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1996. – 232 p.

References:

1. Dedekind, R. (1897). Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind. *Math. Ann*, 48, 548–561 [in English].

2. Baer, R. (1933). Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Akad.*, 2, 12–17 [in English].

3. Mann, A. (1968). Groups with dense normal subgroups. *Israel J. Math.*, 6, 1, 13–25 [in English].

4. Chernikov, S. N. (1980). *Gruppy s zadannymi svojstvami sistemy podgrupp [Groups with given properties of the system of subgroups]*. M.: Nauka [in Russian].

5. Semko, M. M. (1997). *Budova nil'potentnih UShhN[]-grup. Klasi grup z obmezhenjamyi dlja pidgrup [Structure of nilpotent USCHN[]-groups //Classes of groups with restrictions on subgroups]*. K.: In-t matematiki NAN Ukraïni [in Ukrainian].

6. Semko, M. M. (1997). Budova lokal'no stupinchastih nenil'potentnih UShhN[]-grup. [Construction of locally graded nonnilpotent USCHN[]-groups]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 49, 6, 789–798 [in Ukrainian].

7. Semko, M. M. (1997). Budova odnogo klasu grup z umovami shhil'nosti normal'nosti dlja pidgrup [Structure of one class of groups with normality density conditions for subgroups]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 49, 8, 1 148–1 151 [in Ukrainian].

8. Semko, M. M. (1997). Pro budovu UShhN[]-grup z elementarnim komutantom rangy dva [On the structure of USCHN[]-groups with an elementary commutator of rank two]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 49, 10, 1 396–1 403 [in Ukrainian].

9. Semko, M. M. (1998). Pro budovu UShhN[]-grup [On the structure of USCHN[]-groups]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 50, 9, 1 250–1 261 [in Ukrainian].

10. Semko, M. M. (1998). Budova lokal'no stupinchastih UShhN[]-grup [The structure of locally stepped USCHN[]-groups]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 50, 11, 1 532–1 536 [in Ukrainian].

11. Semko, M. M. (1999). Budova lokal'no stupinchastih UShhN[]-grup [Structure of locally graded USCHN[]-groups]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, 51, 3, 383–388 [in Ukrainian].

12. Semko, M. M. (1998). *Grupy z umovami shhil'nosti normal'nosti ta її uzagal'nen' dlja dejakih sistem pidgrup [Groups with density conditions of normality and its generalizations for some systems of subgroups]*. K.: In-t matematiki NAN Ukraïni [in Ukrainian].

13. Kurdachenko, L.A., Kuzennij, M.F., Semko, M. M. (1985). Grupy z shhil'noju sistemoju neskinchennih pidgrup [Groups with a dense system of infinite subgroups]. *Dop. AN URSS, Ser. A. – Add. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 1, 3, 7–9 [in Ukrainian].

14. Kurdachenko L.A., Kuzennyi M.F., Semko M.M. (1985). Groups with dense systems of infinite subgroups. *Dokl. Akad. Nauk SSR, Ser. A.*, 3, 7–9 [in English].
15. Kurdachenko, L.A., Kuzennyi, N.F., Semko, N.N. (1991). Groups with a dense system of infinite almost normal subgroups. *Ukrain. Math. J.*, 43, 7, 904–908 [in English].
16. Kurdachenko, L.A., Kuzennij, N.F., Semko, N. N. (1991). Gruppy s plotnoj sistemoj beskonechnyh pochtii normal'nyh podgrupp []. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal.*, 43, 7, 969–973 [in Ukrainian].
17. Romalis, G. M., Sesekin, N. F. (1966). O metagamil'tonovyh gruppah I. [On metahamiltonian groups I]. *Mat. zap. Ural. un-ta. – Mat. zap Ural. Univ.*, 1, 5, 3, 45–49 [in Ukrainian].
18. Nagrebeckij, V. T. (1967). Konechnye nenil'potentnye gruppy, ljubaja neabelevaja podgruppah kotoryh invariantna [Finite nonnilpotent groups, any non-Abelian subgroup of which is invariant]. *Mat. zap. Ural. un-ta. – Mat. zap Ural. Univ.*, 6, 1, 80–88 [in Ukrainian].
19. Mahnev, A. A. (1976). O konechnyh metagamil'tonovyh gruppah [On Finite Metahamiltonian Groups]. *Mat. zap. Ural. un-ta. – Mat. zap Ural. Univ.*, 10, 1, 60–75.
20. Kuzennyj, N. F., Semko, N. N. (1983). Stroenie razreshimyh nenil'potentnyh metagamil'tonovyh grupp [Structure of solvable nonnilpotent metahamilton groups]. *Mat. zametki – Mat. notes*, 34, 2, 179–188 [in Ukrainian].
21. Semko, N. N., Kuzennyj, N. F. (1983). *Stroenie metacikli–cheskih metagamil'tonovyh grupp [Structure of metacyclic metahamilton groups]*. K.: Kiev. ped. in-t [in Ukrainian].
22. Semko, N. N., Kuzennyj, N. F. (1984). *O stroenii besko–nechnyh nil'potentnyh periodicheskikh metagamil'tonovyh grupp. Stroenie grupp i ih podgruppovaja harakterizacija [On the structure of infinite nilpotent periodic metahamiltonian groups // Structure of groups and their sub-group characterization]*. K.: In-t matematiki AN USSR [in Ukrainian].
23. Kuzennij, M. F., Semko, M. M. (1985). Budova rozv'jaznih me–ta–gamil'tonovih grup [Structure of solvable meta-Hamiltonian groups]. *Dop. AN URSSR - Add. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 2, 6–9 [in Ukrainian].
24. Kuzennyj, N. F., Semko, N. N. (1986). O stroenii neperiodi–cheskih metagamil'tonovyh grupp [On the structure of nonperiodic meta-Milton groups]. *Izv. vuzov. Matematika – Izv. universities Math.*, 11, 32–40 [in Ukrainian].
25. Kuzennij, M. F., Semko, M. M. (1996). *Metagamil'tonovi grupi ta ih uzagal'nennja [Metahamiltonian groups and their generalization]*. K.: In-t matematiki NAN Ukraïni
26. Kuzennyj, N. F., Semko, N. N. (1987). Stroenie periodi–ches–kih metabelevyh metagamil'tonovyh grupp s nejelementarnym kommutantom [Structure of periodic metabelian metahamiltonian groups with a non-elementary commutator]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal.*, 39, 2, 180–185 [in Ukrainian].
27. Semko, N. N., Kuzennyj, N. F. (1987). Stroenie periodi–ches–kih metabelevyh metagamil'tonovyh grupp s jelementarnym kommutantom ranga dva [Structure of periodic metabelian metahamiltonian groups with an elementary commutant of rank two]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal.*, 39, 6, 743–750 [in Ukrainian].
28. Kuzennyj, N. F., Semko, N. N. (1989). O stroenii periodi–cheskih neabelevyh metagamil'tonovyh grupp s jelementarnym kommutantom ranga tri [On the structure of periodic non-Abelian metahamiltonian groups with an elementary commutator of rank three]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal.*, 41, 2, 170–176 [in Ukrainian].
29. Semko, N. N., Kuzennyj, N. F. (1989). *Stroenie metacikli–cheskih metagamil'tonovyh grupp //Sovremennyj analiz i ego prilozhenija [Structure of metacyclic metahamilton groups //Sovremennyi analiz i ego priloksiya]*. K.: Nauk. Dumka [in Ukrainian].

30. Kuzennyj, N. F., Semko, N. N. (1990). O metagamil'tonovyh gruppah s jelementarnym kommutantom ranga dva [On metahamiltonian groups with an elementary commutant of rank two]. *Ukr. mat. zhurn. – Ukr. mate. journal*, , 42, 2, 168–175 [in Ukrainian].

31. Kuzennyi, M.F., Semko, M.M. (1996). *Metahamiltonian groups and their generalizations*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine [in Ukrainian].