



НАЦІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**КЛАСИ ГРУП
З ОБМЕЖЕННЯМИ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Київ 1997



**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

**КЛАСИ ГРУП З ОБМЕЖЕННЯМИ
ДЛЯ ПІДГРУП**

Світлій пам'яті С. С. Левіщенка присвячено

Збірник наукових праць

Київ 1997

УДК 519.41/47

Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук. пр. / НАН України. Київ: Ін-т математики. Редакція: Кузенний М. Ф. (відп. ред.) та ін. — Київ, 1997. — 128 с.

У збірнику зібрані статті, які відносяться до фундаментального напрямку в теорії груп, мета якого — вивчення груп за властивостями їх підгруп.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів і студентів старших курсів університетів.

Редакційна колегія

М. Ф. Кузенний (відповідальний редактор)

А. Ф. Турбін

М. М. Семко

Д. Я. Требенко (відповідальний секретар)

Рецензенти

доктор фізико-математичних наук,
професор **І. В. Протасов**

доктор фізико-математичних наук,
професор **Л. А. Курдаченко**

Затверджено до друку вченою радою

Інституту математики НАН України

ВІД РЕДАКТОРА

Тематика робіт даного збірника відноситься до розділу дослідження груп з обмеженнями для підгруп. Більша частина наукових досліджень Сергія Сергійовича Левіщенка, якому присвячено це видання, належить цьому розділу теорії груп. Автори статей збірника — його колеги, учні чи учні його колег.

У даному збірнику вивчаються деякі нові види груп з заданими властивостями їх підгруп.

Значна частина робіт присвячена опису груп з обмеженнями нормальності для підгруп. Зокрема, вивчаються групи з умовами щільності нормальності для деяких підгруп та нормальністю метациклічних чи близьких до них підгруп.

Продовжуються дослідження скінченних груп з умовою мегациклічності для їх підгруп неперимарного індексу, започатковані С. С. Левіщенком.

Наводяться нові результати дослідження груп з умовами узагальненої доповнюваності для підгруп.

Класифікуються групи з певними обмеженнями на порядок їх комутанта.

Одержано узагальнення теореми Фіттинга, що визначається формациями скінченних груп.

Деякі роботи присвячені дослідженню груп з певними умовами для окремих фактор-груп.

Природно, що дані результати перспективні і будуть розвиватися.

Вважаю, що дане видання буде з увагою сприйняте спеціалістами по алгебрі.

М. Ф. Кузенний

БУДОВА НІЛЬПОТЕНТНИХ УЩН()-ГРУП

It is introduced the notion of the UDN()-group of the group G , for which there exists normal subgroup N from G and $A < N < B$, for an arbitrary pair of subgroups A and B such that A is eigen nilpotential subgroup from B . It is described the nilpotence UDN()-groups and divided 10 types of groups of such a kind.

Вводиться поняття УЩН()-групи — такої групи G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$. Описано нільпотентні УЩН()-групи з виділенням 10 типів груп такого роду.

У багатьох роботах (див., наприклад, список літератури з [1]) вивчалися групи, у яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G . Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G , якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. Вибираючи A власною чи власною немаксимальною підгрупою з B , одержимо різні поняття щільності V , яка виділяє досить широкі класи груп, що значно узагальнюють клас груп, у яких всі підгрупи мають властивість V .

Означення 1. Нехай G — група, A та B — її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A; B]$ ($(A; B)$) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $(A; B]$ чи $[A; B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

Означення 2. Модулем відрізка $|[A; B]|$ називається число його елементів.

Четко бачити, що $|[A; B]| \geq 2$ тоді і тільки тоді, коли A — власна немаксимальна підгрупа з B .

Означення 3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A; B]$, те A та B — τ -підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G та

© М.М.Семко, М.Ф.Кузенний, 1997

ка, що при $|(A; B)| > 2$: 1) $N \in (A; B)$; 2) $N \in (A; B)$; 3) $N \in [A, B)$; 4) $N \in [A; B]$.

Тоді G називається відповідно $УЩН(\tau)$ -, $УЩН(\tau)$ -, $УЩН(\tau)$ -, $УЩН(\tau)$ -групою.

Якщо τ — властивість бути будь-якою підгрупою групи G , то в позначеннях відповідних класів груп буква τ опускається і в подальшому ці класи груп будемо називати як $УЩН(\)$, $УЩН(\)$, $УЩН(\)$, $УЩН(\)$ -групи.

В даній роботі описані нільпотентні $УЩН(\)$ -групи з виділенням 10 типів груп такого роду.

Лема 1. Нехай G — довільна $УЩН(\)$ -група. Тоді справедливі твердження:

1) для будь-якого неединичного елемента g групи G справедливо $\langle g \rangle \in N \triangleleft G$, $\{ \langle g \rangle : N \}$ — просте число;

2) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2 , p — довільне просте число.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і g — її довільний неединичний елемент. Якщо $|g|$ — просте число, то $\Phi(\langle g \rangle) = N = 1 \triangleleft G$. Нехай $|g|$ — добуток не менше ніж двох простих чисел. Якщо $\langle g \rangle \triangleleft G$, то будь-яка максимальна підгрупа N з $\langle g \rangle$ характеристична в $\langle g \rangle$ і тому $N \triangleleft G$ і $\{ \langle g \rangle : N \}$ — просте число. Нехай $\langle g \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що $\langle g \rangle$ містить підгрупу A таку, що $\{ \langle g \rangle : A \} = pq$, де $p \nmid q$ — необов'язково різні прості числа. За означенням $УЩН(\)$ -груп $(A; \langle g \rangle) \in N \triangleleft G$. Оскільки $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $A < N$, то $\{ \langle g \rangle : N \}$ — просте число. Твердження 1 леми доведено повністю.

Нехай P — мінімальна нормальна підгрупа з G порядку p^α , $\alpha > 2$. Тоді за твердженням 1 леми P — елементарна абелева група, $P > B$, $|B| = p^2$. Зрозуміло, що $|(1; B)| > 2$ і за означенням $УЩН(\)$ -груп $(1; B) \in N \triangleleft G$ і, отже, $|N| \in \{p, p^2\}$, що суперечить мінімальності P в G . Твердження 2 доведено. Лему доведено.

Лема 2. Нехай G — довільна УСН()-група. Тоді справедливі твердження:

1) G не містить мінімальних нормальних підгруп, що є елементарними абелевими групами порядку більше ніж p^2 , p — довільне просте число;

2) якщо $G = P \rtimes \langle x \rangle$ — скінченна група Шмідта, P — силовська p -підгрупа з G , $\langle x \rangle \triangleleft G$, $\langle x \rangle$ — силовська q -підгрупа з G , $p \nmid q$ — різні прості числа, то $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з G , P — елементарна абелева група порядку p чи p^2 ;

3) G не містить p -підгруп вигляду $Z(x)$, де Z — група типу (p, p) , $Z \leq G'$, $[\langle x \rangle, G] = G'$, $Z \cap \langle x \rangle = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що G містить елементарну абелеву мінімальну нормальну підгрупу P і $|P| > p^2$. Тоді P містить A і $[P: A] = p^2$. Зрозуміло, що $|[A: P]| > 2$ і $|A| > 1$. За означенням УСН()-груп $[A: P] \in N \triangleleft G$. Звідси $P > N$ і $N \neq 1$, що суперечить мінімальності P в G . Твердження 1 доведено.

Нехай $G = P \rtimes \langle x \rangle$ — скінченна група Шмідта. За властивістю груп Шмідта (див., наприклад, [3]) G містить підгрупу $M = \Phi(P) \rtimes \langle x \rangle$, яка максимальна в G і $[P, \langle x \rangle] = P$. Нехай $\langle x \rangle$ — не-максимальна підгрупа з G . Тоді $|[\langle x \rangle, G]| > 2$. За означенням УСН()-груп $[\langle x \rangle, G] \in N$, $N \triangleleft G$, $N < G$ і $G = PN$, $P \triangleleft N$, $[P, \langle x \rangle] \leq [P, N] \leq P \cap N < P$, що неможливо. Отже, $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з G і тому $\Phi(P) = 1$. За твердженням 1 леми $|P| \in \{p, p^2\}$. Твердження 2 леми доведено.

Нехай G містить підгрупу $B = Z(x)$ з умовами твердження 3 леми. Тоді $|[\langle x \rangle, B]| > 2$. За означенням УСН()-груп $[\langle x \rangle, B] \in N \triangleleft G$ і $N < B$. Звідси $Z \triangleleft N$. За умовою твердження 3 леми $[\langle x \rangle, G] = G' \leq [N, G] = G' \leq N$, що суперечить співвідношенням $Z \leq G'$ і $Z \triangleleft N$. Твердження 3 леми доведено. Лему доведено.

Теорема. Нільпотентні недедекіндові УСН()-групи G вичернюються групами типів:

1) $G = (\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r — прості числа, $[u, v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z \rangle$, C — локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, Q — група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C — локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v \rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p і r — прості числа, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$ при $|z| = r$, $|u| \cdot |v| = p^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

5) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $\langle a, x \rangle = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

6) $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 1$, $|x| = p$ — просте число, $p \cdot \beta > 4$, $\langle a, b \rangle = a^p$, $\langle a, x \rangle = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

7) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число, $\langle a, x \rangle = a^2$, $\langle b, x \rangle = x^2 = a^2 b^2$;

8) $G = (((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \langle y \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = \langle a, y \rangle$, $a^2 b^2 = \langle a, x \rangle = \langle b, y \rangle$, $b^2 = y^2 = \langle b, x \rangle$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

9) $G = U \lambda X$, U — циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, $|U| > 2$, X — група кватерніонів порядку 8, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$;

10) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $\langle a, b \rangle = x^2 = a^4$, $\langle a, x \rangle = b$, $[b, x] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За лемою 1.2.2 з [1] УШН(λ)-група G є УШН[λ]-групою, яка задовольняє умову теореми 3 з [2] і може бути лише групою одного з типів 1–28 згаданої теореми.

Якщо G — група одного з типів: 1–3; 10, $|b| \in \{2, 4\}$, $z \in Z(G)$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $\{U, x\} = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$; 27 згаданої

теорема, то G — група одного з типів 1–10 розглядуваної теореми відповідно.

В групі G кожного з типів 4 та 5 теорема 3 з [2] $G' = \omega(Z(G))$, $|G'| = p$. G містить підгрупу $B = \langle v \rangle \times \langle a \rangle$, $|v| = |a| = p$, $B \cap G' = 1$. Зрозуміло, що $||1; B|| > 2$ і за означенням УЩН()-груп $(1; B) \ni N \triangleleft G$. Звідси $|N| = p$, $N \leq Z(G)$ і $N < \omega(Z(G))$, що неможливо. Отже, група G не може бути групою типу 4 чи 5 теореми 3 з [2].

Припустимо, що G — група одного з типів 6–8 згаданої теореми. Тоді $G' = \langle u \rangle$, $|u| = p^2$, $G \setminus \Phi(G)$ містить елемент d , $\langle \langle d \rangle; G \rangle = G'$ і G містить підгрупу $B = \langle u \rangle \lambda \langle d \rangle$. Ясно, що $||\langle d \rangle; B|| > 2$ і за означенням УЩН()-груп $(\langle d \rangle; B) \ni N \triangleleft G$, а тому $N = \omega(\langle u \rangle) \lambda \langle d \rangle$, і отже, N не містить $\langle u \rangle = G'$. Але $\langle \langle d \rangle; G \rangle = [N, G] = G' \leq N$, що неможливо. Отже, група G не може бути групою жодного з типів 6–8 згаданої теореми.

Нехай G — група типу 10 цієї теореми. Покажемо, що G — група типу 4 розглядуваної теореми. Дійсно, $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \lambda \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Покажемо, що $\beta < 4$. Нехай це не так, тобто $\beta \geq 4$. Тоді $\langle a \rangle \langle b \rangle = U = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $d = ab^{2^{\beta-3}}$, $|d| = 4$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Згідно з лемою 1 $\langle d^2 \rangle \triangleleft G$, а тому $d^2 \in Z(G)$. З іншого боку, $d^2 = a^2 b^{2^{\beta-2}}$, $a^2 \notin Z(G)$, $b^{2^{\beta-2}} \in Z(G)$. Суперечність. Отже, $\beta < 4$. Покажемо далі, що $z \in Z(G)$. Нехай це не так. Тоді $|z| = r$. Оскільки G — нільпотентна група і U — 2-група, то $r = 2$. При $\beta = 2$ для груп G розглядуваного типу $z \in Z(G)$ і тому будемо вважати, що $\beta = 3$. Покладемо $d = a^2 b^2$. Тоді $|d| = 2$, $d \in Z(G)$. Для груп G розглядуваних типів $[a^2, z] = [b, z] = 1$. Звідси $[d, z] = 1$ і тому G містить $B = \langle d \rangle \times \langle z \rangle$. Ясно, що $||1; B|| > 2$ і за означенням УЩН()-груп $(1; B) \ni N \triangleleft G$, $|N| = 2$ і $N \leq Z(G)$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $N = \langle z \rangle$, що й треба було довести.

Нехай G — група типу 11 теореми 3 з [2]. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Нехай це не так. Тоді $|z| = 3$, G містить підгрупу

$B = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$, $b \in Z(G)$. Ясно, що $|\langle 1; B \rangle| > 2$ і за означенням УШН()-груп $\langle 1; B \rangle \ni N \triangleleft G$, $|N| = 3$ і $N \leq Z(G)$. Отже, можна вважати, що $N = \langle z \rangle$ і G — група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 12 теореми 3 з [2]. Тоді G — неметациклічна p -група порядку p^4 , p — непарне просте число, G — нецентральною підгрупою з G типу (p, p) . Легко бачити, що G не містить підгрупу порядку p^3 і експоненти p . З цього випливає, що G — мінімальна неметациклічна група, яка при $p > 2$ може бути лише групою типу 2 теореми 1.3.3 з [1]. Звідси G — група типу 5 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 13, 14, 16, 19–21, 28 теореми 3 з [2] є підгрупа $Z(x)$, $Z = G'$, $x \in G \setminus \Phi(G)$, яка задовольняє умову твердження 3 леми 2 і за яким G не може бути УШН()-групою.

Нехай G — група одного з типів 22–24 теореми 3 з [2]. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ містить підгрупу $B = \langle a^2 \rangle \langle b \rangle$, $G' = \langle a^2 \rangle$, $|\langle b \rangle, B| > 2$, $\langle b \rangle, G = G'$. За означенням УШН()-груп $\langle b \rangle, B \ni N \triangleleft G$ і $N = \langle a^4 \rangle \langle b \rangle$. Але $\langle b \rangle, G \leq [N, G] \leq \langle a^4 \rangle$, що неможливо. Отже, G не може бути групою кожного з типів 22–24 теореми 3 з [2].

Нехай G — група типу 25 теореми 3 з [2]. Тоді G містить підгрупу $B = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$, $|\langle x \rangle, B| > 2$, $\langle x \rangle, G = \langle a \rangle$. За означенням УШН()-груп $\langle x \rangle, B \ni N \triangleleft G$ і $N \leq \langle a^2 \rangle \lambda \langle x \rangle$. Але $[N, G] = \langle x \rangle, G = \langle a \rangle \leq N$, що неможливо. Отже, G не може бути групою типу 25 теореми 3 з [2].

Нехай G — група типу 9 теореми 3 з [2]. Тоді $|\langle \Phi(X); X \rangle| > 2$. За означенням УШН()-груп $\langle \Phi(X); X \rangle \ni N \triangleleft G$. Ясно, що $|N| = 4$, $[U, N] = 1$, $N \leq C_X(U)$. G містить підгрупу $B = \langle u \rangle \lambda X$, де $|u| = 4$, $\Phi(\langle u \rangle) = \Phi(U)$. Легко бачити, що $|\langle X; B \rangle| > 2$ і за означенням УШН()-груп $\langle X; B \rangle \ni N_1 \triangleleft G$. Зрозуміло, що $N_1 = \langle u^2 \rangle \lambda x$. Тоді $\langle X, U \rangle \leq N_1 \cap U = \langle u^2 \rangle = \Phi(U)$. Ясно, що $G = V \times \langle z \rangle$, де $V = U \lambda X$ і V — недедекіндова група. Нехай $|z| = r$ і $B = X \times \langle z \rangle$. Для будь-якого елемента d з $X \setminus \Phi(X)$ маємо $|\langle d \rangle, B| > 2$. За означенням УШН()-

груп $(\langle d \rangle, B) \in N_2 \triangleleft G$, тому $[U, \langle d \rangle] \leq U \cap N_2 = 1$ і, отже, $[U, X] = 1$. Звідси $G = U \rtimes X \times \langle z \rangle$ і при циклічності $U \triangleleft G$ — група типу 2 розглядуваної теореми. Припустимо, що U — нециклічна група. Тоді U — група кватерніонів порядку 8. Нехай $U = \langle a, b \rangle$, $X = \langle x, y \rangle$, $Q = \langle ax, by \rangle$. Ясно, що Q — група кватерніонів порядку 8, Q міститься в V і $U \cap Q = 1$. Розглянемо підгрупу $B_1 = Q \times \langle z \rangle$. Як і для підгрупи B , покажемо, що $[U, Q] = 1$. Але $[ax, b] \neq 1$, що неможливо. Отже, U не є групою кватерніонів і в подальшому будемо вважати, що $z = 1$.

Якщо $[U, X] = 1$, то при циклічності $U \triangleleft G$ — група типу 2 розглядуваної теореми. Нехай U — нециклічна група, тобто U — група кватерніонів порядку 8. Тоді $G = U \rtimes X$, як і раніше, G містить підгрупу $Q = \langle ax, by \rangle$, $|\Phi(Q): Q| > 2$. За означенням УШН()-груп $(\Phi(Q): Q) \in N_3 \triangleleft G$. Зрозуміло, що $|N_3| = 4$, $G = U \rtimes Q$, $[U, Q] = \Phi(U)$, $|C_Q(U)| = 4$. Позначивши Q на X , одержимо, що G — група типу 9 розглядуваної теореми.

Якщо $[U, X] \neq 1$, то $[U, X] = \Phi(U)$ і G — група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 26 теореми 3 з [2]. Якщо U — циклічна група і $[U, X] = 1$, то G — група типу 2 розглядуваної теореми. Якщо $[U, X] \neq 1$, то $[U, X] = \Phi(U)$ і G — група типу 9 розглядуваної теореми. Якщо тепер U — група кватерніонів, то, як і раніше, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$ і G — група типу 9 розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

1. Семко М. М. Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — 90 с.
2. Семко М. М. Будова нільпотентних груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп. — К.: НДІ педагогіки АПН України, 1996. — 55 с. — Дод. в ДНТБ України 12.12.96, № 2370-Ук-96.
3. Липищенко С. С., Кузенний Н. Ф. Конечные группы с системами дисперсионных подгруп. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. — 230 с.