

**ДЕРЖАВНА ПОДАТКОВА АДМІНІСТРАЦІЯ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ДЕРЖАВНОЇ ПОДАТКОВОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ**

***Семко М.М.
Скасків Л.В.
Коваль Т.В.***

**ГРУПИ З УМОВАМИ
ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ НЕЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП**

КИЇВ – 2004

**СУЧАСНА
АЛГЕБРА**

*Семко М.М.
Скасків Л.В.
Коваль Т.В.*

**ГРУПИ З УМОВАМИ
ЩІЛЬНОСТІ
НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ НЕЦИКЛІЧНИХ
ПІДГРУП**

КИЇВ – 2004

УДК 519.41/47

Групи з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп
/Семко М.М., Скасків Л.В., Коваль Т.В. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – 94с.

Робота присвячена дослідженню узагальнень дедекіндових груп, що здійснюється завдяки різним умовам щільності нормальності для нециклічних підгруп. Іншими словами, досліджуються групи G , що мають нормальну підгрупу N , розміщену між довільними двома нециклічними підгрупами A і B групи G , де A – підгрупа з B . Різні умови щільності визначаються співвідношеннями: $A \leq N \leq B$; $A < N < B$; $A < N \leq B$; $A \leq N < B$, а також властивостями: A – підгрупа групи B ; A – власна підгрупа групи B ; A – власна немаксимальна підгрупа групи B .

Вивчено певні класи локально ступінчастих груп з умовами різних щільностей нормальності для нециклічних підгруп.

Для фахівців у галузі алгебри та студентів математичного фаху.

Бібліогр.: 140 назв.

Рецензенти: Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор **Л.А. Курдаченко** (Дніпропетровський національний університет);

доктор фізико-математичних наук, професор **М.Ф. Кузенний** (Інститут математики НАН України)

Всі права належать автору. Будь-яке використання цього видання або його частин (фрагментів), такі як копіювання, тиражування, розповсюдження і т.п. можливе тільки при наявності попередньої письмової згоди автора.

All rights reserved. No part of this issue may be reproduced by any mechanical, photographic or electronic process or the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted or otherwise copied for public or private use without written permission of the author

Затверджено до друку вченою радою
Національної академії державної податкової служби України

ISBN 966-02-0568-1

© М.М. Семко, Л.В. Скасків,
Т.В. Коваль, 2004

Наукове видання

**Микола Миколайович Семко
Лілія Василівна Скасків
Татяна Валеріївна Коваль**

**ГРУПИ З УМОВАМИ
ЩІЛЬНОСТІ
НОРМАЛЬНОСТІ
ДЛЯ НЕЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП**

Підписано до друку 30.04.2004. Формат 60 × 90/16. Папір друк. Офсет. друк.
Умовн. друк. арк. 6,15. Тираж 300 прим. Зам. 126.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
01004, м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	3
ВСТУП.....	6
Р О З Д І Л I. УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕДЕКІНДОВИХ ГРУПП (огляд літератури).....	10
1.1. Відомі результати.....	15
Р О З Д І Л II. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[$\bar{C}$]-ГРУП З ЦИКЛІЧНИМИ ЧИ МІНІМАЛЬНИМИ НЕЦИКЛІЧНИМИ ВЛАСНИМИ ПІДГРУПАМИ	19
2.1. Попередні результати.....	19
2.2. УЩН[$\bar{C}$]-групи з циклічними чи мінімальними нециклічними власними підгрупами.....	24
Р О З Д І Л III. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕДИСПЕРСИВНИХ УЩН[$\bar{C}$]-ГРУП.....	34
3.1. Недисперсивні УЩН[$\bar{C}$]-групи.....	34
3.2. Деякі наслідки.....	52
Р О З Д І Л IV. ДИСПЕРСИВНІ ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТІ УЩН[$\bar{C}$]-ГРУПИ.....	58
4.1. Деякі корисні результати.....	58
4.2. Локально ступінчасті дисперсивні УЩН[$\bar{C}$]-групи, що мають ненормальні силовські підгрупи.....	75
ЛІТЕРАТУРА.....	84

ПЕРЕЛІК ТЕРМІНІВ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$|G|$ – порядок групи G ;

$|G| < \infty$ – група G скінченна;

$|G| = \infty$ – група G нескінченна;

$[G : H]$ – індекс підгрупи H у групі G ;

$[G : H] < \infty$ – підгрупа H має скінченний індекс у групі G ;

$|x|$ – порядок елемента x ;

$|x| < \infty$ – елемент x має скінченний порядок;

$|x| = \infty$ – елемент x має нескінченний порядок;

$\pi(G)$ – множина простих дільників порядків елементів групи G ;

$X \setminus Y$ – теоретико-множинна різниця множини X і множини Y ;

власна (істинна) підгрупа – підгрупа, що не збігається з усією групою;

нетривіальна підгрупа – власна неединична підгрупа;

p-елемент – елемент, порядок якого є степенем простого числа p ;

p-підгрупа – підгрупа, яка містить лише p -елементи;

примарна група – p -група по деякому простому p ;

силовська p-підгрупа групи G – p -підгрупа групи G , яка не міститься в іншій p -підгрупі;

π -підгрупа групи G – періодична підгрупа групи G , у якій порядки всіх елементів діляться тільки на прості числа з множини π ;

$Z(G)$ – центр групи G ;

$C_B(A)$ – централізатор підгрупи A у групі B ;

$N_B(A)$ – нормалізатор підгрупи A у групі B ;

$\langle x \rangle$ – циклічна група з твірним елементом x ;

$\langle X \rangle$ – підгрупа, породжена елементами множини X ;

X^n – підгрупа, породжена n -ми степенями всіх елементів підгрупи X ;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – комутатор елементів x і y ;

$[X, Y]$ – підгрупа, породжена всіма комутаторами виду $[x, y]$, де $x \in X$, $y \in Y$;

$\Phi(G)$ – підгрупа Фраттіні групи G ;

$G' = [G, G]$ – комутант групи G ;

$H \triangleleft G$ – підгрупа H нормальна в групі G ;

$H \ntriangleleft G$ – підгрупа H ненормальна в групі G ;

$A \times B$ – прямий добуток підгруп A і B ;

$\prod A_i$ – повний прямий добуток підгруп A_i , де $i \in I$;

$A \rtimes B$ – напівпрямий добуток підгруп A і B , у якому $A \triangleleft (A \rtimes B)$;

C -підгрупа – циклічна підгрупа групи G ;

$\overline{C}$ -підгрупа – нециклічна підгрупа групи G ;

розкладна підгрупа – підгрупа, що розкладається у прямий добуток двох нетривіальних множників;

кватерніонна 2-група – група G , яка є або узагальненою групою кватерніонів або $G = A \cdot \langle b \rangle$, де A – квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in A$;

група Фробеніуса – група G , зображувана у вигляді напівпрямого добутку $G = A \rtimes B$, де $a^{-1}Ba \cap B = 1$ для будь-якого неединичного елемента $a \in A$;

черніковська група – група, яка є скінченним розширенням прямого добутку скінченного числа (в т. ч. і рівного нулю) квазіциклічних підгруп або група, яка є скінченним розширенням абелевої групи з умовою мінімальності;

локально ступінчаста група – група, у якій кожна неединична скінченно породжена підгрупа містить власну підгрупу скінченного індексу;

гамільтонова група – неабелева група, всі підгрупи якої нормальні;

дедекіндова група – абелева або гамільтонова група;

метабільтонова група – неабелева група, всі неабелеві підгрупи якої нормальні;

група Шмідта – нелінійна група з лінійними власними підгрупами;

група Міллера-Морено – неабелеві групи з абелевими власними підгрупами;

метациклічна група – розширення циклічної групи за допомогою циклічної;

відрізок (інтервал) $[A;B]$ ($(A;B)$) – множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$), де A, B – підгрупи групи G і $A \leq B$;

напівінтервал $(A;B]$ чи $[A;B)$ – множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$, де A, B – підгрупи групи G і $A \leq B$;

проміжок $\{A;B\}$ – відрізок, інтервал або напівінтервал;

модуль проміжку $|\{A;B\}|$ – число його елементів;

$[A; B] \ni N \triangleleft G$ – підгрупа N належить відрізку $[A; B]$ і нормальна в G ;

$||[A; B]| \geq 1$ – A підгрупа з B ;

$||[A; B]| > 1$ – власна підгрупа з B ;

$||[A; B]| > 2$ – A власна немаксимальна підгрупа з B ;

УЩН[]-група – група G , у якій $||[A; B]| > 2$, A – довільна підгрупа та $[A; B] \ni N \triangleleft G$.

ВСТУП

Вивчення груп за властивостями різних важливих систем їх підгруп почалося з самого моменту оформлення теорії груп як окремої абстрактної алгебраїчної дисципліни. Досить вказати тут класичні роботи *Р.Дедекінда* [1], що вивчав скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні та *Г.Міллера* і *Х.Морено* [2], які вивчали скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві. Цей напрямок отримав чітке продовження у роботі *О.Ю.Шмідта* [3], а також у роботах *О.Ю.Шмідта* [4, 5], *Р.Бера* [6, 7], *Ф.Холла* [8 – 10], *Б.Х.Неймана* [11], *О.Г.Куроша* та *С.М.Чернікова* [12], *С.М.Чернікова* [13 – 25]. Подальший розвиток теорії нескінченних груп, зокрема великий масив відомих класичних результатів, отриманих *А.Г.Курошем* та *С.М.Черніковим*, *С.М.Черніковим*, *Ф.Холлом*, *Р.Бером*, *Б.Х.Нейманом* (див., наприклад, оглядові статті [26] та [27]), зробив цей напрямок одним з важливіших для теорії груп. Велику роль у формуванні цього напрямку зіграли оглядові статті *С.М.Чернікова* [14, 18, 21], які визначили проблематику та конкретні етапи і напрямки подальших досліджень. Цей розділ теорії груп був збагачений роботами таких відомих алгебраїстів як *А.І.Мальцев*, *В.М.Глушков*, *М.І.Каргаполов*, *В.С.Чарін*, *Ю.М.Горчаков*, *Ю.І.Мерзляков*, *В.П.Шунков*, *Д.І.Зайцев*, *Г.Баумслаг*, *Г.Віландт*, *О.Кегель*, *Б.Хартлі*, *Г.Хейнекен*, *Х.Цассенхауз*. Він продовжує бути важливим та цікавим і до нашого часу; багато самих різноманітних результатів, отриманих на протязі останніх десятиріч у роботах *М.Діксона*, *М.Еванса*, *Ф.де Жіованні* та *С.Франціозі*, *Л.Ковача*, *М.Ф.Кузенного*, *Л.А.Курдаченко*, *М.Ньюелла*, *М.Ньюмена*, *М.М.Семка*, *Я.П.Сисака*, *Х.Сміта*, *А.П.Петравчука*, *М.Томкінсона*, *Дж.Уайтголда*, *Дж.Уілсона*, *Р.Філіпса*, *М.С.Чернікова* та багатьох інших, свідчать про це. Більш того, цей напрямок був розширений на топологічні групи в роботах *В.М.Глушкова*, *В.С.Чаріна*, *В.П.Платонова*, *І.В.Протасова*, на модулі над груповими кільцями (див., наприклад, оглядову статтю [28]), на алгебри Лі та інші алгебраїчні структури. До цього напрямку досліджень належить дана робота.

Основні природні системи підгруп, вплив яких на будову всієї групи вивчається досить давно, це системи всіх (власних) підгруп, всіх абелевих підгруп, всіх неабелевих підгруп, всіх нормальних

підгруп, всіх субнормальних підгруп, всіх ненормальних підгруп, всіх майже нормальних підгруп, всіх скінченно породжених підгруп, всіх скінченних підгруп, всіх циклічних підгруп, всіх нециклічних підгруп. Вплив системи нормальних підгруп почав вивчатися ще *Р.Дедекіндом* [1], що описав будову скінченних груп, всі підгрупи яких нормальні. Результати *Р.Дедекінда* були розширені на довільні групи *Р.Бером* [6].

Наступний етап був пов'язаний з вивченням груп, у яких система нормальних підгруп задовольняє умову мінімальності (груп з умовою *Min-n*) або умову максимальності (груп з умовою *Max-n*). Фундаментальні результати *С.М.Чернікова* [13], *Р.Бера* [7], *Ф.Холла* [8 – 10], *В.С.Чаріна* [29, 30,] про ці групи докорінним обличчя теорії нескінченних груп з умовами скінченності. З чином змінили іншого боку, *С.М.Черніков* звернув увагу на систему всіх ненормальних підгруп групи. У роботі [23] він розглянув групи, у яких система ненормальних підгруп задовольняє умову мінімальності, та деякі їх узагальнення. Таким чином, приходимо до груп, у яких система всіх ненормальних підгруп є дуже “малою” у деякому сенсі, а значить, її система всіх нормальних підгруп буде дуже “великою”. Це був новий підхід, який дозволяв вивчати вплив тієї чи іншої системи нормальних підгруп на будову групи, поступово, крок за кроком, “зменшуючи” її (а, значить, відповідно “збільшуючи” систему ненормальних підгруп) за допомогою різних додаткових умов. Цей підхід був реалізований у інших роботах *С.М.Чернікова* [18, 19, 20, 22], роботах *Л.А.Курдаченка*, *М.Ф.Кузенного*, *М.М.Семка* [31], *Дж. Кутоло* [32], *Дж.Кутоло* та *Л.А.Курдаченка* [33], *С.Франціозі*, *Ф. де Жіованні* та *Л.А.Курдаченка* [34], *Ф.М.Лимана* [35 – 40], *Г.М.Ромаліса* та *М.Ф.Сесекіна* [41 – 43], *В.Т.Нагребецького* [44], *О.О.Махньова* [45], *М.Ф.Кузенного* та *М.М.Семка* [46 – 56], *М.С.Чернікова* [57 – 58], *Л.А.Курдаченка* та *В.В.Пиласєва* [59], *В.І.Коваленка* [60] та інших авторів.

У роботах [17, 18] *С.М.Черніков* також звернув увагу на роль нескінченно породжених, нескінченних та нециклічних підгруп групи. Система скінченно породжених та скінчених підгруп розглядалась досить часто у зв'язку з локальними теоремами та локально визначеними класами груп. Накладання обмежень на систему скінченно породжених підгруп приводило як до нових характеристик вже вивчених класів груп, так і до появи нових цікавих класів груп. Наприклад, якщо всі скінченно породжені (навіть всі циклічні) підгрупи є нормальними, то всі її підгрупи будуть нормальними, тобто

отримуємо дедекіндові групи. Але якщо всі скінченно породжені (навіть всі циклічні) підгрупи є субнормальними, то отримуємо новий цікавий клас груп – *групи Бера*, про опис якого зараз не можна і мріяти. *С.М.Черніков* був першим, хто поставив питання про вивчення впливу на будову групи систем нескінченних, нескінченно породжених та нециклічних підгруп. Зокрема у роботі [18] він поставив питання про будову груп, всі нециклічні підгрупи яких нормальні або майже нормальні. Відповіді на перше питання була присвячена серія робіт *Ф.М.Лимана* [35 – 40], а відповідь на друге питання була отримана в роботі *С.Франціозі*, *Ф. де Жіованні* та *Л.А.Курдаченка* [34].

У роботі [61] *А.Манн* почав розглядати нове цікаве поняття щільної системи підгруп. Точніше він почав розглядати групи, які задовольняють наступну умову: для будь-якої пари таких підгруп H , K групи G , що $H \leq K$ та H не максимальна в K існує нормальна (відповідно субнормальна) підгрупа S з властивістю $H < S \leq K$. Поняття щільності було узагальнено *С.М.Черніковим* (див. [25, розділ 7]). Він же ввів поняття умов щільності і строгої щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т.д.) системи підгруп Σ . Властивість V підгруп групи G називається щільною (строго щільною) по відношенню до системи підгруп Σ , якщо для будь-яких підгруп A і B із Σ , де A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує така підгрупа H із властивістю V , що $A \leq H \leq B$ ($A < H < B$). Ці поняття широко використовувалися в роботах *С.М.Чернікова* і його учнів (*М.С.Черніков*, *Л.А.Курдаченко*, *М.Ф.Кузенний*, *В.В.Пиласв*, *В.Е.Горецький*, *М.М.Семко*).

Різноманітні умови щільності нормальності для системи підгруп Σ групи G у роботах *М.М.Семка* [62 – 79] базуються на поняттях: відрізка $([A; B])$ –, інтервалу $((A; B))$ –, напівінтервалу $((A; B])$ –, напівінтервалу $([A; B))$ підгруп групи G , кожний із яких є множиною всіх підгруп X групи G таких, що A і B із Σ , A – підгрупа з B і відповідно: $A \leq X \leq B$; $A < X < B$; $A < X \leq B$; $A \leq X < B$. Потужність відрізка, інтервалу, півінтервалу підгруп групи G називається його модулем, порядком або довжиною і позначається відповідно: $|[A; B]|$; $|(A; B)|$; $|(A; B]|$; $|[A; B)|$. За означенням $|[A; B]| \geq 1$,

тобто A – підгрупа з B , при $||[A; B]|| > 1$ A – власна підгрупа з B , при $||[A; B]|| > 2$ A – власна немаксимальна підгрупа з B .

У цій термінології *А. Манн* [61] розглядав групи, у яких Σ – система всіх підгруп групи G і для кожного відрізка $[A; B]$ такого, що $||[A; B]|| > 2$ справедливе співвідношення $[A; B) \ni N \triangleleft G$.

В.Е. Горецький [80] вивчав нескінченні групи, у яких $||[A; B]|| > 2$ і Σ – система всіх: нескінченних –, нескінченних абелевих –, нескінченних неабелевих підгруп групи G , для яких $[A; B) \ni N \triangleleft G$.

М.М. Семко [62 – 79] описав локально ступінчасті групи G , у яких $||[A; B]|| > 1$, Σ – система всіх підгруп групи G , $[A; B) \ni N \triangleleft G$ та їх підкласи.

Якщо Σ – система всіх нециклічних підгруп групи G , $||[A; B]|| > 1$ і $[A; B) \ni N \triangleleft G$, то одержимо класи груп з різноманітними умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп. Зауважимо, що ці класи груп є нові і вони значно узагальнюють клас дедекіндових груп [1, 6], класи груп з різними умовами щільності нормальності для всіх підгруп [62 – 79], клас груп з нормальними нециклічними підгрупами [35, 36].

Метою даної роботи є дослідження наступних класів груп з умовами різноманітної щільності нормальності для нециклічних груп:

- $\Sigma H[\overline{C}]$ -груп, тобто груп G , у яких $||[A; B]|| > 1$, A – нециклічна підгрупа та $[A; B) \ni N \triangleleft G$;
- $U\Sigma H[\overline{C}]$ -груп та їх підкласів, тобто груп G , у яких $||[A; B]|| > 2$, A – нециклічна підгрупа та $[A; B) \ni N \triangleleft G$.

РОЗДІЛ І

УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕДЕКІНДОВИХ ГРУП (огляд літератури)

У цьому розділі дається огляд літератури, присвяченої дослідженням узагальнень дедекіндових груп. Наведено короткий виклад відомих результатів які використовуються в подальшому.

Як уже зазначалось у вступі, групи G , у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності вивчались багатьма авторами. Ми не будемо говорити про прості групи, що мають тривіальну систему нормальних підгруп, а наведемо короткий огляд досліджень груп з більш широкими системами нормальних підгруп.

Легко впевнитись, що гамільтонові групи можна означити як неабелеві групи, у яких нормальні всі абелеві підгрупи або навіть лише всі циклічні підгрупи. Тому, бажаючи одержати розширення класу гамільтонових груп, слід так звужувати пов'язану з ним визначальну систему підгруп Σ , щоб при цьому з неї випадали деякі або всі циклічні підгрупи. Таким шляхом виділяється клас $\bar{H}$ -груп, для якого визначальна система підгруп Σ складається з нециклічних підгруп і клас $\overline{HA}$ -груп, для якого визначальна система підгруп Σ складається лише з абелевих нециклічних підгруп.

Обидва класи груп вивчені *Ф.М. Лиманом* у роботах [35 – 40] за певних додаткових умов. Для $\bar{H}$ -груп такими умовами є їх неабелевість і наявність у групі нормальної системи з локально скінченними факторами. Повний опис $\bar{H}$ -груп із названими обмеженнями засвідчує, що у періодичному випадку нескінченні $\bar{H}$ -групи нільпотентні класу 2 і є центральними розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп лише з однією нециклічною силовською підгрупою, яка є або групою кватерніонів, або елементарною абелевою групою порядку p^2 . У неперіодичному випадку такі групи мають комутант порядку p і є або напівпрямим добутком циклічної p -групи і нескінченної циклічної групи, або прямим добутком групи кватерніонів і нескінченної циклічної групи чи групи, ізоморфної адитивній групі 2-ових дробів.

Опис скінченних $\overline{H}$ -груп одночасно з *Ф.М. Лиманом* одержав також *А.Д. Устюжанінов* [81]. Зауважимо також, що суттєву роль при описі $\overline{H}$ -груп відіграють p -групи і особливо 2-групи. В цьому можна провести певну аналогію з гамільтоновими групами.

З результатів, що відносяться до скінченних $\overline{H}$ -груп, легко випливає, що клас скінченних $\overline{H}$ -груп містить всі неабелеві групи з одним класом спряжених ненормальних підгруп [4], а також 7 з 8 типів груп з двома класами спряжених ненормальних підгруп [5] і значно багатший вказаних класів.

Отже, при звуженні визначальної системи підгруп Σ класу гамільтонових груп до сукупності одних лише нециклічних підгруп одержуємо істотний приріст класу гамільтонових груп як за рахунок скінченних так і за рахунок нескінченних груп, при цьому у розширенні уже будуть і мішані групи, але груп без скруту немає.

Неперіодичні групи без скруту є серед $\overline{HA}$ -груп. Клас $\overline{HA}$ -груп можна уявляти як такий, що одержується розширенням класу $\overline{H}$ -груп шляхом звуження визначальної системи підгруп Σ до системи, яку складають всі абелеві нециклічні підгрупи.

Клас $\overline{HA}$ -груп значно багатший класу $\overline{H}$ -груп. Наприклад, якщо всі скінченні $\overline{H}$ -групи розв'язні, то серед скінченних $\overline{HA}$ -груп є і нерозв'язні. Конкретним прикладом такої групи є нерозв'язна група Фробеніуса, побудована *В.Д. Мазуровим* [82].

Інший шлях узагальнення класу $\overline{H}$ -груп – це звуження його визначальної системи всіх нециклічних підгруп Σ до системи всіх неабелевих підгруп. При цьому одержимо клас груп, у яких нормальні всі неабелеві підгрупи. Ці групи розпочав вивчати *Г.М. Ромаліс* у 1962 році і він назвав їх *метагамільтоновими*.

Різні властивості метагамільтонових груп отримали *Г.М. Ромаліс* та *М.Ф. Сесекін* [41 – 43], *С.М. Черніков* [19, 20, 25]. Зокрема, *С.М. Черніков* встановив скінченність і примарність комутанту локально ступінчастих метагамільтонових груп. *В.Т.*

Нагребецький [44] описав скінченні ненільпотентні метагамільтонові групи, *О.О. Махньов* [45] – скінченні метагамільтонові p -групи з нецентральною комутантом. Повний опис локально ступінчастих метагамільтонових груп одержали *М.Ф. Кузенний* та *М.М. Семко* [46–56].

При вивченні нескінченних груп з тим чи іншим визначальним обмеженням природно до визначальної системи підгруп Σ відносити деяку підмножину множини всіх нескінченних підгруп, зокрема, і всю множину нескінченних підгруп групи. Різні класи нескінченних неабелевих груп з нормальністю як визначальним обмеженням вивчав *С.М. Черніков*.

У цьому напрямку перш за все виділяється клас нескінченних неабелевих груп, у яких нормальні всі нескінченні підгрупи. Такі групи названі *С.М. Черніковим* INH -групами [17]. При додатковій умові існування у групі нормальної системи із скінченними факторами INH -групи є або гамільтоновими групами, або недедекіндовими розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп. Отже, будь-яка INH -група, як і гамільтонова група, є періодичною групою.

Якщо визначальну систему всіх нескінченних підгруп Σ звузити до системи всіх нескінченних абелевих підгруп, то можна досліджувати нескінченні неабелеві групи, у яких множина нескінченних абелевих підгруп непорожня і містить лише нормальні підгрупи. Ці групи названі *С.М. Черніковим* IH -групами і вивчались ним у роботах [16, 22]. Серед IH -груп уже є неперіодичні групи.

Залишивши нормальність в якості визначального обмеження і звузивши систему всіх нескінченних підгруп до системи всіх неабелевих нескінченних підгруп, приходимо до класу $\overline{IH}$ -груп, які вивчались *С.М. Черніковим* [15, 19, 20, 25]. Отже, $\overline{IH}$ -групи можна розглядати як узагальнення INH -груп і нескінченних метагамільтонових груп.

Вивчення $\overline{IH}$ -груп продовжили *М.Ф. Кузенний*, *С.С. Левіщенко*, *М.М. Семко*, *І.Я. Субботін* [83 – 85]. Конструктивний опис локально ступінчастих $\overline{IH}$ -груп можна знайти у роботі *М.Ф. Кузенного* та *М.М. Семка* [56].

К. Хоббі [86] вивчав скінченні p -групи, у яких нормальні нормалізатори всіх підгруп.

Дедекіндові групи можна означити як групи, у яких нормальні всі максимальні абелеві підгрупи рангу 1. У випадку скінченних груп ця умова означає нормальність всіх максимальних циклічних підгруп. Послаблюючи цю умову нормальності до умови нормальності всіх циклічних підгруп складених порядків, одержимо деякий клас груп, близьких до дедекіндових. Скінченні p -групи такого типу вивчав *Л.С.*

Казарін [87], а скінченні групи, порядок яких ділиться тільки на 3 простих числа – Г. Берштейн [88].

В.Т.Нагребецький [89] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі ненільпотентні підгрупи. Конструктивний опис значного узагальнення таких груп одержали М.Ф. Кузенний та М.М. Семко у роботі [56].

І.Я. Субботін [90, 91] вивчав групи, у яких нормальна кожна підгрупа комутанта.

Г.Жордано [92] розглядав неабелеві локально скінченні групи, у яких кожна підгрупа або збігається зі своїм нормалізатором, або нормальна. Конструктивний опис узагальнень таких груп одержано в [93 – 95].

Значно загальніша ситуація досліджувалась у роботах М.С. Чернікова [58, 59], де вивчались неабелеві групи, у яких нормальні всі абелеві підгрупи, що не збігаються зі своїми нормалізаторами (AD -групи). Встановлені критерії локальної скінченності нескінченної періодичності AD -групи та належності не локально скінченної періодичності групи до класу AD -групи.

М.М. Гольденберг, М.Ф. Сесекін [97] досліджували нескінченні p -групи з нормальними не цілком розщепленими підгрупами. Тут, зокрема, описані p -групи з локально циклічним центром і комутантом порядку p , експонента яких більша p .

М.М. Семко [98] вивчав нескінченні неабелеві групи, у яких нормальна кожна підгрупа, що має нескінченний перетин з деякою фіксованою нескінченною підгрупою групи. Встановлені зв'язки таких груп з INH -групами С.М. Чернікова та отримано опис таких груп при умові їх локальної ступінчастості.

А.В.Крайчук [99] вивчав нескінченні неабелеві групи, у яких нормальні всі підгрупи нескінченного індексу.

Л.А. Курдаченко, В.В. Пилаєв [100] дали опис локально майже розв'язних груп, у яких нормальна кожна підгрупа, що не має скінченної системи твірних елементів.

А. Фаттахі [101] досліджував властивості скінченних груп, у яких кожна підгрупа нормальна або абнормальна. Абнормальною називається така підгрупа A групи G , коли для будь-якого елемента g групи G виконується умова $g \in \langle A, g^{-1}Ag \rangle$.

Г. Уолс [102] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі максимальні підгрупи силовських підгруп. Кожна група цього класу є розширенням нормальної холлівської нільпотентної підгрупи за допомогою циклічної групи.

Ще один метод виділення системи нормальних підгруп Σ бере свій початок в роботі *Д. Кенніта* [103], а в загальному вигляді для довільних систем підгруп і довільного визначального обмеження сформульований *С.М. Черніковим* [24]. Ідея цього методу полягає в тому, що у групі виділяється така підгрупа S (сепаруюча підгрупа), що кожна підгрупа з деякої системи підгруп Σ , яка не міститься в S , задовольняє визначальному обмеженню.

До цього напрямку досліджень відносяться роботи *А.Ф. Баранника* [104 – 106], у яких вивчались групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами, які не містяться в деякій підгрупі, та групи, у яких нормальні всі підгрупи, що не містяться в жодній із двох заданих підгруп. Повний опис груп, що досліджувались *Д. Кеннітом* [103], наведено у роботах *М.Ф. Кузенного* та *М.М. Семка* [56, 107].

Е. Бест і *О. Таусскі* [108] розпочали вивчення неабелевих груп, у яких всі субнормальні підгрупи нормальні, тобто групи з умовою транзитивності нормальності (T -груп). Ці дослідження продовжили *В. Гашиуц* [109], *М.М. Абрамовський* і *М.І. Каргаполов* [110] та *Д.С. Робінсон* [111, 112].

Ф. Джіовані та *С. Франчіозі* [113] вивчали нескінченні неабелеві групи з умовою транзитивності нормальності для нескінченних підгруп (IT -групи). Кожна нескінченна T -група є IT -групою, але обернене твердження хибне навіть для метабелевих груп.

М.Ф. Кузенний та *І.Я. Субботін* [114, 115] вивчали групи з умовою транзитивності нормальності для неабелевих підгруп. Такі групи виявились розв'язними, а у випадку локально нільпотентних груп вони є нільпотентними метагамільтоновими групами.

М.Ф. Кузенний та *Л.І. Зузук* [116] одержали конструктивний опис періодичних груп з умовою транзитивності нормальності для неабелевих підгруп при умові, що локально нільпотентний корадикал групи є абелевою підгрупою. *А. Манн* [117] вивчав скінченні нерозв'язні групи, у яких кожна підгрупа нормальна або в групі, або в максимальній підгрупі. *Б. Хунтерт* [118] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі 3-максимальні підгрупи.

1.1. Відомі результати

Твердження 1.1.1 [119, теорема 12.5.4]. Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q – група кватерніонів порядку 8, D – елементарна абелева 2-група, A – періодична абелева група без інволюцій.

Для дедекіндових груп G справедливі твердження:

1) якщо G містить елемент нескінченного порядку чи порядку 8, то $G' = 1$;

2) циклічні 2-підгрупи порядку більше двох містять G' .

Означення 1.1.1 [120]. Підгрупа $\omega(G)$ групи G , породжена всіма елементами з G , порядок яких є просте число, називається нижнім шаром групи G .

Твердження 1.1.2. [120]. Нижній шар групи G є характеристичною тому нормальною підгрупою групи G .

Означення 1.1.2 (див., наприклад, [120, § 2]). Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G , якщо в G не існує такої підгрупи B , що $A < B < G$.

Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G .

При $n > 0$ підгрупа A групи G називається n -максимальною в G , коли вона є максимальною підгрупою деякої $(n - 1)$ -максимальної підгрупи A групи G .

Скінченні неодиначні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиначні та деякі нескінченні групи, наприклад, квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Твердження 1.1.3 (теорема з [121]). Скінченні ненадрозв'язні групи, які мають власні неметациклічні підгрупи і у яких всяка 2-максимальна підгрупа метациклічна, вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = P \rtimes Q$ – група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|Q| = q$;

2) $G = P \rtimes Q$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G , $|P| = p^2$, Q – циклічна q -група, $[P, \Phi(Q)] = P$, $[P, \Phi(\Phi(Q))] = 1$;

3) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle c \rangle P_1$, $c \in Z(G)$, $c \notin P_1$, $c^p \in \Phi(P_1)$, P_1 – група кватерніонів чи $|P_1| = p^2$, $|Q| = q$, $P_1 \rtimes Q$ – група Шмідта;

4) $G = P \rtimes Q$, $|P| = p^4$, $P' = 1$, $|\Phi(P)| = p^2$, $\Phi(P) \rtimes Q$ та $G/\Phi(P)$ – групи Міллера-Морено;

5) $G = P \rtimes Q$, P – група кватерніонів чи елементарна абелева група порядку p^2 , $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\beta$, $P \rtimes \langle a \rangle$ – група Шмідта, $[P, b] = 1$, $|[a, b]| \leq q$, $q > 2$;

6) $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G , $|P| = p^2$, $P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $\langle x \rangle \rtimes Q$ та $\langle y \rangle \rtimes Q$ – групи Міллера-Морено, $|R| = r$, $[Q, R] = Q$, $1 < [Q, R] < P$;

7) $G = (R \times P) \rtimes Q$, P – група кватерніонів чи $|P| = p^2$, $P \rtimes Q$ – група Шмідта, $|R| = r$ чи r^2 , якщо $|R| = r^2$, то $R \rtimes Q$ – група Шмідта;

8) $G = P \rtimes (Q \times R)$, $|P| = p^2$, $|R| = r$, $P \rtimes Q$ та $P \rtimes R$ – групи Міллера-Морено;

9) $G = A \rtimes (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $|A| = 4$, $|a| = 3^\beta$, $0 < \beta < 3$, $A \rtimes \langle a \rangle$ – група Міллера-Морено, $|b| = 2$, $\langle [a, b] \rangle = \langle a \rangle$, $A \rtimes \langle b \rangle$ – група діедра;

10) $G = A \cdot (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle)$, $A \triangleleft G$, A – група кватерніонів, $|a| = 3^\beta$, $0 < \beta < 3$, $A \rtimes \langle a \rangle$ – група Шмідта, $|b| = 2^\alpha$, $0 < \alpha < 3$, $\langle [a, b] \rangle = \langle a \rangle$, $\Phi(\langle b \rangle) \leq \Phi(A)$, $A \langle b \rangle / \Phi(A)$ – група Міллера-Морено;

11) $G \cong SL(2, p)$ чи $G \cong PSL(2, p)$, де $p = 5$ чи $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

В групах типів 1 – 11 p, q, r – різні прості числа.

Т в е р д ж е н н я 1.1.4 (теорема 1.1.1 з [62]). Локально ступінчасті групи G , що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 і p (p – просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, у яких усі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M , і G ізоморфна групі одного з типів:

1) G – циклічна група порядку p^α , p – просте число, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ – 2-максимальна підгрупа з G ;

2) $|G| = pq$, p і q – необов'язково різні прості числа, $M = 1$ – 2-максимальна підгрупа з G ;

3) G – група кватерніонів, $M = \Phi(G)$ – 2-максимальна підгрупа з G ;
 4) G – циклічна група порядку $p^\alpha q$, p і q – різні прості числа, $\alpha > 1$, M – максимальна підгрупа з G , $|M| = p^{\alpha-1} q$;

5) $G = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = p^\alpha$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x, z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $[G:G'] > 4$, $M = \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle$ – максимальна підгрупа з G ;

6) $G = R \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r^\alpha > 2$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, r і q – різні прості числа, $\langle x \rangle$ – максимальна підгрупа з G , $M = R \rtimes \langle x^q \rangle$ – максимальна підгрупа з G .

Твердження 1.1.5 [122]. Локально ступінчасті групи G з циклічними власними підгрупами вичерпуються групами типів:

- 1) G – циклічна чи квазіциклічна група;
- 2) G – група типу (p, p) ;
- 3) G – група кватерніонів порядку 8;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p > 2$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, p і q – прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $G' = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$.

Твердження 1.1.6 [122]. Локально ступінчасті групи Шмідта вичерпуються групами типу $G = P \rtimes Q$, $|P| = p^\alpha$, $p^\alpha > 2$, $G' = P$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, p і q – різні прості числа, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, $\Phi(P) \times Q$ – максимальна підгрупа з G , $\Phi(P) = P'$, експонента P належить $\{p, 4\}$, $[P : \Phi(P)] = p^\Delta$, Δ – показник p за модулем q .

Твердження 1.1.7 [122]. Локально ступінчасті групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:

- 1) $G = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $a^2 = b^2 = [a, b]$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 1$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;
- 3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$, $p(\alpha + \beta) > 4$;
- 4) G – група з твердження 1.1.6, у якій $\Phi(P) = 1$.

Означення 1.1.3 (означення 1.2.3 з [62]). УЩН[]-групою називається така група G , у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A – власна немаксимальна підгрупа з B , існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$.

Т в е р д ж е н н я 1.1.8 (теорема 1.3.1 з [62]). Локально ступінчасті УЩН[]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P – нормальна в G силовська p -підгрупа порядку $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, $G' = P$, Q – ненормальна циклічна силовська q -підгрупа з G порядку q^β , $\beta > 0$, p і q – різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leq Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^\Delta$, $\Delta \in \{0, 1\}$, $\alpha - \Delta$ – показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ – максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ та вичерпуються групами таких типів:

- 1) P – група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;
- 2) $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;
- 3) P – елементарна абелева група, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Т в е р д ж е н н я 1.1.9 (наслідок 1.3.3 з [62]). Локально ступінчасті УЩН[]-групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:

- 1) G – група кватерніонів порядку 8;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;
- 3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p(\alpha + \beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$;
- 4) $G = P \rtimes Q$ – група Шмідта типу 3 твердження 1.1.8.

Т в е р д ж е н н я 1.1.10 (наслідок 1.2.1 з [62]). Недедекіндова локально ступінчаста УЩН[]-група є розв'язною черніковською групою.

Т в е р д ж е н н я 1.1.11 (наслідок 2.2.7 з [62]). Комутант G' нільпотентної УЩН[]-групи є абелевою групою.

Т в е р д ж е н н я 1.1.12 (теорема 1.2.3 з [62]). Недедекіндові локально ступінчасті УЩН[]-групи G мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиначних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з таких типів:

- 1) G – скінченна нільпотентна група;
- 2) G – скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група;
- 3) G має центральну квазіциклічну p -підгрупу R , для якої G/R – скінченна дедекіндова група.

РОЗДІЛ II

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[$\overline{C}$]-ГРУП З ЦИКЛІЧНИМИ ЧИ МІНІМАЛЬНИМИ НЕЦИКЛІЧНИМИ ВЛАСНИМИ ПІДГРУПАМИ

У цьому розділі викладаються деякі результати про групи з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп. Завдяки проміжку (відрізок, інтервал, напівінтервал) вводиться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості деяких з них (теорема 2.1.1). Наведено опис локально ступінчастих УЩН[$\overline{C}$]-груп з циклічними чи мінімальними нециклічними власними підгрупами (теорема 2.2.1).

2.1. Попередні результати

Означення 2.1.1 (означення 1.2.1 з [62]). Нехай G – група, A і B – її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A; B]$ ($(A; B)$) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Напівінтервалом $(A; B]$ чи $[A; B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

Проміжком $\{A; B\}$ називається відрізок, інтервал або напівінтервал.

Означення 2.1.2 (означення 1.2.2 з [62]). Модулем проміжку $|\{A; B\}|$ називається число його елементів.

Означення 2.1.3. Нехай у групі G для довільного відрізка $[A; B]$, де A та B – нециклічні підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

- 1) при $|\{A; B\}| \geq 1$: 1.1) $N \in [A; B]$;
- 2) при $|\{A; B\}| > 1$: 2.1) $N \in (A; B]$; 2.2) $N \in [A; B)$; 2.3) $N \in [A; B]$;
- 3) при $|\{A; B\}| > 2$: 3.1) $N \in (A; B)$; 3.2) $N \in (A; B]$; 3.3) $N \in [A; B)$;
- 3.4) $N \in [A; B]$.

Тоді G називається відповідно: $H(\overline{C})$ - , $\text{ЩН}(\overline{C})$ - , $\text{ЩН}[\overline{C})$ - , $\text{ЩН}[\overline{C}]$ - , $\text{УЩН}(\overline{C})$ - , $\text{УЩН}[\overline{C})$ - , $\text{УЩН}[\overline{C}]$ -групою.

Всім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через $K(H(\overline{C}))$, $K(\text{ЩН}(\overline{C}))$, $K(\text{ЩН}[\overline{C}))$, $K(\text{ЩН}[\overline{C}])$, $K(\text{УЩН}(\overline{C}))$, $K(\text{УЩН}[\overline{C}))$, $K(\text{УЩН}[\overline{C}])$.

Т е о р е м а 2.1.1. Група G тоді і тільки тоді є $H(\overline{C})$ -групою, коли в ній нормальні всі нециклічні підгрупи.

Для локально ступінчастих груп G наступні твердження еквівалентні:

а) G – $H(\overline{C})$ -група;

б) в G нормальні всі нециклічні підгрупи;

в) G – група одного з типів:

1) G – дедекіндова група;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^a$, $p^a > 2$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^{a-1}} \rangle$;

3) $G = A \times B$, A – група кватерніонів порядку 8, B – локально циклічна 2-група, $|B| > 2$ чи локально циклічна група без скруту, що містить таку підгрупу $\langle b \rangle$, для якої неодиначна факторгрупа $B/\langle b \rangle$ є квазіциклічною 2-групою ;

4) $G = P \rtimes \langle b \rangle$, $P = G'$, P – силовська p -підгрупа з G типу (p, p) , будь-який елемент із $\langle b \rangle$ індукує на P тотожний або незвідний автоморфізм, $|b| < \infty$;

5) $G = P \rtimes \langle b \rangle$, P – група кватерніонів порядку 8, що є силовською 2- підгрупою з G , $P = G'$, $|b| < \infty$;

6) $G = \langle z \rangle \times (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|a| = 8$, $|b| = 4$, $a^4 = b^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

7) $G = \langle z \rangle \times ((C \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , C – локально циклічна p -група чи група кватерніонів порядку 8, $|a| = |b| = | [a, b] | = p$, $[C, \langle b \rangle] = 1$;

8) $G = \langle z \rangle \times ((\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \cdot \langle b \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|c| = 3$, $|a| = |b| = 9$, $[a, b] = c$, $[c, b] = a^3 = b^6$;

9) $G = \langle z \rangle \times ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cdot \langle x \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

10) $G = \langle z \rangle \times ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle))$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|a| = |b| = |x| = |y| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

11) $G = \langle z \rangle \times (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle z \rangle \times ((\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \langle x \rangle)$, $\langle z \rangle$ – скінченна холлівська підгрупа з G , $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, x] = b$, $[a, b] = a^4 = x^2$, $[b, x] = 1$.

Доведення. За означенням 2.1.3 група G тоді і тільки тоді $H(\bar{C})$ -група, коли в ній нормальні всі нециклічні підгрупи. З цього випливає, що твердження а) і б) еквівалентні.

Покажемо, що еквівалентні твердження б) та в). Дійсно, нехай група G має властивість б). Покажемо, що тоді для G справедлива властивість в), тобто G – група одного з типів 1 – 12 згаданої властивості. Якщо G – дедекіндова група, то вона група типу 1. Нехай G – недедекіндова група. Зрозуміло, що тоді $G' \neq 1$.

Припустимо, що всі власні підгрупи із G циклічні. Тоді за твердженням 1.1.5 G – скінченна мінімальна нециклічна група. Оскільки G – недедекіндова група, то в силу відомого результату (див., наприклад, теорему 2.1.3 з [123]) G – група типу 2.

Нехай група G містить власні нециклічні підгрупи. Тоді завдяки [35, 36] G – $\bar{H}$ -група. Тепер використовуючи опис $\bar{H}$ -груп [35, 36] одержимо, що G – група одного з типів 2 – 12 розглядуваної теореми.

Отже, із властивості б) випливає властивість в).

Покажемо, що із властивості в) випливає властивість б), тобто, що група G одного із типів 1 – 12 локально ступінчаста і що в ній нормальні всі нециклічні підгрупи. Очевидно, що кожна група G із згадуваних типів груп розв'язна і, значить, локально ступінчаста. Покажемо, що в G нормальна будь-яка нециклічна підгрупа X . Для груп G типу 1 це очевидно. Нехай G – група типу 2. Тоді $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $p^2 > 2$, $G' = \omega(\langle a \rangle)$. Оскільки X – нециклічна група, то $X \cap \langle a \rangle \neq 1$. Звідси $G' < X$ і тому $X \triangleleft G$, що й потрібно було довести.

Для груп G кожного з типів 3 – 12 властивість $X \triangleleft G$ установлена в [35, 36].

Отже властивість б) випливає із властивості в). Теорему доведено.

Л е м а 2.1.1. *Всі 8 класів груп введені в означенні 2.1.3 замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.*

Клас $H(\overline{C})$ -груп належить всім іншим 8 класам груп, а клас $УЩН[\overline{C}]$ -груп містить всі інші 8 класів груп.

Клас $ЩН(\overline{C})$ -груп належить перетину класів $ЩН(\overline{C})$ - та $УЩН[\overline{C}]$ -груп, кожний з яких належить класу $УЩН[\overline{C}]$ -груп.

Клас $УЩН(\overline{C})$ -груп належить перетину класів $УЩН(\overline{C})$ - та $УЩН[\overline{C}]$ -груп, кожний з яких належить класу $УЩН[\overline{C}]$ -груп.

Доведення. Нехай G – група одного з 8 класів груп леми, X – довільна підгрупа з G і $A \leq X \leq B$, де A – нециклічна підгрупа. За умовою леми маємо нормальну підгрупу N з G , яка задовольняє відповідні співвідношення означення 2.1.3. Зрозуміло, що $N \triangleleft X$ і тому всі класи груп замкнені за підгрупами.

Нехай $\overline{G}$ – довільна фактор-група одного з розглядуваних класів груп, $\overline{A} \leq \overline{B} \leq \overline{G}$, де $\overline{A}$ – нециклічна підгрупа. Тоді $A \leq B \leq G$, де A і B – повні прообрази $\overline{A}$ і $\overline{B}$ в групі G відповідно і G – група одного з класів означення 2.1.3. За цим же означенням G має нормальну підгрупу N , яка задовольняє відповідні співвідношення даного означення. Зрозуміло, що образ $\overline{N}$ в $\overline{G}$ підгрупи N з G теж задовольняє співвідношення означення 2.1.3. Отже, всі розглядувані класи груп замкнені за фактор-групами.

Зрозуміло, що група кватерніонів восьмого порядку Q буде групою кожного з розглядуваного класу груп. Нехай $G = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4 \times Q_5$, де $Q_i = \langle a_i, b_i \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Покладемо $d = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Тоді $|d| = 4$, $d^2 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2$. Нехай $A = \langle d \rangle \times \langle a_1^2 \rangle$, $B = \langle d \rangle \times \langle a_1^2 \rangle \times \langle a_2^2 \rangle \times \langle a_3^2 \rangle \times \langle a_4^2 \rangle$. Тоді $[A; B] \geq 2$. Припустимо, що $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $a_5^2 \notin N$. Ясно, що $[\langle d \rangle, G] \leq N$. Звідси $[d, b_5] = a_5^2 \in N$, що неможливо. Отже, G не є $УЩН[\overline{C}]$ -групою і тому жоден із розглядуваних класів груп не є замкненим за прямими добутками.

Інші твердження леми безпосередньо впливають з означення 2.1.3. Лему доведено.

З а у в а ж е н н я 2.1.1. Нескінченні неабелеві групи з циклічними власними підгрупами, приклади яких побудовані Ольшанським О.Ю. [124, 125], є також групами з означення 2.1.3. Опис груп такого роду є окремою, самостійною і складною задачею. В зв'язку з цим в роботі введені класи груп розглядаються при додатковій умові локальної ступінчастості.

Т в е р д ж е н н я 2.1.1. Локально ступінчасті групи G з власними циклічними немаксимальними підгрупами вичерпуються групами таких типів:

1) G – розв'язна група з циклічними власними підгрупами (G – група одного з типів 1 – 4 твердження 1.1.5);

2) $G = P \times Q$, P – квазіциклічна p -група, $|Q| = q$, p і q – різні прості числа;

3) G – скінченна група порядку pqr , що містить нециклічні підгрупи порядку pq , p , q , r – не обов'язково різні прості числа;

4) $G = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 ;

5) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| = q$, q – непарне просте число;

6) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = pr$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] \neq 1$, $x^q \in Z(G)$, p і r – не обов'язково різні прості числа, q – просте число, $q \notin \pi(\langle a \rangle)$;

7) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x^q \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$;

8) $G = \langle a \rangle \rtimes Q$, $|a| = p$, p – непарне просте число, Q – група кватерніонів порядку 8, $[\langle a \rangle, Q] = \langle a \rangle$.

Дане твердження впливає з роботи Коваленка В.І. (Коваленко В.І. Деякі класи груп з метациклічними підгрупами // Вісник Чернігівського держ. пед. ун-ту. Сер. пед. науки.–2001.–Вип. 4.–С. 69 – 72).

Н а с л і д о к 2.1.1. Локально ступінчасті групи G з власними циклічними немаксимальними підгрупами розв'язні і $G''' = 1$.

Наслідок безпосередньо впливає з твердження 2.1.1.

2.2. УЩН $\overline{C}$ -групи з циклічними чи мінімальними нециклічними власними підгрупами

Л е м а 2.2.1. *Нескінченна локально ступінчаста група G , у якій всі власні немаксимальні підгрупи локально метациклічні, локально метациклічна.*

Доведення леми безпосередньо випливає з результатів роботи [126].

Т е о р е м а 2.2.1. *Всі групи G , у яких будь-яка власна немаксимальна підгрупа циклічна чи мінімальна нециклічна, є УЩН $[\overline{C}]$ -групами і локально ступінчасті групи такого роду вичерпуються групами типів:*

1) G – розв’язна група з циклічними власними немаксимальними підгрупами;

2) G – скінченна дисперсивна група порядку $pqrs$, що містить нециклічні підгрупи порядку pq , p, q, r, s – не обов’язково різні прості числа;

3) G – група кватерніонів порядку 2^5 ;

4) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, P – група кватерніонів порядку 2^3 , $|x| = q$, q – непарне просте число;

5) $G = P \rtimes X$, P – група кватерніонів порядку 8, $|X| = qr$, q, r – не обов’язково різні непарні прості числа, при $[P, X] = 1$ X – циклічна група;

6) $G = P \times Q$, P – квазіциклічна p -група, Q – циклічна група порядку qr , q і r – не обов’язково різні, відмінні від p , прості числа;

7) $G = A \rtimes Q$, $|A| = p$ – непарне просте число, Q – група кватерніонів порядку 2^4 , $[A, Q] = A$;

8) $G = A \rtimes Q$, A – циклічна група порядку pr , p і r – не обов’язково різні непарні прості числа, Q – група кватерніонів порядку 8, $[A, Q] \neq 1$;

9) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 3$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $Z(G) = \langle b^{q^3} \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $/x/ = r$ – просте число, відмінне від p та q , $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle \times \langle x \rangle$;

11) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 1$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $/x/ = rs$, r і s – не обов'язково різні, відмінні від p та q , прості числа, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle x \rangle$;

12) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 1$, $/x/ = s$ – просте число, $s \neq q$, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle x \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, при $\beta > 2$ $s \neq p$ і $s \neq r$;

14) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $/a/ = prs$, p , r , s – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^\beta$, $\beta > 1$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $s \equiv 1 \pmod{q}$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

15) $G \cong S_4$;

16) $G = A \cdot (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $A \triangleleft G$, A – група кватерніонів порядку 8, $/a/ = 3$, $/b/ = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \lambda \langle a \rangle$ – група Шмідта, $A \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 ;

17) $G = SL(2, 5)$ або $PSL(2, 5)$, чи $PSL(2, p)$, де $p > 11$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, числа $p - 1$ та $p + 1$ не діляться на добуток чотирьох простих чисел;

18) $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)$, $/a/ = p$, $/b/ = q^2$, $/x/ = r^2$, p , q , r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle x^r \rangle$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – група, у якої всі власні немаксимальні підгрупи є циклічними чи мінімальними нециклічними. В подальшому таку групу будемо називати X -групою.

Покажемо, що X -група G є УЩН[$\overline{C}$]-групою. Дійсно, нехай довільний відрізок підгруп задовольняє умову $|[A; B]| > 2$, де A – нециклічна підгрупа. Покажемо, що $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Якщо $A \triangleleft G$

чи $B \triangleleft G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \not\triangleleft G$, $B \not\triangleleft G$. Звідси $B < G$. Зрозуміло, що існує підгрупа C із співвідношенням $A < C < B$ і, значить, C – власна немаксимальна підгрупа з G . За умовою теореми всі власні підгрупи з C циклічні і тому A – циклічна група, що не так. Отже, завжди $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Звідси X -група $G \in \text{УЩН}[\overline{C}]$ -групою.

Нехай далі G – локально ступінчаста X -група. Покажемо, що G – група одного з типів 1 – 18 розглядуваної теореми. Якщо в G циклічні всі власні немаксимальні підгрупи, то легко бачити, що вона група типу 1. Тому в подальшому G містить власні немаксимальні мінімальні нециклічні підгрупи.

Припустимо спочатку, що $|G| = \infty$. Нехай $G' \neq 1$. Тоді завдяки лемі 2.2.1 G містить 2-породжену неабелеву метациклічну підгрупу H . Якщо G – нескінченно породжена група, то H може бути власною підгрупою деякої власної немаксимальної підгрупи з G . Звідси і за умовою теореми H – циклічна група, що не так. Отже, G – скінченно породжена група, яка внаслідок леми 2.2.1 метациклічна і тому за теоремою 1.2.1 з [56] $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| \cdot |b| = \infty$ і $b^{-1}ab = a^k \neq a$. З цього випливає, що в $\langle a \rangle$ можна вибрати такий елемент u , а в $\langle b \rangle$ – такий елемент v , що $\langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$ – неабелева група, яка є власною підгрупою деякої власної немаксимальної підгрупи з G , що неможливо. Отже, $G' = 1$.

Припустимо, що G – періодична група. Тоді при скінченності всіх силовських підгруп з $G / \pi(G) = \infty$, $G = A \times B$, де A та B – нескінченні локально циклічні і, значить, нециклічні підгрупи. Зрозуміло, що A – власна підгрупа деякої власної немаксимальної підгрупи з G і тому циклічна, що не так. Отже, G має нескінченну силовську p -підгрупу P . Звідси завдяки умові теореми, леми 2.2.1 і теореми 1.2 з [126] $G = P \times Q$, де P – квазіциклічна група, Q – її холлівське доповнення. За умовою теореми P не може бути власною підгрупою жодної з власних немаксимальних підгруп групи G і тому Q – скінченна група, порядок якої не ділиться на добуток трьох простих чисел. Ясно, що Q – циклічна група. Оскільки G не є групою типу 1, то $|Q| = qr$, де q і r – не обов'язково різні прості числа. Звідси G – група типу 6.

Нехай тепер G – неперіодична група. Оскільки G не є групою типу 1, то вона нециклічна. Тоді завдяки теоремі 1.2 з [126] в G існує такий елемент нескінченного порядку g , що $G / \langle g \rangle$ – періодична нескінченно породжена локально циклічна група. Зрозуміло, що $G / \langle g \rangle$ – група типу 1 чи 6 розглядуваної теореми. Звідси $G / \langle g \rangle$ містить квазіциклічну p -підгрупу $P / \langle g \rangle$ і тому P – локально циклічна група без скруту. Але тоді для будь-якого простого $q \neq p$ підгрупа $D = P^{q^4}$ – нециклічна і має в P індекс q^4 . Звідси D – власна підгрупа деякої немаксимальної підгрупи з G і, значить, циклічна. Суперечність. Отже, G не може бути неперіодичною групою.

Таким чином, випадок, коли $|G| = \infty$, розглянутий повністю.

Нехай далі $|G| < \infty$. Тоді внаслідок надрозв'язності скінченної мінімальної нециклічної в G всі 2-максимальні підгрупи надрозв'язні. Звідси і внаслідок дисперсивності скінченної групи G , у якій всі власні підгрупи надрозв'язні [123, теорема 5.4.3,] одержуємо, що G – дисперсивна чи мінімальна недисперсивна група.

Якщо $|G|$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел, то в G циклічна всяка 2-максимальна підгрупа і, значить, G – група типу 1. Нехай $|G|$ ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Можливі випадки: 1) G – недисперсивна група; 2) G – дисперсивна група.

Випадок 1. У цьому випадку G – мінімальна недисперсивна група. Припустимо спочатку, що G – розв'язна група.

Нехай жодна силовська підгрупа з G не належить G' . Тоді G задовольняє умову теореми 2.2.4 з [123] і тому G містить ненадрозв'язну групу Шмідта $S = A \rtimes \langle b \rangle$, що є власною немаксимальною підгрупою з G , де A – силовська p -підгрупа з S , $\langle b \rangle$ – силовська q -підгрупа з S . За умовою теореми A – циклічна група. Але тоді S – надрозв'язна група, що не так. Отже, G' містить хоча б одну силовську підгрупу з G і тому G задовольняє умову теореми 2.2.2 з [123]. За твердженнями цієї теореми $G = AD$, $A \triangleleft G$, A – нециклічна p -підгрупа, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, Q – силовська q -підгрупа з G , p і q – різні прості числа, $A \cap \langle b \rangle \leq \Phi(A) \leq Z(G)$, $[A, \langle b \rangle] \leq \Phi(A)$, $C_D(A) \leq \Phi(Q) \times \langle b^q \rangle$, D/Φ – група Шмідта. Зрозуміло, що A – нециклічна власна немаксимальна підгрупа з G . Тоді вона 2-максимальна підгрупа з G , що є мінімальною

нециклічною групою і тому A – група типу (p, p) або A – група кватерніонів порядку 8. Оскільки A – 2-максимальна підгрупа з G і $A \rtimes Q \neq G$, то $|Q| = q$ і, значить, $\Phi(Q) = 1$ і тому D – група Шмідта. Отже, $Q = \langle a \rangle$, $|a| = q$, $D = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і, значить, $q \equiv 1 \pmod{p}$, $q > p$.

Ясно, що A – максимальна підгрупа силовської p -групи $P = A \langle b \rangle$. Звідси $[P : A] = p$ і, значить, $A \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle \leq \Phi(A)$, $|\Phi(A)| \leq 2$. З умови $C_Q(A) \leq \Phi(Q) = 1$ маємо, що $A \rtimes \langle a \rangle = S$ – нелінійна група, у якій A – 2-породжена силовська p -підгрупа, $\langle a \rangle$ – силовська q -підгрупа, $q > p$.

Нехай M – підгрупа Шмідта з S . Тоді без порушення загальності можна вважати, що $M = A_1 \rtimes \langle a \rangle$, де $A_1 \triangleleft M$, A_1 – силовська p -підгрупа з M . При $q > p$ показник p за модулем q більший 1. Але тоді за твердженням 2.1.1 з [123] $A_1 / \Phi(A_1)$ – елементарна абелева група, порядок якої не менше ніж p^2 . Звідси $A_1 = A$ і тому S – група Шмідта.

Якщо A – група типу (p, p) , то $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$, q ділить $p + 1$, і при $q > p$ $p = 2$, $|b| = 2$, $q = 3$ і тоді G – група типу 15.

Нехай A – група кватерніонів восьмого порядку. Тоді $q = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $[A, \langle b \rangle] \leq \Phi(A)$. З останнього співвідношення маємо, що силовська 2-підгрупа $P = A \langle b \rangle$ порядку 2^4 і тому завдяки теоремі 12.5.1 з [119] вона група кватерніонів. Зрозуміло, що $b^2 \in Z(G)$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ і G – група типу 16.

Нехай тепер G – нерозв'язна група. Тоді $\Phi(G)$ – нелінійна власна немаксимальна підгрупа з G . Зрозуміло, що G має власні неметациклічні підгрупи, G – ненадрозв'язна, а всі її 2-максимальні підгрупи метациклічні. Звідси G задовольняє умову твердження 1.1.3 і може бути лише групою типу 11 цього твердження, тобто $G \cong SL(2, p)$ чи $G \cong PSL(2, p)$, де $p = 5$ чи $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$. При $p = 5$ G – група типу 17.

Нехай $p > 5$. Тоді $p > 11$. Нехай спочатку $G \cong PSL(2, p)$. Тоді за теоремою Діксона (див., наприклад, [127, теорема 8.2.7]) G має максимальні підгрупи $M_1 \cong \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – група Фробеніуса, $|a| = p$, $|b| = (p - 1)/2$, $M_2 \cong \langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$ – група діедра, $|d| = 2$, $M_3 \cong \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$ – група діедра, $|c| = (p + 1)/2$.

Нехай q – просте число, що ділить $(p - 1) / 2$. Тоді в M_1 існує підгрупа Фробеніуса і, значить, нециклічна підгрупа $K_1 = \langle a \rangle \rtimes \langle u \rangle$, де $|u| = q$, $u \in \langle b \rangle$. Звідси $K_1 = M_1$ або K_1 – максимальна підгрупа надрозв'язної групи M_1 , і тому $[M_1 : K_1]$ не ділиться на добуток двох простих чисел. Отже, $[M_1 : K_1] = [\langle b \rangle : \langle u \rangle]$ і тому $p - 1$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел.

Нехай r – просте число, що ділить $(p + 1)/2$. Тоді в M_3 існує підгрупа діедра і, значить, нециклічна підгрупа $K_3 = \langle v \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де $v \in \langle c \rangle$, $|v| = r$. Звідси $K_3 = M_3$ або K_3 – максимальна підгрупа з M_3 і в надрозв'язній групі M_3 $[M_3 : K_3] = [\langle c \rangle : \langle v \rangle]$ не ділиться на добуток двох простих чисел. З цього випливає, що $p + 1$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і тому G – група типу 17.

Нехай $G \cong SL(2, p)$. Тоді $Z(G)$ містить елемент f , $|f| = 2$, $G/\langle f \rangle \cong PSL(2, p)$, $G/\langle f \rangle$ містить максимальні підгрупи $M_1/\langle f \rangle$, $M_2/\langle f \rangle$ і $M_3/\langle f \rangle$, що мають наведену вище будову. Оскільки $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, то силовські 2-підгрупи з G ізоморфні силовським 2-підгрупам з M_i ($i = 2, 3$) і ізоморфні групам кватерніонів порядку 8. Звідси $M_1 = \langle a \rangle \rtimes \langle b_1 \rangle$, $|b_1| = p - 1$, $M_2 = \langle b_1 \rangle \langle d_2 \rangle = \langle b_3 \rangle \rtimes Q$, $Q = \langle b_2 \rangle \langle d_2 \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $\langle b_2 \rangle$ – силовська 2-підгрупа з $\langle b_1 \rangle$, $\langle b_3 \rangle$ – її холлівське доповнення в $\langle b_1 \rangle$, $M_3 = \langle c_1 \rangle \langle d_2 \rangle = \langle c_3 \rangle \rtimes Q_1$, де $Q_1 = \langle c_2 \rangle \langle d_2 \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $\langle c_2 \rangle$ – силовська 2-підгрупа з $\langle c_1 \rangle$, $\langle c_3 \rangle$ – її холлівське доповнення в $\langle c_1 \rangle$. Зрозуміло, що підгрупа $\langle a \rangle \rtimes \langle b_3 \rangle$ не може бути максимальною підгрупою в M_3 і, значить, вона циклічна. Оскільки $M_3/\langle f \rangle$ – група Фробеніуса, то $b_3 = 1$ і тому $\langle b_1 \rangle = \langle b_2 \rangle$, $|b_1| = 4$, $p - 1 = 4$. Але тоді $p = 5$, що неможливо. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку G – дисперсивна група. Якщо $|G| = p^4 qrs$, то G – група типу 2. Нехай далі $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел.

Припустимо спочатку, що всі силовські підгрупи з G циклічні. Тоді завдяки теоремі 12.5.1 з [119] $G = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, де $\langle u \rangle$ і $\langle v \rangle$ – холлівські підгрупи з G , $\langle u \rangle = G'$. Оскільки G містить нециклічну 2-максимальну підгрупу X , то $G' \neq 1$. Зрозуміло, що $X = \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де $\langle c \rangle = X \cap \langle u \rangle$ і без порушення загальності можна вважати,

що $\langle d \rangle = X \cap \langle v \rangle$. Звідси X – група типу 4 твердження 1.1.5, внаслідок якого $\langle c \rangle = p$, $\langle d \rangle = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $p \nmid q$ – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $Z(X) = \langle d^q \rangle$, $X' = \langle c \rangle$. Оскільки X – 2-максимальна підгрупа надрозв'язної групи G , то як відомо $[G : X]$ – добуток двох простих чисел.

Нехай $\langle b \rangle$ – силовська q -підгрупа з $\langle v \rangle$. Тоді $d \in \langle b \rangle$, $\langle b \rangle = q^\beta$, $\beta > 1$. Ясно, що $\langle v \rangle = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$, де $\langle x \rangle$ – холлівське доповнення $\langle b \rangle$ в $\langle v \rangle$. Оскільки $d \in \langle b \rangle$, то $\langle x \rangle$ не ділиться на добуток трьох простих чисел. Не порушуючи загальності можна вважати, що $d = b^{q^\Delta}$, $\Delta \geq 0$ і $\langle b^{q^{\Delta+1}} \rangle = Z(X)$. Зрозуміло, що $\langle u \rangle : \langle c \rangle$ не ділиться на добуток трьох простих чисел.

Нехай $\langle u \rangle : \langle c \rangle = 1$. Тоді $\langle u \rangle = \langle c \rangle = G'$. Покладемо $G' = \langle a \rangle$. Тоді $\langle a \rangle = p$, $X = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)$, $[G : \langle x \rangle] = rs$, $r \nmid s$ – не обов'язково різні прості числа, $r \neq p$, $s \neq p$.

Припустимо, що $\Delta = 0$. Тоді $\beta = \gamma$, $b^q \in Z(G)$, $\langle X \rangle = rs$. Оскільки $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел, то $\beta > 1$ і, значить, $\langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$ – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Звідси $\langle a \rangle, \langle x \rangle = 1$ або $r = s$, або $\langle a \rangle, \langle x \rangle = \langle a \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $x^r \in Z(G)$.

Нехай $\langle a \rangle, \langle x \rangle = 1$. Тоді $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$ і тому G – група типу 11 розглядуваної теореми.

Нехай $\langle a \rangle, \langle x \rangle \neq 1$. Тоді $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – мінімальна нециклічна група, яка при $\beta > 1$ може бути лише 2-максимальною. Звідси $\beta = 2$ і G – група типу 18.

Припустимо, що $\Delta = 1$. Тоді $\beta > 1$, $[G : X] = qr$, r – просте число, $r \neq q$, $r \neq p$, $\langle x \rangle = r$. Оскільки $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел, то $\beta > 2$, $b^{q^2} \in Z(X)$ і $A \rtimes \langle x \rangle$ – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Звідси $[a, x] = 1$ і $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$ – група типу 10 теореми.

Припустимо тепер, що $\Delta > 1$. Тоді $[G : X] = q^2$ і, значить, $\Delta = 2$, $\langle x \rangle = 1$. Звідси $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q^3} \rangle$, $\beta > 3$ і G – група типу 9 теореми.

Отже, випадок $\langle u \rangle : \langle c \rangle = 1$ розглянутий повністю.

Нехай далі $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = r$. Тоді $/u/ = pr$, $[\langle v \rangle : \langle d \rangle] = s$.

Припустимо, що $\Delta = 0$. Тоді $/x/ = s$, $b^q \in Z(X)$, $\beta > 1$. Звідси $\langle c \rangle \lambda \langle x \rangle$ – власна підгрупа деякої 2-максимальної підгрупи з G і, значить, $[c, x] = 1$. При $r = p$ $[u, x] = 1$. Покладено $u = a$. Тоді $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle x \rangle$ і G – група типу 13 розглядуваної теореми. При $p \neq r$ $\langle u \rangle = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$, де $\langle y \rangle$ – силовська r -підгрупа з $\langle u \rangle$. Зрозуміло, що $\langle y \rangle \triangleleft G$, $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$ – циклічна група. Звідси $[y, x] = 1$, $x \in Z(G)$ і знову G – група типу 13.

Нехай $\Delta > 0$. Тоді $[\langle v \rangle : \langle d \rangle] = q$, $\langle b^{q^2} \rangle = Z(X)$, $\beta > 2$, $/x/ = 1$. Покладемо $u = a$ і одержимо, що $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$. При $p = r$ $[a, b^{q^2}] = 1$ і, значить, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$ і тому G – група типу 12. Нехай $p \neq r$. Тоді $\langle a \rangle = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$, $\langle y \rangle = r$, $\langle y \rangle \triangleleft G$. Якщо $\langle y \rangle \lambda \langle b^{q^2} \rangle$ – нециклічна група, то вона 2-максимальна підгрупа з G , що неможливо. Отже, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$ і G – група типу 12. Випадок $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = r$ розглянутий повністю.

Нехай, нарешті, $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = rs$. Оскільки X – 2-максимальна підгрупа з G , то $\langle v \rangle = \langle d \rangle = \langle b \rangle$. Покладемо $u = a$. Тоді $G = \langle a \rangle$

$\lambda \langle b \rangle$. Легко показати, що $\langle b^q \rangle = Z(G)$. Отже, G – група типу 14 розглядуваної теореми. Випадок, коли всі силовські підгрупи з G циклічні розглянутий повністю.

Нехай тепер G містить нециклічну силовську p -підгрупу P . Розглянемо можливі випадки: 2.1) G – надрозв'язна група; 2.2) G – ненадрозв'язна група.

Випадок 2.1. Припустимо, що P містить підгрупу N типу (p, p) . Оскільки G містить 2-максимальні нециклічні підгрупи, то N – максимальна чи 2-максимальна підгрупа з G . Але тоді в надрозв'язній групі G індекс $|G : N|$ не ділиться на добуток трьох простих чисел і, значить, $|G|$ не ділиться на добуток п'яти простих чисел, що суперечить нашому припущенню. Отже, завдяки теоремі 12.5.1 [119] P – група кватерніонів порядку 2^γ , $\gamma > 2$.

При $\gamma > 5$ P містить групу кватерніонів M порядку 8, яка міститься в деякій 3-максимальній підгрупі з G , що неможливо. Отже, $\gamma < 6$.

Нехай $\gamma = 5$. Тоді M – 2-максимальна підгрупа з P . Але тоді в надрозв'язній групі $G/P = G$ і G – група типу 3 теореми. Нехай $\gamma < 5$. Тоді $G = X \rtimes P$, де X – холлівська підгрупа з G непарного порядку, порядок якої не ділиться на добуток трьох простих чисел. Оскільки $|P| > 4$, то X – підгрупа деякої 3-максимальної підгрупи з G і, значить, циклічна. Звідси $X = \langle x \rangle$. Якщо $|x|$ – просте число, то $\gamma = 4$ і G – група одного з типів 4, 7 теореми. Нехай $|x|$ – не просте число. Тоді P – група кватерніонів порядку 8 і G – група одного з типів 5, 8 теореми. Випадок 2.1 розглянутий повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку G задовольняє умову твердження 1.1.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 11 згаданого твердження. Оскільки G – дисперсивна група, то вона може бути лише групою одного з типів 1 – 8 даного твердження. За припущенням про порядок групи G вона не може бути групою типу: 1; 2, при $\beta = 2$; 3, при $|P| = p^3$; 6, при $|Q| = q$; 8.

Нехай G – група типу 2 твердження 1.1.3. Тоді $G = P \rtimes Q$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G , $|P| = p^2$, Q – циклічна q -група, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 2$. Оскільки P – нециклічна, то P – 2-максимальна підгрупа з G і, значить, $[G : P] = q^2$, що неможливо.

Нехай G – група типу 3. Тоді $G = P \rtimes Q$, $|P| > p^3$, $P = \langle c \rangle P_1$, $c \in Z(G)$, $c^p \in \Phi(P_1)$, P_1 – група кватерніонів чи $|P_1| = p^2$, $|Q| = q$, $P_1 \rtimes Q$ – група Шмідта. Звідси P_1 – група кватерніонів. Але тоді P містить підгрупу типу $(2, 2)$, що не є 2-максимальною підгрупою з G . Суперечність. Отже, група G не може бути групою типу 3.

Нехай G – група типу 4 твердження 1.1.3. Тоді G містить підгрупу N типу (p, p) , що належить деякій 3-максимальній підгрупі з G , що неможливо.

Нехай G – група типу 5. Тоді $G = P \rtimes Q$, P – група кватерніонів чи елементарна абелева група порядку p^2 , Q – нециклічна q -група, $|Q| > q$. Зрозуміло, що P – нециклічна власна немаксимальна підгрупа з G . Звідси P – 2-максимальна підгрупа з G , що є мініальною

нециклічною групою. Отже, $\beta = 1$, P – група кватерніонів і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 6 твердження 1.1.3. Тоді $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G , $|P| = p^2$, $P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $\langle x \rangle \rtimes Q$ і $\langle y \rangle \rtimes Q$ – групи Міллера-Морено, $|R| = r$, $[Q, R] = Q$, $1 < [P, R] < P$. Зрозуміло, що $P \rtimes R$ – власна нециклічна підгрупа з G , яка не може бути мінімальною нециклічною групою і, значить, вона максимальна в G . Звідси $|Q| = q$, що неможливо.

Нехай G – група типу 7 твердження 1.1.3. Тоді $G = (R \times P) \rtimes Q$, P – група кватерніонів чи $|P| = p^2$, $P \rtimes Q$ – група Шмідта, $|R| = r$ або r^2 , якщо $|R| = r^2$, то $P \rtimes Q$ – група Шмідта. Оскільки R – підгрупа деякої 3-максимальної підгрупи з G , то $|R| = r$ і оскільки $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел, то P – група кватерніонів. Отже, $G = P \rtimes X$ – група типу 5 розглядуваної теореми, де $X = R \rtimes Q$. Всі випадки розглянули. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група, у якій всі власні немаксимальні підгрупи циклічні чи мінімальні нециклічні. Покажемо, що G – УЩН $[\bar{C}]$ -група. Для цього досить показати, що для довільного відрізка підгруп $[A; B]$, де A – нециклічна підгрупа, $|[A; B]| > 2$ має місце співвідношення $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Дійсно, якщо $B = G$, то покладемо $N = B$ і все доведено. Тому нехай $B < G$. За припущенням A – власна немаксимальна підгрупа з B і, значить, циклічна. Суперечність, яка показує, що G – УЩН $[\bar{C}]$ -група.

Нехай далі G – група одного з типів 1 – 18 теореми. Тоді, очевидно, G – розв'язна або скінченна і, значить, локально ступінчаста група. Для завершення доведення достатності залишається показати, що в G всяка власна немаксимальна підгрупа X є циклічною чи мінімальною нециклічною групою. В групі G типу 1 всі власні немаксимальні підгрупи циклічні, тому далі розглянемо групи типів 2 – 18 теореми. Завдяки результатам з [123, § 5.3] легко отримати, що всі 3-максимальні підгрупи групи G циклічні. Звідси випливає, що X – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Достатність доведено. Теорему доведено.

РОЗДІЛ III

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕДИСПЕРСИВНИХ УЩН[$\overline{C}$]-ГРУП

Розділ III повністю присвячений опису локально ступінчастих недисперсивних УЩН[$\overline{C}$]-груп та їх підкласів (теореми 3.1.1, 3.1.3, 3.2.2, 3.2.3)

3.1. Недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи

О з н а ч е н н я 3.1.1 (див., наприклад, [123]). Група G називається дисперсивною, якщо вона має силовський ряд, тобто ряд нормальних в G підгруп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_i \leq G_n = G$ таких, де n – ціле невід'ємне число, що при $n = 0$ $G = 1$, при $n = 1$ G – p -група, при $n > 1$, $0 < i < j \leq n$, G_i/G_{i-1} – p_i -група, G_j/G_{j-1} – p_j -група, p_i та p_j – різні прості числа.

При цьому число n називається довжиною силовського ряду.

О з н а ч е н н я 3.1.2 (див., наприклад, [123]). Якщо група G не має силовського ряду, то вона називається недисперсивною.

О з н а ч е н н я 3.1.3 (див., наприклад, [123]). Недисперсивна група, у якій всі власні підгрупи дисперсивні, називається мінімальною недисперсивною групою.

О з н а ч е н н я 3.1.4 (див., наприклад, [123]). Локально дисперсивною групою називається група, у якій дисперсивні всі скінченно породжені підгрупи.

З наведених означень випливає

Н а с л і д о к 3.1.1. Всі дисперсивні, мінімальні недисперсивні та локально дисперсивні групи періодичні.

Л е м а 3.1.1. Локально ступінчасті УЩН[$\overline{C}$]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P – нормальна в G силовська p -підгрупа порядку p^α , $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, $G' = P$, Q – ненормальна циклічна силовська q -підгрупа з G порядку q^β , $\beta > 0$, p і q – різні прості числа, $P' = \Phi(P) \leq Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^\Delta$, $\Delta \in \mathbb{N}$, $\alpha - \Delta =$

показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ – максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ та вичерпуються групами типів:

- 1) $P' = \Phi(P) = 1$;
- 2) $|\Phi(P)| = |P'| = p$, $\alpha = 3$.

Доведення . Необхідність. Нехай G задовольняє умови леми. Відомо [122], що локально ступінчасті групи Шмідта скінченні. Звідси і завдяки твердженню 1.1.8 можна вважати, що $\alpha \geq 3$. Можливі випадки : 1) $P' = 1$; 2) $P' \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку P – мінімальна нормальна підгрупа з G . Припустимо, що $\alpha > 4$. Тоді існує такий відрізок підгруп $[A; B]$, що $|[A; B]| > 2$, $|A| = p^2$, $|B| = p^4$, $B < P$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G . Отже, $\alpha \leq 4$ і G – група типу 1.

Випадок 2. У цьому випадку завдяки лемі 2.1.1 G/P' – група типу 1 розглядуваної леми. Звідси $\alpha - \Delta \in \{2, 3, 4\}$. При $\alpha - \Delta \in \{3\}$ $P' = 1$, що не так. Тому в подальшому будемо вважати, що $\alpha - \Delta \in \{2, 4\}$.

Нехай $\alpha - \Delta = 2$. Тоді за властивістю груп Шмідта (див., наприклад, твердження 1.1.6) $\Delta = 1$ і G – група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай тепер $\alpha - \Delta = 4$. Можливі випадки: 2.1) $P/\Phi(P)$ містить елемент a , порядок якого дорівнює p ; 2.2) для будь-якого елемента a з $P/\Phi(P)$ $|a| > p$.

Випадок 2.1. У цьому випадку і завдяки твердженню 1.1.6 $\exp(P) = p$. Звідси G містить відрізок підгруп $[A; B]$ такий, що $|[A; B]| > 2$, $|A| > p$, $B < P$, $\Phi(A) < A$ і A – нециклічна підгрупа. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Ясно, що $\Phi(P) < N$ і $N/\Phi(P)$ – неединична нормальна підгрупа з $G/\Phi(P)$, яка строго належить $P/\Phi(P)$, що неможливо. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку $p = 2$, $P/\Phi(P)$ містить елемент a порядку 4. Якщо $A = \Phi(P) \cdot \langle a \rangle$ – нециклічна підгрупа, то G містить відрізок підгруп $[A; B]$ такий, що $|[A; B]| > 2$. Тоді, як у випадку 2.1, одержуємо суперечність. Отже, $A = \Phi(P) \cdot \langle a \rangle$ – циклічна підгрупа і тому $A = \langle a \rangle$, $|\Phi(P)| = 2$, $\Delta = 1$. Звідси P – група з однією циклічною підгрупою порядку p . В силу теореми 12.5.1 з [119] P містить

елемент f порядку $2^{\alpha-1} = 2^4$, що в групах Шмідта неможливо. Отже, і цей випадок неможливий. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведено.

Достатність очевидна. Лему доведено.

Л е м а 3.1.2. *Локально ступінчасті УЩН[$\overline{C}$]-групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:*

- 1) G – група кватерніонів порядку 8;
- 2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;
- 3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p(\alpha + \beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$;
- 4) $G = P \lambda Q$ – група Шмідта типу 1 леми 3.1.1.

Доведення. Необхідність. Припустимо спочатку, що G – нільпотентна група. За відомими результатами (див., наприклад, твердження 1.1.7) G – скінченна примарна p -група типу 1, 2 розглядуваної леми, і типу $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $p(\alpha + \beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$. Якщо $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, то G – група типу 3 розглядуваної леми.

Без порушення загальності можна вважати, що $\alpha \geq \beta$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Покладемо $B = \langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$, $A = \omega(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$. Ясно, що $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Тоді $G' \cap N = 1$, $N \leq Z(G)$ і, значить, $b \in Z(G)$, що не так. Отже, якщо G – нільпотентна група, то вона група типу 1–3 розглядуваної леми.

Припустимо тепер, що G – ненільпотентна група. Тоді завдяки лемі 3.1.1. G – група Шмідта типу 1 цієї леми і, значить, G – група типу 4 даної леми. Необхідність доведено.

Достатність випливає з леми 3.1.1 і твердження 1.1.9. Лему доведено.

Л е м а 3.1.3. *Скінченні розв'язні мінімальні недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи, комутант яких містить хоча б одну силовську підгрупу групи G , мають вигляд $G = A \cdot D$, $A \triangleleft G$, $D = Q \lambda \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено, Q – група порядку 3 та є групами одного з типів:*

1) $G = A \rtimes D$, A – група типу $(2, 2)$, $Q = \langle c \rangle$, $A \rtimes \langle b \rangle$ та $A \rtimes \langle c \rangle$ – групи Міллера-Морено, $|b| \in \{2, 4\}$;

2) $G = A \cdot D$, A – група кватерніонів порядку 8, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$, $A \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 , $Q = \langle c \rangle$, $|b| = 4$, $A \rtimes \langle c \rangle$ – група Шмідта.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Оскільки G' містить хоча б одну силовську підгрупу з G , то завдяки теоремі 2.2.3 з [123] $G = A \cdot D$, де $\Phi(A)$ – центральна в G елементарна абелева p -підгрупа, $A/\Phi(A)$ – мінімальна нормальна p -підгрупа з $G/\Phi(A)$, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, Q – ненормальна в G силовська q -підгрупа групи G , $A \cdot \langle b \rangle = P$ – ненормальна в G силовська p -підгрупа, $p \neq q$, $A \cap \langle b \rangle \leq \Phi(A)$, $b^p \in Z(G)$, $[A, \langle b \rangle] \not\leq \Phi(A)$, $[Q, \langle b \rangle] = Q$, $D/\Phi(Q)$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $C_D(A) = C(A)_{\Phi(Q)} \times \langle b^p \rangle$, $[A, Q] = A$, $[\Phi(Q) : C(A)_{\Phi(Q)}] \leq 2$. Легко бачити, що $G/\Phi(A)$ – група, що задовольняє умову розглядуваної лема. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $\Phi(A) = 1$; 2) $\Phi(A) \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $P = A \rtimes \langle b \rangle$. Зрозуміло, що $N_P(\langle b \rangle) > \langle b \rangle$. Тоді підгрупа A містить такий елемент a , що $|a| = p$, $[a, b] \in A \cap \langle b \rangle = 1$. Звідси в G існує підгрупа $U = \langle b \rangle \times \langle a \rangle$, у якої $\omega(U) = \langle a \rangle \times \omega(\langle b \rangle)$ – нециклічна підгрупа. Ясно, що $|A| > p$.

Припустимо, що $[P : U] > p$. Тоді $|[U; P]| > 2$ і за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[U; P] \ni N \triangleleft G$ і, значить, $N \cap D = \langle b \rangle \triangleleft D$, що неможливо. Отже, $[P : U] = p$ і A – група типу (p, p) .

Нехай $[U : \omega(U)] > p$. Тоді $|[\omega(U); U]| > 2$ і за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[\omega(U); U] \ni N \triangleleft G$. Але тоді $N \cap A = \langle a \rangle \triangleleft G$, що суперечить мінімальності A в G . Таким чином, $[U : \omega(U)] \leq p$ і $|P| \in \{p^3, p^4\}$, $\beta \in \{1, 2\}$. Розглянемо далі можливі випадки: 1.1) Q – циклічна підгрупа; 1.2) Q – нециклічна підгрупа.

Випадок 1.1. У цьому випадку $Q = \langle c \rangle$, $|c| = q^\Delta$, $\Delta > 0$. Оскільки $[Q, \langle b \rangle] = Q$, то $q \equiv 1 \pmod{p}$ і $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{q}$. З цього випливає, що $p = 2$, $q = 3$. За попереднім $C_Q(A) = \langle c^q \rangle$.

Припустимо, що $\Delta > 1$. Тоді $|[U; \langle c^q \rangle \rtimes P]| > 2$ і за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[U; \langle c^q \rangle \rtimes P] \ni N \triangleleft G$. Покладемо $N_1 = D \cap N$. Тоді $\langle b \rangle \leq N_1 \triangleleft D$, $c \notin N_1$. Але тоді $\langle c \rangle, \langle b \rangle = \langle c \rangle \leq N_1$, що неможливо. Отже, $|c| = 3$.

Оскільки $b^2 \in Z(G)$, $[A, \langle b \rangle] \neq 1$, $[A, \langle c \rangle] = A$, $\langle b \rangle, \langle c \rangle = \langle c \rangle$, то $G = A \rtimes D$, $A \rtimes \langle c \rangle$ та $A \rtimes \langle b \rangle$ – групи Міллера-Морено. Таким чином, у цьому випадку G – група типу 1 розглядуваної леми.

Випадок 1.2. Припустимо, що у цьому випадку Q має нециклічну максимальну підгрупу V . Тоді $|[V; D]| > 2$ і за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[V; D] \ni N \triangleleft G$. Звідси $Q \cap N = Q_1$ – нормальна силовська q -підгрупа із N і, значить, $Q_1 \triangleleft G$. За попереднім $V \leq Q_1 < Q$. Але тоді $Q_1 = V$ і тому $V \triangleleft G$. Ясно, що $\Phi(Q) < V$ і $[A, V] = 1$. За попереднім $V \leq \Phi(Q)$. Звідси $\Phi(Q) = V$, $[Q : \Phi(Q)] = q$, що неможливо в силу нециклічності підгрупи Q . Отже, всі максимальні підгрупи в Q циклічні і, значить, Q – мінімальна нециклічна група.

Відомо (див., наприклад, [123, теорема 2.1.3]), що тоді Q – група типу (q, q) чи група кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що D – група Шмідта.

Нехай Q – група кватерніонів порядку 8. Тоді $p = 3$, $q = 2$, $\text{Aut} A \cong \text{PSL}(2, 3)$, $D/C_D(A)$ ізоморфна підгрупі із $\text{Aut} A$. Відомо (див., наприклад, [120]), що $\text{Aut} A$ не містить ненільнотентних підгруп порядку $2^\Delta \cdot 3$, $\Delta \in \{1, 2\}$. За попереднім $C_D(A) \leq \Phi(D)$. Зрозуміло, що $D/C_D(A)$ – ненільнотентна група. Звідси $C_Q(A) = 1$. Очевидно, $|[Q; D]| = 2$. Але тоді $|b| = 3$, $A \rtimes \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено.

Зрозуміло, що $Z = A \rtimes Q$ містить підгрупу Шмідта $S = \langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$, де $a \in A$, $|a| = 3$, $|d| = 2$, $\langle d \rangle = \Phi(Q)$. Ясно, що $M = A \rtimes \langle d \rangle \triangleleft Z$. За теоремою Машке [128, теорема 20.2.2] $A = \langle z \rangle \rtimes \langle a \rangle$, $|z| = 3$, $\langle z \rangle \triangleleft M$. Припустимо, що $[z, d] = 1$. Тоді $\langle z \rangle \triangleleft Z$. За теоремою Машке без порушення загальності можна вважати, що $\langle a \rangle \triangleleft Z$. Але тоді $[D, A] = 1$, що неможливо. Отже, $d^{-1} z d = z^{-1}$, $d^{-1} a d = a^{-1}$. Оскільки в Q тільки одна інволюція d , то будь-який неединичний елемент із Q індукує на A регулярний автоморфізм. Але тоді [129]

$A \rtimes Q$ – група Фробеніуса і $G = A \rtimes D$, A – група типу $(3, 3)$, $|b| = 3$, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$ – група Шмідта.

Зрозуміло, що $[d, b] = 1$. Нехай $T = A \rtimes \langle b \rangle$ – силовська 3-підгрупа групи G , що є неабелевою групою порядку 3^3 і експоненти 3, $A = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $|c| = |a| = 3$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle c \rangle$. В групі G існує підгрупа $B = T \rtimes \langle d \rangle$ і $T \triangleright U = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$. Ясно, що U – нециклічна підгрупа, $|[U; B]| > 2$ і за означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[U; B] \ni N \triangleleft G$.

Покладемо $T_1 = T \cap N$. Тоді T_1 – нормальна силовська 3-підгрупа з N . Звідси $T_1 \triangleleft G$. Оскільки $T_1 \not\triangleleft G$, то $T_1 < T$ і, значить, $T_1 = U$. Зрозуміло, що $A \cap N = A \cap U = \langle c \rangle \triangleleft G$. Нехай $C_G(c) = C$. Тоді $C \triangleleft G$ і $G/C \cong \text{Aut}\langle c \rangle$, $|\text{Aut}\langle c \rangle| = 2$. З цього випливає, що $G' \leq C$. Але тоді $Q \leq C$. Звідси $[C, Q] = 1$, що неможливо, оскільки $A \rtimes Q$ – група Фробеніуса. Отже, Q не може бути групою кватерніонів порядку 8.

Нехай тепер Q – група типу (q, q) . Тоді, як і раніше, $|b| = p$, $G = A \rtimes D$, D ізоморфна підгрупі із $\text{Aut}A$. За попереднім, $q > p$. Внаслідок [130] G – дисперсивна група, що не так. Таким чином, випадок 1.2 неможливий.

Випадок 2. У цьому випадку $G/\Phi(A)$ – група типу 1 розглядуваної леми, для якої $D = \langle c \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$, $|c| = 3$, $A \cap \langle b \rangle = \omega(\langle b \rangle) = \Phi(A) \leq \langle b^2 \rangle \leq Z(G)$, $A \rtimes \langle c \rangle$ – група Шмідта, $A' \neq 1$. Оскільки A – неабелева нормальна силовська 2-підгрупа порядку 8 деякої групи Шмідта, то, як відомо, A – група кватерніонів порядку 8, $[A, \langle b \rangle] \not\leq \Phi(A)$.

Припустимо, що $\beta = 3$. Тоді підгрупа A містить такий елемент a , що $|a| = 4$ і $U = \langle a, b \rangle$, $[a, b] \in \langle b^2 \rangle \leq Z(G)$. З цього випливає, що $\langle b \rangle$ – циклічна максимальна підгрупа нециклічної підгрупи U , $Z(U)$ містить елемент b^2 . Завдяки теоремі 12.5.1 з [119] $U = \langle b \rangle \rtimes \langle a_1 \rangle$, $a_1 = a b^2$, $|a_1| = 2$, $\omega(U) = \langle a_1 \rangle \times \omega(\langle b \rangle)$, $A \cap \omega(U) = \omega(\langle b \rangle)$, $[\langle a \rangle, \langle c \rangle] \not\leq \langle a \rangle$. Зрозуміло, що $|\omega(U); U| > 2$ і за означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[\omega(U); U] \ni N \triangleleft G$. Ясно, що $\omega(N) = \omega(U) \triangleleft G$. Звідси $[a_1, c] = [ab^2, c] = [a, c] \in A \cap \omega(U) = \langle a^2 \rangle = \langle b^4 \rangle$, що суперечить попередньому. Отже, $\beta \in \{1, 2\}$.

Припустимо, що $\beta = 1$. Тоді $P = A \rtimes \langle b \rangle$, $|[(\omega(A) \times \langle b \rangle); P]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[(\omega(A) \times \langle b \rangle); P] \ni N \triangleleft G$. Звідси $N \cap D = \langle b \rangle \triangleleft D$, що неможливо. Отже, $\beta = 2$ і $|P| = 2^4$. Для групи G типу 1 розглядуваної леми $P/\Phi(A)$ – група діедра порядку 8, тому знайдеться елемент x із A такий, що $|x| = 4$ і $P' = \langle x \rangle$. В групі P порядку 2^4 з циклічним комутантом порядку 4 існує циклічна підгрупа порядку 8. За попереднім підгрупа P не містить підгруп типу $(2, 2)$. Але тоді P – група кватерніонів порядку 2^4 і G – група типу 2 розглядуваної леми. Лему доведено.

Л е м а 3.1.4. *Не існує скінченних розв'язних мінімальних недисперсивних УЩН[$\overline{C}$]-груп G , комутант яких не містить жодної силовської підгрупи групи G .*

Доведення. Нехай група G існує. Тоді завдяки теоремі 2.2.4 з [123] $G = \prod_{i=1}^n S_i = \prod_{i=1}^n P_i$, де $S_i = A_i \rtimes \langle b_{i-1} \rangle$ – група Шмідта, при $i = 1$ $\langle b_{i-1} \rangle = \langle b_0 \rangle = \langle b_n \rangle$, $A_i \langle b_i \rangle = P_i$ – силовська p_i -підгрупа групи G , P_i – ненормальна в G , при $i \neq j$ $[S_i, S_j] = 1$, $b_i \in Z(P_i)$, $A_i \cap \langle b_i \rangle \leq \Phi(\langle A_i \rangle) \leq Z(G)$. В силу леми 3.1.1 $A_i \cap \langle b_i \rangle \leq \omega(\langle b_i \rangle)$ і тому $Z \leq \Phi(G) \cap Z(G)$, $G/Z = \prod_{i=1}^n S_i \cdot Z/Z$. Зрозуміло також, що G/Z – мінімальна недисперсивна група і її комутант не містить жодної силовської p_i -підгрупи з G/Z . Завдяки лемі 2.1.1 G/Z – УЩН[$\overline{C}$]-група. З цього випливає, що G/Z – група з умови розглядуваної леми, у якої $Z = 1$, тобто $G = \prod_{i=1}^n S_i$. Розглянемо можливі два випадки: 1) $Z = 1$; 2) $Z \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $G = \prod_{i=1}^n S_i = \prod_{i=1}^n P_i$, $P_i = A_i \rtimes \langle b_i \rangle$.

Не порушуючи загальності можна вважати, що p_1 – найменше просте число з $\pi(G)$. Очевидно, що $n > 1$. Зрозуміло, що $S_i = A_i \rtimes \langle b_n \rangle$ і за вибором $p_n > p_1$.

Нехай $a \in A_1$ і $|a| = p_1$. Тоді в P_1 існує нециклічна підгрупа $U = \langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle$. Оскільки $p_n > p_1$, то в силу леми 3.1.1 $|A_1| > p_1$. Звідси U – власна підгрупа груп $[U; P_1] \ni N \triangleleft G$.

Зрозуміло, що $N \cap S_2 = \langle b_1 \rangle \triangleleft S_2$, що в групах Шмідта неможливо. Отже, U – максимальна підгрупа із P_1 і, значить, $\langle a_1 \rangle$ – максимальна підгрупа з A_1 . Але тоді $|A_1| = p_1^2$ і A_1 – група типу (p_1, p_1) . Для групи Шмідта S_1 маємо $p_1 = 2$, $p_n = 3$ (лема 3.1.1) і тому A_n – 3-група.

Припустимо, що $n > 2$. Тоді $S_n = A_n \rtimes \langle b_{n-1} \rangle$. Тепер, як і для підгрупи S_1 , можна показати, що $|A_n| \in \{3, 9\}$. В силу леми 3.1.1 $p_{n-1} < p_n$. З цього випливає, що $|A_n| = 3$ і $p_{n-1} = 2$. Але тоді $n = 2$, що суперечить припущенню. Отже, $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ і $G = S_1 \times S_2$,

$$S_1 = A_1 \rtimes \langle b_2 \rangle, \quad S_2 = A_2 \rtimes \langle b_1 \rangle, \quad |b_1| = 2^{\alpha_1}, \quad |b_2| = 2^{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0.$$

Припустимо, що $\alpha_1 > 1$. Тоді в A_1 знайдеться такий елемент a_1 , що $|a_1| = 2$ і в G існують нециклічні підгрупи $U = \langle a_1 \rangle \times \omega(\langle b_1 \rangle)$, $V = S_2 \times \langle a_1 \rangle$. Зрозуміло, що $|[U; V]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[U; V] \ni N \triangleleft G$. Звідси $V \cap A_1 = A_1 \cap N = \langle a_1 \rangle \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності $\langle a_1 \rangle$ в S_1 . Отже, $\alpha_1 = 1$ і $S_2 \cong S_3$.

Припустимо, що $\alpha_2 > 1$. Тоді в групі Шмідта S_1 $\omega(\langle b_2 \rangle) \leq Z(S_1)$ і, значить, $\omega(\langle b_2 \rangle) \leq Z(G)$. Покладемо $U = \langle b_1 \rangle \times \langle a_1 \rangle$, де $a_1 \in A_1$, $|a_1| = 2$. Тоді U – нециклічна підгрупа, в G існує підгрупа $V = \omega(\langle b_2 \rangle) \times S_2 \times \langle a_1 \rangle$ і $|[U; V]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[U; V] \ni N \triangleleft G$. Звідси $A_1 \cap V = A_1 \cap N = \langle a_1 \rangle \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності A_1 в S_1 . Отже, $\alpha_2 = 1$ і $S_1 \cong A_4$.

Покладемо $S_1 = U$, $S_2 = V$. Тоді $G = U \times V$. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $G/Z = U/Z \times V/Z$ – група з твердження розглядуваної леми, $U/Z = S_1 \cdot Z/Z \cong A_4$, $V/Z \cong S_3$. З цього випливає, що $\pi(G) = \{2, 3\}$ і $Z = (\langle a_1 \rangle \cap \langle b_1 \rangle) \times (\langle a_2 \rangle \cap \langle b_2 \rangle)$. Оскільки $p_2 = 3$, $p_1 = 2$, S_1 – група Шмідта, $\langle b_2 \rangle \cap A_2 \leq \Phi(A_2)$, то $|A_2| = 3$, $|\langle b_2 \rangle \cap A_2| = 1$. Звідси $|Z| = 2$, $\omega(\langle b_1 \rangle) = Z \leq \Phi(A_1)$ і A_1 – група кватерніонів порядку 8.

Далі, розглядаючи фактор-групу G/Z , прийдемо до випадку 1, у якому $|P_1/Z| = 8$. Але тоді $|P_1| = 2^4$. Оскільки $b_1 \notin A_1$, то $|b_1| = 4$ і $b_1 \in Z(P_1)$. Нехай x – твірний елемент з A_1 . Покладемо $y = x b_1$. Тоді $|y| = 2$, $P_1 = A_1 \rtimes \langle y \rangle$. В P_1 існує нециклічна підгрупа $A = \langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle$. Ясно, що $|[A; P_1]| > 2$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-

груп $[A; P_1] \ni N \triangleleft G$. Звідси $P_1 = A_1 \cdot N \triangleleft G$, що суперечить ненормальності P_1 в G . Отже, випадок 2 неможливий.

За попереднім $G = U \times V$, де $U = A \rtimes \langle c \rangle \cong A_4$, $V = \langle d \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong S_3$. Зрозуміло, що $|b| = 2$ і в G існує власна ненормальна підгрупа $B = U \times \langle b \rangle$, яка містить власну ненормальну в G силовську 2-підгрупу $D = A \times \langle b \rangle$ типу $(2, 2, 2)$. Зрозуміло, що $A > \langle a \rangle$, $|a| = 2$, $D > X = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – нециклічна підгрупа. Легко бачити, що $|[X; B]| > 2$ і тоді за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[X; B] \ni N \triangleleft G$. Ясно, що $B = D \rtimes \langle c \rangle$, $D \cap N = D_1$ – нормальна силовська 2-підгрупа з N і, значить, $D_1 \triangleleft D$. Оскільки $D \not\triangleleft G$, то $D_1 < D$ і тому D_1 не містить A . Зрозуміло, що $A \cap N = \langle a \rangle \triangleleft G$. Але тоді $a \in Z(G)$, що неможливо. Одержана суперечність показує, що група G не існує. Лему доведено.

Л е м а 3.1.5. *Скінченні нерозв'язні мінімальні недисперсивні УЩН $[\overline{C}]$ -групи є групами одного з типів:*

- 1) $G \cong SL(2, 5)$;
- 2) $G \cong PSL(2, p)$, де $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки теоремі 2.2.6 з [123] фактор-група $G/\Phi(G)$ ізоморфна одній із груп : а) $PSL(2, 2^q)$, q – просте число; б) $PSL(2, 3^q)$, q – непарне просте число; в) $PSL(2, p)$, $p > 11$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; г) $SL(2, 5)$ чи $PSL(2, 5)$; д) групі Судзукі $Sz(2^q)$, q – непарне просте число. Групи всіх згаданих типів є простими мінімальними недисперсивними групами. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $\Phi(G) = 1$; 2) $\Phi(G) \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку G – група одного з типів а) – д). Якщо $q = 2$, то G – група типу а). Внаслідок теореми Діксона [127, теорема 8.2.7] G має порядок 60 і, значить, $G \cong PSL(2, 5)$. Звідси G – група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай далі $q > 2$. Тоді q – непарне просте число і тому G – група одного з типів а), б), д). В силу теореми Діксона і результатів про групи Фробеніуса (див., наприклад, [129]) група G містить підгрупу Фробеніуса $B = P \rtimes \langle a \rangle$, де $B < G$, P – елементарна абелева група порядку p^q , $p \in \{2, 3\}$, $|a| = (p^q - 1)/\kappa$, κ – найбільший спільний дільник чисел 2 і $p-1$. Зрозуміло, що P містить

нециклічну підгрупу A типу (p, p) . Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$, що суперечить простоті групи G . Отже, G не може бути групою одного з типів а), б), к).

Якщо G – група типу а), то вона група типу 1 чи 2.

Нехай, нарешті, G – група типу с). Якщо $p = 13$, то G – група типу 2 розглядуваної леми.

Припустимо, $p > 13$. Тоді внаслідок теореми Діксона [127, теорема 8.2.7] $G = 1/2 \cdot (p-1) \cdot p \cdot (p+1)$. Зрозуміло, що $|G| \equiv 0 \pmod{6}$. Оскільки $p > 13$, то $(p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod{8}$. Звідси $|G| \equiv 0 \pmod{12}$. В силу теореми Діксона G містить такі три максимальні підгрупи: $M_1 \cong \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ – група Фробеніуса, $|a| = p$, $|b| = (p-1)/2$; $M_2 \cong \langle b \rangle \lambda \langle d \rangle$ – група діедра, $|d| = 2$; $M_3 \cong \langle c \rangle \lambda \langle d \rangle$ – група діедра, $|c| = (p+1)/2$.

Нехай f – елемент порядку q , який належить підгрупі $\langle b \rangle$ чи $\langle c \rangle$. Тоді в M_1 існує нециклічна підгрупа $X_1 = \langle a \rangle \lambda \langle f \rangle$, в M_2 існує нециклічна підгрупа $X_2 = \langle f \rangle \lambda \langle d \rangle$, в M_3 існує нециклічна підгрупа $X_3 = \langle f \rangle \lambda \langle d \rangle$.

Припустимо, що $|[X_i; M_i]| > 2$, де $i \in \{1, 2, 3\}$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X_i; M_i] \ni N_i \triangleleft G$, що суперечить простоті групи G . Звідси $X_i = M_i$ або X_i – максимальна підгрупа з M_i .

Нехай $X_2 = M_2$. Тоді $f = b$ і $|f| = |b| = q = 1/2 \cdot (p-1)$. Звідси $p = 2q + 1$. Оскільки $p > 13$, то $q > 3$ і $(p+1)/2 = 6t$, тому $p = 12t - 1$, $t > 1$. Звідси $[M_3; X_3]$ ділиться на добуток двох простих чисел. Оскільки M_3 – надрозв'язна група, то $|[X_3; M_3]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X_3; M_3] \ni N_3 \triangleleft G$, що неможливо (G – проста група). Отже, X_2 – максимальна підгрупа з M_2 .

Припустимо, що $X_3 = M_3$. Тоді $f = c$, $|f| = |c| = q = 1/2 \cdot (p+1)$. Звідси $p = 2q - 1$, $q > 7$, $(p+1)/2 = 6t$, $p = 12t + 1$, $t > 1$, і тому $|[X_2; M_2]| > 2$, що не так. Таким чином, X_3 – максимальна підгрупа з M_3 .

Оскільки M_2 та M_3 – надрозв'язні групи, то $|X_2|$ і $|X_3|$ – добуток двох простих чисел і, значить, $|M_2|$ і $|M_3|$ – добуток трьох простих чисел. Припустимо, що $[M_2; X_2] = r$ – просте число, $[M_3; X_3] = s$ – просте число. Звідси при $p-1 \equiv 0 \pmod{12}$ $|M_1| = 12$, тому $p = 13$, що не так. При $p+1 \equiv 0 \pmod{12}$ $|M_3| = 12$ і тому $p = 11$, що також не так. З цього випливає, що мають місце такі випадки:

$$1.1) p-1 \equiv 0 \pmod{4}, \quad p+1 \equiv 0 \pmod{6};$$

$$1.2) p-1 \equiv 0 \pmod{6}, \quad p+1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Випадок 1.1. У цьому випадку $p = 4r + 1$ і $p = 6s - 1$. З цього одержуємо, що $2r - 3s - 1 = 0$ і $2r + 3s - p = 0$. Легко перевірити, що при співвідношеннях $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ і $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ мають місце нерівності $s > 22$ і $r > 22$. Зрозуміло, що $r = 5m + x$, $s = 5n + y$, $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, $m > 3$, $n > 3$, $p = 4(5m + x) + 1 = 20m + 4x + 1$, $p = 6(5n + y) - 1 = 30n + 6y - 1$. Звідси завдяки простоті числа p маємо, що $x \neq 1$, $y \neq 1$. Далі легко бачити, що

$$\begin{cases} (4x+1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5} \\ (6y-1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

і тому що $x \neq 2$, $y \neq 2$. Отже $x, y \in \{3, 4\}$. Ясно, що $4x + 1 = m_1 \in \{13, 17\}$, $6y - 1 = n_1 \in \{17, 23\}$. Тепер з рівності $2r - 3s - 1 = 0$ легко одержати, що $2x - 3y - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Звідси $x, y \in \{4\}$ і $2m - 3n = 1$. Відомо, що тоді $m = 3k + 2$, $n = 2k + 1$. Звідси $r = (3k + 2) \cdot 5 + 4 = 15k + 14$ і тому k – непарне число, тобто $k = 2l + 1$. Але тоді $s = 5(2k + 1) + 4 = 10k + 9 = 10(2l + 1) + 9 = 20l + 19$. Оскільки $p = 6s - 1$, то $p = 6(20l + 19) - 1$ і, значить, p не є просте число. Суперечність. Отже, випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $p = 6r + 1$, $p = 4s - 1$ і тому $p = 3r + 2s$, $3r - 2s - 1 = 0$. Легко бачити, що $r > 5$. При $r = 7$ $p = 43$, а при $r = 11$ $p = 67$ і G – група типу 2 розглядуваної леми. Отже, в подальшому будемо вважати, що $s > r \geq 13$. Як і у випадку 1.1 $r = 5m + x$, $s = 5n + y$, $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ і тому $p = 6(5m + x) + 1 = 30m + 6x + 1 = 4(5n + y) - 1 = 20n + 4y - 1$. Оскільки $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, то

$$\begin{cases} (6x+1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5} \\ (4y-1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Звідси легко бачити, що $x, y \in \{1, 2\}$. Підставляючи в рівність $3r - 2s - 1 = 0$ значення r і s одержимо, що $3x - 2y - 2 \equiv 0 \pmod{5}$. Звідси випливає, що $x = y = 1$, $3m - 2n = 0$ і тому $m = 2k$, $n = 3k$. Таким чином, $r = 10k + 1$, $s = 15k + 1$. З непарності s маємо, що $k = 2l$ і, значить, $r = 20l + 1$, $p = 6(20l + 1) + 1 = 120l + 7$. Але тоді $p^2 = (120l + 7)^2 = 120^2 l^2 + 2 \cdot 120 \cdot 7 + 49$. Звідси $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, що не так. Випадок 1.2, а з ним і випадок 1, розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $\Phi(G) \neq 1$ і внаслідок леми 2.2.4 з [123] $\Phi(G) = \langle d \rangle \times Z$, де $|d| \in \{1, 2\}$, Z – група без інволюцій. Якщо Z – циклічна група, то в силу леми 2.2.1 з [123] $Z = 1$, $|d| = 2$ і $G/\Phi(G) \cong G/\langle d \rangle$ – група з випадку 1, тобто $G/\langle d \rangle \cong PSL(2, p)$, де $p \in \{5, 13, 43, 67\}$. Завдяки теоремі 2.2.6 з [123] $G \cong SL(2, p)$. Якщо $p = 5$, то G – група типу 1.

Припустимо, Z – нециклічна група. Тоді $Z \triangleleft G$ і G/Z – УЩН[]-група, яка в силу твердження 1.1.10 розв’язна. Але тоді розв’язна і група G , що не так. Отже, Z – циклічна група. Звідси і за попереднім $Z = 1$.

Нехай $p \neq 5$. Тоді внаслідок леми 2.2.1 з [123] всі власні нормальні підгрупи з G належать $\langle d \rangle$. За попереднім G містить підгрупу $M_1 = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = p$, $|b| = p - 1$, $d \in \langle b \rangle$, $M_1/\langle d \rangle$ — група Фробеніуса. Для всіх чисел $p \in \{13, 43, 67\}$ маємо $|b| = 2qr$, q і r – прості числа, $r > q$. Тому M_1 містить нециклічну підгрупу $X = \langle a \rangle \rtimes \langle b_1 \rangle$, де $|b_1| = r$. Ясно, що $|[X; M_1]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X; M_1] \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $N < G$ і $|N| > 2$, що суперечить попередньому. Таким чином, у випадку 2 G – група типу 1. Лему доведено.

Т е о р е м а 3.1.1. *Скінченні недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи є мінімальними недисперсивними групами і вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = A \rtimes D$, A – група типу (2, 2), $D = Q \rtimes \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $A \rtimes \langle b \rangle$ та $A \rtimes \langle c \rangle$ – групи Міллера-Морено;

2) $G = A \cdot D$, $A \triangleleft G$, A – група кватерніонів порядку 8, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$ – група Шмідта, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$, $A \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 , $|b| = 4$, $A \rtimes \langle c \rangle$ – група Шмідта;

3) $G \cong SL(2, 5)$;

4) $G \cong PSL(2, p)$, $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Можливі наступні два випадки: 1) G – мінімальна недисперсивна група; 2) G – не мінімальна недисперсивна група.

Випадок 1. Нехай G – розв’язна група. Тоді в силу леми 3.1.4 G задовольняє умову леми 3.1.3 і тому G – група типу 1, 2 теорема.

Нехай тепер G – нерозв’язна група. Тоді G задовольняє умову леми 3.1.5. Звідси G – група типу 3, 4 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G містить недисперсивну, а значить, мінімальну недисперсивну підгрупу N . Покажемо, що $N \triangleleft G$.

Припустимо спочатку, що N – нерозв’язна група. Тоді вона група типу 3, 4 даної теореми. За теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] N містить підгрупу $X = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p$, $|f| = q$ – непарне просте число, яке ділить $p - 1$, $X \leq M_1 = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – максимальна підгрупа з N , при $N \cong SL(2, 5)$ $|b| = 4$, при $N \cong PSL(2, p)$ $|b| = (p - 1)/2$, N не має власних нормальних підгруп, що містять X . Легко бачити, що при $p \in \{5, 13, 43, 67\}$ $|[X; N]| > 2$. За означенням УЩН[$\bar{C}$]-груп $[X; N] \ni N_1 \triangleleft G$.

Припустимо що N_1 – дисперсивна підгрупа. Тоді, за попереднім, $X = N_1$. Зрозуміло, що N/X – УЩН[]-група і тому завдяки твердженню 1.1.10 вона розв’язна і, значить, N – розв’язна підгрупа. Суперечність. Отже, N_1 – недисперсивна група. Але тоді $N_1 = N$, а значить, $N \triangleleft G$.

Нехай N – розв’язна група. Тоді N – група типу 1, 2 розглядуваної теореми. Звідси $N = P \cdot Q$, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, Q ненормальна в N , Q – власна немаксимальна підгрупа з N , $P = A \langle b \rangle$ – ненормальна в N силовська 2-підгрупа, A – нециклічна нормальна підгрупа з N . Покладемо $X_1 = A$. Зрозуміло, що P містить власну нециклічну підгрупу X_2 , яка містить $\langle b \rangle$. Тоді $|[X_2; N]| > 2$ і за означенням УЩН[$\bar{C}$]-груп $[X_1; N] \ni N_1 \triangleleft G$; $[X_2; N] \ni N_2 \triangleleft G$. Звідси $P \leq T = N_1 \cdot N_2 \triangleleft G$. Якщо $T = N$, то $N \triangleleft G$. Нехай $T < N$. Оскільки P – максимальна підгрупа з N , то $T = P \triangleleft N$, що неможливо ($P \ntriangleleft N$). Отже, завжди $N \triangleleft G$. Зрозуміло, що 2 ділить порядок групи G .

Нехай H – силовська 2-підгрупа з N . Тоді, очевидно, що H – нециклічна група. Ясно, що H ненормальна в N . За лемою Фраттіні [128, лема 17.1.8] $G = N \cdot M$, де $M = N_G(H)$, $M \cap N = N_N(H) < N$. Оскільки $N < G$, то $M \setminus N$ містить r -елемент g (r – просте число) такий, що $g^r \in N \cap M = U$. Звідси в M існує підгрупа $Y = U \langle g \rangle$ і $[Y; U] = r$.

Припустимо, що N – група типу 1, 2 теореми. Тоді H містить власну нециклічну підгрупу X , $H = A \langle x \rangle$, $A \triangleleft N$, $x \in X$. Зрозуміло,

що $|[X; Y]| > 2$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[X; Y] \ni N_1 \triangleleft G$. Звідси $N_1 \cap N = H_1 = H \cap N \triangleleft N$, H_1 містить X , тому $H = A \cdot H_1 \triangleleft N$, що неможливо.

Нехай, нарешті, N – група типу 3, 4 теореми. Тоді за теоремою Діксона H – група типу (2,2) чи група кватерніонів порядку 8, $U \lambda <d>$, $|d| = 3$. Зрозуміло, що $|[H; Y]| > 2$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[H; Y] \ni N_1 \triangleleft G$. Звідси $N_1 \cap N \triangleleft N$, $N_1 \cap N$ належить U , $N \cap N_1$ містить H і тому $H \triangleleft N$, що неможливо. Одержана суперечність показує, що випадок 2 неможливий. Отже, G – група одного з типів 1–4 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група, одного з типів 1 – 4 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – скінченна група. Завдяки теоремам 2.2.3 і 2.2.6 з [123] G – мінімальна недисперсивна, а значить, недисперсивна група. Залишається показати, що G – УЩН $[\overline{C}]$ -група, тобто для будь-якого відрізка підгруп $[X; Y]$, де X – власна немаксимальна нециклічна підгрупа з Y , виконується співвідношення $[X; Y] \ni N \triangleleft G$. Якщо $X \triangleleft G$ чи $Y \triangleleft G$, то покладемо $N = X$ чи $N = Y$ і все доведено. Звідси $X \not\triangleleft G$, $Y \not\triangleleft$ і $Y < G$.

Нехай G – група типу 3, 4 теореми. В силу теореми Діксона G має максимальні підгрупи тільки таких типів:

$M_1 \cong \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = p$, $|b| = (p-1)/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$, G – проста група, M_1 – група Фробеніуса, при $k = 1$ $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle f \rangle$, $|f| = 2$, $f \in Z(G)$, $G/\langle f \rangle \cong PSL(2, p)$, $M_1/\langle f \rangle$ – група Фробеніуса;

$M_2 \cong \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $|b| = (p-1)/k$, $d^l b d = b^{-1}$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle b \rangle \cap \langle d \rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_3 \cong \langle c \rangle \cdot \langle d \rangle$, $d^l c d = c^{-1}$, $|c| = (p+1)/k$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle c \rangle \cap \langle d \rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_4 \cong F \lambda \langle g \rangle$ – група Шмідта, $|g| = 3$, $|F| = 8/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ F – група кватерніонів порядку 8, $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ F – група типу (2, 2), $G \cong PSL(2, p)$;

$M_5 \cong \langle g \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|g| = 3$, $|d| = 4/k$, $d^l g d = g^{-1}$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$.

Зрозуміло, що Y належить одній із підгруп M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Оскільки X – нециклічна підгрупа, то $|X|$ ділиться на добуток двох простих чисел p_1 і p_2 . За умовою $|[X; Y]| > 2$. Звідси $|X : Y|$ ділиться на добуток двох простих чисел p_3 і p_4 . Таким чином, $|Y|$ ділиться на $p_1 p_2 p_3 p_4$. При $p \in \{5, 13, 43, 67\}$ $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і, значить, $|Y|$ не ділиться на $p_1 p_2 p_3 p_4$. Суперечність. Отже, група G типу 3, 4 є УЩН[$\bar{C}$]-групою.

Нехай G – група типу 1, 2 теореми. Зрозуміло, що тоді $A \leq Z$ – власна немаксимальна підгрупа однієї з максимальних підгруп групи G , $G = A \cdot D$, $A \triangleleft G$, A – група типу (p, p) чи група кватерніонів порядку 8, $A \cap D \leq \Phi(A)$, $|\Phi(A)| \in \{1, 2\}$, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$, $|Q| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $\pi(G) = \{2, 3\}$, $P = A \langle b \rangle$ – силовська 2-підгрупа з G , $P \ntriangleleft G$, $Q \ntriangleleft G$. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $A \not\leq X$; 2) $A \leq X$.

Випадок 1. У цьому випадку $A \cap X = F < A$. Для груп розглядуваних типів $F \leq \Phi(A)$, $|\Phi(A)| = 1$ або 2. Оскільки $\Phi(A) \leq Z(G)$ і $D \cap A = \Phi(A)$, то $G/\Phi(A) = A/\Phi(A) \rtimes D/\Phi(A)$ і, значить, $\Phi(A) \cdot X/\Phi(A)$ ізоморфна деякій підгрупі з $D/\Phi(A)$. Легко бачити, що $D/\Phi(A)$ – максимальна підгрупа з $G/\Phi(A)$, тому D – максимальна підгрупа з G і, значить, D – підгрупа з циклічними 2-максимальними підгрупами. Звідси FX/F не може бути ізоморфною 2-максимальній підгрупі з D , а тим більше з D/F .

Припустимо, що $|FX/F| = |D/F|$. Тоді $|FX/F| = 6$. Звідси $|FX| \geq 6$. З цього випливає, що $G = A \cdot X$, $Y = X \cdot U$, де $U = Y \cap A$. Оскільки $|[X; Y]| > 2$, то $|X : Y| > p$ – просте число. Звідси $|U| > p$. Зрозуміло, що $U \triangleleft Y$, $U \triangleleft A$ і, значить, $U \triangleleft G$, $F < U$, тому U/F – неединична нормальна підгрупа з G/F , що є власною підгрупою з A/F . В групах G розглядуваних типів A/F мінімальна нормальна підгрупа в G/F . Суперечність. Отже, $|FX/F| < |D/F|$.

В групах G типу 1 теореми $D/F \cong S_3$, $F = 1$. Але тоді X – нециклічна група, що не так. В групах G типу 2 D – мінімальна нециклічна підгрупа порядку 12, $F \leq Z(G)$, $|F| = 2$, F – єдина підгрупа порядку 2 з G і $D/F \cong S_3$. Звідси FX/F – група порядку 2 чи 3. При $|FX/F| = 3$ одержуємо циклічність підгрупи FX і, значить, циклічність підгрупи X , що не так. Нехай X ізоморфна S_3 . Але в розглядуваних типах груп $G/A \cong S_3$. Суперечність. Отже, і випадок

2 неможливий. Всі випадки розглянули. Достатність доведено. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 3.1.2. Для скінченних недисперсивних УЩН[$\overline{C}$]-груп G справедливі твердження:

- 1) $|G|$ ділиться на 12, а для розв'язних груп $G|G|$ ділиться на 24;
- 2) існує тільки скінченне число неізоморфних груп такого роду;
- 3) порядок групи G обмежений.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 3.1.1.

Л е м а 3.1.6. Локально ступінчаста примарна УЩН[$\overline{C}$]-група G розв'язна і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді G – p -група. Нехай $|G| < \infty$. Якщо G має лише одну підгрупу порядку p , то в силу теореми 12.5.1 з [119] G – метациклічна група і тому $G'' = 1$. Нехай G містить підгрупу A типу (p, p) . Якщо $|G| \leq p^6$, то, очевидно, що лема справедлива. Припустимо, що $|G| > p^6$. Тоді G містить підгрупу B порядку p^4 , $A < B$, $|[A; B]| > 2$, тобто A – власна немаксимальна підгрупа з B . За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N \triangleleft G$. Зрозуміло, що G/N – УЩН[$\overline{C}$]-група. Звідси завдяки твердженню 1.1.11 $(G/N)'' = 1$, і тому в цьому випадку лема справедлива.

Нехай тепер $|G| = \infty$. Покажемо, що G – локальна скінченна група. Припустимо, що це не так. Тоді G містить нескінченну скінченно породжену УЩН[$\overline{C}$]-підгрупу X . Оскільки X – локально ступінчаста група, то вона містить нескінченний ланцюг

$$X > X_0 > X_1 > \dots > X_i > \dots$$

нормальних в X підгруп X_i скінченного індексу. Позначимо через N перетин всіх X_i . Тоді $N \triangleleft X$ і за теоремою Ремака [128, теорема 4.3.9] X/N ізоморфна підгрупі з групи G^* , де G^* – декартовий добуток підгруп X/X_i . Зрозуміло, що X/N – нескінченна скінченно породжена примарна УЩН[$\overline{C}$]-група. За попереднім, X/X_i – розв'язна p -група і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом. Звідси G^* – розв'язна група і, значить, X/N – розв'язна і, як відомо, скінченна група. Суперечність. Отже, G – локально скінченна група. Користуючись цим, тепер легко показати, що ступінь розв'язності групи G обмежена фіксованим числом. Лему доведено.

Л е м а 3.1.7. *Ступінь розв'язності скінченної дисперсивної УЩН[$\overline{C}$]-групи G обмежена фіксованим числом.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову леми. Якщо G – нільпотентна група, то твердження леми випливає з леми 3.1.6.

Нехай G – ненільпотентна група. Припустимо спочатку, що G – надрозв'язна група. Тоді, як відомо, G' – нільпотентна група і, значить, за попереднім, ступінь розв'язності групи G обмежена фіксованим числом. Нехай тепер G – ненадрозв'язна група. Тоді, очевидно, що G містить нециклічну силовську q -підгрупу Q . З дисперсивності групи G випливає, що G містить нормальну силовську p -підгрупу P .

Припустимо, що P – нециклічна група. Тоді G/P – УЩН[]-група і, як у лемі 3.1.6, G має обмежену ступінь розв'язності. Нехай P – циклічна група. Покладемо $P \times Q = B$. Нехай A – нециклічна підгрупа з Q . Припустимо, що $|[A; B]| > 2$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N \triangleleft G$. Звідси, як і раніше, одержуємо справедливість леми. Нехай $|[A; B]| \leq 2$. Тоді $|[A; B]| = 2$. Звідси $|P| = p$ і Q – мінімальна нециклічна примарна група.

Якщо $B = G$, то твердження леми очевидне. Припустимо, що $B < G$. Тоді з дисперсивності G маємо $G = (U \times Q) \times V$ де U і V – холлівські підгрупи з G , всі силовські підгрупи з U циклічні, $U \neq 1$. Покладемо $N = U \times Q$. Тоді, знову за попереднім, ступінь розв'язності N обмежена фіксованим числом і оскільки $(G/N)'' = 1$ (твердження 1.1.11), то ступінь розв'язності G обмежена фіксованим числом. Лему доведено.

Т е о р е м а 3.1.2. *Нескінченна періодична локально ступінчаста недедекіндова УЩН[$\overline{C}$]-група G є черніковською дисперсивною групою і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом.*

Доведення. Нехай G – група з умови теореми. Як і в лемі 3.1.6 легко встановити, що G – локально скінченна група. Тому вона має локальну систему $\{G_\alpha\}$ скінченних підгруп G_α . Користуючись лемами 3.1.6 та 3.1.7 можна показати, що G_α – скінченна дисперсивна розв'язна група і її ступінь розв'язності обмежена фіксованим

числом. З цього випливає, що G – розв’язна група і її ступінь розв’язності обмежена фіксованим числом.

Припустимо, що G – недисперсивна група. Тоді G – ненільпотентна група. Покажимо, що G – черніковська група. Припустимо, що G – нечерніковська група. Тоді в силу [131] для будь-якого g із G існує нечерніковська цілком факторизована g -допустима підгрупа F . Без порушення загальності можна вважати, що $F \cap \langle g \rangle = 1$. Оскільки F – нечерніковська цілком факторизована абелева група, то легко встановити, що F містить підгрупу $F_1 = X_{i=1}^{\infty} B_i$, де B_i – допустима підгрупа відносно $\langle g \rangle$, $B_i \neq 1$. Покладемо $D_1 = X_{k=0}^{\infty} B_{4k+1}$, $D_2 = X_{k=0}^{\infty} B_{4k+2}$, $D_3 = X_{k=0}^{\infty} B_{4k+3}$, $D_4 = X_{k=1}^{\infty} B_{4k}$. Зрозуміло, що D_l – допустима підгрупа відносно $\langle g \rangle$, $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ і що $F_1 = D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4$.

Нехай $A_l = D_l \rtimes \langle g \rangle$. Покажемо, що $A_l \triangleleft G$. Ясно, що в G існують підгрупи $Y_4 = (D_1 \times D_2 \times D_3) \rtimes \langle g \rangle$, $Y_3 = (D_1 \times D_2 \times D_4) \rtimes \langle g \rangle$, $Y_2 = (D_1 \times D_4 \times D_3) \rtimes \langle g \rangle$. Звідси випливає, що $|[A_l; Y_t]| > 2$, $t \in \{2, 3, 4\}$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A_l; Y_t] \in N_t \triangleleft G$. Нехай N – перетин всіх N_t . Тоді $A_l \leq N \triangleleft G$, а значить, $N \cap (D_2 \times D_3 \times D_4) = 1$. Звідси $N = A_l \triangleleft G$. Аналогічно показуємо, що $A_2 = D_4 \rtimes \langle G \rangle \triangleleft G$. Тоді з рівності $A_1 \cap A_2 = \langle G \rangle$ випливає нормальність $\langle g \rangle$ в G і тому G – дедекіндова група. Суперечність. Отже, G – черніковська група.

Позначимо через R повну частину G . Зрозуміло, що $G = R \cdot D$, де D – скінченна підгрупа з G . Оскільки за попереднім G має локальну систему $\{G_{\alpha}\}$, G_{α} – дисперсивна і для деякого α $D \leq G_{\alpha}$, то D – дисперсивна група.

Нехай $D \cap R = N$. Тоді $N \triangleleft G$. Припустимо, що R не квазіциклічна група. Тоді R містить квазіциклічну p -групу A , $R > A$, в R існує q -елемент G такий, що $|g| = q^2$, $\langle g \rangle \cap A = 1$. Звідси в R існує підгрупа $B = A \times \langle g \rangle$. Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N_1 \triangleleft G$. Звідси $A \triangleleft G$. Оскільки G/A – УЩН[$\overline{C}$]-група, то в силу твердження 1.1.12 вона нільпотентна. Але тоді $P/A \triangleleft G/A$, де P/A – силовська p -підгрупа з G/A . Звідси одержуємо, що P – нормальна силовська p -підгрупа із G і тому G – дисперсивна група.

Нехай R – квазіциклічна p -підгрупа. Позначимо через P_1 – силовську p -підгрупу з D . Якщо $P_1 \triangleleft D$, то $D = P_1 \rtimes V$, де V – дисперсивна холлівська підгрупа з D . Звідси $R \cdot P_1 = P$ – нормальна силовська p -підгрупа з G , тому $G = P \rtimes V$ – дисперсивна група.

Припустимо, $P_1 \not\triangleleft D$. Зрозуміло, що $P = R \cdot P_1$ – силовська p -підгрупа з G і $P_1 \leq A$, де A – скінченна нециклічна підгрупа з P . Зрозуміло, що $|[A; P]| > 2$ і за означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[A; P] \in N_1 \triangleleft G$. Звідси $D \cap N_1 = P_1 \triangleleft D$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.1.3. *Нескінченні періодичні локально ступінчасті недисперсивні УЩН $[\overline{C}]$ -групи G вичерпуються періодичними дедекіндовими групами, у яких $|G/\pi(G)| = \infty$.*

Теорема 3.1.3 безпосередньо впливає з теореми 3.1.2.

3.2. Деякі наслідки

Т е о р е м а 3.2.1. *Нескінченні періодичні локально ступінчасті недедекіндові УЩН $[\overline{C}]$ -групи G є розв'язними дисперсивними черніковськими групами виду $G = R \cdot D$, де R – центральна повна частина з G , що розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп, D – скінченна дисперсивна група, G/R – УЩН $[\overline{C}]$ -група.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Припустимо, що G – недисперсивна група. Тоді завдяки теоремі 3.1.2 G – дедекіндова група, що не так. Одержана суперечність показує, що G – дисперсивна група. Як і в теоремі 3.1.2 встановлюємо, що G – черніковська розв'язна група з повною частиною R . Зрозуміло, що $G = R \cdot D$, $|R| = \infty$, D – скінченна дисперсивна група.

Покажемо, що $R \leq Z(G)$. Для цього покажемо спочатку, що будь-яка квазіциклічна підгрупа K із R нормальна в G . Якщо $K = R$, то $K \triangleleft G$. Якщо $K < R$, то як і в теоремі 3.1.2 одержуємо, що $K \triangleleft G$. Отже, завжди $K \triangleleft G$. Нехай g – довільний примарний елемент із G . Покажемо, що $[R, \langle g \rangle] = 1$. Для цього досить показати, що $[K, \langle g \rangle] = 1$. Припустимо, що $[K, \langle g \rangle] \neq 1$. Тоді існує не локально циклічна

підгрупа $U = K \langle g \rangle$. Звідси U містить відрізок $[A; B]$, де $g \in A$, A – нециклічна підгрупа, $|[A; B]| > 2$, $|B| < \infty$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що U/N – абелева група, $|U'| < \infty$, значить, $K \leq Z(U)$, що не так. Отже, $[K, \langle g \rangle] = [R, \langle g \rangle] = 1$ і тому $R \leq Z(G)$.

Припустимо, що $R \geq F = R_1 \times R_2 \times R_3$, де R_i – квазіциклічна підгрупа, $i \in \{1, 2, 3\}$. Нехай $H = R_1 \times R_2$. Тоді $F = H \times R_3$. Без порушення загальності міркувань можна вважати, що $F \cap \langle g \rangle < R_3$, тому існують підгрупи $U = F \langle g \rangle$, $U_i = R_i \langle g \rangle$, $U_1 \cap U_2 = \langle g \rangle$, $V = H \langle g \rangle$. Припустимо, що підгрупи U_1 і U_2 локально циклічні. Покладемо $A_1 = R_1 \times \langle g \rangle$, $B_1 = R_1 \times \langle a_1 \rangle \times \langle g \rangle$, $A_2 = R_2 \times \langle g \rangle$, $B_2 = \langle b_1 \rangle \times R_2 \times \langle g \rangle$, де $\langle a_1 \rangle$ та $\langle b_1 \rangle$ – циклічні неодиначні підгрупи простих порядків. Зрозуміло, що підгрупи A_1 та A_2 – нециклічні, $|[A_1; B_1]| > 2$, $|[A_2; B_2]| > 2$ і $\langle g \rangle$ – силовська підгрупа з V . За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[A_1; B_1] \ni N_1 \triangleleft G$, $[A_2; B_2] \ni N_2 \triangleleft G$. Ясно, що $N_1 \cap N_2 = N \triangleleft G$ і $\langle g \rangle$ – силовська підгрупа з N . Звідси $\langle g \rangle \triangleleft G$ і, значить, G – дедекіндова група. Суперечність. Отже, ніякі дві підгрупи U_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ не локально циклічні. Без порушення загальності можна вважати, що U_1 і U_2 – не локально циклічні r -групи. Звідси $\langle g \rangle < V_1 < W_1 < U_2$, $\langle g \rangle < V_2 < W_2 < U_3$, V_1 і V_2 – нециклічні підгрупи, $|[V_1; W_1]| > 2$, $|[V_2; W_2]| > 2$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$ -груп $[V_1; W_1] \ni M_1 \triangleleft G$, $[V_2; W_2] \ni M_2 \triangleleft G$. Зрозуміло, що $M_1 \cap M_2 = U_2 \cap U_3 = \langle g \rangle \triangleleft G$ і, значить, G – дедекіндова група, що не так. Таким чином, R розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп. Очевидно, що G/R – УЩН $[\overline{C}]$ -група. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 3.2.1. *Періодичні локально ступінчасті недисперсивні УЩН $[\overline{C}]$ -групи є скінченними мінімальними недисперсивними групами та вичерпуються групами типів 1 – 4 теореми 3.1.1.*

Доведення наслідку безпосередньо випливає з теорем 3.1.1 та 3.1.2.

Т е о р е м а 3.2.2. *Періодичні локально ступінчасті недедекіндові УЩН $(\overline{C})$ - та УЩН $[\overline{C})$ -групи G є розв'язними дисперсивними черніковськими групами.*

Доведення. Нехай G з умови теореми. Оскільки всяка УЩН($\overline{C}$)- і УЩН $[\overline{C}]$ -група є УЩН $[\overline{C}]$ -групою, то при $|G| = \infty$ твердження теореми випливає з теореми 3.2.1.

Нехай $|G| < \infty$. Тоді G – черніковська група. Покажемо, що G – дисперсивна група. Припустимо, що це не так. Тоді G задовольняє умову теореми 3.1.1 і G – група типу 1 – 4 згаданої теореми.

Нехай G – група одного з типів 1, 2 теореми 3.1.1. Тоді $G = D \cdot T$, де D – ненормальна силовська 2-підгрупа з G , $|D| \in \{8, 16\}$, T – ненормальна силовська 3-підгрупа з G , $|T| = 3$. Підгрупа D групи G типу 1 містить нециклічну підгрупу $X = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 2$, а підгрупа D групи G типу 2 містить підгрупу кватерніонів $X = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|X| = 8$. Звідси $|[X; G]| > 2$ і за означенням УЩН($\overline{C}$)- та УЩН $[\overline{C}]$ -груп $(X; G) \in N \triangleleft G$ і $[X; G] \in N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $N < G$.

Нехай $D_1 = N \cap D$. Оскільки D – максимальна ненормальна підгрупа з G , то $D \not\leq N$. Звідси $D_1 < D$ і, значить, $D_1 = X$, при цьому в групі G типу 1 $N \cap A = \langle a \rangle \triangleleft G$, $|a| = 2$, а в групі G типу 2 $N \cap A = \langle a \rangle \triangleleft G$, $|a| = 4$. Останні співвідношення неможливі оскільки $A \times \langle c \rangle$ – група Шмідта. Отже, G не може бути групою типу 1, 2 теореми 3.1.1.

Припустимо, що G – група типу 3 чи 4 теореми 3.1.1. Тоді за теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] G має максимальну підгрупу Шмідта $M = A \times \langle c \rangle$, у якій: для груп G типу 3 A – група кватерніонів і всі власні нормальні підгрупи з G належать $\Phi(A)$; для груп G типу 4 A – група типу $(2, 2)$, G – проста група. Зрозуміло, що $|[A; G]| > 2$ і за означенням УЩН($\overline{C}$)- та УЩН $[\overline{C}]$ -груп $(A; G) \in N \triangleleft G$, $[A; G] \in N \triangleleft G$, де $N < G$ і $|N| > 2$, що неможливо. Таким чином, G – скінченна дисперсивна і, значить, розв’язна група. Як і в теоремі 3.1.2 можна показати, що ступінь розв’язності G обмежена. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.2.3. *Періодичні локально ступінчасті недедекіндові недисперсивні УЩН($\overline{C}$)-групи G є скінченними мінімальними недисперсивними групами та вичерпуються групами типів:*

1) $G = A \rtimes D$, A – група типу $(2, 2)$, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $A \rtimes \langle b \rangle$ та $A \rtimes \langle c \rangle$ – групи Міллера-Морено;

2) $G = A \cdot D$, $A \triangleleft G$, A – група кватерніонів порядку 8, $D = Q \rtimes \langle b \rangle$ – група Шмідта, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$, $A \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 , $|b| = 4$, $A \rtimes \langle c \rangle$ – група Шмідта;

3) $G \cong SL(2, 5)$;

4) $G \cong PSL(2, p)$, $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – група з умови теореми. Оскільки УЩН $(\overline{C})$ -група є УЩН $[\overline{C}]$ -групою, то завдяки теоремам 3.1.1 та 3.1.2 G – скінченна мінімальна недисперсивна група і є групою одного з типів 1 – 4 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 4 теореми. Очевидно, що G – періодична локально ступінчаста недедекіндова недисперсивна група. Покажемо, що G – УЩН $(\overline{C})$ -група. Нехай $|[X; Y]| > 2$, X – нециклічна підгрупа. При $Y = G$ $(X; Y) \in N \triangleleft G$, що й потрібно було доказати. Отже, нехай $Y < G$. Тоді X належить деякій 3-максимальній підгрупі групи G . Покажемо, що в кожній групі типу 1 – 4 підгрупа X циклічна.

Нехай G – група типу 1, 2 теореми. Тоді кожна її максимальна підгрупа M_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ ізоморфна групі одного з типів: $M_1 \cong A \cdot \langle b \rangle \not\triangleleft G$, $A \cdot \langle b \rangle$ – силовська 2-підгрупа з G ; $M_2 \cong \langle c \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $b^{-1} c b = c^{-1}$; $M_3 \cong A \rtimes \langle c \rangle$ – група Шмідта. Зауважимо, що в групах G типу 1 A – група типу $(2, 2)$, $|b| = 2$, в групах G типу 2 A – група кватерніонів порядку 8, $|b| = 4$, $A \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4 . Зрозуміло, що $[G : X]$ ділиться на добуток трьох простих чисел, Y належить M_i і, значить, $[Y : X]$ ділиться на добуток двох простих чисел.

Для груп G типу 1 $|G| = 2^3 \cdot 3$. Тоді $|X|$ – просте число і, значить, X – циклічна група.

Нехай G – група типу 2. Тоді Y належить M_i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Якщо $Y \leq M_1$, то $[Y : X]$ – ділиться на 4 і, значить, $|X| \leq 4$. Звідси X – циклічна група. Нехай $Y \leq M_2$. Оскільки в M_2 всі власні підгрупи

циклічні, то X – циклічна група. Припустимо, що $Y \leq M_3$. Оскільки M_3 – група Шмідта порядку $2^3 \cdot 3$ з нормальною силовською 2-підгрупою, то при $[Y : X]$ ділиться на 3 одержимо, що X – власна підгрупа групи кватерніонів порядку 8 і, значить, X – циклічна група. Нехай $[Y : X]$ не ділиться на 3. Тоді $|X|$ ділиться на 3 і в групі Шмідта M_3 будь-яка максимальна підгрупа циклічна порядку 6. Звідси випливає, що X – циклічна група.

Нехай G – група типу 3, 4 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] G має максимальні підгрупи M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тільки одного з типів:

$M_1 \cong \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = p$, $|b| = (p-1)/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k=2$ $G \cong PSL(2, p)$, G – проста група, M_1 – група Фробеніуса, при $k=1$ $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle f \rangle$, $|f| = 2$, $f \in Z(G)$, $G/\langle f \rangle \cong PSL(2, p)$, $M_1/\langle f \rangle$ – група Фробеніуса;

$M_2 \cong \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $|b| = (p-1)/k$, $d^{-1} b d = b^{-1}$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle b \rangle \cap \langle d \rangle| = 2^{k-1}$, при $k=1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k=2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_3 \cong \langle c \rangle \cdot \langle d \rangle$, $d^{-1} c d = c^{-1}$, $|c| = (p+1)/k$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle c \rangle \cap \langle d \rangle| = 2^{k-1}$, при $k=1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k=2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_4 \cong F \rtimes \langle q \rangle$ – група Шмідта, $|q| = 3$, $|F| = 8/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k=1$ F – група кватерніонів порядку 8, $G \cong SL(2, p)$, при $k=2$ F – група типу $(2, 2)$, $G \cong PSL(2, p)$;

$M_5 \cong \langle q \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|q| = 3$, $|d| = 4/k$, $d^{-1} q d = q^{-1}$, $k \in \{1, 2\}$, при $k=1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k=2$ $G \cong PSL(2, p)$.

Зрозуміло, що $Y \leq M_i$, $[Y : X]$ ділиться на добуток двох простих чисел. В групах G типу 4 $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і, значить, X – циклічна група. Якщо G – група типу 3, то при $i < 5$ $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох послідовних чисел і тому знову X – циклічна група. Припустимо, що $i = 5$. Тоді M_5 ізоморфна групі M_2 із випадку, коли G – група типу 1, 2 теореми. Користуючись цим, одержуємо, що X – циклічна група.

Отже, завжди X – циклічна група, що суперечить вибору X . Одержана суперечність і закінчує доведення достатності. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.2.4. Нескінченні періодичні локально ступінчасті недисперсивні $\text{ЩН}[\overline{C}]$ -групи вичерпуються періодичними дедекіндовими групами, у яких $|\pi(G)| = \infty$.

Доведення теореми безпосередньо випливає з теореми 3.1.3 і означення $\text{ЩН}[\overline{C}]$ -груп.

РОЗДІЛ IV

ДИСПЕРСИВНІ ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТІ УЩН[$\overline{C}$]-ГРУПИ

У даному розділі вивчаються локально ступінчасті дисперсивні нескінченні УЩН[$\overline{C}$]-групи, що мають ненормальні силовські підгрупи (теорема 4.2.1). Виявилось, що при цьому суттєво використовується опис деяких класів скінченних груп, які не породжуються своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами (теорема 4.1.1). Зауважимо, що теорема 4.1.1 має і певне самостійне значення.

4.1. Деякі корисні результати

Л е м а 4.1.1. *Скінченні p -групи G з циклічними n -максимальними підгрупами, $n > 0$, вичерпуються групами типів:*

- 1) G – циклічна p -група;
- 2) G – p -група порядку p^α , що містить підгрупу типу (p, p) , $1 < \alpha \leq n + 1$;
- 3) G – група кватерніонів порядку 2^α , $2 < \alpha \leq n + 2$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – p -група порядку p^α і в G циклічні всі n -максимальні підгрупи. Якщо G – циклічна група, то вона група типу 1 леми. Нехай G – нециклічна група. Розглянемо два можливі випадки: 1) G містить підгрупу типу (p, p) ; 2) G не містить підгруп типу (p, p) .

Випадок 1. У цьому випадку G містить підгрупу X типу (p, p) , тому $\alpha > 1$. Оскільки всі n -максимальні підгрупи з G циклічні, то X не може бути більше ніж $(n - 1)$ -максимальною підгрупою групи G . Нехай X – k -максимальна підгрупа з G . Тоді $[G : X] = p^k$, $k \leq n - 1$, $\alpha = k + 2$. Звідси $1 < \alpha \leq n + 1$ і G – група типу 2.

Випадок 2. У цьому випадку в силу нециклічності групи G і теореми 12.5.1 з [119] G – група кватерніонів. Звідси $\alpha > 2$ і G містить підгрупу кватерніонів Q порядку 8. Нехай $[G : Q] = 2^k$. Тоді за умовою $\alpha < k$. Звідси $\alpha = k + 3$, $2 < \alpha \leq n + 1$ і G – група типу 3 леми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 3 леми, X – її n -максимальна підгрупа. Тоді $|G| = p^\alpha$, $[G : X] = p^n$, $|X| = p^\beta$, $\alpha = n + \beta$. Очевидно, що для груп G типу 1 підгрупа X циклічна. Нехай G – група типу 2. Тоді $\alpha \leq n + 1$. Звідси $n + \beta \leq n + 1$ і, значить, $\beta \leq 1$ і тому X – циклічна група.

Припустимо, що G – група типу 3. Тоді $n + \beta = \alpha \leq n + 2$. Звідси $\beta \leq 2$. Оскільки G – група кватерніонів, то в ній тільки одна підгрупа порядку 2. З цього випливає, що підгрупа X порядку ≤ 4 циклічна.

Отже, завжди X – циклічна група і тому G – група з циклічними n -максимальними підгрупами. Достатність доведено. Теорему доведено.

З теореми 2.1.1 про $H(\overline{C})$ -групи випливає

Л е м а 4.1.2. *Примарні метациклічні $H(\overline{C})$ -групи G вичерпуються групами типів:*

1) G – метациклічна дедекіндова p -група, тобто G – абелева група типу (p^α, p^β) , чи G – група кватерніонів порядку 8;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

3) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$;

4) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 4$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$.

Л е м а 4.1.3. *Група кватерніонів G порядку 2^n тоді і тільки тоді породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами, коли $n > 4$.*

Доведення. Необхідність. Нехай G – група кватерніонів порядку 2^n , яка породжується своїми 2-максимальними нециклічними підгрупами X . Тоді $[G : X] = 4$. Оскільки X – нециклічна група і в групі кватерніонів G немає підгруп типу $(2, 2)$, то $|X| > 4$. Звідси $|G| > 2^4$ і, значить, $n > 4$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група кватерніонів порядку 2^n , $n > 4$. Тоді $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = 4$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$, $|G| = 2^{a+1}$. Звідси $\alpha + 1 = n > 4$ і тому $\alpha > 3$.

Покладемо $c = 2^{a-2}$, $d = ab$. Тоді, очевидно, $|c| = |d| = 4$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $Q_1 = \langle c, b \rangle$ і $Q_2 = \langle c, d \rangle$ – групи кватерніонів порядку 8, а значить, $[G : Q_1] > 2$, $[G : Q_2] > 2$. Зрозуміло, що G має 2-максимальні підгрупи M_1 і M_2 , для яких $M_1 \geq Q_1$, $M_2 \geq Q_2$. Нехай $M = \langle M_1, M_2 \rangle$.

Тоді $b \in Q_1 \leq M_2 \leq M$, $d \in Q_2 \leq M_2 \leq M$. Звідси $db^{-1} = a bb^{-1} = a \in M$ і, значить, $G = M$. Достатність доведено. Лему доведено.

Н а с л і д о к 4.1.1. Група кватерніонів порядку 2^n тоді і тільки тоді не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами, коли $n < 5$.

Наслідок безпосередньо випливає з леми 4.1.3.

З твердження 1.1.4 випливає наступна лема

Л е м а 4.1.4. Скінченні примарні групи G , що не породжуються своїми 2-максимальними підгрупами, вичерпуються групами типів:

- 1) $G = \langle a \rangle$, $|a| = p^a$, $a > 0$, p – просте число;
- 2) $G = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^a$, $a > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p – просте число, при $|a| = 4$ $[a, b] \neq 2$.

Л е м а 4.1.5. Всі скінченні групи G , що не породжуються своїми 2-максимальними підгрупами і мають таку нормальну підгрупу N типу (p, p) , де p – просте число, для якої G/N – примарна циклічна група, вичерпуються групами типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^a$, $a > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$;
- 2) $G = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle a \rangle$, $|c| = |d| = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $|a| = q^4$, $\Delta > 0$, p і q – різні прості числа;
- 3) $G = (\langle a \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|c| = |d| = p$, $|a| = q^4$, $\Delta > 0$, p і q – різні прості числа, елемент a індукує на $(\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ незвідний автоморфізм.

Доведення. Необхідність. Нехай G і N задовольняють умову леми. Тоді G містить нормальну підгрупу N типу (p, p) і G/N – примарна циклічна група. Звідси $G = N \cdot \langle a \rangle$, де $|a| = q^4$, $\Delta \geq 0$, q – не обов'язково відмінне від p просте число. Якщо $G = N$, то G – група типу 1.

Нехай $G < N$. Тоді $\Delta > 0$, $N \cap \langle a \rangle \leq \langle a^q \rangle$. Припустимо, що $N \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тоді $\omega(\langle a \rangle) \leq N$, а значить, $p = q$ і $\Delta > 1$. Зрозуміло, що $\langle a \rangle$ – максимальна підгрупа p -групи G . Звідси N містить d , $d \notin \langle a \rangle$, $G = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $G' \leq N \cap \langle a \rangle = \omega(\langle a \rangle)$. Покладемо $\Delta = \alpha$ і одержимо, що G – група типу 1.

Нехай $N \cap \langle a \rangle = 1$. Тоді $G = N \rtimes \langle a \rangle$. Припустимо, що N містить c , $|c| = p$ і $\langle c \rangle \triangleleft G$. Тоді $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|d| = p$ і G – група типу 2. Припустимо, що N не містить нормальних в G підгруп порядку p . Тоді a індукує на N незвідний автоморфізм. Зрозуміло, що $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$ – просте число, відмінне від q і G – група типу 3. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 3 леми. Тоді, очевидно, G – скінченна група. Покажемо, що G містить нормальну підгрупу N типу (p, p) , для якої G/N – примарна циклічна група. В групі G типу 1 покладемо $N = \omega(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$. При $|a| \in \{p, p^2\}$ $N \triangleleft G$ і G/N – циклічна p -група. При $|a| > p^2$ $N = \omega(G)$ і, значить $N \triangleleft G$ і G/N – циклічна p -група. В групі G кожного з типів 2 та 3 покладемо $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. Ясно, що $N \triangleleft G$ і G/N – примарна циклічна група.

Тепер для завершення доведення достатності залишається показати, що 2-максимальні нециклічні підгрупи породжують власну підгрупу M групи G . Зрозуміло, що $M \triangleleft G$ і $|G|$ ділиться на p^2 . Якщо G немає нециклічних 2-максимальних підгруп, то за означенням $M = 1$, $M < G$.

Нехай G має нециклічні 2-максимальні підгрупи і X – одна із таких підгруп. Тоді $|G|$ ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Звідси в групі G типу 1 $a > 2$ і G – група типу 3 леми 4.1.4. За твердженням згаданої леми G не породжується всіма своїми, а значить, і нециклічними 2-максимальними підгрупами. Отже, $M < G$.

Нехай G – група типу 2 чи 3 леми. Тоді $\Delta > 1$. Звідси N належить деякій нециклічній 2-максимальній підгрупі з G , а значить, $N \leq M$. Якщо $N = M$, то $M < G$. Нехай $N < M$. Зрозуміло, що $N \rtimes$

$\langle a^{q^2} \rangle = M_1$ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G , $M_1 \triangleleft G$ і, значить, $M_1 \leq M$. Якщо $M_1 = M$, то $M < G$. Припустимо, що $M_1 < M$. Тоді існує нециклічна 2-максимальна підгрупа U , що не належить M_1 . Покладемо $M_2 = M_1 \cdot U$. Тоді $M_1 < M_2 \leq M$, $M_2 \triangleleft G$. Ясно, що $U \setminus M_1$ містить q -елемент u .

Припустимо, що $|u| = |a|$. Тоді $\langle u \rangle$ – 2-максимальна підгрупа з G , що неможливо в силу нециклічності U . Отже, $|u| < |a|$. Зрозуміло, що G/N – циклічна q -група, M_1/N – її підгрупа індексу q^2 , $|Nu| < |Na|$. Але тоді існує нециклічна підгрупа $M_3 = M_1 \cdot \langle u \rangle$,

для якої $M_1 < M_3$, M_3/N – циклічна група, порядок якої менше $|a|$, M_1/N – власна підгрупа з M_3/N і $[G/N : M_1/N] = q^2$. Звідси $[G/N : M_3/N] = q$, $[G : M_3] = q$, $M_3 \leq M$. Якщо $M_3 = M$, $M < G$.

Нехай $M_3 < M$. Тоді існує нециклічна 2-максимальна підгрупа V , що не належить M_3 . Таким чином, $V \setminus M_3$ містить q -елемент v . Зрозуміло, що $|v| < |a|$, тому $[G : M_3 < v>] = q$, а значить, $v \in M_3$, що не так. Отже, завжди $M < G$. Достатність доведено. Лему доведено.

Л е м а 4.1.6. *Всі скінченні групи G , що не породжується нециклічними 2-максимальними і мають таку нормальну підгрупу N типу (p, p) , де p – просте число, для якої G/N – група кватерніонів порядку 8, вичерпуються групами типів:*

$$1) G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle, |a| = |b| = 8, |\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2, b^{-1}ab = a^{-1};$$

2) $G = P \rtimes Q$ – група Фробеніуса, P – силовська підгрупа групи G типу (p, p) , $p > 2$, $Q = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, будь-який елемент v із Q , що не належить $\langle b \rangle$, індукує на P незвідний автоморфізм.

Доведення. Необхідність. Нехай M – підгрупа, яка породжена всіма нециклічними 2-максимальними підгрупами. Тоді $M < G$ і $M \triangleleft G$. Зрозуміло, що N належить деякій нециклічній 2-максимальній підгрупі групи G , а значить, $N \leq M$. Нехай Φ/N – підгрупа Фраттіні групи кватерніонів G/N . Тоді Φ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G , $\Phi \leq M$ і $\Phi \triangleleft G$. Розглядемо далі два можливі випадки: 1) N доповнюється в G ; 2) N не доповнюється в G .

Випадок 1. У цьому випадку $G = N \rtimes Q$, де $Q = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8. Припустимо, що $p = 2$. Тоді G – 2-група і N містить c , $|c| = 2$, $c \in Z(G)$. Ясно, що в G існують нециклічні 2-максимальні підгрупи $M_1 = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $M_2 = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, а значить, $M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$, $Q = \langle a, b \rangle \leq M$. Але тоді $M = G$, що не так. Отже, $p > 2$.

Якщо Q – не максимальна в G , то $Q \leq M$ і тому $M = G$, що неможливо. Таким чином, Q – максимальна підгрупа з G . Але тоді N – мінімальна нормальна підгрупа з G і G – ненільпотентна група. Звідси G містить підгрупу Шмідта $S = P_1 \rtimes \langle d \rangle$, де без порушення загальності можна вважати, що $d \in Q$, $\langle d \rangle$ – ненормальна силовська 2-підгрупа з S , $P_1 = S \cap N$ – нормальна силовська p -підгрупа з S . З

будови груп Шмідта (див., наприклад, [твердження 1.1.6]) одержуємо, що $|P_1| = p$. За теоремою Машке [128, теорема 20.2.2] $N = P_1 \times P_2$, $|P_2| = p$, $[<d>, P_2] \leq P_2$. Зрозуміло, що $|d| \in \{2, 4\}$.

Припустимо, що $|d| = 4$. Покладемо $T = N \cdot S$. Зрозуміло, що S – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G і, значить, $S \leq M$, $T = N \ltimes \langle d \rangle$, $[G : T] = 2$. Звідси $T = M$.

Нехай $[<d>, P_2] = 1$. Тоді $P_2 \leq Z(M) = Z(T)$ і, значить, $P_2 \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності N в G . Отже, $[<d>, P_2] = P_2$. Зрозуміло, що $Z(S) = \langle d^2 \rangle = \Phi(Q)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle d \rangle \neq \langle a \rangle$. Тоді $Q = \langle a, d \rangle$. Припустимо, що $[N, \langle a \rangle] = 1$. Без порушення загальності можна вважати, що $b = ad$. Тоді $b^{-1} P_1 b = (a d)^{-1} P_1 (a d) = d^{-1} P_1 d = P_1$. Оскільки $[P_1, \langle d \rangle] = P_1$, то $[P_1, \langle b \rangle] = P_1$. Звідси $P_1 \ltimes \langle b \rangle$ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G і тому $P_1 \ltimes \langle b \rangle \leq M$, $ad = b \in M$, а значить, $Q \leq M$, що неможливо. Отже, $[N, \langle a \rangle] \neq 1$ і тому $N \ltimes \langle a \rangle$ – ненільпотентна нормальна в G підгрупа.

Зрозуміло, що $[P_1, \langle d^2 \rangle] = 1$. Припустимо, що $[P_2, \langle d^2 \rangle] \neq 1$. Тоді $[P_2, \langle d^2 \rangle] = P_2$. З цього випливає, що P_1 – силовська p -підгрупа центру нормальної в G підгрупи $\Phi(G)$. Але тоді $P_1 \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G . Отже, $[P_1, \langle d^2 \rangle] = 1$, а значить, $d^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $N \ltimes \langle a \rangle$ містить підгрупу Шмідта $S_1 = P_3 \ltimes \langle a_1 \rangle$, де P_3 – нормальна силовська p -підгрупа з S_1 , $\langle a_1 \rangle$ – ненормальна силовська 2-підгрупа з S_1 . Оскільки $\langle a^2 \rangle = \langle d^2 \rangle \leq Z(G)$, то $|a_1| > 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $\langle a_1 \rangle = \langle a \rangle$. Звідси $|P_3| = p$ і тому S_1 – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G , $a \in S_1 \leq M$, а значить, $\langle a, d \rangle = Q \leq M$, що неможливо. Отже, припущення $|d| = 4$ приводить до суперечності. Звідси $|d| = 2$.

Припустимо, що $[P_2, \langle d \rangle] = 1$. Тоді P_2 – силовська підгрупа з $Z(\Phi)$ і, значить, $P_2 \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності N в G . Таким чином, $[P_2, \langle d \rangle] = P_2$. Оскільки $|d| = 2$, d – єдина інволюція з Q , яка, очевидно, належить кожній неодиначній підгрупі з Q і d індукує на N регулярний автоморфізм, то будь-який неодиначний елемент із Q індукує на N регулярний автоморфізм.

Звідси не існує неединичного елемента x із N і неединичного елемента y із Q , для яких $[x, y] = 1$ і тому завдяки [129] G – група Фробеніуса.

Припустимо, що a та b індукують на N звідний автоморфізм. Оскільки G – ненільпотентна група, то без порушення загальності можна вважати, що $[N, \langle b \rangle] \neq 1$. Як і раніше, можна показати, що $N = P_1 \times P_2$, $|P_1| = |P_2| = p$, $[P_1, \langle b \rangle] = P_1$. Звідси $P_1 \lambda \langle b \rangle$ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G і тому $b \in M$. Звідси легко бачити, що $Q \leq M$, що не так. З припущення, що $v \in Q \setminus \langle b \rangle$ індукує на N звідний автоморфізм, можна, як і для b одержати, що $N = P_3 \times P_4$, $|P_3| = |P_4| = p$, $[P_3, \langle v \rangle] = P_3$. Звідси $P_3 \lambda \langle v \rangle$ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G і, значить, $v \in M$. Тоді $Q \leq M$, що не можливо. Отже, v індукує на N незвідний автоморфізм і G – група типу 2 розглядуваної леми. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $p = 2$, G – 2-група і тому $|G| = 2^5$, $G = A \cdot B$, $A = N \langle a \rangle$, $B = N \langle b \rangle$, $A \triangleleft B$, $B \triangleleft G$, $A \cap B = \Phi$, $|A| = 2^\alpha$, $\alpha > 1$, $|B| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|Na| = |Nb| = 4$.

Припустимо, що $N \leq Z(G)$. Тоді з недоповнювальності N в G завдяки твердженню 1.1.11 з [56] $G = N \cdot H$, де $H = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $|u| = |v| = 4$, $[u, v] = u^2$, $N \cap \langle u \rangle = \langle c \rangle$, $c = u^2 v^2$, $G' = \langle u^2 \rangle$. Ясно, що $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|d| = 2$, $d \notin H$. Звідси $\langle d \rangle \times \langle u \rangle$, $\langle d \rangle \times \langle v \rangle$ – нециклічні 2-максимальні підгрупи з G . Тому $u \in M$, $v \in M$, $H \leq M$, що неможливо. Отже, $N \not\leq Z(G)$.

Нехай $C = C_G(N)$. Тоді $C \triangleleft G$, $C < G$ і G/C – ізоморфна групі із $Aut N$. Відомо [120], що силовські 2-підгрупи з $Aut N$ порядку 2. Звідси $[G : C] = 2$. Зрозуміло, що $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = 2$, $c \in Z(G)$. Припустимо, що $N \cap \langle b \rangle = N \cap \langle a \rangle = 1$. Тоді в G існують нециклічні 2-максимальні підгрупи $\langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle$ і, значить, $a \in M$, $b \in M$, $M = G$, що не так. Отже, без порушення загальності можна вважати, що $N \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тоді $|a| = 2^3$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle \lambda \langle v \rangle$, $|v| = 2$. Оскільки $[G : C] = 2$, то $a^2 \in C$ і, значить, $a^2 \in Z(A)$. В силу теореми 12.5.1 з [119] $[\langle a \rangle, \langle v \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$. Зрозуміло, що $\langle a^2 \rangle = \Phi(A) \triangleleft G$, а значить, $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(\langle a^2 \rangle) = \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$. Тому без порушення загальності $\omega(\langle a \rangle) = \langle c \rangle$, $\langle v \rangle = \langle d \rangle$. Ясно, що $[G : A] = 2$, $b \notin A$, $b^2 \in A$, $|b| \in \{4, 8\}$, $\omega(A) = N$.

Припустимо, що $|b| = 4$. Якщо при цьому $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, то $B = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, $\Phi(A) = \langle b^2 \rangle \triangleleft G$. Але тоді $N = \omega(\langle a \rangle) \times \omega(\langle b \rangle) \leq Z(G)$, що не так. Отже, $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тоді $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle = \langle b \rangle \cap A = \langle c \rangle$ і, значить, $G/N = \langle Na \rangle \rtimes \langle Nb \rangle$, що неможливо. Таким чином, $|b| = 8$.

Ясно, що $b^2 \in \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$ і $|a^2| = |b^2| = 4$. Звідси $b^4 \in \langle a^4 \rangle$, а значить, $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle$ містить c . Покладемо $F = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$. Тоді $F \triangleleft G$, $[G : F] = 4$ і тому G/F – абелева група.

Покладемо $f = [a, b]$. Тоді з неабелевості G/N випливає, що $F \not\triangleleft N = \omega(F)$. Оскільки F – група типу $(4, 2)$, то $|f| = 4$. В групі F існують тільки дві різні циклічні підгрупи $\langle a^2 \rangle$ та $\langle a^2 d \rangle$ порядку 4. Оскільки $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ і $F \triangleleft G$, то $\langle a^2 d \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що $\langle f \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle a^2 d \rangle\}$. Але тоді $\langle f \rangle \triangleleft G$ і $G' = \langle f \rangle$. Легко бачити, що $\langle a \rangle \cap \langle d \rangle = \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. За попереднім, $[G : C] = 2$. Звідси без порушення загальності можна вважати, що $a \in C$. Отже, $[a, d] = 1$ і тому $A = \langle a \rangle \times \langle d \rangle$.

Припустимо, що $\langle a^2 \rangle \leq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Тоді $\langle a^2 \rangle \leq Z(G)$ і $[a, f] = 1$. Звідси $1 = [a^2, b] = [a, b]^2 = f^2$, що не так. Отже, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle c \rangle$ і, значить, $\langle b^2 \rangle = \langle a^2 d \rangle$. Але тоді $A = \langle a \rangle \times \langle b^2 \rangle$. Зрозуміло, що $F = \Phi(G)$ і $\langle f \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle b^2 \rangle\}$. Звідси $\langle a \rangle \triangleleft G$ або $\langle b \rangle \triangleleft G$ і $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $f \in \langle a \rangle$. Тоді $f = \langle a^2 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ і G – група типу 1 розглядуваної леми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група типу 1, 2 леми. Тоді G – скінченна група. Покажемо, що G має нормальну підгрупу N типу (p, p) , для якої G/N – група кватерніонів порядку 8. В групах G типу 1 покладемо $d = a^2b$. Тоді $|d| = 2$, $\langle d \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, $\omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$. Покладемо $N = \omega(\langle a \rangle) \times \langle d \rangle$. Тоді, очевидно, $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) і G/N – група кватерніонів порядку 8. В групах G типу 2 покладемо $N = P$. Тоді $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) і G/N – група кватерніонів порядку 8. Для завершення доведення достатності покажемо, що нециклічні 2-максимальні підгрупи групи G породжують власну підгрупу M . Зрозуміло, що $N \leq M$. Нехай Φ/N – підгрупа Фраттіні групи кватерніонів G/N . Тоді, очевидно, $\Phi \triangleleft G$,

$[G : \Phi] = 4$, Φ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G , а значить, $\Phi \leq M$. Ясно, що $|\Phi| = 2p^2$.

Нехай G – група типу 1 леми. Тоді $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = 2$, $\langle c \rangle = \omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle b \rangle) \leq Z(G)$, $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|G| = 2^5$. Легко бачити, що $N = \omega(G)$, $\Phi(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$ і $\Phi(G)$ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G . Зрозуміло, що G має такі 3-максимальні підгрупи: $M_1 = \langle a \rangle \times \langle d \rangle$; $M_2 = \langle b \rangle \times \langle d \rangle$; $M_3 = \langle ab \rangle \times \langle d \rangle$, $\langle (ab)^2 \rangle = \langle b^2 \rangle \leq Z(G)$. Нехай X – нециклічна 2-максимальна підгрупа з G . Тоді $X \leq M_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $[G : X] = 4$. Звідси $|X| = 2^3$. Оскільки $|X| = 2^3$, $|a| = |b| = |ab| = 2^3$, то $a, b, ab \notin X$. Але тоді X – нециклічна максимальна підгрупа з M_i . В підгрупі M_1 $X = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$, в підгрупі M_2 $X = \langle b^2 \rangle \times \langle d \rangle$, в підгрупі M_3 $X = \langle (ab)^2 \rangle \times \langle d \rangle$. Звідси $X = \Phi(G)$ і, значить, M – власна підгрупа з G .

Нехай $G = P \rtimes Q$ – група Фробеніуса типу 2 розглядуваної леми. Зрозуміло, що P – нормальна в G силовська підгрупа типу (p, p) , $p > 2$, Q – силовська 2-підгрупа з G , ізоморфна групі кватерніонів порядку 8 і Q – максимальна підгрупа з G . Очевидно, що $U = N \rtimes \Phi(Q)$ є нормальною в G нециклічною 2-максимальною підгрупою з G , а значить, $U \leq M$. Якщо $U = M$, то $M < G$.

Припустимо, що $U < M$. Тоді M містить нециклічну 2-максимальну підгрупу V з G , яка не належить U і $V \neq Q$. Зрозуміло, що всі елементи порядку p і інволюції з G належить U . Звідси в $V \setminus U$ знайдеться такий елемент v , що $|v| = 2^\Delta$ і $\Delta > 1$. Без порушення загальності можна вважати, що $v \in Q$.

Нехай $|v| = 4$ і нехай $N_1 = V \cap N$. Тоді $N_1 \triangleleft V$, N_1 – силовська p -підгрупа з V і, значить, V містить підгрупу $V_1 = N_1 \times \langle v \rangle$. З того, що V – 2-максимальна підгрупа з G , маємо $N_1 < N$ і тому $|N_1| = p$. Оскільки $Q \not\leq V$, то $V = N_1 \times \langle v \rangle$. Зрозуміло, що $\langle v^2 \rangle = \Phi(Q)$. Покладемо $M_1 = U \cdot V$. Тоді $M_1 = (N \rtimes \Phi(Q)) \cdot (N_1 \times \langle v \rangle) = N \times \langle v \rangle$ і, значить, $M_1 \triangleleft G$ і $M_1 < G$. Якщо $M_1 = M$, то $M < G$. За властивістю досліджуваних груп G із нормальності N_1 в V_1 випливає, що $\langle v \rangle \neq \langle a \rangle$. Звідси $Q = \langle v, a \rangle$.

Припустимо, що $M_1 < M$. Тоді існує нециклічна 2-максимальна підгрупа W з G , що $W \leq M_1$ і $W \not\leq M_1$. Як і для U та V одержимо, що $W \setminus M_1$ містить w , $|w| = 4$, $w \in Q$. Далі, як і для V встановлюємо,

що $W = N_2 \rtimes \langle w \rangle$, де $N_2 = W \cap N$, $|N_2| = p$. Зрозуміло, що $Q = \langle v, w \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $\langle v \rangle = \langle b \rangle$. Тоді $w \notin \langle b \rangle$ і w індукує на $N = P$ звідний автоморфізм, що суперечить властивостям розглядуваних груп. Отже $M_1 = M < G$ і, значить, завжди M – власна підгрупа з G . Достатність доведено. Лему доведено.

Л е м а 4.1.7. *Всі скінченні групи G , що не породжуються нециклічними 2-максимальними підгрупами і мають таку нормальну підгрупу N типу (p, p) , що G/N – група типу 3 леми 4.1.4, вичерпуються групами типів:*

- 1) G – група порядку p^4 експоненти p^2 , у якій $|w(G)| \in \{p^2, p^3\}$;
- 2) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 2$, $|d| = p$, $|b| \in \{p, p^2\}$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, при $|a| = 8$ $[a, b] \neq 4$;
- 3) $G = P \rtimes Q$, P – мінімальна нормальна підгрупа групи G типу (p, p) , $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, a індукує на P незвідний автоморфізм, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p і q – різні прості числа, при $|a| = 4$ $[a, b] \neq 2$.

Доведення. Необхідність. Нехай G і N задовольняють умову леми, M – підгрупа, яка породжена всіма нециклічними 2-максимальними підгрупами з G . Тоді $M \triangleleft G$ і $M < G$. Оскільки, очевидно, N – нециклічна немаксимальна підгрупа з G , то $N \leq M$. Розглянемо далі два можливих випадки: 1) підгрупа N доповнюється в G ; 2) підгрупа N не доповнюється G .

Випадок 1. В цьому випадку $G = N \rtimes Q$, де Q – група типу 3 леми 4.1.4, для якої $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$, при $|a| = 4$ $[a, b] \neq 2$. Зрозуміло, що Q – власна підгрупа з G . Припустимо, що Q належить деякій 2-максимальній підгрупі групи G . Тоді $Q \leq M$ і, значить, $N \cdot Q = G \leq M = G$, що не так. Звідси Q – максимальна підгрупа групи G і N – мінімальна нормальна підгрупа з G . Але тоді p і q – різні прості числа і $N = P$ – силовська p -підгрупа групи $G = P \rtimes Q$. Зрозуміло, що G – ненільпотентна група.

Припустимо, що $\gamma < 2$. Тоді Q – силовська q -підгрупа типу (q, q) і Q містить елемент x такий, що $[P, \langle x \rangle] \neq 1$. Ясно, що $|x| = q$.

Якщо x індукує на P незвідний автоморфізм, то без порушення загальності можна вважати, що $x = a$ і G – група типу 3 розглядуваної леми.

Припустимо, що будь-який неединичний елемент x із Q індукує на P звідний автоморфізм. Нехай $[P, \langle x \rangle] = 1$. Тоді $Q = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$, $|y| = |x| = q$ і $[P, \langle y \rangle] \neq 1$. За припущенням y індукує на P звідний автоморфізм. Тому за теоремою Машке [128, теорема 20.2.2] $P = P_1 \times P_2$, $|P_1| = |P_2| = p$, $[P_1, \langle y \rangle] \leq P_1$. З цього випливає, що в G існує підгрупа $P_1 \rtimes Q$, що суперечить максимальності Q в G . Отже, y індукує на P незвідний автоморфізм. Покладемо $y = a$, $x = b$ і одержимо, що G – група типу 3.

Нехай тепер $[P, \langle y \rangle] \neq 1$. Зрозуміло, що $Q = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$, $|y| = q$. Оскільки G не є групою Фробеніуса, то без порушення загальності можна вважати, що знайдеться u із P , $|u| = p$ і $[u, y] = 1$. Покладемо $F = P \rtimes \langle y \rangle$. Тоді F – ненільпотентна нормальна підгрупа з G , центр якої містить елемент u . Очевидно, що $y \in Z(F)$. Звідси $Z(F) = \langle u \rangle$, значить, $\langle u \rangle \triangleleft G$. Отже, існує власна підгрупа $\langle u \rangle \rtimes Q$, що суперечить максимальності Q в G . Таким чином, при $\gamma < 2$ G – група типу 3 розглядуваної леми.

Припустимо, що $\gamma > 1$. Зрозуміло, що $P \rtimes \langle a^q \rangle$ та $P \rtimes \langle b \rangle$ – нециклічні підгрупи, які належать M . Звідси $P \rtimes (\langle a^q \rangle \times \langle b \rangle) = M_1 \leq M$, а значить, $M_1 = M$ – максимальна підгрупа групи G . Якщо a індукує на P незвідний автоморфізм, то G – групи типу 3. Нехай a індукує на P звідний автоморфізм. Тоді за теоремою Машке [128, теорема 20.2.2] $P = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$, $[\langle a \rangle, \langle c \rangle] \leq \langle c \rangle$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \leq \langle d \rangle$.

Нехай $[P, \langle a \rangle] = 1$. Оскільки G – ненільпотентна група, то $[P, \langle b \rangle] \neq 1$. Покажемо, що b індукує на P незвідний автоморфізм. Припустимо, що це не так. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[\langle c \rangle, \langle b \rangle] \leq \langle c \rangle$, $[\langle d \rangle, \langle b \rangle] = \langle d \rangle$. Покладемо $a_1 = a b$. Тоді G має нециклічну підгрупу $F = \langle d \rangle \rtimes \langle a_1 \rangle$. Зрозуміло, що $F \leq M$. Звідси $a_1 \in M$, $a \in M$ і $M = G$, що неможливо. Отже, b індукує на P незвідний автоморфізм. Покладемо $a_1 = a b$. Оскільки $[P, \langle a \rangle] = 1$, то a_1 індукує на P незвідний автоморфізм

і оскільки при $|a| = 4$ $|[a, b]| \neq 2$, то $\langle a^q \rangle = \langle a_1^q \rangle$. Без порушення

загальності можна вважати, що $a_1 = a$ і G – групи типу 3 розглядуваної леми.

Припустимо тепер, що $[P, \langle a \rangle] \neq 1$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[\langle d \rangle, \langle a \rangle] = \langle d \rangle$. Звідси $\langle d \rangle \lambda \langle a \rangle \leq M = G$, що неможливо.

Отже, у цьому випадку G – група типу 3 розглядуваної леми.

Випадок 2. У цьому випадку G – p -група і $|G/N| = p^2$, $\gamma > 1$.

Припустимо, що $\gamma < 3$. Тоді $\gamma = 2$ і $|G| = p^4$. Зрозуміло, що G має центральну підгрупу $\langle c \rangle$ порядку p . Нехай $x \in G$, $|x| = p$ і $x \notin \langle c \rangle$. Тоді $\langle c \rangle \times \langle x \rangle$ – нециклічна підгрупа і, очевидно, $\langle c \rangle \times \langle x \rangle \leq M$. Звідси $x \in M$, а значить, $\omega(G) \leq M$. Оскільки $N \leq M$, то $|\omega(G)| \in \{p^2, p^3\}$. Зрозуміло, що $\exp(G) > p$ і $\exp(G) < p^4$. Нехай $\exp(G) = p^3$. Тоді G має циклічну максимальну підгрупу $\langle u \rangle$, $|u| = p^3$, $G = \langle u \rangle \cdot N$ і G/N – циклічна група, що неможливо. Отже, $\exp(G) = p^2$ і G – група типу 1 розглядуваної леми.

Припустимо тепер, що $\gamma > 2$. Тоді $G/N = A/N \lambda B/N$, де A/N – циклічна група порядку p^Δ , $\Delta > 0$, B/N – циклічна група порядку p . Звідси $G = A \cdot B$, $A \cap B = N$, $A = N \cdot \langle a \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $N \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\Delta} \rangle$, $B = N \cdot \langle b \rangle$, $N \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $|b| \in \{p, p^2\}$. Оскільки $\gamma > 0$, то $\Delta > 1$. Ясно, що $B \leq M$, $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$, $c \in Z(G)$.

Нехай $\Delta = \alpha$. Тоді $A = N \lambda \langle a \rangle$, G містить нециклічну підгрупу $F = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $[G : F] > p$ і тому $F \leq M = G$, що не так. Звідси $\alpha = \Delta + 1$, а значить, $\alpha > 2$. Без порушення загальності можна вважати, що $A = \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|d| = p$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$. Зрозуміло, що $A \triangleleft G$, $\langle a \rangle$ – максимальна циклічна підгрупа з A . В силу теореми 12.5.1 з [119] $\omega(A) = N = \omega(\langle a \rangle) \times \langle d \rangle$. Зрозуміло, що $A \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $|b^p| \in \{1, p\}$. Звідси $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle$ і тому $|a| \geq 8$.

Якщо $|a| > 8$, то G – група типу 3.

Нехай $|a| = 8$ і нехай $f = [a, b]$. При $|f| \neq 4$ G – група типу 3. Припустимо, що $|f| = 4$. Ясно, що $f \in G' \leq A$, $\Phi(A) = \langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $|a^2| = 4$ і, значить, $f \in U = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle = \langle a^2 \rangle \cdot N$, $\langle a^2 \rangle \cap N = \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$. Легко бачити, що $U/\omega(\langle a \rangle) = \langle a^2 \rangle / \omega(\langle a \rangle) \times$

$N/\omega(\langle a \rangle)$. Оскільки $N \triangleleft G$ і $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $|\langle a^2 \rangle / \omega(\langle a \rangle)| = 2$, $|N/\omega(\langle a \rangle)| = 2$, а значить, $\langle a^2 \rangle / \omega(\langle a \rangle) \triangleleft G/\omega(\langle a \rangle)$, $N/\omega(\langle a \rangle) \triangleleft G/\omega(\langle a \rangle)$, $\langle a^2 \rangle / \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G/\omega(\langle a \rangle))$, $N/\omega(\langle a \rangle) \leq Z(G/\omega(\langle a \rangle))$. Звідси $[U, G] \leq \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$ і тому клас нільпотентності G не перевищує 3. Зрозуміло, що $\omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle b \rangle)$.
 Покладемо $v = ab$. Оскільки $[G', G] \leq Z(G)$, то в силу твердження 1.1.10 з [56] $v^2 = b^2 a^2 f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$, де $f_1 = [a, b]^3 [[a, b], a]^2 \cdot [[a, b], b]$, $\langle b^2, f_2, f_3, [[a, b], a], [[a, b], b] \rangle \leq \omega(A)$. Покладемо $h = b^2 f_2 f_3 [[a, b], a] [[a, b], b]$. Тоді $|h| \leq 2$. Оскільки $b^2 \in \omega(A)$ і $a^2 \in Z(A)$, то $v^2 = a^2 f^3 h$. Звідси $v^4 = a^4 f^6 h^2 = a^4 \cdot a^4 = 1$. Отже, $|v| < 8$.
 Покладемо $V = N \cdot \langle v \rangle$. Зрозуміло, що $|G| = 2^5$, V – нециклічна група, $|V| < 2^5$. Якщо $|V| < 2^4$, то $V \leq M$ і тому $v \in M$. Звідси випливає, що $a \in M = G$, що не так. Отже $|V| = 2^4$. Тоді $N \cap \langle v \rangle = 1$ і $V = N \rtimes \langle v \rangle$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle \leq M$ і тому $M = G$, що неможливо. Всі випадки розглянули. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 3 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G – скінченна, не більше ніж біпримарна, група. В групі G типу 3 покладемо $N = P$. Тоді $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) , G/N – група типу 3 леми 4.1.4. В групі G типу 2 покладемо $N = \omega(A)$. Ясно, що $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) і G/N – група типу 3 леми 4.1.4.

Припустимо, що G – група типу 1 леми. Якщо $|\omega(G)| = p^2$, то покладемо $N = \omega(G)$. Ясно, що $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) і G/N – група типу 3 леми 4.1.4. Нехай $|\omega(G)| = p^3$. Зрозуміло, що $G' \leq \omega(G)$, $\omega(G)$ містить елемент c , $|c| = p$, $c \in Z(G)$. Оскільки G – p -група експоненти p^2 , то $G = \omega(G) \cdot \langle x \rangle$, $|x| = p^2$, $\omega(G)$ містить елемент u , $|u| = p$ і $\langle c \rangle \neq \langle u \rangle$. Очевидно, що $|G'| \leq p^2$. Якщо $|G'| < p^2$, то покладемо $N = \langle c \rangle \times \langle u \rangle$, де без порушення загальності можна вважати, що $G' \leq N$. Тоді $N \triangleleft G$, N – група типу (p, p) і G/N – група типу 3 леми 4.1.4.

Нехай $|G'| = p^2$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $c \in G'$. Якщо G' – група типу (p, p) , то покладемо $N = G'$ і одержимо, що G/N – група типу 3 леми 4.1.4. Припустимо, що G' – циклічна група. Тоді $G' = \langle u \rangle$, $|u| = p^2$, $u \in \omega(G)$. Оскільки $\omega(G)$ – група порядку p^3 , яка породжується елементами порядку p , то $\omega(G)$ – група діедра порядку 8. Нехай C – централізатор підгрупи $\langle u \rangle$

в G . Тоді $C \triangleleft G$ і G/C – група, що ізоморфна підгрупі із $\text{Aut}\langle u \rangle$. Оскільки $\omega(G)$ – група діедрa порядку 8, то $C < G$, а значить, $[G:C]=2$. Але тоді $G = C \cdot \omega(G)$. Без порушення загальності можна вважати, що $x \in C$.

Припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle u \rangle = 1$. Тоді $G = \langle u \rangle \rtimes \langle x \rangle$ і $G' \leq \omega(u)$, що неможливо. Нехай $\langle x \rangle \cap \langle u \rangle \neq 1$. Покладемо $v = ux$. Тоді, очевидно, $V \notin \omega(G)$ і $|v|=2$, що неможливо, оскільки всі елементи порядку 2 належать $\omega(G)$. Отже, випадок, коли G' – циклічна група порядку p^2 неможливий.

Таким чином, для завершення доведення достатності потрібно показати, що G не породжується своїми нециклічними 2-максимальні підгрупами.

Нехай M – підгрупа, породжена всіма нециклічними 2-максимальними підгрупами групи G . Зрозуміло, що $N \leq M$. Якщо $M < G$, то достатність доведено. Припустимо, що $M = G$. Тоді G має нециклічну 2-максимальну підгрупу U , що не належить N і $U \leq M$.

Нехай G – група типу 1 розглядуваної леми. Тоді будь-яка нециклічна 2-максимальна підгрупа із G належить $\omega(G)$. Зрозуміло, що $M = \omega(G)$ і $M < G$, тобто достатність для груп типу 1 доведено.

Нехай G – група типу 2 розглядуваної леми. Тоді, очевидно, що M містить власну підгрупу $M_1 = (\langle a^p \rangle \times \langle d \rangle) \cdot \langle b \rangle$. Зрозуміло, що $[G:M_1] = p$ і тому G містить нециклічну 2-максимальну підгрупу U , що не належить M_1 . Звідси існує неединичний елемент u із $U \setminus M_1$. Без порушення загальності можна вважати, що $u = a \cdot z$, де $z = d^s b^t$. Легко бачити, що $[G', G] \leq Z(G)$. Тоді в силу твердження 1.1.10 з [56]

$$u^{p^2} = a^{p^2} \cdot z^{p^2} \cdot z_1, \text{ де } z_1 \in G' \cap Z(G), \quad |z_1| \leq p. \text{ Зрозуміло, що } z^{p^2} = 1. \text{ Оскільки при } |a|=8 \quad |[a, b]| \neq 4, \text{ то } \langle u^{p^2} \rangle = \langle a^{p^2} \rangle, \text{ а значить, } |u| = |a|. \text{ Для груп } G \text{ розглядуваного типу } [G : \langle a \rangle] = p^2 \text{ і, значить, } [G : \langle u \rangle] = p^2. \text{ Останнє співвідношення неможливе в силу того, що } U \text{ – нециклічна 2-максимальна підгрупа з } G \text{ і } u \in U. \text{ Отже, для груп типу 2 розглядуваної леми } M < G.$$

Нехай G – група типу 3 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G – нелінійна біпримарна група і M містить нециклічну 2-максимальну підгрупу $M_1 = N \rtimes \langle a^q \rangle$. Ясно, що $M_1 \triangleleft G$ і $M_1 < G$.

Зрозуміло також, що G має нециклічну 2-максимальну підгрупу U і $U \not\leq M_1$. Звідси $U \setminus M_1$ містить неодиначний елемент u . Оскільки N – силовська p -підгрупа з G , то $u \in Q$. Покладемо $P_1 = U \cap N$. Тоді P_1 – нормальна силовська p -підгрупа з U . В силу вибору M_1 одержуємо, що $u \notin \langle a^q \rangle$.

Нехай $C = C_Q(P) = C_Q(N)$. Тоді $C \triangleleft Q$, а значить, $C \triangleleft G$. З будови групи Q випливає, що Q/C не може бути ні групою кватерніонів, ні групою діедра. Розглянемо можливі випадки: 1) G/C – група Фробеніуса; 2) G/C – не група Фробеніуса.

Випадок 1. У цьому випадку в силу [129] Q/C – циклічна група. Ясно, що хоча б один елемент у порядку q із Q належить C і $a \notin C$.

Припустимо, що $a^q = 1$. Тоді $Q = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$. Оскільки U – 2-максимальна підгрупа з G , то $[G : U]$ ділиться на pq . Звідси $|P_1| = p$, $|u| = q$, $U = P_1 \rtimes \langle u \rangle$, $[P_1, \langle u \rangle] = P_1$. Зрозуміло, що $u = a^i b^l$ і не ділиться на q . Але тоді $u^{-1} P_1 u = (a^i b^l)^{-1} P_1 (a^i b^l) = a^{-i} P_1 a^i = P_1$, що суперечить мінімальності нормальності P в G . Отже, $a^q \neq 1$. Оскільки Q/C – циклічна група і елемент a індукує на P незвідний автоморфізм, то всі елементи порядку q із Q належать C . Звідси $b \in C$. Покладемо $M_2 = P \rtimes Q_1$, де $Q_1 = \langle a^q \rangle \times \langle b \rangle$. Ясно, що $M_2 \triangleleft G$, $M_2 < G = M$. Як і раніше, існує нециклічна 2-максимальна підгрупа U , що не належить M_2 . Тоді $U \setminus M_2$ містить неодиначний елемент u . Зрозуміло, що $u \notin Q_1$. Але тоді $u = a^s b^t$. Оскільки $u \notin Q_1$, $b \in Q_1$, то $a^s \notin Q_1$. Звідси s не ділиться на q і тому $|u| = |a|$ і, значить, $[Q : \langle u \rangle] = q$. Зрозуміло, що $|P_1| = p$, $[P_1, \langle u \rangle] = P_1$ і $u^{-1} P_1 u = (a^s b^t)^{-1} P_1 (a^s b^t) = a^{-s} P_1 a^s = P_1$, тобто елемент індукує a на P звідний автоморфізм. Суперечність. Отже, у цьому випадку $M < G$.

Випадок 2. Оскільки у цьому випадку G/C – не група Фробеніуса, то в силу [129] Q/C містить такий елемент v , що $v^q \in C$ і P містить такий елемент x , що $|x| = p$, $[x, v] \in C$.

В силу співвідношень $C \triangleleft G$, $p \neq q$, $P \triangleleft G$ одержуємо, що $[x, v] = 1$. Покладемо $Q_2 = C \cdot \langle v \rangle$ і $D = P \rtimes Q_2$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle \leq Z(D)$. Оскільки P – мінімальна нормальна підгрупа з G , то D – власна підгрупа із G , а значить, $Q_2 < Q$. Припустимо, що $Q_2 \triangleleft Q$. Тоді $D \triangleleft G$. Оскільки $v \notin C$, то D – нелінійотентна група, а значить,

$\langle x \rangle$ – силовська p -підгрупа $Z(D)$. Але тоді $\langle x \rangle \triangleleft G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G . Отже, підгрупа Q_2 ненормальна в Q . Звідси комутант Q не належить Q_2 . Для груп G типу 3 розглядуваної леми $Q' = \omega(\langle a \rangle)$ і, значить, $Q_2 \cap \langle a \rangle = 1$. Ясно, що $|Q / \langle a \rangle| = q$. Звідси $|Q_2| = q$ і тому $Q_2 = \langle v \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $\langle v \rangle = \langle b \rangle = Q_2$ і, значить, $C = 1$. Відомо [120], що Q ізоморфна підгрупі із $\text{Aut}P \cong GL(2, p)$. За теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] всяка силовська q -підгрупа з $GL(2, p)$ при $q > 2$ абелева. Звідси $q = 2$. Крім того, неабелеві силовські 2-підгрупи з $GL(2, p)$ можуть бути лише групами кватерніонів чи групами діедра. В розглядуваному типі груп неабелева група Q не може бути ні групою квантеріонів, ні групою діедра. Одержали суперечність, яка показує, що $M < G$. Достатність доведено. Лему доведено.

Т е о р е м а 4.1.1. *Всі скінченні групи G , що не породжуються своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами і мають таку нормальну підгрупу N типу (p, p) , для якої G/N – одинична чи примарна група, яка не породжується своїми 2-максимальними підгрупами, вичерпуються групами типів:*

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$;
 2) $G = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle a \rangle$, $|c| = |d| = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $|a| = q^4$, $\Delta > 0$,
 p і q – не обов'язково різні прості числа;

3) $G = (\langle a \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|c| = |d| = p$, $|a| = q^4$, $\Delta > 0$,
 p і q – різні прості числа, елемент a індукує на $(\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ незвідний автоморфізм;

4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|(\langle a \rangle \cap \langle b \rangle)| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

5) $G = P \rtimes Q$ – група Фробеніуса, P – силовська підгрупа групи G типу (p, p) , $p > 2$, $Q = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8, будь-який елемент v із Q , що не належить $\langle b \rangle$, індукує на P незвідний автоморфізм;

6) G – група порядку p^4 експоненти p^2 , у якої $|w(G)| \in \{p^2, p^3\}$;

7) $G = A \rtimes \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 2$, $|d| = p$, $|b| \in \{p, p^2\}$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$,
 при $|a| = 8$ $[a, b] \neq 4$;

8) $G = P \ltimes Q$, P – мінімальна нормальна підгрупа групи G типу (p, p) , $Q = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, a індукує на P незвідний автоморфізм, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p і q – різні прості числа, при $|a| = 4$ $|[a, b]| \neq 2$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група і підгрупа N із умови теореми. Якщо $N = G$, то G – група типу 1. Нехай $N < G$. Тоді індекс $[G : N]$ ділиться на деяке просте число q . Припустимо, що $[G : N] = q$. Тоді, очевидно, що G – група одного з типів 1, 2, 6 розглядуваної теореми. Оскільки G/N – примарна група, то залишається розглянути випадок, коли $[G : N]$ ділиться на q^2 . Звідси N належить деякій нециклічній 2-максимальній підгрупі групи G і, значить, $N \leq M$, де M – власна підгрупа групи G , породжена всіма нециклічними 2-максимальними підгрупами.

Нехай X/N – 2-максимальна підгрупа із G/N . Тоді X – нециклічна 2-максимальна підгрупа із G , а значить, $X \leq M$. Звідси випливає, що всі 2-максимальні підгрупи примарної групи G/N належать M/N . Отже, G/N – скінченна примарна група, яка не породжується своїми 2-максимальними підгрупами. Зрозуміло, що G/N задовольняє умову леми 4.1.3 і може бути лише групою типу 1 – 3 згаданої леми.

Нехай, нарешті, G/N – група типу 3 леми 4.1.4. Тоді G задовольняє умову леми 4.1.6 і може бути групою типу 1 – 3 цієї леми. Звідси G – група одного з типів 3, 4, 8 розглядуваної теореми відповідно. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 8 розглядуваної теореми. Легко бачити, що група G має підгрупу N типу (p, p) . Нехай $[G : N] \in \{1, q\}$. Тоді G – група типу 1, 6 розглядуваної теореми, у якій $N < G$, $|G| = p^2 q^\gamma$, $\gamma \in \{0, 1\}$. Зрозуміло, що G/N – примарна група і G не містить нециклічних 2-максимальних підгруп. Звідси G не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами.

Нехай тепер $[G : N]$ ділиться на добуток двох простих чисел. Внаслідок леми 4.1.4 в групі G кожного з типів 1, 2, 6 $N < G$, G/N – циклічна група і G не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами. За лемою 4.1.5 в групі G кожного з типів 5, 7 $N < G$, G/N – група кватерніонів і G не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами. В силу леми 4.1.6 в

групі G кожного з типів 3, 4, 8 $N \triangleleft G$, G/N – примарна група і G не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами. Всі випадки розглянули. Достатність доведена. Теорему доведено.

4.2. Локально ступінчасті дисперсивні УЩН[$\bar{C}$]-групи, що мають ненормальні силовські підгрупи

Т е о р е м а 4.2.1. Нехай G – локально ступінчаста дисперсивна УЩН[$\bar{C}$]-група, що має ненормальні силовські підгрупи. Тоді G черніковська група з центральною повною частиною R виду $G = U \rtimes (P \rtimes V)$, де R не містить двох різних квазіциклічних підгруп, нескінченна підгрупа $R \times P$ локально циклічна, U – нільпотентна холлівська підгрупа із G , V – черніковська група з циклічними власними немаксимальними підгрупами, P – скінченна ненормальна в G силовська p -підгрупа групи G , для будь-якої неодиначної силовської q -підгрупи Q із U $[Q, P] \neq 1$ і P – група одного з типів:

- 1) $P = \langle a \rangle$, $|a| = p^a$, $a > 0$;
- 2) $P = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів, $|a| \in \{4, 8\}$, $|b| = 4$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 3) P – група типу 1 теореми 4.1.1;
- 4) P – група типу 2 теореми 4.1.1 при $p = q$;
- 5) P – група типу 3 теореми 4.1.1;
- 6) P – група типу 4 теореми 4.1.1;
- 7) P – група типу 5 теореми 4.1.1;
- 8) $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову теореми. Оскільки G має ненормальну силовську підгрупу, то вона ненільпотентна і, значить, в силу твердження 1.1.1 недедекіндова. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 3.2.1, за твердженням якої G – черніковська розв’язна група з повною частиною R .

Оскільки G – черніковська розв’язна, а значить, локально скінченна дисперсивна група, у якій $|\pi(G)| < \infty$, то $G = U \rtimes (P \rtimes V)$, де U та V – дисперсивні холлівські підгрупи з G , P – ненормальна силовська p -підгрупа з G . З дисперсивності G випливає, що всі силовські q -підгрупи Q із U нормальні в G . Зрозуміло, що $(U \rtimes P) \triangleleft G$.

Припустимо, що $[U, P] = 1$. Тоді P – характеристична підгрупа з $U \rtimes P$ і, значить, $P \triangleleft G$, що суперечить вибору P (підгрупа P ненормальна в G). Звідси $[U, P] \neq 1$ і тому $U \neq 1$. Нехай Q – неодиначна силовська q -підгрупа з U . Тоді $Q \triangleleft G$. Припустимо, що $[Q, P] = 1$ і тому $U = U_1 \times Q$. Покладемо $V_1 = Q \rtimes V$. Тоді, очевидно, U_1 та V_1 – холлівські підгрупи з G , $[P, V_1] \leq P$. Звідси $G = U_1 \rtimes (P \rtimes V_1)$ і тому без порушення загальності можна вважати, що $[Q, P] \neq 1$. Зрозуміло, $U = \bigtimes_{i=1}^k P_i$, де P_i – силовська p_i -підгрупа з U , $P_i \triangleleft G$, $U = P_i \times U_i$, де U_i – холлівські доповнення P_i в U .

Припустимо, що $|\pi(U)| > 3$. Тоді U_i містить силовську q -підгрупу Q і в G існують підгрупи $Q \rtimes P = A_i \leq B_i = U_i \rtimes P$, A_i – нециклічна біпримарна група. За припущенням $|\pi(U)| > 3$, а значить, $|\pi(B_i)| > 3$ і тому $|[A_i; B_i]| > 2$. За означенням УЩН[$\bar{C}$]-груп $[A_i; B_i] \ni N_i \triangleleft G$. Очевидно, що $\bigcap_{i=1}^k N_i = P \triangleleft G$, що не так.

Таким чином, $|\pi(U)| < 4$.

Покажемо, що будь-яка квазіциклічна підгрупа із R нормальна в G . Якщо R – локально циклічна група, то це очевидно. Нехай R – не локально циклічна група. Тоді $R = R_1 \times R_2$, де R_1 і R_2 – неодиначні повні підгрупи із R . Оскільки R не локально циклічна група, то R_1 і R_2 містять скінченні підгрупи X_2 і X_1 відповідно, порядок яких ділиться на добуток двох простих чисел. Покладемо $U_1 = R_1 \times X_1$, $U_2 = R_2 \times X_2$. Зрозуміло, що $|[R_1; U_1]| > 2$ і $|[R_2; U_2]| > 2$. За означенням УЩН[$\bar{C}$]-груп $[R_1; U_1] \ni N_1 \triangleleft G$, $[R_2; U_2] \ni N_2 \triangleleft G$, N_1 і N_2 – абелеві черніковські групи з повними частинами R_1 і R_2 відповідно. Звідси $R_1 \triangleleft G$ і $R_2 \triangleleft G$. Не порушуючи загальності можна вважати, що R_1 будь-яка квазіциклічна підгрупа із R і, значить, всі квазіциклічні підгрупи із R нормальні в G .

Покажемо, що $|P| < \infty$. Нехай $|P| = \infty$. Тоді, за попереднім, P – не квазіциклічна група і, значить, P – не локально циклічна локально скінченна черніковська p -група. Але тоді для будь-якого елемента x із P в P знайдеться ланцюг скінченних підгруп $\langle x \rangle < A < B$, для якого A – нециклічна група, $[A; B] > 2$. За означенням УЩН[$\bar{C}$]-груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$ і, значить, P породжується своїми

нормальними в G підгрупами. Звідси $P \triangleleft G$, що не так. Отже, $|P| < \infty$. Але тоді $R \cap P = 1$.

Покажемо, що $X = R \rtimes P$ – локально циклічна група, у якій R – квазіциклічна підгрупа. Припустимо спочатку, що X не локально циклічна група. Тоді в X знайдеться ланцюг скінченних підгруп $P \leq A \leq B$, де A – нециклічна підгрупа, $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N$ і $N \triangleleft G$. Звідси $C_G(N) \geq R$ і, значить, $X = R \times P$, $N = R_3 \times P$, де $R_3 = R \cap N$. Звідси $P \triangleleft N$ і тому $P \triangleleft G$, що не так. Отже, X – локально циклічна група і, значить, P – циклічна група. Припустимо, що $R = R_1 \times R_2$, де R_1 і R_2 – неединичні підгрупи із R . Тоді X містить ланцюг підгруп $R_1 \times P = A \leq R_1 \times P \times X_1 = B$, де X_1 – скінченна підгрупа із R_2 , порядок якої ділиться на добуток двох простих чисел, $|[A; B]| > 2$, A – нециклічна підгрупа. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$. Звідси $P \triangleleft N$. Оскільки P – силовська p -підгрупа із N , то $P \triangleleft G$, що не так. Отже, R не містить двох різних квазіциклічних підгруп.

Покажемо, що $R \leq Z(G)$. При $R = 1$ це очевидно. Нехай $R \neq 1$. Тоді за попереднім, R – квазіциклічна q -група, $q \neq p$ і $[R, P] = 1$. Зрозуміло, що $R \leq U$ або $R \leq V$. Нехай спочатку $R \leq V$. Тоді $U \cap R = 1$, $U \triangleleft G$, $R \triangleleft G$ і, значить, $[U, R] = 1$. Якщо $R \leq Z(V)$, то $R \leq Z(G)$. Нехай $R \not\leq Z(V)$. Тоді V – локально скінченна не локально циклічна група і тому в ній знаходиться відрізок підгруп $[X_1; X_2]$, де $|[X_1; X_2]| > 2$, X_1 – нециклічна підгрупа. Покладемо $A = P \rtimes X_1$, $B = P \rtimes X_2$. Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$ і A – нециклічна підгрупа. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \triangleleft G$ і тому $P \triangleleft N$, $P \triangleleft G$, що не так. Отже, при $R \leq V$ $R \leq Z(G)$.

Нехай тепер $R \leq U$. Позначимо через S – силовську s -підгрупу групи G , $s \neq q$. Тоді з умови $S \triangleleft G$ випливає, що $[R, S] = 1$. Нехай підгрупа S ненормальна в G . Тоді за попереднім, $R \rtimes S$ – локально циклічна група, а значить, $[R, S] = 1$. З цього випливає, що $C_G(R)$ містить всі силовські s -підгрупи із G при $s \neq q$. Нехай $s = q$. Тоді $S \leq U$. Якщо $R \leq Z(S)$, то $R \leq Z(G)$. Нехай $R \not\leq Z(S)$. Тоді за відомим результатом [31] $q = 2$ і в S існує елемент d , який індукує на R інвертуючий автоморфізм. Звідси підгрупа S містить нескінченну

не локально циклічну підгрупу $X = R \cdot \langle d \rangle$. Ясно, що в X існує ланцюг скінченних підгруп $\langle d \rangle \triangleleft A \triangleleft B$, де A – нециклічна підгрупа, $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N \triangleleft G$, $|N| < \infty$. Але тоді централізатор N в G містить R . Звідси $[R, \langle d \rangle] = 1$, що суперечить вибору елемента d . Отже, завжди $R \leq Z(G)$. З цього випливає, що $U \cdot R/R$ – скінченна нільпотентна група, а значить, U – нільпотентна підгрупа із G .

Припустимо, що V має нециклічну власну немаксимальну підгрупу X_1 . Тоді $A = P \wedge X_1$, $B = P \wedge V$. Зрозуміло, що A – нециклічна підгрупа і $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N \triangleleft G$. Звідси $P \triangleleft N$ і, значить, $P \triangleleft G$, що не так.

Для завершення доведення теореми потрібно показати, що P – група одного з типів 1 – 8 розглядуваної теореми. Якщо P – циклічна група, то вона група типу 1. Нехай P – нециклічна група. Покажемо, що P не породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами. Дійсно, нехай це не так, і X – довільна 2-максимальними нециклічна підгрупа із P . Тоді $|[X; P]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X; P] \in N(X) \triangleleft G$. Оскільки $X \leq N(X)$ і P породжується своїми нециклічними 2-максимальними підгрупами X , то $P \triangleleft G$, що не так. Отже, P не породжується своїми 2-максимальними нециклічними підгрупами. Розглянемо далі можливі випадки: 1) підгрупа P має тільки одну підгрупу порядку p ; 2) підгрупа P має не одну підгрупу порядку p .

Випадок 1. У цьому випадку за теоремою 12.5.1 з [119] підгрупа P має наступну будову: $P = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 1$, $|b| \leq 4$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$. Якщо $\alpha = 2$ чи $\alpha = 3$, то P – група типу 2.

Нехай $\alpha > 3$. Покладемо $X_1 = \langle a^{2^{\alpha-2}}, b \rangle$, $X_2 = \langle a^{2^{\alpha-2}}, ab \rangle$. Із співвідношень для елементів a і b групи P випливає, що X_1 та X_2 – групи кватерніонів порядку 8, $[P : X_1] > 2$, $[P : X_2] > 2$, $\langle X_1, X_2 \rangle = P$. Звідси підгрупа P породжується своїми 2-максимальними нециклічними підгрупами, що не так. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку P має підгрупу N типу (p, p) . Нехай $N \triangleleft G$. Тоді при $N = P$ P – група типу 3. Припустимо, що $N < P$. Оскільки P не породжується 2-максимальними нециклічними

підгрупами і N – нециклічна група, то P/N не породжується своїми всіма 2-максимальними підгрупами. З цього випливає, що P задовольняє умову теореми 4.1.1 і може бути лише групою одного з типів 1 – 5 згаданої теореми. Отже, P – група одного з типів 3 – 7 розглядуваної теореми відповідно.

Нехай тепер P не має нормальної підгрупи типу (p, p) . Припустимо спочатку, що P має максимальну циклічну підгрупу $\langle a \rangle$. Тоді $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 1$, $|P| = p^{\alpha+1}$. Оскільки P не містить нормальних підгруп типу (p, p) , то завдяки теоремі 12.5.2 з [119] $P = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ – дієдральна чи квазідієдральна група, $p = 2$. При $\alpha = 2$ P – група типу 3 розглядуваної теореми. Нехай $\alpha > 2$. Покажемо, що P не може бути дієдральною групою. Нехай це не так. Тоді P містить нециклічні підгрупи $X_1 = \omega(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$ та $X_2 = \omega(\langle a \rangle) \times \langle ab \rangle$, $|ab| = 2$, $[P: X_1] > 2$, $[P: X_2] > 2$. Звідси $P = \langle X_1, X_2 \rangle$, що не так. Отже, P – квазідієдральна група. При $\alpha = 3$ P – група типу 8. Нехай $\alpha > 3$. Тоді P містить нециклічні підгрупи $X_1 = \omega(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$,

$X_2 = \omega(\langle a^{2^{\alpha-2}} \rangle, \langle ab \rangle)$, $[P: X_1] > 2$, $[P: X_2] > 2$. Звідси знову $P = \langle X_1, X_2 \rangle$, що неможливо.

Тепер залишається розглянути випадок, коли для будь-якого елемента x із P $[P: \langle x \rangle] > p$. Звідси $|P| > p^3$. Позначимо через M підгрупу, яка породжена всіма 2-максимальними нециклічними підгрупами із P . Зрозуміло, що $M \triangleleft G$, $M < P$, всі підгрупи типу (p, p) із P належать M , а значить, $\omega(P) \leq M$. Оскільки $M < P$, то $\exp(P) > p$. Нехай $x \in P \setminus M$. Тоді $|x| > p$. Зрозуміло, що в P існує максимальна циклічна підгрупа $\langle a \rangle$, яка містить елемент x . Тоді $|a| > p^\alpha$, $\alpha > 1$, $a \notin M$. Ясно, що $\langle a \rangle < N_P(\langle a \rangle)$. Тоді $N_P(\langle a \rangle)$ містить підгрупу A , $A > \langle a \rangle$ і $[A: \langle a \rangle] = p$. За вибором підгруп $\langle a \rangle$ і M A – максимальна нециклічна підгрупа із P . Якщо $\alpha = 2$, то P – група типу 3 розглядуваної теореми. Нехай $\alpha > 2$. Зрозуміло, що $A \triangleleft G$. Оскільки P не містить нормальних підгруп типу (p, p) , то $\omega(A)$ не може бути групою типу (p, p) . За теоремою 12.5.2 [119] $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ – дієдральна чи квазідієдральна група або група кватерніонів. Як і раніше, підгрупа A містить власні нециклічні підгрупи $X_1 = \langle a^{2^{\alpha-2}}, b \rangle$, $X_2 = \langle a^{2^{\alpha-2}}, ab \rangle$. Звідси $[X_1; P] > 2$ і $[X_2; P] > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X_1; P] \ni N_1 \triangleleft G$ і

$[X_2; P] \ni N_2 \triangleleft G$. Але тоді $M \geq N_1$ і $M \geq N_2$, а значить, підгрупа M містить підгрупу $\langle b, ab \rangle$. Звідси $A \leq M$, що неможливо. Це і завершує доведення теореми. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 4.1.1. Нехай $G = U \rtimes (P \rtimes V)$ – група із теоремами 4.2.1. Тоді $G = U \cdot D$, де $D = N_G(P)$ і справедливе одне із тверджень:

1) $D = P \times R \times \langle d \rangle$ – локально циклічна група, R – квазіциклічна r -група, $|d| \in \{1, s\}$, r і s – прості числа, D – максимальна підгрупа із G ;

2) D – скінченна циклічна група, $D \not\leq G$, $|G| < \infty$, D – n -максимальна підгрупа із G , $n < 4$;

3) D – нільпотентна n -максимальна підгрупа із G , $n < 3$, $|G| < \infty$, $D \not\leq G$, D містить підгрупу $F = P \cdot N$, де N – група типу (p, p) чи група кватерніонів порядку 8, $[D : F] \in \{1, s\}$, s – просте число;

4) $D = P \rtimes \langle d \rangle$ – максимальна підгрупа скінченної групи $G = U \rtimes D$, $|d| = r$ – просте число, $[P, \langle d \rangle] \neq 1$, P – група типу 2 чи 3 теореми 4.2.1;

5) $D = P \rtimes W$ – ненормальна максимальна підгрупа із скінченної групи G , D – ненільпотентна група, P – циклічна група, всі 2-максимальні підгрупи із W циклічні;

6) $D = P \rtimes \langle d \rangle$ – ненільпотентна ненормальна в G 2-максимальна підгрупа скінченної групи $G = U \rtimes D$, P – циклічна група, $|d| = r$, $[P, \langle d \rangle] = P$.

Доведення. Нехай $G = U \rtimes (P \rtimes V)$ – досліджувана група. Покладемо $D = N_G(P)$. Очевидно, що $V \leq D$ і $G = U \cdot D$. Зрозуміло, що $U \rtimes P$ – нормальна в G холлівська підгрупа, P – ненормальна в G скінченна силовська p -підгрупа, G – черніковська дисперсивна група обмеженого ступеня розв'язності. Оскільки G – дисперсивна група, то $D = P \rtimes W$, де W – холлівська підгрупа із D . Як і при доведенні теореми 4.2.1 легко встановити, що всі власні немаксимальні підгрупи із W циклічні. За умовою підгрупа D ненормальна в G , G – черніковська група з повною частиною R , $R \leq D$, R не містить двох різних квазіциклічних підгруп і P – група одного з типів 1 – 8

теореми 4.2.1. Ясно, що $R \leq W$. Звідси $[G : D] < \infty$. З цього випливає, що D – n -максимальна підгрупа із G , $n > 0$.

Покажемо, що $n < 4$. Дійсно, нехай $n > 3$. Тоді в G існує ланцюг підгруп $D < A < B$, де $B < G$, $|[A; B]| > 2$. Оскільки $D < A$, то $U \cap A = A_1 < A$, підгрупа A_1 ненормальна в D , $A = A_1 \cdot D$. Звідси $[P, A_1] \neq 1$, A – нециклічна група, $[A; B] \in N < G$. Нехай $T = U \cap N$. Тоді $T < G$ і $N = T \cdot D$. Покладемо $H = T \rtimes P$. Оскільки $A_1 \leq T$, то $[T, P] \neq 1$ і, значить, H – нециклічна нормальна холлівська підгрупа із N і, значить, $H < G$, $H \leq B$. За лемою Фраттіні $G = H \cdot N_G(P) = H \cdot D \leq B$, що неможливо. Отже, $n < 4$.

Розглянемо далі два можливих випадки: 1) D – нільпотентна група; 2) D – ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку $D = P \times W$, де W – прямий добуток скінченного числа своїх силовських підгруп. Можливі випадки: 1.1) D – локально циклічна група; 1.2) D – не локально циклічна група.

Випадок 1.1. У цьому випадку при $|D| < \infty$ маємо, що $|G| < \infty$ і для G справедливе твердження 2 наслідку.

Нехай $|D| = \infty$. Тоді D містить нециклічну підгрупу $A = P \times R$, де R – квазіциклічна r -група. Припустимо, що $|[A; D]| > 2$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; D] \in N < G$. Зрозуміло, що $P < N$ і, значить, $P < G$, що неможливо. Отже, $[D : A] \in \{1, s\}$, s – просте число. Звідси $D = P \times R \times \langle d \rangle$, $|d| \in \{1, s\}$.

Припустимо, що $n > 1$. Тоді в G існує така максимальна підгрупа X , що $D < X$. Зрозуміло, що $G = U \cdot X$, $X = X_1 \cdot D$, де $X_1 = U \cap X$ – нормальна холлівська підгрупа із X , $X_1 \not\leq D$. Покладемо $Y = (X_1 \rtimes P) \cdot R$. Оскільки $X_1 \not\leq D$, то $[X_1, P] \neq 1$. Але тоді Y не локально циклічна локально скінченна черніківська група, що має ланцюг скінченних підгруп $P \leq A \leq B$, де A – нециклічна підгрупа, $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \in N < G$, $|N| < \infty$. Ясно, що $X_1 \cdot R$ – холлівська підгрупа із X . Покладемо $T = N \cap (X_1 \cdot R)$. Тоді $T < N$, T – холлівська підгрупа із T і $N = T \rtimes P$. За лемою Фраттіні $G = N \cdot N_G(P) = N \cdot D \leq X < G$, що неможливо. Отже, D – максимальна підгрупа із G і має місце твердження 1 наслідку.

Випадок 1.2. У цьому випадку D містить не локально циклічну силовську q -підгрупу Q . Оскільки Q локально скінченна примарна група, то Q містить скінченну мінімальну нециклічну підгрупу N . Відомо, що тоді N – група типу (p, p) чи група кватерніонів порядку 8. Покладемо $F = P \cdot N$. Тоді F – нециклічна група, $|F| < \infty$, F – скінченна нільпотентна група.

Припустимо, що F – власна немаксимальна підгрупа із D . Як і раніше, $[D : F] \in \{1, s\}$, s – просте число. Звідси $|D| < \infty$ і, значить, $|G| < \infty$. Нехай $n = 3$. Тоді в G знайдеться така максимальна підгрупа B , що $D < B$ і $|[D; B]| > 2$. За означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[D; B] \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $N = T \cdot D$, де $T = U \cap N$, $T \triangleleft N$. Оскільки підгрупа D ненормальна в G , то підгрупа T ненормальна в N , T – холлівська підгрупа із N , $[T, P] \neq 1$, $H = T \wedge P \triangleleft G$, H – холлівська підгрупа із N , $H \leq B$. За лемою Фраттіні $G = H \cdot N_G(P) = H \cdot D \leq B < G$, що неможливо. Таким чином, $n < 3$ і справедливе твердження 3 наслідку.

Випадок 2. У цьому випадку D – нециклічна група. Як і у випадку 1.2 легко встановити, що $n < 3$. Покажемо, що $|G| < \infty$. Припустимо, що це не так. Тоді, за попереднім, $R \neq 1$, $R \leq D$, $|D| = \infty$ і R – квазіциклічна підгрупа із $Z(G)$. Завдяки теоремі 4.2.1 підгрупа D містить локально циклічну підгрупу $A = P \times R$. Як і раніше, $[D : A] \in \{1, s\}$, s – просте число. Оскільки D ненільпотентна група, то $[D : A] = s$, а значить, $D = A \cdot \langle d \rangle$, $D = P \wedge (R \cdot \langle d \rangle)$, де $R \cdot \langle d \rangle$ – абелева група. Зрозуміло, що D має скінченну ненільпотентну підгрупу $A_1 = P \wedge \langle d \rangle$ і $D = A_1 \cdot R$. Тоді знайдеться така підгрупа B_1 , що $A_1 < B_1$ і $|[A_1; B_1]| > 2$. За означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[A_1; B_1] \ni N_1 \triangleleft G$. Зрозуміло, що $P \triangleleft N_1$ і, значить, $P \triangleleft G$, що не так. Отже, $|D| < \infty$ і $|G| < \infty$. Розглянемо далі два можливі випадки: 2.1) P – нециклічна підгрупа; 2.2) P – циклічна підгрупа.

Випадок 2.1. У цьому випадку $P = A$. Як і раніше, легко одержати, що $[D : A] = s$, s – просте число. Тоді $D = P \wedge \langle d \rangle$, $|d| = s$, $s \neq p$ і $[P, \langle d \rangle] \neq 1$. Ясно, що $D \not\triangleleft U$, $D \cap U = 1$ і тому $G = U \wedge D$.

Припустимо, що $n = 2$. Тоді, як і раніше, в G знайдеться максимальна підгрупа X така, що $D < X$. Звідси $|[P; X]| > 2$. За означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[P; X] \ni N \triangleleft G$. Нехай $T = N \cap U$. Тоді T – нормальна холлівська підгрупа із N , $T \leq X$, $N = T \rtimes (P \rtimes V_1)$. Покладемо $H = T \rtimes P$. Тоді $H \triangleleft N$ і, значить, $H \triangleleft G$. Звідси за лемою Фраттіні $G = H \cdot N_G(P) = H \cdot D \leq X < G$, що неможливо. Отже, $n < 2$ і D – максимальна підгрупа із G .

За теоремою 4.2.1 та нашим припущенням, P – група одного з типів 2 – 8 теореми 4.2.1. Якщо P – група типу 2 чи 3, то справедливе твердження 4 наслідку.

Нехай P – група одного з типів 4 – 8 теореми 4.2.1. Тоді в P легко можна знайти дві різні максимальні нециклічні підгрупи X_1, X_2 такі, що $\langle X_1, X_2 \rangle = P$. Зрозуміло, що $|[X_i; D]| > 2, i \in \{1, 2\}$. За означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[X_i; D] \ni N_i \triangleleft G$. Покладемо $P_i = N_i \cap P$. Тоді P_i – нормальна силовська підгрупа із N_i і, значить, $P_i \triangleleft G$. Зрозуміло, $P = P_1 \cdot P_2 \triangleleft G$, що неможливо. Випадок 2.1 розглянули повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку P – циклічна група. Якщо D – максимальна підгрупа із G , то справедливе твердження 5 наслідку. Нехай D – не максимальна підгрупа із G . За попереднім $n = 2$. Ясно, що в G знайдеться така максимальна підгрупа X , що $D < X$. Зрозуміло, що $X = X_1 \cdot D$, де $X_1 = U \cap X \triangleleft X$, X_1 – холлівська підгрупа із X , $X_1 \not\triangleleft D$. Звідси $[P, X_1] \neq 1$. Покладемо $A = X_1 \rtimes P$. Очевидно, що $A \triangleleft X$, A – холлівська підгрупа із X , $A < X$. Припустимо, що $|[A; X]| > 2$. Тоді за означенням УЩН $[\bar{C}]$ -груп $[A; X] \ni N \triangleleft G$. Звідси $A \triangleleft N_i$ і, значить, $A \triangleleft G$. Знову $G = A \cdot N_G(P) = A \cdot D \leq X < G$, що неможливо. Отже, $|[A; X]| = 2$ і, значить, $[X; A] = [P; D] = s$, s – просте число, $D = P \rtimes \langle d \rangle$, $|d| = s$, $\langle d \rangle$ – силовська s -підгрупа із G . Зрозуміло, що $D \cap U = 1$ і $G = U \rtimes D$. Оскільки D – ненільпотентна група, то $[P, \langle d \rangle] = P$ і справедливе твердження 6 наслідку. Наслідок доведено.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548 – 561.
2. *Miller G.A., Moreno H. C.* Non-abelian groups in which every subgroups is abelian // Trans. Amer.Math.Soc. – 1903. – 4. – P. 398 – 404.
3. *Шмидт О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – 31. – С. 366 – 372.
4. *Шмидт О.Ю.* Группы, имеющие только один класс неивариантных подгрупп // Мат. сб. – 1926. – 33. – С. 161 – 172.
5. *Шмидт О.Ю.* Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Труды семинара по теории групп. – М., Л.: Наука. – 1938. – С. 7 – 26.
6. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S. – B. Heidelberg. Akad.- 1933. – 2. – S.12 – 17.
7. *Baer R.* Groups with descending chain conditions // Duke Math. J.– 1949.–16.–P. 1 – 22.
8. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc.–1954.–4.– P. 419 – 436.
9. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.– 1959.–9.– P. 595 – 632.
10. *Hall P.* The Frattini subgroup of finitely generated groups // Proc. London Math. Soc.– 1961.–11.– P. 327 – 352.
11. *Neuman B.H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Sos. – 1954. – № 114. – P. 236 – 248.
12. *Курош А.Г., Черников С.Н.* Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. – 1947. – Т.2, № 3. – С. 18 – 59.
13. *Черников С.Н.* К теории конечных p -расширений абелевых p -групп // Докл. АН СССР.–1947.– Т.58, № 6. – С.1287 – 1289.
14. *Черников С.Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи матем. наук.–1959.– 14, № 5.–С. 45 – 96.
15. *Черников С.Н.* Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами системы их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. – 1964. – Т.159, № 4. – С. 759 – 760.
16. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Там. же. – 1966. – Т.171, № 4. – С. 806 – 809.
17. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967. – Т.19, № 6. – С. 111 – 131.

18. **Черников С.Н.** Исследования групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – Т.21, № 2. – С. 193 – 200.
19. **Черников С.Н.** Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1970. – Т.194, № 6. – С. 1280 – 1283.
20. **Черников С.Н.** Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн. – 1971. – Т.23, № 5. – С. 604 – 628.
21. **Черников С.Н.** О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 17 – 39.
22. **Черников С.Н.** Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Там. же. – С. 47 – 65.
23. **Черников С.Н.** Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп // Там. же. – С. 106 – 115.
24. **Черников С.Н.** Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 6 – 14.
25. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
26. **Зайцев Д.И., Каргаполов М.И., Чарин В.С.** Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1972. – Т.24, № 5. – С. 619 – 633.
27. **Чарин В.С., Зайцев Д.И.** Группы с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп // Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, № 3. – С. 277 – 287.
28. **Казарин Л.С., Курдаченко Л.А.** Условия конечности и факторзации в бесконечных группах // Успехи матем. наук.–1992.–47, № 3.–С. 75 – 114.
29. **Чарин В.С.** Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. – 1949. – Т.66, № 4. – С. 575 – 576.
30. **Чарин В.С.** О условии минимальности для нормальных подгрупп в локально разрешимых группах // Мат. сб.–1953.–33, № 1.– С.27 – 36.
31. **Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.** Группы с некоторыми условиями максимальности // Докл. АН УССР.–1987.–№ 1. – С.9 – 11.

32. *Cutolo G.* On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups // Riv. Mat. Pura. Appl.–1991.–9.–P. 49 – 59.
33. *Cutolo G., Kurdachenko L.A.* Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups // Geometriae Dedicata.–1995.–55.– P. 279 – 292.
34. *Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.* On groups with many almost normal subgroups // Annali Mat.–1995.–169.–P. 35 – 65.
35. *Лиман Ф.М.* Группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Доп. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073 – 1075.
36. *Лиман Ф.М.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. – 1968. – Т.4, № 1. – С. 75 – 83.
37. *Лиман Ф.М.* P -группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 8. – С. 696 – 699.
38. *Лиман Ф.М.* Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – Т.7, № 4. – С. 70 – 86.
39. *Лиман Ф.М.* Непериодичні групи, всі абелеві нециклическі підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР. – 1969. – № 1. – С. 11 – 13.
40. *Лиман Ф.М.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 65 – 96.
41. *Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.* О метегамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – Т.5, № 3. – С. 45 – 49.
42. *Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М.* О метегамильтоновых группах II // Там же. – 1968. – Т.6, № 5. – С. 50 – 53.
43. *Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.* О метегамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – Т.7, № 3. – С. 195 – 199.
44. *Нагребцкий В.Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – Т.6, № 1. – С. 80 – 88.
45. *Махнев А.А.* О конечных метегамильтоновых группах // Там же. – 1976. – Т.10, № 1. – С. 60 – 75.
46. *Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метегамильтоновых групп // Мат. заметки. – 1983. – Т.34, № 2. – С. 179 – 188.
47. *Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.* Строение метациклических метегамильтоновых групп. – К.: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22 с.

48. *Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.* О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеристика. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101 – 111.
49. *Кузенный М.Ф., Семко М.М.* Будова розв'язних метагамильтонових груп // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.
50. *Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.* О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32 – 40.
51. *Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, № 2. – С. 180 – 185.
52. *Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два // Там же. – 1987. – Т.39, № 6. – С. 743 – 750.
53. *Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173 – 183.
54. *Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.* О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, № 2. – С. 170 – 176.
55. *Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.* О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два // Там же. – 1990. – Т.42, № 2. – С. 168 – 175.
56. *Кузенный М.Ф., Семко М.М.* Метагамильтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
57. *Черніков М.С.* Групи, в яких інваріантна кожна абелева підгрупа, що не збігається зі своїм нормалізатором // Доп. АН УРСР. – 1974. – № 11. – С. 977 – 978.
58. *Черников М.С.* Группы, в которых инвариантны все абелевы подгруппы, отличные от своих нормализаторов // Теоретико-групповые исследования. – К.: Наук.думка, 1978. – С. 117 – 127.
59. *Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.* О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР. – 1989. – № 10. – С. 21 – 22.
60. *Коваленко В.І.* Будова скінченних недисперсивних груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа нормальна // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 10. – С. 1337 – 1342.

61. *Mann A.* Groups with dense normal subgroups // Israel J. Math. – 1968. – 6, №1. – P. 13 – 25.
62. *Семко М.М.* Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.
63. *Семко М.М.* Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.– К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 90 с.
64. *Семко М.М.* Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.
65. *Семко М.М.* Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.
66. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих $\text{ЩН}[\]$ -груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 181 – 186.
67. *Семко М.М.* Про будову $\text{УЩН}[\]$ -груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 13. – С. 196 – 203.
68. *Семко М.М.* Будова нільпотентних $\text{УЩН}[\]$ -груп // Класи груп з обмеженнями для підгруп.– К.: Ін-т математики НАН України, 1997.– С. 27 – 41.
69. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих ненільпотентних $\text{УЩН}[\]$ -груп // Укр. мат. журн.– 1997. – Т. 49, № 6.– С. 789 – 798.
70. *Семко М.М.* Ненільпотентные групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 15. – С. 175 – 187.
71. *Семко М.М.* Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.– К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 255 – 263.
72. *Семко М.М.* Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8.– С. 1148 – 1151.
73. *Семко М.М.* Про будову $\text{УЩН}[\]$ -груп з елементарним комутантом рангу два // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10.– С. 1396 – 1403.

74. *Семко М.М.* Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 49 – 53.
75. *Семко М.М.* Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 43 – 46.
76. *Семко М.М.* Про будову УЩН[]-груп // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, № 9. – С. 1250 – 1261.
77. *Семко М.М.* Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[]-груп // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1 (17). – С. 230 – 237.
78. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих УЩН()-груп // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, № 11. – С. 1532 – 1536.
79. *Семко М.М.* Будова локально ступінчастих УЩН[]-груп // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, № 3. – С. 383 – 388.
80. *Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 127 – 138.
81. *Устюжанинов А.Д.* Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – Т.6, № 1. – С. 107 – 128.
82. *Мазуров В.Д.* Пример группы Фробениуса с неразрешимым дополнительным множителем // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1963. – Т. 4, № 1. – С. 282 – 285.
83. *Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.* О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, № 3. – С. 314 – 322.
84. *Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.* Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследований алгебраических и топологических структур. – К.: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 37 – 45.
85. *Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.* Новые характеристики локально нильпотентных $\overline{HN}$ -групп // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 3. – С. 322 – 326.
86. *Hobby C.* Finite groups with normal normalizers // Canad. J.Math. – 1968. – 20, № 5. – P. 1256 – 1260.
87. *Казарин Л.С.* Группы с некоторыми условиями, наложенными на нормализаторы подгрупп // Ученые записки Пермского ун-та. – 1969. – № 218. – С. 268 – 279.

88. *Bernstein H.J.* CCN-groups of order divisible by tree primes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – 22, № 1. – P. 202 – 205.
89. *Субботин И.Я.* Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Матем. заметки. – 1972. – Т.12, № 6. – С. 739 – 746.
90. *Субботин И.Я.* Бесконечные конечнопорожденные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Укр. мат. журн. – 1975. – Т.27, № 3. – С. 406 – 411.
91. *Субботин И.Я.* О бесконечных группах, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 92 – 107.
92. *Giordano G.* Gruppi con normalizzatori estremali // Matematiche. – 1971. – 26, № 2. – P. 291 – 296.
93. *Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.* Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, № 2. – С. 180 – 185.
94. *Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.* Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 3. – С. 77 – 79.
95. *Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.* Группы с пронормальными примарными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.40, № 3. – С. 323 – 327.
96. *Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.* О группах, все подгруппы которых имеют всеер заданного вида // Там же. – 1990. – Т.41, № 9. – С. 1232 – 1236.
97. *Гольденберг М.М., Сесекин Н.Ф.* Бесконечные локально конечные p -группы с инвариантными не вполне расщепляемыми подгруппами // Уч. зап. Сverdл. гос. пед. ин-та. – 1971. – № 125. – С. 13 – 18.
98. *Семко Н.Н.* Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных подгрупп // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 107 – 117.
99. *Крайчук А.В.* Группы с системами инвариантных подгрупп бесконечного индекса // Укр. мат. журн. – 1986. – Т.38, № 1. – С. 108 – 110.

100. *Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.* О группах, двойственных дедекіндовым // Докл. АН УССР. – 1989. – № 10. – С. 21 – 22.
101. *Fattahi F.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. – 1974. – 28, № 1. – P. 15 – 19.
102. *Walls Gary L.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Jsr. J. Math. – 1982. – 43, № 2. – P. 166 – 168.
103. *Cappit D.* Generalised Dedekind groups // J. Algebra. – 1971. – 17, № 3. – P. 310 – 316.
104. *Баранник А.Ф.* Обобщение метегамільтонових груп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 160 – 198.
105. *Баранник А.Ф.* О группах, близких к гамільтоновым // Материалы XXX научной конф. проф.-препод. состава. Секция матем. наук. – Ужгородск. ун-т. – Ужгород, 1977. – С. 46 – 54.
106. *Баранник А.Ф.* О группах, близких к гамільтоновым // Укр. мат. журн. – 1978. – Т.30, № 5. – С. 579 – 585.
107. *Кузенний М.Ф., Семко М.М.* Будова сепараторно дедекіндових груп // Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48, № 10. – С. 1342 – 1351.
108. *Best E., Taussky O.* A class of groups // Proc. P.J.A. Sect. A. – 1942. – 47. – P. 55 – 62.
109. *Gashutz W.* Gruppen, in denen das Normalteiler sein transiv ist // J. reine und angew. Math. – 1957. – 198, № 1– 2. – S. 87 – 92.
110. *Абрамовский М.Н., Карганолов М.И.* Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. – 1957. – Т.13, № 3. – С. 242 – 243.
111. *Robinson D.J.S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – 60, № 21. – P. 21 – 38.
112. *Robinson D.J.S.* Groups whose images have a transitive normality relation // Lect. Notes. Math. – 1973. – № 319. – P. 148 – 155.
113. *Giovani F., Franciosi S.* Groups in which every infinite subnormal subgroup is normal // J. Algebra. – 1985. – 96, № 2. – P. 566 – 580.
114. *Субботин И.Я., Кузенний Н.Ф.* О группах с условием транзитивности // Исследование групп с ограничением для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 73 – 80.
115. *Субботин И.Я., Кузенний Н.Ф.* Локально разрешимые группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей // Методы исследований алгебраических и топологических структур. – К.: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 45 – 52.

116. *Кузенный М.Ф., Зузук Л.И.* Будова періодичних $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, № 10. – С. 1361 – 1369.
117. *Mann A.* Finite groups with maximal normalizers // Isr. J. Math. – 1968. – 12, № 1. – P. 67 – 75.
118. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z.–1954.– №4.– S. 409 – 434.
119. *Холл М.* Теория групп.– М.:Изд-во иностр. лит.,1962.– 468 с.
120. *Курош А.Г.* Теория групп.– М.: Наука, 1967.– 648 с.
121. *Левищенко С.С., Семко Н.Н.* Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Институт математики АН УССР, 1988.– С. 42 – 51.
122. *Беляев В.В., Сесекин Н.Ф.* О бесконечных группах типа Миллера-Морено //Acta math. Acad. Sci. Hung.– 26, № 3 – 4.– P. 369 – 379.
123. *Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф.* Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. – 230 с.
124. *Ольшанский А.Ю.* Бесконечные группы с подгруппами простых порядков //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т.44, №2. – С. 309 – 321.
125. *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 447 с.
126. *Семко Н.Н.* Строение локально метациклических групп //Строение групп и свойства их подгрупп.–К.: Институт математики АН УССР, 1986.– С. 83 – 93.
127. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.– Berlin-Heidelberg-New-York:Springer-Verlag, 1967.– 793 s.
128. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп.– М.: Наука, 1982.– 288 с.
129. *Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.* Конечные расщепляемые группы.– М.: Наука, 1967.– 111 с.
130. *Кузенный Н.Ф.,* Об изоморфизме полупрямых произведений // Укр. Мат. журн. – 1974. – Т.26, № 5. – С. 652 – 658.
131. *Зайцев Д.И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп //Докл. АН СССР.– 1974.– Т.214, № 6.– С.1250 – 1253.

132. *Коваль Т.В.* Про будову скінченних груп з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат.-2000.- Вип. 2.- С. 15 – 21.
133. *Коваль Т.В.* Групи, власні немаксимальні підгрупи яких циклічні чи мінімальні нециклічні // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, № 12. – С.1708 – 1710.
134. *Коваль Т.В.* Про будову ненільпотентних груп з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп // Доп. НАН України.-2001.-№ 7.-С. 19 – 21.
135. *Семко М.М., Коваль Т.В.* Про групи з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп //Наук. зап. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. фіз.-мат.-2001.- Вип.2. – С. 43 – 51.
136. *Коваль Т.В.* Про скінченні групи з умовою щільності нормальності для нециклічних підгруп // Матеріали сьомої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 14 –16 трав. 1998).-К.: Віпол. –1998.- С. 137.
137. *Коваль Т.В.* Про будову ненільпотентних УЩН[$\bar{C}$]-груп // Матеріали восьмої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 11 – 14 трав. 2000).-К.: Віпол. –2000.- С. 297.
138. *Коваль Т.В.* О строении групп с условиями плотности нормальности для нециклических подгрупп // VIII Белорусская математическая конференция (Минск, 19 – 24 июня 2000). – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси. – 2000.- С.43.
139. *Семко М.М., Коваль Т.В.* Про групи з умовами узагальненої щільності нормальності для нециклічних підгруп //Матеріали третьої Міжнар. алг. конф. в Україні (Суми, 2 – 8 липня 2001).- Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка. – 2001.- С. 245 – 247.
140. *Семко Н.Н., Коваль Т.В.* О группах с условиями плотности нормальности для нециклических подгрупп //Український математичний конгрес – 2001. Алгебра і теорія чисел. Тези доповідей.- К.: Ін-т математики НАН України. – 2001.- С.47.