

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**М. Ф. КУЗЕННИЙ
М. М. СЕМКО**

**МЕТАГАМІЛЬТОНОВІ ГРУПИ
ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ**

КИЇВ 1996

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

М.Ф. КУЗЕННИЙ

М.М. СЕМКО

МЕТАГАМІЛЬТОНОВІ ГРУПИ
І ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Київ 1996

УДК 519.41/47

Метагамільтонові групи та їх узагальнення / Кузєнний М. Ф., Сємко М. М. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.

В монографії описуються класи груп з обмеженням нормальності для різних систем підгруп. Конструктивно описані локально ступінчаті групи з нормальними неабелевими підгрупами (метагамільтонові групи). З використанням цього опису конструктивно описані нескінченні локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами. Класифіковані локально розв'язні групи з умовами транзитивності нормальності для неабелевих підгруп. Як приклад використання одержаних результатів наводиться конструктивний опис локально ступінчатих груп з умовами щільності нормальності для всіх підгруп.

Для фахівців у галузі алгебри, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

Бібліогр.: 219 назв.

Відповідальний редактор доктор фізико-математичних наук,
професор Л. А. Курдаченко

Всі права належать авторам. Будь-яке використання цього видання або його частин (фрагментів), такі як копіювання, тиражування, розповсюдження і т. п. можливе тільки при наявності попередньої письмової згоди авторів.

Адреса видавництва: Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3, Інститут математики НАН України.

All rights reserved. No part of this issue may be reproduced by any mechanical, photographic or electronic process of the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted or otherwise copied for public et private use without written permission of the authors.

Address of the Publishers: Ukraine, 252601, Kiev 4; Tereshchenkivska st., 3, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences.

ISBN 5-7702-1284-5

© М. Ф. Кузєнний, М. М. Сємко, 1996

Вступ

Вивчення груп, в яких деякі підгрупи або системи підгруп задовольняють деяку умову (обмеження), було одним з перших напрямків в теорії груп. Більш того, ці дослідження сприяли виникненню абстрактної теорії груп. На це вказують роботи О. Гольдера [1], Р. Дедекінда [2], Г. Міллера, Х. Морено [3], О. Ю. Шмідта [4]–[6], які стали класикою теорії груп. В усіх цих роботах у групі G розглядалась деяка система підгруп Σ , підгрупи якої задовольняють умову V . Цей підхід стає одним з основних у теорії груп і залишається таким до нашого часу. Велику роль у становленні та розвитку цього напрямку зіграли роботи О. Ю. Шмідта [4]–[6], [13], Р. Бера [7]–[9], А. Г. Куроша, С. М. Чернікова [17], [138], Б. Неймана [23], [30], Ф. Холла [10]. Багато відомих алгебраїстів працювали у цій ділянці і залишили свої яскраві результати. Можна назвати тут А. Г. Куроша, Г. Баумслага, З. І. Боровича, Х. Віланда, В. Гашюца, К. Хірша, В. М. Глушкова, Ю. М. Горчакова, Д. І. Зайцева, М. І. Каргаполова, О. Кегеля, А. І. Мальцева, Ю. І. Мерзлякова, Б. І. Плоткіна, В. Н. Ремесленнікова, А. І. Старостіна, С. Стоунхевара, Д. Робінсона, Б. Хартлі, Г. Хайнекена, В. С. Чаріна, С. А. Чуніхіна, Л. А. Шеметкова, В. П. Шункова. На різних етапах публікувалося багато оглядових статей, монографій, серед яких велику роль мали статті [17], [26], [45], [62], [73], [88], [148], монографії [49], [63], [71], [72], [107], [108], [122], [138].

Список обмежень, що накладаються на підгрупи, які розглядались у перших роботах цього напрямку (обмеженість порядків, нормальність, абелевість, нільпотентність, майже центральність), був у подальшому значно розширений.

Почали розглядатися також різні важливі системи підгруп Σ групи G , виникли нові підходи, пов'язані з іншими розділами теорії груп. Одержані результати застосовуються у багатьох розділах теорії груп. У свою чергу, ця ділянка не є ізольованою, тут знаходять застосування лінійні методи, методи теорії кілець та модулів, алгебр Лі тощо. Розвиток цього напрямку продовжується завдяки інтенсивно багатьма алгебраїстами різних країн, серед яких автори робіт

[42]–[216]. До цього напрямку теоретико-групових досліджень належать і результати даної роботи.

Нехай G — група, Σ — деяка множина її підгруп, V — деяка властивість. Групу G назовемо $V(\Sigma)$ -групою, якщо кожна підгрупа системи Σ має властивість V . Властивість V може бути як зовнішньою відносно G , тобто визначатися якимось класом груп (наприклад, абелевість (A), нільпотентність (N), розв'язність (S), тощо), так і внутрішньою відносно G (наприклад, нормальність (H), субнормальність, майже нормальність, доповнюваність). У свою чергу система підгруп може визначатися деякою властивістю τ , тобто

$$\Sigma = \{H \mid H \text{ — підгрупа, яка має властивість } \tau\}.$$

У цьому випадку замість терміну $V(\Sigma)$ -група будемо користуватися терміном $V(\tau)$ -група.

Однією з перших властивостей, яка накладалась на систему усіх підгруп, була нормальність (H). Скінченні групи такого роду були вивчені в [2], а нескінченні — в [7]. Пізніше ці групи було названо дедекіндовими. Дальші дослідження пов'язані з класами груп, які містять дедекіндові групи. При цьому система Σ звужується, або властивість нормальності (H) замінюється на якусь її узагальнення, або одночасно змінюється як Σ , так і властивість τ . Звуження Σ до системи всіх абелевих (A) і навіть до всіх циклічних (C) підгруп G не приводить до розширення класу дедекіндових груп.

Першим суттєвим узагальненням дедекіндових груп були скінченні групи, які мають один або два класи спряжених ненормальних підгруп ([5], [13]).

Інші узагальнення дедекіндових груп (метабільтонові групи) були введені в [53] (групи, в яких кожна неабелева група нормальна, тобто $H(\bar{A})$ -групи у наших позначеннях). Різні характеристики та властивості, а також опис деяких конкретних класів груп отримано в [66], [78], [80], [93], [95], [119]. Повний опис всіх локально ступінчатих метабільтонових груп дається в 10 теоремах другої глави роботи. Відмітимо, що умови, які вказані в [119], не завжди є достатніми, як тут стверджується. Це також показано в другій главі.

В [93] розглянуто групи, в яких нормальними є: всі нескінченні підгрупи INH - або, по-нашому, $H(I)$ -групи; всі нескінченні абелеві підгрупи IH - або, по-нашому, $H(IA)$ -групи; всі нескінченні неабелеві підгрупи $\overline{IH}$ -групи або, по-нашому, $H(\overline{IA})$ -групи. Опис метагамільтонових груп та опис INH -груп (§ 13) дає можливість завершити опис нескінченних локально ступінчатих $H(\overline{IA})$ -груп (гл. III).

В [106], [112] розглянуто інший метод звуження системи Σ . У групі G існує така підгрупа $S^{\dagger}$ (сепаруюча підгрупа), що кожна підгрупа з множини Σ , яка не міститься в S , має властивість V . Такі групи будемо називати $V(S\Sigma)$ -групами; у випадку, коли Σ — це всі підгрупи G , просто — $V(S)$ -групами. $H(S)$ -групи почали вивчати в [106], [115], але опису цих груп там не отримали. Цьому опису присвячений § 1.4 роботи.

Значні розширення класу дедекіндових груп виникають при переході від умови нормальності до деяких її узагальнень, як, наприклад, до квазінормальності [51], субнормальності [134], нормалізаторній умові [134], пронормальності [91] та ін. І таке розширення виникає при різних умовах транзитивності нормальності (H). Скажемо, що група G задовольняє умову транзитивності (ослабленої транзитивності, властивості V), якщо для кожних $A, B, C \in \Sigma$, де $A \leq B \leq C$ ($A \leq B \leq G$)) з того, що A — V -підгрупа B , а B — V -підгрупа C (відповідно B — V -підгрупа G) випливає, що A — V -підгрупа C (A — V -підгрупа G). Тут будемо використовувати термін $TV(\Sigma)$ -група ($IV(\Sigma)$ -група). Це поняття виникло в роботі [15] і вивчалось багатьма авторами [36], [38], [61] [68], [71], [91], [150]. Зберігаючи традиції попередників, замість позначень $TH(\Sigma)$ ($iH(\Sigma)$) будемо писати коротше $T(\Sigma)$ ($i(\Sigma)$). Далі $STV(\Sigma)$ -група ($SiV(\Sigma)$ -група) — це розв'язна $TV(\Sigma)$ -група ($IV(\Sigma)$ -група). Знову якщо Σ — множина усіх підгруп, то буква Σ опускається.

Основні результати роботи пов'язані з вивченням груп, у яких Σ — система всіх неабелевих ($\overline{A}$) підгруп, або її підсистема, а V — умова нормальності (H), чи транзитивності нормальності (T, i) для підгруп з Σ .

Точніше, основні об'єкти — це класи:

$T(I\bar{A})$ -груп — груп з умовою транзитивності нормальності для нескінченних неабелевих підгруп;

$T(\bar{A})$ -груп — груп з умовою транзитивності нормальності для всіх неабелевих підгруп;

$H(I\bar{A})$ -груп — груп, в яких кожна нескінченна неабелева підгрупа є нормальною;

$H(\bar{A})$ -груп — груп, в яких кожна неабелева підгрупа є нормальною.

Доцільність цілісного вивчення цих класів впливає з того, що вони дуже тісно пов'язані між собою. Так, наприклад, кожна $H(\bar{A})$ -група є одночасно як $T(\bar{A})$ -групою, так і $H(I\bar{A})$ -групою, а кожна з двох останніх є $T(I\bar{A})$ -групою.

При вивченні цих класів груп виникають природньо деякі обмеження. Всі класи цих груп містять у собі групи, приклади яких побудовані в [132], [135], [136]. І це показує, що їх вивчення без усяких обмежень є дуже важкою задачею. Досить широкими обмеженнями залишаються тут локальна ступінчатість, локальна розв'язність.

У першій главі роботи уточнюються відомі та встановлюються нові результати, за допомогою яких в гл. II здійснюється конструктивний опис метагамільтонових груп. Центральним моментом цього опису є накопичення інформації про властивості метагамільтонових груп та розчленування класу всіх метагамільтонових груп на нелінійотентні і лінійотентні, а останні на підкласи у відповідності з будовою їх комутанта. Суттєву роль грає тут насиченість груп та її фактор-груп додекіндовими та іншими досить простими групами. У свою чергу класи $T(\bar{A})$ -, $H(I\bar{A})$ -груп розчленовуються в залежності від їх насиченості та насиченості їх фактор-груп вже описаними метагамільтоновими групами. Останнім кроком є класифікація $T(I\bar{A})$ -груп, які не належать до класів $H(I\bar{A})$ - та $T(\bar{A})$ -груп.

Одержані результати використовуються при опису різних класів груп з обмеженням нормальності для деяких підгруп. Один із способів виділення класів груп такого роду дає поняття щільності нормальності для підгруп, яке базується на понятті проміжку $\{A, B\}$ підгруп групи G . Проміжком $\{A, B\}$ називається

відрізок $[A, B]$, інтервал (A, B) та півінтервал $[A, B)$ чи $(A, B]$ підгруп із G , що відповідно: $A \leq X \leq B$; $A < X < B$; $A \leq X < B$ чи $A < X \leq B$. Модулем проміжку $|\{A, B\}|$ називається число його елементів. Властивість V підгруп групи G називається щільною для τ -підгруп всієї групи, якщо для будь-якого проміжку $\{A, B\}$ τ -підгруп A та B існує V -підгрупа N з G , яка належить цьому проміжку. Таким прикладом використання одержаних результатів є гл. 5 даної роботи, в якій наведено без доведення опис окремих класів груп з умовами щільності нормальності для всіх підгруп.

Робота складається зі вступу та п'яти глав. У першій главі 4 параграфи, в другій — 7, в третій — 4, в четвертій — 3, в п'ятій — 2.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність дослідження, визначена мета і перелічені об'єкти дослідження.

У гл. I „Попередні результати” логічно послідовно приводяться відомі та встановлюються нові означення і результати, необхідні для подальших досліджень.

В § 1.1 „Відомі та деякі нові означення і твердження” наведені в основному відомі означення і відомі твердження, з ними пов'язані. Серед нових можна вказати означення 1.1.6 — *майже прямого добутку з об'єднаною підгрупою*. Теорема 1.1.1, пов'язана з цим означенням, дає оцінку експоненти та порядку групи з центральним комутантом. В теоремі 1.1.2 встановлюється один критерій дедекіндовості групи. Опис деяких центральних розширень за допомогою дедекіндових груп подано в теоремі 1.1.3.

§ 1.2 „Метациклічні групи” присвячений опису довільних та конструктивному опису примарних метациклічних груп (теорема 1.2.1 та 1.2.2 відповідно). В теоремі 1.2.1 вписано 12 типів груп, якими вичерпуються всі метациклічні групи. в теоремі 1.2.2 дається повний конструктивний опис всіх примарних метациклічних груп з виділенням і дослідженням 9 типів груп такого роду. Тут вказано

породжуючі елементи і визначальні співвідношення, розклад в добутки, як правило півпрямі, підгруп, вказані будови підгрупи Фраттіні, центру, комутанта, нижнього шару, відзначена доповнюваність певних підгруп даної групи.

В § 1.3 „Деякі розширення квазіциклічних груп” конструктивно описані всі розширення квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп з виділенням 7 неізоморфних типів груп такого роду (теорема 1.3.1). В цьому ж параграфі даються строгі означення різноманітних класів $H(\tau)$ - та $T(\tau)$ -груп, які згадувалися у вступі (означення 1.3.1 та 1.3.2 відповідно). Доведено дві лєми загального характеру для $H(\tau)$ - та $T(\tau)$ -груп.

§ 1.4. „Опис $H(S)$ - та деяких $H(\bar{N})$ -груп”. $H(S)$ -групи вивчалися в [106], [115], довстановлено скінченність і циклічність їх комутанту, але опису не наведено. Конструктивний опис $H(S)$ -груп дає теорема 1.4.2.

Зауважимо, що ця теорема є вузловим результатом для досліджень гл. III та гл. IV. За її допомогою в теоремі 1.4.3 дається конструктивний опис деяких $H(\bar{N})$ -груп. Нагадаємо, що група G називається $H(\bar{N})$ -групою, якщо в ній нормальні всі ненільпотентні підгрупи.

Властивості скінченних ненільпотентних $H(\bar{N})$ -груп вивчалися в [82].

У гл. II „Метагамільтонові групи” вивчаються групи з нормальними неабелевими підгрупами ($H(\bar{A})$ -групи). Нагадаємо, що ці групи введені в [53]. Їх властивості вивчалися в [66], [80], [93], [95]. Найбільш суттєвим у цьому напрямку є результат із [93], що стверджує: локально ступінчата метагамільтонова група має скінченний примарний комутант. В [78] описано скінченні ненільпотентні метагамільтонові групи, а в [119]-скінченні метагамільтонові p -групи з нецентральним комутантом.

Детальний виклад суттєвих результатів згаданих авторів наводиться в § 2.1 „Деякі допоміжні результати”. В цьому параграфі уточнюються результати з [119] та виписується будова примарних метациклічних груп, якої в [119] немає.

§ 2.2 „Ненільпотентні групи” дає повний опис ненільпотентних метагамільтонових груп (теорема 2.2.1) і класифікацію нільпотентних груп за будовою їх комутанта (теорема 2.2.2). В теоремі 2.2.3 дається опис підкласу метагаміль-

тонових груп, у яких комутант будь-якої неабелевої підгрупи співпадає з комутантом всієї групи.

Зауважимо, що вивчені в [78] групи співпадають зі скінченними групами типів 1)–3) теореми 2.2.1. У відповідності з будовою комутанта кожна з нільпотентних груп задовольняє одну з умов 1)–5) теореми 2.2.2. Класи нільпотентних груп, визначені кожною з цих умов, вивчаються в подальшому в §§ 2.3–2.6.

§ 2.3 „Групи з циклічним комутантом” присвячений конструктивному опису метагамільтонових груп з циклічним комутантом. Попередньо наводиться твердження 2.3.1, що впливає з [119]: скінченні метагамільтонові p -групи з циклічним нецентральним комутантом вичерпуються метациклічними p -групами, у яких $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$. В теоремі 2.3.1 дається повний конструктивний опис всіх метациклічних метагамільтонових груп з виділенням 10 типів таких груп. В наслідку 2.3.1 вказані конструктивні описи метациклічних метагамільтонових груп: нільпотентних, ненільпотентних, з центральним комутантом, з нецентральним комутантом, скінченних, нескінченних та інших.

В теоремі 2.3.2 дається повний конструктивний опис всіх метагамільтонових груп з циклічним комутантом.

§ 2.4 „Групи з нециклічним і неелементарним комутантом”. В ньому описуються нільпотентні метагамільтонові групи, у яких G' — абелева p -група типу (p^δ, p) , $\delta > 1$.

У твердженні 2.4.1 наводиться опис із [119] скінченних метагамільтонових p -груп з нецентральним комутантом вказаного типу. Теорема 2.4.1 дає конструктивний опис довільних як скінченних, так і нескінченних метагамільтонових p -груп з нецентральним комутантом типу (p^δ, p) , в якому виділено 2 типи груп такого роду і який суттєво уточнює будову груп із твердження 2.4.1.

У лемі 2.4.2 доводиться, що нільпотентні неперіодичні метагамільтонові групи мають скінченний комутант або типу (p^δ) , або (p, p) , тобто групи розглядуваного параграфу періодичні.

Теорема 2.4.2 дає конструктивний опис груп, названих у заголовку, формуючи його як необхідну умову, хоча справедливе й обернене твердження.

В § 2.5 „Нільпотентні групи з елементарним абелевим комутантом типу (p, p) ” конструктивно описуються всі названі метагамільтонові групи. В твердженні 2.5.1 наводиться опис із [119] скінченних метагамільтонових p -груп з нецентральною комутантом типу (p, p) .

Теорема 2.5.1 дає конструктивний опис довільних нільпотентних p -груп з нецентральною комутантом типу (p, p) , в якому виділено 5 типів груп такого роду, і суттєво уточнює опис будови груп із твердження 2.5.1. В лемах 2.5.1–2.5.8 розглядаються окремі випадки досліджуваних p -груп. Неперіодичні групи з заголовка параграфа описані в лемі 2.5.9.

Теорема 2.5.2 описує групи з назви параграфа.

В § 2.6 „Нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p, p) ” конструктивно описуються всі названі метагамільтонові групи. В твердженні 2.6.1 наводиться опис із [119] скінченних метагамільтонових p -груп з нецентральною абелевим комутантом типу (p, p, p) . В теоремі 2.6.1 конструктивно описані довільні метагамільтонові p -групи з нецентральною абелевим комутантом типу (p, p, p) , в якій виділено 2 типи груп такого роду. В 2-х лемах параграфа прояснюється будова досліджуваних груп з центральною комутантом. Теорема 2.6.2 описує групи з назви параграфа.

§ 2.7 називається „Загальна теорема і наслідки”. У ньому в теоремі 2.7.1 з використанням теорем попередніх параграфів наводиться опис всіх метагамільтонових груп. З використанням цього опису в теоремі 2.7.2 конструктивно описані всі метагамільтонові $H(S)$ -групи, що є нільпотентними групами. В цій теоремі, крім дедекіндових, виділяються ще 3 типи періодичних груп такого роду. Цей опис є важливим інструментом для досліджень подальших глав. Можна вважати, що теорема 2.7.1 завершує опис розв’язних метагамільтонових груп.

В гл. III „Локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами” вивчаються всі нескінченні групи такого роду. За результатами [93] всі такі групи розв’язні, а неметагамільтонові групи такого роду навіть черніковські $\overline{TH}$ -групи. Оскільки метагамільтонові групи описані в гл. II, то в цій главі описуються тільки розв’язні черніковські $\overline{TH}$ -групи.

В § 3.1 „Попередні результати” наводиться основний результат із [93] і одержуються деякі наслідки, що використовуються в подальшому.

Теорема 3.1.1 встановлює один критерій неметагамільтоновості розширення квазіциклічної групи за допомогою скінченної дедекіндової групи.

§ 3.2 „Неметагамільтонові локально нільпотентні $\overline{TH}$ -групи” присвячений опису вказаних груп. Його леми 3.2.1 та 3.2.2 описують групи з центральною та нецентральною повною частиною відповідно.

В теоремі 3.2.1 виписано 8 типів примарних неметагамільтонових $\overline{TH}$ -груп. Теорема 3.2.2 описує локально нільпотентні неметагамільтонові $\overline{TH}$ -групи.

§ 3.3. „Неметагамільтонові не локально нільпотентні $\overline{TH}$ -групи” присвячений вивченню вказаних груп. Леми 3.3.1 та 3.3.2 описують такі групи з центральною та нецентральною повною частиною відповідно. Єдина теорема цього параграфу описує групи такого роду.

§ 3.4. „Нескінченні локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами”. В цьому параграфі описані всі локально ступінчаті $H(\overline{IA})$ -групи. Ці групи розв’язні і включають нескінченні метабільтонові групи. Їх опис з урахуванням теорем попередніх параграфів дається в теоремі 3.4.1.

В теоремі 3.4.2 встановлюється, що комутант локально ступінчатої $H(\overline{IA})$ -групи є скінченною примарною групою порядку p^n , $n > 0$, p — просте число, і при $G'' \neq 1$ G' силовська p -підгрупа з нелінійною групи G ізоморфна групі кватерніонів чи групі порядку p^3 експоненти p , $p > 3$.

Нескінченно локально ступінчата $H(\overline{IA})$ -група G має періодичний нільпотентний черніковський не більше, ніж біпримарний, комутант G' .

Можна вважати, що теорема 3.4.1 завершує конструктивний опис локально ступінчатих нескінченних $H(\overline{IA})$ -груп.

Гл. IV „Локально розв’язні групи з умовами транзитивності нормальності для неабелевих підгруп” присвячена класифікації названих груп, які виявилися розв’язними.

У ній за будовою комутанта чи локально нільпотентного корадикалу виділяються класи $ST(\bar{A})$ -груп та нескінченних $ST(I\bar{A})$ -груп, доступні для подальшого конструктивного опису. Приклад такого опису дає § 4.3, в якому описані періодичні $T(\bar{A})$ -групи з абелевим локально нільпотентним корадикалом.

§ 4.1. „Деякі загальні результати”. У цьому параграфі нагадується означення $T(\bar{A})$ -, $t(\bar{A})$ -, $T(I\bar{A})$ -, $t(I\bar{A})$ -груп і наводяться відомі результати інших авторів, що стосуються цих груп.

У лемі 4.1.1 встановлено властивості означених у цьому параграфі груп.

У теоремі 4.1.1 та в наслідку 4.1.1 встановлено, що локально розв'язні $T(\bar{A})$ -, $t(\bar{A})$ - та нескінченні $T(I\bar{A})$ -, $t(I\bar{A})$ -групи розв'язні і їх третій комутант має порядок p^δ , $\delta \in \{0, 1\}$, а при $\delta = 1$ другий комутант цих груп є періодичною нільпотентною групою. Подальші результати стосуються тільки класів $T(\bar{A})$ - та нескінченних $T(I\bar{A})$ -груп.

У теоремі 4.1.2 встановлено, що локально нільпотентні $T(\bar{A})$ -групи вичерпуються нільпотентними метагамільтоновими групами, а значить, мають обмежений клас нільпотентності і скінченний примарний абелевий комутант.

Теорема 4.1.3 встановлює існування першого A та другого B локально нільпотентного корадикалу $ST(\bar{A})$ -групи і стверджує, що B — підгрупа скінченної примарної групи Міллера – Морено.

В теоремі 4.1.4 встановлюється, що нескінченні неметагамільтонові локально нільпотентні $T(I\bar{A})$ -групи вичерпуються черніковськими неметагамільтоновими $\overline{TH}$ -групами (теорема 3.2.2).

В останній теоремі цього параграфа (4.1.5) встановлюється існування першого A та другого B локально нільпотентних корадикалів нескінченної $T(I\bar{A})$ -групи G і їх властивості.

§ 4.2. „Класифікація $ST(\bar{A})$ -груп та нескінченних $ST(I\bar{A})$ -груп” присвячений класифікації локально розв'язних $T(\bar{A})$ - та нескінченних $T(I\bar{A})$ -груп.

У лемах 4.2.1–4.2.3 встановлюється, що названі групи розв'язні, мають періодичний комутант G' , їх третій комутант має порядок 1 або p , а в непері-

одичних $T(\bar{A})$ -групах $G'' = 1$. У лемі 4.2.4 доведено, що нескінченні локально розв'язні $T(\bar{A})$ -, але не $T(\bar{A})$ -групи, є черніковськими групами.

Класифікація розглядуваних груп дається в теоремах 4.2.1–4.2.3.

§ 4.3. „Будова періодичних $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом”. У цьому параграфі в лемах 4.3.1–4.3.4 встановлюються властивості названих груп. Опис цих груп дається в теоремі 4.3.1.

Як бачимо, типи 2)–7) теореми 4.3.1 значно розширюють клас груп, що є об'єднанням $ST(\bar{A})$ - і розв'язних метагамільтонових груп. Інші класи введених у цій главі груп і виділені в § 4.2, ще не описані і є задачами наступних досліджень (див., наприклад, [213], [214]).

В гл. V „Групи з умовами щільності нормальності для всіх підгруп” без доведення наведено опис окремих класів локально ступінчатих груп з назви глави.

В § 5.1 „Основні означення і допоміжні результати” наводяться основні означення і деякі результати, які суттєво використовуються в подальшому.

§ 5.1. „Будова локально ступінчатих УЩН[]-груп” присвячений опису вказаних груп.

Глава 1

Попередні результати

1.1 Відомі та деякі нові означення і результати

Означення 1.1.1. [3] Неабелева група, у якій всі власні підгрупи абелеві, називається групою Міллера-Морено або мінімальною неабелевою $(\bar{A})$ групою.

Твердження 1.1.1. [18] Скінченні групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів, $|a| = |b| = 4$, $[a, b] = a^2 = b^2$, $G' = Z(G) = \Phi(G) = \langle a^2 \rangle$;

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\Phi(G) = Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$;

3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$, $|c| = p$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $Z(G) = \Phi(G) = \langle c \rangle \times \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$;

4) $G = P \lambda Q$, P — скінченна елементарна абелева силовська p -підгрупа, що співпадає з нормальним дільником із G , $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, p — просте число; $Q = \langle b \rangle$ — силовська q -підгрупа із G , q — просте число; $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\Phi(G) = Z(G) = \Phi(Q) = \langle b^q \rangle$; Q індукує на P групу незвідних автоморфізмів порядку q , $G' = P$, $\alpha = \delta_q(p)$.

Твердження 1.1.2. Група G тоді і тільки тоді є скінченною примарною групою Міллера-Морено, коли справедлива хоча б одна з умов:

1) G — неабелева 2-породжена p -група, у якій $\Phi(G) = Z(G)$, p — просте число;

2) G — 2-породжена p -група з комутантом порядку p , p — просте число.

Доведення. Твердження є майже очевидним наслідком твердження 1.1.1.

Означення 1.1.2. [2]. Група, у якій всі підгрупи нормальні, називається дедекіндовою групою. Неабелева група такого роду називається гамільтоновою групою.

Твердження 1.1.3. [2, 7]. Дедекіндові групи вичерпуються абелевими групами та гамільтоновими групами, тобто групами виду: $G = Q \times D \times A$, Q — група кватерніонів, D — елементарна абелева група, A — періодична абелева група без інволюцій.

Дедекіндові групи мають такі властивості:

- 1) всі елементи порядку 2 належать $Z(G)$;
- 2) група, що містить циклічні підгрупи порядку 8 або ∞ є абелевою групою;
- 3) комутант неабелевої групи G співпадає з

$$Q' = \Phi(Q) = Z(Q) = (Q \times D)' = \langle g^2 \rangle,$$

g — будь-який елемент із G порядку 4.

Означення 1.1.3. [4]. Ненільпотентна група, в якій всі власні підгрупи нільпотентні, називається групою Шмідта або мінімальною ненільпотентною групою.

Твердження 1.1.4. [4]. Група G тоді і тільки тоді є скінченною групою Шмідта, коли

$$G = P \rtimes Q.$$

де P — силовська p -підгрупа групи G порядку p експоненти p або 4 , $\alpha > 0$, p — просте число, $Q = \langle b \rangle$ — силовська q -підгрупа порядку q^β , $\beta > 0$, q — просте число,

$$\Phi(G) = Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q),$$

$G/\Phi(P)$ — венільпотентна група Мілера-Морено, $|\Phi(P)| = p^{\alpha_1}$, $\alpha - \alpha_1 = \delta_p(q)$; будь-яка нормальна в G підгрупа із P або співпадає з P або належить $\Phi(P)$; $G' = P$, при непарному $\alpha - \alpha_1$ $\Phi(P) = 1$.

Зауваження 1.1.1. Перші приклади нескінчених груп Шмідта та Міллера-Морено (примарних періодичних без скруту) побудовані в [132], [135], [136].

Означення 1.1.4 [138]. Група, у якій будь-який елемент має централізатор скінченного індексу, називається FC -групою.

Твердження 1.1.5. Неперіодична FC -група містить таку центральну підгрупу Z без скруту, що G/Z — періодична FC -група.

Означення 1.1.5. Нехай $I = \{i\}$ — множина індексів, $M = \{G_i\}$ — множина деяких підмножин групи G . Тоді $\times_{i \in I} G_i$ — прямий добуток підгруп G_i , що належать M ,

$$\prod_{i \in I} G_i = \langle G_i \rangle, \quad G_i \subset M, \quad G_i \cdot G_j = G_j \cdot G_i, \quad i, j \in I.$$

$$\times_{i=\alpha}^{\beta} = \times_{i \in I} G_i, \quad \prod_{i=\alpha}^{\beta} G_i = \prod_{i \in I} G_i,$$

якщо I — скінчена цілком впорядкована множина з найменшим елементом α і найбільшим β .

При $|I| = 0$

$$\times_{i \in I} 1, \quad \prod_{i \in I} G_i = 1.$$

Якщо G_i — одноелементна підмножина, то

$$\prod_{i=\alpha}^{\beta} G_i = g = G_{\alpha} = \dots = G_i = \dots = G_{\beta},$$

де g — елемент із G .

$$\prod_{\alpha=i < j}^{\beta} [G_i, G_j] = ([G_{\alpha}, G_{\alpha+1}] \cdot \dots \cdot [G_{\alpha}, G_j] \cdot \dots \cdot [G_{\alpha}, G_{\beta}]) \cdot$$

$$\dots \cdot ([G_i, G_{i+1}] \cdot \dots \cdot [G_i, G_j] \cdot \dots \cdot [G_i, G_{\beta}]) \cdot \dots \cdot ([G_{\beta-1}, G_{\beta}]),$$

G_i, G_j — одноелементні множини, $i, j \in I$.

Означення 1.1.6 [181]. Нехай G — група, $I = \{i\}$ — множина індексів, $\{G_i\}$ — множина підгруп G_i із G для всіх $i \in I$.

Будемо говорити, що G розкладається в майже прямий добуток G_i з об'єднаною підгрупою C або G — майже прямий добуток G_i з об'єднаною C , якщо виконуються такі умови:

- 1) для всіх $i \in I$ $G_i < G$; C — власна нормальна підгрупа із G_i , $|I| > 0$;
- 2) $G = \prod_{i \in I} G_i$;
- 3) при $|I| > 1$ $G_i \cap \prod_{j \in I, i \neq j} G_j = C$.

Будемо також говорити, що $\prod_{i \in I} G_i$ — майже прямий розклад групи G , а G_i — майже прямий множник цього розкладу, де $|I|$ — потужність розкладу.

Означення 1.1.7 [138]. Група G — називається локально ступінчатою, якщо будь-яка її неединична скінченно породжена підгрупа містить власну підгрупу скінченного індексу.

Означення 1.1.8 [70]. Нормальна підгрупа A групи G називається ло-

кально нільпотентним корадикалом групи G , якщо вона є піретин всіх таких нормальних в G підгруп G_i , для яких G/G_i — локально нільпотентна група і G/A — теж локально нільпотентна група. Локально нільпотентний корадикал підгрупи A називається другим локально нільпотентним корадикалом групи G .

Означення 1.1.9 [63]. Підгрупа A групи G називається квазіцентральною підгрупою із G , якщо будь-яка підгрупа із A нормальна в G .

Твердження 1.1.6. [63] Нехай A — локально нільпотентний корадикал групи G . Тоді справедливі умови

- 1) локально нільпотентний корадикал будь-якої підгрупи із G належить A , $[A, G] = A$;
- 2) гомоморфний образ i -го локально нільпотентного корадикала є i -им локально нільпотентним корадикалом гомоморфного образу G ;
- 3) якщо A — періодична група, то вона не містить квазіцентральної в G неодиначних силовських 2-підгруп із A і будь-яких центральних в G неодиначних холловських підгруп із A .

Твердження 1.1.7. Група G тоді і тільки тоді є майже прямим добутком своїх підгруп G_i з об'єднаною підгрупою C , $i \in I$, $|I| > 0$, коли

$$G/C = \times_{i \in I} G_i/C, \quad |G_i/C| > 1.$$

Доведення. Твердження є майже прямим наслідком означення 1.1.6.

Твердження 1.1.8. Якщо G — група з власною підгрупою G' , G/G' — прямий добуток циклічних груп, то G — майже прямий добуток підгруп $G_i = G' \cdot \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою G' , $i \in I$, де I — деяка множина індексів, $|I| > 0$.

Доведення. За умовою G/G' — прямий добуток неодиначних циклічних груп. Нехай G_i — повний прообраз в G одного з циклічних множ-

ників фіксованого розкладу G/G' в прямий добуток циклічних груп.

Тоді $G_i \triangleleft G$, G' — власна підгрупа з G_i , $G_i = G' \cdot \langle b_i \rangle$ і за твердженням 1.1.7 G — майже прямий добуток G_i з об'єднаною підгрупою G' . Твердження доведено.

Твердження 1.1.9 [49]. Якщо $G' < Z(G)$, то для будь-яких g_1 і g_2 , $g_1, g_2 \in G$, цілих i, j та натурального k справедливі співвідношення:

$$1) [g_1^i, g_2^j] = [g_1, g_2^{ij}] = [g_1^{ij}, g_2] = [g_1, g_2]^{ij} = [g_1^j, g_2^i];$$

$$2) [g_1^i, g_2^j]^n = g_1^{ni} g_2^{nj} \cdot [g_1, g_2]^{-\frac{1}{2}ijn(n-1)};$$

$$3) \text{ для будь-якого } x \in G, g = \prod_{w=1}^l G_w^{i_w} \text{ маємо}$$

$$[g, x] = \prod_{w=1}^l [g_w, x]^{i_w}.$$

Лема 1.1.1. Нехай $G' < Z(G)$, n — натуральне число,

$$g = \prod_{w=1}^l g_w^{i_w}, \quad l > 1.$$

Тоді

$$g^n = g_0^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{w=1}^l g_w^{n \cdot i_w},$$

де

$$g_0 = \prod_{1 \leq w < \delta} [g_w, g_\delta]^{i_w \cdot i_\delta}.$$

Доведення. Нехай G, g і n задовольняють умовам леми. Доведемо твердження леми індукцією за l . При $l = 2$ це твердження випливає із твердження 1.1.9.

Нехай тепер $l > 2$ і твердження справедливе для всіх $k < l$. Покладемо

$$d = \prod_{w=1}^{l-1} g_w^{i_w}.$$

тоді $g = d \cdot g_l^i$. За твердженням 1.1.9

$$g^n = d^n \cdot g_l^{n \cdot i} d_0^{-\frac{1}{2}n(n-1)}; \quad d_0 = [d, g_l]^i, \quad d_0 \in Z(G), \quad d_0 = \prod_{w=1}^{l-1} [g_w, g_l]^{i_w \cdot i_l}.$$

За індукцією

$$d^n = c_0^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{w=1}^{l-1} g_w^{n i_w}, \quad c_0 = \prod_{1=w < \delta}^{l-1} [g_w, g_\delta]^{i_w \cdot i_\delta}.$$

Тепер

$$\begin{aligned} g^n &= (c_0 d_0)^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \left(\prod_{w=1}^{l-1} g_w^{n i_w} \right) \cdot g_l^{n i_l} = \\ &= g_0^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{w=1}^l g_w^{n i_w}, \\ g_0 &= c_0 d_0 = \left(\prod_{1=w < \delta}^{l-1} [g_w, g_\delta]^{i_w \cdot i_\delta} \right) \left(\prod_{w=1}^{l-1} [g_w, g_l]^{i_w \cdot i_l} \right) = \\ &= \prod_{1=w < \delta}^l [g_w, g_\delta]^{i_w \cdot i_\delta}. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 1.1.2. Нехай G — група, N — така її 2-породжена нормальна підгрупа, що

$$G' \cap N = N' \subset Z(N).$$

Тоді $G = N \cdot C_G(N)$.

Доведення. Нехай $G, N = \langle a, b \rangle$ задовольняють умовам леми. Тоді

$$G' \cap N = \langle c \rangle \subset Z(N), \quad c = [a, b].$$

Нехай g — елемент із G , тоді

$$g^{-1} a g = a c^i, \quad g^{-1} b g = b c^j.$$

Звідси

$$g^{-1} c g = (g^{-1} a g)^{-1} (g^{-1} b g)^{-1} (g^{-1} a g) (g^{-1} b g) = a^{-1} c^{-i} b^{-j} c^{-j} a c^i b c^j = c,$$

а значить, $[c, g] = 1$.

Нехай $d = a^{-i}b^ja^{-j}b^j$. Оскільки $\langle c \rangle \subset Z(N \cdot \langle g \rangle)$, то за твердженням 1.1.9

$$[d^{-1}g, a] = [d^{-1}g, b] = 1.$$

А, значить, $d^{-1}g \in C_G(N)$. Оскільки $d \in N$, то $g = df$, $f \in C_G(N)$. Звідси $G = N \cdot C_G(N)$. Лема доведена.

Наслідок 1.1.1. Нехай G — група з центральним циклічним комутантом G' .

Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' = N'$ маємо

$$G = N \cdot C_G(N).$$

Наслідок 1.1.2 [75]. Якщо G — p -група з комутантом порядку p і N — будь-яка її 2-породжена підгрупа з комутантом порядку p , то

$$G = N \cdot C_G(N).$$

Теорема 1.1.1. Нехай G — майже прямий добуток $(C \times \langle g_i \rangle)$ з об'єднаною розв'язною підгрупою $C = G'$ експоненти p^γ , p — просте число, і примарними або нескінченими підгрупами $\langle g_i \rangle$, $i \in I$. Тоді $C \subset Z(G)$. Будь-який елемент $g \in G$ має вид:

$$g = b_0 \cdot \prod_{w=1}^l b_w^{i_w}, \quad b_w = g_i$$

для деякого $i \in I$, i_w — ціле число, $g^{p^\gamma} \in Z(G)$, існують i, j , такі, що $[[g_i, g_j]] = p^\gamma$. При цьому в G справедливі твердження:

1) група G тоді і тільки тоді має експоненту $p^{\gamma+1}$, коли G — p -група, у якій або

$$\max_{i \in I} |g_i| = p^{\gamma+1}.$$

або

$$p = 2, \quad \gamma > 0, \quad \max_{i \in I} |g_i| = 2^\gamma,$$

і при $|g| = 2^{\gamma+1}$ — маємо $|C \cap \langle g \rangle| = 2$;

2) якщо g — p' елемент або g — p -елемент, у якого

$$\max_{1 \leq w \leq l} |b_w^{i_w}| = p^\delta, \quad p^\delta \geq |b_0|,$$

для будь-яких w і δ , таких, що $w, \delta \in [1, l]$,

$$p^\delta > |[b_w^{i_w}, b_\delta^{i_\delta}]|,$$

то

$$C \cap \langle g \rangle = 1.$$

Доведення. Нехай G задовольняє умовам теореми. Покладемо $c_{i,j} = [g_i, g_j]$, $Z = \langle c_{i,j} \rangle$, $i, j \in I$. Тоді $Z \subset C$, $[c_{i,j}, g_k] = 1 = [Z, g_k]$ для всіх $i, j, k \in I$. Зрозуміло, що для будь-якого $c \in C$ $[c, g_i] = [c, g_j] = 1$, $[c, c_{i,j}] = 1$. Звідси $Z \subset Z(G)$.

Нехай G^* — майже прямий добуток підгруп $Z \times \langle g_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою Z . Тоді $G^* \triangleleft G$, $G = C \cdot G^*$, $C \cap G^* = Z$ і комутант G/G^* співпадає з C/Z . Оскільки C — розв'язна група, то розв'язною буде і $C/Z \cong G/G^*$. Для розв'язної групи це можливо, коли $|C/Z| = 1$, тобто $Z = C$ — центральна в G p -група експоненти p^γ . Зрозуміло, що будь-який елемент $g = b_0 \cdot \prod_{w=1}^l b_w^{i_w}$. За твердженням 1.1.9 $g^{p^\gamma} = 1$. Оскільки $\exp C = p^\gamma$ і будь-який елемент із C є скінченним добутком скінченних степенів центральних елементів $c_{i,j}$, то хоча б для однієї пари $i, j \in I$ $|c_{i,j}| = p^\gamma$.

Доведемо тепер твердження 1) теореми. Нехай $\exp G = p^{\gamma+1}$. Тоді для будь-якого $i \in I$ $|g_i^{p^{\gamma+1}}| = 1$ і G — p -група, $|g_i| \leq p^{\gamma+1}$. За лемою 1.1.1 $g_i^{p^\gamma} = b_0^{c_0} \cdot c_0^{-\frac{1}{2}p^{\gamma(p^\gamma-1)}} \cdot \prod_{w=1}^l b_w^{i_w p^\gamma}$, де $c_0 = \prod_{1 \leq w < \delta \leq l} [b_w, b_\delta]^{i_w i_\delta}$, $c_0 \in C$. Зрозуміло, що $|c_0^{-\frac{1}{2}p^{\gamma(p^\gamma-1)}}| \leq p$ і тільки при $p = 2$, $\gamma > 0$ $|c_0^{-\frac{1}{2}p^{\gamma(p^\gamma-1)}}| = p = 2$. Якщо $\max_{1 \leq w \leq l} |b_w^{i_w}| = p^{\gamma+1}$, то $\exp G = |g| = p^{\gamma+1}$, $\langle g \rangle \cap C = 1$.

Нехай далі для всіх $i \in I$ $|g_i| < p^{\gamma+1}$. Тоді $g^{p^\gamma} = c_0^{-\frac{1}{2}p^\gamma(p^\gamma-1)}$ і знайдуться $\delta, \omega \in [1, l]$, для яких $[[b_\omega, b_\delta]]^{i \cdot \omega} = 2^\gamma$, $|(g) \cap C| = 2$ і, значить, $\max_{i \in I} |g_i| = 2^\gamma$. Необхідність твердження 1) теореми доведена. Із цієї необхідності чи з умови, що g — p' -елемент, випливає, що $|(g) \cap C| = 1$, тобто справедливе твердження 2) теореми.

Доведемо тепер достатність твердження 1) теореми. Якщо $\max_{i \in I} |g_i| = p^{\gamma+1}$, то тоді як при необхідності $g^{p^{\gamma+1}} = 1$ і $\exp G = p^{\gamma+1}$.

Зрозуміло, що при $p = 2$ $\gamma > 0$ і $\max_{i \in I} |g_i| = p^\gamma$ існують i, j такі, що $[[g_i, g_j]] = 2^\gamma$. Покладемо $g_i g_j = g$. Тоді $g^{2^\gamma} = c_0^{p^{\gamma-1}}$, де $c_0 = [g_i, g_j]$. Тому $|g| = 2^{\gamma+1}$. Достатність твердження 1) доведена. Теорема доведена.

Твердження 1.1.10. Нехай G — нільпотентна група класу нільпотентності меншого або рівного 3, u, z — елементи із G , s, k — невід'ємні цілі числа, n — натуральне число. Тоді в G справедливі рівності:

- 1) $[u^s, z^k] = [u, z]^{sk} \cdot [[u, z], u]^{\frac{1}{12}sk(s-1)} \cdot [[u, z], z]^{\frac{1}{12}sk(k-1)}$;
- 2) $[u^s, z^k]^n = z^{kn} u^{sn} \cdot [u, z]^{\frac{1}{12}skn(n+1)} \cdot [[u, z], u]^{\frac{1}{12}skn(n+1)(s(4n-1)-3)} \cdot$

$$\begin{aligned} & \cdot [[u, z], z]^{\frac{1}{12}skn(n+1)(k(2n+1)-3)} = \\ & = u^{sn} z^{kn} [u, z]^{-\frac{1}{12}skn(n-1)} \cdot [[u, z], u]^{-\frac{1}{12}skn(n-1)(s(2n-1)-3)} \cdot \\ & \cdot [[u, z], z]^{-\frac{1}{12}skn(n-1)(k(4n+1)-3)}; \end{aligned}$$

Теорема 1.1.2. Нехай G — група, яка містить такі нормальні дільники N_1, N_2 , що $N_1 \cap N_2 = 1$, G/N_i — дедекіндова група, $i = 1, 2$, і виконується хоча б одна з умов:

- 1) N_1 — група без інволюцій або містить елементи порядку 8 чи ∞ .
 N_2 — група без інволюцій або містить елементи порядку 8 чи ∞ ;
- 2) N_1 — періодична група без інволюцій.

Тоді G — дедекіндова група.

Доведення. Нехай G, N_1, N_2 задовольняють умові теореми і $G^* = G/N_1 \times G/N_2$. Зрозуміло, що G^* — нільпотентна група. За теоремою

Ремака $G/N_1 \cap N_2 \cong G$ — підгрупа із G^* . Тому G — нільпотентна група. Якщо G/N_i — абелева група, $i = 1, 2$, то $G' = 1$, а в цьому випадку теорема очевидна.

Нехай $G' \neq 1$. Оскільки $(G^*)' = 2$ -група, то і G' — неодиначна 2-група. Розглянемо можливі випадки: 1) N_1 не містить інволюцій; 2) N_1 містить елементи порядку 8 та ∞ .

Випадок 1. В цьому випадку $G' \cap N_1 = 1$, G/N_1 — періодична нільпотентна гамільтонова група, і N_2 ізоморфна її підгрупі. З цього і з умов теорема випливає, що N_2 не містить елементів порядку 8 та ∞ . Зрозуміло, що при умові 1) N_2 — періодична група без інволюцій. Оскільки при умові 2) N_1 — періодична група без інволюцій, то не порушуючи загальності, можемо вважати, що в розглядуваному випадку завжди N_1 — періодична група без інволюцій. Оскільки G/N_1 — періодична група, то і G — періодична нільпотентна група. Відомо, що тоді $G = P \times D$, де P — силовська гамільтонова 2-підгрупа із G , D — її холовське доповнення. Оскільки G/N_i — дедекіндова група, $i = 1, 2$, то комутанти силовських 2'-підгруп із G належать $N_1 \cap N_2 = 1$. Звідси випливає, що силовські 2' підгрупи із G абелеві. Таким чином, G — майже прямий добуток дедекіндових силовських підгруп. За твердженням 1.1.3 G — гамільтонова група, і випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. Покажемо, що цей випадок при умові $|G'| > 1$ неможливий. Дійсно, в цьому випадку за твердженням 1.1.3 $N_2 \supset G'$ і G/N_1 — гамільтонова група. Зрозуміло, що в G виконується умова 1) теореми. Оскільки при цій умові і гамільтоновості G/N_1 N_2 — періодична група, що не містить елементів порядку 8 і не має інволюцій. З цього випливає, що силовська 2-підгрупа із N_2 , що містить G' , має порядок 1. Це суперечить умові $|G'| > 1$. Випадок 2 неможливий. Теорема доведена.

Теорема 1.1.3. Нехай G — нільпотентна група із скінченним абеле-

вим комутантом порядку p^n , $[G', G] \subset Z(G)$, G/G' — прямий добуток циклічних груп, p — просте число. Тоді G — група одного із типів:

1) G — скінченна p -група, довільна абелева підгрупа породжується n елементами, будь-яка неодиначна циклічна підгрупа із G має неодиначний перетин з G' ;

2) G — майже прямий добуток нормальних в G підгруп $C\lambda(b_i)$, $i \in I$, з об'єднання скінченною p -підгрупою C , що містить G' , довільна абелева підгрупа із C породжується n елементами, будь-яка неодиначна підгрупа із C має неодиначний перетин з G' .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покладемо $Z_1 = G'$, $Z_2 = [G', G]$, $Z_3 = 1$. Оскільки G — група із скінченим комутантом порядку p^n , то вона містить єдину нормальну силовську підгрупу P . Із розкладу G/G' — прямий добуток циклічних груп P/G' і G/P — прямий добуток циклічних груп. Нехай

$$G/P = \times_{j \in J} G_j/P,$$

де $G_j/P = \langle Pg_j \rangle$. За вибором P маємо $G_j = P\lambda\langle g_j \rangle$. Розглянемо можливі випадки: 1) всяка неодиначна циклічна підгрупа із G має в G' неодиначний перетин; 2) в G існує елемент d , такий що $|d| > 1$, $\langle d \rangle \cap G' = 1$.

Випадок 1. Зрозуміло, що в цьому випадку $G = P$ — p -група, і всі елементи порядку p належать G' . З цього випливає, що нільпотентна група P задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Відомо, що G — черніковська група, і оскільки G/G' — прямий добуток циклічних груп, то G — скінченна група. Очевидно, що G — група типу 1) теореми. Випадок 1 розглянутий.

Випадок 2. Нехай $\langle d \rangle \cap P = 1$. Тоді за означенням 1.1.6 G — майже прямий добуток нормальних в G підгруп $G_j = P\lambda\langle g_j \rangle$ з об'єднання силовською p -підгрупою P із G , що містить G' , $j \in J$.

Якщо тепер всі елементи порядку p із P належать G' , то за випадком 1) P — скінченна p -група типу 1) теореми. Покладемо $P = C$, а $\langle g_j \rangle = \langle b_i \rangle$, $i \in I$, $j \in J$, $J = I$, тоді G — група типу 2).

Нехай далі P має елемент d порядку p , що не належить G' . За теоремою 1 із [202] $P = X\lambda Y$, де $Z_1 \subset X$, Y — неодиначна циклічна p -група. Покладемо $P = P_0$, $X = P_1$, $Y = \langle b_0 \rangle$. Індукцією за потужністю прямого розкладу P/G' доведемо, що P — p -група типу 2) теореми. Якщо всі елементи простого порядку із P_1 належать Z_1 , то покладемо $C = P_1$ і одержимо шуканий розклад, тобто P — група типу 2) теореми.

Нехай в P_1 існує елемент порядку p , що не належить Z_1 . Тоді за теоремою 1 із [203] $P_1 = P_2\lambda\langle b_1 \rangle$, $Z_1 \subset P_2$, $|b_1| > 1$. Покажемо, що ряд підгруп P_α з умовами $P_\alpha = P_{\alpha+1}\lambda\langle b_\alpha \rangle$, $Z_1 \subset P_{\alpha+1}$ можна продовжувати для довільного $\alpha \in A$ до тих пір, поки всі елементи порядку p із P_α не будуть належати Z_1 . Нехай для всіх $\beta < \alpha$ P_β вже побудовано. Якщо α не граничне число, то існує $\beta = \alpha - 1$, для якого P_β вже побудовано, і якщо всі елементи порядку p із P_β належать Z_1 , то процес побудови ряду закінчується на неграничному числі β . Якщо хоча б один елемент порядку p не належить Z_1 , то за теоремою 1 із [203] $P_\beta = P_\alpha\lambda\langle b_{\alpha-1} \rangle$, $Z_1 \subset P_\alpha$, $|b_{\alpha-1}| > 1$. Нехай α — граничне число. Тоді покладемо $P_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} P_\beta$. Зрозуміло, що $Z_1 \subset P_\alpha$. Якщо всі елементи порядку p із P_α належать Z_1 , то процес побудови ряду закінчується на P_α , якщо ні, то його можна продовжити індуктивно. Оскільки G/P_α — прямий добуток неодиначних циклічних груп, то процес побудови P_α , обмежений потужністю розкладу P/G' , зупиниться на деякому γ^3 , для якого $P_\gamma \supset Z_1$ і всі елементи порядку p із P_γ належать Z_1 . Покладемо $P_\gamma = C$, $I = J \cup A$, $i \in I$, $j \in J$, $\alpha \in A$. Одержимо, що $C \triangleleft G$, $G/C = \times_{i \in I} \langle C \cdot b_i \rangle$. За твердженням 1.1.7 G — майже прямий добуток підгруп $C\lambda\langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою C . Оскільки $Z_1 = G' \subset C$, будь-який елемент порядку p із C належить G' , то C — група типу 1) теореми, а G — група типу 2) теореми. Теорема

доведена.

Наслідок 1.1.3. Нільпотентні групи з комутантом порядку p , у яких G/G' — прямий добуток циклічних груп, вичерпуються групами типів:

- 1) G — група кватерніонів;
- 2) G — майже прямий добуток підгруп $C \lambda \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $C \supset G'$, $i \in I$, $|G'| = p$, C — група кватерніонів або неодиначна циклічна p -група.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді G — група типу 1) або 2) теореми 1.1.3. Нехай G — група типу 1) цієї теореми. Тоді всі елементи порядку p із G породжують циклічну підгрупу G' порядку p . Відомо, [49], що G — група кватерніонів, тобто група типу 1) наслідку.

Нехай G — група типу 2) теореми 1.1.3. Оскільки C — не обов'язково неабелева група, то вона, як і раніше, може бути або групою кватерніонів, або неодиначною циклічною p -групою, що містить G' . Зрозуміло, що $|G'| = p$, і G — група типу 2) наслідку. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Наслідок доведено.

Твердження 1.1.11. Всі групи G , що є розширенням центральної підгрупи C за допомогою групи кватерніонів мають вид

$$G = C \cdot Q, \quad Q = \langle a, b \rangle \triangleleft G,$$

і вичерпуються групами типів:

- 1) $Q = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів, $C \cap Q = 1$;
- 2) $Q = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \{2^\beta, \infty\}$, $\beta > 1$, $[a, b] = a^2$, $C \cap Q = \langle a^2 \cdot b^2 \rangle$;
- 3) $Q = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = 2$, $|a| \in \{2^\alpha, \infty\}$, $|b| \in \{2^\beta, \infty\}$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$, $C \cap Q = \langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle$.

Доведення цього твердження здійснюється шляхом нескладних обчислень комутаторних співвідношень з урахуванням породжувальних еле-

ментів та визначальних співвідношень G/C . Повністю це доведення дано в роботі автора [178].

Наслідок 1.1.4. Якщо G — група із наслідку 1.1.3 і C — повна група, то $G = C \times Q$, де Q — група кватерніонів.

Теорема 1.1.4. Всі групи G з центральною підгрупою C , що задовольняють умовам: підгрупа C доповнюється в будь-якому своєму локально циклічному розширенні із G (C — повна група), G/C — дедекіндова група, що розкладається в прямий добуток груп з локально циклічними власними підгрупами, мають вид: $G = B \cdot (C_1 \times Q) \cdot U$, де неодиначна підгрупа U розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $C \times U_j$ з об'єднаною підгрупою

$$C = U \cap (C_1 \times Q) \cdot B = U \cap (C_1 \times Q) \subset Z(Q),$$

U_j — локально циклічна група без інволюцій, $|U_j| > 1$, $j \in J$, $|J| > 0$, неодиначна підгрупа B розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $B_0 \times B_i$ з об'єднаною 2-групою

$$B_0 = B \cap (C_1 \times Q) \cdot U = B \cap C = \langle B', [B, Q], [B, U] \rangle,$$

B_i — неодиначна локально циклічна 2-група,

$$\exp B_0^\circ \leq \max_{i \in I} |b_i|, \quad |I| > 0;$$

і вичерпуються групами типів:

$$1) C = C_1, Q = 1;$$

$$2) C = C_1, Q = \langle a, b \rangle \text{ — група кватерніонів, } |B_i| = 2, |U_j| < \infty, [Q, U] = 1;$$

$$3) Q = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, |a| = |b| = 4, [a, b] = a^2, C = C_1 \times \langle a^2 \cdot b^2 \rangle, |B_0| = 2, |U_j| < \infty, [Q, U] = 1;$$

$$4) Q = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle, |C| = 2 \geq |B_i|, |a| = |b| = 4, [a, b] = c, [c, b] = 1, C = C_1 \times \langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle, |U_j| < \infty, [Q, U] = 1.$$

Доведення. Необхідність. Нехай G і C задовольняють умовам теореми

і X — підгрупа із G , що співпадає з C при абелевості G/C і X/C — група кватерніонів при неабелевості G/C . Зрозуміло, що

$$G^*/C = X/C \times G^*/C,$$

де G^*/C — абелева група, яка розкладається в прямий добуток груп з локально циклічними власними підгрупами. Відомо, що останні прямі множники в абелевому випадку або локально циклічні, або прямий добуток двох циклічних груп простих порядків. Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що G^*/C — прямий добуток локально циклічних груп. Зрозуміло, що $G^*/C = Y/C \times U/C$, де Y/C — прямий добуток всіх локально циклічних множників G^*/C , що є 2-групами, а U/C — прямий добуток всіх прямих множників розкладу G^*/C без інволюцій. Тоді $G^* = Y \cdot U$, $Y \cap U = C$. Покладемо $P = XY$. Тоді

$$P \cap U = X \cap Y = X \cap U = C \subset Z(G),$$

$$X \triangleleft G, \quad Y \triangleleft G, U \triangleleft G.$$

Зрозуміло, що P/C — силовська 2-підгрупа із G/C . За вибором $Y/C = \times_{i \in I} Y_i/C$, а $U/C = \times_{j \in J} G_j/C$. Тоді $Y_i \triangleleft G$, $G_j \triangleleft G$ і за умовами теореми $Y_i = C \times B_i$, $G_j = C \times U_j$, де B_i — локально циклічна 2-група, а U_j — локально циклічна група без інволюцій. За твердженням 1.1.3, якщо X/C — група кватерніонів, то $|B_i| \leq 2$, а $|Y_j| < \infty$. Покладемо $B_0 = Y' \cdot \langle [X, Y], [Y, U] \rangle$. Зрозуміло, що $B_0 \subset C \subset Z(G)$ і при $|Y/C| > 1$ існує неодиначна підгрупа B , що розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $B_0 \times B_i$ з об'єднаною підгрупою $B_0 = \langle B', [B, U], [B, X] \rangle$, $i \in I$, $Y' = B'$, $[X, Y] = [X, B]$, $[Y, U] = [B, Y]$. Зрозуміло, що B_0 породжується елементами виду $[b_i, g]$, де $B_i \in B$, $g \in G$. Оскільки $B_0 \subset Z(G)$, то за твердженням 1.1.9

$$|[b_i, g]| \leq |b_i|.$$

Звідси $\exp B_0 \leq \max_{i \in I} |B_i|$, B_0 — 2-група. Якщо $|U/C| > 1$, то U — майже прямий добуток нормальних в G підгруп $C \times U_j$ з об'єднаною

підгрупою C і неединичними локально циклічними U_j без інволюцій, $j \in J$, $|J| > 0$.

Розглянемо підгрупу X . Якщо $C = X$, то покладемо $Q = 1$, $C_1 = C$ і G — група типу 1) теореми. Нехай X/C — група кватерніонів. Тоді $|B_i| \leq 2$, $|U_j| < \infty$, $[X, U] \subset C$, $X = C \cdot Q$ — група одного із типів 1)-3) твердження 1.1.11. Якщо X — група типу 1) згаданого твердження, то покладемо $C = C_1$ і одержимо, що G — група типу 2) теореми.

Нехай X — група типу 2) твердження 1.1.11. Тоді $C \cap Q = \langle cb^2 \rangle$, $C \cap \langle b \rangle = \langle b^4 \rangle$. Оскільки C доповнюється в C на циклічну $\langle b \rangle$, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що $C \cdot \langle b \rangle = C \times \langle b \rangle$, $|b| = 4$, $|a^2b^2| = 2$. Покладемо, $d = a^2b^2$. Якщо в C існує елемент d_1 , $|d_1| = 4$, $d_1^2 = d$, то покладемо $Q = \langle a, bd_1 \rangle$ — група кватерніонів, $X = C \times Q$ і одержимо, що G — група типу 2) теореми. Нехай d не міститься в жодній циклічній підгрупі із C порядку 4. Відомо, що тоді $C = C_1 \times \langle d \rangle$, $X = C_1 \times Q$, і G — група типу 4).

Нехай, нарешті, X — група типу 3) твердження 1.1.11. Як і в попередньому випадку можна вважати, що $|a| = |b| = 4$. Покладемо $ca^2 = f_1$, $cb^2 = f_2$, $a^2b^2 = f_3$. Ясно, що $|f_k| = 2$, $k = 1, 2, 3$. Якщо для деякого k в C знайдеться така підгрупа $\langle c_k \rangle$ порядку 4, що $c_k^2 = f_k$, то прийдемо до одного з вже розглянутих випадків. Тому будемо вважати, що $\langle f_k \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із C . Тоді відомо, що $C = C_1 \times \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle$, $X_1 = C_1 \times Q$ і G — група типу 4) теореми. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

Наслідок 1.1.5. Всі групи G , що є розширенням центральної елементарної абелевої p -групи C за допомогою групи кватерніонів, вичерпуються групами виду $G = C_1 \times Q$, і G — група одного з типів 2)-4) теореми 1.1.4.

Твердження є очевидним наслідком теореми 1.1.4.

1.2 Метациклічні групи

Означення 1.2.1. [71]. Група G називається метациклічною, якщо вона розкладається в добуток

$$G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle, \quad \langle a \rangle \triangleleft G, \quad b^{-1}ab = a^r,$$

r — ціле число.

Твердження 1.2.1 [71]. Клас метациклічних груп замкнений за підгрупами і фактор-групами.

Твердження 1.2.2. Нехай $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $b^{-1}ab = a^r$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^m \rangle = \langle b^n \rangle$, $a^m = b^n$. Тоді справедливі твердження:

1) $bab^{-1} = a^{r'}$, $r \cdot r' \equiv 1 \pmod{a}$, $|G : \langle a \rangle| = n$, $|G : \langle b \rangle| = m$, $a^n \in Z(G)$, r, r' — цілі числа;

2) для довільних цілих чисел i, j та натурального t і елемента $d = a^i b^j$ справедливо $d^t = (a^i b^j)^t = b^{ti} a^{fi}$, де $f \equiv r_0^{t|j|} \cdot \sum_{\omega=0}^{t-1} r_0^{\omega|j|}$, при $j \geq 0$ $r_0 = r$, при $j < 0$ $r_0 = r'$. Якщо $\langle d \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із G , що має одиничний перетин з $\langle a \rangle$, то $|d| \mid n$; якщо $\langle d \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із G , що має одиничний перетин з $\langle b \rangle$, то $|d| \leq m$; якщо G — p -група, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| > 1$, то $|d| \mid \min(m, n)$.

Доведення цього твердження проводиться шляхом простих арифметичних викладок. Воно детально проведено автором в [163, лема 1.2].

Лема 1.2.1. Нехай δ та j — натуральні числа, p — просте число, $f = r^j \cdot \sum_{\omega=0}^{p^j-1} r^{\omega j}$, r — ціле число. Тоді f — ціле число, що задовольняє одній із умов:

- 1) якщо $r = 1$, то $f = p^j$;
- 2) якщо $r = -1$, $p = 2$, то $f = \frac{1}{2}(1 + (-1)^j) \cdot p^j$;
- 3) якщо $r = -(1 + 2^k)$, $p = 2$, $k > 1$, то $f = f(j, r, \delta) \cdot 2^{\frac{1}{2}(k-1)(1+(-1)^{j+1})} \cdot 2^{\delta}; (2, f(j, r, \delta)) = 1$.

4) якщо $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$, то $f = f(j, r, \delta) \cdot p^\delta$, $(p, f(j, r, \delta)) = 1$;

5) якщо умови 1)-4) справедливі, то $f = f(j, r, \delta) \cdot \varphi(j, r) \cdot p^\delta$,
 $(f(j, r, \delta), p) = 1$, а $\varphi(j, r)$ в умовах 1)-4) має вид:

в 1) $\varphi(j, r) = f(j, r) = 1$;

в 2) $\varphi(j, r) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^j)$, $f(j, r) = 1$;

в 3) $\varphi(j, r) = 2^{\frac{1}{2}(k-1)(1+(-1)^{j+1})}$;

в 4) $\varphi(j, r) = 1$.

Доведення. Умови 1) та 2) очевидні. Нехай $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$. Тоді

$$\sum_{\omega=0}^{p^k-1} r^{\omega j} = \frac{r^{jp^k} - 1}{r^j - 1} = \frac{(1 + p^k)^{jp^k} - 1}{(1 + p^k)^j - 1}.$$

За результатами [163] маємо

$$(1 + p^k)^{jp^k} - 1 = lp^{k+\delta+\alpha},$$

$$(1 + p^k)^j - 1 = tp^{k+\alpha},$$

$$(l, p) = (t, p) = 1, \quad j = sp^\alpha,$$

$$(s, p) = 1.$$

Число f має вид:

$$f = r_c^j \cdot \frac{1}{t} p^\delta = f(j, r, \delta) p^\delta,$$

$$(f(j, r, \delta), p) = 1, \quad \varphi(j, r) = 1.$$

Умова 4) доведена.

Нехай $r = -(1 + 2^k)$, $p = 2$, $k > 1$. Тоді для $j = s2^\alpha$, $(2, s) = 1$ маємо випадки: $\alpha > 0$, $\alpha = 0$. Якщо $\alpha > 0$, то $r^j = |r^j|$, і, як і в попередньому випадку, $f = f(j, r, \delta) \cdot 2^\delta$, $\varphi(j, r) = 1$.

Нехай $\alpha = 0$. Тоді, як і в попередньому випадку,

$$(-(1 + 2^k))^j 2^\delta - 1 = l2^{k+\delta},$$

$$-(1 + 2^k)^j - 1 = -((1 + 2^k)^j + 1) - 2 =$$

$$= -t2^k - 2 = -(t2^{k-1} + 1) \cdot 2,$$

де $(l, 2) = (t, 2) = 1$. Оскільки $k > 1$, то $(t2^{k-1} + 1, 2) = 1$. Звідси, як і раніше, $f = f(j, r, \delta) \cdot 2^{k-1+\delta}$, $(f(j, r, \delta), 2) = 1$. Покладемо $\varphi(j, r) = (2^{\frac{1}{2}(k-1)(1+(-1)^{j+1})})$, тоді і при $\alpha = 0$, і при $\alpha > 0$ маємо $f = f(j, r, \delta)\varphi(j, r) \cdot 2^\delta$. Умова 3) доведена.

Умова 5) є наслідком попередніх чотирьох умов. Лема доведена.

Теорема 1.2.1. Метациклічні групи є групами виду

$$G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle, \quad b^{-1}ab = a^r,$$

r — ціле число. При цьому G — група одного з типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $r = 1$;
- 2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = -1$, група $\langle a \rangle$ має неединичну підгрупу індексу 2, $\langle b \rangle$ має підгрупу індексу 2;
- 3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = -(1 + 2^k)$, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > k > 1$, група $\langle b \rangle$ має підгрупу індексу $2^{\alpha-k}$;
- 4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > k$, група $\langle b \rangle$ має підгрупу індексу $p^{\alpha-k}$;
- 5) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^m} \rangle = \langle b^{p^n} \rangle$, $a^{p^m} = b^{s p^n}$, $(s, p) = 1$, $\beta > \alpha > m > k$;
- 6) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = -1$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > \alpha > 2$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$;
- 7) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = -1$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \geq \beta > 1$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$;
- 8) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = -(1 + 2^k)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > \alpha > k + 1 > 2$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$;
- 9) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = -(1 + 2^k)$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \geq \beta > \alpha - k + 1 > 2$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$;
- 10) $G = \times_{i=1}^l P_i$, $P_i = \langle a_i \rangle \cdot \langle b_i \rangle$ — силовська p_i -підгрупа із G , що є групою одного з типів 1)–9) при тих же співвідношеннях для a_i та b_i , що і для a та b відповідно в групах вказаних типів. $l > 1$, і хоча б для одного і $P_i \neq 1$, p_i — просте число, $\langle a \rangle = \times_{i=1}^l \langle a_i \rangle$, $\langle b \rangle = \times_{i=1}^l \langle b_i \rangle$;

11) $\langle a \rangle = \times_{i=1}^l \langle a_i \rangle$, $|b| = \infty$, $\langle a_i \rangle$ — силовська p_i -підгрупа із G , p_i — просте число, $|a_i| > 1$, $i \in \{[a_i, b]\} = \langle a_i \rangle$ або a_i ; та b задовольняють тим же умовам, що і елементи a та b відповідно в групах типу 1)-5). При $l = 1$ $\langle [a, b] \rangle = \langle a_1 \rangle$, при $l > 1$ існує таке i , що $|[a_i, b]| > 1$;

12) $G = A\lambda B$, $A = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $B = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$, $\langle a \rangle = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, $\langle b \rangle = \langle v \rangle \times \langle y \rangle$, $[v, B] = 1$, $\langle [u, b] \rangle = \langle u \rangle = \times_{i=1}^n \langle a_i \rangle$, $\langle b \rangle = \times_{i=1}^n \langle b_i \rangle$, $\langle a_i \rangle$ — силовська p_i -підгрупа із $\langle u \rangle$, p_i — просте число, $p > 2$, $\langle x \rangle = \times_{i=n}^l \langle a_i \rangle$, $\langle y \rangle = \times_{i=n}^l \langle b_i \rangle$. Для всіх $1 \leq i \leq l$ $P_i = \langle a_i \rangle \cdot \langle b_i \rangle$, силовська p_i -підгрупа із G одного з типів 1)-9) теореми з тими ж співвідношеннями для a_i та b_i , що і для a та b відповідно вказаних типів, p_i — просте число, $B = \times_{i=n}^l P_i$.

Доведення. Нехай G — метациклічна група. Тоді $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $b^{-1}ab = a^r$, r — ціле число. Якщо G — скінченна примарна група, то за результатами [163] G — група одного з типів 1)-9) розглядуваної теореми. Тому будемо вважати, що G — непримарна група.

Нехай G — скінченна нільпотентна група. Тоді за результатами [163] G — група типу 10) розглядуваної теореми.

Нехай G — нескінченна нільпотентна група. Тоді за тими ж результатами G — група типу 1)-4) або 11) розглядуваної теореми.

Якщо G — нескінченна ненільпотентна, то G — група типу 2) або 11) розглядуваної теореми.

Нехай G — скінченна ненільпотентна група. Оскільки G — ненільпотентна, то вона має неединичний локально нільпотентний корадикал U , G/U — нільпотентна група. Зрозуміло, що $U \subset G'$. Звідси $U' = 1$. За результатами [31] $G = U\lambda D$, де D — скінченна нільпотентна група, $U = \langle u \rangle$. За твердженням 1.1.6 ($|U|, 2) = 1$, $D = V \cdot B$, де V — холовська $\pi(U')$ -підгрупа із D , а B — холовське доповнення в D . Зрозуміло, що $\langle u \rangle = \times_{i=1}^n \langle a_i \rangle$, де $\langle a_i \rangle$ — силовська p_i -підгрупа із U , $p_i > 2$ — просте число.

Нехай V_i — силовська p_i -підгрупа із V . Тоді $P_i = \langle a_i \rangle \times V_i$ — силовська

p_i -підгрупа із G . Покладемо $A = \langle u \rangle \lambda V$. Тоді $G = A \lambda B$ і B — скінченна нільпотентна група. Зрозуміло, що $(|V|, 2) = 1$. Нехай N_i — нижній шар $\mathfrak{o} N$, $\langle u_i \rangle$ — нижній шар $\mathfrak{z} \langle a_i \rangle$. Тоді $\langle u_i \rangle \subset Z(P_i)$ і в P_i існує підгрупа $\langle u_i \rangle \times N_i$, яка за твердженням 1.2.1 метациклічна. Тому N_i — циклічна група. Оскільки $p > 2$, то за результатами із [49] $V_i = \langle b_i \rangle$. Тому $V = \langle v \rangle = \times_{i=1}^n \langle b_i \rangle$, $P_i = \langle a_i \rangle \lambda \langle b_i \rangle$ — група одного з типів 1)–4) з тими ж співвідношеннями для a_i, b_i , що і для a та b в групах цих типів. Зрозуміло, що $[v, B] = 1$, $\langle a \rangle = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, де $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap B$, $\langle x \rangle = \times_{i=n+1}^l \langle a_i \rangle$, $\langle a_i \rangle$ — силовська p_i -підгрупа із $\langle a \rangle$. Тоді $B = \times_{i \neq n}^l P_i$, де P_i — силовська p_i -підгрупа із B . Зрозуміло, що P_i — силовська p_i -підгрупа із G , і $P_i = \langle a_i \rangle \cdot \langle b_i \rangle$ — група одного з типів 1)–9) з тими ж співвідношеннями для a_i, b_i , що і для a та b в групах цих типів.

Покладемо $\langle y \rangle = \times_{i=n}^l \langle b_i \rangle$. Тоді, не порушуючи загальності, можемо вважати, що $\langle b \rangle = \langle v \rangle \times \langle y \rangle$. З твердження 1.1.6 випливає, що $[U, G] = [U, D] = U = \langle [U, b] \rangle$, і G — група типу 12). Теорема доведена.

Означення 1.2.2 [138]. Підгрупа N , породжена всіма елементами порядку p довільної p -групи G , називається її нижнім шаром.

Теорема 1.2.2. Примарні метациклічні групи є скінченими p -групами виду $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^m} \rangle = \langle b^{p^n} \rangle \subset Z(G)$, $a^{p^m} = b^{p^n}$, $(s, p) = 1$, $\alpha \geq m \geq 0$, $\beta \geq n \geq 0$. Будь-який елемент $d \in G$ має вид: $d = a^i b^j$, $i = i_1 p^{\alpha_1}$, $j = j_1 p^{\beta_1}$, $(i_1, p) = (j_1, p) = 1$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$, $0 \leq \beta_1 \leq \beta$, i_1, j_1 — елементи мультиплікативних груп кілець лишків за модулями p^α, p^β відповідно, при $\alpha = 0$ $i_1 = 1$, при $\beta = 0$ $j_1 = 1$, p — просте число. При $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ $\alpha = m$, $\beta = n$, нижній шар N містить підгрупу $\langle a^{p^{\alpha-1}}, b^{p^{\beta-1}} \rangle$. При $\alpha = 0$ $a^{p^{\alpha-1}} = 1$, при $\beta = 0$ $b^{p^{\beta-1}} = 1$. $N \triangleleft G$, $\langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \subset Z(G)$, $b^{-1} a b = a^r$. Для довільного натурального числа δ , цілого числа r і максимальної циклічної підгрупи $\langle d \rangle$ можливі тільки такі випадки:

$$1) r = 1, \alpha_1 \beta_1 = 0, d^{p^r} = b^{j_1 p^{\beta_1 + \delta}} \cdot a^{i_1 p^{\alpha_1 + \delta}};$$

2) $r = -1, p = 2, \alpha_1 \beta_1 = 0$ або $0 < \alpha_1 < m, 1 = \beta_1 < n, d^{2^s} = b^{j_1 2^{s_1 + \delta}} \cdot a^{\frac{1}{2} i_1 (1 + (-1)^j 2^{\alpha_1 + \delta})}$;

3) $r = -(1 + 2^k), 1 < k < \alpha, p = 2, \alpha_1 \beta_1 = 0$ або $0 < \alpha_1 < k, 1 = \beta_1 < n, d^{2^s} = b^{j_1 2^{s_1 + \delta}} \cdot a^{i_1 f(j, r, \delta) 2^{\frac{1}{2} (k-1)(1 + (-1)^j + 1) + \alpha_1 + \delta}}, f(j, r, \delta)$ — ціле число із леми 1.2.1;

4) $r = 1 + p^k, p^k > 2, \alpha_1 \beta_1 = 0, d^{p^s} = b^{j_1 p^{s_1 + \delta}} \cdot a^{i_1 f(j, r, \delta) p^{\alpha_1 + \delta}}, f(j, r, \delta)$ — ціле число із леми 1.2.1.

При цьому G ізоморфна групі одного із типів:

1) $r = 1, G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, N = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle, \alpha_1 \beta_1 = 0$. При $\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 > 0 \langle d \rangle \cap \langle a \rangle = \langle d \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і $\langle d \rangle$ доповнюється в G тією підгрупою $\langle a \rangle, \langle b \rangle$, порядок якої більший;

2) $r = -1, p = 2, \alpha > 1, \beta > 1, G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, Z(G) = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^2 \rangle; N \supset \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{2^{\beta-1}} \rangle = U$. При $\beta > 1 U = N$, при $\beta = 1 N = G$, при $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha, 0 < \beta_1 < \beta, \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1, \alpha_1 = 0$ або $\beta_1 = 1 \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1, |d| = 2^{\alpha - \alpha_1}$, і при $\alpha_1 = 0 \langle d \rangle$ доповнюється в G підгрупою $\langle b \rangle$, а при $\alpha_1 > 0 \langle d \rangle$ не доповнюється в $G, \langle a \rangle \times \langle b^2 \rangle = \langle a \rangle \times \langle d \rangle, |d| = 2^{\beta-1}$;

3) $r = -(1 + 2^k), p = 2, 1 < k < \alpha, \beta \geq \alpha - k, G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, Z(G) = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^2 \rangle; N \supset \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{2^{\beta-1}} \rangle = U$. При $\beta > 1 U = N$, при $\beta = 1 N = \langle a^2 \rangle \lambda \langle b \rangle$, при $\beta_1 = 0, \alpha_1 = \alpha - k + 1 - \beta$ або $\beta_1 = 1 < \beta, 0 \leq \alpha_1 < k, \alpha_1 = \alpha - \beta + 1$ або $1 < \beta_1 < \beta, \alpha_1 = 0, \alpha = \beta - \beta_1 \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = 1$ і при $\beta_1 = 0 \langle d \rangle$ доповнюється в G підгрупою $\langle a \rangle$, при $\beta_1 = 1, \alpha_1 > 0 \langle a \rangle \lambda \langle b^2 \rangle = \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$; при $\alpha_1 = 0, \beta_1 > 0 \langle d \rangle$ доповнюється в G підгрупою $\langle b \rangle$;

4) $r = 1 + p^k, p^k > 2, 0 < k < \alpha, \beta \geq \alpha - k, G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, Z(G) = \langle a^{p^{\alpha-k}} \rangle \times \langle b^{p^{2^k-1}} \rangle, N = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle$. При $\alpha_1 = 0, \alpha = \beta - \beta_1$ або $\beta_1 = 0, \beta = \alpha - \alpha_1 \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, при $\alpha_1 = 0 \langle d \rangle$ доповнюється в G підгрупою $\langle b \rangle$, при $\beta_1 = 0 \langle d \rangle$ доповнюється в G підгрупою $\langle a \rangle$;

5) $r = 1 + p^k, p^k > 2, \beta > \alpha > m > k > 0, G = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle, \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1, |d| = p^m, Z(G) = \langle a^{p^{\alpha-k}} \rangle \cdot \langle b^{p^{2^k-1}} \rangle \times \langle d^{p^{2^k-1}} \rangle$, підгрупа $\langle b^{p^{2^k-1}} \rangle \lambda \langle d \rangle$ містить підгрупу $N = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \beta - \alpha = n - m$,

$f(j, r, n) \cdot si_1 + j_1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-m}}$, в частинному випадку $d = a^t \cdot b^{p^{2-\alpha}}$, t — розв'язок конгруенції $f(j, r, m) \cdot si_1 + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-m}}$;

6) $r = -1$, $p = 2$, $\beta > \alpha > 2$, $m = \alpha - 1$, $n = \beta - 1$, $G = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $|d| = 2^{\alpha-1}$, $Z(G) = \langle b^2 \rangle$, $\langle a \rangle \subset \langle b^2 \rangle \times \langle d \rangle$, $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d^{2^{\alpha-2}} \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle a^{2^{\alpha-2}} \cdot b^{2^{\beta-2}} \rangle$, $d = a^{i_1} \cdot b^{j_1} \cdot 2^{\beta-\alpha}$;

7) $r = -1$, $p = 2$, $\beta > \alpha \geq \beta > 1$, $m = \alpha - 1$, $n = \beta - 1$, $Z(G) = \langle b^2 \rangle$, при $\beta = 2$ $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$, при $\beta > 2$ $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d^{2^{\beta-3}} \rangle$, $\Phi(G) = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$, $d = a^{i_1} \cdot 2^{\alpha-\beta} \cdot b^{2j_1}$, $|d| = 2^{\beta-2}$, в G не доповнюється жодна власна неединична підгрупа;

8) $r = -(1 + 2^k)$, $p = 2$, $\beta > \alpha > m > k > 1$, $m = \alpha - 1$, $n = \beta - 1$, $m > \alpha - k$, $G = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $|d| = 2^{\alpha-1}$, $Z(G) = \langle b^{2^{\alpha-k}} \rangle$, $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d^{2^{\alpha-2}} \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle a^{2^{\alpha-2}} \cdot b^{2^{\beta-2}} \rangle$, $d = a^{i_1} \cdot b^{j_1} \cdot 2^{\beta-\alpha}$, в частинному випадку $d = a \cdot b^{2^{\beta-\alpha}}$, $\langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$ — група типу 4);

9) $r = -(1 + 2^k)$, $p = 2$, $\alpha \geq \beta > \alpha - k + 1 > 2$, $m = \alpha - 1 > k$, $n = \beta - 1$,

$$\Phi(G) = \langle a^2 \rangle \lambda \langle d \rangle \supset N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d^{2^{\beta-3}} \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle a^{2^{\alpha-2}} \cdot b^{2^{\beta-2}} \rangle,$$

$|d| = 2^{\beta-2}$, $Z(G) = \langle b^{2^{\alpha-1}} \rangle$, $d = a^{i_1} \cdot 2^{\alpha-\beta+1} \cdot b^{2j_1}$, в частинному випадку $d = a^{2^{\alpha-\beta+1}} \cdot b^2$, в G не доповнюється жодна власна неединична підгрупа; $\langle [a, d] \rangle = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$, $\langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$ — група типу 4).

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді вона скінченна p -група одного з типів 1)–9) теореми 1.2.1. З цієї теореми випливає, що G має вид: $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^m} \rangle = \langle b^{p^n} \rangle \subset G'$, $a^{p^m} = b^{p^n}$, $(s, p) = 1$, $b^{-1}ab = a^r$, і справедливі всі співвідношення із загального типу групи G розглядуваної теореми, крім умов для максимальної циклічної підгрупи $\langle d \rangle \subset G$. Зрозуміло, що $d = a^i b^j$, де i та j мають однозначний розклад: $i = i_1 p^{\alpha_1}$, $j = j_1 p^{\beta_1}$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$, $0 \leq \beta_1 \leq \beta$, i_1, j_1 — елементи мультиплікативних груп кілець лишків за модулями за модулями p^α та p^β . При $\alpha = 0$ вважаємо, що $i_1 = 1$, при $\beta = 0$ $j_1 = 1$. Вважаємо, що при $\alpha \beta = 0$ $d = 1$, і G

група типу 1) розглядуваної теореми. В подальшому будемо вважати, що $\alpha\beta > 0$, а значить $|d| > 1$.

Нехай δ — натуральне число. Для груп типів 1)-9) теореми 1.2.1. число r задовольняє тільки одну із умов 1)-4) леми 1.2.1, і тому для будь-якого r справедливе твердження 5) згаданої леми. За цим пунктом і твердженням 1.2.2 $d^{p^k} = b^{p^k} a^{f^k}$, $f = f(j, r, \delta) \varphi(j, r) p^\delta$, $(f(j, r, \delta), p) = 1$, $f(j, r, \delta) \mid \varphi(j, r)$ із пункту 5) леми 1.2.1. Звідси $d^{p^k} = b^{j^{p^{\alpha_1 k} + k}} a^{i_1 f(j, r, \delta) \varphi(j, r) p^{\alpha_1 k}}$. Оскільки при $\alpha_1 \beta_1 = 0$ $(j, p) = 1$ або $(i, p) = 1$, то $d \notin \varphi(j)$, а значить $\langle d \rangle$ не може бути власною підгрупою будь-якої циклічної підгрупи із G , а значить при цих умовах $\langle d \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із G . Нехай $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$. Тоді $\alpha_1 < m$, $\beta_1 < n$. Покладемо $g = a^t \cdot b^l$. Як і раніше

$$g^{p^k} = b^{l p^k} \cdot a^{t f(l, r, \delta) \varphi(l, r) p^k} = a^{t f(r^{l p^k})} \cdot b^{l p^k}$$

де $r' r \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, $f = f(l, r, \delta) \varphi(l, r) p^\delta$.

Покладемо $v = f(l, r, \delta) \cdot (r')^{l p^\delta}$. Ясно, що $(v, p) = 1$. Звідси

$$g^{p^k} = a^{t v \varphi(l, r) p^k} \cdot b^{l p^k}.$$

Покладемо $\delta = 1$, $l = j_1 p^{\beta_1 - 1}$. Тоді $g^p = a^{t v \varphi(l, r) p} b^{j_1 p^{\beta_1}}$. Нехай $(v \varphi(l, r), p) = 1$. Тоді існує таке t_1 , для якого розв'язною буде конгруенція $t_1 v \varphi(l, r) \equiv i_1 \pmod{p^\alpha}$. Покладемо тоді $t = t_1 p^{\alpha_1 - 1}$ і одержимо $g^p = a^{i_1} b^j = d$, що неможливо. Тому $\varphi(l, r) \equiv 0 \pmod{p}$. За твердженням 5) леми 1.2.1 $p = 2$, $(l, 2) = 1$, $\beta_1 = 1$, $r < 0$. З цього випливають умови 1) та 4) для r загального виду G . За пунктом 5) леми 1.2.1 $r = -1$ або $r = -(1 + 2^k)$, $\alpha > k > 1$. Звідси справедлива умова 2) для r загального виду групи G цієї теореми.

Нехай $r = -(1 + 2^k)$, $\alpha > k > 1$. Тоді $\varphi(j, r) = 2^{\frac{1}{2}(k-1)(1+(-1)^{j+1})} = 2^{k-1}$. Тепер $g^2 = a^{i_1 2^k} \cdot b^j$. Нехай $k \leq 1$. Тоді покладемо $t = t_1 2^{\alpha_1 - k}$, де $t_1 r \equiv i_1 \pmod{2^\alpha}$. Одержимо $g^2 = d$, що неможливо. Звідси $0 < \alpha_1 < k$, і справедлива умова 3) для r загального виду групи G цієї теореми.

Нехай G — група типу 1) теореми 1.2.1. Тоді $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Для груп

цього типу $\alpha_1\beta_1 = 0$, $\alpha\beta > 0$. Тоді при $\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1$ для максимальної циклічної підгрупи $\langle d \rangle$ справедливі твердження для груп типу 1) цієї теореми.

Нехай G — група одного з типів 2)–9) теореми 1.2.1. Тоді G — група одного з типів 2)–9) розглядуваної теореми відповідно, і справедливі умови для всіх цих типів, крім будови N і $\langle d \rangle$. Із чотирьох можливих умов для r загального типу групи G випливає, що $\langle d \rangle$, зазначена в типах груп 2)–4) розглядуваної теореми, є максимальною циклічною підгрупою із G , і при тих умовах для i, j , що є в цих типах, підгрупа $\langle d \rangle$ доповнюється відповідною підгрупою в G чи в підгрупі $\langle a \rangle \cdot \langle b^p \rangle$. Тому залишилося вивести лише будову N .

В групах типу 2) при $\beta = 1$ елементи виду a^ib мають порядок 2, і породжують всю групу G , тому при цих умовах $N = G$. При $\beta > 1$ $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{2^{\beta-1}} \rangle$, і для груп типу 2) все доведено.

Нехай G — група типу 3). При $\beta = 1$ елементи виду a^ib тоді і тільки тоді мають порядок 2, коли $i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-k}}$. Вони і породжують підгрупу $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \lambda \langle b \rangle$. При $\beta > 1$ $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{2^{\beta-1}} \rangle$. Відомо, що в узагальненій групі кватерніонів, тобто в групі типу 7), $\beta = 2$, $N = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$. Покажемо, що в усіх інших випадках $|N| = p^2$. В розглядуваних випадках $|G : \langle a \rangle| > 2$. В усіх цих групах існує підгрупа $U = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle u \rangle$, де $u = d^{p^{\delta-1}}$, $|d| = p^{\delta}$, $\delta > 0$, і в G існує нормальна підгрупа $M = \langle a \rangle \lambda \langle u \rangle$. Покажемо, що всі елементи v із G порядку p належать U і M . Якщо $M = G$, то це очевидно. Якщо M — власна підгрупа із G , то в G існує підгрупа $M \lambda \langle v \rangle$ з нециклічною фактор-групою за циклічною підгрупою $\langle a \rangle$, що неможливо. Отже, $v \in M$. Якщо $M' = 1$, то U — нижній шар із M , тому $U = N$. Нехай $M' \neq 1$. Останнє можливо тільки в групах типу 3) та 4) при умовах $|b| = p^{\alpha-k} > 2$.

В групі типу 3) $\alpha - k = \beta > 1$. Не порушуючи загальності, можемо вважати $u \in \langle b \rangle$ і u індукує на $\langle a \rangle$ такий автоморфізм, що підгрупа M із типу 3) ізоморфна підгрупі M із типу 4). В групах типу 4) $|b|$

циклічна максимальна підгрупа із M і $\{a, u\}$ породжує циклічну підгрупу $\langle a^{p^{a-1}} \rangle$, $p^{a-1} > 2$. Нехай v — елемент із M , $|v| = p$, $v \notin U$. Тоді $U\lambda(v) = \langle a^{p^{a-2}} \rangle \lambda(u)$ — група порядку p^3 , і такий розклад абелевої групи порядку p^3 можливий лише тоді, коли вона група діебра порядку 8, що неможливо. Оскільки при $p > 2$ $|a| > 4$, $a^{2^{a-1}} \in \langle a^2 \rangle \subset Z(M)$. Ця суперечність показує, що $U = N$, і всі властивості для груп типів 1)–9) доведені. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

Наслідок 1.2.1. Нижній шар N довільної метациклічної p -групи G нормальний в G і тоді і тільки тоді не є елементарною абелевою групою порядку p^2 , коли G — група одного з типів:

- 1) G — циклічна p -група, $|N| \leq p$;
- 2) G — узагальнена група кватерніонів, $|N| = 2$;
- 3) G — неабелева група діебра, $|N| = |G|$;
- 4) G — квазідіебральна група, $|N| = \frac{1}{2}|G|$, N — максимальна діебральна підгрупа із G .

Наслідок випливає із доведення теореми 1.2.2.

1.3 Деякі розширення квазіциклічних груп

Лема 1.3.1. Нехай G — довільна група, N — її локально скінченна нормальна підгрупа, що має холловську підгрупу R , яка має нормальну в G підгрупу R_1 скінченного індексу в R , і справедлива хоча б одна із умов:

- 1) R — r -група, r — просте число;
- 2) N має нормальну холловську підгрупу H таку, що $\pi(R) \cap \pi(H) = \emptyset$ і N/H — локально розв'язна група. Тоді $G = N \cdot D$, $D = N_G(R)$ і при $N = H \rtimes R$

$$N_H(R) = 1.$$

$$G = H \rtimes D.$$

Доведення. Нехай G задовольняє умовам леми, $D = N_G(R)$, $g \in G$, $T = \langle R, R^g \rangle$. Зрозуміло, що $R_1^g = R_1 \subset T$. Якщо в N існує елемент a , для якого $R^a = R^g$, то $ga^{-1} = d \in D$. Звідси $g = da$, і із довільності $g \in G$ маємо, що $G = N \cdot D$. Покажемо тепер, що R^g — спряжена підгрупа із R в N . Розглянемо можливі випадки: 1) $|R_1| = 1$; 2) $|R_1| > 1$.

Випадок 1. В цьому випадку $|R| < \infty$ і $|T| < \infty$. При умові 1) R — скінченна силовська підгрупа скінченної групи T . За теоремою Силова в T знайдеться елемент a , для якого $R^a = R^g$. Лема справедлива.

Нехай справедлива умова 2). Покладемо $H_1 = H \cap T$. Тоді H_1 — холловська нормальна підгрупа скінченної групи T , $\pi(H_1) \cap \pi(R) = \emptyset$. За відомими результатами $T = H_1 \lambda D_1$ і за умовою 2) D_1 — розв'язна група, в якій всі $\pi(R)$ -холловські підгрупи спряжені. Спряжені також в T всі $\pi(D_1)$ -холловські підгрупи з T і доповнюють H_1 в T . Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $R \subset D_1$, а $R^g \subset D_2$, де $D_2 = D_1^{a_1}$. Покладемо $C_1 = H_1 \lambda R$, $C_2 = H_1 \lambda R^g$. Тоді C_1/H_1 і C_2/H_1 — спряжені холловські підгрупи із T/H_1 . З цього випливає, що в T існує елемент a_2 , для якого $C_1^{a_2} = H_1 \lambda R^{a_2} = C_2$ і R^{a_2} та R^g — холловські підгрупи із C_2 , що доповнюють в C_2 підгрупу H_1 . Відомо, що в C_2 існує елемент a_3 , для якого $R^{a_2 a_3} = R^g$. Покладемо $a_2 a_3 = a$, тоді $a \in T$ — шуканий елемент, і лема при умові 2) справедлива. Випадок 1) розглянутий.

Випадок 2. В цьому випадку R/R_1 — скінченна підгрупа локально скінченної нормальної в G/R_1 підгрупи N/R_1 . Покажемо, що R/R_1 — холловська $\pi(R)$ -підгрупа N/R_1 . Дійсно, нехай R^*/R_1 — холловська $\pi(R)$ -підгрупа із N/R_1 , що містить R/R_1 .

Зрозуміло, що $R^* \supset R$. Звідси за вибором R $R^* = R$, а тому R/R_1 — холловська $\pi(R)$ -підгрупа із N/R_1 .

У випадку 2) лема справедлива за випадком 1) для G/R_1 . Звідси N/R_1 .

$D/R_1 = G/R_1$, де D/R_1 — нормалізатор R/R_1 в G/R_1 .

Зрозуміло, що D — нормалізатор R в G і $G = N \cdot D$. Таким чином, шуканий розклад G справедливий при обох умовах леми.

Якщо тепер $N = H\lambda R$, $N_H(R) = 1$, то $D \cap H = 1$, $G = H\lambda D$. Лема доведена.

Наслідок 1.3.1. Нехай C — періодична повна абелева нормальна підгрупа групи G , g — елемент із G , $\pi(g) \cap \pi(C) = \emptyset$, $C_C(g) = 1$ і $C\lambda\langle g \rangle = N \triangleleft G$. Тоді $G = C\lambda D$, де $D = N_G(\langle g \rangle)$ і $[C, \langle g \rangle] = C$.

Доведення. Зрозуміло, що N і G задовольняють умовам леми 1.3.1. Тоді $G = C\lambda D$, де $D = N_G(\langle g \rangle)$. Очевидно, що $[\langle g \rangle, C] = N'$ і в N існує нормальна підгрупа $N'\lambda\langle g \rangle = N_1$. За тією ж лемою $N = N_1 \cdot N_N\langle g \rangle$. Оскільки $N_C(\langle g \rangle) = C_C(\langle g \rangle)$, то $N_N(\langle g \rangle) = \langle g \rangle$, а $N = N'\lambda R$, а значить $N' = C = [C, \langle g \rangle]$. Наслідок доведений.

Наслідок 1.3.2. Нехай $C \triangleleft G$ — квазіциклічна p -група, G/C — дедекіндова група, і g — p' -елемент із G , що належить $G \setminus C_G(C)$. Тоді $G = C\lambda D$, $D = N_G(\langle g \rangle)$, $[C, \langle g \rangle] = C$, $p > 2$.

Доведення. Оскільки g — p' -елемент із G , що належить $G \setminus C_G(C)$, то $\langle g \rangle$ індукує на C нетотожний автоморфізм. Відомо, що тоді $p > 2$, $[C, \langle g \rangle] = C$, і в G існує нормальна підгрупа $N = C\lambda\langle g \rangle$, $C_C(\langle g \rangle) = 1$. Тоді наслідок випливає із наслідку 1.3.1. Наслідок доведений.

Лема 1.3.2. Нехай G — черніковська група з нормальною повною частиною C . Тоді $G = C \cdot D$, $|D| < \infty$, $C_D(C) = S \triangleleft G$, $C \cap D = Z(S) \cap \Phi(D)$, і справедливі твердження:

1) якщо C — квазіциклічна p -група, p — просте число, то $C \cap D \subseteq \Phi(D_p)$, де D_p — будь-яка силовська p -підгрупа із D , $D = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 0$, при $(s, p) = 1$ $C \cap D \subseteq D_p'$;

2) якщо G/C — локально нільпотентна група, то D — нільпотентна

група, і при $C \subset Z(G)$, що еквівалентно $|G'| < \infty$, G — нільпотентна група;

3) якщо C — локально нільпотентний корадикал із G , то $G = C\lambda D$ і D — нільпотентна група;

4) якщо G — нецентральна квазіциклічна p -група із G , то $s > 1$, $[C, \langle a \rangle] = C$ і при $p = 2$ $s = 2$, $|a| = 2^s$, а при $p > 2$ $p \equiv 1 \pmod{s}$, $s \geq 1$, $\langle a \rangle$ — p' -група, в G існує ненільпотентна підгрупа $C\lambda\langle a \rangle$, $C_C(a) = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді $C \subset Z(C_G(C)) \subset C_G(C) \triangleleft G$. Оскільки G — локально скінченна група, то $G = C \cdot D$, де D — скінченна підгрупа із G . Не порушуючи загальності можемо вважати, що D — скінченна підгрупа найменшого порядку із G , для якої $G = C \cdot D$. Покладемо $S = C_G(C) \cap D$, $Y = C \cap D$. Тоді $Y \subset Z(S) \subset S \triangleleft G$, $Y \triangleleft G$.

Нехай $Y \not\subset \Phi(D)$. Тоді в D існує максимальна підгрупа M , що не містить Y ; $YD = Y \cdot M$, $|M| < |D|$.

Очевидно, що тоді $G = C \cdot M$, що суперечить вибору D . Ця суперечність показує, що $Y \subset Z(S) \cap \Phi(D)$.

Нехай тепер C — квазіциклічна p -підгрупа із G , D_p — силовська p -підгрупа із D . Тоді $Y \subset D_p$. Покажемо, що $Y \subset \Phi(D_p)$. Коли $|Y| = 1$, це очевидно. Нехай $|Y| = p$. Зрозуміло, що $|Y| \subset Z(D_p)$. Якщо $Y \subset \Phi(D_p)$, то Y доповнюється в D_p деякою максимальною підгрупою. За відомими результатами [71] Y доповнюється в D , що неможливо, оскільки $Y \subset \Phi(D)$.

Нехай $|Y| > p$. Тоді відомо, що $\Phi(Y) \subset \Phi(D_p)$ і $|Y/\Phi(Y)| = p$, $\Phi(Y) \triangleleft G$. За попереднім $Y/\Phi(Y) \subset \Phi(D_p/\Phi(Y))$. Звідси $Y \subset \Phi(D_p)$. Відомо, що D/S — підгрупа із $\text{Aut } C$, і періодичні підгрупи із $\text{Aut } C$ є циклічними групами порядку 2 при $p = 2$, і порядку $p-1$ при $p > 2$. Звідси $D = C \cdot \langle a \rangle$. $D \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 0$. При нецентральності C в G , що еквівалентно $[C, \langle a \rangle] = C$, маємо при $p = 2$ $s = 2$, $|a| = 2^s$, при $p > 2$ $p \equiv 1 \pmod{s}$.

— p' -елемент.

Нехай $(s, p) = 1$. Покажемо, що в цьому випадку $Y \subset D_{p'}$. Зрозуміло, що $P = C \cdot D_p$ — силовська p -підгрупа із G , D_p — силовська p -підгрупа із S , а значить, $C \subset Z(P)$. Звідси $P' = D_{p'}$.

Нехай $Y \cap D_{p'} \subset \Phi(Y)$. Тоді

$$P/P' = (C \times P')/P' \times P_0/P'$$

і $P = C \cdot P_0$, де $P_0 \cap Y \subset \Phi(Y)$. Зрозуміло, що знайдеться елемент $c \in C$, для якого $\langle c \rangle \cdot P_0 \supset D_p$. Покладемо $D_0 = \langle c \rangle \cdot D$ і $P_1 = \langle c \rangle \cdot D_p$. Зрозуміло, що $P_1 = \langle c \rangle \cdot P_0$, $\langle c \rangle \cap P_0 \subset \Phi(Y)$, а $Y \subset \langle c \rangle$. Оскільки $\Phi(Y) \triangleleft D_0$, $\langle c \rangle / \Phi(Y) \triangleleft D_0 / \Phi(Y)$, силовська p -підгрупа $P_1 / \Phi(Y)$ в $D_0 / \Phi(Y)$ має вид

$$\langle c \rangle / \Phi(Y) \times \Phi(Y) P_0 / \Phi(Y),$$

то $\langle c \rangle / \Phi(Y)$ доповнюється в будь-якій силовській p -підгрупі із $D_0 / \Phi(Y)$. За тим же результатом [71] $\langle c \rangle / \Phi(Y)$ доповнюється в $D_0 / \Phi(Y)$ підгрупою $M / \Phi(Y)$. Звідси $D_0 = \langle c \rangle \cdot M$, $\langle c \rangle \cap M \subset \Phi(Y)$. Оскільки $G = C \cdot M$ і $Y \not\subset M$, то $|M| < |D|$, що суперечить вибору D . Одержана суперечність показує, що $Y \subset D_{p'}$. Таким чином, твердження 1) та 3) леми доведені.

Нехай G/C — локально нільпотентна група. Тоді D/Y — нільпотентна група. Оскільки $Y \subset \Phi(D)$, то відомо, що і D — нільпотентна група. Якщо $C \subset Z(G)$, то сама G — нільпотентна. Твердження 2) доведено.

Твердження 4) леми випливає із відомих результатів [114]. Лема доведена.

Лема 1.3.3. Нехай G — розширення квазіциклічної p -підгрупи C за допомогою групи кватерніонів. Тоді G — група одного із типів:

- 1) $G = C \lambda Q$, $Q = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів, $[C, \langle b \rangle] = 1$;
- 2) $G = C \cdot Q$, $Q = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $[a, b] = a^2$, $C \cap Q = \langle a^2 b^2 \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 1.3.2 $G = C \cdot D$, $|D| < \infty$, $C_D(C) = S \triangleleft G$, $C \cap D = Y = Z(S) \cap \Phi(D)$, $D = S \cdot \langle a \rangle$,

$S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 0$. Нехай $Y = 1$. Тоді D — група кватерніонів, S містить максимальну підгрупу із D . Якщо $D = \langle a, b \rangle$, то не порушуючи загальності можемо вважати, що $[C, \langle b \rangle] = 1$ і G — група типу 1) леми.

Нехай $|Y| > 1$. За лемою 1.3.2 $p = 2$, $s = 2$, S/Y — максимальна підгрупа групи кватерніонів, $[C, \langle a \rangle] = C$. Зрозуміло, що S/Y — циклічна група порядку 4 і $C_G(C) = C \cdot \langle b \rangle$, $|b| = 4$, а підгрупа $N = \langle c_2 \rangle \times \langle b \rangle$ — характеристична підгрупа централізатора, де $|c_2| = 4$, $c_2 \in C$. Звідси $N \triangleleft G$. Оскільки $(C_G(C))' = 1$ і $G = C_G(C) \cdot \langle a \rangle$, $a^2 \in C_G(C)$, то $a^2 \in Z(G)$. Оскільки $C \cap Z(G) = \langle c_1 \rangle$, $|c_1| = 2$, то $Z(G) \subset N$, тому $a^2 \in N$, $a^4 \in \langle c_1 \rangle$ і в G існує підгрупа $D_1 = N \cdot \langle a \rangle$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $D \subset D_1$.

Нехай $[b, a] = c$. Тоді $|c| \leq 4$ і $c \in N$, $c^2 \in \langle c_1 \rangle$. Зрозуміло, що $a^{-2}ba^2 = ba^{-1}cac = b$, а значить, $c^{-1} = a^{-1}ca$,

$$ba^2 = baba = ba^2bc = a^2b^2c \in N,$$

$ba^4 \in \langle c_1 \rangle$. Ясно, що $N_1 = \langle c_1 \rangle \times \langle b^2 \rangle$ — нижній шар із N , то $N_1 \triangleleft G$.

Покажемо, що $N_1 \subset Z(G)$. Якщо хоча б один із елементів із C a^2 чи a^2b^2 має порядок 2, то кожний із них належить $Z(G)$ і разом з c_1 породжує N_1 . І значить, $N_1 \subset Z(G)$. Нехай $|c| = 4$. Тоді $|c_2c| = 2$ і $[c_2c, a] = 1$ і $N_1 = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2c \rangle \subset Z(G)$. Тому при будь-яких умовах $N_1 \subset Z(G)$. Звідси $b^2 \in Z(G)$. Оскільки $a^2 \in Z(G)$, $b^2 \in Z(G)$, $a^2b^2c \in Z(G)$, то $c \in Z(G)$, а значить, $|c| = 2$, $N_1 = \langle c_1 \rangle \times \langle c \rangle$. Якщо $|a| = 8$, то

$$N_1 = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2a^2 \rangle \subset Z(G),$$

але $c_2a^2 \notin Z(G)$. Ця суперечність показує, що $|a| = 4$. Покажемо, що $a^2 = b^2$. Дійсно, нехай це не так, тоді замінімо b на c_2b . Одержимо, що $b^2 = a^2$. Якщо тепер $c = a^2$, то $D = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів, і G — група типу 1) леми.

Нехай $c \neq a^2$. Тоді заміняючи a на ba , одержимо $D = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] =$

$a^2, C \cap D = \langle a^2 b^2 \rangle, [C, \langle a \rangle] = C$, і G — група типу 2) леми. Лема доведена.

Означення 1.3.1. Нехай G — група, у якої властивість V мають всі τ -підгрупи (що не належать власній підгрупі S). Тоді група G називається $V(\tau)$ -групою ($V(S, \tau)$ -групою).

Група G , у якої V — це властивість нормальності — H , а τ — це всі власні, C -, $\bar{C}$ -, A -, $\bar{A}$ -, $A\bar{C}$ -, N -, $\bar{N}$ -, $N\bar{C}$ -, $N\bar{A}$ -, F -, I -, IC -, $I\bar{C}$ -, IA -, $I\bar{A}$ -, IN -, $I\bar{N}$ -підгрупи, називається відповідно $H(\tau)$ - ($H(S, \tau)$ -) групою, де τ — одна з названих властивостей підгруп.

Нескінченні неабелеві $H(I)$ -, $H(IA)$ -, $H(I\bar{A})$ -групи названі С.М. Черніковим в роботі [138] відповідно INH -, $IN\bar{H}$ -, $I\bar{N}\bar{H}$ -групами. А.Ф. Бараник в роботі [115] $H(S)$ - та $H(SI\bar{A})$ -групи назвав QH - та QN -групами відповідно.

Твердження 1.3.1 [138]. Негамільтонові INH -групи є розширенням квазіциклічної групи за допомогою скінченної дедекіндової групи.

Лема 1.3.4. Нехай G — $H(\tau)$ -група. Тоді справедливі такі твердження:

1) довільна власна підгрупа перетину M всіх τ -підгруп із G є $\bar{\tau}$ -підгрупою із G і $M \triangleleft G$;

2) клас $H(\tau)$ -груп замкнутий за підгрупами, коли всяка τ -підгрупа будь-якої підгрупи X групи $\bar{G}$ є τ -підгрупою в G ;

3) якщо $\varphi\tau$ — властивість бути образом в $\varphi(G)$ деякої τ -підгрупи із G при гомоморфізмі φ групи G , то $\varphi(G)$ є $H(\varphi\tau)$ -групою; клас $H(\tau)$ -груп замкнутий за факторами, якщо кожна τ -підгрупа гомоморфного образу $\varphi(G)$ є образом деякої τ -підгрупи із G при будь-якому гомоморфізмі φ групи G ;

4) якщо довільна підгрупа із G , що містить нормальну τ -підгрупу N групи G , є τ -підгрупою із G , G/N — дедекіндова група або H -група;

5) якщо τ_1 і τ_2 — такі властивості груп, що τ -підгрупою в G буде будь-яка її підгрупа, яка є розширенням нормальної в G τ_1 -підгрупи N

за допомогою τ_2 -групи, то G/N — $H(\tau_2)$ -група.

Доведення. Нехай G — $H(\tau)$ -група, і M — перетин всіх τ -підгруп із G . Зрозуміло, що $M \triangleleft G$, а кожна власна підгрупа із M в G є $\bar{\tau}$ -підгрупою із G . Твердження 1) доведено.

Нехай X — будь-яка підгрупа із G , а Y — її τ -підгрупа. За умовою леми Y — τ -підгрупа із G , $Y \triangleleft G$ і $Y \triangleleft X$, звідси X — $H(\tau)$ -група. Твердження 2) доведено.

Нехай φ — довільний гомоморфізм групи G . Тоді система Σ τ -підгруп із G переходить в систему $\varphi\Sigma$ -підгруп із $\varphi(G)$, що визначаються властивістю $\varphi\tau$ — бути гомоморфним образом в $\varphi(G)$ деякої підгрупи із Σ при гомоморфізмі φ . За означенням 1.3.1 $\varphi(G)$ — $H(\varphi\tau)$ -група. Якщо тепер для будь-якого гомоморфізму кожна τ -підгрупа із $\varphi(G)$ є гомоморфним образом деякої τ -підгрупи із G , то із нормальності τ -підгруп в G випливає нормальність τ -підгруп в $\varphi(G)$, а значить, $\varphi(G)$ — $H(\tau)$ -група для будь-якого гомоморфізму φ групи G . Звідси клас $H(\tau)$ -груп при цих умовах замкнутий за факторами. Твердження 3) доведено.

Нехай N — нормальна в G τ -група. Зрозуміло, що всі підгрупи із G/N є образами підгруп із G , що містять N . За умовою твердження 4) всі підгрупи G , що містять N , є τ -, а значить нормальними підгрупами із G . Звідси G/N — дедекіндова група. Твердження 4) доведено.

Нехай справджуються умови твердження 5), і нехай X/N — τ_2 -підгрупа із G/N . Тоді X — τ -підгрупа із G , $X \triangleleft G$, $X/N \triangleleft G/N$, а значить, G/N — $H(\tau_2)$ -група. Твердження 5) доведено. Лема доведена.

Наслідок 1.3.3. Нехай G — $H(\tau)$ -група. N — її нормальна підгрупа. Тоді справедливі такі твердження:

1) якщо τ — це $\bar{C}$, $\bar{A}$, $\bar{N}$, I , $I\bar{C}$, $I\bar{A}$, $I\bar{N}$, а N — τ -підгрупа із G , то G/N — дедекіндова група;

2) якщо τ — це $I\bar{C}$, $I\bar{A}$, $I\bar{N}$, а N — I -підгрупа із G , то G/N — $H(\bar{C})$ -, $H(\bar{A})$ -, $H(\bar{N})$ -група відповідно;

3) якщо τ — це $I\bar{C}$, $I\bar{A}$, $I\bar{N}$, а N — відповідно $\bar{C}$ -, $\bar{A}$ -, $\bar{N}$ -підгрупа із G , то G/N — $H(I)$ -група.

Наслідок безпосередньо випливає з леми 1.3.4.

Наслідок 1.3.4. Локально ступінчата недедекіндова нескінченна $H(I)$ -група G є негамільтоновою INH -групою, тобто G — розширення квазіциклічної групи за допомогою скінченної дедекіндової групи.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо спочатку, що G — INH -група. Якщо G — неперіодична група, то це очевидно. Нехай G — періодична група. За лемою 1.3.4 перетин M всіх нескінченних підгруп із G — нормальна підгрупа із G , яка має скінченні власні підгрупи. Якщо G має нескінченні абелеві підгрупи, то за означенням вона INH -група. Нехай G не має нескінченних абелевих підгруп. Покажемо тоді, що G — скінченна група, що неможливо. Для цього покажемо, що $|M| < \infty$. Дійсно, в протилежному випадку за означенням локальної ступінчатості 1.1.7 нескінченна скінченно породжена підгрупа із M мала б власні нескінченні підгрупи, що суперечить вибору M . Але тоді M — локально скінченна група. Якби M була нескінченною підгрупою, то за результатами [92] M містила б нескінченну абелеву підгрупу, і G була б INH -групою. Оскільки в G немає нескінченних абелевих підгруп, то $|M| < \infty$.

Нехай тепер X_α — нескінченна підгрупа із G . Тоді за означенням $H(I)$ -групи і за лемою 1.3.4 $X_\alpha \triangleleft G$, G/X_α — дедекіндова група, $\alpha \in A$.

Нехай G^* — декартовий добуток G/X_α , $\alpha \in A$. Тоді за теоремою Ремака G/M — періодична підгрупа розв'язної групи G^* . Відомо (див., наприклад, [138]), що G/M — локально скінченна група. Оскільки $|M| < \infty$, то і G — локально скінченна група. За результатами [92] G містить нескінченні абелеві підгрупи, тобто завжди G — INH -група. За твердженням 1.3.1 G — розширення квазіциклічної групи за допо

могою скінченної дедекіндової групи. Наслідок доведений.

Теорема 1.3.1. Періодичні групи, що є розширенням своєї нормальної квазіциклічної p -підгрупи C за допомогою дедекіндової групи, силовська p -підгрупа якої розкладається в прямий добуток груп з локально циклічними власними підгрупами, мають вид:

$$(B \cdot (C \times Q) \cdot A) \times F,$$

де F — періодична дедекіндова холловська підгрупа із G без елементів порядку p , $A = S \cdot \langle a \rangle$, $C_A(C) = S \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 0$, неединична підгрупа B розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $B_0 \times B_i$ в об'єднаню підгрупою

$$\begin{aligned} B_0 &= B \cap C \\ &= B \cap (C \times Q) \cdot A \\ &= \langle B', [B, Q], [B, A] \rangle, \\ [B, C] &= 1, \end{aligned}$$

B_i — неединична локально циклічна p -група,

$$\exp B_0 \leq \max_{i \in I} |B_i|, \quad |I| > 0;$$

і ізоморфні групам одного із типів:

1) $p > 2$, $Q = 1$, $s > 1$, $p \equiv 1 \pmod{s}$, $[C, \langle a \rangle] = C$, A — дедекіндова періодична холловська $\pi(s)$ -підгрупа із G , $|B_0| = 1$:

2) $Q = A = 1$;

3) $p = 2 = |B_i|$, $A \subset Q = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів;

4) $p = 2 = s$, $Q = 1$, $A = \langle a \rangle$, $|a| = 2^s$, $[C, \langle a \rangle] = C$;

5) $p = 2 = |B_i| = s$, $Q = \langle b, d \rangle$ — група кватерніонів. $A = \langle a \rangle$, $|a| = 2^s$, $a^2 \in C$, $[C, \langle a \rangle] = C$, $[Q, \langle a \rangle] \subset \langle c_2 \rangle \subset C$, $|c_2| = 4$;

6) $p = 2 = |B_i| = s$, $Q = \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle$, $\langle a, b \rangle$ — група кватерніонів. $[C, \langle a \rangle] = C$;

7) $p = 2 = |B_i| = s$, $Q = \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $[a, b] = a^2$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $C \cap (\langle a \rangle \lambda \langle d \rangle) = \langle a^2 b^2 \rangle$, $[C, \langle a \rangle] = C$.

Доведення. Необхідність. Нехай G і C задовольняють умови теореми. Тоді в G існує єдина силовська p -підгрупа P , $C \subset P$, $P \triangleleft G$. Зрозуміло, що G — періодична група. Нехай F — максимальна холловська p' -підгрупа із G , що виділяється в G прямим множником. Тоді $G = G^* \times F$, і F — дедекіндова група без елементів порядку p . Зрозуміло, що G^* задовольняє умовам теореми.

Оскільки G^*/C — періодична дедекіндова група, то $G^* = P\lambda D$, D — холловська дедекіндова підгрупа із G , що не містить елементів порядку p . Нехай тепер P — локально нільпотентна p -група, що задовольняє умовам розглядуваної теореми, і P/C — прямий добуток груп з локально циклічними власними підгрупами.

Нехай $Y = C_P(C)$. Тоді $C \subset Z(Y)$, а $Y \triangleleft G$. Відомо, що $|P : Y| \leq 2$. Зрозуміло, що Y — p -група, що задовольняє умовам теореми 1.1.4, і є групою типу 1) або 2) цієї теореми при умові $U = 1$. Тоді $Y = B \cdot (C \times Q)$. Розглянемо можливі випадки: 1) G — не локально нільпотентна група; 2) G — локально нільпотентна група.

Випадок 1) В цьому випадку $|D| > 1$, $p > 1$, $Q = 1$, $Y = P$, $B \cap C = 1$. Покладемо $D = A$, $C_A(C) = S \triangleleft G$. Тоді $A = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $p \equiv 1 \pmod{s}$. За вибором F A — холловська дедекіндова $\pi(s)$ -група, $[C, \langle a \rangle] = C$, і G — група типу 1) розглядуваної теореми. Випадок 1) розглянутий.

Випадок 2) В цьому випадку G — прямий добуток своїх силовських підгруп, і за вибором F $|D| = 1$, $G = P \times F$. Можливі два випадки: 2.1) $Y = P$; 2.2) $Y \subset P$.

Випадок 2.1) У випадку 2.1) покладемо $Q = A = 1$ і одержимо, що G — група типу 2) теореми. При $A \subset Q = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів,

за теоремою 1.1.4 $|B_i| = 2$ і G — група типу 3) розглядуваної теореми. Випадок 2.1 розглянутий.

Випадок 2.2) В цьому випадку $p = 2$, $|P : Y| = 2$, $P = Y \cdot \langle a \rangle$, $a^2 \in Y$, $[C, \langle a \rangle] = C$. Покладемо $A = \langle a \rangle$, $S = \langle a^2 \rangle$. Нехай P/C — абелева група. Тоді за умовою теореми P/C — прямий добуток локально циклічних 2-груп, і

$$P/C = Y/C \cdot \langle Ca \rangle.$$

Вибираючи суміжний клас $\langle Ca \rangle$ найменшого порядку в P/C , можна в прямому добутку Y/C локально циклічних 2-груп вибрати таку підгрупу Y^*/C , що

$$P/C = Y^*/C \times \langle Ca \rangle.$$

Звідси $P = Y^* \cdot \langle a \rangle$, $Y^* \cap \langle a \rangle = C \cap \langle a \rangle$. Якщо $Y^* = C$, то G — група типу 4). Нехай $Y^* \supset C$. Тоді $C \subset Z(Y^*)$ і Y^*/C — прямий добуток неединичних локально циклічних 2-груп. За результатами із [206] $Y^* = B \cdot C$, $B \cap C = (Y^*)' = B'$ і B — майже прямий добуток підгруп $B' \times B_i$ з об'єднаною підгрупою B' , B_i — неединична локально циклічна 2-група. Зрозуміло, що $[B, \langle a \rangle] \subset C$. Покладемо $B_0 = [B, \langle a \rangle] \cdot B'$. Тоді $(B_i \times B_0) \triangleleft G$. Покладаючи $N_i = B_i \times C_i$, де $\exp C_i \leq |B_i|$, одержимо, що N_i — характеристична підгрупа нормальної в G підгрупи $B_i \times C_i$. Тоді $N_i \triangleleft G$ і $[B_i, \langle a \rangle] \subset C_i$. З цього випливає, що $\exp B_0 \leq \max_{i \in I} |B_i|$. Заміняючи B на добуток $B \cdot B_0$ і покладаючи $Q = 1$, одержимо, що G — група типу 4) теореми.

Нехай далі P/C — неабелева, а значить, гамільтонова група. Якщо Y/C — гамільтонова група, тобто $Y = B \cdot (C \times Q)$, де $Q = \langle b, d \rangle$ — група кватерніонів, то в гамільтоновій групі P/C група кватерніонів $(Y \times Q)/C$ за твердженням 1.1.3 доповнюється центральною в P/C елементарною абелевою 2-групою. Звідси $a^2 \in C$. Нормальна в G підгрупа $C \times Q$ містить характеристичну підгрупу $N = \langle c_2 \rangle \times Q$, де $c_2 \in C$, $|c_2| = 4$. Звідси $[Q, \langle a \rangle] \subset \langle c_2 \rangle$. Неединична група B розкладається в майже прямий добуток підгруп $B_0 \times B_i$ з об'єднаною підгрупою $B_0 \supset B'$.

$|B_i| = 2$. Розглядаючи підгрупи $N_i = C_1 \times B_i$ одержимо, як і раніше, $N_i \triangleleft G$, $|C_1| = 2$, $C_1 \subset C$. Тепер очевидно, що

$$B' = \langle [B, Q], [B, \langle a \rangle] \rangle = B_0,$$

тому $B_0 \subset C_1$, і

$$\exp B_0 \leq \max_{i \in I} |B_i|.$$

Тоді, замінюючи B на майже прямий добуток $B_0 \times B_i$, одержимо, що G — група типу 5) теореми.

Нехай тепер $Y' = 1$, а P/C — гамільтонова група. Тоді в P/C група кватерніонів X/C доповнюється центральною в P/C елементарною абелевою підгрупою Y^*/C із Y/C . Тоді $P = Y^* \cdot X$, $Y^* \cap X = C$, де X — група, що задовольняє умовам леми 1.3.3. Тоді за результатами в [206] $Y^* = B \cdot C$, $B \cap C = B_0$. Як і раніше, B — майже прямий добуток $B_i \times B_0$ в об'єднаній підгрупі B_0 , $|B_i| = 2$. Якщо X — група типу 1) леми 1.3.3, то G — група типу 6) розглядуваної теореми. При $Q = \langle b \rangle$, коли X — група типу 2) леми 1.3.3, то G — група типу 7) розглядуваної теореми. Необхідність доведена. Достатність очевидна. Теорема доведена.

Теорема 1.3.2. Нескінченні недедекіндові локально ступінчаті $H(I)$ -групи вичерпуються групами типів 1)–7) теореми 1.3.1 при умовах $|F \cdot A \cdot B| < \infty$, і в групах типу 2) $|B'| > 1$.

Не локально нільпотентні групи такого роду вичерпуються групами типу 1), локально нільпотентні — групами типів 2)–7), а нільпотентні — групами типів 2) та 3). При цьому G тоді і тільки тоді ненільпотентна, коли $G' \supset C$.

Доведення. Необхідність. За наслідком 1.3.4 G — група типу 1)–7) теореми 1.3.1 при умові $|F \cdot A \cdot B| < \infty$. В групах типу 2) згаданої теореми $|B'| = 1$, спловські підгрупи дедекіндові, і сама група дедекіндова, тому $|B'| > 1$.

Інші необхідні твердження теореми безпосередньо випливають з будови груп типів 1)-7) теореми 1.3.1.

Достатність очевидна. Теорема доведена.

Означення 1.3.2. Група G називається групою з умовою транзитивності (послабленої транзитивності) властивості V для τ -підгруп чи $TV(\tau)$ - ($tV(\tau)$ -) групою, якщо для будь-яких трьох τ -підгруп $A \subset B \subset C$ ($A \subset B \subset G$) із умов A — V -підгрупа із B і B — V -підгрупа із C (B — V -підгрупа із G) випливає, що A — V -підгрупа із C (A — V -підгрупа із G). Розв'язні групи такого роду називаються $STV(\tau)$ - та $StV(\tau)$ -групами.

Якщо в означених групах V — властивість нормальності H , то G називається групою з умовою транзитивності (послабленої транзитивності) для τ -підгруп або $T(\tau)$ - ($t(\tau)$ -) групою.

Якщо G — $T(\tau)$ - ($t(\tau)$ -) група, то для властивостей τ : всі групи, $C, \bar{C}, A, \bar{A}, AC, N, \bar{N}, N\bar{C}, N\bar{A}, F, I, IC, I\bar{C}, IA, I\bar{A}, IN, I\bar{N}$ вона називається відповідно: T - (t)-, $T(C)$ - ($t(C)$ -), $T(\bar{C})$ - ($t(\bar{C})$ -), $T(A)$ - ($t(A)$ -), $T(\bar{A})$ - ($t(\bar{A})$ -), $T(AC)$ - ($t(AC)$ -), $T(N)$ - ($t(N)$ -), $T(\bar{N})$ - ($t(\bar{N})$ -), $T(N\bar{C})$ - ($t(N\bar{C})$ -), $T(N\bar{A})$ - ($t(N\bar{A})$ -), $T(F)$ - ($t(F)$ -), $T(I)$ - ($t(I)$ -), $T(IC)$ - ($t(IC)$ -), $T(I\bar{C})$ - ($t(I\bar{C})$ -), $T(IA)$ - ($t(IA)$ -), $T(I\bar{A})$ - ($t(I\bar{A})$ -), $T(IN)$ - ($t(IN)$ -), $T(I\bar{N})$ - ($t(I\bar{N})$ -) групою.

Зауваження 1.3.1. В [15], [36], [38], [68], [91] вивчалися T - і t -групи, позначення яких співпадає з нашим, вивчалися tI -групи за нашим позначенням $t(I)$ -групи.

Для властивості нормальності $-H$ за логікою нашого означення умов транзитивності означувані групи слід було б називати $TH(\tau)$ ($tH(\tau)$)-групами. Але спрощуючи назву та зберігаючи традиції попередників ми ототожнюємо $TH(\tau)$ з $T(\tau)$, а $tH(\tau)$ з $t(\tau)$.

Лема 1.3.5. Нехай G — довільна група. Тоді справедливі такі тверд-

ження:

- 1) якщо G — своя τ -підгрупа і $T(\tau)$ -група, то вона $t(\tau)$ -група;
- 2) якщо G — своя τ -підгрупа, довільна τ -підгрупа X із G , що міститься в τ -підгрупі Y із G , є τ -підгрупою із Y , і всі τ -підгрупи із G $t(\tau)$ -групи, то G — $T(\tau)$ -група;
- 3) якщо кожна підгрупа групи G , що містить τ -підгрупу із G , є τ -підгрупою в G , то група G тоді і тільки тоді буде $t(\tau)$ -групою, коли довільна її субнормальна τ -підгрупа нормальна в усій групі;
- 4) якщо кожна підгрупа групи G , що містить τ -підгрупу із G , є τ -підгрупою в G , то G тоді і тільки тоді буде $T(\tau)$ -групою, коли довільна τ -підгрупа X із G субнормальна в τ -підгрупі Y із G нормальна в Y , при цьому G — $t(\tau)$ -група;
- 5) якщо кожна підгрупа із G , що містить нормальну τ -підгрупу із G , сама τ -підгрупа із G і G — $T(\tau)$ ($t(\tau)$)-група, то G/N — $T(t)$ -група;
- 6) нехай кожна підгрупа X групи G , що містить нормальну в G τ_1 -підгрупу N , є розширенням N за допомогою τ_2 -групи X/N є τ -підгрупою із G , і G — $T(\tau)$ ($t(\tau)$)-група, то G/N — $T(\tau_2)(t(\tau_2))$ -група.

Доведення. Якщо G — своя τ -підгрупа і $T(\tau)$ -група, то твердження 1) леми випливає з означення 1.3.2.

При умовах твердження 2) для будь-яких трьох τ -підгруп із G $A \triangleleft B \triangleleft C$ і B — τ -підгрупи із C . Оскільки C — $t(\tau)$ -група, то $A \triangleleft C$ і твердження 2) теж доведено.

Нехай A — τ -підгрупа і кожна підгрупа із G , що містить A , сама τ -підгрупа в G і A — субнормальна підгрупа τ -підгрупи C із G . Зауважимо, що G — теж своя τ -підгрупа.

Покажемо, що при умовах тверджень 3) та 4) $A \triangleleft C$ ($A \triangleleft G$). Оскільки A — субнормальна в C (в G), то існує нормальний ряд

$$A = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \dots \triangleleft A_i \triangleleft \dots \triangleleft A_n = C \quad (A_n = G).$$

При $n = 1$ твердження очевидне. Нехай воно справедливе при довжині

субнормального ряду $k < n$. Покажемо, що $A_0 \triangleleft A_n$. За припущенням індукції і при умові $A_{n-1} — \tau$ -підгрупа із G маємо $A_0 \triangleleft A_{n-1}$. За означенням 1.3.2 $A_0 \triangleleft A_n$. Необхідність твердження 3) і 4) доведена.

Нехай N — нормальна в G τ_1 -підгрупа і $G — T(\tau)$ ($t(\tau)$)-група і $A/N \triangleleft B/N \triangleleft C/N$ (G/N) — τ_2 -підгрупа із G/N . Зрозуміло, що $A \triangleleft B \triangleleft C(G)$. Якщо A, B, C — τ -підгрупи із G , то $A \triangleleft C$ ($A \triangleleft G$), а, значить, $A/N \triangleleft C/N$ ($A/N \triangleleft G/N$) і $G/N — T(\tau_2)$ ($t(\tau_2)$)-група. Тепер при умовах твердження 5) покладемо $\tau_1 = \tau$, а τ_2 — довільна підгрупа із G/N і одержимо, що $G/N — T(t)$ -група. При умовах твердження 6) A, B, C — τ -групи, тому це твердження вже доведено. Лема доведена.

Теорема 1.3.3. Нехай G — група з таким комутантом G' , що будь-який його неединичний гомоморфний образ відмінний від свого комутанта. Тоді для будь-якої підгрупи M із G' єдиною нормальною в G підгрупою D з умовою $G = M \cdot D$ буде сама підгрупа $G = D$.

Доведення. Нехай G, G', M, D задовольняють умовам теореми. Зрозуміло, що $G = G' \cdot D$, $G' \cap D = N \triangleleft G$, $G/D = G'/N$. Відомо, що комутант гомоморфного образу співпадає з гомоморфним образом комутанта, тобто $(G/D)' = G'/N = (G'/D)'$. Остання рівність можлива, коли $|G'/N| = 1$. Звідси $G' \subset D$, $G'D = G = D$. Теорема доведена.

Наслідок 1.3.5. Нехай G — група з умови теореми 1.3.3. В частинному випадку G — розв'язна група. Тоді для будь-якої підгрупи M із G' і власної нормальної підгрупи D із G справедливе твердження: $M \cdot D$ — власна підгрупа із G .

1.4 Будова $H(S)$ - та деяких $H(\bar{N})$ -груп

Означення 1.4.1 [181]. Група G , що породжується своїми циклічними нормальними підгрупами, називається напівабелевою групою.

Лема 1.4.1. Група G тоді і тільки тоді є $H(S)$ -групою, тобто групою з нормальними підгрупами, що не належать власній підгрупі S , коли для будь-якого елемента $g \in G \setminus S$ маємо, що $\langle g \rangle \triangleleft G$, $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Для $H(S)$ -групи G справедливі твердження:

- 1) будь-яка підгрупа N із G , що не міститься в S , нормальна в G , $S \triangleleft G$ і G/N та G/S — дедекіндові групи;
- 2) якщо $S \subset S^* \subset G$, то S^* — $H(S)$ -група, а G — $H(S^*)$ -група;
- 3) G — напівабелева група.

Доведення. Нехай G — $H(S)$ -група. Тоді для довільного $g \in G \setminus S$ маємо $\langle g \rangle \triangleleft G$ і нормального в G буде будь-яка підгрупа N , що містить елемент g . Звідси $G/\langle g \rangle$ і G/N — дедекіндові групи. Необхідність основної частини доведена.

Нехай $S \subset G$ і для довільного $g \in G \setminus S$ справедливо що $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Тоді будь-яка підгрупа N із G , що не міститься в S , містить елемент $g \in G \setminus S$, а значить $N/\langle g \rangle$ — нормальна підгрупа дедекіндової групи $G/\langle g \rangle$. Звідси $N \triangleleft G$ і достатність основної частини доведена. Нехай x — будь-який елемент із S . Тоді $\langle x \rangle \subset S$. Якщо $\langle x \rangle \triangleleft G$, то для будь-якого елемента $g \in G$ $g^{-1}xg \in S$. Якщо $\langle x \rangle \not\triangleleft G$, то і $\langle g^{-1}xg \rangle \not\triangleleft G$, а тому $\langle g^{-1}xg \rangle \subset S$. Звідси $g^{-1}xg \in S$, тобто $S \triangleleft G$. Зрозуміло, що G/S — дедекіндова група. Раніше було встановлено, що і G/N — дедекіндова група, тому твердження 1) леми доведено.

Якщо $g \in G \setminus S^*$, то $g \in G \setminus S$. Звідси $\langle g \rangle \triangleleft G$. За попереднім $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Тоді при умовах твердження 2) G — $H(S^*)$ -група, $S^* \triangleleft G$. Точно так стверджуємо, що S^* — $H(S)$ -група. Твердження 2)

леми доведено.

Нехай G^* — підгрупа із G , породжена всіма циклічними нормальними підгрупами із G . Тоді $G^* \triangleleft G$ і $G = SG^*$. Нехай $x \in S \setminus G^*$. В групі G існує елемент $g \in G \setminus S$. Зрозуміло, що $gx \in G \setminus S$. За попереднім $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $\langle gx \rangle \triangleleft G$. Звідси $g \in G^*$, $gx \in G^*$. Тому $x \in G^*$. Отже, $S \subset G^* = G$. За означенням 1.4.1 G — напівабелева група. Твердження 3) доведено. Лема доведена.

Наслідок 1.4.1. Нехай G — $H(S)$ -група. Тоді G' — скінченна центральна циклічна підгрупа із G , підгрупу S в G можна вибрати так, що в G існує підгрупа $G^* = S \cdot \langle a \rangle$, для якої $G' = (G^*)' \subset S \subset G^*$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, r — просте число, $m > 0$, для довільного $x \in S$ $\langle ax \rangle \triangleleft G$, $G/\langle ax \rangle$ — дедекіндова група. При цьому G^* — $H(S)$ -група, що співпадає з G , або G/S — квазіциклічна r -група.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 1.4.1 вона напівабелева. За результатами роботи [181] $G' \subset Z(G)$. Із результатів робіт [106], [115] G' — скінченна циклічна група. Звідси G' — скінченна центральна циклічна підгрупа із G .

За лемою 1.4.1 G/S — неединична дедекіндова група. Для будь-якого $S \subset S^* \subset G$ і G — $H(S^*)$ -група. Можливі випадки: 1) G/S має власні підгрупи скінченного індексу; 2) G/S не має власних підгруп скінченного індексу.

Випадок 1. В цьому випадку G/S має власну підгрупу S^*/S скінченного індексу в G/S . Зрозуміло тоді, що в G/S є і така підгрупа S^*/S , для якої $G/S/S^*/S$ — циклічна r -група, r — просте число. Зрозуміло, що $G = S^* \cdot \langle a \rangle$, $S^* \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, $m > 0$. За згаданою лемою G — $H(S^*)$ -група. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $S = S^*$. Ясно, що для будь-якого $x \in S$ $\langle ax \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle ax \rangle$ — дедекіндова група.

Покладаючи $G^* = G$, одержимо, що лема в цьому випадку доведена.

Випадок 2. В цьому випадку за твердженням 1.1.3 G/S не може бути гамільтоновою групою. Тому за відомими результатами [72] G/S — повна абелева група. В неперіодичній повній абелевій групі G/S існує базисна підгрупа B/S , для якої $G/S/B/S$ — повна періодична група. Як і в попередньому випадку G — $H(B)$ -група і покладаючи $B = S$, одержимо, що G/S — повна періодична абелева група. За відомими результатами [72] $G/S = S^*/S \times R/S$, де R/S — квазіциклічна r -група, r — просте число. Знову, як і раніше, G — $H(S^*)$ -група. Покладаємо $S^* = S$ і одержимо, що G/S — квазіциклічна r -група, r — просте число.

Нехай G^*/S — неединична циклічна підгрупа із G/S . Тоді $G^* = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, $m > 0$, $G' \subset S$ і наслідок доведений.

Теорема 1.4.1. Неперіодичні $H(S)$ -групи вичерпуються неперіодичними абелевими групами, у яких S — будь-яка власна підгрупа.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді за наслідком 1.4.1 G містить таку підгрупу G^* , що $G^* = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, $m > 0$ і для будь-якого $x \in S$ $\langle ax \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle ax \rangle$ — дедекіндова група і G/S — періодична локально циклічна група. Із результатів роботи [181] випливає, що $(G^*)' = 1$. Якщо $G^* = G$, то необхідність доведена.

Нехай $G^* \subset G$, то за наслідком 1.4.1 G/S — квазіциклічна r -група, r — просте число. Нехай x, y — будь-які елементи із G . Тоді в G існує підгрупа $G_1 = \langle G^*, x, y \rangle$. Оскільки G/S — квазіциклічна, а значить локально скінченна група, то G_1/S — скінченно породжена, а значить циклічна її підгрупа. Але тоді $G_1 = S \cdot \langle g \rangle$, $S \subset G_1$ і G_1 — $H(S)$ -група із попереднього випадку, $g \in G$. За цим випадком $G'_1 = 1$. Оскільки x, y належать G_1 , то $[x, y] = 1$ і G — абелева. Необхідність доведена.

Достатність очевидна. Теорема доведена.

Наслідок 1.4.2. Комутант довільної $H(S)$ -групи G є скінченною циклічною центральною підгрупою із G , яка в недедекіндовій групі G міститься в S . Недедекіндова $H(S)$ -група G має вид: $G = R \times D$, D — холловська дедекіндова періодична підгрупа із G , $S = U \times D$, R — силовська недедекіндова r -підгрупа із G , U — власна нормальна підгрупа із R , r — просте число.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За наслідком 1.4.1 G' — скінченна центральна циклічна підгрупа із G .

Нехай G — недедекіндова група. За теоремою 1.4.1 і наслідком 1.4.1 вона періодична нільпотентна група, що має за твердженням 1.1.3 хоча б одну недедекіндову силовську r -підгрупу R . Тоді $G = R \times D$. Якщо $D \setminus S$ має неодиначний елемент g , то за лемою 1.4.1 $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle g \rangle$, а значить і R — дедекіндові групи, що неможливо за вибором R . Звідси $D \subset S$.

Нехай $U = S \cap R$. Тоді U — власна нормальна підгрупа із R . Будь-який елемент g із $R \setminus U$ належить $G \setminus S$. За лемою 1.4.1 $\langle g \rangle \triangleleft G$, а значить $G/\langle g \rangle$ і $R/\langle g \rangle$ — дедекіндові групи. Звідси D — дедекіндова група і за лемою 1.4.1 R — $H(U)$ -група. За наслідком 1.4.1 $G' \subset S$ і наслідок доведений.

Лема 1.4.2. Недедекіндові r -групи виду $G = S \cdot \langle a \rangle$, у яких для будь-якого $x \in S$ $\langle ax \rangle \triangleleft G$, $G/\langle ax \rangle$ — дедекіндова група, r — просте число, вичерпуються групами типу: $G = \langle a \rangle \cdot B$, $|a| = r^\alpha$, $G' = \langle a^{r^k} \rangle = \langle a \rangle \cap B \subset Z(G)$, $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$, $r^k > 2$, r — просте число, підгрупа B розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $G' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою G' , $|b_i| = r^{\beta_i}$, $k \geq \beta_i > 0$, $i \in I$, $|I| > 0$.

В групах цього типу S — власна підгрупа із G , $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, $m > 0$. В частинному випадку $S = B \cdot \langle a^{r^m} \rangle$, $\exp B = p^k$ або $\exp B = 2^{k+1}$,

$k+1 < \alpha$. Якщо G — група цього типу є $H(S)$ -групою, тоді $S = B \cdot \langle a^{r^m} \rangle$, $k \geq m$. Для будь-якого $i \in I$ $k - m + 1 \geq \beta_i$. При $r^{k-m+1} = 2$ $B' = 1$. Для будь-якого елемента $g \in G \setminus S$ $G' \subset \langle g \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. В роботі [182] встановлено, що $G = \langle a \rangle \cdot B$ — група вказаного в лемі типу, S — власна підгрупа із G , $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{r^m} \rangle$, $m > 0$. В частинному випадку $S = B \cdot \langle a^{r^m} \rangle$. Покажемо, що в групах цього типу $\exp B = p^k$ або $\exp B = 2^{k+1}$, $k+1 < \alpha$. За теоремою 1.1.1 $\exp B = p^k$ або $\exp B = 2^{k+1}$ і $k = \alpha - k > 1$. Звідси $k+1 = \alpha - k + 1 = \alpha - (k-1) < \alpha$.

Нехай тепер G — $H(S)$ -група. За лемою 1.4.1 $S \triangleleft G$ і очевидно G/S — циклічна група. Тоді $G' \subset S$, а значить $k \geq m$. Якщо для деякого $i \in I$ $b_i \notin S$, то за означенням $H(S)$ -групи $\langle b_i \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle b_i \rangle$ — дедекіндова група, що містить циклічну фактор-групу $\langle a \rangle \lambda \langle b_i \rangle / \langle b_i \rangle$ порядку більше 4. Оскільки $\langle b_i \rangle \cap \langle a \rangle = 1$ і $G' \subset \langle a \rangle$, то $G/\langle b_i \rangle$ — гамільтонова 2-група, що містить елементи порядку більше 4, а це суперечить твердженню 1.1.3. З цієї суперечності маємо: $b_i \in S$, $B \subset S$, $S = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$.

Нехай тепер g — будь-який елемент із $G \setminus S$. Покажемо, що $\langle g \rangle \supset G'$. За лемою 1.4.1 $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Якщо $\langle g \rangle \not\supset G'$, то $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle \subset \langle a^{r^{k+1}} \rangle$. Звідси $G/\langle g \rangle$ — гамільтонова група, що містить циклічну підгрупу $\langle g \rangle \cdot \langle a \rangle / \langle g \rangle$ порядку більше, ніж $p^k > 4$. Це суперечить твердженню 1.1.3. З цієї суперечності випливає, що $G' \subset \langle g \rangle$.

Покладемо $g = a^{r^{k-m+1}} \cdot x$, де $x \in B$. За попереднім $\langle g \rangle \supset G' = \langle a^{r^k} \rangle$. За твердженням 1.1.9 для будь-якого $\delta \geq 0$ $g^{r^\delta} = a^{r^{k-m+1} \cdot r^\delta} \cdot x^{r^\delta} \cdot [a, x]^{-\frac{1}{2} r^{k-m+1} (r^\delta - 1)} = a^{t \cdot r^{k-m+1}} \cdot x^{r^\delta}$, де $t = 1 - \frac{1}{2} s r^{k_1} (r^\delta - 1)$, $[a, x] = a^{s \cdot r}$, $(s, r) = 1$, $k_1 \geq k$, $r^k > 2$. Звідси $(t, r) = 1$.

За попереднім існує таке δ , що $(g^{r^\delta}) = \langle a^{r^k} \rangle$. Зрозуміло тоді, що $x^{r^\delta} \in \langle a \rangle$. Для будь-якого i $\delta \geq \beta_i$. Оскільки $\langle b_i \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, то $\langle g^{r^\delta} \rangle = \langle a^{r^{k-m+1}} \rangle = \langle a^{r^k} \rangle$. Звідси $\delta = k - m + 1$, отже $k - m + 1 \geq \beta_i$.

Нехай $r^{k-m+1} = 2$. Тоді $r = 2$, $k = m$. $|b_i| = 2$. Якщо знайдуться такі

b_i та b_j , що $[b_i, b_j] > 1$, то покладемо $x = b_i b_j$. Тоді $|x| = 4$. За теоремою 1.1.1 $k = \alpha - 1$, $\langle x^2 \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle = G' = B'$. Оскільки $m = k > 1$, то $a^{2^{m-1}} \in \langle a^2 \rangle \subset Z(G)$. Ясно, що для елемента $a^{2^{m-1}} \cdot x$ справедливо $|g| = 2$, $\langle g \rangle \not\subset G'$, що суперечить попередньому. Ця суперечність і завершує доведення лєми. Лєма повністю доведена.

Теорема 1.4.2. Всі $H(S)$ -групи вичерпуються неединичними дедекіндовими групами і групами типу $G = R \times D$, де: D — холловська періодична дедекіндова підгрупа із G ; R — силовська r -підгрупа із G виду $R = C \cdot B$, $C \triangleleft G$ — локально циклічна r -група, що містить таку підгрупу $\langle a \rangle$, що $|a| = r^\alpha$, $G' = \langle a^{r^k} \rangle = \langle a \rangle \cap B \subset Z(G)$, $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$, r — просте число, $S = (\langle a^{r^m} \rangle \cdot B) \times D$, $k \geq m > 0$, підгрупа B розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $G' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою G' , $|b_i| = r_i^{\beta_i}$, $k - m + 1 \geq \beta_i > 0$, $i \in I$, $|I| > 0$, при $r^{k-m+1} = 2$ $B' = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — дедекіндова група, то необхідність доведена.

Нехай G — недедекіндова група. Тоді за наслідком 1.4.2 G — періодична група виду $G = R \times D$, D — холловська дедекіндова підгрупа із G , $S = D \times U$, $S \cap R = U \triangleleft G$, R — недедекіндова силовська r -підгрупа із G , що є $R(U)$ -групою. За наслідком 1.4.1 R містить таку підгрупу G^* , що $G^* = S \cdot \langle a \rangle$, $S \subset G^*$, $R' = (G^*)' \subset S$, R та G^* є $H(S)$ -групами. При цьому для будь-якого $x \in S$ $\langle ax \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle ax \rangle$ — дедекіндова група і або $G^* = G$, або G/S — квазіциклічна група. Нехай $G = G^*$. Тоді R задовольняє умовам лєми 1.4.2 і є групою вказаного в цій лемі типу. Але тоді R — група в розглядуваній теоремі. Необхідність в цьому випадку доведена.

Нехай $G^* \subset G$. Тоді G/S — квазіциклічна група. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $|a| > 4$. Оскільки $|G'| = |(G^*)'| > 1$, то G^* — недедекіндова $H(S)$ -група розглядуваної в попередньому випадку

типу. Як і в згаданому випадку G^* — група із леми 1.4.2. За цією лемою $G = \langle a \rangle \cdot B$, B — майже прямий добуток нормальних в G підгруп $G' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $G' = \langle a \rangle \cap B = \langle a^r \rangle$, $S = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$, $k \geq m > 0$, $r^k > 2$, $|b_i| = r^{\beta_i}$, $k - m + 1 > \beta_i > 0$. При $r^{k-m+1} = 2$ $B' = 1$.

Нехай g — будь-який елемент із $G \setminus S$. Оскільки G/S — квазіциклічна r -група, то $G = \bigcup_{j=0}^{\infty} G_j$, де $G_0 = S \triangleleft G$, G_j/S — циклічна група порядку r^j . Тоді очевидно, що $G_j = \langle g_j \rangle \cdot S$. За теоремою 1.1.1 $\exp B \leq r^{k-m+2} < r^a$. Покажемо, що $\langle g \rangle \cap S \supset G' = (G^*)'$. Нехай $N = \langle g \rangle \cdot S$. Оскільки G/S — квазіциклічна група, то G^*/S — її циклічна підгрупа. Так як $\langle g \rangle \not\subset S$, то N/S — неединична циклічна група, а $\langle a^{r^{m-1}} \rangle \cdot S/S$ — її підгрупа порядку r . За лемою 1.4.1 $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група.

Нехай $\langle g \rangle \not\subset G'$. Тоді $G/\langle g \rangle$ — гамільтонова 2-група, що містить циклічну підгрупу $\langle g \rangle \cdot \langle a \rangle / \langle g \rangle$ порядку більше 4, що суперечить твердженню 1.1.3, а значить $G' \subset \langle g \rangle$. Звідси $B \cap \langle g \rangle = G'$. Для довільного j $G_j = \langle g_j \rangle \cdot B$, $B \cap \langle g_j \rangle = G'$. За твердженням 1.1.9 $g_j^{r^{a-4}} \in Z(G)$. Оскільки $\exp B \leq r^{k-m+2}$ і будь-який елемент y_j із G_j має вид $g_j^{s_j \cdot r^x}$, де $x \in B$, s_j — ціле число, то $y_j^{r^{k-m+2}} \in \langle g_j \rangle$, отже, G_j містить характеристичну підгрупу, породжену всіма своїми елементами виду $y_j^{r^{k-m+2}} \in \langle g_j^{r^{k-m+2}} \rangle$. Зрозуміло, що $\langle g_j^{r^{k-m+2}} \rangle \subset \langle g_{j+1}^{r^{k-m+2}} \rangle$. Покладемо $g_j^{r^{k-m+2}} = c_j$. Тоді $\langle c_j \rangle \subset \langle c_{j+1} \rangle$ і в G існує квазіциклічна підгрупа $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle c_j \rangle$. Зрозуміло, що $C \cap B = G'$ і для будь-якого j знайдеться $l > j$ таке, що $\langle c_l \rangle \cdot B \supset G_j$. З цього випливає, що $G = C \cdot B$, $C \cap B = G'$, а значить $G^* = B \cdot \langle a^* \rangle$, де $\langle a^* \rangle = C \cap G^*$, $\langle a^* \rangle \cap B = C \cap B = \langle a \rangle \cap B = G'$. Зрозуміло, що $|G^* : B| < \infty$, тому $|a^*| = |a|$ і не порушуючи загальності можемо вважати, що $\langle a^* \rangle = \langle a \rangle$. Тому R — група із розглядуваної теореми. Покладаючи $U = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$, одержимо, що $S = U \times D$ і G — група розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Додаток. Якщо G — дедекіндова група, то вона $H(S)$ -група для будь-якої власної підгрупи S . Нехай $G = R \times D$ — група із розглядуваної теореми. $S = U \times D$, $g \in G \setminus S$, S — власна підгрупа із G . Покажемо,

що $\langle g \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Зрозуміло, що $\langle g \rangle \cap D \triangleleft G$ і $\langle g \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle$, $\langle g_1 \rangle$ — силовська r -підгрупа із $\langle g \rangle$, $\langle d_1 \rangle$ — її холловське доповнення в $\langle g \rangle$. Для доведення достатності досить показати, що $\langle g_1 \rangle \triangleleft G$, $\langle g \rangle / \langle g_1 \rangle$ — дедекіндова група. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $\langle g_1 \rangle = \langle g \rangle \subset R = G$. Зрозуміло, що в $G = C \cdot B$ і в C знайдеться такий елемент c , для якого $g = c \cdot x$, $\langle c \rangle \cap B = G'$, $c \notin S$, $S = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$ і існує l , для якого $c^l = a^{r^{m-1}}$. Покажемо, що $\langle g \rangle \supset G'$. За твердженням 1.1.9 для будь-якого δ $g^{r^\delta} = (cx)^{r^\delta} = c^{r^\delta} \cdot x^{r^\delta} \cdot [c, x]^{-\frac{1}{2}r^\delta(r^\delta-1)}$. Оскільки $a^{r^{m-1}} \in \langle c^l \rangle$, то $|c| \geq \alpha - m + 1$. Так як $\langle c \rangle \cap B \supset G' = \langle a^{r^k} \rangle$, то існує σ , для якого $\langle c^{r^\sigma} \rangle = G'$, $\sigma \geq k - m + 1$. При $\delta = k - m + 1$ одержимо $g^{r^\delta} = c^{r^{k-m+1}} \cdot x^{r^{k-m+1}} \cdot [c, x]^{-\frac{1}{2}r^{k-m+1}(r^{k-m+1}-1)}$. З умови $\beta_i \leq k - m + 1$ за теоремою 1.1.1 маємо $|G'| \leq r^{k-m+1}$ і $|G'| = r^{k-m+1}$ при $r = 2$ $B' = G'$, $k - m + 1 > 1$.

Нехай $x^{r^{k-m+1}} = 1$. Тоді $g^{r^\delta} = c^{r^{k-m+1}} \cdot d$, $[c, x]^{-\frac{1}{2}r^{k-m+1}(r^{k-m+1}-1)} = d \in G'$. За теоремою 1.1.1 $|d| \leq 2$ і $|d| = 2$ коли $r = 2$, $G' = B'$, $k - m + 1 = \alpha - k$, $k - m + 1 > 1$. Якщо $k < \alpha - 1$ чи $|d| = 1$, то $\langle c^{r^{k-m+1}} \cdot d \rangle \supset G'$. Якщо $k = \alpha - 1$, $|d| = 2$, то $r = 2$, $|x| = 2^{k-m+1}$. Оскільки $k - m + 1 > 1$, $|G'| = 2$, то $d = 1$ і $\langle g \rangle \supset G'$. Нехай $x^{r^{k-m+1}} = d_1 \neq 1$. За теоремою 1.1.1 $r = 2$, $\alpha - k = k - m + 1$, $G' = B'$. За умовою $k - m + 1 > 1$ $\alpha - k > 1$, тобто $k < \alpha - 1$. Оскільки $d_1 d_2 \in \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$, то $\langle c^{2^{k-m+1}} \cdot d_1 d_2 \rangle \supset G'$. Отже, ми встановили, що $\langle g \rangle \supset G'$. Але тоді $\langle g \rangle \triangleleft G$, $G/\langle g \rangle$ — абелева група і за лемою 1.4.1 $G = H(S)$ -група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Означення 1.4.2. Нагадаємо, що група називається $H(\bar{N})$ -групою, коли в неї нормальні всі ненільпотентні підгрупи.

Означення 1.4.3. Група $G = P\lambda(b)$ називається групою типу групи Шмідта, якщо P — скінченна p -група, яка може бути нормальною силовською p -групою скінченної групи Шмідта, $b^q \in Z(G)$, $G/\langle b^q \rangle$ —

скінченна група Шмідта, p, q — різні прості числа.

Лема 1.4.3. Клас $H(\bar{N})$ -груп замкнений за підгрупами і фактор-групами і не замкнений за прямими добутками.

Кожна $H(\bar{N})$ -група G містить нормальну підгрупу M , що має властивості:

- 1) M міститься в будь-якій ненільпотентній підгрупі в G і всяка власна підгрупа з M нільпотентна;
- 2) фактор-група G/M — група, у якій комутант є центральною елементарною абелевою 2-групою;
- 3) будь-яка ненільпотентна підгрупа X із G нормальна в G і G/X — дедекіндова група.

Доведення. Нехай G — $H(\bar{N})$ -група, X — будь-яка її ненільпотентна підгрупа. За означенням 1.4.2 $X \triangleleft G$ і за лемою 1.3.4 G/X — дедекіндова група. Властивість 3) доведена.

Для властивості $\bar{N}$ із леми 1.3.4 випливає, що клас $H(\bar{N})$ -груп замкнений за підгрупами і фактор-групами. Зрозуміло, що група $S_3 \in H(\bar{N})$ -групою. Нехай $G = G_1 \times G_2$, де $G_i \cong S_3$, $i = 1, 2$. Група G містить підгрупи порядку 12, які ненільпотентні і не нормальні в G , тому G не може бути $H(\bar{N})$ -групою. Звідси клас $H(\bar{N})$ -груп не замкнений за прямими добутками.

Нехай M — перетин всіх ненільпотентних підгруп із G . Тоді $M \triangleleft G$ і власні підгрупи з M нільпотентні. Нехай X_α — система всіх ненільпотентних підгруп із G , $\alpha \in A$. Тоді $X_\alpha \triangleleft G$, G/X_α — дедекіндова група.

За теоремою Ремака G/M — підгрупа декартового добутку груп G/X_α , що є дедекіндовими групами. Властивості 1) і 2) доведені. Лема доведена.

Лема 1.4.4. Нехай G — $H(\bar{N})$ -група, яка містить скінченну підгрупу Міллера Морено $M = P\Lambda Q$ з неінваріантною словською q -підгрупою

Q , і інваріантною p -підгрупою P , p, q — різні прості числа. Тоді $G = P\lambda C$, де $C = S \cdot \langle a \rangle$, $C_C(P) = S \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$. Для довільного $k \in Z$ a^k індукує на P тотожний або незвідний автоморфізм, $C = H(\bar{S})$ -група.

Доведення. Нехай G і $M = P\lambda Q$ задовольняють умовам леми, тоді $M \triangleleft G$. За лемою 1.3.2 $G = P\lambda C$, де $C = N_G(Q)$. Нехай $S = C_C(P)$. Зрозуміло, що $S \triangleleft G$. Оскільки $P \not\subset Z(M)$ і $C_G(P) = P \times S$, то $1 < |C : S| < \infty$. Нехай $g \in C \setminus S$. Покладемо $F = P\lambda \langle g \rangle$. За лемою 1.4.3 $G/M \cong C/Q$ — дедекіндова група. Очевидно, що $C \not\triangleleft G$, тоді за означенням 1.4.2 C — нільпотентна група. Оскільки, $Q \triangleleft C$, то в C існує нільпотентна підгрупа $C_1 = Q \cdot \langle g \rangle$, а в G існує ненільпотентна підгрупа $F_1 = P\lambda C_1$. Нехай $M_1 = \Phi(Q) \cdot \langle g \rangle$. За твердженням 1.1.1 $\Phi(Q) \subset Z(M)$. Ясно, що $F \subset F_1$, $M \subset F_1$. Покажемо, що P — мінімальний нормальний дільник із F , тобто елемент g індукує на P незвідний автоморфізм. Нехай це не так. Тоді $P \supset P_1 \supset 1$, $P_1 \triangleleft F$, $[P_1, \langle g \rangle] \subset P_1$. За попереднім $[P_1, M_1] \subset P_1$ і в G існує підгрупа $P_1\lambda M_1 = N_1$. Якщо N_1 — ненільпотентна група, то $N_1 \triangleleft G$, $P \cap N_1 = P_1 \triangleleft G$, $P_1 \triangleleft M$, що неможливо. Звідси N_1 — нільпотентна група. Покладемо $N = P_1\lambda M_1$. Оскільки $M_1 \triangleleft C_1$, то $N \triangleleft F_1 = P\lambda C_1$. Так як $|C : S| < \infty$, то існує натуральне t , $t > 1$, для якого $g^t \in S$, тобто g^t індукує на P тотожний автоморфізм. Нехай r — просте число і $r|t$. Тоді в $\langle g \rangle$ знайдеться елемент d , такий, що $d \notin S$, а $d^r \in S$. Нехай $r \neq p$. Тоді $[P_1, \langle d \rangle] = 1$. За теоремою Машке $P = P_1 \times P_2$, $[P_2, \langle d \rangle] \subset P_2$. Якщо $P_2\lambda \langle d \rangle$ — нільпотентна група, то $[P_2, \langle d \rangle] = 1$, $d \in S$, що неможливо. Якщо $P_2\lambda \langle d \rangle$ — ненільпотентна група, то вона нормальна в G і нормальною в G буде P_2 , що теж неможливо. Звідси випливає, що t — степінь p і g індукує на P p -автоморфізми. Оскільки $[P, \Phi(Q)] = 1$, $M_1 = \Phi(Q) \cdot \langle g \rangle$, то M_1 індукує на P p -групу автоморфізмів і значить, N — нільпотентна група, нормальна в F_1 . Відомо, [72], що $[P, M_1]$ — характеристична підгрупа

із N . Звідси $[P, M_1] \triangleleft F_1$. В нільпотентній групі N $[P, M_1] = P_3 \subset P$. Оскільки P — мінімальний нормальний дільник в M , а значить і в F_1 , то $P_3 = 1$. Звідси $g \in S$, що суперечить вибору g . Одержана суперечність і показує, що g індукує на P незвідний автоморфізм.

Підгрупа C/S — скінченна підгрупа, що є неінваріантним множителем групи Фробеніуса $G/S = (P \times S/S)\lambda C/S$. Відомо, [42], що силовські p -підгрупи із C/S є циклічними групами, а силовська 2-підгрупа із C/S або циклічна, або містить підгрупу, ізоморфну групі кватерніонів. Якщо $C' \subset S$, то C/S абелева, а значить циклічна група. Покажемо, що $C' \subset S$. Дійсно, в протилежному випадку в $C \setminus S$ знайдеться елемент g , такий, що g індукує на P незвідний автоморфізм порядку 2, але тоді $|P| = p$; $G/C_G(P)$ — абелева група і $G' \subset C_G(P)$, а $C' \subset S$. Отже, C/S — циклічна група. Тоді $C = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $(s, p) = 1$, для будь-якого $k \in Z$ a^k індукує на P або тотожний, або незвідний автоморфізм.

Раніше було показано, що для будь-якого $g \in C \setminus S$ g індукує на P незвідний автоморфізм, а значить F — ненільпотентна підгрупа із G . Звідси $F \cap C = \langle g \rangle \triangleleft C$. За лемою 1.4.3 $G/F \cong C/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. За лемою 1.4.1 $C = H(S)$ -група. Лема доведена.

Лема 1.4.5. Нехай G — $H(\bar{N})$ -група, що містить скінченну підгрупу типу групи Шмідта, тоді $|G'| < \infty$, $G = P \cdot C$, де P — скінченна p -група, що може бути інваріантною силовською p -підгрупою скінченної групи Шмідта, C — нільпотентна група виду $C = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $(s, p) = 1$, $s > 1$, $P \cap C = P \cap S = \Phi(P)$, $S \triangleleft G$, для довільного $k \in Z$ $\Phi(P) a^k$ індукує на $P/\Phi(P)$ тотожний або незвідний автоморфізм.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і $M = P\lambda(b)$ — її скінченна підгрупа типу групи Шмідта. За означенням підгрупи M і за твердженням 1.1.4 M/Z — скінченна ненільпотентна підгрупа Міллера-Морено групи G/Z , де $Z = Z(M) \subset M \triangleleft G$. Оскільки M/Z — ненільпотентна група, то за замкнутістю класу $H(\bar{N})$ -груп за факторами прийдемо до

того, що G/Z — група, яка задовольняє умовам леми 1.4.4. За цією лемою $G/Z = \bar{P}\lambda\bar{C}$, де $\bar{P} = PZ/Z$, $\bar{C} = C/Z$ — нільпотентна неінваріантна $H(S/Z)$ -група, у якій $(C/Z)/(S/Z)$ — скінченна циклічна група порядку s , що є неінваріантним множником скінченної групи Фробеніуса $(G/Z)/(S/Z)$, а S/Z — централізатор P/Z в C/Z , $s > 1$, $(s, p) = 1$, $C/Z = S/Z \cdot \langle Za \rangle$. Для довільного цілого k суміжний клас $\langle Za^k \rangle$ індукує на $\bar{P}$ тотожний або незвідний автоморфізм, $C/Z \triangleleft G/Z$. Зрозуміло, що $G = P \cdot C$. Оскільки $M \triangleleft G$, $M' = P$, то $P \triangleleft G \cdot C \not\triangleleft G$ — нільпотентна група виду: $C = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $M \cap C = M \cap S = Z \subset Z(M)$. Так як $Z = Z(M)$, $M = P\lambda\langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle \subset Z$ і $M/\langle b^q \rangle$ — скінченна група Шмідта, то за твердженням 1.1.4 $P \cap Z = \Phi(P)$. З цього випливає, що $C \cap P = \Phi(P)$. Оскільки $Z = Z(M)$, то суміжний клас $\Phi(P)a^k$ індукує на $P/\Phi(P)$ тотожний або незвідний автоморфізм. Нехай $g \in C \setminus S$. Покладемо $N = P \cdot \langle g \rangle$. Тоді N — ненільпотентна група і за лемою 1.4.3 $N \triangleleft G$, G/N — дедекіндова група. Зрозуміло, що $N \cap C = \Phi(P) \cdot \langle g \rangle \triangleleft C$ і $C/\Phi(P) \cdot \langle g \rangle$ — дедекіндова група. З цього слідує, що $C/\Phi(P)$ — $H(C/\Phi(P))$ -група. За наслідком 1.4.1 $(C/\Phi(P))'$ — скінченна група. Оскільки $(G/\Phi(P))' = P/\Phi(P) \cdot (C/\Phi(P))'$ і $|\Phi(P)| < \infty$, то $|G'| < \infty$. Лема доведена.

Лема 1.4.6. Якщо $G = P \cdot C$ — група із леми 1.4.5, $C = S \cdot \langle a \rangle$, то $S = C_C(P)$.

Доведення. Нехай $G = P \cdot C$ — досліджувана група, $C = S \cdot \langle a \rangle$. Розглянемо можливі випадки: 1) C — періодична група; 2) C — неперіодична група.

Випадок 1. В цьому випадку $S = V \times S_1$, де V — силовська p -підгрупа із S , що співпадає з силовською p -підгрупою із C , а S_1 — її холловське доповнення в S . Оскільки C — нільпотентна група, $S \triangleleft G$, то $S_1 \triangleleft G$. Звідси $\{S_1, P\} = 1$.

Покладемо $P_0 = P \cdot V$. Тоді $P_0 \triangleleft G$ — силовська p -підгрупа із G . Оскільки $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$, то $b \notin S$, $b^q \in S$ і це порушуючи загальності можемо вважати, що b — q -елемент із G . При такому виборі в $M = P\lambda\langle b \rangle$ — група Шмідта і в G існує неїльпотентна підгрупа $N = P_0\lambda\langle b \rangle$, що містить M . Оскільки $V \triangleleft N$, $D \triangleleft N$, то $D = C_N(V)$. Зрозуміло, що $b \in D$, $D \cap M \triangleleft M$. За твердженням 1.1.4 єдиною нормальною підгрупою групи Шмідта M , що містить її неінваріантну силовську підгрупу, може бути сама M , тобто $D \supset M = P\lambda\langle b \rangle$. Зрозуміло, що $D \cap V = Z(V) \cap Z(P) = \Phi(P)$, $[P, V] = 1$, тобто $V \subset C_G(P)$. Отже, $S = C_G(P)$ і випадок 1) розглянутий.

Випадок 2. Оскільки $|G'| < \infty$, то G — FC-група. За твердженням 1.1.5 група G має центральну підгрупу без скруту, фактор-група по якій періодична. Нехай Z — перетин відзначеної групи в S . Оскільки $|C : S| < \infty$ і за вибором S/Z — періодична група, то періодичною буде і C/S . Зрозуміло, що $Z \triangleleft G$ і G/Z — група з випадку 1). За цим випадком $[s, p] \subset Z \cap G' = 1$, отже, $C_G(P) = S$. Лема доведена.

Теорема 1.4.3. Будь-яка $H(\bar{N})$ -група G , що містить підгрупи типу груп Шмідта, має вид $G = P \cdot C$, $P \triangleleft G$ — скінченна p -група із G' , що може бути нормальною силовською p -підгрупою скінченної групи Шмідта. $\Phi(P) \subset Z(G)$, p — просте число; $C = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$, $C_G(P) = S \triangleleft G$, $P \cap C = P \cap S = \Phi(P) \subset Z(G)$, для будь-якого $k \in Z$ суміжний клас $\langle \Phi(P) \cdot a^k \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ тотожний або невідний автоморфізм; єдина силовська p -підгрупа V нільпотентної групи C належить S і має вид: $U \cdot (\Phi(P) \cdot Q)$, $U \cap \Phi(P) \cdot Q = \Phi(P)$, $U/\Phi(P)$ — абелева група, $\Phi(P) \cdot Q$ — група одного з типів:

а) $Q = 1$,

б) Q — група кватерніонів, $Q \cap \Phi(P) = 1$, $V/\Phi(P)$ — елементарна абелева 2-група.

в) $Q = \langle d \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|d| = |b| = 4$, $[d, b] = d^2$, $\Phi(P) \cap Q = \langle d^2 b^2 \rangle$, $U/\Phi(P)$ —

елементарна абелева група,

г) $Q = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|d| = |b| = 4$, $[d, b] = c$, $|c| = 2$, $[c, b] \cong 1$, $\Phi(P) \cap Q = \langle cd^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle$, $U/\Phi(P)$ — елементарна абелева група, і група G ізоморфна групі одного з типів:

1) $C' \subset \Phi(P)$, $Q = 1$,

2) $C/\Phi(P)$ — гамільтонова група,

3) C — періодична група виду $V \times F \times R$, F — дедекіндова холловська група із G , $F \subset S$, $R = \langle a \rangle \cdot B$, $|a| = r^\alpha$, $R' = \langle a^{r^k} \rangle = \langle a \rangle \cap B \subset Z(G)$, $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$, $r^k > 2$, r — просте число, $S \cap R = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$, $k \geq m$, $m > 0$, підгрупа B розкладається в майже прямий добуток нормальних в G підгруп $R' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою R' , $|b_i| = r^{\beta_i}$, $k - m + 1 \geq \beta_i$, $\beta_i > 0$, $i \in I$, $|I| > 0$, при $r^{k-m+1} = 2$ $B' = 1$, $P\lambda\langle a^{r^{m-1}} \rangle$ — група Шмідта.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група, $M = P\lambda(b)$ — її підгрупа типу групи Шмідта. Покажемо, що G має вид: $G = P \cdot C$, $C = S \cdot \langle a \rangle$, де P , C , S , $\langle a \rangle$, $\Phi(P)$ задовольняють умовам загального типу групи G теореми окрім V . При $|M| < \infty$ всі ці умови випливають із лем 1.4.5 і 1.4.6.

Нехай $|M| = \infty$. Тоді $Z(M) = \Phi(P) \times \langle b^q \rangle$, $|q| = \infty$. $Z(M)$ містить характеристичну підгрупу $\langle z \rangle$, що породжується p -ми степенями всіх його елементів. Зрозуміло, що $\langle z \rangle \triangleleft G$ і $G/\langle z \rangle = (P \times \langle z \rangle)/\langle z \rangle \cdot C/\langle z \rangle$ — $H(\bar{N})$ -група із скінченною підгрупою $M/\langle z \rangle$ типу групи Шмідта. Тоді за лемою 1.4.5 $C/\langle z \rangle = S/\langle z \rangle \cdot \langle \langle z \rangle \cdot a \rangle$, $S/\langle z \rangle \cap \langle \langle z \rangle \cdot a \rangle = \langle \langle z \rangle \cdot a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$,

$$C/\langle z \rangle \cap (P \times \langle z \rangle)/\langle z \rangle = s/\langle z \rangle \cap (P \times \langle z \rangle)/\langle z \rangle = \Phi((P \times \langle z \rangle)/\langle z \rangle).$$

Зрозуміло, що $P \triangleleft G = P \cdot C$, $C = S \cdot \langle a \rangle$, $M \cap C = Z$, $C \cap P = \Phi(P)$, $Z \triangleleft C$, $Z \subset S$. Зрозуміло, що $[S, P] \subset \langle z \rangle \subset S$, $[\langle z \rangle, P] = 1$. Оскільки $Z \subset Z(M)$ і для будь-якого $g \in C \setminus S$ суміжний клас $\langle Zg \rangle$ індукує на $P \cdot Z/Z$ незвідний автоморфізм, то $\langle \Phi(P) \cdot g \rangle$ індукує незвідний автоморфізм на $P/\Phi(P)$. Розглядаючи підгрупу $P \cdot \langle g \rangle$, так як і в лемі 1.4.5, можна

встановити, що $C/\Phi(P) — H(S/\Phi(P))$ -група. За теоремою 1.4.1 $C/\Phi(P) —$ неперіодична абелева група. Звідси $C' \subset \Phi(P)$, $z \in Z(C)$, $|G'| < \infty$. Оскільки $\Phi(P) \times \langle z \rangle / \langle z \rangle \subset Z(G) / \langle z \rangle$, то за лемою 1.4.5 і при умовах $|G'| < \infty$, $|Z| = \infty$ випливає, що $\Phi(P) \subset Z(G)$, $S = C_G(P)$, $V \subset S$, де $V —$ силовська p -підгрупа із C . Отже, і в цьому випадку всі умови загального виду групи G ми встановили. Для доведення необхідності лишилось встановити будову V і співвідношення для груп типів 1)-3) розглядуваної теореми. Якщо $C' \subset \Phi(P)$, то покладемо $Q = 1$, $U = V$. Одержимо, що $V/\Phi(V) —$ абелева група. Будова V встановлена і $G —$ група типу 1).

Нехай $C' \not\subset \Phi(P)$. Оскільки $C/\Phi(P) — H(S/\Phi(P))$ -група, $\Phi(P) \subset Z(G)$, то за теоремою 1.4.1 $C —$ періодична нільпотентна група. Розглянемо спочатку підгрупу V . Очевидно $V \subset S$, $V/\Phi(P) —$ або підгрупа гамільтонової групи $C/\Phi(P)$, або підгрупа із $S/\Phi(P)$ недедекіндової $H(S/\Phi(P))$ -групи $C/\Phi(P)$. За теоремою 1.4.2 в останньому випадку з умов $V/\Phi(P) —$ силовська підгрупа із $C/\Phi(P)$, $V/\Phi(P) \subset S/\Phi(P)$ маємо, що $V/\Phi(P) —$ дедекіндова група. Звідси $V/\Phi(P) —$ дедекіндова група, $\Phi(P) \subset Z(G)$. Тому при $G' \subset \Phi(P)$, як і раніше, покладемо $U = V$, $Q = 1$ і одержимо, що $V —$ група типу а) загального виду групи G .

Нехай $V' \not\subset \Phi(P)$. Тоді $V/\Phi(P) —$ гамільтонова група виду $V/\Phi(P) = U/\Phi(P) \times X/\Phi(P)$, де $X/\Phi(P) —$ група кватерніонів, а $U/\Phi(P) —$ елементарна абелева група. Звідси $V = U \cdot X$, $U \cap X = \Phi(P)$. З умови $\Phi(P) —$ центральна в G елементарна абелева 2-група і твердження 1.1.11 впливають типи б), в), г) для групи V загального виду групи G .

Якщо $C/\Phi(P) —$ гамільтонова група, то $G —$ група типу 2) теореми.

Нехай, нарешті, $C/\Phi(P) —$ негамільтонова група. За теоремою 1.4.2 $C/\Phi(P) = D/\Phi(P) \times R^*/\Phi(P)$, $S/\Phi(P) \supset D/\Phi(P) —$ дедекіндова група. Звідси $D = V \times F$, $F —$ дедекіндова хойловська підгрупа із G . За тією ж теоремою $R^* = \Phi(P) \times R$, де $R —$ силовська r -підгрупа із G , $S \cap R = S_1$

— власна підгрупа із R , r — просте число і R — недедекіндова $H(S_1)$ -група.

За теоремою 1.4.2 R має той же вид, що і в групах типу 3) розглядуваної теореми. Покладаючи $R = Q$ одержимо, що $s = r^m$, $P\lambda(a^{r^{m-1}})$ — група Шмідта і G — група типу 3) теореми. Всі випадки розглянуті, необхідність доведена.

Достатність. Нехай група $G = P \cdot C$ має вид групи із розглядуваної теореми і є групою одного із її трьох типів. Покажемо, що G — $H(\bar{N})$ -група, що містить підгрупу M типу групи Шмідта. Оскільки $C = S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$, то існує таке просте число q і такий елемент $b \in C \setminus S$, що $|S \cdot b| = q$. За загальним видом групи G суміжний клас $\langle \Phi(P) \cdot g \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм порядку q , q — просте число, відмінне від p . Зрозуміло, що $q|s$, $(s, p) = 1$. Тому можна вважати, що b — або q -елемент, або $|b| = \infty$.

Покладемо $M = P\lambda(b)$. Оскільки $\langle \Phi(P) \cdot b \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм порядку q , то M — ненільпотентна група і $b^q \in M$. За твердженням 1.1.4 можна вважати, що $M/\langle b^q \rangle$ — скінченна група Шмідта. І за означенням 1.4.3 M — група типу групи Шмідта, G — ненільпотентна група.

Нехай X — будь-яка ненільпотентна підгрупа із G . Покажемо, що $X \triangleleft G$. Покажемо спочатку, що $P \subset X$. Покладемо $P_1 = P \cap X$, тоді $P_1 \triangleleft X$. Нехай $P_1 \subset \Phi(P)$. Тоді із нільпотентності G/P і умов $\Phi(P) \subset Z(G)$, X/P_1 — нільпотентна група впливає, що X — нільпотентна група. Тому, не порушуючи загальності можна вважати, що $\Phi(P) \subset P_1$.

Покладемо $F = P \cdot X$. Тоді із умов $P_1 \triangleleft P$, $P_1 \triangleleft X$ впливає, що $P_1 \triangleleft F$. Зрозуміло, що $X \not\subset P \cdot S$ — нільпотентна група. Тоді X містить елемент $g = ca^t$, де $c \in P \cdot S$, $g \in G \setminus P \cdot S$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $g \in C \setminus S$ і $|Sg| = q$, $q|s$. За умовами загального виду G маємо, що суміжний клас $\langle \Phi(P) \cdot g \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм. Звідси $P_1/\Phi(P) = P/\Phi(P)$, тобто $P_1 = P$ і $P \subset X$. Зрозуміло,

що $\Phi(P) \subset X$, $C/\Phi(P) — H(S/\Phi(P))$ -група, $\langle \Phi(P) \cdot g \rangle \not\subset S/\Phi(P)$. За ле-
мою 1.4.1 $\langle \Phi(P) \cdot g \rangle \triangleleft C/\Phi(P)$ і $C/\Phi(P)/\langle \Phi(P) \cdot g \rangle$. Звідси $\Phi(P) \cdot \langle g \rangle \triangleleft G$ і
 $C/\Phi(P) \cdot \langle g \rangle —$ дедекіндова група. Покладемо $X_1 = P \cdot \langle g \rangle$. Тоді $X_1 \triangleleft G$,
 $X_1 \subset X$, $G/X_1 —$ дедекіндова група. Звідси $X \triangleleft G$. Достатність доведе-
на. Теорема доведена.

Глава 2

Метагамільтонові групи

2.1 Попередні результати

Означення 2.1.1 [53]. Група G з нормальними неабелевими підгрупами називається метагамільтоною або в нашому означенні $H(\bar{A})$ -групою.

Твердження 2.1.1 [119]. Нехай G — скінченна p -група із власною неабелевою підгрупою. Тоді G має більше однієї підгрупи Міллера–Морено.

Твердження 2.1.2 [119]. Нехай G — скінченна метагамільтонова 2-група з елементарним комутантом. Тоді $G' \subset Z(G)$.

Твердження 2.1.3 [119]. Нехай G — скінченна метагамільтонова p -група. Тоді $\Phi(G') \subset Z(G)$.

Твердження 2.1.4 [119]. Нехай G — скінченна метагамільтонова 2-група і $G' \not\subset Z(G)$. Тоді G — метациклічна група.

Твердження 2.1.5 [119]. Комутант скінченної метагамільтонової p -групи міститься в будь-якій її неабелевій підгрупі.

Твердження 2.1.6 [119]. Нехай G — 2-породжена метагамільтонова p -група з циклічним комутантом порядку більше p . Тоді G — метаци-

клічна група.

Твердження 2.1.7 [119]. Комутант скінченної метагамільтонової p -групи є абелевою групою одного з типів: (p^δ) , $\delta \geq 0$; (p^δ, p) , $\delta > 0$; (p, p, p) .

Твердження 2.1.8 [119]. При $p > 2$ наступні групи і тільки вони є скінченними метагамільтоновими p -групами класу більше 2:

а) G' — метациклічна p -група, $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$;

б) $G' = \langle \pi \rangle \times \langle \tau \rangle \times \langle \sigma \rangle$, $\pi \in Z(G)$,

$$G = ((\langle x \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle) \cdot \langle y \rangle;$$

$x^p = \pi \tau^a$, $y^p = \pi^p \tau$, $[x, y] = \sigma$, $[x, \sigma] = \tau$, $[y, \sigma] = \pi$, σ, π, τ — елементи порядку p із G ;

в) $G' = \langle g \rangle \times \langle \sigma \rangle$, $g^p \neq 1$, $\sigma \notin Z(G)$, $G = M \lambda \langle \pi \rangle$, де $M = \langle a, b \rangle$ — метациклічна p -група, $[a, b] = g$, $[a, \sigma] = \tau$, $a^\pi = a\sigma$, $b^\sigma = b^\pi = b$, $\pi^\sigma = \pi$, $g^b = g\tau^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$;

г) $G' = \langle \sigma \rangle \times \langle \tau \rangle$:

1) $p = 3$, $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cdot \langle b \rangle$, $a^3 = \tau = b^b$, $b^b = a\sigma$, $\sigma^b = \sigma\tau$;

2) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle \sigma \rangle) \lambda \langle \pi \rangle$, $a^{p^n} = 1$, $n \geq 2$, $a^\sigma = a\tau$, $a^\pi = a\sigma$, $\sigma^\pi = \sigma\tau^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$, $\tau \in Z(G)$;

3) $G = ((\langle a \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle) \cdot \langle b \rangle$, $a^{p^n} = 1$, $n \geq 1$, $b^p = \tau^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$, $a^\sigma = a\tau$, $a^b = a\sigma$, $b^\sigma = b\tau^\delta$, $\delta = 0$ при $\epsilon = 1$.

Твердження 2.1.9 [93]. Локально ступінчасті метагамільтонові групи мають комутант порядку p^n , $n \geq 0$, p — просте число.

Лема 2.1.1. Клас метагамільтонових груп замкнений за підгрупами, фактор-групами і не є замкнений за прямими добутками. В метагамільтоновій групі G справедливі твердження:

1) будь-яка неабелева підгрупа X із G нормальна в G і G/X — декіндова група;

2) будь-які два непереставні елементи із G породжують неабелеву підгрупу, що містить нормальну в G підгрупу M з абелевими власними підгрупами, G/M — група у якій комутант є центральною елементарною абелевою 2-групою.

Доведення леми майже в точності співпадає з доведенням леми 1.4.3.

Наслідок 2.1.1. Всі групи Міллера–Морено є метагамільтоновими групами.

Наслідок 2.1.2. Локально ступінчаті метагамільтонові групи є FC -групами, мають скінчений примарний комутант і таку центральну підгрупу Z одиничного порядку або без скруту, що G/Z — періодична метагамільтонова FC -група, комутант якої ізоморфний G' .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За твердженням 1.1.9. $|G'| = p^n$, а тому G — FC -група. За твердженням 1.1.5 з центрі G міститься підгрупа Z без скруту або порядку 1, для якої G/Z — періодична FC -група. Оскільки $G' \cap Z = 1$, то за лемою 2.1.1 G/Z — метагамільтонова група, комутант якої ізоморфний G' . Наслідок доведений.

Лема 2.1.2. Метагамільтонові групи Шмідта вичерпуються нескінченними групами Міллера–Морено та скінченними групами Шмідта виду $G = P_\lambda Q$, $P \triangleleft G$ — силовська p -підгрупа, $Q \ntriangleleft G$ — циклічна силовська q -підгрупа, p, q — різні прості числа одного з типів:

- 1) G — скінченна група Міллера–Морено, $\Phi(P) = 1$;
- 2) P — неабелева група порядку p^3 експоненти p , $G' = p$, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, $p > 3$;
- 3) $P = G'$ — група кватерніонів, $q = 3$, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 2.1.1 G містить нормальну підгрупу M з абелевими власними підгрупами і G/M — розв'язна група. Якщо $M = G$, то за означен-

ням груп Шмідта $|G'| > 1$ і G — неабелева група з абелевими власними підгрупами. Тому G або нескінченна група Міллера–Морено, або скінченна і, значить, група типу 1) наслідку.

Нехай M — власна підгрупа із G . Тоді за означенням груп Шмідта M — нільпотентна група з центральним комутантом G/M . Звідси G — розв'язна група. За наслідком 2.1.2 в $Z(G)$ існує підгрупа Z , така що $Z \cap G' = 1$, G/Z — періодична FC -група із скінченим примарним комутантом. Очевидно, що G/Z — нільпотентна група, тому вона містить скінченну підгрупу Шмідта S/Z і $S = G$. Звідси G' співпадає з інваріантною силовською p -підгрупою скінченної групи Шмідта G/Z , $|G'| = p^n$. За твердженням 1.1.4 в G існує елемент b , для якого нільпотентною буде підгрупа $G'\lambda(b)$ і b індукує на G' автоморфізм порядку q , q — просте число відмінне від p . Звідси при $|b| = \infty$ в G знайдеться власна нільпотентна підгрупа $G'\lambda(b')$, r — просте число відмінне від p і q , що неможливо. Отже, $G = G'\lambda(b)$ — скінченна група Шмідта. За твердженням 1.1.4 $G' = P$ — силовська p -підгрупа із G , а $\langle b \rangle$ — силовська q -підгрупа із G , $\Phi(P) \times \Phi(Q) = Z(G)$. Якщо $\Phi(P) = 1 = P'$, то G — скінченна група Міллера–Морено типу 1).

Нехай $|P'| > 1$, тоді $M \subset P$ і G/M — нільпотентна група. Оскільки $M < G$ і $M \not\subset \Phi(P)$, то за твердженням 1.1.4 P — група Міллера–Морено. За твердженням 1.1.1 P — 2-породжена група експоненти p або 4. Нехай $\exp P = p$. За твердженням 1.1.1 і 1.1.4 $|P| = p^3$, $|\Phi(P)| = p$ і $(\Phi(P)b)$ індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм порядку q . Оскільки P — неабелева група експоненти p , то $p > 2$. Елементарна абелева група порядку p^2 не має незвідних автоморфізмів простого порядку, тому $p > 3$ і G — група типу 2).

Нехай $\exp P = 4$. Тоді за твердженнями 1.1.1 і 1.1.4 P — група кватерніонів, $q = 3$, а G — група виду 3) цього наслідку.

Достатність. Якщо G — група Міллера–Морено, то за наслідком 2.1.1

та означеннями 2.1.1 та 1.1.3 G — метабільтонова група Шмідта. За твердженням 1.1.4 групи типу 2) та 3) є групами Шмідта. Покажемо, що вони метабільтонові.

Оскільки в групах Шмідта всяка власна підгрупа X нільпотентна, то $X = P_1 \times Q_1$, де $P_1 = X \cap P$, $Q_1 = X \cap Q$. Зрозуміло, що $Q'_1 = 1$. Якщо $|X'| > 1$, то $|P'_1| > 1$ і $P_1 = P = G' \subset X \triangleleft G$. Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 2.1.3. Нехай G — нільпотентна група з періодичним комутантом G' , $|G'| > 1$. Тоді G містить підгрупу $X = \langle c \rangle \cdot \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, де $[a, b] = c$, $[c, b] = [c, a] = 1$, $|c| = p$, $(\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle) \cap (\langle c \rangle \cdot \langle b \rangle) = \langle c \rangle$; при періодичності G X — p -група Міллера-Морено, при неперіодичності G $X = (\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|b| = \infty$, $|a| \in \{p^\alpha, \infty\}$, p — просте число.

Доведення. Нехай G задовольняє умові леми. Можливі випадки: 1) G — періодична група, 2) G — неперіодична група.

Випадок 1. В цьому випадку G — нільпотентна локально скінченна група, що містить скінченну нільпотентну підгрупу Міллера-Морено X , яка, очевидно, є групою одного з типів 1)–3) твердження 1.1.1. Для груп цих типів твердження розглядуваної леми очевидне.

Випадок 2. В цьому випадку в G знайдеться 2 непереставні елементи g_1 і g_2 , що породжують скінченно породжену нільпотентну підгрупу $Y = \langle g_1, g_2 \rangle$. Оскільки G -неабелева неперіодична група, то вона має нецентральні елементи нескінченного порядку. Тому можна вважати, що $|g_2| = \infty$. Відомо, що Y має скінченну періодичну частину T . За умовою леми $Y' \subset T$, Y/T — скінченно породжена абелева група без скруту. Зрозуміло, що $|Y'| > 1$. За твердженням 1.1.5 $Z(Y)$ містить підгрупу Z без скруту, для якої Y/Z — скінченна неабелева нільпотентна група, яка, очевидно, містить нільпотентну p -підгрупу Міллера-Морено M/Z .

Не порушуючи загальності можемо вважати, що $M = Y$, $Y/Z = \langle Zg_1, Zg_2 \rangle$. Звідси $|(Y/Z)'| = |Y'| = p$, p — просте число, $Y' = \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $\langle c \rangle \subset Z(Y)$. Оскільки $Y = \langle g_1, g_2 \rangle$ і $|g_2| = \infty$, то не порушуючи загальності можемо також вважати, що

$$Y/\langle c \rangle = \langle Ca \rangle \times \langle Cb \rangle,$$

де $|Cb| = \infty$, $|Ca| > 1$. Не порушуючи загальності можемо також вважати, що $|a| \in \{p^\alpha, \infty\}$. Ясно, що

$$Y = \langle c \rangle \cdot \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle,$$

$$(\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle) \cap (\langle c \rangle \cdot \langle b \rangle) = \langle c \rangle.$$

Покладемо $Y = X$ і одержимо шукану підгрупу. Лема доведена.

Теорема 2.1.1. Група G тоді і тільки тоді є нерозв'язною метагамільтоновою групою, коли вона задовольняє умовам:

1) будь-які два непереставні елементи із G породжують нескінченну неабелеву нормальну підгрупу із G ;

2) група G містить нескінченну нормальну в G підгрупу Міллера-Морено M , що належить будь-якій неабелевій підгрупі в G і G/M — дедекіндова група.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.2.1 G містить нормальну підгрупу M з абелевими власними підгрупами, і M міститься в будь-якій неабелевій підгрупі із G , G/M — розв'язна група. Якщо M — абелева або скінченна група Міллера-Морено, то із розв'язності M випливає розв'язність G . Звідси M — нескінченна підгрупа Міллера-Морено із G . За лемою 2.1.1 G/M — дедекіндова група. Твердження 2) доведено.

Оскільки два непереставні елементи із G породжують неабелеву підгрупу $X < G$, то $M < X$ і $|X| = \infty$. Твердження 1) доведено і

необхідність доведена.

Достатність. Нехай X — будь-яка неабелева підгрупа із G , тоді $M < X$, G/M — дедекіндова група, $X \triangleleft G$. Оскільки M — нескінченна група Міллера-Морено, що, як відомо, нерозв'язна, то G — нерозв'язна метагамільтонова група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2.1.3. Комутант довільної нільпотентної метагамільтонової групи належить будь-якій її неабелевій підгрупі.

Доведення. Нехай G — досліджувана метагамільтонова група. Тоді за твердженням 2.1.9 $|G'| = p^n$, p — просте число. Нехай X — довільна неабелева підгрупа із G . Покажемо, що $G' \subset X$. Нехай $Y = \langle a, b \rangle$, $Y \subset X$, $[a, b] \neq 1$. Покажемо, що $G' \subset Y$. Можливі випадки: 1) G — періодична група; 2) G — неперіодична група.

Випадок 1. В цьому випадку лише силовська p -підгрупа із G неабелева. Тому можна вважати, що Y — скінченна неабелева p -група. Оскільки $|G'| < \infty$, то в G існує скінченно породжена, а значить скінченна p -підгрупа Z , що містить G' і Y . При цьому $G' = Z'$. За лемою 2.1.1 і твердженням 2.1.5 $G' = Z' \subset Y \subset X$ і наслідок в цьому випадку доведений.

Випадок 2. За лемою 2.1.1 $Y \triangleleft G$, G/Y — дедекіндова група. Якщо G/Y — абелева група, то все доведено. Нехай G/Y — неабелева група. Тоді за твердження 1.1.3 G/Y — періодична група, а значить Y містить елементи нескінченного порядку. Із наслідку 2.1.2 випливає, що G містить центральну підгрупу без скруту Z , для якої G/Z задовольняє умовам випадку 1. Оскільки G/Y і G/Z — періодичні групи, то і G/Z_1 — періодична група, $Z_1 = Z \cap Y$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $Z_1 = Z$. За попереднім випадком $Y/Z \supset (G/Z)'$, а значить

$G' \subset Y \subset X$ і наслідок доведений.

Наслідок 2.1.4. Скінченна метагамільтонова p -група G з циклічним нецентральним комутантом є метациклічною групою з умовою $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$ і ізоморфна групі одного з типів:

- 1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $0 < \alpha - k - 1 = k < \alpha$, $\alpha - k \leq \beta$;
- 4) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^m} \rangle = \langle b^{p^n} \rangle,$$

$$b^{-1}ab = a^{1+p^k}, 0 < \alpha - k - 1 = k < m < \alpha < \beta;$$

- 5) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^4 = b^{2^{\beta-1}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді за твердженнями 2.1.4 і 2.1.8 G — метациклічна p -група, у якій за твердженням 2.1.2 $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$. Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ — метациклічна група одного з типів 1)–9) теореми 1.2.2. В групах типу 1) $G' \subset Z(G)$. В групах типу 8), 9) $\Phi(G') \not\subset Z(G)$, тому G може бути лише групою одного з типів 2)–7) згаданої теореми. При умові $G' \cap Z(G) = \Phi(G')$ в групах типу 1), 2), 6), 7) $|a| = 8$. Тому групи типу 2), 3) згаданої теореми будуть відповідно групами 2), 3) наслідку. Групи типів 6), 7) будуть групами типу 5) наслідку. Якщо група G одного з типів 4) або 5) теореми 1.2.2, то при $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$ маємо $0 < \alpha - k - 1 = k$ і G — групи типів 3), 4) наслідку відповідно. Необхідність доведена.

Достатність. В групах цих п'яти типів G' — центральна нециклічна підгрупа з умовою $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$. Нехай X — неабелева підгрупа із G , $\langle y \rangle = \langle a \rangle \cap X$. Тоді $\langle y \rangle \triangleleft X$ і $X/\langle y \rangle$ — циклічна група. Оскільки $|X'| > 1$, то $\langle y \rangle \not\subset Z(X)$, а значить $\langle y \rangle \not\subset Z(G)$. Так як $\Phi(G') \subset$

$Z(G), |G' : \Phi(G')| = p$, то $G' \subset \langle y \rangle \subset X \triangleleft G, G$ — метабільтова група. Достатність доведена. Наслідок доведений.

Наслідок 2.1.5. Комутант нерозв'язної метабільтової групи тоді і тільки тоді належить будь-якій її неабелевій підгрупі, коли він — нескінченна група Міллера-Морено.

Доведення. Необхідність. Якщо G — нерозв'язна метабільтова група, то за теоремою 2.1.1 G' містить нормальну в G нескінченну підгрупу Міллера-Морено M , що належить будь-якій неабелевій підгрупі із G і G/M — дедекіндова група. Оскільки $G' \subset M$, то $G' = M$. Необхідність доведена.

Достатність. Якщо G' — нескінченна група Міллера-Морено, то за тією ж теоремою перетин всіх неабелевих підгруп із G є нескінченною групою Міллера-Морено. Зрозуміло, що ця підгрупа не може бути власною підгрупою G' , а значить співпадає з G' . Звідси G' належить будь-якій неабелевій підгрупі із G . Достатність доведена. Наслідок доведений.

2.2 Нільпотентні групи

Теорема 2.2.1. Нільпотентні метабільтові групи вичерпуються групами типів

1) $G = P \rtimes C$, де P — елементарна абелева p -група порядку p^α , p — просте число, $\alpha > 0$; $C \cong S \cdot \langle a \rangle$, $C_G(P) \cong S \cong Z(G)$,

$$S \cap \langle a \rangle \cong \langle a^p \rangle,$$

$\alpha > 0$, $(s, p) = 1$, для довільного цілого k a^k індукує на P тотожний або невіддільний автоморфізм;

2) $G = P \rtimes C$, де P — силовська p -підгрупа із G порядку p^3 експоненти

$p, p > 3$ — просте число $G' = P$, $\Phi(P) \subset Z(G)$; $C = S \cdot \langle a \rangle$, $Z(G) \supset C_C(P) = S$ — періодична група,

$$S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle,$$

$s > 1$, для довільного цілого k $\langle \Phi(P) \cdot a^k \rangle$ індукує на $P/\Phi(P)$ тотожний або незвідний автоморфізм;

3) $G = P\lambda C$, де P — група кватерніонів, що співпадає з силовською 2-підгрупою із G , $G' = P$; $C = S \cdot \langle a \rangle$, $Z(G) = C_C(P) = S$ — періодична група,

$$S \cap \langle a \rangle = \langle a^3 \rangle,$$

$|a| = 3^b$; $P\lambda\langle a \rangle$ — група Шмідта;

4) G — група, у якій будь-які 2 непереставних елементи породжують нескінченну неабелеву підгрупу, що містить нормальну в G нескінченну групу Міллера-Морено M і G/M — дедекіндова група.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — нерозв'язна, то за теоремою 2.1.1 G — група типу 4). Нехай G — розв'язна група. Можливі випадки: 1) G — періодична група; 2) G — неперіодична група.

Випадок 1. Оскільки G в цьому випадку розв'язна періодична, а значить і локально скінченна неінгертентна група, то вона містить скінченну підгрупу Шмідта $M = P\lambda Q$, де P — нормальна силовська p -підгрупа із M , а Q — інваріантна силовська q -підгрупа із M . Зрозуміло, що $M \triangleleft G$. За лемою 1.3.1 $G = M \cdot D$, де $D = N_G(Q)$, $D \cap M = N_M(Q) \supset N_P(Q) = \Phi(P) \subset Z(M)$. Звідси $Q \subset D$ і $G = P \cdot D$, $P \cap D = \Phi(P)$. Оскільки P — нормальна силовська p -підгрупа з нормальної в G підгрупи M , то $P \triangleleft G$ і $P \subset G'$. Зрозуміло, що $N_M(Q) = \Phi(P) \times Q$ не може бути нормальною підгрупою із M і тоді $D \not\triangleleft G$. Звідси D — абелева група. Зрозуміло тоді, що M — група одного з типів 1)–3) леми 2.1.2.

Нехай M — група типу 1) згаданої леми. Тоді $\Phi(P) = 1$ і P — мінімальний нормальний дільник із M , а значить і в G . Тоді P — елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha > 0$, що співпадає з G' .

Покладемо $C_C(P) = S$. Тоді $S = Z(G)$. Оскільки G — неабелева група, то $|C : S| < \infty$. Нехай S_0/S — централізатор в G/S підгрупи $P \times S/S$. Тоді $S_0 \triangleleft G$ і $S_0 = S$. З цього випливає, що G/S — скінченна група Фробеніуса з неінваріантним абелевим множителем C/S . Відомо, [85], що тоді C/S — циклічна група, порядок якої не ділиться на p . Отже, $C = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$.

Нехай $g \in C \setminus S$. Якщо g індукує на P звідний автоморфізм, то в P знайдеться неодиначна власна підгрупа P_i , допустима відносно G . За теоремою Манке $P = P_1 \times P_2$ і в G існує підгрупа $N_i = P_i \lambda \langle g \rangle$, $i = 1, 2$. Оскільки $g \in C \setminus S$, то знайдеться i , для якого N_i — неабелева група. Тоді $N_i \triangleleft G$, $P \cap N_i = P_i \triangleleft G$, що неможливо. Отже, g індукує на P невідний автоморфізм. Звідси для будь-якого цілого k a^k індукує на P тотожний або невідний автоморфізм, і при $D = C G$ — група типу 1).

Нехай P — неабелева група. Покажемо, що вона силовська із G . Нехай це не так. Тоді в C знайдеться p -елемент g такий, що $g \notin P$, а $g^p \in P$. Покладемо $Y = P \cdot \langle g \rangle$. За лемою 2.1.2 $|P| = p^3$, а значить $|Y| = p^4$. За твердженням 2.1.1 Y містить підгрупу Міллера-Морено A відмінну від P . Зрозуміло, що $A \triangleleft G$ і $P \cap A = P_1 \triangleleft G$. Оскільки $|Y| = p^4$, то $|P_1| = p^2$. Тоді в нормальній силовській p -підгрупі P групи Шмідта M існує підгрупа P_1 з умовою: $\Phi(P) \subset P_1 \subset P$ і $P_1 \triangleleft M$, що суперечить твердженню 1.1.4. Отже, P — силовська p -підгрупа із G , що належить G' . Ясно, що $D = \Phi(P) \times C$, де C — холловське доповнення в D силовської p -підгрупи $\Phi(P)$ із C . Зрозуміло, що $G/\Phi(P)$ на попереднім буде групою типу 1) теорема і $\Phi(P) \subset Z(G)$. Для груп типу 1) теорема $D/\Phi(P) = S_1/\Phi(P) \cdot \langle \Phi(P) \cdot a \rangle$,

$$S_1/\Phi(P) \cap \langle \Phi(P) \cdot a \rangle = \langle \Phi(P) \cdot a^s \rangle.$$

$s > 1$, $a \in C$, для будь-якого цілого k $(\Phi(P)a^k)$ індукує на $P/\Phi(P)$ тотожний або незвідний автоморфізм. Нехай $S = S_1 \cap C$. Тоді $C_0 = S \cdot \langle a \rangle$, $S \subset Z(G)$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$. Якщо група M типу 2) леми 2.1.2, то $p > 3$ і G — група типу 2) теореми.

Нехай M — група типу 3) леми 2.1.2, тоді P — група кватерніонів, $|S : S_1| = |C : S|$, $|D : S_1| = |C : S| = 3$. Тому $|A| = 3^\beta$, $Q = \langle a \rangle$ і G — група типу 3) теореми. Необхідність з випадку 1 доведена.

Випадок 2. В цьому випадку за наслідком 2.1.2 G містить центральну підгрупу Z без скруту, для якої $G/Z = \bar{G}$ — група із випадку 1, тобто група одного з типів 1)–3) розглядуваної теореми. Звідси $\bar{G} = \bar{P}\bar{\Lambda}\bar{C}$, де $\bar{P} = P \times Z/Z$, $\bar{C} = C/Z$ і

$$\bar{C} = \bar{S} \cdot \langle \bar{a} \rangle,$$

$\bar{S} \subset Z(\bar{G})$; $\bar{S} \cap \langle \bar{a} \rangle = \langle \bar{a}^s \rangle$, $s > 1$, $(s, p) = 1$, $\bar{G}' = \bar{P}$. Зрозуміло, що з умови $G' \cap Z = 1$ випливає рівність $G = G' \Lambda C$. Покладемо $P = G'$. Одержимо, що $G = P \Lambda C$, $C' = 1$. Ясно, що $C = S \cdot \langle a \rangle$. Оскільки Z — абелева група без скруту, то в ній існує базисна підгрупа B , така що Z/B містить p -елементи, і G/B — група із випадку 1, в якій комутант не є силовською p -підгрупою. З цього випливає, що G/B не може бути групою ні типу 2), ні типу 3) розглядуваної теореми. Отже, G/B — група типу 1) теореми, а значить $G'' = 1$ і P — елементарна абелева група порядку p^α . Зрозуміло, що $S = Z(G)$ і для будь-якого елемента $g \in C \setminus S$ суміжний клас $\langle Zg \rangle$ індукує на $\bar{P}$ тотожний або незвідний автоморфізм. Оскільки $Z \subset Z(G)$, то для довільного цілого k a^k індукує на P тотожний або назвідний автоморфізм і G — група типу 1). Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1)–4) розглядуваної теореми. Покажемо, що G — ненільпотентна метагамільтонова група. Для групи типу 4) це доведено в теоремі 2.1.1.

Нехай G — група одного з типів 1)–3) теореми. Зрозуміло, що підгрупа $P\lambda\langle a \rangle$ ненільпотентна, тому ненільпотентною буде і G . Нехай X — неабелева підгрупа із G . Доведемо, що $G' = P \subset X$. Покладемо $N = P \cdot X$, $P_1 = P \cap X$. Зрозуміло, що $P_1 \triangleleft X$. Нехай спочатку $P' = 1$. Зрозуміло, що $N \not\subset P \times S = U$. Тоді X містить елемент $s = ua^k$, $a^k \notin S$, $u \in U$. Ясно, що s індукує на P той же автоморфізм, що і a^k . Оскільки $a^k \notin S$, то a^k індукує на P незвідний автоморфізм і P не містить неединичних власних підгруп, допустимих відносно S . Але тоді $P_1 = P = G' \subset X \triangleleft G$.

Нехай $P' \neq 1$. Тоді $\Phi(P) \subset Z(G)$ і $G/\Phi(P)$ — група типу 1) розглядуваної теореми. Ясно, що $\Phi(P) \subset X$. За попереднім випадком $X/\Phi(P) \subset P/\Phi(P)$. Але тоді $G' = P \subset X \triangleleft G$ і G — метагамільтонова група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2.2.1. Комутант G' ненільпотентної метагамільтонової групи G задовольняє умовам:

- 1) в розв'язній групі G G' — елементарна абелева p -група або неабелева група порядку p^3 ;
- 2) комутант розв'язної групи G належить будь-якій неабелевій підгрупі із G ;
- 3) комутант G' тоді і тільки тоді належить будь-якій неабелевій підгрупі із G , коли він абелевий або група Міллера–Морено.

Доведення. Умова 1) випливає з теореми 2.2.1 безпосередньо. Умова 2) доведена при доведенні достатності теореми 2.2.1, а умова 3) випливає із умов 1) і 2) та наслідку 2.1.5.

Зауваження 2.2.1. Групи, які вивчалися в [78] в точності співпадають зі скінченними групами типів 1)–3) теореми 2.2.1. Підкреслимо, що при

доведенні зазначеної теореми результати із [78] не використовувались.

Теорема 2.2.2. Комутант групи G тоді і тільки тоді належить будь-якій її неабелевій підгрупі, коли G — метагамільтонова група, яка в нерозв'язному випадку має комутант G' , що є нескінченною групою Міллера-Морено.

Комутант метагамільтонової групи G задовольняє одну із умов:

- 1) $G' \cong$ група порядку 1 або p , p — просте число;
- 2) G' — циклічна група порядку p^δ , p — просте число, $\delta > 1$, G — нільпотентна група $\Phi(G') \subset Z(G)$;
- 3) G' — скінченна абелева p -група типу (p^δ, p) , p — просте число, $\delta > 1$, G — нільпотентна група, $\Phi(G') \subset Z(G)$;
- 4) G' — елементарна абелева група порядку p^2 , p — просте число, G — нільпотентна група, при $p = 2$ $G' \subset Z(G)$;
- 5) G' — елементарна абелева група порядку p^3 , p — просте число, G — нільпотентна група, при $p = 2$ $G' \subset Z(G)$;
- 6) G' — елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha > 1$, p — просте число, G — ненільпотентна група;
- 7) G' — неабелева група порядку p^3 експоненти p ; $p > 3$, p — просте число, G — періодична ненільпотентна група, P — силовська p -підгрупа із G ;
- 8) G' — група кватерніонів, що є силовською 2-підгрупою із G , G — періодична ненільпотентна група;
- 9) G' — нескінченна група, що містить нескінченну нормальну в G підгрупу Міллера-Морено індексу 1 або 2 в G' , G — нерозв'язна група.

Доведення. Доведемо спочатку першу частину теореми.

Необхідність. Якщо G' належить будь-якій неабелевій підгрупі із G , то

очевидно, що G — метабільтонова група.

Достатність. Нехай G — розв'язна метабільтонова група. Тоді G' належить будь-якій неабелевій підгрупі із G для нільпотентних груп за наслідком 2.1.3, а для ненільпотентних за наслідком 2.2.1. Для нерозв'язних груп це твердження впливає за тим же наслідком 2.2.1. Перша частина теореми доведена.

Нехай G — метабільтонова група, G' — її комутант. Якщо G — ненільпотентна група, то за теоремою 2.2.1 G' задовольняє одну із умов 1) або 6)–9) розглядуваної теореми. Нехай G — нільпотентна група. Тоді за твердженням 2.1.9 $|G'| = p^n$, p — просте число. При $n < 2$ G' задовольняє умову 1). Нехай $n > 1$. Оскільки $|G'| < \infty$, то в G існує скінченно породжена нільпотентна метабільтонова підгрупа X , для якої $X' = G'$. Підгрупу X можна вибрати так, що вона містить довільний елемент $g \in G$. За наслідком 2.1.2 X містить центральну підгрупу Z без скруту або порядку 1, для якої X/Z — періодична група. Оскільки X — нільпотентна скінченно породжена група, то

$$X/Z = P/Z \times D/Z,$$

де P/Z — силовська p -підгрупа з X/Z , D/Z — її холловське доповнення в X/Z . За вибором Z маємо $Z \cap X' = Z \cap G' = 1$, $X' = G'$, $|G'| = p^n$. З цього випливає, що комутант X/Z ізоморфний G' співпадає з комутантом P/Z — скінченна метабільтонова p -група. За твердженням 2.1.7 комутант P/Z є одного із типів: (p^δ) , $\delta > 1$; (p^δ, p) , $\delta > 1$; (p, p) ; (p, p, p) . Якщо G' має тип (p^δ) та (p^δ, p) , то G' задовольняє умовам 2) та 3) розглядуваної теореми відповідно. Якщо G' має тип (p, p) або (p, p, p) , то при $p > 2$ G' задовольняє умові 4) та 5) розглядуваної теореми відповідно. Нехай $p = 2$ і G' має тип $(2, 2)$ або $(2, 2, 2)$. Тоді комутант P/Z , що співпадає з $X' \times Z/Z$ за твердженням 2.1.2 належить центру X/Z . Звідси $[X', X] = [G', X] = X' \cap Z = G' \cap Z = 1$. З цього і вибору елемента g випливає, що $G' \subset Z(G)$ і при $p = 2$ G' задовольняє умовам 4), 5) цієї

теореми.

Точно так можна показати, що при умовах 2) та 3) розглядуваної теореми $\Phi(G') \subset Z(G)$. Теорема доведена.

Теорема 2.2.3. Комутант G' довільної групи G тоді і тільки тоді співпадає з комутантом будь-якої неабелевої підгрупи із G , коли G — метагамільтонова група одного із типів:

- 1) G — група з комутантом порядку 1 або p , p — просте число;
- 2) $G = P\lambda C$ — група типу 1) теореми 2.2.1;
- 3) G — група, у якій комутант G' є нескінченна група Міллера-Морено.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Ясно, що G — метагамільтонова група. Якщо G нерозв'язна, то за наслідком 2.2.1 G — група типу 3) теореми.

Нехай G — розв'язна група. Зрозуміло, що $G'' = 1$. Якщо G — ненільпотентна група, то вона може бути тільки групою типу 1) теореми 2.2.1, а значить, групою типу 2) розглядуваної теореми.

Нехай G — нільпотентна група. Як і раніше, $|G'| = p^n$. При $n < 2$ G — група типу 1) теореми. Нехай $n > 1$. За лемою 2.1.3 в G існує підгрупа X з комутантом порядку p , що неможливо, оскільки $|G'| > |X'| = p$. Отже, G може бути тільки групою одного з типів 1)–3) розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1)–3), X — будь-яка неабелева підгрупа із G . В групах типу 1) очевидно, що $X' = G'$. Якщо G — група типу 3) розглядуваної теореми, то $G'' = G'$. Зрозуміло, що G — група типу 4) теореми 2.2.1 і за наслідком 2.2.1 $G' \subset X$. Із включень $X' \subset G'$, $G'' \subset G' \subset X'$ випливає, що $X' = G'$. Для групи типу 3) достатність доведена.

Нехай G — група типу 2) теореми. За теоремою 2.2.2 $G' \subset X$,

$X' \subset G'$, $X' \triangleleft G$. Оскільки $|X'| > 1$, то $X' \triangleleft G$. Для груп типу 2) G' — мінімальний нормальний дільник із G_i . Тому $X' = G'$. Достатність доведена. Теорема доведена.

2.3 Групи з циклічним комутантом

Твердження 2.3.1 [119]. Скінченні метагамільтонові групи з нецентральним циклічним комутантом вичерпуються метациклічними p -групами G , для яких $\Phi(G') = Z(G) \cap G'$.

Лема 2.3.1. Нехай G — метагамільтонова p -група з комутантом порядку p^δ , $\delta > 1$, p — просте число. Тоді G має обмежену експоненту.

Доведення. Нехай G задовольняє умовам леми. Тоді G — розв'язна, а значить нільпотентна локально скінченна p -група. Якщо $|G| < \infty$, то все доведено. Нехай G — нескінченна група і має необмежену експоненту. Тоді в G існує скінченна p -група Міллера-Морено M порядку p^k і центральний елемент порядку p^k , $k > 2$. Покладемо $D = \langle c \rangle \cdot M$. За теоремою 2.2.2 $G' \subset M \subset D$, $c \in Z(D)$, $|D : \langle c \rangle| \leq p^k$. Зрозуміло, що

$$D' = \langle c \rangle' \cdot M' \cdot [\langle c \rangle, M] = M',$$

$$|D'| = |M'| = p.$$

Нехай $M' = \langle u \rangle$, $|u| = p$. Можливі випадки: 1) $\langle c \rangle \cap \langle u \rangle = 1$; 2) $\langle c \rangle \supset \langle u \rangle$.

Випадок 1. Оскільки $|c| > p \cdot |D : \langle c \rangle|$, то підгрупа $\langle \langle u \rangle \cdot c \rangle$ доповнюється в абелевій групі $D/\langle u \rangle$ і не порушуючи загальності можемо вважати, що $D = \langle c \rangle \times M$, $M = \langle x, y \rangle$,

$$\langle \langle u \rangle \cdot \langle x \rangle \rangle \cap \langle \langle u \rangle \cdot \langle y \rangle \rangle = \langle u \rangle.$$

В D існують неабелеві підгрупи

$$(\langle u \rangle \cdot \langle x \rangle) \lambda \langle c \cdot y \rangle$$

$$(\langle u \rangle \cdot \langle y \rangle) \lambda \langle c \cdot x \rangle,$$

які містять за теоремою 2.2.2 G' і мають перетин, що співпадає з

$$(\langle u \rangle \cdot \langle x \rangle) \cap (\langle u \rangle \cdot \langle y \rangle) = \langle u \rangle.$$

Звідси $G' \subset \langle u \rangle$, $|G'| \leq p$, що неможливо. Випадок 1 неможливий.

Випадок 2. В цьому випадку $M = \langle x, y \rangle$, D — майже прямий добуток підгруп $\langle c \rangle \cdot \langle x \rangle$ і $\langle c \rangle \cdot \langle y \rangle$ з об'єднаною підгрупою $\langle c \rangle$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що

$$\langle c \rangle \cdot \langle x \rangle = \langle c \rangle \times \langle x \rangle,$$

$$\langle c \rangle \cdot \langle y \rangle = \langle c \rangle \times \langle y \rangle,$$

$$[x, y] = u.$$

Нехай $|x| = p^\alpha$, $|y| = p^\beta$. Тоді в $\langle c \rangle$ знайдуться елементи z_1, z_2 такі, що $|z_1| = p^{\alpha+1}$, $|z_2| = p^{\beta+2}$. Покладемо $g_1 = z_1 x$, $g_2 = z_2 y$. Тоді $g_1^{p^\alpha} = u$, $g_2^{p^\beta} = u$. В G існують неабелеві підгрупи $M_1 = \langle g_1 \rangle \lambda \langle y \rangle$ і $M_2 = \langle g_2 \rangle \lambda \langle x \rangle$. За теоремою 2.2.2 $G' \subset M \cap M_1 \cap M_2 = \langle u \rangle$. Знову $G' \subset \langle u \rangle$, $|G'| \leq p$, що неможливо. Обидва випадки неможливі, отже, G має обмежену експоненту. Лема доведена.

Лема 2.3.2. Метагамільтонові p -групи з нецентральним циклічним комутантом вичерпуються метациклічними групами, у яких $G' \cap Z(G) = \Phi(G)$, тобто групами типів наслідку 2.1.4.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — скінченна p -група, то твердження випливає з наслідку 2.1.4. За лемою 2.3.1 G — група обмеженої експоненти. Оскільки G має циклічний комутант, то вона має елементи a і b , для яких $\langle [a, b] \rangle = G'$. Якщо припустити, що G — нескінченна група, то через обмеженість її експоненти G/G' — прямий добуток нескінченного числа неодиначних циклічних p -груп.

Звідси в G буде існувати скінченна підгрупа X , що містить елементи a та b , довільний елемент $g \in G$ і не породжується ніякими своїми двома елементами. Звідси $X' = G'$. За довільністю g $X' \not\subset Z(X)$ і за лемою 2.1.1 X — метабільтова група, що задовольняє умові розглядуваної леми.

Зрозуміло, що X не може бути метациклічною групою, але це суперечить попередньому. Ця суперечність завершує доведення леми. Лема доведена.

Теорема 2.3.1. Метациклічні метабільтові групи мають вид:

$$G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle,$$

$$b^{-1}ab = a^r,$$

r — ціле число, $r \neq 0$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{\sigma} \rangle = \langle b^{\tau} \rangle \subset Z(G)$$

і вичерпуються групами типів:

$$1) G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle;$$

2) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = -1$, $|a| \in \{2p, 2^3\}$, підгрупа $\langle b \rangle$ містить підгрупу індексу 2;

3) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = 3$, $|a| = 8$, підгрупа $\langle b \rangle$ містить підгрупу індексу 2;

4) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$, p — просте число, $|a| = p^{\alpha}$, $0 \leq \alpha - k - 1 \leq k < \alpha$, підгрупа $\langle b \rangle$ містить підгрупу індексу $p^{\alpha-k}$;

5) $G = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $r = 1 + p^k$, $p^k > 2$, p — просте число $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\sigma = p^m$, $\tau = p^n$, $0 < \alpha - k - 1 \leq k < m < \alpha < \beta$, $|d| = p^m$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$;

6) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $r = -1$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $1 < \alpha < 4$, $1 < \beta$, $\sigma = 2^{\alpha-1}$, $\tau = 2^{\beta-1}$;

7) $G = P \times D$, D — скінченна абелева метациклічна група, P — метациклічна силовська p -підгрупа із G одного з типів 2)-6), p — просте число;

$$8) G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, |b| = \infty,$$

$$\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle d \rangle,$$

$[d, b] = 1$, $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$ — або група одного з типів 2)–4) з тими ж співвідношеннями для a_1 , b , що і для a та b в групах цих типів, або

$$[\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] = \langle a_1 \rangle,$$

$|a_1| = p > 2$ — просте число;

9) $G = A \lambda B$, $A = \langle u \rangle \times \langle v \rangle$, $|u| = p$ — просте число, $p > 2$, $|v| = p^\beta$, $\beta \geq 0$, A — силовська p -підгрупа із G , $B = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$ — скінченна абелева холловська підгрупа із G ,

$$[\langle v \rangle, B] = [\langle x \rangle, \langle y \rangle] = 1,$$

$$\langle a \rangle = \langle v \rangle \times \langle x \rangle,$$

$$\langle b \rangle = \langle v \rangle \times \langle y \rangle,$$

$$[\langle u \rangle, \langle y \rangle] = \langle v \rangle.$$

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група, тоді

$$G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle,$$

$b^{-1}ab = a^r$, r — ціле число, $r \neq 0$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^\sigma \rangle = \langle b^r \rangle \subset Z(G).$$

Зрозуміло, що G — група одного з типів 1)–12) теореми 1.2.1. Якщо $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ то вона типу 1). Нехай далі G — неабелева група. Тоді за теоремою 2.2.2 $|G'| = p^\delta$, $\delta > 0$, p — просте число, $|G'| < \langle a \rangle$ і $\Phi(G') \subset Z(G)$. З цього випливає, що $|a| < \infty$.

Зрозуміло, що G — група типу 2)–12) теореми 1.2.1. Нехай $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ — група типу 2) теореми 1.2.1. Якщо $|a| = 2^n$, то $n > 1$ і $G' \cap$

$Z(G) = a^{2^{\alpha-1}}$. Оскільки $G' = \langle a^2 \rangle$ то $\alpha - 1 \leq 2$. Звідси $|a| \in \{4, 8\}$ і G — група типу 2) розглядуваної теореми.

Нехай

$$\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle^* \times \langle d \rangle,$$

де $\langle a_1 \rangle$ — силовська 2-підгрупа із $\langle a \rangle$, $p \nmid |d|$. Тоді із рівності $r = -1$ випливає, що

$$[\langle d \rangle, \langle b \rangle] = \langle d \rangle, [\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] = \langle a_1^2 \rangle,$$

$|a_1| > 1$. За теоремою 2.2.2 G' — примарна група. Тому $\langle d \rangle$ — p -група, $p > 2$, $|a_1| = 2$, $\langle d \rangle \lambda \langle b \rangle$ — нільпотентна метагамільтонова група з абелевим комутантом, тому вона група типу 1) теореми 2.2.1 з якої випливає, що $|d| = p$. Отже, $|a| = p$ і G — група типу 2) розглядуваної теореми.

В групі типу 3) теореми 1.2.1 $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 2$,

$$Z(G) \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle,$$

$G' = \langle a^2 \rangle$. Тому $2 \geq \alpha - 1$, а значить $\alpha = 3$ і G — група типу 3) розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 4) або 5) теореми 1.2.1. Тоді $|a| = p^\alpha$,

$$Z(G) \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^{\alpha-k}} \rangle.$$

Звідси $\alpha - k - 1 \leq k$ і G — відповідно група типу 4) та 5) даної теореми.

Нехай G — група типу 6) або 7) теореми 1.2.1. Тоді $r = -1$, $|a| = 2^\alpha$ і, як і раніше, $\alpha < 4$, а G — група типу 6).

В групах типів 8) та 9) теореми 1.2.1 $\Phi(G') \not\subseteq Z(G)$, тому вони неметагамільтонові групи. Нехай G — група типу 10) теореми 1.2.1. Тоді G — скінченна нільпотентна метагамільтова група з комутантом порядку p^6 . Тоді $G = P \times D$, де P — силовська метагамільтонова метациклічна p -підгрупа із G , $|P'| > 1$. Ясно, що P — група одного з типів 2)-6), G — група типу 7) розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 11) теореми 1.2.1. Зрозуміло, що тільки для одного i в групах цього типу $[[\langle a_i \rangle, \langle b \rangle]] > 1$. Не порушуючи загальності

можемо вважати, що $||\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle|| > 1$. Тоді $|a_1| > 2$, для будь-якого $i > 1$ $[a_i, b] = 1$. Якщо $[\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] = \langle a_1 \rangle$, то $|a_1| = p$ — просте число, $p > 2$. В протилежному випадку $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$ — група одного з типів 2)–4) і завжди G — група типу 8) розглядуваної теореми.

Нехай, нарешті, G — група типу 12) теореми 1.2.1. Тоді

$$G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle,$$

$$\langle a \rangle = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$$

— холловська підгрупа із G , $u \in G'$, G — нелінійнопотентна група. Звідси G — група типу 1) теореми 2.2.1. Тоді $|u| = p$ — просте число, $p > 2$, $|v| = p^\beta$, $\beta \geq 0$. Отже B — скінченна абелева метациклічна група і

$$B = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle,$$

$$[\langle v \rangle, B] = 1,$$

$$[\langle u \rangle, \langle y \rangle] = \langle u \rangle,$$

$$\langle a \rangle = \langle u \rangle \times \langle x \rangle,$$

$$B = \langle v \rangle \times \langle y \rangle$$

і G — група типу 9) розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $b^{-1}ab = a^r$, r — ціле число, $r \neq 0$, і G — група одного з типів 1)–9) розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G — метациклічна група. Покажемо, що G — метагамільтонова група.

Якщо $|G'| \in \{1, p\}$, p — просте число, то твердження очевидне. Звідси групи G типу 1) та 9) метагамільтонові. Метагамільтоновими будуть також групи типу 2) при $|a| = 2p$, типу 4) при $k = \alpha - 1$, типу 6) при $\alpha = 2$ і типу 8) при $|a_1| = p$. За цими виключеннями групи типу 2)–8) нелінійнопотентні, мають циклічний комутант G' , $|G'| = p^\delta$, $\delta > 1$. $\Phi(G') \subset Z(G)$, $|a| = p^\alpha$. Нехай X — абелева підгрупа в групі G одного

з цих типів з вказаними виключеннями. Покладемо $Y = \langle a \rangle \cap X$. Тоді $Y \triangleleft X$ і X/Y — циклічна група. Оскільки $|X'| > 1$, то $Y \not\subseteq Z(X)$, але тоді $Y \not\subseteq Z(G) \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^{\alpha-k}} \rangle$. Звідси $Y \supset \langle a^{p^{\alpha-k-1}} \rangle \supset \langle a^{p^k} \rangle = G' \subset X \triangleleft G$ і G — метабільтова група. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2.3.1. Метациклічні метабільтові групи вказаних нижче класів вичерпуються групами деяких вказаних нижче номерами типів груп теореми 2.3.1 з їх додатковими обмеженнями:

- а) нільпотентні: типів 1); 2) $|a| \in \{4, 8\}$; 3)–7); 8) $[\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] \subset \langle a_1 \rangle$;
- б) нільпотентні з центральним комутантом: типів 1), 2) $|a| = 4$; 4), 5) $\alpha - k \leq k$; 6) $|a| = 4$; 7) P — група одного з вказаних раніше типів цього пункту; 8) $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$ — група одного з вказаних раніше типів цього пункту;
- в) нільпотентні з нецентральним комутантом: типів 2) $|a| = 8$; 3); 4), 5) $k = \alpha - k - 1$; 6) $|a| = 8$; 7) P — група одного з вказаних раніше типів цього пункту; 8) $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$ — група одного з вказаних раніше типів цього пункту;
- г) ненільпотентні групи: типів 8) $[\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] = \langle a_1 \rangle$; 9);
- д) неабелеві p -групи з центральним комутантом простого порядку: типів 4), 5) $1 < \alpha - k \leq k$.

Доведення. Наслідок встановлюється шляхом перевірки груп кожного з типів 1)–9) теореми 2.3.1 на їх належність чи неналежність до класів а), б), в), г), д).

Лема 2.3.3. Метабільтова p -група з центральним комутантом $G' = \langle c \rangle$, $|c| = p^\delta$, $\delta > 1$, p — просте число, має вид $G = F \times C$, де $F = A \lambda B$, $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = c = a^{p^k}$, $1 < \alpha - k \leq k < \alpha$, A — група одного з типів 4), 5) теореми 2.3.1, $B \times C$ — абелева p -група, експонента якої не перевищує $p^{2k-\alpha+1}$, і є групою одного з типів:

- 1) $G = A \times C$, $|B| = 1$;

2) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $B = \times_{\omega=1}^l \langle b_\omega \rangle$, $|b_\omega| = p^{\beta_\omega}$, $1 \leq \omega \leq l \leq \min((\alpha - k - 1), (\beta + k - \alpha))$, $[\langle b \rangle, B] = 1$, $[a, b_\omega] = a^{p^{k_\omega}}$, $k_{\omega-1} < k_\omega < \alpha$, $k_0 = k$,

$$\alpha - k_0 < \beta_0 < k_0 + k_1 - \alpha + 2,$$

$$\beta_0 = \beta,$$

$$\alpha - k_l \leq \beta_l < \beta_{l-1} + k_{l-1} - k_l,$$

для $\omega < l$ $\alpha - k_\omega < \beta_\omega < \beta_{\omega-1} + k_{\omega-1} - k_\omega$, $\langle b \rangle \times B = \langle b \rangle \cdot Z$, $Z \subset Z(G)$, $\exp(Z \times C) \leq p^{\beta+k-k_1}$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо G породжується двома елементами, то G — скінченна група, що задовольняє умовам твердження 2.1.6, за яким $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ — метациклічна група пункту д) наслідку 2.3.1, а значить група типу 4)–5) теореми 2.3.1 з умовами $1 < \alpha - k \leq k$, $[a, b] = a^{p^k} = c \in Z(G)$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$. З цього випливає, що G — група типу 1) леми при $|B| = 1 = |C|$.

Нехай G не породжується двома елементами. За лемою 2.3.1 експонента G обмежена, тому

$$G/\langle c \rangle = \times_{i \in I} X_i/\langle c \rangle,$$

$$X_i/\langle c \rangle = \langle \langle c \rangle \cdot x_i \rangle,$$

$$X_i = \langle c \rangle \cdot \langle x_i \rangle,$$

$$|x_i| = p^{\alpha_i}, \langle c \rangle \cap \langle x_i \rangle = \langle x_i^{p^{\beta_i}} \rangle,$$

$0 < \beta_i \leq \alpha_i$, $|I| > 2$. За твердженням 1.1.7 G — майже примий добуток X_i з об'єднаною підгрупою $\langle c \rangle$. Ясно, що існують такі $i, j \in I$, для яких $[[x_i, x_j]] = p^\delta$. Нехай $X_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$. Зрозуміло, що X_{ij} задовольняє умові леми і ізоморфна підгрупі A типу 1). Звідси, не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle x_i \rangle \supset \langle c \rangle$. Оскільки експонента G обмежена, то серед всіх підгруп X_{ij} можна вибрати підгрупу $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ з властивостями: $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = a^{p^k}$, $1 < \alpha - k \leq k < \alpha$,

$|a| = \max |x_i|, x_i \in X_{ij}$, елемент x_i належить такій підгрупі X_{ij} , в якій елемент $x_j = b$ має найбільший порядок. Зрозуміло, що

$$G/\langle c \rangle = A/\langle c \rangle \times \times_{i \in I} X_i/\langle c \rangle,$$

$$A/\langle c \rangle = \langle a \rangle/\langle c \rangle \times \langle c \rangle \cdot \langle b \rangle/\langle c \rangle,$$

$i \in I, |I| > 0$. Ясно, що

$$X_i \cap A = \langle x_i \rangle \cap \langle a \rangle = \langle x_i \rangle \cap \langle c \rangle = \langle x_i \rangle \cap \langle a^{p^k} \rangle = \langle x_i^{p^{k_i}} \rangle = \langle a^{p^{m_i}} \rangle,$$

$k \leq m_i \leq \alpha$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^m} \rangle = \langle b^{p^n} \rangle,$$

$k < m \leq \alpha$. Покладемо $G_i = A \cdot \langle x_i \rangle$, $A_i = \langle a \rangle \cdot \langle x_i \rangle$. Тоді за твердженням 1.1.7 G майже прямий добуток підгруп G_i з об'єднаною підгрупою A і підгруп A та A_i з об'єднаною підгрупою $\langle a \rangle$. Ясно, що $G_i = A \cdot A_i$. Покажемо, що $G_i = A\lambda\langle b_i \rangle$. Це твердження очевидне, якщо $\langle a \rangle$ доповнюється в A_i . Нехай $\langle a \rangle$ не доповнюється в A_i . Зрозуміло, що A_i — метациклічна група з комутантом

$$A'_i = \langle c_i \rangle \supset \langle c \rangle \supset \langle a \rangle,$$

$c_i \in Z(A_i)$. За теоремою 1.2.2 $m_i < \alpha < \alpha_i$. Нехай спочатку $c \in \langle x_i \rangle$. Тоді

$$\langle x_i^{p^k} \rangle \supset \langle x_i^{p^{k_i}} \rangle = \langle a^{p^k} \rangle = \langle c \rangle.$$

За вибором елементів a та b

$$\langle [a, x_i], [b, x_i] \rangle \subset \langle c^p \rangle = \langle x_i^{p^{k_i+1}} \rangle.$$

Покладемо $y_i = ax_i$. За твердженням 1.1.9

$$y_i^{p^k} = a^{p^k} \cdot x_i^{p^k} \cdot [a, x_i]^{-\frac{1}{2}p^k(p^k-1)}.$$

Оскільки

$$\langle a^{p^k} \rangle = \langle x_i^{p^{k_i}} \rangle = \langle c \rangle,$$

$k < \beta_i$, то

$$\langle y_i^{p^k} \rangle = \langle x_i^{p^k} \rangle$$

і $|y_i| = p^{\alpha_i}$. За тим же твердженням

$$\langle [y_i, b] \rangle = \langle c \rangle' \subset \langle y_i \rangle,$$

що суперечить вибору a . Ця суперечність показує, що $m_i > k$, а значить

$$\langle c^p \rangle \supset ((\langle a \rangle \cap \langle x_i \rangle) \cdot (\langle a \rangle \cap \langle b \rangle)) \cdot [A, \langle x_i \rangle].$$

Звідси в G існує підгрупа

$$\langle x_i \rangle \cdot \langle c^p \rangle \cdot \langle b \rangle,$$

що не містить $G' = \langle c \rangle$. За теоремою 2.2.2 остання підгрупа абелева, тому $[b, x_i] = 1$. Легко бачити, що A_i — група типу 4) або 5) теореми 1.2.2, для якої

$$A_i = \langle x_i \rangle \cdot \langle d_i \rangle,$$

$$\langle x_i \rangle \cap \langle d_i \rangle = 1,$$

$$d_i = a^t \cdot x_i^{p^{\alpha_i - \alpha}},$$

$(t, p) = 1$. Зрозуміло, що

$$\langle [d_i, b^{p^{\alpha-t-1}}] \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle.$$

Тоді в G існує неабелева підгрупа

$$(\langle a^{p^m} \rangle \cdot \langle b \rangle) \lambda \langle d \rangle \cdot \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle,$$

що не містить G' , а це суперечить теоремі 2.2.2. Ця суперечність показує, що вибрана підгрупа $\langle a \rangle$ завжди доповнюється в A_i і $G_i = A \lambda B_i$, $|B_i| = p^{\beta_i}$, $\beta_i > 0$.

Покладемо $b_0 = b$ і покажемо, що для будь-яких i, j $[b_i, b_j] = 1$. Нехай це не так. Тоді за твердженням 1.1.9 $\langle b_j \rangle \leq z$, $||[b_i, z]| = p$. Тоді знову в G існує неабелева підгрупа

$$\langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \cdot \langle b_i \rangle \cdot \langle z \rangle,$$

що не містить G' , а це неможливо. Звідси $[b_i, b_j] = [b, b_i] = 1$.

Нехай $b_i \in Z(G)$. Покажемо, що $\beta_i < 2k - \alpha + 2$. Нехай це не так: Тоді $\langle b_i \rangle \leq z$, $|z| = p^{2k - \alpha + 2}$. Покладемо $g = z \cdot a^{p^{\alpha - k - 1}}$. Тоді

$$\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^{k+1}} \rangle \supset \langle a^{p^m} \rangle.$$

Ясно, що

$$\langle [g, b] \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle.$$

Звідси в G існує неабелева підгрупа $\langle g \rangle \cdot \langle b \rangle$, що не містить G' . Суперечність.

Отже, $\beta_i < 2k - \alpha + 2$ для будь-якого $b_i \in Z(G)$. Нехай для будь-якого $i \in I$ $b_i \in Z(G)$. Покладемо

$$C = \times_{i \in I} \langle b_i \rangle,$$

$|B| = 1$. Тоді $G = A \times C$ і G — група типу 1) леми. Нехай далі існує $b_i \notin Z(G)$. Ясно, що в G існує абелева підгрупа $D = \times_{i \in I} \langle b_i \rangle$. Нехай C — максимальна центральна підгрупа із G , що належить D і доповнюється в D . Тоді $D = B \times C$. Оскільки $D \not\subseteq Z(G)$, то $B \not\subseteq Z(G)$ і B не містить доповнюваних в B центральних в G неединичних підгруп. Ясно, що $G = A\lambda D = F \times C$, де $F = A\lambda B$. Зрозуміло, що $B = \times_{\omega \in I} \langle b_\omega \rangle$, $|I| > 0$. Покажемо, що $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$. Нехай це не так. Тоді A — група типу 5) теореми 1.2.2 і $A = \langle a \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $k < m < \alpha < \beta$, $d = a^t b^{p^{\beta-\alpha}}$, $(t, p) = 1$. Оскільки $[\langle b \rangle, B] = 1$, то

$$\langle [a, b_\omega] \rangle = \langle [d, b_\omega] \rangle \neq 1.$$

Тоді $\langle b_\omega \rangle \leq z$,

$$\langle [d, z] \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle$$

і в G існує неабелева підгрупа

$$\langle \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d \rangle \rangle \lambda \langle z \rangle,$$

що не містить G' , а це неможливо. Отже, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$. За вибором B $[a, b_\omega] = a^{p^{k_\omega}}$, $k = k_0 \leq k_\omega < \alpha$. Не порушуючи загальності можна вважати, що I має таку впорядкованість, для якої $k_\omega \leq k_{\omega+1}$ для всіх $\omega \neq 0$.

Покладемо $D_\omega = \langle b_\omega \rangle \times \langle b_{\omega+1} \rangle$, $d_\omega = b_\omega^{p^{k_{\omega+1}-k_\omega}} \cdot b_{\omega+1}^{-1}$, $\beta_0 = \beta$. За твердженням 1.1.9 $[a, d_\omega] = 1$, $d_\omega \in Z(G)$. Зрозуміло, що D_ω доповнюється в B , і за вибором B $\langle d_\omega \rangle$ не може доповнюватися в D_ω , d_ω — породжуючий елемент із D_ω , $|d_\omega| \geq |b_{\omega+1}|$ і при

$$|d_\omega| = |b_{\omega+1}| \quad \langle d_\omega \rangle.$$

довповнюється в D_ω групою $\langle b_\omega \rangle$. Звідси $|d_\omega| > |b_{\omega+1}|$, а значить $\langle b_\omega \rangle \cap \langle d_\omega \rangle = \langle b_\omega^{\sigma} \rangle$, $\sigma < \beta_\omega$. Якщо тепер $|d_\omega| = |b_\omega|$, то $\langle d_\omega \rangle$ доповнюється в D_ω групою $\langle b_{\omega+1} \rangle$. Звідси $k_\omega < k_{\omega+1}$. Оскільки $k_0 < k_\omega < l$, то I — множина натуральних чисел від 1 до l , де $l \leq \alpha - k - 1$ і $B = \times_{\omega=1}^l \langle b_\omega \rangle$, $l \geq 1$.

Нехай $|d_\omega| = p^\tau$. Тоді $\beta_{\omega+1} < \tau < \beta_\omega$. При цьому $\sigma < \beta_\omega$, $\sigma = k_{\omega+1} - k_\omega + \beta_{\omega+1}$. Відомо, що b_i індукує на $\langle a \rangle$ автоморфізм порядку $p^{\alpha-k_\omega}$. Звідси $\alpha - k_\omega \leq \beta_\omega$, $Z(G) \cap \langle b_\omega \rangle = \langle b_\omega^{p^{\alpha-k_\omega}} \rangle$. Для всіх $\omega < l$ $\langle b_\omega^{p^\sigma} \rangle \subset Z(G)$, $\sigma < \beta_\omega$. Отже, $\alpha - k_\omega < \beta_\omega$. Оскільки

$$\sigma = \beta_{\omega+1} + k_{\omega+1} - k_\omega < \beta_\omega,$$

то $\beta_{\omega+1} < \beta_\omega + k_\omega - k_{\omega+1}$ для всіх $\omega < l$.

Покажемо, що $\beta < k + k_1 - \alpha + 2 = k_0 + k_1 - \alpha + 2$. Нехай це не так. Тоді в $\langle b \rangle$ існує елемент z , $|z| = p^{k_0+k-k-\alpha+2}$. Покладемо $g = za^{\alpha-k_1-1}$. Тоді $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^{k+1}} \rangle \supset \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle = [\langle g \rangle, \langle b_1 \rangle]$. З цього випливає, що в G існує неабелева підгрупа $\langle g \rangle \lambda \langle b_1 \rangle \not\subset G'$. Ця суперечність показує, що $\beta_0 < k_0 + k_1 - \alpha + 2$. Зрозуміло, що в B існує підгрупа

$$Z = \times_{\omega=0}^{l-1} \langle d_\omega \rangle,$$

$Z \subset Z(G)$, $B = \langle b \rangle Z$ і $\exp Z \leq |d_0| = p^{\beta_0+k-k_1}$. Оскільки

$$|\langle d_\omega \rangle \cap \langle b_\omega \rangle| \geq p,$$

то $l \leq \beta + k - \alpha$. Отже,

$$\alpha \leq \min((\alpha - k - 1), (\beta + k - \alpha)).$$

Покажемо, що $\exp C \leq p^{k_0 + \beta_0 - k_1}$. Нехай це не так. Тоді $C \not\leq z$, $|z| = p^{k_0 + \beta_0 - k_1 + 1} = p^{\beta + k - k_1 + 1}$. Тоді, замінюючи b_1 на $b_1 z$, одержимо, що $\langle d_1 \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, що неможливо. Отже, $\exp C \leq p^{\beta + k - k_1}$, G — група типу 2) леми. Лема доведена.

Лема 2.3.4. Нільпотентна неабелева неперіодична метабільтонова група G з комутантом непростого порядку має вид: $G = U \cdot D$, де $U = P\lambda\langle x \rangle$, P — абелева неодиначна силовська p -підгрупа із G обмеженої експоненти, що містить $G' = U'$, $|x| = \infty$; $D \subset Z(G)$, $U \cap D = \langle x^{p^\gamma} \rangle$, $\gamma > 0$, $D/\langle x^{p^\gamma} \rangle$ — періодична група без елементів порядку p , p — просте число.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За наслідком 2.1.2 $Z(G)$ містить підгрупу без скруту Z і G/Z — періодична нільпотентна метабільтонова група з комутантом порядку p^δ , $\delta > 0$, p — просте число. Звідси $G/Z = U/Z \times D/Z$, де U/Z — силовська p -підгрупа G/Z , а D/Z — її хойловське доповнення, що не містить елементів порядку p . Ясно, що $G = U \cdot D$, $U \triangleleft G$, $D \triangleleft G$, $G' \subset U$. Оскільки $Z \cap G' = 1$, $D \cap U = Z$, то $G' \cap D = 1$ і $D \subset Z(G)$. Звідси $G' = U'$. Зрозуміло, що силовська p -підгрупа P із G міститься в U і співпадає з періодичною частиною U , $G' \subset P \triangleleft G$. Очевидно, що U/Z задовольняє умові леми 2.3.1, а значить U/Z і P мають обмежені експоненти. За лемою 2.1.3 G містить підгрупу

$$X = \langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle \cdot \langle g_2 \rangle,$$

$$c \in Z(X), |c| = p, [g_1, g_2] = c,$$

$$(\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \cap (\langle c \rangle \cdot \langle g_2 \rangle) = \langle c \rangle$$

і при $|x| < \infty$ X — група Міллера-Морено. Нехай X — група Міллера-Морено із U . Тоді для будь-якого елемента $z \in Z$ $|z| = \infty$ і в G існують неабелеві підгрупи

$$X_1 = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \lambda \langle g_2 z \rangle,$$

$$X_2 = (\langle c \rangle \cdot \langle g_2 \rangle) \lambda \langle g_1 z \rangle.$$

За теоремою 2.2.2 $X_i \subset G'$, $i_c = 1, 2$, $G'_c \subset X_1 \cap X_2 = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \cap (\langle c \rangle \cdot \langle g_2 \rangle) = \langle c \rangle$. Звідси $|G'| \leq p$, що неможливо. Отже, $P' = 1$ і $X = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \lambda \langle g_2 \rangle$, $|g_2| = \infty$. Нехай $z = \langle g_2 \rangle \cap Z$. Тоді U/Z має неабелеву підгрупу $X/\langle z \rangle$ з комутантом порядку p і $G' \cong (U/\langle z \rangle)^p$, $|G'| > p$, $G' \subset T$ — періодична частина із X . Звідси $|T| \geq p^2$. З цього випливає, що $|g_1| < \infty$. Тому $g_1 \in P$, $X/\langle z \rangle$ — p -група Міллера-Морено групи $U/\langle z \rangle$; що задовольняє умовам лема. За попереднім $U/\langle z \rangle$ не може бути неперіодичною групою, але тоді $Z = \langle z \rangle$, U/P — локально циклічна група, $U/(P \times Z)$ — p -група обмеженої експоненти. тому U/P — циклічна група, $U = P\lambda\langle x \rangle$, $z = x^{p^r}$. Лема доведена.

Теорема 2.3.2. Метагамільтонові групи з циклічним комутантом вичерпуються групами з комутантом порядку 1 і p та групами, що мають вид $G = F \cdot C$, де $F = A\lambda B$, $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^\sigma \rangle = \langle b^r \rangle \subset Z(G),$$

$$|a| = p^\alpha,$$

$$[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^k} \rangle,$$

$0 < \alpha - k - 1 \leq k$, $C \subset Z(G)$, $F \cap C = A \cap C = \langle z \rangle$, $z = b^{p^\theta}$, $|b| \in \{p^\theta, \infty\}$, $C/\langle z \rangle$ — неперіодична група, і є групами одного з типів:

1) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|B| = 1$, $C/\langle z \rangle$ — фактор-група без інволюцій;

2) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $b^{-1}ab = a^3$, $|B| = 1$, $C/\langle z \rangle$ — фактор-група без інволюцій;

3) $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $p = 2$, $\beta > 1$, $a^4 = b^{2^{\beta-1}}$, $|B| = 1$, C — група без інволюцій;

4) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $k = \alpha - k - 1$, $p^k > 2$, $|B| = 1$, $C/\langle z \rangle$ не містить p -елементів;

5) $A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle d \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $|b| = p^\beta$, $\sigma = p^m$, $\tau = p^n$, $\alpha - k - 1 = p^k < m < \alpha < \beta$, $p^k > 2$, $|d| = p^m$, $|B| = 1$, C не містить p -елементів;

6) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $\alpha - k \leq k$, $|B| = 1$, експонента силовської p -підгрупи $C/\langle z \rangle$ не перевищує $p^{2k-\alpha+1}$;

7) $A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle d \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $\sigma = p^m$, $\tau = p^n$, $\alpha - k \leq k < m < \alpha < \beta$, $|d| = p^m$, $|B| = 1$, $\exp C \leq p^{2k-\alpha+1}$;

8) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $\alpha - k \leq k$, $|b| = p^\beta$; $B = \times_{\omega=1}^l \langle b_\omega \rangle$, $|b_\omega| = p^{\beta_\omega}$, $1 \leq \omega \leq l \leq \min((\alpha - k - 1), (\beta + k - \alpha))$, $[\langle b \rangle, B] = 1$, $[a, b_\omega] = a^{p^{k_\omega}}$, $k_{\omega-1} < k_\omega < \alpha$, $k_0 = k$, $\alpha - k_0 < \beta_0 < k_0 + k_1 - \alpha + 2$, $\beta_0 = \beta$, $\alpha - k_l \leq \beta_l < \beta_{l-1} + k_{l-1} - k_l$, для $\omega < l$ $\alpha - k_\omega < \beta_\omega < \beta_{\omega-1} + k_{\omega-1} - k_\omega$, $\langle b \rangle \times B = \langle b \rangle \cdot Z$, $Z \subset Z(G)$, експонента Z силовської p -підгрупи із C не перевищує $p^{\beta+k-k_1}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група, тоді $G' = \langle c \rangle$, $|c| = p^\delta \geq 0$. Якщо $\delta < 2$, то теорема очевидна. Нехай далі $\delta > 1$. За теоремою 2.2.2 $c^p \in Z(G)$ і G — нільпотентна група. Можливі 2 випадки: 1) G — періодична група; 2) G — неперіодична група.

Випадок 1. В цьому випадку $G = P \times D$, P — силовська p -підгрупа із G , $P' = G'$, D — її періодичне абелеве холловське доповнення. Можливі 2 випадки: 1.1) $c \notin Z(P)$, 1.2) $c \in Z(P)$. За лемою 2.3.2 P — метациклічна група, тоді P — група одного із типів 1)–5) наслідку 2.1.4. Покладаючи $C = D$, $A = P$, $|B| = 1$, $F = P$, одержимо, що G — група типу 1)–5) розглядуваної теореми.

Випадок 1.2. В цьому випадку P задовольняє умовам леми 2.3.3, а значить $P = F \times C_1$, $F = A \lambda B$, A, B, C_1 в точності співпадають з A, B, C в вгаданій лемі. Якщо P — група типу 2) вгаданої леми, то покладаючи $C = C_1 \times D$ одержимо групу типу 8) розглядуваної теореми. Нехай P — група типу 1) леми 2.3.3. Покладемо $C = C_1 \times D$, $|B| = 1$, тоді при $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ одержимо, що G — група типу 6), в протилежному випадку G —

група типу 7) розглядуваної теореми. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. В цьому випадку G задовольняє умовам леми 2.3.4. Тоді $G = U \cdot D$, де $U = P\lambda\langle x \rangle$, $P, \langle x \rangle, D$ мають властивості, як в групі G із леми 2.3.4. Покладемо $b = x, \beta = \gamma$ і $|B| = 1, U \cap D = \langle z \rangle, z = b^{p^2}$. Можливі 2 випадки: 2.1) $c \notin Z(F)$, 2.2) $c \in Z(F)$.

Випадок 2.1. Розглядаючи в цьому випадку $G/\langle z \rangle = U/\langle z \rangle \times D/\langle z \rangle$, прийдемо до випадку 1.1, в якому $U/\langle z \rangle$ — силовська p -підгрупа із $G/\langle z \rangle$. Тоді $D/\langle z \rangle$ не містить елементів порядку p . Покладемо $c = d, A = F = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, P = \langle a \rangle$ і одержимо, що G — група одного із типів 1), 2), 4) теореми.

Випадок 2.2. В цьому випадку $U/\langle z \rangle$ — силовська p -підгрупа із $G/\langle z \rangle$, яка задовольняє умовам леми 2.3.3. При цьому p^β може бути числом, що перевищує експоненту P . За лемою 2.1.3 в U існує неабелева підгрупа $X = (\langle c_1 \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \lambda \langle g_2 \rangle$, де $|g_2| = \infty, |c_1| = p, c_1 \in Z(X), g_1$ — p -елемент, $[g_1, g_2] = c_1$. Зрозуміло, що $G' \subset \langle c_1 \rangle \cdot \langle g_1 \rangle, \langle c \rangle \supset \langle c_1 \rangle$. Якщо $\langle c_1 \rangle \cap \langle g_1 \rangle = 1$, то при умові $|c| > p, c \notin X$. Отже, $c_1 \in \langle g_1 \rangle$, а значить і $c \in \langle g_1 \rangle$.

Покладемо $a = g_1$. Тоді $\langle a \rangle \triangleleft G$ і не порушуючи загальності, можемо вважати, що $X = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle = A$. За лемою 2.3.3

$$U/\langle z \rangle = A/\langle z \rangle \times V/\langle z \rangle,$$

де $V/\langle z \rangle$ — центральна в $U/\langle z \rangle$ p -група, експонента якої не перевищує $p^{2k-\alpha+1}$. Звідси $U = AV, A \cap V = \langle z \rangle$ і $V = C_1 \times \langle z \rangle$, де C_1 — силовська p -підгрупа із V . Зрозуміло, що $C_1 \subset Z(U)$ і $P = C_1 \times \langle a \rangle$.

Покладемо $C = C_1 \times D$. Тоді $C_1 \cap A = \langle z \rangle$, де $A/\langle z \rangle$ — група типу 1) леми 2.3.3, а значить A — група, ізоморфна групі A в групах типу 6) розглядуваної теореми. Оскільки $|B| = 1$, експонента силовської p -підгрупи із $C/\langle z \rangle$ не перевищує $p^{2k-\alpha+1}$, то G — група типу 6) розгля-

дуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Для груп з комутантом порядків 1 та p достатність очевидна. Для груп типу 1) – 5) вона доводиться так, як в теоремі 2.3.1, а для груп типу 6) – 8) перевіряється безпосередньо, але потребує об'ємних викладок. Достатність доведена. Теорема доведена.

2.4 Групи з абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$

Твердження 2.4.1 [119]. Скінченні метагамільтонові p -групи з нецентральним абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число, вичернюються групами типу: $G' = \langle g \rangle \times \langle \sigma \rangle$, $g^p \neq 1$, $\sigma \notin Z(G)$, $G = M\lambda\langle \pi \rangle$, де $M = \langle a, b \rangle$ — метациклічна p -група, $[a, b] = g$, $[a, \sigma] = \tau$, $a^\pi = a\sigma$, $b^\sigma = b^\pi = b$, $\pi^\sigma = \pi$, $g^b = g\tau^\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$, $p > 2$.

Лема 2.4.1. Комутант G' нільпотентної метагамільтонової неперіодичної групи G може бути скінченною абелевою p -групою типу (p^δ) , $\delta \geq 0$, або (p, p) , p — просте число.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За теоремою 2.2.2 G' — скінченна абелева група одного з типів: (p^δ) , $\delta \geq 0$; (p, p) ; (p^δ, p) , $\delta > 1$; (p, p, p) , p — просте число. Покажемо, що G' не може бути групою останніх 2-х типів. Дійсно, нехай $|G'| > p$. Тоді за лемою 2.3.4 $G = U \cdot D$, $D \subset Z(G)$, $U = P\lambda\langle x \rangle$, $|x| = \infty$, $G' \subset P$ — силовська підгрупа із G обмеженої експоненти, $U' = G'$. За лемою 2.1.3 $U \supset X = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle)\lambda\langle g_2 \rangle$, $|g_2| = \infty$, $[g_1, g_2] = c \in Z(X)$, $|c| = p$, $|g_1| \in \{p^m, \infty\}$. Нехай $T = P \cap X$. Оскільки U/P — нескінченна циклічна група, то такою буде і X/T . Звідси $X = T\lambda\langle g_2 \rangle$, $T = \langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle$, $|g_1| = p^m$, $m > 1$, $p > 0$. Нехай тепер G' має один з типів (p^δ, p) , $\delta > 1$, або (p, p, p) . Тоді G' містить елементарну абелеву групу N , $|N| = p^2$. За теоремою 2.2.2 $G' \subset T \subset X$. Звідси $T = \langle c \rangle \times \langle g_1 \rangle$. Зрозуміло, що T не містить елементарних абелевих

груп порядку p^3 , тому G' може мати вид: $G = \langle b \rangle \times \langle d \rangle$, $|b| = p^\delta$, $|d| = p$, $\delta > 1$. Зрозуміло, що $U' = G' = [P, \langle x \rangle]$. Тоді в P знайдеться елемент a , $|a| = p^\alpha$, для якого $[a, x_1] = b$, $x_1 \in \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $\langle a \rangle \cdot T = B \triangleleft G$ і в G існує підгрупа $N = B\lambda\langle x \rangle$. Тоді $B' = 1$, $G' \subset B$. Зрозуміло, що $\Phi(T) = \langle g_1^p \rangle \triangleleft G$. Не порушуючи загальності можемо вважати $[a, x] = b$. Оскільки $b^p \in \Phi(T)$, то $b^p \in \langle g_1^p \rangle$. Так як $[a, b] = 1$, то $[a^{p^{\delta-1}}, x] = b^{p^{\delta-1}} \neq 1$, $|b^{p^{\delta-1}}| = p$. В G існує неабелева підгрупа

$$(\langle a^{p^{\delta-1}} \rangle \cdot \langle b^{p^{\delta-1}} \rangle) \lambda \langle x \rangle \supset G'.$$

Звідси

$$\langle a^{p^{\delta-1}} \rangle \cdot \langle b^{p^{\delta-1}} \rangle = \langle a^{p^{\delta-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\delta-1}} \rangle \not\subset \langle b \rangle.$$

Оскільки $b \in G'$, то одержали суперечність, яка показує, що G' не може бути групою типу (p^δ, p) . Лема доведена.

Наслідок 2.4.1. Метагамільтонова група G з абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число, є періодичною нільпотентною групою.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді вона розв'язна, за теоремою 2.2.2 нільпотентна, а за лемою 2.4.1 періодична. Наслідок доведений.

Теорема 2.4.1. Метагамільтонові p -групи з абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число, мають вид $G = A\lambda\langle x \rangle$, де $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = a^r$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^r \rangle \cdot \langle b^l \rangle$, $0 < \alpha - k - 1 \leq k < \alpha$, $|x| = p > 2$ — просте число, і є групами типів:

$$1) A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, \alpha - k = \beta \leq k, [a, x] = b^{p^{\delta-1}}, [b, x] = 1;$$

$$2) A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle, \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1, \alpha - k - 1 = k < \alpha < \beta, r = p^{\alpha-k}, l = p^{\beta-k}, a^r = b^{sl}, (s, p) = 1, d = a^t b^{p^{\delta-\alpha}}, st + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}, |d| = p^{\alpha-k}, [a, x] = [d, x] = 1, [b, x] = d^{p^{\alpha-k-1}}.$$

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Зрозуміло, що G — ро-

зв'язна і нільпотентна p -група. Покажемо, що G — скінченна. Дійсно, оскільки $|G'| < \infty$, то в G існує скінченно породжена, а значить скінченна підгрупа X з нецентральною комутантом $X' = G'$. За твердженням 2.4.1 X породжується трьома елементами. Якщо G — скінченна група, то все зрозуміло.

Нехай G — нескінченна група. За лемою 2.3.1 експонента G обмежена, а значить G/G' — прямий добуток нескінченного числа неодиначних циклічних груп. Оскільки X — скінченно породжена група, то існує така підгрупа $Y \supset X$, для якої $G/G' = Y/G' \times D/G'$, $|D/G'| > 1$. Нехай $y \in D$, $|y| > 1$. Тоді в G існує підгрупа $Z = Y \cdot \langle y \rangle$, що є скінченною, задовольняє умовам теореми і не породжується ніякими своїми трьома елементами, а це суперечить твердженню 2.4.1. Ця суперечність показує, що $|G| < \infty$ і $p > 2$ — просте число.

За твердженням 2.4.1 $G = M\lambda(\pi)$, $|\pi| = p$, $M = \langle a, b \rangle$ — метациклічна метагамільтонова група, $[a, \pi] = \sigma$, $|\sigma| = p$, $\sigma \notin Z(M)$, $[b, \pi] = [\sigma, \pi] = [b, \sigma] = 1$, $[a, b] = g$, $|g| = p^\delta$ і $\sigma \notin Z(M)$, $[g, \pi] = 1$. Оскільки $p > 2$, то M може бути лише групою 4) або 5) теореми 1.2.2, а значить $M = \langle u \rangle \cdot \langle v \rangle$, $|u| = p^\alpha$, $|v| = p^\beta$; $[u, v] = u^{p^k}$, $0 < \alpha - k - 1 \leq k < \alpha$, $\langle u^{p^k} \rangle = \langle g \rangle$, $g^p \in Z(M)$,

$$\langle u \rangle \cap \langle v \rangle = \langle u^r \rangle = \langle v^l \rangle \subset Z(M)$$

і для згаданих груп типу 4) $r = p^\alpha$, $l = p^\beta$, а для груп типу 5) $r = p^m$, $l = p^n$, $k < m < \alpha < \beta$, $u^r = v^{ls}$, $(s, p) = 1$.

Покладемо в групах типу 4) $v = d$, $u = c$, $|c| = p^\psi$, $|d| = p^\xi$, $\psi = \alpha$, $\xi = \beta$, а в групах типу 5) $v = c$, $d = u^t v^{p^{\delta-\alpha}}$, $st + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-m}}$, $|d| = m = p^\xi$, $|c| = p^\psi$, $\psi = \beta$. Тоді в обох випадках $M = \langle c \rangle \cdot \langle d \rangle$, $|c| = p^\psi$, $|d| = p^\xi$, $\langle c \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Нехай $z \in \langle g \rangle$, $|z| = p$. Тоді $z \in Z(G)$. Оскільки $\sigma \notin Z(M)$, то $\langle c \rangle \cap \langle \sigma \rangle = 1$ і в групах типу 4) та 5) теореми 1.2.2 $\langle z \rangle \times \langle \sigma \rangle = N$ — характеристична підгрупа в M і $Z(M) = \langle c^\delta \rangle \times \langle d^\delta \rangle$, $\delta = \alpha - k$. Зрозуміло, що $N = \langle z \rangle \times \langle d^{p^{\delta-1}} \rangle$. Оскільки $\sigma \notin Z(M)$, то і $d^{p^{\delta-1}} \notin Z(M)$. З умов $\xi \geq \delta$ і $d^{p^{\delta-1}} \notin Z(M)$, $d^{p^\delta} \in Z(M)$ маємо.

що $\xi = \delta = \alpha - k$. Зрозуміло, що в G існує підгрупа $B = \langle g \rangle \lambda \langle d \rangle \supset G'$, $b^p = \langle g^p \rangle \lambda \langle d^p \rangle$ — характеристична підгрупа із B , що не містить G' . Тому в G існує підгрупа $\langle b^p \rangle \lambda \langle \pi \rangle$, яка буде абелевою за теоремою 2.2.2. Звідси $[d^p, \pi] = 1$. Оскільки $g^p \in Z(G)$, то за твердженням 1.1.9 $[g, d^p] = 1$ і $d^p \in Z(B \lambda \langle \pi \rangle)$, а так як $p > 2$, то $(\langle z \rangle \times \langle d \rangle) / \langle d^p \rangle$ співпадає з нижнім шаром $B / \langle d^p \rangle$, який нормальний в $(B \lambda \langle \pi \rangle) / \langle d^p \rangle$. З цього випливає, що $(\langle z \rangle \times \langle d \rangle) \triangleleft (B \lambda \langle \pi \rangle)$. Тепер в G існує підгрупа $Z = (\langle z \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle \pi \rangle$, що не містить G' . За теоремою 2.2.2 $[d, \pi] = 1$. Нехай $[c, \pi] = f$. Тоді $|f| > 1$, $[\pi, c] = f^{-1}$, $|f| = |f^{-1}|$. Оскільки $[G', \langle \pi \rangle] = 1$, то

$$[\pi^p, c] = [\pi, c]^p = 1 = (f^{-1})^p = f^p.$$

Отже, $|f| = p$.

Нехай $d^{p^{i-1}} = h$. Тоді $f = z^i h^j$, $0 \leq i < p$. Оскільки $\langle f \rangle \cap \langle z \rangle = 1$, $|f| = p$, то $0 < j < p$. Покладемо $\pi^{j_0} = x$. Тоді $[d, x] = 1$, $[c, x] = z^{ij_0} h$, де $jj_0 \equiv 1 \pmod{p}$, $|x| = p$. Покладемо $d_0 = g^{ij_0} d$. Оскільки $p > 2$, $g^p \in Z(G)$, $\xi > 1$, то $d_0^{p^{k-1}} = [c, x]$. За вибором $[d_0, x] = 1 = [d, x]$. Покладаючи $d_0 = d$, одержимо, що $[d, x] = 1$, $[c, x] = h$. Нехай $M = A$, тоді $G = A \lambda \langle x \rangle$.

Нехай A — група типу 4) теореми 1.2.2. Покладемо $b = v = d$, $a = c = u$. Тоді $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\beta = \alpha - k = \xi$, $\langle g \rangle = \langle a^{p^k} \rangle$, $[b, x] = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$. Нехай $g \notin Z(A)$. Покладемо $y = gx$. Тоді $[y, b] = [g, b] = z$, $z \in \langle y \rangle$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle b \rangle / \langle g \rangle$. Це суперечить теоремі 2.2.2. З цієї суперечності випливає, що $g \in Z(G)$ і G — група типу 1) теореми, $k \geq \alpha - k$.

Нехай A — група типу 5) теореми 1.2.2. Тоді $\xi = m = \alpha - k > k \geq \alpha - k - 1$. Звідси $k = \alpha - k - 1$. Покладаючи $b = v$, $a = u = c$, одержимо, що $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$,

$$A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle,$$

$[a, x] = [d, x] = 1$, $[b, x] = d^{p^{\alpha-k-1}}$ і G — група типу 2). Теорема доведена.

Лема 2.4.2. Метагамільтонова p -група з центральним комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число, має вид $G = F \times C$, де $F = A \lambda \langle x \rangle$,

$$A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle, |a| = p^\alpha, |b| = p^\beta,$$

$$\{ \langle a \rangle, \langle b \rangle \} = \langle a^{p^k} \rangle,$$

$$|x| = p^\gamma, \gamma > 0, 1 < \alpha - k \leq k < \alpha,$$

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^r \rangle = \langle b^l \rangle,$$

$\alpha - k < \beta$, C — абелева p -група, експонента якої не перевищує $p^{2k-\alpha+1}$,
і G — група одного з типів:

1) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$, $\beta \leq k+1$, $\gamma \leq \beta + k - \alpha + 1$,
 $\exp C \leq p^{\beta+k-\alpha}$;

2) $A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $r = p^{k+1}$, $l = p^{\beta-\alpha+k+1}$, $\alpha < \beta$, $a^r = b^{sl}$,
 $(s, p) = 1$, $d = a^t b^{p^{\beta-\alpha}}$, $ts + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-k-1}}$, $[a, x] = [d, x] = 1$, $[b, x] =$
 d^{p^k} , $|d| = p^{k+1}$, $\gamma \leq 2k - \alpha + 2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді $G' = C \times F \subset Z(G)$,
 $|C| = p^\delta$, $|F| = p$, $\delta > 1$. Зрозуміло, що група $C/\langle f \rangle = \bar{G}$ задовольняє
умові леми 2.3.3, за якою

$$\bar{G} = \bar{A} \lambda \bar{X} = \bar{A} \cdot \bar{D},$$

$\bar{X} = \bar{B} \times \bar{C}$, $\bar{D} = \bar{Z} \times \bar{C}$, $\bar{G}$ — група одного з типів 1), 2) згаданої
леми, а підгрупи $\bar{A} = \langle \bar{a} \rangle \cdot \langle \bar{b} \rangle$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{Z}$ задовольняють ті ж вимоги, що
 $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, B , C , Z в групах цих типів.

Нехай A — повний прообраз в G підгрупи $\bar{A}$. Тоді, не порушуючи
загальності, можемо вважати, що A -2-породжена група і $A' = \langle c \rangle$. За
твердженням 2.1.6

$$A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle,$$

$$|a| = p^\alpha, |b| = p^\beta, [a, b] = a^{p^k} = c, 1 < \alpha - k \leq k < \alpha,$$

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^r \rangle = \langle b^l \rangle$$

і A — група одного з типів 4) або 5) теореми 1.2.2. За теоремою 2.2.2
 $F \subset G' \subset A \triangleleft G$,

$$\langle f \rangle \cap \langle a \rangle = \langle c \rangle \cap \langle f \rangle = 1.$$

Нехай X — новий прообраз в G підгрупи $\bar{X}$. Тоді $G = A \cdot X$, $A \cap X = \langle f \rangle$. Оскільки

$$X \cap \langle c \rangle = \langle c \rangle \cap \langle f \rangle = 1,$$

то $X' = 1$. В групах типу 4) теореми 1.2.2 покладемо $u = a$, $d = b$, $|u| = p^\psi$, $|d| = p^\xi$, $\psi = \alpha$, $\xi = \beta$, а в групах типу 5) тієї ж теореми $u = b$, $|b| = p^\psi$, $\psi = \beta$, $d = a^l \cdot b^{p^{s-\alpha}}$, де $r = p^m$, $l = p^n$, $m < \alpha < \beta$, $a^r = b^{r'}$, $(s, p) = 1$, $st + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-m}}$, $|d| = p^m = p^\xi$. В цих позначеннях для груп обох типів $A = \langle u \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle u \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $|u| = p^\psi$, $|d| = p^\xi$. В G існує підгрупа $G' \subset \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle \triangleleft G$, що має характеристичну підгрупу

$$Z \times F = Z \times \langle h \rangle = N \subset Z(G),$$

де $|Z| = p$, $|h| = p$,

$$Z \subset \langle u \rangle \cap \langle a \rangle, \quad h \in \langle d \rangle.$$

За теоремою 1.2.2

$$Z(A) = \langle u^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle d^{p^{\alpha-1}} \rangle, \alpha - k < \psi, \alpha - k < \xi.$$

Якщо $[\langle d \rangle, X] \neq 1$, то в X знайдеться елемент x^* , для якого $[[d, x^*]] = p$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $N \cdot \langle d \rangle \cdot \langle x^* \rangle$, що не містить G' , а це суперечить теоремі 2.2.2. З цієї суперечності випливає, що $[\langle d \rangle, X] = 1$. Отже, в G існує абелева підгрупа $X_0 = \langle d \rangle \cdot X$,

$$\langle u \rangle \cap X_0 = \langle z \rangle \cap X_0$$

і $G = \langle u \rangle \cdot X_0$. З цього випливає, що $G' = \langle u \rangle' \cdot X_0' \cdot [\langle u \rangle, X_0] = [\langle u \rangle, X_0]$. Покажемо далі, що $\xi \leq k+1$. Нехай це не так. Тоді в $\langle d \rangle$ знайдеться елемент d_0 , $|d_0| = p^{k+2}$, $m \geq k+2$. Покладемо $g = u \cdot d_0$. Тоді $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^{k+1}} \rangle$. Оскільки $G' = [\langle u \rangle, X_0]$, то в X_0 знайдеться елемент x^* , для якого $[u, x^*] = f$ і в G існує неабелева підгрупа $(\langle g \rangle \times \langle f \rangle) \cdot \langle x^* \rangle$, що не містить G' , а це суперечить теоремі 2.2.2. Звідси $\xi \leq k+1 < \alpha$. Зрозуміло, що $f = z^i \cdot h^j$, $0 \leq i < p$, $0 < j < p$. Якщо $j \cdot j_0 \equiv 1 \pmod{p}$, то $f^{j_0} = z^{i_0} \cdot h$, $0 \leq i_0 < p$. Покладемо $d_0 = a^{i_0 p^{\alpha-1}} \cdot d$. Зрозуміло, що $\langle a \rangle \lambda \langle d \rangle =$

група типу 4) теореми 1.2.2, $|d_0| = |d| = p^k$, $\langle d_0 \rangle \cap \langle a \rangle = \langle u \rangle \cap \langle d_0 \rangle = 1$, $A = \langle u \rangle \cdot \langle d_0 \rangle$. Як і раніше, можна показати, що $[\langle d_0 \rangle, X_0] = 1$ і $d_0^{p^{k-1}} = f^{j_0}$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $d = d_0$, $\langle h \rangle = \langle f \rangle$. Зрозуміло, що $\langle u^p \rangle$ — характеристична підгрупа нормальної в G підгрупи $\langle u \rangle \times \langle h \rangle$, тому $\langle u^p \rangle \triangleleft G$. Тепер в фактор-групі $\bar{G} = \bar{A}\bar{\lambda}\bar{X}$ виконується $X_0/F = \langle d \rangle / (\langle f \rangle \times \bar{X})$ і значить $\exp \bar{X} \leq |\langle d \rangle / \langle f \rangle|$, але тоді $\langle d \rangle$ — циклічна підгрупа найбільшого порядку в абелевій підгрупі X_0 .

За відомими результатами $X_0 = \langle d \rangle \times X_1$, $G = A\lambda X_1$, $|X_1| > 1$. Нехай C — максимальна центральна підгрупа із G , що міститься в X_1 і доповнюється в X_1 . Тоді $X_1 = B \times C$, $G = F \times C$, $F = A\lambda B$, $F' = G'$, $|B| > 1$. В групі B не доповнюється жодна неединична центральна в G підгрупа із B . Ясно, що X_1 — абелева група обмеженої експоненти, тому $B = \times_{i \in I} \langle b_i \rangle$, $|I| > 0$, $|b_i| > 1$.

Нехай $c_i = [u, b_i]$. За вибором B маємо, що $|c_i| > 1$. Нехай $|c_i| > p$. Тоді в $\langle b_i \rangle$ знайдеться елемент x_i , що $\langle [u, x_i] \rangle = \langle z \rangle$. В G існує неабелева підгрупа $\langle u \rangle \lambda \langle x_i \rangle \not\subseteq G'$. Це суперечить теоремі 2.2.2, а значить $|c_i| = p$. Покажемо, що $B = \langle b_1 \rangle$. Нехай це не так. Тоді не порушуючи загальності, можемо вважати, що $|b_1| \leq |b_2|$, $c_1 = z^{i_1} \cdot h^{j_1}$, $c_2 = z^{i_2} \cdot h^{j_2}$. Оскільки $|c_1| = |c_2| = p$,

$$\langle c_1 \rangle \cap \langle z \rangle = \langle c_2 \rangle \cap \langle z \rangle = 1,$$

то $0 < j_1 < p$, $0 < j_2 < p$ і існують l_1, l_2 для яких $l_1 j_1 + l_2 j_2 \equiv 0 \pmod{p}$, $(l_1 \cdot l_2, p) = 1$. Покладемо $y = b_1^{l_1} \cdot b_2^{l_2}$. Тоді $|y| = |b_2|$, $\langle y \rangle \cap \langle b_1 \rangle = 1$ і

$$\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle = \langle b_1 \rangle \times \langle y \rangle,$$

а значить $\langle y \rangle$ доповнюється в G . Зрозуміло, що $[u, y] = z^{l_1 i_1 + l_2 i_2} \in \langle u \rangle$.

Оскільки $\langle u \rangle \lambda \langle y \rangle \not\subseteq G'$, то $[u, y] = 1$, $y \in Z(G)$, що неможливо. Повторюючи для c_1 ті ж самі судження, що і для f , і збираючи відповідну степінь елемента b_1 , та позначаючи її через x , одержимо, що $B = \langle b_1 \rangle = \langle x \rangle$, $[u, x] = d^{p^{k-1}}$, $[d, x] = 1$. Зрозуміло, що $[u^p, x] = 1$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma^* > 0$, $x^p \in Z(G)$. Покладемо $v = d^{p^{a-k-1}} \cdot x_0$, де x_0 — елемент

із $\langle x^p \rangle \times C$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $\langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, що за теоремою 2.2.2 містить G' . Звідси $h \in \langle v \rangle$, $G^{p^{\xi+k-\alpha}} = d = h$, а значить $x_0^{p^{\xi+k-\alpha}} = 1$, $\exp(\langle x^p \rangle \times C) \leq p^{\xi+k-\alpha}$, тому $\gamma \leq \xi + k - \alpha + 1$. Якщо тепер A — група типу 4) теореми 1.2.2, то $\xi = \beta$, $\psi = \alpha$, $u = a$, $d = b$ і G — група типу 1) леми.

Якщо A — група типу 5) теореми 1.2.2, то $\xi = m = k + 1$, $u = b$, $\psi = \beta$, $[a, x] = 1$, $\xi + k - \alpha = 2k - \alpha + 1$ і G — група типу 2) леми. Лема доведена.

Наслідок 2.4.2. Фактор-група метагамільтової групи G із леми 2.4.2 по її центру $Z(G)$ є абелевою групою типу (p^δ, p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число.

Це твердження впливає безпосередньо в опису груп в лемі 2.4.2.

Теорема 2.4.2. Метагамільтонові групи з абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, p — просте число мають вид $G = F \times C$, де $F = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^{p^k} \rangle$, $0 < \alpha - k - 1 \leq k < \alpha$, $\beta \geq \alpha - k$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^r \rangle = \langle b^l \rangle$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, C — періодична абелева група, що є групою одного з типів:

1) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $\alpha - k = \beta \leq k$, $[a, x] = b^{p^{\alpha-1}}$, $[b, x] = 1$, $|x| = p$, $p > 2$ — просте число, C не містить p -елементів;

2) $A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $\alpha - k - 1 = k < \alpha < \beta$, $r = p^{\alpha-k}$, $l = p^{\beta-k}$, $a^r = b^{sl}$, $(s, p) = 1$, $d = a^t \cdot b^{p^{\delta-\alpha}}$, $st + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}$, $|d| = p^{\alpha-k}$, $[a, x] = [d, x] = 1$, $[b, x] = d^{p^{\alpha-k-1}}$, $|x| = p$, $p > 2$ — просте число, C не містить p -елементів;

3) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, x] = b^{p^{\alpha-1}}$, $[b, x] = 1$, $\beta \leq k + 1$, $\alpha - k \leq k$, $\alpha - k < \beta$, $\gamma \leq \beta + k - \alpha + 1$, експонента силовської p -підгрупи із C не перевищує $p^{\beta+k-\alpha}$;

4) $A = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $r = p^{k+1}$, $l = p^{\beta-\alpha+k+1}$, $\alpha < \beta$, $a^r = b^{sl}$, $(s, p) = 1$, $d = a^t \cdot b^{p^{\delta-\alpha}}$, $ts + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-k-1}}$, $[a, x] = [d, x] = 1$, $[b, x] = d^{p^k}$, $|d| = p^{k+1}$, $\gamma \leq 2k - \alpha + 2$, $\alpha - k \leq k$, експонента силовської p -підгрупи

із C не перевищує p^{2k-a+1} .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 2.4.1 і теоремою 2.2.2 G — періодична нільпотентна група виду $G = P \times D$, де P — силовська p -підгрупа із G , $P' = G'$, а D — її абелеве холловське доповнення. Зрозуміло, що P задовольняє умову розглядуваної теореми. Можливі випадки: 1) $P' \not\subset Z(G)$; 2) $P' \subset Z(G)$.

Випадок 1. В цьому випадку P задовольняє умовам теореми 2.4.1. Тоді P — група одного з типів 1), 2) згаданої теореми. Покладемо $F = P$, $C = D$, одержимо, що $G = F \times C$ — група типів 1), 2) розглядуваної теореми відповідно.

Випадок 2. В цьому випадку P задовольняє умові леми 2.4.2, $P = F \times C$ і P — група одного з типів 1), 2) згаданої леми. Покладемо $C = C^* \times D$ і одержимо $G = F \times C$ — група типів 3), 4) розглядуваної теореми відповідно. Всі випадки розглянуті. Теорема доведена.

Зауваження 2.4.1. Для теореми 2.4.2 справедлива і достатність, але вона не доводиться в зв'язку з громіздкістю викладок.

2.5 Нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p)

Твердження 2.5.1 [119] Скінченні метагамільтонові p -групи з нецентральним абелевим комутантом типу (p, p) вичерпуються групами типів:

- 1) $p_c = 3$, $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cdot \langle \sigma \rangle$, $a^3 = \tau = b^\sigma$, $a^b = a\sigma$, $\sigma^b = \sigma\tau$;
- 2) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle \sigma \rangle) \lambda \langle \pi \rangle$, $a^{p^n} = 1$, $n \geq 2$, $a^\sigma = a\tau$, $a^\pi = a\sigma$, $\sigma^\pi = \sigma\tau^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$, $p > 2$;
- 3) $G = ((\langle a \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle) \cdot \langle b \rangle$, $a^{p^n} = 1$, $n \geq 1$, $b^p = \tau^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$, $a^\sigma = a\tau$.

$$a^b = a\sigma, b^\sigma = b\tau^\delta, \delta = 0 \text{ при } \epsilon = 1, p > 2.$$

Теорема 2.5.1. Довільні метабільтонові p -групи з нецентральною абелевим комутантом типу (p, p) мають вид $G = A \cdot \langle x \rangle$, де $A = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $|c| = p^\delta$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta = 1$, $\delta \in \{0, 1\}$, $p > 2$ — просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = c \in Z(G)$, і є групами одного з типів:

- 1) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $p = 3$, $\alpha = \gamma = 2$, $c = a^3 = x^6$;
- 2) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $G = A \lambda \langle x \rangle$, $\gamma = 1$, $\alpha > 1$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $c = 1$;
- 3) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $G = A \lambda \langle x \rangle$, $\gamma = 1$, $\alpha > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$;
- 4) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $G = A \lambda \langle x \rangle$, $\alpha = 2$, $\gamma > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$;
- 5) $A = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a \rangle$, $G = A \lambda \langle x \rangle$, $\alpha = \beta = \delta = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо, що G — скінченна група. Нехай це не так. Оскільки G' — скінченна група локально скінченної p -групи, то в G знайдеться скінченна підгрупа X , для якої $G' = X' \not\subseteq Z(X)$. За лемою 2.3.1 G має обмежену експоненту, тому $G/G' = Y/G' \times D/G'$, де Y — скінченна група, що містить X , а $|D/G'| > 1$. Звідси в G існує підгрупа Z , для якої $Z/G' = Y/G' \times \langle G'y \rangle$, $|G'y| > 1$. З цього випливає, що Z — скінченна група, що задовольняє умові твердження 2.5.1, але не породжується ніякими своїми трьома елементами. Це суперечить тому, що Z — група одного з типів 1)–3) твердження 2.5.1. Ця суперечність показує, що $|G| < \infty$.

Якщо G — група типу 1) твердження 2.5.1, то покладемо $\sigma = b$, $b = x$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ і одержимо, що G — група типу 1) розглядуваної теореми. Нехай G — група типу 2) твердження 2.5.1. Тоді покладемо $\pi = x$, $\sigma = b$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma = 1$, $\alpha > 1$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[b, x] = c$, $|c| = p^\delta$, $\delta \in \{0, 1\}$. Зрозуміло, що $G = A \lambda \langle x \rangle$ і при $c = 2$ G — група типу 2) теореми.

Нехай $\delta = 1$. Покладемо $N = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$. Тоді N — нормальна в G p -група порядку p^3 експоненти p . $p > 2$ — просте число, що містить

$G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$. Зрозуміло, що $\langle c \rangle = N' \subset Z(G)$, $\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle = A \triangleleft G$, $\Phi(A) = \langle a^p \rangle \triangleleft G$. Звідси $a^{p^{\alpha-1}} \in Z(G)$, що значить $\langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle = \langle c \rangle$. Неважко показати, що існує j , для якого $\langle (ax^j)^p \rangle = \langle a^p \rangle$ і $[ax^j, b] = 1$. Заміняючи a на ax^j , одержимо $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$ і G — група типу 3), $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$.

Нехай G — група типу 3) твердження 2.5.1. Розглянемо можливі випадки для груп цього типу: 1) $\varepsilon = 1$; 2) $\varepsilon = 0$.

Випадок 1. Покладемо в цьому випадку $b = a$, $\sigma = b$, $a = x$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Тоді $|a| = p^2$, $|b| = p$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $G = A\lambda\langle x \rangle$, $[a, x] = b$, $[b, x] = c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$ і при $\gamma = 1$ G — група типу 3), а при $\gamma > 1$ G — група типу 4) теореми.

Випадок 2. Покладемо $\tau = c$, $\sigma = b$, $b = a$, $a = x$,

$$A = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle a \rangle.$$

Тоді $|c| = |b| = |a| = p$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $[a, x] = b$, $[b, x] = c$, $[c, x] = 1$, $[b, a] = c^t$, $t \in \{0, 1\}$. Якщо $t = 0$, то G — група типу 5) розглядуваної теореми. Нехай $t = 1$. Тоді $x^p \in Z(G)$ і при $\gamma > 1$ в G існує неабелева підгрупа $(\langle c \rangle \times \langle bx^{p^{\gamma-1}} \rangle) \lambda \langle a \rangle$, що не містить G' , а це суперечить теоремі 2.2.2. Отже, при $t = 1$ $\gamma = 1$ і G — група порядку p^4 з елементарним абелевим нецентральним комутантом порядку p^2 . З будови груп цих порядків випливає, що G — група одного з попередніх типів розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуті. Теорема доведена.

Зауваження 2.5.1. При доведенні теореми 2.5.1 було показано, що умови твердження 2.5.1 не завжди достатні. Наприклад, в групах типу 3) цього твердження при $\varepsilon = 0$ $\gamma > 1$, тому теорема є не тільки перенесенням твердження 2.5.1 на довільний випадок, але і його уточненням, яке дає і достатні умови. Доведення достатності не наводимо через його об'ємність, хоча гарантуємо.

Означення 2.5.1. Для спрощення формулювань і викладок в подаль-

шому $*$ -групою будемо називати неабелеву метагамільтонову p -групу з центральним елементарним абелевим комутантом непростого порядку.

Лема 2.5.1. Нехай G — $*$ -група. Тоді справедливі твердження:

1) комутант G' має порядок p^2 або p^3 і міститься в будь-якій неабелевій підгрупі із G , а G має обмежену експоненту;

2) G не містить неабелевих підгруп порядку p^3 , а при $|G'| = p^3$ не містить також неабелевих метациклічних підгруп;

3) перетин 2-х підгруп із G може бути циклічним тільки тоді, коли одна з них абелева;

4) всі елементи порядку p породжують нормальну в G елементарну абелеву підгрупу;

5) $G = F\lambda(\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times C)$, $C' = 1$, $F\lambda(\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle)$ — скінченна $*$ -група, $F \supset G'$, елементи порядку p із F належать G' .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За теоремою 2.2.2 G' належить будь-якій неабелевій підгрупі із G , G' — елементарна абелева група порядку p^2 або p^3 і за лемою 2.3.1 G має обмежену експоненту. З цього випливає, що G не має неабелевих підгруп порядку p^3 , а при $|G| = p^3$ G не має і неабелевих метациклічних підгруп. Тепер зрозуміло, що G не має 2-х непереставних елементів порядку p . Твердження 1), 2), 4) доведено. З першого твердження випливає твердження 3).

Доведемо твердження 5) лемй. Оскільки G' — центральна елементарна абелева підгрупа із G , а G має обмежену експоненту, то G задовольняє умову теореми 1.1.3. За цією теоремою G може бути скінченною групою F , всі елементи простого порядку якої містяться в F' . Тоді, покладаючи $\langle x \rangle = C = 1$, одержимо твердження 5). За тією ж теоремою в протилежному випадку G — майже прямий добуток підгруп $F\lambda\langle x_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $F \supset G'$, всі елементи простого порядку із F належать G' , $i \in I$, $|I| > 0$. Якщо для будь-якого $i \in I$, $x_i \in Z(G)$, то покладемо $C = \times_{i \in I} \langle x_i \rangle$, $x = 1$. то одержимо $G = F \times C$ і справедливе

твердження 5) леми.

Покажемо, що $||[x_i, x_j]|| = 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді в G існує неабелева підгрупа $(\langle [x_i, x_j] \rangle \times \langle x_i \rangle) \lambda \langle x_j \rangle$, що не містить G' , а це суперечить твердженню 1). Отже, для довільних $i, j \in I$ $||[x_i, x_j]|| = 1$. Зрозуміло, що в G існує абелева підгрупа $X = \times_{i \in I} \langle x_i \rangle$ і $G = F \lambda X$. Серед x_i можна вибрати не більше, ніж 2 елементи, для яких підгрупа $F \lambda (\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle)$ є скінченна $*$ -група і $X = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times C$, $C' = 1$. Твердження 5) доведено. Лема доведена.

Лема 2.5.2. Всі $*$ -групи з комутантом порядку p^2 , який містить всі елементи порядку p із G , мають вид $G = A \cdot \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$, де $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|y| \in \{1, 4\}$, і вичерпуються групами типів:

$$1) \ p = 2, |y| = 1, [a, x] = a^2, [b, x] = x^2 = a^2 b^2;$$

$$2) \ p = 2, |y| = 4, x^2 = y^2 = a^2 b^2 = [a, x], [a, y] = a^2 = [x, y], [b, x] = b^2, [b, y] = y^2;$$

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За твердженням 5) леми 2.5.1 G — скінченна група, яка не містить неабелевих підгруп порядку p^3 . За відомими результатами, наприклад, [49], будь-яка нециклічна підгрупа H із G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^2 лише тоді, коли в ній є підгрупи, ізоморфні групі кватерніонів. З цього випливає, що H містить елементарну абелеву підгрупу N порядку p^2 . За умовою леми $N = G'$ і $H \triangleleft G$. Зрозуміло, що всяка нециклічна підгрупа із G нормальна в G . За результатами [77], [86], [87] G — група типу 1) та 2) леми і необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група типу 1), 2) леми. Зрозуміло, що G' — центральна в G елементарна абелева група порядку 4. За тими ж результатами [77], [86], [87] всі нециклічні, а значить неабелеві підгрупи, нормальні в G . Звідси G $*$ -група.

Нехай d — елемент із G , $|d| = 2$, $d \notin G'$. Тоді $\langle d \rangle \times \langle a^2 \rangle \triangleleft G$ і в G існує нециклічна підгрупа $\langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$, яка нормальна в G . Але тоді $[a, x] \in \langle a^2 \rangle$, що

неможливо. Отже, всі елементи порядку 2 із G належать G' . Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 2.5.3. Нехай G — $*$ -група виду $G = A\lambda\langle x \rangle$, де $A = \langle a \rangle\lambda\langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$. Тоді $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\gamma > 0$, $[a, b] = a^{\sigma p^{\alpha-1}}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} \cdot b^f p^{\beta-1}$, $[b, x] = a^{s p^{\alpha-1}} \cdot b^t p^{\beta-1}$, $\varepsilon, f, s, t \in [0, p-1]$, $\sigma + \varepsilon + s > 0$, $f + t > 0$,

$$\Phi(G) = Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$$

$$G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle.$$

При $f = 0$ $\varepsilon = 0$, при $s = 0$ $t = 0$. При цьому справедливе одне із тверджень:

- 1) $\sigma = 1, \gamma \leq \beta$;
- 2) $\sigma = 0, A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, |\alpha - \beta| \leq 1, fs \neq 0$, при $\alpha > \beta$ $t = 0$, при $\beta > \alpha$ $\varepsilon = 0$;
- 3) $\sigma = 0, A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, \alpha = \beta, fs \neq 0, t\varepsilon - fs \not\equiv 0 \pmod{p}, (t - \varepsilon)^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p , при $p = 2$ $t \neq \varepsilon$.

Доведення. Нехай $G = A\lambda\langle x \rangle$ — досліджувана група, $A = \langle a \rangle\lambda\langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$. За означенням $*$ -групи

$$G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \subset Z(G),$$

$|G'| = p^2$. Звідси $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\gamma > 0$. Зрозуміло, що

$$\Phi(G) = Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle.$$

Очевидно, що $[a, b] = a^{\sigma p^{\alpha-1}}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^f p^{\beta-1}$, $[b, x] = a^{s p^{\alpha-1}} b^t p^{\beta-1}$, $\varepsilon, f, s, t \in [0, p-1]$. Оскільки $G' \trianglelefteq G$, то $\varepsilon + s > 0$. З умови $G' \trianglelefteq G$ випливає, що $f + t > 0$. При $f = 0$, відповідно $s = 0$, в G будуть існувати підгрупи $A\lambda\langle x \rangle$ та $\langle b \rangle\lambda\langle x \rangle$, які не містять G' . За лемою 2.5.1 ці підгрупи абелеві, тобто $\varepsilon = 0$, $t = 0$.

Розглянемо можливі випадки: 1) $\sigma = 1$; 2) $\sigma = 0$.

Випадок 1. В цьому випадку A — неабелева група. Якщо припустити, $\gamma > \beta$, то в G знайдеться неабелева підгрупа $\langle a \rangle \lambda \langle bx^p \rangle$, яка має з A циклічний перетин, що суперечить лемі 2.5.1, отже, $\beta \geq \gamma$ і справедливе твердження 1) леми.

Випадок 2. В цьому випадку $\sigma = 0$. Тоді будь-які 2 елементи g_1, g_2 із G мають вид: $g_1 = y_1 x^{k_1}$, $g_2 = y_2 x^{k_2}$, $y_1, y_2 \in A$. За результатами [64] в G знайдуться елементи g_1, g_2 такі, що $[g_1, g_2] = b^{p^{\beta-1}}$. Ясно, що $[g_1, g_2] = [(y_1 \cdot y_2)^{k_1 k_2}, x]$. Отже, в A знайдуться елементи x_1, x_2 такі, що $[x_1, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[x_2, x] = a^{p^{\alpha-1}}$. За лемою 2.5.1 G не може містити підгруп $\langle x_i \rangle \lambda \langle x \rangle$, $i = 1, 2$. Звідси

$$A \cap \langle x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \cap \langle b \rangle = 1.$$

Оскільки

$$\Phi(G) = Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle,$$

то

$$A = \langle a \rangle \times \langle x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \times \langle b \rangle.$$

Покажемо, що $\alpha \leq \beta + 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді в A існує елемент $y = a^p \cdot x_2$ порядку $p^{\alpha-1}$, а значить $\langle y \rangle \cap \langle a \rangle = a^{p^{\alpha-1}}$ і в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що суперечить лемі 2.5.1. Отже, $\alpha \leq \beta + 1$. Точно так же, покладаючи $y = b^p x_1$, покажемо, що $\beta \leq \alpha + 1$. Звідси $|\alpha - \beta| \leq 1$. Покажемо далі, що $fs > 0$. Нехай це не так. Тоді або $s = 0$, або $f = 0$. Припустимо, що $s = 0$. Тоді за попереднім $\epsilon = 0$, $[a, x] = 1$ і $a \in Z(G)$, $G' = \langle [b, x] \rangle$, що неможливо. Отже, $s > 0$. Точно так же показуємо, що і $f > 0$. З цього випливає, що $fs \neq 0$.

Розглянемо можливі випадки: 2.1) $|\alpha - \beta| = 1$, 2.2) $\alpha - \beta = 0$.

Випадок 2.1. Якщо $\alpha = \beta + 1$, то при $t > 0$ розглядаючи $y = a^{p^t} b^t$, одержимо неабелеву підгрупу $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' , що суперечить

лемі 2.5.1. Отже, при $\alpha = \beta + 1$ одержимо, що $\varepsilon = 0$. Аналогічно, при $\alpha + 1 = \beta$ одержимо, що $t = 0$. Звідси випливає, що в G справедливе твердження 2) леми.

Випадок 2.2. В цьому випадку покладемо $y = a^i \cdot b^j$, $0 \leq i < p$, $0 \leq j < p$, $i + j > 0$. Тоді $|y| = p^\alpha$, $y^{p^{\alpha-1}} = a^{ip^{\alpha-1}} \cdot b^{jp^{\beta-1}}$. Зрозуміло, що $[y, x] = a^{(\varepsilon i + s j)p^{\alpha-1}} \cdot b^{(f i + t j)p^{\beta-1}}$.

Ясно, що y — породжуючий елемент із A , тому $||[y, x]| = p$. З цього випливає, що нерозв'язною буде система конгруенцій:

$$\begin{cases} \varepsilon i + s j \equiv 0 \pmod{p}, \\ f i + t j \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Відомо [28], що останнє можливо тільки при умові $t\varepsilon - fs \not\equiv 0 \pmod{p}$. В G не існує неабелевої підгрупи $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$. Отже $[y, x] \notin \langle y \rangle$, тобто для довільного $0 < n < p$ нерозв'язною буде система конгруенцій:

$$\begin{cases} n i \equiv \varepsilon i + s j \pmod{p}, \\ n j \equiv f i + t j \pmod{p}. \end{cases}$$

Знову за результатами [28] маємо $(\varepsilon - n)(t - n) - fs \not\equiv 0 \pmod{p}$ або $n^2 - (\varepsilon + tn + t\varepsilon - fs) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Відомо, [28], що останнє справедливо лише тоді, коли при $p > 1$ $(t - \varepsilon)^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p . При $p > 2$ справедливе твердження 3) леми. Нехай $p = 2$. Тоді $f = s = 1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$. Оскільки $t\varepsilon - 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$, то $t + \varepsilon \neq 2$. При $\varepsilon = t = 0$ розв'язною буде конгруенція $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, що неможливо за попереднім. З цього випливає, що $t \neq \varepsilon$, і в G справедливе твердження 3) леми. Лема доведена.

Лема 2.5.4. Нехай $*$ -група $G = A \cdot B$, $A \cap B = 1$, A — група Міллера-Морено, B — циклічна група, тоді $G = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $0 < \gamma \leq \beta \leq \alpha$, $1 < \beta$, $\gamma < \alpha$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}} \cdot b^{p^{\beta-1}}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$, $0 \leq s < p$, $0 \leq t < p$, p — просте число, і є групою

одного з типів:

$$1) s = t = 0, p\alpha > 4;$$

$$2) 0 < s, t = 0, \alpha = \beta + 1;$$

3) $0 < s, \gamma < \beta = \alpha$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p , при $p = 2$, $p\alpha > 4$ $s = t = 1$ і при $p\alpha = 4$ $s = 1, 0 \leq t \leq 1$.

Доведення. Нехай $G = A \cdot B$ — досліджувана група. За лемою 2.5.1 $G' \subset A \triangleleft G$. Тоді $G = A\lambda\langle x \rangle$, де $B = \langle x \rangle, |x| = p^\gamma, \gamma > 0$. Покажемо, що A — метациклічна група. Нехай це не так, тоді за твердженням 1.1.1

$$A = (\langle c \rangle \times \langle x_1 \rangle)\lambda\langle x_2 \rangle,$$

$[x_1, x_2] = c, |c| = p, c \in Z(G), |x_1| = p^{\alpha_1}, |x_2| = p^{\alpha_2}, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Нехай $[x_1, x] = c_1, [x_2, x] = c_2$. За лемою 2.5.1 в G може існувати тільки неабелева підгрупа $\langle x_i \rangle\lambda\langle x \rangle, i = 1, 2$. Тому $\langle c_i \rangle \cap \langle x_i \rangle = 1$. Оскільки $|A'| = p, |G'| > p$, то $\langle c_1, c_2 \rangle \subset \langle c \rangle, |c_i| \leq p$. Звідси існує i , для якого $|c_i| = p, \langle c \rangle \cap \langle c_i \rangle = 1$. Вважаємо, що $i = 1$. Зрозуміло, що в G існує неабелева підгрупа $X_1 = (\langle c_1 \rangle \times \langle x_1 \rangle)\lambda\langle x \rangle$, що за лемою 2.5.1 містить G' . Звідси $G' \subset \langle c_1 \rangle \times \langle x_1^{p^{\alpha_1-1}} \rangle$. За лемою 2.5.1 $|G'| = p^2$, і

$$G' = \langle c_1 \rangle \times \langle x_1^{p^{\alpha_1-1}} \rangle = \langle c \rangle \times \langle x_1^{p^{\alpha_1-1}} \rangle.$$

З цього випливає, що $c_1 = c^k \cdot x_1^{jp^{\alpha_1-1}}, 0 < k < p, 0 < j < p$. Зрозуміло, що $\alpha_1 > 1$ і в G існує підгрупа $X_2 = (\langle c_2 \rangle \times \langle x_2 \rangle)\lambda\langle x \rangle$, що має з G' перетин рівний $\langle c_2 \rangle$. За лемою 2.5.1 $\langle c_2 \rangle = 1$. Покладемо $y = x_2^{-k} \cdot x$. Тоді $\{x_1, y\} = x_1^{jp^{\alpha_1-1}}$. Оскільки $\langle y \rangle \cap G' = 1$, то в G існує неабелева підгрупа $\langle x_1 \rangle\lambda\langle y \rangle$, що не містить G' . Одержана суперечність показує, що A — метациклічна група Міллера-Морено, що містить елементарні абелеві підгрупи порядку p^2 . За твердженням 1.1.1 $A = \langle x_1 \rangle\lambda\langle x_2 \rangle, c = x_1^{p^{\alpha_1-1}}$. Зрозуміло, що G задовольняє умову лемми 2.5.3 і твердження 1) цієї лемми, з якого $\gamma \leq \alpha_2$ і $[x_1, x] = x_1^{\varepsilon p^{\alpha_1-1}} \cdot x_2^{fp^{\alpha_2-1}}, [x_2, x] = x_1^{sp^{\alpha_1-1}} \cdot x_2^{lp^{\alpha_2-1}}$. Числа s, t, f, ε задовольняють твердження згаданої лемми. Можливі випадки: 1)

$$s = 0; 2) s > 0.$$

Випадок 1. В цьому випадку $s = 0, t = 0, f > 0$. Покажемо, що $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\varepsilon = 0$. Нехай $\alpha_1 < \alpha_2$. Тоді покладемо $y = x_1 x_2$ при $\varepsilon = 0$ і $y = x_1^\varepsilon \cdot x_2^{fp^{\alpha_2 - \alpha_1}}$. Тоді $[[y, x]] > 1$, $[\langle y \rangle, \langle x \rangle] \subset \langle y \rangle$ і в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' . Отже, $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді покладемо $y = x_1^{\varepsilon p^{\alpha_1 - \alpha_2}} \cdot x_2^f$. Тоді при $\alpha_1 = \alpha_2$ в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' , а значить при $\alpha_1 = \alpha_2$ $\varepsilon = 0$. При $\alpha_1 > \alpha_2$ $A = \langle x_1 \rangle \lambda \langle y \rangle$, $[x_1, x] \in \langle y \rangle$, $[y, x] = 1$. Тому ми можемо вважати, що $A = \langle x \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 1$, $\beta = \alpha_2$, $[x_1, x] = b^{fp^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$. Нехай $a = x_1$, де $|a| = p^\alpha$, а x замінимо на x^{f_1} , де $f_1 f \equiv 1 \pmod{p}$. Тоді $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Покажемо, що $\alpha > \gamma$. Нехай це не так. Тоді $\alpha = \beta = \gamma$. Покладемо $y = ab$, $d = bx$ при $p\alpha > 4$ і $d = x$ при $p\alpha = 4$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle d \rangle$, що не містить G' . Це суперечить лемі 2.5.1. Ця суперечність показує, що $\gamma < \alpha$. Отже, при $p\alpha > 4$ G — група типу 1). Очевидно, що при $p\alpha = 4$ в G існує неабелева підгрупа $\langle a, b \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' . Ця суперечність показує, що у випадку 1) умова $p\alpha = 4$ неможлива. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. В цьому випадку будемо вважати, що G не може бути представлена у вигляді $G = (\langle x_1 \rangle \lambda \langle x_2 \rangle) \lambda \langle x \rangle$, де x_1, x_2, x задовольняють умовам випадку 1. Покажемо, що і в цьому випадку $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Нехай це не так. При умові $s > 0$ знайдуться такі i, j , що $\varepsilon i + sj \equiv 0 \pmod{p}$, $0 \leq i < p, 0 \leq j < p, i + j > 0$. Покладемо $y = x_1^i x_2^j$. Тоді $|y| = |x_2|$, $A = \langle x_1 \rangle \lambda \langle y \rangle$, $\langle y \rangle \cap \langle x_1 \rangle \neq 1$,

$$[y, x] = x_1^{(\varepsilon i + sj)p^{\alpha_1 - 1}} \cdot x_2^{(fi + tj)p^{\alpha_2 - 1}} = x_2^{(fi + tj)p^{\alpha_2 - 1}}.$$

Оскільки за лемою 2.5.1 в G не існує неабелевої підгрупи $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, $[\langle y \rangle, \langle x \rangle] \subset \langle y \rangle$, то $[x, y] = 1$ і прийдемо до випадку 1. Отже, $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Покажемо далі, що $f > 0$. Нехай $f = 0$. $\varepsilon = 0, t > 0$. Тоді за лемою

2.5.3 $\varepsilon = 0$, $[x_1, x] = 1$. Покладемо $y = x_1^{sp^{s_1-s_2}} x_2^t$. В G існує при $p\alpha_1 > 4$ неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' , що неможливо.

Нехай $p\alpha_1 = 4$. Тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = p = 2$, $t = s = 1$, $y^2 = x_2^2$ і при $|x| > 2$ в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x_2 \cdot x \rangle$, що не містить G' , що неможливо. При $|x| = 2$ $\langle x_1, x_2 \cdot x \rangle$ — група кватерніонів, що неможливо. Отже, $f > 0$ і $fs > 0$. Розглянемо можливі випадки: 2.1) $\alpha_1 > \alpha_2$; 2.2) $\alpha_1 = \alpha_2$.

Випадок 2.1. Нехай $t > 0$. Покладемо $y = x_1^{sp^{s_1-s_2}} \cdot x_2^t$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle$, що неможливо, тому $t = 0$. Нехай $\alpha_1 > \alpha_2 + 1$. Тоді покладаючи $y = x_1^p \cdot x_2$, як і раніше, прийдемо до суперечності. Отже, $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$. Покладемо $a = x_1$, $b = x_1^{\varepsilon p} \cdot x_2^f$, тоді $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ і G — група типу 2) леми. Випадок 2.1 розглянутий.

Випадок 2.2. В цьому випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Заміняючи x на відповідну степінь, прийдемо до умови $f = 1$. Нехай $p\alpha > 4$. Покладемо $b = x_1^{\varepsilon} \cdot x_2$ і $a = x_1$. Тоді $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, x] = b^{p^{s-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{s-1}} \cdot b^{tp^{s-1}}$. Покладемо $y = a^i b^j$, де $0 \leq i < p$, $0 \leq j < p$, $i + j > 0$. Тоді y — породжуючий елемент із A , а тому $[[y, x]] = p$, $[y, x] = a^{sjp^{s-1}} \cdot b^{(i+j)p^{s-1}}$.

Як і в лемі 2.5.3 не має розв'язку система конгруенцій

$$\begin{cases} -ni + sj \equiv 0 & (\text{mod } p), \\ i + (t-n)j \equiv 0 & (\text{mod } p). \end{cases}$$

Як і в згаданій лемі $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p . Зрозуміло, що при $p = 2$ $t = s = 1$ і G — група типу 3) леми за виключенням умови $\gamma < \alpha$.

Нехай $p\alpha_1 = 4$. Тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = p = 2$. Покладемо $x_1 = a$, $x_2 = b$, $[a, b] = a^2$, $[a, x] = a^{2\varepsilon} \cdot b^2$, $[b, x] = a^2 \cdot b^{2t}$. Якщо $\varepsilon t = 1$, то заміняючи b на ab прийдемо до випадку 1), тому можемо вважати, що $\varepsilon t \neq 1$. Нехай $\varepsilon = 1$. Тоді $t = 0$ і в G існує неабелева підгрупа $\langle a \cdot b \rangle \lambda \langle x \rangle$, що не містить G' , отже, $\varepsilon = 0$, і G — група типу 3) леми за виключенням умови $\gamma < \alpha$.

Нехай $\gamma = \alpha$. Тоді $\alpha = \beta = \gamma$. Нехай спочатку $p\alpha = 4$. Тоді $\alpha = \beta =$

$p = 2$. Розглядаючи підгрупу $\langle b \rangle \lambda \langle a \cdot b \cdot x \rangle$ прийдемо або до випадку 1), або до суперечності. Отже, в цьому випадку $\gamma < \alpha$.

Нехай $p\alpha > 4$. З умови $p^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p випливає, що $s \neq t + 1$. Покладемо $y = ab$, $d \doteq b^{t+1-s} \cdot x$. Розглянемо підгрупу $\langle y \rangle \lambda \langle d \rangle$, як і раніше прийдемо або до випадку 1), або до суперечності. Отже, завжди $\gamma < \alpha$, G — група типу 3). Лема доведена.

Лема 2.5.5. Нехай $\ast$ -група G містить доповнювану підгрупу Міллера-Морено, тоді $G = F \times C$, де F — група одного з типів 1)–3) леми 2.5.4, C — абелева p -група, експонента якої не перевищує $\min(p^{\beta-1}, p^\gamma)$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група, тоді $G = A\lambda B$, де A — підгрупа Міллера-Морено із G , а B — її доповнення. За лемою 2.5.1 $G' \subset A$, $B' = 1$ і G — група обмеженої експоненти. Нехай C — максимальна центральна в G підгрупа із G , що доповнюється в B . Тоді $B = B_1 \times C$, $G = F \times C$, де $F = A\lambda B_1$. Зрозуміло, що B_1 не містить неодиначних центральних в G підгруп доповнюваних в B_1 і F — $\ast$ -група. Ясно, що $[A, B_1] \not\subset A'$ і B_1 — прямий добуток своїх циклічних підгруп, кожна з яких не централізує A і взаємний комутант хоча б однієї з них з підгрупою A не міститься в A' .

Нехай $\langle x \rangle$ — один з таких множників, тоді $B_1 = \langle x \rangle \times B_2$ і $A\lambda \langle x \rangle = H$ — $\ast$ -група. За вибором C B_2 розкладається в прямий добуток своїх циклічних підгруп, неодиначні з яких не належать $Z(G)$. Покажемо, що $B_2 = 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $B_2 = \langle z \rangle \times B_3$, де $[[A, \langle z \rangle]] = p$. Покладемо $g = x^i \cdot z^j$, $0 \leq i < p$, $0 \leq j < p$, $i + j > 0$. Тоді $B_1 = \langle g \rangle \times \langle d_0 \rangle \times B_3$, де d_0 співпадає або з x_1 , або з z . Покажемо, що i та j можна вибрати так, щоб $g \in Z(G)$. Зрозуміло, що H — група, що задовольняє умову леми 2.5.4. Тоді $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[a, x] = b^{t \cdot p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{s \cdot p^{\alpha-1}} \cdot b^{l \cdot p^{\beta-1}}$, $0 < \gamma \leq \beta \leq \alpha$, $1 < \beta$, $\gamma < \alpha$ і H — група одного з типів 1)–3) згаданої леми. За лемою 2.5.3 $[a, z] = a^{e \cdot p^{\alpha-1}} \cdot b^{f \cdot p^{\beta-1}}$, $[b, z] = a^{r \cdot p^{\alpha-1}} \cdot b^{l \cdot p^{\beta-1}}$, e, f, r, l — числа з відрізка

$[0, p-1]$. При $f = 0$ $\varepsilon = 0$, при $r = 0$ $l = 0$, $f + r > 0$. Зрозуміло, що $[a, g] = a^{\varepsilon j} p^{\alpha-1} \cdot b^{(i+fj)p^{\beta-1}}$, $[b, g] = a^{(si+rj)p^{\alpha-1}} \cdot b^{(ti+lj)p^{\beta-1}}$, при $i + fj \equiv 0 \pmod{p}$ $\varepsilon j = 0$, а при $si + rj \equiv 0 \pmod{p}$ $ti + lj \equiv 0 \pmod{p}$. За вибором C $|[a, g]| \cdot |[b, g]| = p$. Звідси не має розв'язку система конгруенцій

$$\begin{cases} i + fj \equiv 0 & \pmod{p}, \\ si + rj \equiv 0 & \pmod{p}. \end{cases}$$

За результатами [28] $r - fs \not\equiv 0 \pmod{p}$, а значить $f + r > 0$ і $r + s > 0$. З цього випливає, що пари r та s , r та f задовольняють тим же умовам, що i та j . Покладаючи $i = r$, $j = -s$, одержимо, що $tr - ls \equiv 0 \pmod{p}$. При $i = -f$, $j = 1$ одержимо, що $\varepsilon = 0$. Розглянемо можливі випадки: 1) $p\alpha = 4$, 2) $p\alpha > 4$.

Випадок 1. В цьому випадку $s = 1$, $fr = 0$. Нехай $r = 0$. Тоді $l = 0$. Якщо при цих умовах покласти $t = 1$, то при $i = j = 1$ в G існує підгрупа кватерніонів, породжена елементом a і добутком bg , що суперечить лемі 2.5.1. Отже, $t = 0$. Але тоді підгрупою кватерніонів буде $\langle az \rangle \cdot \langle bx \rangle$. Отже, $r = 1$. Оскільки $fr = 0$, то $f = 0$ і $t = l$. При $i = j = 1$ $[b, g] = 1$, $[a, g] = b^2 = ab^2$. З цього випливає, що в G існує неабелева підгрупа $\langle ab \rangle \lambda \langle g \rangle$, що не містить G' , що неможливо. Ці суперечності показують, що випадок 1) неможливий.

Випадок 2. Покладемо $i = -fj$. Тоді $[b, g] = a^{(r-fs)j} p^{\alpha} \cdot b^{(l-ts)jp^{\beta-1}}$. Нехай $y = a^{(r-s)j_0} p^{\alpha-\beta} \cdot b^{(l-ft)j_0}$, де при $l - ft \not\equiv 0 \pmod{p}$ j_0 є розв'язком конгруенції $(l - ft)j \equiv 1 \pmod{p}$. При вибраному j_0 $[a, g] = 1$, $[\langle y \rangle, \langle g \rangle] = [\langle b \rangle, \langle g \rangle] \subset \langle y \rangle$, і $|[y, g]| = p$. Ця посилка приводить до наявності в G неабелевої підгрупи $\langle y \rangle \lambda \langle g \rangle$, що не містить G' , отже, $l \equiv ft \pmod{p}$. Оскільки $tr - ls \equiv 0 \pmod{p}$, $r - fs \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $t = 0$, $l = 0$. При $\alpha > \beta$ покладемо $y = ab$ і знайдемо в G неабелеву підгрупу $\langle y \rangle \lambda \langle g \rangle$, що не містить G' , отже, $\alpha = \beta$. Оскільки $r - fs \not\equiv 0 \pmod{p}$, то існує єдиний розв'язок системи

$$\begin{cases} i + fj \equiv 1 & (\text{mod } p), \\ si + rj \equiv 1 & (\text{mod } p). \end{cases}$$

Для цього розв'язку $y = ab$ знову існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \lambda \langle g \rangle$, яка не містить G' . Ця суперечність показує, що випадок 2) неможливий і взагалі, що посилка $g \notin Z(G)$ невірна. Отже, $B_2 = 1$, $B_1 = \langle x \rangle$, $H = F$. Якщо C містить елемент c такий, що $|c| = p^\beta$, то в G існує неабелева підгрупа $\langle a \rangle \lambda \langle bc \rangle$, що не містить G' . Звідси $\exp C \leq p^{\beta-1}$. Лема доведена.

Лема 2.5.6. Нехай G — $*$ -група, що не містить власних доповнюваних неабелевих підгруп і має елементи порядку p , що не належать G' . Тоді $G = A\lambda\langle x \rangle$, де $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geq \alpha \geq \beta > 1$, $[a, x] = b^{p^{\alpha-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, і справедливе одне із тверджень:

$$1) \alpha = \beta + 1, t = 0;$$

2) $\alpha = \beta$, при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p , при $p = 2$ $s = t = 1$.

Доведення. За твердженням 5) леми 2.5.1 $G = F\lambda X$, де $X = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times C$, $F \supset G'$, всі елементи порядку p належать G' , $F\lambda(\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle)$ — $*$ -група. За умовою леми $C = 1$. Якщо $[x_1, x_2] \neq 1$, то підгрупа $\langle x_1, x_2 \rangle$ — неабелева і не містить G' . Ця суперечність показує, що $[x_1, x_2] = 1$ і хоча б одна із підгруп $F\lambda\langle x_i \rangle$ неабелева, $\delta \in \{1, 2\}$.

Не порушуючи загальності можемо вважати, що $F\lambda\langle x_1 \rangle$ — неабелева, тоді $x_2 = 1$. За властивостями F $x_1 \neq 1$. Покладемо $x_1 = x$, $|x| = p^\gamma$. За умовою леми $F' = 1$. Зрозуміло, що $G = F\lambda\langle x \rangle$, $G' = [F, \langle x \rangle]$. Тоді в F знайдеться елемент y , такий, що $||[x, y]|| = p$. В G існує неабелева підгрупа $(([x, y]) \times \langle y \rangle)\lambda\langle x \rangle$, що містить G' . Звідси $|G'| = p^2$ і за властивостями F $F = A$ — метациклічна група. Нехай $\langle a \rangle$ — найбільша циклічна підгрупа ю A , $|a| = p^\alpha$. Тоді в A знайдеться елемент b , $|b| = p^\beta$, що $[a, x] = b^{p^{\alpha-1}}$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $\alpha \geq \beta > 1$. За лемою 2.5.3 $\alpha \leq \beta + 1$,

$[b, x] = a^{sp^{p-1}} \cdot b^{tp^{p-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$. При $\alpha = \beta + 1$ $t = 0$, при $\alpha = \beta$ і $p > 2$ $t^2 + 4s$ — квадратичний лишок за модулем p , а при $p = 2$ $t = s = 1$. При $\alpha > \beta$ в G справедливе твердження 1), а при $\alpha = \beta$ в G справедливе твердження 2), за виключенням умови $\gamma \geq \alpha$. Доведемо цю властивість.

Нехай $\gamma < \alpha$. Тоді при $p\alpha > 4$ покладемо $a_1 = a \cdot x^{-1}$, $b_1 = b \cdot x^{-t}$. Неважко показати, що в G існує підгрупа Міллера–Морено, $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$, що доповнюється в G підгрупою $\langle x \rangle$. Це суперечить умові леми.

Нехай $p\alpha = 4$. Покладемо $a_1 = ax$. Тоді в G існує доповнювана неабелева підгрупа $\langle a_1 \rangle \lambda \langle b \rangle$ за допомогою $\langle x \rangle$, що теж неможливо. Отже, $\gamma \geq \alpha$. Лема доведена.

Лема 2.5.7. Нехай $\ast$ -група $G = F\lambda C$, де F — група одного з типів 1) або 2) леми 2.5.2. Тоді C — центральна в G елементарна абелева 2-група.

Доведення. Нехай $G = F\lambda C$ — досліджувана група. Тоді $p = 2$, $F \supset H = A \cdot \langle y \rangle$, де $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ $[a, y] = a^2$, $[b, y] = y^2 = a^2b^2$ і $Y_1 = \langle y \rangle \lambda \langle b \rangle$, $Y_2 = \langle a \rangle \lambda \langle y \rangle$ — неабелеві підгрупи. За лемою 2.5.1 для будь-якого $g \in G$ $g^2 \in Z(G)$. За лемою 2.5.2 $G' = A' = F'$ — центральна в G елементарна абелева 2-група порядку 4, що міститься в будь-якій нециклічній підгрупі із F .

Нехай c — довільний елемент із C . Покажемо, що $c \in Z(G)$ і $|c| \leq 2$. Нехай $|c| > 1$. Покажемо, що $\{H, C\} = 1$ і $|c| = 2$. Якщо $\{H, C\} = 1$, то в G існує неабелева підгрупа $Y\lambda\langle bc \rangle$, що за лемою 2.5.1 містить $G' = \langle y^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle$. Звідси $bc^2 = b^2$, $|c| = 2$. Припустимо, що $[C, H] \neq 1$. Покладемо $M_1 = Y_1\lambda C$, $M_2 = Y_2\lambda C$. Можливі випадки: 1) $[y, c] = 1$, 2) $[y, c] \neq 1$.

Випадок 1. За лемою 2.5.4 M_2 не може бути $\ast$ -групою. Тоді $[a, c] = 1$. Оскільки $A\lambda\langle yc \rangle \supset G'$, то $|c| = 2$. Нехай $[b, c] = z$. За вибором c $|z| = 2$, $\langle z \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Якщо $z = y^2$, то $z = ab^2$ і в G існує неабелева підгрупа

$\langle ab \rangle \lambda \langle c \rangle$ порядку p , що неможливо. Отже, $z = a^2$. Але при цій умові в G існує підгрупа кватерніонів $\langle y \rangle \cdot \langle bc \rangle$. Отже, у випадку 1) $[H, C] = 1$, C — елементарна абелева група.

Випадок 2. В цьому випадку M_1 — $\ast$ -група з умовою $p\alpha = 4$, що є групою типу 3) леми 2.5.4. Звідси $|c| = 2$ і $[y, c] = b^2$, $[b, c] = b^2 y^2 = a$. Зрозуміло, що M_2 — $\ast$ -група типу 3) леми 2.5.4, тому $[a, c] = y^2$. При одержаних співвідношеннях G має підгрупу кватерніонів $\langle bx \rangle \cdot \langle bxac \rangle$, що неможливо. Отже, випадок 2) неможливий.

Якщо тепер $H = F$, тобто F — група типу 1) леми 2.5.1, то лема доведена.

Нехай F — група типу 2) згаданої леми. Тоді H — власна підгрупа із F і $F = H \cdot \langle x \rangle$. Розглядаючи підгрупу $(A \cdot \langle x \rangle) \lambda \langle c \rangle$, прийдемо до розглянутого випадку 1), за яким C — елементарна абелева центральна в G 2-підгрупа. Лема доведена.

Лема 2.5.8. Нехай G — $\ast$ -група, в якій не доповнюється жодна підгрупа Міллера-Морено. Тоді $G = H \times C$, де C — абелева група, $\exp C \leq p^{\delta-1}$, де p^{δ} — порядок нецентрального елемента із H найменшого порядку, а H — група одного з типів:

- 1) H — група одного з типів 1), 2) леми 2.5.1;
- 2) H — група типу 1) або 2) леми 2.5.6;
- 3) H — скінченна $\ast$ -група з елементарним абелевим комутантом $G' = H'$ порядку p^3 , всі елементи порядку p із H належать G' .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За твердженням 5) леми 2.5.1 $G = F \lambda X$, де $X = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times C$, і $G' \subset F$, всі елементи порядку p із F належать G' , $H = F \lambda (\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle)$ — $\ast$ -група. Можливі випадки: 1) $|G'| = p^3$, 2) $|G'| = p^2$.

Випадок 1. Покажемо, що $X \subset Z(G)$. Дійсно, в протилежному випадку

знайдуться елементи $u \in F$, $v \in X$, що $[u, v] \neq 1$. Тоді за лемою 2.5.1 підгрупа $\langle [u, v] \rangle \cdot \langle u \rangle$ неабелевої підгрупи $(\langle [u, v] \rangle \cdot \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$ містить G' . Але тоді $|G'| < p^3$, що суперечить випадку 1). Отже, $X \in Z(G)$ і $G = F \times X$. Нехай u — нецентральный в G елемент найменшого порядку із F , $|u| = p^6$. Якщо $X = \langle v \rangle$, $|v| = p^6$, то за вибором u в F знайдеться елемент a , для якого $[a, u] = [a, uv] \neq 1$. За лемою 2.5.1 в G існує неабелева підгрупа $\langle [a, u] \rangle \cdot \langle a \rangle \lambda \langle uv \rangle$, що містить G' . Але тоді $G' \subset \langle [a, u] \rangle \cdot \langle a \rangle$, що неможливо. Отже, $\exp X \leq p^{6-1}$. Покладемо $X = C$, одержимо $F = H$. Тоді H — група типу 3) розглядуваної леми і лема в цьому випадку доведена.

Випадок 2. Можливі такі випадки: 2.1) F — $*$ -група; 2.2) F — не $*$ -групою.

Випадок 2.1. В цьому випадку F задовольняє умовам леми 2.5.2, а тому є її групою 1) або 2) і G задовольняє умову леми 2.5.7. Покладемо $F = H$, тоді $G = H \times C$, C — центральна елементарна абелева 2-група, а G — група типу 1) цієї леми.

Випадок 2.2. В цьому випадку $|F'| < p^2$. Нехай $|F'| = p$. За лемою 2.5.1 F не містить підгруп кватерніонів і F не може бути циклічною групою. За наслідком 1.1.3 $F = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, $\langle [u, v] \rangle = F'$. За твердженням 1.1.2 F — підгрупа Міллера–Морено, що доповнюється в G , а це суперечить умові леми. Отже, $F' = 1$. Оскільки G' — елементарна абелева група порядку p^2 , а всі елементи порядку p із F належать G' , то $F = A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\alpha \geq \beta$. Покажемо, що G містить $*$ -підгрупу $A \lambda \langle x \rangle$, де $x \in \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$ і $\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle = \langle x \rangle \times \langle d \rangle$. Якщо $[A, \langle x_i \rangle] = G'$, то покладемо $x_i = x$, $x_j = d$. В протилежному випадку покладемо $x = x_1 x_2$, а $d = x_j$; де $|x_j| \leq |x_i|$, $i, j \in \{1, 2\}$. Отже, $G = H \lambda (\langle d \rangle \times C)$, $X = \langle x \rangle \times \langle d \rangle \times C$, $H = A \lambda \langle x \rangle$ — $*$ -група. $|x| = p^2$. Покажемо, що в H не доповнюється жодна власна неабелева підгрупа. Нехай $H = U \cdot V$, $U \cap V = 1$, $U' \neq 1$. За лемою 2.5.1 $G' \subset U$, $H = U \lambda V$.

$V' = 1$. Оскільки $H = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, то H/G' — прямий добуток трьох циклічних груп. Якщо U — власна підгрупа із H , то U/G' — прямий добуток двох циклічних груп. Нехай u, v — елементи із U , $[u, v] \neq 1$. Тоді за лемою 2.5.1 $\langle u, v \rangle \supset G'$. Отже, $U = \langle u, v \rangle$ і за твердженням 1.1.2 U — група Міллера-Морено. Нехай $D = \langle d \rangle \times C$. Тоді $G = H \lambda D$. Нехай d — елемент із D , c — елемент із V . Підгрупа $\langle [c, d] \rangle \cdot \langle c \rangle \lambda \langle d \rangle$, очевидно, не містить G' , тому за лемою 2.5.1 $[c, d] = 1$, в G існує підгрупа $V \times D$, що доповнює в G підгрупу Міллера-Морено U , а це суперечить умові леми. Отже, $\ast$ -група H не містить доповнюваних в H власних неабелевих підгруп. Тому вона є групою 1) або 2) леми 2.5.6.

Покажемо, що $D \subset Z(G)$. Дійсно, якщо це не так, тоді в A знайдеться елемент a_1 , в D знайдеться елемент d_1 , що $[a_1, d_1] \neq 1$ і в G існує неабелева підгрупа $(\langle [a_1, d_1] \rangle \cdot \langle a_1 \cdot x \rangle) \lambda \langle d_1 \rangle$, що за лемою 2.5.1 містить G' . Для груп обох типів леми 2.5.6 $\exp H = p^\gamma$, тому $\langle a_1 \cdot x \rangle \cap A = 1$, а значить $G' \subset \langle [a_1, d_1] \rangle$.

Покладемо $D = C$. Одержимо $G = H \times C$. Нехай C містить елемент c , $|c| = p^\beta$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $(\langle [b, x] \rangle \times \langle x \rangle) \lambda \langle b \cdot c \rangle$, що не містить G' , а це суперечить лемі 2.5.1. Отже, $\exp C \leq p^{\beta-1}$ і H — група типу 2) розглядуваної леми. Лема доведена.

Лема 2.5.9. Нільпотентна неперіодична метабільтонова група G з абелевим комутантом типу (p, p) , p — просте число, має вид $G = F \cdot C$, де $F = A \lambda \langle x \rangle$, $A = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|c| = p^\delta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta \in \{0, 1\}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = c \in Z(G)$, $F \cap C = \langle z \rangle$, $z = x^{p^\gamma}$, $\gamma > 0$, $|x| = \infty$, $C/\langle z \rangle$ — періодична група, експонента силовської p -підгрупи якої не перевищує $p^{\beta-1}$, і G — група одного з типів:

1) $\alpha = \beta > 1$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $c = a^{sp^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, при $p = 2$ $s = t = 1$, при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

2) $\alpha - 1 = \beta > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;

3) $\alpha - 1 = \beta = 1$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $c = a^{sp}$, $0 < s < p$ — просте число більше 2;

4) $\delta = \alpha = \beta = 1$, $A = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.3.4 $G = U \cdot D$, де $U = P\lambda\langle x \rangle$, $D \subset Z(G)$, $U \cap D = \langle z \rangle$, $z = x^{p^\gamma}$, $\gamma > 0$, $D/\langle z \rangle$ — періодична група без p -елементів, p — просте число, P — абелева силовська p -підгрупа із G обмеженої експоненти, $G' = U' \subset P$, $U/\langle z \rangle = \bar{U}$ — силовська p -підгрупа із $G/\langle z \rangle$, що є метагамільтоновою групою з абелевим комутантом типу (p, p) , що міститься в $\bar{P} = P \times \langle z \rangle / \langle z \rangle$. Ясно, що $\bar{U} = \bar{P}\lambda\langle \bar{x} \rangle$, де $\langle \bar{x} \rangle = \langle z \rangle \cdot x$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $p^\gamma > \exp P$. Можливі випадки: 1) $\bar{U}' \subset Z(\bar{U})$, 2) $\bar{U}' \not\subset Z(\bar{U})$.

Випадок 1. Неважко показати, що в $\bar{U}$ не доповнюється жодна підгрупа Міллера-Морено. Тоді $\bar{U}$ задовольняє умову леми 2.5.8 і є її групою типу 2). Тоді для груп згаданих типів $\bar{U} = \bar{P}_1 \times \bar{H}$, де $\bar{H} = \bar{A}\lambda\langle \bar{x} \rangle$, а $\bar{A} = \langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{b} \rangle$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{x}$ задовольняють тим же співвідношенням, що a , b , x в групах типу 1) або 2) леми 2.5.6 $|\bar{a}| = p^\alpha$, $|\bar{b}| = p^\beta$, $|\bar{x}| = p^\gamma$, $\bar{P}_1$ — центральна в $\bar{U}$ p -група, експонента якої не перевищує $p^{\beta-1}$. Покладемо $\bar{C} = \bar{P}_1 \times \bar{D}$, де $\bar{D} = D/\langle z \rangle$. Тоді $G = H \cdot C$, $H \cap C = \langle z \rangle$, $H = A\lambda\langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, a , b , x задовольняють тим же співвідношенням, що і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{x}$. Якщо a , b , x задовольняють співвідношенням для груп типів 1) або 2) леми 2.5.6, то, покладаючи $H = F$ одержимо, що G — група типу 1) або 2) розглядуваної леми відповідно. Випадок 1) розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку $\bar{U}$ задовольняє умову теореми 2.5.1 і може бути групою одного із її типу б)-5). Очевидно, що $\bar{U}$ — скінченна група і при виборі p^γ може бути групою типу 4) та 5). У відповідності до цих типів покладаємо $U = F$, $D = C$ і одержимо, що G — група типу 3) та

4) розглядуваної леми. Лема доведена.

Теорема 2.5.2. Нільпотентна метагамільтонова група G з абелевим комутантом типу (p, p) , p — просте число, має вид $G = F \cdot C$, $C \subset Z(G)$, $F \cap C = \langle z \rangle$, $C/\langle z \rangle$ — періодична група, $F = \langle y \rangle \cdot A \cdot \langle x \rangle$, $A = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|c| = p^\delta$, $|y| \in \{1, 4\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta \in \{0, 1\}$, $z = x^{p^\gamma}$, $\gamma > 0$, $|x| \in \{p^\gamma, \infty\}$, $[b, x] = c \in Z(G)$, експонента силовської p -підгрупи в $C/\langle z \rangle$ не перевищує $p^{\beta-1}$ і F — група одного з типів:

1) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $p = 3$, $\alpha = \gamma = 2$, $c = a^3 = x^6$; $|x| = p^\gamma$, $|y| = 1$, $[a, x] = b$, $\beta = 1$;

2) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $\gamma = 1$, $\alpha > 1$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $c = 1$, $|x| = p^\gamma$, $p > 2$, $|y| = 1$, $[a, x] = b$, $\beta = 1$;

3) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $\gamma = 1$, $\alpha > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $|x| = p^\gamma$, $p > 2$, $|y| = 1$, $[a, x] = b$, $\beta = 1$;

4) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $\alpha = 2$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $p > 2$, $|y| = 1$, $[a, x] = b$, $\beta = 1$;

5) $A = \langle c \rangle \times \langle b \rangle \times \langle a \rangle$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $\alpha = \beta = \delta = 1$, $p > 2$, $|y| = 1$, $[a, x] = b$, $\beta = 1$;

6) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $\alpha = \beta + 1$, $\beta > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $|y| = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $F = A \lambda \langle x \rangle$;

7) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $\alpha = \beta > 1$, при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p , при $p = 2$ $s = t = 1$, $|y| = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $F = A \lambda \langle x \rangle$, $c = a^{sp^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$;

8) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $c = 1$, $\alpha \geq \beta > 1$, $|y| = 1$, $\beta \geq \gamma$, $\alpha > \gamma$, $|x| = p^\gamma$, $p\alpha > 4$, $|y| = 1$, $|x| = p^\gamma$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $F = A \lambda \langle x \rangle$;

9) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $\alpha - 1 = \beta \geq \gamma$, $\beta > 1$, $|x| = p^\gamma$, $|y| = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $F = A \lambda \langle x \rangle$;

10) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $c = a^{sp^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $\alpha = \beta > \gamma$, $\beta > 1$, при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p , при $p = 2$, $p\alpha > 4$ $s = t = 1$ і при $p\alpha = 4$ $s = 1$, $0 \leq t \leq 1$, $|y| = 1$,

$$|x| = p^\gamma, [a, x] = b^{p^{\beta-1}}, F = A\lambda\langle x \rangle;$$

11) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $p = 2$, $\alpha \ominus \beta = \gamma = 2$, $|y| = 1$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$, $|x| = 4$;

12) $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = |b| = |x| = |y| = 4$, $[a, y] = x^2 = y^2 = a^2 b^2$, $[a, x] = a^2 = [x, y]$, $[b, y] = b^2$, $[b, x] = y^2$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Розглянемо можливі випадки: 1) G — неперіодична група; 2) G — періодична група.

Випадок 1. В цьому випадку G задовольняє умову леми 2.5.9 і є її групою одного з типів 1)–4), а значить групами типів 4)–7) відповідно.

Випадок 2. В цьому випадку $G = P \times D$, P — силовська p -підгрупа із G , D — її абелеве холловське доповнення. Можливі випадки: 2.1) $P' \not\subset Z(P)$; 2.2) $P' \subset Z(P)$.

Випадок 2.1. В цьому випадку P задовольняє умову теореми 2.5.1 і є її групою типів 1)–5). Покладаючи $P = F$, $D = C$, одержимо, що G — група типу 1)–5) розглядуваної теореми відповідно.

Випадок 2.2. В цьому випадку можливі випадки: 2.2.1) P містить доповнювані в P підгрупи Міллера–Морено; 2.2.2) P не містить доповнюваних підгруп Міллера–Морено.

Випадок 2.2.1. В цьому випадку P задовольняє умову леми 2.5.5. Тоді $P = F \times C_0$, де F — група одного з типів 1)–3) леми 2.5.4, а C — абелева p -група, експонента якої не перевищує $p^{\beta-1}$, $F = A\lambda\langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$. Покладемо $C = C_0 \times D$. Тоді $G = F \times C$. Якщо F — група одного з типів 1)–3) леми 2.5.4, тоді F — група одного з типів 8)–10) розглядуваної теореми відповідно.

Випадок 2.2.2. В цьому випадку P задовольняє умову леми 2.5.8.

Тоді $P = F \times C_0$, де F — група одного з типів 1) або 2) згаданої леми, а C — абелева p -група, експонента якої не перевищує $p^{\beta-1}$. Покладемо $C = C_0 \times D$. Тоді $G = F \times C$. Нехай F — група типу 1) леми 2.5.8. Тоді вона група одного з типів 1) або 2) леми 2.5.2 і є групою типу 11), 12) розглядуваної теореми відповідно.

Якщо F — група типу 2) леми 2.5.8, то вона група типу 1), 2) леми 2.5.4, а значить група типу 6), 7) розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуті. Теорема доведена.

Зауваження 2.5.2. Групи типів 1)–12) теореми 2.5.2 вичерпують всі нільпотентні метагамільтонові групи з абелевим комутантом типу (p, p) і кожна з цих груп є тільки такою. Достатність ми не наводимо через громіздкість.

2.6 Нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p, p)

Твердження 2.6.1 [119]. Скінченні метагамільтонові p -групи з нецентральним абелевим комутантом типу (p, p, p) вичерпуються групами типу:

$G = \langle x \rangle \cdot G' \cdot \langle y \rangle$, $G' = \langle \pi \rangle \times \langle \tau \rangle \times \langle \sigma \rangle$, $\pi \in Z(G)$, $G = ((\langle x \rangle \times \langle \tau \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle) \cdot \langle y \rangle$, $x^p = \pi \tau^\alpha$, $y^p = \pi^\gamma \tau$, $[x, y] = \sigma$, $[x, \sigma] = \tau$, $[y, \sigma] = \pi$, σ, π, τ — елементи порядку p із G , $p > 2$ — просте число.

Теорема 2.6.1. Довільні метагамільтонові p -групи з нецентральним абелевим комутантом типу (p, p, p) , p — просте число, мають вид $G = \langle a \rangle \cdot ((\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle)$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$, $p > 2$ — просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c \in Z(G)$, $b^p \in Z(G)$, і є групами одного з типів:

- 1) $p = 3$, $a^3 = b^3$, $[a, x] = c^{-1}a^3$;
- 2) $p > 3$, $c = a^{sp} \cdot b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $[a, x] = b^{fp}$, $0 < f < p$,

$t^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо, що $|G| < \infty$. Нехай це не так. Точно так, як в лемі 2.5.1, прийдемо до суперечності. Стже, $|G| < \infty$ і G — група із твердження 2.6.1. За цим твердженням G має нормальну підгрупу $M = (\langle \pi \rangle \times \langle y \rangle) \lambda \langle \sigma \rangle \supset G'$. Оскільки $p > 2$, то характеристична підгрупа із M , породжена p -ми степенями всіх елементів із M , співпадає з $\langle y^p \rangle$. Отже, $\langle y^p \rangle \triangleleft G$ і $y^p \in Z(G)$. Звідси $Z(G) \supset Z = \langle \pi \rangle \times \langle y^p \rangle = \langle \pi \rangle \times \langle \tau \rangle$. Покажемо, що всі елементи порядку p із G належать $G' = \langle \pi \rangle \times \langle \tau \rangle \times \langle \sigma \rangle$. Дійсно, нехай це не так. Тоді в G існує елемент $z \notin G' = Z \times \langle \sigma \rangle$. Тоді в G існує підгрупа $G' \lambda \langle z \rangle$. Якщо $[\sigma, z] \neq 1$, то в G існує неабелева підгрупа $\langle [z, \sigma] \rangle \times \langle \sigma \rangle \lambda \langle z \rangle \not\subset G'$, а це суперечить теоремі 2.2.2. Отже, $[\sigma, z] = 1$. При цих умовах $|G : C_G(\sigma)| = p$ і нормальне замикання $N = \langle \sigma \rangle^G$ має порядок p^2 і $N = \langle c_1 \rangle \times \langle \sigma \rangle$, $\langle c_1 \rangle = Z \cap N$. Звідси $G/\langle c_1 \rangle$ має центральний елементарний абелевий комутант $Z/\langle c_1 \rangle \times N/\langle c_1 \rangle$. Очевидно, що G — 2-породжена група. Тоді $G/\langle c_1 \rangle$ — 2-породжена з центральним комутантом порядку p , що неможливо. Отже, всі елементи порядку p із G належать G' .

Нехай $0 \leq i < p$, $0 \leq j < p$, $z = x^i \cdot y^j$. За попереднім $|z| > p$. За твердженням 1.1.10 $z^p = y^{jp} \cdot x^{ip} \cdot \tau^{-\frac{1}{2}ijp(p+1)(i(4p-1)-3)} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}ijp(p+1)(j(2p+1)-3)}$. Зрозуміло, що $[z, \sigma] = \pi^j \cdot \tau^i$. Можливі випадки: 1) $p = 3$; 2) $p > 3$.

Випадок 1. В цьому випадку $z^3 = \pi^{(1-j^2)i+\delta j} \cdot \tau^{\alpha i+(1+i^2)j}$. Зрозуміло, що при $ij = 0$ $|z| = 9$. Нехай $ij \neq 0$. Тоді $i^2 = j^2 = 1$ і $z^3 = \pi^{\delta j} \cdot \tau^{\alpha i-j}$. Звідси $\alpha \delta \not\equiv 0 \pmod{3}$.

За теоремою 2.2.2 в G не існує неабелевої підгрупи виду $\langle z \rangle \lambda \langle \sigma \rangle$. Тому $[z, \sigma] \notin \langle z \rangle$. Звідси нерозв'язна система конгруенцій:

$$\begin{cases} -ni + \delta j \equiv 0 & (\text{mod } 3), \\ \alpha i - (n+1)j \equiv 0 & (\text{mod } 3). \end{cases}$$

За відомими результатами [28] $1 + 4\alpha\delta$ — неквадратичний лишок за

модулем 3. Це означає, що $\alpha\delta = 1$. При цих умовах можливі тільки такі випадки: $\alpha = 1, \delta = 1$ або $\alpha = -1, \delta = -1$. Кожний з цих випадків визначає одну і ту ж групу G і $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle y^3 \rangle$. Покладемо $\sigma = x, i = c, x = a, y = b$. Тоді $\tau = c^{-1}a^3$ і G — група типу 1) теореми.

Випадок 2. В цьому випадку $z^p = \pi^{i+\delta j} \cdot \tau^{\alpha i+j}$. Звідси, як і в попередньому випадку, $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{p}$, а також нерозв'язна система конгруенцій:

$$\begin{cases} (1-n)i + \delta j \equiv 0 & \pmod{p}, \\ \alpha i + (1-n)j \equiv 0 & \pmod{p}. \end{cases}$$

Як і раніше, $4\alpha\delta$ — неквадратичний лишок за модулем p . Ясно, що $\alpha\delta$ — неквадратичний лишок за модулем p . З цих співвідношень випливає, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. Покладемо $z = b, x = a, [a, b] = x$ для тих i та j , що задовольняють систему конгруенцій

$$\begin{cases} i + \delta j \equiv 0 & \pmod{p}, \\ \alpha i + j \equiv 1 & \pmod{p}. \end{cases}$$

Тоді $M = (\langle \pi \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle, b^p = \tau, [a, x] = b^{fp}, 0 < f < p, Z = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$. Нехай $c = [b, x]$. Тоді $c = a^{sp} \cdot b^{tp}, 0 < s < p, 0 \leq t < p$. Покладемо $z = a^i \cdot b^j$. Як і раніше, $z^p = a^{ip} \cdot b^{jp}, [z, x] = a^{isp} \cdot b^{(if+jt)p}$ і нерозв'язна система конгруенцій:

$$\begin{cases} ni - sj \equiv 0 & \pmod{p}, \\ -fi + (n-t)j \equiv 0 & \pmod{p}. \end{cases}$$

З цього випливає, що $i^2 + 4sf$ — неквадратичний лишок за модулем p і G — група типу 2). Теорема доведена.

Зауваження 2.6.1. Як видно з доведення теореми 2.6.1 багато груп із твердження 2.6.1 не є метабільтонові, наприклад, при $\delta = \gamma$. Групи із теореми 2.6.1 є метабільтоновими, але ми цього доведення не

наводимо через його об'ємність.

Означення 2.6.1. В цьому параграфі під $\ast$ -групою будемо розуміти метабільтонову p -групу з центральним комутантом типу (p, p, p) . Зрозуміло, що $\ast$ -група цього випадку є частинним випадком $\ast$ -групи означення 2.5.1.

Лема 2.6.1. Нехай $\ast$ -група G не містить власних доповнюваних неабелевих підгруп. Тоді $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 1$, $Z(G) = \Phi(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times \langle x^{p^{\gamma-1}} \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді G задовольняє умову леми 2.5.8 і є групою її типу 3). Всі групи згаданого типу скінченні і всі їх елементи порядку p належать G' . Ясно, що $G/G' = \times_{i \in I} X_i/G'$, де $X/G' = \langle G'x_i \rangle$, $|x_i| = p^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 1$, $G' \cap \langle x_i \rangle = \langle x_i^{p^{\alpha_i-1}} \rangle$, $|I| > 2$. Зрозуміло, що $X_i = G' \cdot \langle x_i \rangle$ і G — майже прямий добуток X_i з об'єднаною підгрупою G' . Не порушуючи загальності можемо вважати, що $\alpha_i > \alpha_{i+1}$. Неважко показати, що в G існують елементи x_i, x_j найбільшого порядку такі, що $x_i \notin Z(G)$, і $||[x_i, x_j]|| = p$.

Нехай A — підгрупа, породжена згаданими елементами x_i, x_j . За твердженням 1.1.2 A — група Міллера–Морено, яка за лемою 2.5.1 містить G' , а тому може бути тільки групою 3) твердження 1.1.1. Тоді $A = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, $[u, v] = c$, $c \in Z(G)$, $|c| = p$, $|u| > p$, $|v| > p$. Оскільки $|A'| = p$, то знайдеться x_i таке, що $[A, x_i] \notin \langle c \rangle$. Позначимо x_i найбільшого порядку з такою властивістю через x . Тоді $|x| = p^\gamma$, $\gamma > 1$, $G' \cap \langle x \rangle = \langle x^{p^{\gamma-1}} \rangle$. Покладемо $H = A \cdot \langle x \rangle$. Тоді $H \triangleleft G$, $G/H = \times_{i \in I} \langle H \cdot x_i \rangle$, $\langle x_i \rangle \cap H = \langle x_i^{p^{\alpha_i-1}} \rangle$. Покладемо $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = x$, $y_i = x_i$ і покажемо, що при $i \neq j$ $\langle y_i \rangle \cap \langle y_j \rangle = 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді знайдуться і та j такі, що $|\langle y_i \rangle \cap \langle y_j \rangle| = p$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $|y_i| \geq |y_j|$. Покладемо $M_i = \langle y_i, y_j \rangle$, $Y_i = G' \cdot M_i$, $c_i = [y_i, y_j]$. Зрозуміло, що $Y_i/G' = \langle G' \cdot y_i \rangle \times \langle G' \cdot y_j \rangle$, $c_i \in G'$. Нехай $M'_i = 1$. Тоді $M_i = \langle y_i \rangle \cdot \langle y_j \rangle$.

$|y_0| \cdot p = |y_j|$, $M_i \cap G' = \langle d_i \rangle = G' \cap \langle y_i \rangle$. Звідси $\langle y_0 \rangle \cap G' = 1$, що неможливо в групі G . Нехай $c_i \neq 1$. Тоді $M_i = (\langle c_i \rangle \times \langle y_i \rangle) \cdot \langle y_j \rangle$, $G' \cap M_i = \langle c_i \rangle \times \langle d_i \rangle$, $|c_i| = |d_i| = p$. Звідси $G' \not\subset M$, що суперечить лемі 2.5.1. Отже, при $i \neq j$ $\langle y_i \rangle \cap \langle y_j \rangle = 1$. Звідси випливає, що $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle = \langle u \rangle \cap \langle x \rangle = \langle v \rangle \cap \langle x \rangle = \langle u \rangle \cap \langle x_i \rangle = \langle v \rangle \cap \langle x_i \rangle = \langle x \rangle \cap \langle x_i \rangle = 1$. З цих властивостей і властивостей груп типу 3) твердження 1.1.1 випливає, що $A = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle a \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $[a, b] = c$, $\langle x \rangle \cap A = \langle c^k \cdot b^{jp^{\beta-1}} \rangle$, $k > 0$. Звідси $\Phi(H) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times \langle x^{p^{\gamma-1}} \rangle$, $H = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$. Якщо $H = G$, то лема доведена. Нехай $H \subset G$. Тоді в G існує підгрупа $H_1 = H \cdot \langle y \rangle$, де $y = x_i$, $i \in I$, $|y| = p^\delta$, $\delta > 1$, $|H \cap \langle y \rangle| = p$. При цьому $H \cap \langle y \rangle = G' \cap \langle y \rangle = \langle y^{p^{\delta-1}} \rangle$, $y^{p^{\delta-1}} = a^{ip^{\alpha-1}} \cdot b^{jp^{\beta-1}} \cdot x^{kp^{\gamma-1}}$, числа i, j, k з відрізка $[0, p-1]$, $i+j+k > 0$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 1$. Покладемо $z = a^{ip^{\alpha-\gamma}} \cdot b^{jp^{\beta-\gamma}} \cdot x^k$. Тоді за твердженням 1.1.9 $z^{p^{\gamma-1}} = a^{ip^{\alpha-1}} \cdot b^{jp^{\beta-1}} \cdot x^{kp^{\gamma-1}} \cdot ([a, x]^{ikp^{\alpha-\gamma}} \cdot [b, x]^{jkp^{\beta-\gamma}} \cdot [a, b]^{ijp^{\alpha+\beta-2\gamma}})^{-\frac{1}{2}p^{\gamma-1}(p^{\gamma-1}-1)}$.

Можливі випадки: 1) $z^{p^{\gamma-1}} = y^{p^{\delta-1}}$, 2) $z^{p^{\gamma-1}} \neq y^{p^{\delta-1}}$.

Випадок 1. Проводячи в цьому випадку такі ж міркування, як і раніше для y ; та y_j прийдемо до суперечності. Випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Цей випадок можливий лише коли $\gamma = \beta = p = 2$ і $[a, x] \cdot [b, x] \cdot [a, b] \neq 1$. Зауважимо, що G містить 7 різних елементів порядку 2, які складають з одиничним елементом комутант G . Покладемо $z_1 = a^{2^{\alpha-2}}$, $z_2 = b$, $z_3 = x$, $z_4 = z_1 \cdot z_2$, $z_5 = z_1 z_3$, $z_6 = z_2 \cdot z_3$, $z_7 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$. Ясно, що $|z_i| = 4$. Нехай $D = \langle z_i \rangle$, $i = \overline{1, 7}$. Тоді $G' \subset D$ і D/G' — елементарна абелева група порядку 8. Як і раніше для y_i можна показати, що для різних i та j $\langle z_i \rangle \cap \langle z_j \rangle = 1$. Звідси знайдеться i , для якого $z_i^2 = y^2$. Розглядаючи підгрупу $\langle z_i, y \rangle$ прийдемо до суперечності. Ця суперечність показує, що $G = H$ і лема доведена.

Наслідок 2.6.1. Метагамільтонова група з центральним комутантом типу (p, p, p) є періодичною групою виду $G = F \times C$, де $F = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$,

$|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 1$, F — $*$ -група із леми 2.6.1, C — періодична абелева група, експонента силовської p -підгрупи якої не перевищує $p^{\gamma-1}$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.4.1 G — періодична нільпотентна група і $G = P \times D$, де P — метагамільтонова силовська p -підгрупа із G з центральним комутантом типу (p, p, p) , а D — її холловське доповнення. Зрозуміло, що P — $*$ -група, яка задовольняє умову леми 2.5.1 і для неї справедливе твердження 5) згаданої леми. Звідси $P = F\lambda X$, де $X' = 1$, $G' \subset F$, всі елементи порядку p із F належать G' . Якщо $v \in X$, $v \notin Z(G)$, то в F знайдеться u , для якого $[u, v] = 1$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $(\langle [u, v] \rangle \cdot \langle u \rangle) \lambda \langle v \rangle$, що за лемою 2.5.1 містить G' . Але тоді неметациклічний комутант належить підгрупі $\langle [u, v] \rangle \cdot \langle u \rangle$, що неможливо. Отже, $P = F \times X$, $F' = G'$. Зрозуміло, що F задовольняє умову леми 2.6.1 і $F = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$, $|x| = p^\gamma$, $x \notin Z(F)$. Нехай $X = \langle v \rangle$, $|v| = p^\gamma$. Тоді для деякого $u \in F$ в G існує неабелева підгрупа $(\langle [u, x] \rangle \cdot \langle u \rangle) \lambda \langle x \cdot v \rangle \not\subset G'$, а це суперечить лемі 2.5.1. Тобто $\exp X \leq p^{\gamma-1}$. Покладемо $C = X \times D$. Тоді $G = X \times C$ і наслідок доведений.

Лема 2.6.2. В $*$ -групі G із леми 2.6.1 елементи a, b, x можна вибрати так, що $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \max\{2, \alpha - 1\}$, $[a, b] = x^{p^{\gamma-1}}$, $[a, x] = b^f p^{\beta-1} \cdot x^{kp^{\gamma-1}}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, $[b, x] = a^{s \cdot p^{\alpha-1}} \cdot b^t p^{\beta-1} \cdot x^{lp^{\gamma-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, і G — група одного із типів:

1) $\alpha - 1 = \beta - 1 = \gamma$, $k = l = 0$, при $p = 2$ $s = t = f = 1$, при $p > 2$ $t^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

2) $\alpha - 1 = \beta = \gamma$, $t = l = 0$, при $p = 2$ $s = f = k = 1$, при $p > 2$ $k^2 + 4f$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

3) $\alpha = \beta = \gamma = p = 2$, $f = k = s = t = 1$, $l = 0$;

4) $\alpha = \beta = \gamma > 2$, $p = 2$, $s = t = l = f = k = 1$;

5) $\alpha = \beta = \gamma$, $p > 2$, числа $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4s$, $k^2 + 4f$ — неквадратичні лишки за модулем p , метациклічні підгрупи із G абелеві.

Доведення. Нехай G — досліджувана група, тоді $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$ — група із леми 2.6.1. Тоді $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 1$. За результатами [64] кожний елемент із G' є комутатором. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $[a, b] = x^{p^{\gamma-1}} = u$. Нагадаємо, що $\Phi(G) = Z(G) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle x^p \rangle$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times \langle x^{p^{\gamma-1}} \rangle$. Нехай $[b, x] = c$, $[a, x] = d$, $b^{p^{\beta-1}} = v$, $a^{p^{\alpha-1}} = z$, $G(u) = G/\langle u \rangle$, $G(v) = G/\langle v \rangle$, $G(z) = G/\langle z \rangle$. Оскільки G' — неметациклічна група, а за лемою 2.5.1 всяка неабелева підгрупа містить G' , то метациклічні підгрупи із G абелеві. Нехай $A = (\langle u \rangle \times \langle a \rangle)\lambda\langle b \rangle$. Зрозуміло, що $G = A \cdot \langle x \rangle$, $A \cap \langle x \rangle = \langle u \rangle$ і $G(u) = A/\langle u \rangle\lambda\langle\langle u \rangle \cdot x\rangle$ — $*$ -група з центральним елементарним комутантом порядку p^2 , у якій $A/\langle u \rangle = \langle\langle u \rangle \cdot a\rangle \times \langle\langle u \rangle \cdot b\rangle$. Зрозуміло, що $G(u)$ задовольняє умову леми 2.5.3 і для неї справедливі твердження 2) або 3) згаданої леми. За цими твердженнями $\alpha - \beta \leq 1$, $\langle\langle u \rangle \cdot d\rangle = \langle\langle u \rangle \cdot v\rangle$, $\langle\langle u \rangle \cdot c\rangle = \langle\langle u \rangle \cdot z^s \cdot v^t\rangle$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$. Звідси випливає, що $d = b^f p^{\beta-1} \cdot x^{k \cdot p^{\gamma-1}}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, $c = a^{p^{\alpha-1}} \cdot b^l p^{\beta-1} \cdot x^{l \cdot p^{\gamma-1}}$, $0 \leq l < p$.
Можливі випадки: 1) $\beta > \gamma$; 2) $\beta = \gamma$.

Випадок 1. В цьому випадку $\alpha > \gamma$. Нехай $k > 0$. Покладемо $y = b^f \cdot p^{\beta-\gamma} \cdot x^k$. Тоді в G існує неабелева підгрупа $\langle y \rangle \cdot \langle a \rangle$. Отже, $k = 0$. Ясно, що $G(v) = (\langle\langle v \rangle \cdot a\rangle \times \langle\langle v \rangle \cdot x\rangle)\lambda\langle\langle v \rangle \cdot b\rangle$ — $*$ -група, що задовольняє умову леми 2.5.3, з якої випливає, що $\alpha = \gamma + 1$, $l = 0$, $\alpha = \beta$. Тепер при $p = 2$ в $G(u)$ $s = t = f = 1$ і G — група типу 1) розглядуваної леми. При $p > 2$ за тією ж лемою $t^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p і знову G — група типу 1) розглядуваної леми.

Випадок 2. Нехай в цьому випадку $\alpha > \gamma$. Тоді в $G(u)$ $t = 0$, $\alpha = \beta + 1$. Ясно, що $G(z) = (\langle\langle z \rangle \cdot b \cdot \langle z \rangle \cdot x\rangle)\lambda\langle\langle z \rangle \cdot a\rangle$. Зрозуміло, що це $*$ -група з тієї ж леми 2.5.3, за якою з умови $|\langle z \rangle \cdot a| \geq p^\beta = p^\gamma$ випливає, що $l = 0$ і

при $p = 2$ $k = f = s = 1$, а при $p > 2$ $k^2 + 4f$ — неквадратичний лишок за модулем p , тобто G — група типу 2). Нехай $\alpha = \beta = \gamma$. Можливі випадки: 2.1) $p = 2$; 2.2) $p > 2$.

Випадок 2.1. В цьому випадку $s = f = 1$. В $G(u)$ $t = 1$. Якщо $\alpha = 2$, то при $k = 0$ в $G(v)$ $l = 0$, але тоді в G підгрупа $\langle a, bx \rangle$ неабелева і не містить G' , що неможливо. Отже, $k = 1$. Знову при $l = 1$ підгрупа $\langle a, bx \rangle$ не містить G' і G — група типу 3) розглядуваної леми.

Нехай $\alpha > 2$. Тоді в $G(z)$ $k = 1$, а в $G(v)$ $l = 1$ і G — група типу 4).

Випадок 2.2. В цьому випадку $p > 2$ і за лемою 2.5.3 в $G(u)$ $t^2 + 4fs$ — квадратичний нелишок за модулем p , в $G(z)$ $k^2 + 4f$ — квадратичний нелишок за модулем p , а в $G(v)$ $l^2 + 4s$ — квадратичний нелишок за модулем p і G — група типу 5). Лема доведена.

Теорема 2.6.2. Нільпотентна метабільтонова група з абелевим комутантом типу (p, p, p) має вид $G = F \times C$, де $F = \langle a \rangle \cdot (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda(x)$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $|c| = p^\delta$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$, $\delta \in \{0, 1\}$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $[a, b] = x^{p^{\gamma-1}}$, $[b, x] = c \in Z(G)$, C — періодична абелева група, експонента силовської p -підгрупи якої не перевищує $p^{\gamma-1}$ і F — група одного з типів:

$$1) \delta = \gamma = 1, \alpha = \beta = 2, p = 3, a^3 = b^3, [a, x] = c^{-1} \cdot a^3;$$

2) $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 1$, p — просте число більше 3, $[a, x] = b^{fp}$, $0 < f < p$, $c = a^{sp} \cdot b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $t^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

3) $\alpha - 1 = \beta - 1 = \gamma > 1$, $[a, x] = b^{fp^{\beta-1}}$, $0 < f < p$, $c = a^{p^{\alpha-1}} \cdot b^{tp^{\beta-1}}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, при $p = 2$ $f = s = t = 1$, при $p > 2$ $t^2 + 4fs$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

4) $\alpha - 1 = \beta = \gamma > 1$, $c = a^{sp^{\alpha-1}}$, $0 < s < p$, $[a, x] = b^{fp^{\beta-1}} \cdot x^{kp^{\gamma-1}}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, при $p = 2$ $s = f = k = 1$, при $p > 2$ $k^2 + 4f$ — неквадратичний лишок за модулем p ;

- 5) $\alpha = \beta = \gamma = p = 2, c = a^2b^2, [a, x] = b^2x^2$;
 6) $\alpha = \beta = \gamma > 2 = p, c = a^2b^2x^2, [a, x] = b^2x^2$;
 7) $\alpha = \beta = \gamma > 1, p > 2, c = a^{sp^{s-1}} \cdot b^{tp^{t-1}} \cdot x^{lp^{l-1}}, 0 < s < p, 0 \leq t < p, 0 \leq l < p, [a, x] = b^{sp^{s-1}} \cdot x^{lp^{l-1}}, 0 < f < p, 0 \leq k < p$, числа $t^2 + 4fs, l^2 + 4s, k^2 + 4f$ — неквадратичні лишки за модулем p , метациклічні підгрупи із F абелеві.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2.4.1 $G = P \times D$, де P — силовська метагамільтонова p -підгрупа із G з абелевим комутантом типу (p, p, p) , D — її періодичне абелеве холловське доповнення, $P' = G'$. Можливі випадки: 1) $P' \not\subset Z(P)$, 2) $P' \subset Z(P)$.

Випадок 1. В цьому випадку G задовольняє умову теореми 2.6.1. Тоді $P = \langle a \rangle \cdot (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$ — група одного з типів 1) та 2) згаданої теореми. Покладемо $P = F, D = C$. Тоді $G = F \times C$ і у відповідності з типами 1) та 2) теореми 2.6.1 F — група типу 1) або 2) розглядуваної теореми.

Випадок 2. В цьому випадку P задовольняє умову наслідку 2.6.1, за яким $P = F \times C_1$, де $F = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \cdot \langle x \rangle$ — група із леми 2.6.1, C_1 — абелева p -група, експонента якої не перевищує p^{p-1} . Покладемо $C = C_1 \times D$, тоді $G = F \times C$ і F задовольняє умову леми 2.6.2 і є групою одного з її типів 1)–5). Але тоді F — група типів 3)–7) розглядуваної теореми відповідно. Теорема доведена.

Зауваження 2.6.2. Описані в теоремі 2.6.2 типи груп вичерпують всі нільпотентні метагамільтонові групи з абелевим комутантом типу (p, p, p) , але достатність цього факту ми не наводимо через громіздкість.

2.7 Загальна теорема і наслідки

Теорема 2.7.1. Метагамільтонові групи вичерпуються групами типів:

- а) ненільпотентні групи, тобто групи типів 1)–4) теореми 2.2.1;

б) нільпотентні групи з циклічним комутантом, тобто групи типів 1)–8) теореми 2.3.2 та групи з комутантом порядку 1 або p ;

в) нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p^δ, p) , $\delta > 1$, тобто групи типів 1)–4) теореми 2.4.2;

г) нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p) , тобто групи типів 1)–12) теореми 2.5.2;

д) нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p, p) , тобто групи типів 1)–7) теореми 2.6.2.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Якщо вона ненільпотентна, то вона задовольняє умову теореми 2.2.1 і є групою типів 1)–4) згаданої теореми. Тоді G — група типу а) розглядуваної теореми.

Нехай G — нільпотентна група. Тоді за теоремою 2.2.2 вона має абелевий комутант одного з типів (p^δ) , $\delta \geq 0$; (p^δ, p) , $\delta > 1$; (p, p) ; (p, p, p) . Групи з комутантами таких типів описано відповідно в теоремах 2.3.2, 2.4.2, 2.5.2, 2.6.2, а значить G — група типів б), в), г), д) розглядуваної теореми відповідно.

Достатність. Достатність для груп типу а) доведена в теоремі 2.2.1. Достатність для метациклічних груп теореми 2.3.2 також доведена. Нескладно доводитися достатність для всіх груп теореми 2.3.2. Тому можна вважати, що достатність для груп типу б) доведена.

Доведення достатності для груп типів в), г), д) досить громіздке, і ми його тут не приводимо, хоча достатність справедлива. Теорема доведена.

Теорема 2.7.2. Недедекіндові метатамільтонові $H(S)$ -групи мають вид $G = R \times D$, де D — періодична абелева холловська підгрупа із G , R — сплювська r -підгрупа із G , $R = C \cdot B$, $C \triangleleft R$, C — локально циклічна r -підгрупа, що містить таку підгрупу $\langle a \rangle$, для якої $|a| = r^\alpha$, $G' = \langle a^{r^\alpha} \rangle$.

$S = (\langle a^{r^m} \rangle \cdot \langle b \rangle) \times D$, $\alpha > k \geq m > 0$, $r^k > 2$, $k \geq \alpha - k$, $B \cap C \subset R'$, і R — група одного з типів:

1) $C = \langle a \rangle$, $\alpha - k \leq m$, $B \cap \langle a \rangle = 1$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $Z \subset Z(G)$, $|b| = r^\beta$, $[a, b] = a^{r^k}$, $\beta \geq \alpha - k$, $\exp B \leq r^{k-m+1}$;

2) $C = \langle a \rangle$, $m < \alpha - k$, $B \cap \langle a \rangle = 1$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $Z \subset Z(G)$, $|b| = r^\beta$, $[a, b] = a^{r^k}$, $k - m + 1 \geq \beta$, $\beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq r^{2k-\alpha+1}$;

3) B — майже прямий добуток підгруп $B' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $B' = R' = \langle a^{r^{\alpha-i}} \rangle \subset Z(G)$, $\alpha > m$, $\alpha > 2$, $|b_i| = r^{\beta_i}$, $\alpha - m \geq \beta_i > 0$ для всіх $i \in I$, $|I| > 1$, $r^{\alpha-m} > 2$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді вона задовольняє умову теореми 1.4.2, а тому $G = R \times D$, де R — недедекіндова $H(U)$ -силовська r -підгрупа із G , $S = U \times D$, D — дедекіндова холловська періодична підгрупа із G . Оскільки G — метабільтова група, то за теоремою 2.2.2 $D' = 1$. Зрозуміло, що при умові $|B'| = |R'| = p$ за теоремою 1.4.2 G — група типу 3).

Нехай $B' \neq R'$. Оскільки $B' \subseteq R'$, то $B' \subset R'$. За теоремою 2.2.2 $B' = 1$ і можна вважати, що $B = \times_{i \in I} \langle b_i \rangle$ і $R = C \lambda B$. Оскільки R — недедекіндова група, то $C \not\subset Z(G)$, а значить C не може бути квазіциклічною групою. Звідси $C = \langle a \rangle$. Нагадаємо, що за теоремою 1.4.2 $R = \langle a \rangle \cdot B$, $U = \langle a^{r^m} \rangle \cdot B$, $|a| = r^\alpha$, $R' = \langle a^{r^k} \rangle$, $\alpha > k \geq m > 0$, $r^k > 2$, $\alpha - k \leq k$, $R = \langle a \rangle \lambda B$, $\exp B \leq r^{k-m+1}$. Зрозуміло, що R — метабільтова група з центральним циклічним комутантом $R' = \langle a^{r^k} \rangle$. Нехай $m \geq \alpha - k$. Зрозуміло, що R задовольняє умову леми 2.3.3. Тоді $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = r^\beta$, $Z \subset Z(G)$ і R — група типу 1) теореми.

Нехай далі $m < \alpha - k$. Тоді $r^{k-m+1} \geq r^{2k-\alpha+1}$. Знову R — група одного з типів 1), 2) леми 2.3.3. Звідси $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $Z \subset Z(G)$, $|b| = r^\beta$, $[a, b] = a^{r^k}$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq r^{2k-\alpha+1}$ і R — група типу 2) теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група із теореми. Тоді, очевидно, вона неде-

декіндова і за теоремою 1.4.2 G — $H(S)$ -група. Зрозуміло, що якщо R — група типу 3) теореми, то G — метагамільтонова. Метагамільтоновість групи R , а з нею і групи G , коли R — група типу 1)–2) теореми, перевіряється безпосередньо. Достатність доведена. Теорема доведена.

Глава 3

Локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами

3.1 Попередні результати.

Означення 3.1.1. Група G , у якої нормальні всі нескінченні неабелеві підгрупи називається $H(I\bar{A})$ -групою.

Означення 3.1.2. [138] Нескінченна неабелева $H(I\bar{A})$ -група називається $\overline{TH}$ -групою.

Зауваження 3.1.1. Зрозуміло, що клас $H(I\bar{A})$ -груп є об'єднанням класів скінченних груп, нескінченних абелевих груп, нескінченних метабільтонових груп і неметабільтонових $\overline{TH}$ -груп, а клас $\overline{TH}$ -груп є об'єднанням класів нескінченних неабелевих метабільтонових і неметабільтонових $\overline{TH}$ -груп. Оскільки всі метабільтонові групи описані в главі II, то предметом дослідження цієї глави будуть лише неметабільтонові $\overline{TH}$ -групи. Нескінченні групи Міллера-Морено є очевидно $H(I\bar{A})$ -групами. Тому ми розглядаємо $\overline{TH}$ -групи при обмеженні локаль-

ної ступінчатості.

Означення 3.1.1. [138] Автоморфізм φ групи G називається нескінченно незвідним, якщо група G не має власних нескінченних підгруп, допустимих відносно φ .

Твердження 3.1.1. [138] Локально ступінчата неметагамільтонова $\overline{IH}$ -група G є черніковською групою, що задовольняє умовам:

1) G має нормальну повну частину R , що розкладається в прямий добуток l квазіциклічних p -груп, R належить кожній нескінченній неабелевій підгрупі із G , $0 < l, p$ — просте число;

2) $G = S \cdot \langle a \rangle$, $R \subset Z(S)$, $S = C_G(R) \triangleleft G$, $\langle a \rangle \cap S = \langle a^s \rangle$, $s > 0$, для будь-якого цілого k a^k індукує на R або тотожний, або нескінченно незвідний автоморфізм, при $l > 1$ $S' = 1$, $s > 1$;

3) G/R — скінченна метагамільтонова група, при $|G'| < \infty$ R — центральна в G квазіциклічна p -група.

Теорема 3.1.1. Група G , що є розширенням квазіциклічної p -підгрупи R за допомогою скінченної дедекіндової групи, тоді і тільки тоді є неметагамільтоновою групою, коли G' містить підгрупи порядку $p \cdot q$, де p, q — не обов'язково різні прості числа.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана неметагамільтонова група. Тоді G' містить r -елементи і $|G'| > r$. Оскільки G — локально скінченна група, а будь-яка скінченна підгрупа із G нерозв'язна, то G' містить підгрупи порядку $r \cdot q$, де r, q — не обов'язково різні прості числа. Покажемо, що $r = p$. Нехай $G' \cap R = 1$. Тоді з умови $|(G/R)'| \leq 2$ маємо, що $|G'| = 2$ і G метагамільтонова група, що неможливо. Отже, $r = p$ і необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група, що задовольняє твердженню теореми. Якщо G' — непримарна група, то за теоремою 2.2.2 G не може бути

метагамільтоновою групою. Нехай G' — примарна група. Тоді G' — p -група. Якщо $R \subset G'$, то за теоремою 2.2.2 G — неметагамільтонова група. Нехай $R \not\subset G'$. Тоді $|G'| < \infty$ і $R \subset Z(G)$. З цього випливає, що G — нільпотентна група. Зрозуміло, що $G = D \times H$, де D — сило-
вська p -підгрупа із G , H — скінченна дедекіндова група. Оскільки G' — p -група, то $G' = D'$. Якщо припустити, що G — метагамільтонова група, то метагамільтоновою групою буде і D , $|D'| > p$. За лемою, 2.3.1 D — група обмеженої експоненти, що неможливо, оскільки D містить квазіциклічну підгрупу R . Ця суперечність завершує доведення достатності.

Теорема доведена.

Наслідок 3.1.1. Група G , що є розширенням квазіциклічної групи за допомогою скінченної дедекіндової групи, тоді і тільки тоді метагамільтонова, коли $|G'| \in \{1, p\}$, p — просте число.

Наслідок безпосередньо випливає з леми 3.1.1.

Наслідок 3.1.2. Нехай G — черніківська неметагамільтонова $\overline{TH}$ -група з нецентральною повною частиною R , $S = C_G(R)$. Тоді G/R — скінченна нільпотентна метагамільтонова $H(S/R)$ -група.

Доведення. Нехай G , R , S задовольняють умову наслідку. Тоді за твердженням 3.1.1 G/R — скінченна метагамільтонова група. Оскільки $R \not\subset Z(G)$, то S — власна нормальна підгрупа із G , $R \subset S$. Нехай $g \in G \setminus S$. Покладемо $N = R \cdot \langle g \rangle$. Зрозуміло, що N — нескінченна неабелева підгрупа із G , а значить $N \not\trianglelefteq G$. За лемою 1.3.5 G/N — дедекіндова група. Зрозуміло, що будь-який елемент із різниці фактор-груп G/R і S/R має вид $\langle Rg \rangle$ і за попереднім $\langle Rg \rangle \triangleleft G/R$, а $G/R/\langle Rg \rangle$ — дедекіндова група. За лемою 1.4.1 $G/R \in H(S/R)$ -групою. Із теореми 1.4.3 випливає,

що G/R — нільпотентна група. Наслідок доведений.

Наслідок 3.1.3. Нехай G — черніковська неметагамільтонова $\overline{TH}$ -група з повною частиною R і G/R — ненільпотентна група. Тоді R — центральна в G квазіциклічна p -група, p — просте число.

Доведення. Нехай G і R задовольняють умову наслідку. За наслідком 3.1.2 $R \subset Z(G)$. З цього випливає, що $|G'| < \infty$. За твердженням 3.1.1 R — квазіциклічна p -група, p — просте число. Наслідок доведений.

3.2 Неметагамільтонові локально нільпотентні $\overline{TH}$ -групи

Лема 3.2.1. Неметагамільтонові черніковські $\overline{TH}$ p -групи з центральною повною частиною R , p — просте число, вичерпуються групами типів:

1) G — розширення центральної квазіциклічної p -групи R за допомогою скінченної дедекіндової p -групи і $|G'| > p$;

2) $G = R \times D$, R — квазіциклічна p -група, D — скінченна метагамільтонова p -група, $|D'| > p$;

3) $G = R \cdot D$, R — центральна квазіциклічна p -група, $R \cap D = R \cap D' \neq 1$, D — така скінченна p -група, що $D/(D \cap R)$ — недедекіндова метагамільтонова група, всяка неабелева підгрупа із D , що містить $R \cap D$, нормальна в D .

Доведення. Необхідність. Нехай G , R задовольняють умовам лем. За твердженням 3.1.1 R — центральна в G квазіциклічна p -група. Зрозуміло, що G/R — скінченна метагамільтонова p -група. Якщо G/R — дедекіндова група, то за теоремою 3.1.1 G — група типу 1). Нехай далі G/R — недедекіндова група. Якщо R доповнюється в G , то $G = R \times D$, де D — скінченна недедекіндова метагамільтонова p -група. Зрозуміло,

що $G' = D'$, $|D'| > 1$. При $|D'| = p$ G — метагамільтонова група. Отже, $|D'| > p$ і G — група типу 2) цієї леми.

Нехай R не доповнюється в G . За лемою 1.3.1 $G = R \cdot D$, D — скінченна p -група, $R \cap D = R \cap D' = Z \subset Z(G)$ і $G' = D'$. За умовою R не доповнюється в G , тому $Z \neq 1$. Зрозуміло, що $G/R_0 \cong D/Z$. З цього випливає, що D/Z — недедекіндова метагамільтонова група. Нехай H — неабелева підгрупа із D , $H \supset Z$. Тоді в G існує нескінченна неабелева нормальна підгрупа $N = HR$. Оскільки $Z \subset H$, то $N \cap D = H \triangleleft D$ і G — група типу 3) цієї леми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1)–3) леми. Тоді G — черніковська p -група з центральною повною частиною R і $|G'| > p$. За лемою 2.3.1 G не може бути метагамільтоновою групою. Нехай N — нескінченна неабелева підгрупа із G . Зрозуміло, що $R \subset N$. Покажемо, що $N \triangleleft G$. Якщо G — група типу 1), то це очевидно. Нехай G — група типу 2) або 3). Тоді $N = R \cdot H$, $H = N \cap D$. Оскільки $R \subset Z(G)$, то $H' \neq 1$. Ясно, що $(R \cap D) \subset H$. В групах типу 3) $H \triangleleft D$ за умовою. В групах типу 2) за теоремою 2.2.2 $D' \subset H$, а значить $H \triangleleft D$. Оскільки $R \subset Z(G)$, $H \triangleleft D$, $G = R \cdot D$, то $N \triangleleft G$. З цього випливає, що G — $\overline{IH}$ -група. Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 3.2.2. Нехай G — $\overline{IH}$ -група, що є розширенням нецентральної в G квазіциклічної p -підгрупи R за допомогою скінченної недедекіндової p -групи, p — просте число. Тоді G — 2-група виду: $G = S \cdot \langle a \rangle$, $|a| = 2^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$, $\alpha > 0$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^2 \rangle$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^2} \rangle \subset Z(G)$, для будь-якого елемента $c \in R$ $a^{-1}ca = c^{-1}$, $R \subset Z(S) = C_G(R) \triangleleft G$, $G' = R \cdot \langle a^{2^k} \rangle$, $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$, $k > 1$, $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $\langle a^{2^{k+1}}, a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{\alpha-1}} \rangle \subset Z(G)$, факторгрупа $G/R = \langle Ra \rangle \cdot (S/R)$ — група одного з типів 1)–3) теореми 2.7.2 з тими ж обмеженнями для підгруп $\langle Ra \rangle$ та S/R , що і для $\langle a \rangle$ та S в

групах вказаних типів.

Доведення. Нехай G і R задовольняють умову леми. Покладемо $S = C_G(R)$. Оскільки $R \triangleleft G$, $R \not\subset Z(G)$, то $S \triangleleft G$, $R \subset Z(S)$. За лемою 1.3.2 $p = |G : S| = 2$, $G = S \cdot \langle a \rangle$, $a^2 \in S$, для довільного $c \in R$ $a^{-1}ca = c^{-1}$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle \subset Z(A)$, $A = R \cdot \langle a \rangle$, $\alpha > 0$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^2 \rangle \subset Z(A) = \langle z \rangle \cdot \langle a^2 \rangle$, де $z \in R$, $|z| = 2$. З цього випливає, що $|a| = 2^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$. Ясно, що $G' \supseteq R$. Оскільки G/R — недедекіндова група, то $R \subset G'$. За твердженням 3.1.1 G/R — метабільтова група і за наслідком 3.1.2 G/R — $H(S/R)$ -група. З цього випливає, що G/R — 2-група одного із типів 1)–3) теореми 2.7.2, для якої $m = 1$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $G/R = \langle Ra \rangle \cdot (S/R)$, де $\langle Ra \rangle$ та S/R задовольняють тим же умовам, що і $\langle a \rangle$ та S в групах типів згаданої теореми. Для всіх груп типів теореми 2.7.2 маємо

$$G' = R \cdot \langle a^{2^k} \rangle, \quad k > 1, \quad \alpha > k \geq \alpha - k > m = 1.$$

Якщо $z \in \langle a \rangle$, то

$$Z(A) = \langle a^2 \rangle \triangleleft G.$$

Нехай $x \in S$, тоді $[a, x] = c \cdot a^{s \cdot 2^k}$, $c \in R$, s — ціле число. Звідси $x^{-1}ax = a^{1+s \cdot 2^k} \cdot c$, $x^{-1}a^2x = (a^{1+s \cdot 2^k} \cdot c)^2 = a^{2+s \cdot 2^{k+1}}$. Звідси $\langle a^2 \rangle \triangleleft S$, а значить $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло також, що $[a^2, x] = a^{s \cdot 2^{k+1}} \in Z(A)$.

Нехай $\delta > 0$. Тоді $[a^{2^\delta}, x] = a^{s \cdot 2^{k+\delta}}$. Оскільки $k > 1$, то при $\delta = \alpha - 1$ $[a^{2^\delta}, x] = 1$, а значить $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$. При $\delta = \alpha - k + 1$ $k + \delta = \alpha + 1$, тому і $a^{2^{\alpha-k+1}} \in Z(G)$. Оскільки $k + 1 \geq \alpha - k + 1$, то $a^{2^{k+1}} \in Z(G)$. З цього випливає, що $\langle a^{2^{\alpha-1}}, a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{k+1}} \rangle \subset Z(G)$ і лема доведена.

Теорема 3.2.1. Локально ступінчасті неметабільтові $\overline{IH}$ — p -групи $\mathfrak{U}$ групами типів:

1) G — розширення центральної квазіциклічної p -підгрупи R за допомогою скінченної дедекіндової p -групи, $|G'| > p$,

2) $G = R \times D$, R — квазіциклічна p -група, D — скінченна метабільтонова p -група, $|D'| > p$,

3) $G = R \cdot D$, R — центральна в G квазіциклічна p -група, $R \cap D = R \cap D' \neq 1$, всяка абелева підгрупа із D , що містить $R \cap D$, нормальна в G , $D/(R \cap D)$ — недедекіндова метабільтонова група;

4) $G = (R\lambda(a))\lambda B$, $R \triangleleft G$ — квазіциклічна 2-група, $|a| = 2^\alpha$, $G' = R \times \langle a^{2^k} \rangle$, $C_G(R) = R \times (\langle a^2 \rangle \lambda B)$, $\alpha > k > 1$, $k \geq \alpha - k$, B — скінченна абелева група виду $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = 2^\beta$, $k \geq \beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha+1}$, $[\langle a \rangle, Z] \subset R$, $[a, b] = c \cdot a^{2^k}$, $c \in R$;

5) $G = (R \cdot \langle a \rangle)\lambda B$, $R \triangleleft G$ — квазіциклічна 2-група, $|a| = 2^{\alpha+1}$, $G' = R \cdot \langle a^{2^k} \rangle$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle \subset Z(G)$, $C_G(R) = R \cdot (\langle a^2 \rangle \lambda B)$, $\alpha > k > 1$, $k \geq \alpha - k$, B — скінченна абелева 2-група виду $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = 2^\beta$, $k \geq \beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq 2^{2^k-\alpha}$, $[\langle a \rangle, Z] \subset R$, $[a, b] = c \cdot a^{2^k}$, $c \in R$;

6) $G = (R\lambda(a)) \cdot B$, $R \triangleleft G$ — квазіциклічна 2-група, $|a| = 2^\alpha$, $G' = R \times \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$, $C_G(R) = (R \times B) \cdot \langle a^2 \rangle$, $\alpha > 2$, $a^2 \in Z(G)$, B — скінченна 2-група, що розкладається в майже прямий добуток своїх нормальних підгруп $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $\langle c \rangle = B' = B \cap (R\lambda(a)) \subset Z(G)$, $|c| = 2$, $|b_i| = 2^{\beta_i}$, $\alpha > \beta_i > 0$;

7) $G = (R \cdot \langle a \rangle)\lambda B$, R — прямий добуток $p-1$ квазіциклічної p -групи, p — просте число, $p > 2$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$, $G' = R \cdot \langle a^{p^k} \rangle$, $C_G(R) = (R \cdot \langle a^{p^m} \rangle) \times B$, $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$, $|a| \geq p^\alpha$, $\langle a^{p^{m-1}} \rangle$ індукує на R групу нескінченно незвідних автоморфізмів порядку p , B — скінченна абелева p -група виду $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $\exp Z \leq p^{k-m+1}$, $|b| = p^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $[\langle a \rangle, Z] \subset R$, $[a, b] = c \cdot a^{p^k}$, $c \in R$;

8) $G = (R \cdot \langle a \rangle) \cdot B$, R — прямий добуток $p-1$ квазіциклічних p -груп, $p > 2$, p — просте число, $|a| \geq p^\alpha$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$, $G' = R$, $C_G(R) = R \times \langle b \rangle$, $C_G(R) \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$, $\alpha \geq m > 0$, $\langle a^{p^{m-1}} \rangle$ індукує на R групу нескінченно незвідних автоморфізмів порядку p , B — скінченна

абелева p -група, $[\langle a \rangle, B] \subset R$.

Доведення. Нехай G — досліджувана p -група, p — просте число. За твердженням 3.1.1 G — черніковська група з повною частиною R . Якщо $R \subset Z(G)$, то G — група одного з типів 1)–3) леми 3.2.1, а значить група одного з типів 1)–3) розглядуваної теореми.

Нехай $R \not\subset Z(G)$. За твердженням 3.1.1 $G = S \cdot \langle a \rangle$, де $R \subset Z(S) = C_G(R) \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^m} \rangle$, $m > 0$, і $\langle a^{p^{m-1}} \rangle$ індукує на R групу нескінченно незвідних автоморфізмів порядку p , R — прямий добуток $p-1$ квазіциклічних p -груп. Нехай p^α — найменша степінь числа p , для якого $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$. Тоді $|a| \geq p^\alpha$, $\langle a^{p^\alpha} \rangle \subset Z(A)$, $A = R \cdot \langle a \rangle$. Зрозуміло, що $\alpha \geq m$. Розглянемо можливі випадки:

- 1) $p > 2$,
- 2) $p = 2$.

Випадок 1. В цьому випадку за твердженням 3.1.1 $S' = 1$. З цього випливає, що $S = R \times B$, де B — скінченна абелева p -група. Якщо тепер G/R — дедекіндова група, то при умові $p > 2$ $G' = R[\langle a \rangle, B] \subset R$ і G — група типу 8) теореми.

Нехай G/R — недедекіндова група. Оскільки $[R, \langle a \rangle] = R$, то $R \subset G'$. За наслідком 3.1.2 G/R — метабільтова $H(S/R)$ -група, що є групою одного з типів 1)–5) теореми 2.7.2. Оскільки S/R — абелева група, то G/R може бути лише групою типу 1) теореми 2.7.2, тобто $m \geq \alpha - k$. Тут $G/R = \langle Ra \rangle \cdot (S/R)$, $|Ra| = p^\alpha$, підгрупи $\langle Ra \rangle$, S/R задовольняють тим же умовам, що і підгрупи $\langle a \rangle$ та S в групах теореми 2.7.2. Із згаданої теореми випливає, що $G' = R \cdot \langle a^{p^k} \rangle$, $\alpha > k \geq m$ і $\langle Ra^{p^m} \rangle$ — циклічна підгрупа найбільшого порядку із S/R . З цього випливає, що $S/R = \langle Ra^{p^m} \rangle \times V/R$, де $\exp V/R \leq p^{k-m+1}$. Зрозуміло, що $V \subset S$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $V = R \times B$. Тоді $G = A \lambda B$.

В групах типу 1) теореми 2.7.2 $B = \langle b \rangle \cdot Z$, де $(R \times Z)/R$ — центральна підгрупа із G/R . Тому $[\langle a \rangle, Z] \subset R$ і G — група типу 7). Випадок 1)

розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку $p = 2$ і R — нормальна в G квазіциклічна група. Якщо G/R — дедекіндова група, то G — група типу 1) розглядуваної теореми.

Нехай G/R — недедекіндова група. Тоді G задовольняє умову леми 2.3.2. Як і раніше, G/R — метагамільтонова $H(S/R)$ — 2-група одного із типів 1)–3) теореми 2.7.2, $m = 1$. Нехай U/R — підгрупа із G/R , що відповідає підгрупі B в групах згаданої теореми. Тоді $G/R = A/R \cdot U/R$, де $A = R \cdot \langle a \rangle$,

$$A/R \cap U/R = (G/R)' \subset Z(G/R), \quad S/R = \langle Ra^2 \rangle \cdot U/R.$$

Зрозуміло, що $U \subset S$, а $R \subset Z(S)$. Можливі випадки: 2.1) $U' = 1$; 2.2) $U' \neq 1$.

Випадок 2.1. В цьому випадку G/R може бути лише групою типу 1) або 2) теореми 2.7.2. Зрозуміло, що $U = R \times B$, де B — скінченна абелева 2-група, $\exp B \leq 2^k$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $[a, b] = c \cdot a^{2^k}$, $c \in R$, $k \geq \beta \geq \alpha - k$. За лемою 3.2.2 $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, тому в G існує підгрупа $T = \langle a^2 \rangle \lambda B$. Зрозуміло, що $(R \times Z)/R \subset Z(G/R)$, $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha+1}$. Звідси $[\langle a \rangle, Z] \subset R$. Нехай в лемі 3.2.2 $\varepsilon = 0$. Тоді $A = R\lambda\langle a \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $G = A\lambda B$ і G — група типу 4) розглядуваної теореми. Нехай в лемі 3.2.2 $\varepsilon = 1$. Тоді $|a| = 2^{\alpha+1}$, $R \cap \langle a \rangle = R \cap T = \langle a^{2^k} \rangle = \langle z \rangle \subset Z(G)$, $|z| = 2$. Покажемо, що в цьому випадку $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha}$. Дійсно, нехай в Z існує елемент d , $|d| = 2^{2k-\alpha+1}$. Тоді $d^{-1}ad = au$, $u \in R$, $cu^{2^k} = b^{-1}ab$, $c \in R$. Покладемо $u = b \cdot a^{2^{k+1}-\beta}$, $v = b^{2^{k+1}-\beta} \cdot a^{2^k}$, $(2, l) = 1$. Очевидно, що $v \in B$. Оскільки $k+1-\beta > 0$, то $u \in T$. Незавжди показати, що $[u, v] = z$ і в G існує неабелева підгрупа Міллера-Морено $M = \langle u \rangle \lambda \langle v \rangle$, що не містить $\langle a^{2^k} \rangle$. З цього випливає, що в G існує нескінченна неабелева підгрупа $Y = R \cdot M \not\subset G'$. За лемою 1.3.5 $Y \triangleleft G$ і G/Y — дедекіндова група. Оскільки $k > 1$, то $k+1 \geq 3$

і $Y \cap \langle a \rangle \subset \langle a^8 \rangle$ і дедекіндова група G/Y містить елементи порядку 8. За будовою дедекіндових груп G/Y — абелева група, а значить $G' \subset Y$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha}$ і G — група типу 5) розглядуваної теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. В цьому випадку $U' \neq 1$, $U \triangleleft G$ і $G = U \cdot \langle a \rangle$. Ясно, що $G' \subset U$, а тому $U \cap \langle a \rangle \supset \langle a^{2^k} \rangle$. З цього випливає, що G/R може бути лише групою типу 3) теореми 2.7.2, у якій $k = \alpha - 1$. Покладемо $T = R \cdot \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$. Зрозуміло, що $T = G'$. За властивостями U в групах типу 3) теореми 2.7.2 підгрупа U — майже прямий добуток підгруп $T \cdot \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою T , $i \in I$, $|I| > 1$, $T \cap \langle b_i \rangle = R \cap \langle b_i \rangle$. Оскільки $R \subset Z(U)$, то можна вважати, що $R \cdot \langle b_i \rangle = R \times \langle b_i \rangle$ і $T \cdot \langle b_i \rangle = T\lambda\langle b_i \rangle$, $|b_i| = 2^{\beta_i}$, $\alpha > \beta_i > 0$, $|T/R| = 2$, $(U/R)' = T/R$. З цього випливає, що серед b_i знайдуться такі u, v , що $[u, v] = c$ і $T = \langle c \rangle \cdot R$. За лемою 3.2.2 $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$, тому $T \subset Z(U)$. Зрозуміло, що $c^2 \in R$. Якщо допустити, що $|c| > 2$, то в G існує неабелева підгрупа $Y = (R \times \langle u^2 \rangle)\lambda\langle v \rangle$, що не містить G' . Як і раніше, $Y \triangleleft G$, G/Y — дедекіндова група, що містить циклічну підгрупу $\langle Ya \rangle$, порядок якої більше 4. При цих умовах $G' \subset Y$, що неможливо. Отже, $|c| = 2$, $T = R \times \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $\langle z \rangle \times \langle c \rangle \subset Z(U)$ і для будь-яких b, b_i, b_j $[b_i, b_j] \in \langle c \rangle$ і в G існує підгрупа B , що розкладається в майже прямий добуток підгруп $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $\langle c \rangle = B'$ і $B \cap R = 1$, $R \times B \subset S$, $G = A \cdot B$. Зрозуміло, що $(R \times B)' = \langle c \rangle$, $R \times B \triangleleft G$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $\langle c \rangle \subset Z(G)$. З цього випливає, що $\langle z \rangle \times \langle c \rangle \subset Z(G)$, а значить $\langle a \rangle \cap R = 1$. Звідси $A = R\lambda\langle a \rangle$, $T = R \times \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$, $A \cap B = \langle c \rangle$. Отже, G — група типу 6) розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуто. Теорема доведена.

Теорема 3.2.2. Локально нільпотентні неметагамільтонові $\overline{IH}$ -групи є групами виду $G = P \times C$, де P — словська p -підгрупа із G , що містить повну частину R , p — просте число, C — скінченна дедекіндова група і G — група одного із типів:

1) R — квазіциклічна підгрупа із P ; G/R — скінченна дедекіндова група, G' містить підгрупи порядку pq , p, q — не обов'язково різні прості числа;

2) P — група типу 2) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

3) P — група типу 3) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

4) P — група типу 4) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

5) P — група типу 5) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

6) P — група типу 6) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

7) P — група типу 7) теореми 3.2.1, $C' = 1$;

8) P — група типу 8) теореми 3.2.1, $C' = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Оскільки G — неметабільтова, то вона недедекіндова локально нільпотентна черніковська група. З цього випливає, що $G = P \times C$, де P — недедекіндова силова p -підгрупа із G , а C — її холловське доповнення в G . Покажемо, що $|C| \neq \infty$. Нехай це не так. Тоді $|C| = \infty$. Якщо $C' \neq 1$, то за лемою 1.3.4 $G/C \cong P$ — дедекіндова група, що неможливо. Нехай $C' = 1$. За лемою 1.3.4 G/C — метабільтова група, а значить метабільтовою буде P . Нехай X — довільна неабелева підгрупа із G , тоді $X = P_1 \times C_1$, де $P_1 = X \cap P$, $C_1 = X \cap C$. Оскільки $C' = 1$, то $P'_1 \neq 1$. За теоремою 2.2.2 будь-яка неабелева підгрупа метабільтової підгрупи P містить $P' = G'$. Отже, $G' = P' \subset P_1 \subset X \triangleleft G$. З цього випливає, що G — метабільтова група, тобто $|C| \neq \infty$. Оскільки G — нескінченна група, то $|P| = \infty$. За лемою 1.3.4 $G/P \cong C$ — скінченна дедекіндова група. Можливі випадки: 1) P — метабільтова група; 2) P — неметабільтова група.

Випадок 1. В цьому випадку P — черніковська група необмеженої експоненти. За лемою 2.3.1 $|P'| = p$. Оскільки G — неметабільтова група, то за теоремою 2.2.2 $C' \neq 1$ і в G' існують підгрупи порядку $2p$,

$p \neq 2$ і G — група типу 1) розглядуваної теореми.

Випадок 2. В цьому випадку P — неметагамільтонова група, що задовольняє умову теореми 3.2.1 і є групою одного з типів 1)–8) згаданої теореми. Нехай P — група типу 1), тоді вона містить квазіциклічну підгрупу R , P/R — скінченна дедекіндова група і P' містить підгрупу порядку p^2 . За лемою 1.3.4 $G/P \cong C$ — дедекіндова група. Оскільки P/R — силовська дедекіндова p -підгрупа із G/R , то G/R — скінченна дедекіндова група і G — група типу 1) розглядуваної теореми.

Зрозуміло, що коли P — група типу 2)–8) теореми 3.2.1, то $G/P \cong C$ — дедекіндова група, то вона — група типу 8) розглядуваної теореми.

Нехай $C' \neq 1$. Тоді в G знайдеться нескінченна неабелева підгрупа $Y = R_1 \times C$, де R_1 — квазіциклічна підгрупа із R . Тоді $Y \triangleleft G$ і за лемою 1.3.4 G/Y — дедекіндова група. Зрозуміло, що $Y \cap P = R_1$ і $G/Y \cong P/R_1$ — дедекіндова група, що неможливо. Отже, $C' = 1$ і G — група типу 2)–8) розглядуваної теореми відповідно. Теорема доведена.

Наслідок 3.2.1. Комутант G' нескінченної локально нільпотентної $H(I\bar{A})$ -групи G є нільпотентною майже абелевою черніковською, не більше, ніж біпримарною групою, яка може бути неабелевою лише в групах типу 3) теореми 3.2.2, для яких G' — скінченна примарна група, G — нільпотентна група, $G'' \subset Z(G)$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — метагамільтонова, то наслідок випливає з теореми 2.2.2.

Нехай G — неметагамільтонова група. Тоді G — група одного з типів 1)–8) теореми 3.2.2. Для групи G кожного із згаданих типів G' — нільпотентна черніковська група, що має повну абелеву частину, і лише в групах типу 3) G' може бути неабелевою скінченною примарною групою, у якій $G'' \subset Z(G)$ і G — нільпотентна група. Наслідок доведений.

3.3 Черніковські неметагамільтонові не локально нільпотентні $\overline{TH}$ -групи

Лема 3.3.1. Нехай G — неметагамільтонова не локально нільпотентна черніковська $\overline{TH}$ -група з центральною повною частиною R . Тоді G — група виду: $G = R \cdot D$, де R — центральна в G квазіциклічна p -група, D — скінченна нільпотентна метагамільтонова група з неабелевою силовською p -підгрупою P , що співпадає з D' , $|P| = p^3$, $R \cap D \subset \Phi(P)$.

Доведення. Нехай G і R задовольняють умову леми. За твердженням 3.1.1 R — центральна в G квазіциклічна p -група, p — просте число і G/R — скінченна нільпотентна метагамільтонова група. Нехай R доповнюється в G . Тоді $G = R \times D$, D — скінченна нільпотентна метагамільтонова група, яка може бути лише групою типу 1)–3) теореми 2.2.1. Тоді $D = P\lambda C$, де для P і C справедливі ті ж співвідношення, що і в групах згаданих типів. Покладемо $C^* = C \times R$. Тоді $G = P\lambda C^*$ і $R \subset C_{C^*}(P)$. Зауважимо, що P — примарна група за простим числом q , не обов'язково рівним p . Якщо $P' = 1$ або $p \neq q$, то G — група типу 1) теореми 2.2.1, що неможливо. Отже, $p = q$, тобто P — p -група, $P' \neq 1$. Звідси D — група типу 2) або 3) теореми 2.2.1, $|P| = p^3$, $P = D'$ і G — група із розглядуваної леми.

Нехай R не доповнюється в G . За лемою 1.3.2 $G = R \cdot D$, $R \cap D = R \cap \Phi(D_p) = Z \neq 1$, де D_p — силовська p -підгрупа із D , D/Z — група типу 1)–3) теореми 2.2.1. Зрозуміло, що D — нільпотентна група, яка містить підгрупу Шмідта $S = Q\lambda\langle d \rangle$, де $Q \triangleleft S$ — силовська q -підгрупа, $\langle d \rangle \not\triangleleft S$ — циклічна силовська r -підгрупа, q і r — різні прості числа, $S' = Q$. Нехай $V = R \cdot S$. Тоді $Z \triangleleft G$, $Z' = S' = Q \triangleleft G$. Нехай $R \cap Q = 1$. Тоді $D/Z = \bar{Q}\lambda\bar{C}$, де $\bar{Q} = (Q \times Z)/Z$, $\bar{C} = C/Z$. Звідси $D = Q\lambda C$. Покладемо $C^* = C \cdot R$. Тоді $G = Q\lambda C^*$. Оскільки C^* — нескінченна і, очевидно, ненормальна підгрупа із G , то C^* — абелева група. Неважко

показати, що в цьому випадку R доповнюється в G , що неможливо. Отже, $R \cap Q \neq 1$. Звідси $p = q$. Покладемо $Q = P$. З будови груп Шмідта (твердження 1.1.4) випливає, що $\Phi(P) = P' = Z(P) \neq 1$ і будь-який нормальний дільник із S , що міститься в P , або співпадає з P , або міститься в $\Phi(P)$. Оскільки $R \cap P \neq 1$ і $R \cap P \subset Z(S)$, то $P' \supset (P \cap R) \neq 1$. Звідси P — неабелева група.

Нехай M — будь-яка максимальна неабелева підгрупа із P . Тоді в групі G існує нескінченна неабелева підгрупа $Y \cdot M$. Ясно, що $Y \triangleleft G$, $Y \cap S = Y \cap P = M \triangleleft S$. Це приводить до суперечності, оскільки $\Phi(P) \subset M \subset P$. З цієї суперечності випливає, що всі максимальні підгрупи із P абелеві, а тому P — скінченна p -група Міллера–Морено, що породжується 2 елементами. За будовою груп Шмідта P — неабелева група порядку p^3 , яка є групою кватерніонів або групою експоненти p , $p > 3$. Зрозуміло, що $Z = \Phi(P)$, $|Z| = p$. Оскільки D/Z — метабільтонова ненільпотентна група, то $D/Z = P/Z\lambda C/Z$, $D = P \cdot C$, $P \cap C = Z$, $Z \subset Z(G)$, $C' = 1$. Покажемо, що P — силовська p -підгрупа із D . Нехай це не так. Тоді в $D \setminus P$ існує p -елемент y , такий, що $y^p \in P$. Покладемо $P^* = P \cdot \langle y \rangle$. Тоді $|P^*| = p^4$. За твердженням 2.1.1 P^* містить підгрупу Міллера–Морено $M \neq P$. Оскільки $|P^*| = p^4$, $|P| = p^3$, то $|M| = p^3$, $P^* = P \cdot M$, $P \cap M = N$, $|N| = p^2$, $\Phi(P) \subset N \subset P$. Покладемо $Y = R \cdot M$. Тоді $Y \triangleleft G$, $Y \cap P = Y \cap S = N \triangleleft S$, що неможливо. Отже, P — силовська p -підгрупа із D . Звідси $D = P\lambda C$, $C' = 1$. Оскільки D/Z — ненільпотентна метабільтонова група, то і D — ненільпотентна метабільтонова група типу 2) або 3) теореми 2.2.1, а G — група із леми. Лема доведена.

Лема 3.3.2. Неметабільтонова черніковська не локально нільпотентна $\overline{TH}$ -група з нецентральною повною частиною R має вид: $G = R\lambda U$, де R — прямий добуток l квазіциклічних p -груп, $l > 0$, p — просте число, $p \cdot l > 2$, $U = S \cdot \langle a \rangle$, $C_U(R) = S \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, s ділить-

ся на просте число q , відмінне від p , для будь-якого цілого k a^k індукує на R тотожний або нескінченно незвідний автоморфізм, $l = \delta_q(p)$, для довільного q -елемента $g \in U \setminus S$ такого, що $g^q \in S N \lambda \langle g \rangle$ — скінченна група Міллера-Морено, N — нижній шар із R , $|N| = p^l$, $|U| < \infty$, U — нільпотентна $H(S)$ -група, при $l > 1$ $S' = 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 1.3.2 $G = R \cdot U$, де $|U| < \infty$, U — скінченна група найменшого порядку, для якої $R \cdot U = G$, $U = S \cdot \langle a \rangle$, $C_U(R) = S \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, $R \cap U = V = \Phi(U_p) \cap Z(S)$, де U_p — силовська p -підгрупа із U . За твердженням 3.1.1 R — прямий добуток l квазіциклічних p -груп, $l > 0$.

Для будь-якого цілого k a^k індукує на R тотожний або нескінченно незвідний автоморфізм. При $l > 1$ $S' = 1$. За наслідком 3.1.2 U — нільпотентна група. Якщо всі p' -елементи із U належать S , то $S = S_1 \times S_2$, де S_2 — силовська p -підгрупа із S , $S_1 \triangleleft G$, $U = S_1 \times P_1$, де P_1 — силовська p -підгрупа із U . Звідси $G = S_1 \times (R \cdot P_1)$ — локально нільпотентна група. Отже, s ділиться на просте число q , відмінне від p . З цього випливає, що $p \cdot l > 2$ і в $U \setminus S$ існує q -елемент g , для якого $g^q \in S$ і g індукує на R нескінченно незвідний автоморфізм, в G існує нескінченна абелева не локально нільпотентна підгрупа $Y = R \lambda \langle g \rangle$, що має абелеву нескінченну p -підгрупу R і скінченну циклічну силовську q -підгрупу $\langle g \rangle$, $g^q \in Z(Y)$. Ясно, що $Y \triangleleft G$. Покладемо $M = N \lambda \langle g \rangle$, де N — нижній шар із R , що є елементарною абелевою групою порядку p^l . Покажемо, що M — скінченна група Міллера-Морено. Дійсно, нехай це не так. Тоді в Y існує скінченна підгрупа Міллера-Морено $M_1 = N_1 \lambda \langle g_1 \rangle$, де $N_1 = R \cap M_1$ — елементарна абелева нормальна силовська p -підгрупа порядку p^{l_1} , $\langle g_1 \rangle$ — неінваріантна силовська q -підгрупа із M_1 . Зрозуміло, що $\langle g_1 \rangle$ належить деякій силовській q -підгрупі з Y . Не порушуючи загальності можемо вважати, що $\langle g_1 \rangle \subset \langle g \rangle$. Оскільки $\langle g \rangle \subset Z(Y)$, то $\langle g_1 \rangle = \langle g \rangle$. Ясно, що $N_1 \subseteq N$. Якщо $N_1 = N$, то $M = M_1$ — група Міллера-Морено. Нехай

$N_1 \subset N$. Тоді $l > l_1$. За теоремою Машке $N = N_0 \times N_1$, де $N_0 \triangleleft Y$, $N_1 \triangleleft Y$, $|N_0| = p^{l-l_1}$, $l-l_1 > 0$. Зрозуміло, що $N/N_1 = (N_0 \times N_1)/N_1$ — неединична нормальна елементарна абелева підгрупа із Y/N_1 . За теоремою Машке в нижньому шарі R/N_1 , який має порядок p^l , існує підгрупа $N_2/N_1 \triangleleft Y/N_1$, що доповнює $(N_0 \times N_1)/N_1$ в нижньому шарі Y/N_1 . Зрозуміло, що $N_2 \triangleleft Y$, $N_2 \cap N_0 = 1$. Нехай ми побудували підгрупу N_i таку, що $N_i \cap N_0 = 1$, $N_i \triangleleft Y$, $(N_0 \times N_i)/N_{i-1} = (N_0 \times N_{i-1})/N_{i-1} \times N_i/N_{i-1}$ — нижній шар із R/N_{i-1} . Тоді, як і N_2 , можна побудувати N_{i+1} . При цьому $N_i \subset N_{i+1}$. Покладемо $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. Тоді $R^* \triangleleft Y$, $R^* \cap N_0 = 1$, $|R^*| = \infty$, R^* — власна нескінченна підгрупа із R , допустима відносно g , що неможливо. Отже, $M_1 = M$. За твердженням 1.1.1 $l = \delta_q(p)$,

$$N_N(\langle g \rangle) = N_R(\langle g \rangle) = C_R(\langle g \rangle) = 1.$$

За наслідком 1.3.1 $G = R\lambda N_G(\langle g \rangle)$. За вибором U маємо $V \cong 1$ і $G = R\lambda U$, $Y \cap U = \langle g \rangle \triangleleft U$, за лемою 1.3.4 $G/Y \cong U/\langle g \rangle$ — дедекіндова група. Розглядаючи будь-який елемент $g \in U \setminus S$, одержимо, що $\langle g \rangle \triangleleft U$, $U/\langle g \rangle$ — дедекіндова група, U — метагамільтонова група. За лемою 1.4.1 U — $H(S)$ -група, тому недедекіндова група U задовольняє умову теореми 2.7.2. Лема доведена.

Теорема 3.3.1. Неметагамільтонові не локально нільпотентні черніковські $\overline{III}$ -групи мають вид $G = F \times A$, де $F = R \cdot D$, $V = R \cap D \subset \Phi(D)$, $R \triangleleft G$, R розкладається в прямий добуток l квазіциклічних p -груп, p — просте число, $l > 0$, $|D \times A| < \infty$, $A' = 1$, $D = S \cdot \langle a \rangle$, $C_D(R) = S \triangleleft G$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^k \rangle$, для будь-якого цілого k a^k індукує на R тотожний або нескінченна незвідний автоморфізм, $\pi(D) \cap \pi(A) = \emptyset$, і G — група одного із типів:

1) $F = R\lambda D$, $l \equiv 1$, $p \geq 2$, D — дедекіндова група, $S > 1$, $p \equiv 1 \pmod{s}$, $p \notin \pi(D)$;

2) $F = R\lambda D$, $D' = 1$, $l \geq 1$, $s = qp$, q — просте число, відмінне від p , $n > 0$, $l = \delta_q(p)$, для довільного q -елемента $g \in D \setminus S$ такого, що $g^n \in S$

$N\lambda\langle g \rangle$ — скінченна група Міллера-Морено, N — нижній шар із S , якщо при цьому $p|n$, то p — найменший простий дільник s , $l = p - 1$, $p > 3$, $(s, 2) = 1$;

3) $F = R\lambda D$, D — силовська q -підгрупа із G , q — просте число, $s = q^m$, $m > 0$, $l = \delta_q(p)$, $N\lambda\langle a^{q^{m-1}} \rangle$ — скінченна група Міллера-Морено, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^k} \rangle$, $q^k > 2$, $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \times B$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = q^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $[a, b] = a^{q^k}$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq p^{k-m+1}$;

4) $F = R\lambda D$, $l = 1$, D — силовська q -підгрупа групи G , q — просте число, $s = q^m$, $m > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^k} \rangle$, $\alpha > k \geq \alpha - k > m$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \lambda B$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = q^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $[a, b] = a^{q^k}$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq p^{2k-\alpha+1}$;

5) $F = R\lambda D$, $l = 1$, D — силовська q -підгрупа із G , q — просте число, $s = q^m$, $m > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^{\alpha-1}} \rangle$, $\alpha > m$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \cdot B$, B — майже прямий добуток підгруп $D' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $D' = B' = \langle a^{q^{\alpha-1}} \rangle \subset Z(G)$, $|b_i| = q^{\beta_i}$, $\alpha - m \geq \beta_i > 0$, $q^{\alpha-m} > 2$, $i \in I$, $|I| > 1$;

6) $R \subset Z(G)$, $l = 1$, $S = D$ — скінченна нелінійноцентральна метабільтова група, силовська p -підгрупа P якої є неабелевою і має порядок p^3 , $D' = P$, $R \cap D = R \cap P \subset \Phi(P)$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і R — її повна частина. За твердженням 3.1.1 $R \triangleleft G$ і R — прямий добуток l квазіциклічних p -груп, p — просте число, $l > 0$. Якщо $R \subset Z(G)$, то G задовольняє умову леми 3.3.1. Тоді G — група з твердження згаданої леми, а значить G — група типу 6) розглядуваної теореми.

Нехай $R \not\subset Z(G)$. Тоді G задовольняє умову леми 3.3.2, за якою $G = R\lambda U$ і справедливі інші твердження згаданої леми. Нехай A — абелева холловська підгрупа нільпотентної підгрупи U , для якої $[R, A] = 1$ і $U = A \times D$. Покладемо $F = R\lambda D$. Тоді $G = F \times A$, $A' = 1$, $\pi(D) \cap \pi(A) = \emptyset$. Зрозуміло, що F задовольняє тим же умовам, що і

G . Ясно, що $C_D(R) = S \triangleleft G$ і $D = S \cdot \langle a \rangle$, $D \cap S = \langle a^s \rangle$, $s > 1$, де D — метабільтонова $H(S)$ -група. Для довільного цілого k a^k індукує на R тотожний або нескінченно незвідний автоморфізм. Можливі випадки: 1) D — дедекіндова група; 2) D — недедекіндова група.

Випадок 1. Нехай $l = 1$. Тоді $p \equiv 1 \pmod{s}$ і G — група типу 1) теореми. Нехай $l > 1$. Тоді $S' = 1$. Якщо $2|S$, то $p > 2$ і за лемою 3.3.2 $l = \delta_2(p)$, що неможливо, отже, $(s, 2) = 1$. За вибором A в U і з умови $S' = 1$ силовська 2-підгрупа із D не може належати S , тому D не має інволюцій. Звідси $D' = 1$. За лемою 3.3.2 для довільного простого $q|s$ $l = \delta_q(p)$ і для довільного q -елемента із $D \setminus S$, такого, що $g^q \in S$, підгрупа $N\lambda(q)$ — скінченна група Міллера-Морено, N — нижній шар із R . За тією ж лемою $s = n \cdot q$, $n > 0$, $q \neq p$ — просте число. Нехай $p|s$. Тоді в $D \setminus S$ існує p -елемент g , що індукує на R нескінченно незвідний автоморфізм, тоді $R\lambda(g)$ — локально нільпотентна неметабільтонова p -група типу 8) теореми 3.2.1, а значить $l = p - 1, (p - 1)|(q - 1)$. Оскільки $p \neq q$, то $p < q$ і p — найменший простий дільник s . Оскільки не існує простих чисел q , для яких $2 = \delta_q(3)$, то $p > 3$. Отже, G — група типу 2) теореми. Випадок 1 розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку D — метабільтонова $H(S)$ -група, що задовольняє умову теореми 2.7.2, а значить група одного з типів 1)–3) згаданої теореми. Для груп вказаних типів $s = q^m$, $m > 0$, q — просте число. Всі q' -елементи із D належать S і складають холловську абелеву підгрупу із $\tilde{D}$. При певному виборі A D не містить q' -елементів. Оскільки G — не локально нільпотентна група, то F — не локально нільпотентна група, а значить D — силовська недедекіндова q -підгрупа із G , p, q — різні прості числа. Зрозуміло, що D — група одного з типів 1)–3) теореми 2.7.2 з умовою $C = \langle a \rangle$. За лемою 3.3.2 $N\lambda\langle a^{q^{m-1}} \rangle$ — скінченна група Міллера-Морено, $l = \delta_q(p)$. При $l = 1$ $p \equiv 1 \pmod{q^m}$. Якщо D — група типу 1) згаданої теореми, то G — група типу 3)

розглядуваної теореми. В інших випадках $S' \neq 1$. Тоді за лемою 3.3.2 $l = 1$ і коли D — група типу 2) чи 3) теореми 2.7.2, то G , відповідно, група типу 4) та 5) розглядуваної теореми. Теорема доведена.

3.4 Нескінченні локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами

Теорема 3.4.1. Нескінченні локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами є розв'язними групами виду $G = F \times A$, де $F = R \cdot D$, R нормальна в G підгрупа, що розкладається в прямий добуток l квазіциклічних p -груп, $l \geq 0$, p — просте число, $D = S \cdot \langle a \rangle$, $C_D(R) = S \triangleleft G$, $\langle a \rangle \cap S = \langle a^k \rangle$, для довільного цілого числа k , a^k індукує на R тотожний або нескінченно незвідний автоморфізм, $R \cap D = V \subset \Phi(D)$, $|\langle a \rangle \times A| < \infty$, A — дедекіндова група, $\pi(D) \cap \pi(A) = \emptyset$, і G — група одного з типів:

1) $R = \langle a \rangle = A = 1$, $G = F = S = D$ — нескінченна метабільтова група з комутантом порядку p^n , $n \geq 0$ (теорема 2.7.1);

2) R — квазіциклічна група, G/R — скінченна дедекіндова група, G' містить підгрупи порядку pq , q — просте число, із множини $\{2, p\}$ (теорема 1.3.2);

3) $F = R \times D$, $l = s = 1$, $A' = 1$, $S = D$ — скінченна метабільтова група з комутантом порядку p^n , $n > 1$ (теорема 2.7.1), при ненільпотентності D $n = 3$, $G'' = D'' \neq 1$, D' — силовська p -підгрупа із D (D — група типу 2) або 3) теореми 2.2.1);

4) $R \subset Z(G)$, $l = 1$, $S = D$, $V \neq 1$, $V \subset D' = G'$, $|D'| = p^n$, $n > 1$, D/V — метабільтова недедекіндова скінченна група, всяка неабелева підгрупа із D , що містить V , нормальна в G , при ненільпотентності D $n = 3$, $|V| = p$, D' — неабелева силовська p -підгрупа ненільпотентної метабільтової групи D , $V = D''$;

5) R — квазіциклічна 2-група ($l = 1, p = 2$), $D = (V\lambda(a))\lambda B$, $S = (V \times \langle a^2 \rangle)\lambda B$, $|a| = 2^\alpha$, $|B| < \infty$, $B' = A' = 1$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = 2^\beta$, $[a, b] = c \cdot a^{2^k}$, $\alpha > k \geq \alpha - k$, $c \in V$, $k > 1$, $k \geq \beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha+1}$, $[\langle a \rangle, Z] \subset V$, $G' = R \times \langle a^{2^k} \rangle$;

6) R — квазіциклічна 2-група ($l = 1, p = 2$), $D = (V \cdot \langle a \rangle)\lambda B$, $S = (V \cdot \langle a^2 \rangle)\lambda B$, $|a| = 2^{\alpha+1}$, $V \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle \subset Z(G)$, $|B| < \infty$, $A' = B' = 1$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = 2^\beta$, $[a, b] = c \cdot a^{2^k}$, $\alpha > k \geq \alpha - k$, $k > 1$, $c \in V$, $k \geq \beta \geq \alpha - k$, $\exp Z \leq 2^{2k-\alpha}$, $[\langle a \rangle, Z] \subset V$, $G' = R \cdot \langle a^{2^k} \rangle$;

7) R — квазіциклічна 2-група ($l = 1, p = 2$), $D = (V\lambda(a)) \cdot B$, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 2$, $S = (V \times \langle a^2 \rangle) \cdot B$, $G' = R \times \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle$, $R \cap B = A' = 1$, $|B| < \infty$, B — майже прямий добуток підгруп $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $\langle c \rangle = B' = G' \cap B \subset Z(G)$, $|c| = 2$, $|b_i| = 2^{\beta_i}$, $\alpha > \beta_i > 0$, $|I| > 1$;

8) $l = p - 1 > 1$, $D = (V \cdot \langle a \rangle)\lambda B$, $|a| \geq p^\alpha$, $|B| < \infty$, $V \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$, $B' = A' = 1$, $s = p^m$, $m > 0$, $S = (V \cdot \langle a^{p^m} \rangle) \times B$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = c \cdot a^{p^k}$, $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $c \in V$, $a^{p^m} \in Z(S)$, $[\langle a \rangle, Z] \subset V$, $\exp Z \leq p^{k-m+1}$, $G' = R \cdot \langle a^{p^k} \rangle$;

9) $l = p - 1 > 1$, $D = (V \cdot \langle a \rangle) \cdot B$, $s = p^m$, $m > 1$, $S = V \times B$, $|B| < \infty$, $B' = A' = 1$, $[\langle a \rangle, B] \subset V$, $|a| \geq p^\alpha$, $V \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$, $\alpha \geq m$, B — p -група, $G' = R$;

10) $F = R\lambda D$, $D' = A' = 1$, $l > 1$, $s = q \cdot n$, q — просте число, відмінне від p , $n > 0$, $l = \delta_q(p)$, для довільного q -елемента $g \in D \setminus S$ такого, що $g^q \in S$, $N\lambda(g)$ — скінченна група Міллера-Морено, N — нижній шар із S , якщо при цьому $p|n$, то p — найменший простий дільник s , $l = p - 1$, $p > 3$, $(s, 2) = 1$, $G' = R$;

11) $F = R\lambda D$, D — силовська q -підгрупа із G , q — просте число, $s = q^m$, $m > 0$, $l = \delta_q(p)$, $N\lambda(a^{q^{m-1}})$ — скінченна група Міллера-Морено, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^k} \rangle$, $q^k > 2$, $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \times B$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = q^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $[a, b] = a^{q^k}$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq p^{k-m+1}$, $A' = 1$, $G' = R \times \langle a^{q^k} \rangle$;

12) $F = R\lambda D$, $l = 1$, D — силовська q -підгрупа групи G , q — просте

число, $s = q^m$, $m > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^k} \rangle$, $\alpha > k \geq \alpha - k > m$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \lambda B$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = q^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $[a, b] = a^{q^k}$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq \beta^{2^{k-\alpha+1}}$, $A' = 1$, $G' = R \times \langle a^{q^k} \rangle$;

13) $F = R \lambda D$, $l = 1$, D — силовська q -підгрупа із G , q — просте число, $s = q^m$, $m > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q^m}$, $|a| = q^\alpha$, $D' = \langle a^{q^{\alpha-1}} \rangle$, $\alpha \succ m$, $S = \langle a^{q^m} \rangle \cdot B$, B — майже прямий добуток підгруп $D' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою $D' = B' = \langle a^{q^{\alpha-1}} \rangle \subset Z(G)$, $|b_i| = q^{\beta_i}$, $\alpha - m \geq \beta_i > 0$, $q^{\alpha-m} > 2$, $i \in I$, $|I| > 1$, $A' = 1$, $G' = R \times \langle a^{q^{\alpha-1}} \rangle$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — метагамільтонова група, то за теоремою 2.2.2 $|G'| = p^n$, $n \geq 0$ і G — група типу 1). Нехай G — нескінченна локально ступінчата неметагамільтонова група. За твердженням 3.1.1 G — розв'язна черніківська неметагамільтонова $\overline{TH}$ -група з примарною повною частиною R , що розкладається в прямий добуток l квазіциклічних p -груп, p — просте число, $l > 0$. Можливі випадки: 1) G — не локально нільпотентна група; 2) G — локально нільпотентна група.

Випадок 1. В цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.3.1 і є групою одного з її типів 1)–6). Якщо G — група типу 1) згаданої теореми, то вона типу 2) розглядуваної теореми. Групи типів 2)–5) згаданої теореми є відповідно групами типів 10)–13) розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 6) теореми 3.3.1. Тоді або $R \cap D = 1$, або $R \cap D \neq 1$. Відповідно до цих випадків G — група типу 3) та 4) розглядуваної теореми. Випадок 1) розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку G задовольняє умову теореми 3.2.2 і є її групою одного з типів 1)–8). Якщо G — група типу 1) згаданої теореми, то вона типу 2) розглядуваної теореми. Нехай далі G — група одного з типів 2)–8) теореми 3.2.2. Тоді $G = P \times A$, де A — скінченна абелева холловська підгрупа із G , а P — група одного з типів 2)–8)

теореми 3.2.1 відповідно. Покладемо $F = P$. Тоді $G = F \times A$ і якщо P — група типу 2) та 3) теореми 3.2.3, то G — група типу 3) та 4) розглядуваної теореми відповідно. В групі P кожного з типів 4)–8) теореми 3.2.1 існує нормальна підгрупа $V = \langle [\langle a \rangle, B], \langle a^{p^n} \rangle \rangle$, а значить і підгрупа $D = V \cdot \langle a \rangle \cdot B$, для якої $R \cap D = V$, $V \subset \Phi(D)$, $S = V \cdot \langle a^{p^m} \rangle \cdot B$, $D = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^m} \rangle$, $m > 0$. У відповідності з тим, що P — група одного з типів 4)–8) теореми 3.2.1, G — група типів 5)–9) розглядуваної теореми. Випадок 2 розглянуто. Теорема доведена.

Теорема 3.4.2. Комутант G' локально ступінчатої метагамільтонової групи є скінченною примарною групою порядку p^n , $n > 0$, p — просте число, у якій всі власні підгрупи абелеві і при $G'' \neq 1$, G' — силовська p -підгрупа із ненільпотентної групи G ізоморфна групі кватерніонів чи групі порядку p^3 експоненти p , $p > 3$.

Нескінченна локально ступінчата неметагамільтонова $H(I\bar{A})$ -група G має періодичний нільпотентний черніковський не більше, ніж біпримарний, комутант G' , для якого справедливі твердження:

1) якщо $G'' \neq 1$, то G' — скінченна примарна група, а G — група одного з типів 3), 4) теореми 3.4.1;

2) якщо G' — непримарна група, то $G' = P \times C$, де P — абелева силовська черніковська p -підгрупа із G' , а C — циклічна центральна в G силовська q -підгрупа із G' , p, q — різні прості числа, і G — група одного з типів 2), 11)–13) теореми 3.4.1;

3) якщо G' не задовольняє умови тверджень 1) та 2) цієї теореми, то G' — примарна абелева черніковська група.

Доведення. Якщо G — метагамільтонова група, то твердження для її комутанта випливає з теореми 2.2.2.

Нехай G — нескінченна локально ступінчата неметагамільтонова група. Тоді G — група одного з типів 2)–13) теореми 3.4.1 і G' — періодична черніковська група. Нехай $G'' \neq 1$. Тоді G може бути лише групою

типів 3) або 4) згаданої теореми, у якій G' — скінченна примарна група, і твердження 1) доведено.

Нехай G' — непримарна група. Тоді за твердженням 1) $G'' = 1$, а це можливо лише для груп типів 2), 11)–13) теореми 3.4.1, для яких справедливо твердження 2) доводжуваної теореми. Зрозуміло, що якщо G' не задовольняє умови ні твердження 1), ні твердження 2), то G' — черніковська абелева примарна група і справедливе твердження 3) розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G — нільпотентна, не більше, ніж біпримарна група. Теорема доведена.

Глава 4

Локально розв'язні групи з умовами транзитивності нормальності для неабелевих підгруп

4.1 Деякі загальні результати

Означення 4.1.1. Група G називається групою з умовою (послабленої) транзитивності нормальності для τ -підгруп (або $t(\tau)$ -) $T(\tau)$ -групою, якщо для (G) будь-яких 3-х τ -підгруп A, B, C із G із умов $A \triangleleft B, B \triangleleft C$ ($B \triangleleft G$) випливає, що $A \triangleleft C$ ($A \triangleleft G$).

Розв'язна група такого роду є $(St(\tau))$ $ST(\tau)$ -групою.

Якщо τ — це властивість бути довільною підгрупою із G , то G називається (t) T -групою.

Лема 4.1.1. Нехай G — група, τ — одна із властивостей: бути нециклічною $(\bar{C})$, неабелевою $(\bar{A})$, нециклічною $(\bar{N})$, нескінченною (I) , нескінченною нециклічною $(I\bar{C})$, нескінченною неабелевою $(I\bar{A})$, нескінченною нециклічною $(I\bar{N})$ підгрупою із G . Тоді справедливі твердження:

- 1) будь-яка підгрупа A , що містить τ -підгрупу із G , сама τ -підгрупа

із G , всяка $T(\tau)$ -група є $t(\tau)$ -групою;

2) клас $(t(\tau)-)$ $T(\tau)$ -груп замкнений за фактор-групами; будь-яка фактор-група $(t(\tau)-)$ $T(\tau)$ -групи G за нормальною τ -підгрупою є $(t-)$ T -групою;

3) будь-яка $t(\tau)$ -група G тоді і тільки тоді є $T(\tau)$ -групою, коли всяка підгрупа із G є $t(\tau)$ -групою; клас $T(\tau)$ -груп замкнений за підгрупами;

4) група G тоді і тільки тоді є $(t(\tau)-)$ $T(\tau)$ -групою, коли будь-яка τ -підгрупа X групи G субнормальна в (G) будь-якій підгрупі Y із G , нормальна в $Y(G)$;

5) якщо $G = (t(\tau)-)$ $T(\tau)$ -група і N — нескінченна нормальна підгрупа із G , а τ — одна із властивостей: $I, I\bar{C}, I\bar{A}, I\bar{N}$, то G/N — $(t(\sigma)-)$ $T(\sigma)$ -група, де σ — властивість бути: будь-якою, $\bar{C}, \bar{A}, \bar{N}$ -підгрупою із G/N , тобто G : $(t-), T-, (t(\bar{C})-), T(\bar{C})-, (t(\bar{A})-), T(\bar{A})-, (t(\bar{N})-), T(\bar{N})$ -група відповідно;

6) якщо $G = (t(\tau))$ $T(\tau)$ -група і $\tau: I\bar{C}, I\bar{A}, I\bar{N}, N$ — нормальна σ -підгрупа із G , σ — це: $I\bar{C}, I\bar{A}, I\bar{N}$, то $G/N = (t(I))$ $T(I)$ -група.

Доведення. Нехай G і τ задовольняють умову леми. Тоді твердження 1) леми очевидне. Інші твердження леми випливають із леми 1.3.5. Лема доведена.

Твердження 4.1.1 [61]. Комутант ST -групи G є періодичною абелевою квазіцентральною підгрупою із G . Скінченні T групи розв'язні, а локально нільпотентні дедекіндові. Недедекіндова ST -група G періодична, має **неодинаковий** абелевий холловський квазіцентральный в G локально нільпотентний корадикал A без інволюцій, що має з центром **одинаковий** перетин, G/A — дедекіндова група, A доповнюється в G при зліченності G/A .

Твердження 4.1.2 [61]. Комутант St -групи G є квазіцентральною абелевою але не обов'язково періодичною підгрупою із G . Скінченні

St -групи вичерпуються скінченними T -групами. Нільпотентні t -групи співпадають з нільпотентними T -групами і вичерпуються дедекіндовими групами.

Твердження 4.1.3. [150]. Другий комутант $St(I)$ -групи G є періодичною примарною локально циклічною підгрупою із G . Будь-яка $St(I)$ -але не t -група є розширенням квазіциклічної групи за допомогою скінченної St -групи.

Теорема 4.1.1. Третій комутант G''' нескінченної $(St(I\bar{A})-)$ $St(\bar{A})$ -групи є центральною підгрупою із G' , має порядок p^δ , $\delta = 0, 1$, p — просте число, і при $\delta = 1$ G'' — періодична нільпотентна група, для якої справедливе одне із тверджень:

- 1) якщо G — $t(\bar{A})$ -група, то G'' — скінченна p -група Міллера-Морено;
- 2) якщо G — нескінченна $t(I\bar{A})$ -група, то $G'' = M \cdot C$, де M — скінченна p -група Міллера-Морено, C — локально циклічна q -група, $P' \cdot C \subset Z(G')$, p, q — не обов'язково різні прості числа.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо, що $G''' \subset Z(G'')$. Нехай це не так, тоді $C_G(G''') \triangleleft G$. Покладемо $G_3 = G''' \cdot C_G(G''')$, $G_2 = G'' \cdot C_G(G''')$, $G_1 = G' \cdot C_G(G''')$. Тоді маємо ряд нормальних підгруп

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3.$$

Якщо G — нескінченна група, то G_i — нескінченна нормальна підгрупа із G , $i = 1, 2, 3$. За посилюю $C_G(G''')$ — власна підгрупа із G . За лемою 1.3.5 G_i — власна підгрупа із G_{i-1} , $G_0 = G$. Нехай $U = G'' \cap G_3$. Тоді $G''' \subset U$, $U \triangleleft G$, U — власна підгрупа із G'' , G''/U — абелева група. Якщо G''/U — власна неоднична підгрупа X/U , то існує власна неабелева підгрупа $V = X \cdot G_3$ із G_2 . Зрозуміло, що G_2/G_3 — абелева група, ізоморфна G''/U , що є неодничним другим комутантом із G/G_3 , а V/G_3 — її неоднична власна підгрупа. Звідси $V \triangleleft \triangleleft G$, за лемою 4.1.1 G/V — St -група з неодничним другим комутантом G_1/V .

Останнє суперечить твердженню 4.1.2. З цього випливає, що в G_2/G_3 власною буде тільки одинична підгрупа, тобто другий комутант G_2/G_3 групи G/G_3 має порядок p , p — просте число. Відомо, що тоді G_2/G_3 належить центру комутанта G_1/G_3 групи G/G_3 . З цього випливає, що G_1/G_3 — нільпотентна група з центральним комутантом порядку p . Нехай $G_3 \subset N \subset G_1$. Тоді N — (нескінченна) субнормальна неабелева підгрупа із $G_1 \triangleleft G$, $N \triangleleft G$, а значить $N \triangleleft G_1$. З цього випливає, що комутант G_1/G_3 групи G/G_3 є квазіцентральною групою G/G_3 , що має неодиначний комутант порядку p . Відомо також, що тоді G_1/G_3 — гамільтонова група, що містить комутант G/G_3 . Оскільки G_1/G_3 містить підгрупу кватерніонів, а підгрупа кватерніонів не належить своєму централізатору, то G_1/G_3 не належить своєму централізатору в G/G_3 . З цієї суперечності випливає, що $G''' \subset Z(G_2)$. Звідси G'' — нільпотентна група.

Якщо $G''' = 1$, то теорема доведена. Нехай $G''' > 1$. Покажемо, що G'' — періодична група. Нехай G'' — група без скруту. Зрозуміло, що всяка неабелева підгрупа із G'' нескінченна, субнормальна в G'' , а значить нормальна в G , тобто G'' — метагамільтонова група. За теоремою 2.2.2 $G''' = 1$, що неможливо. Отже, G'' — неперіодична група з періодичною частиною T , і $G''' \subset T \triangleleft G$. За лемою 2.1.3

$$G'' \supset X = \langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle \cdot \langle g_2 \rangle,$$

$[g_1, g_2] = c$, $|c| = p$, $c \in Z(X)$. При періодичності G'' X — скінченна p -група Міллера-Морено, а при неперіодичності G'' $X = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \lambda \langle g_2 \rangle$, $|g| = \infty$. При неперіодичності G'' покладемо $X_1 = (\langle c \rangle \cdot \langle g_1 \rangle) \lambda \langle g_2^q \rangle$, де q — просте число, відмінне від p . Тоді X_1 — нескінченна неабелева субнормальна підгрупа нільпотентної групи G'' . Звідси $X_1 \triangleleft G$. За лемою 4.1.1 G/X_1 — SI -група з неодиначним другим комутантом G''/X_1 . Це суперечить твердженню 4.1.2. З цієї суперечності випливає, що G'' — періодична нільпотентна група і X — скінченна p -група Міллера-Морено, $|X'| = p$, $X' \subset Z(G')$.

Нехай G — $t(\bar{A})$ -група. Тоді $X \triangleleft G$, G/X — t -група. За твердженням 4.1.2 $|G''/X| = 1$, а значить $G'' = X$. Твердження 1) доведено.

Нехай G — нескінченна $t(I\bar{A})$ -група. Якщо $|G''| = \infty$ і має власну нескінченну неабелеву підгрупу N , то $N \triangleleft G$, G/N — t -група з неодиначним другим комутантом G''/N , що суперечить твердженню 4.1.2. З цього випливає, що при $|G''| < \infty$ нескінченні підгрупи нільпотентної групи G'' абелеві. За результатами [138] $G'' = X \cdot C$, де C — квазіциклічна q -група, p, q — не обов'язково різні прості числа. Ясно, що $X' \cdot C \subset Z(G')$, $X \cdot C \subset Z(G')$. Твердження 2) в цьому випадку доведено.

Нехай $|G''| < \infty$. Покладемо $D = C_G(G'')$. Тоді D — нескінченна нормальна підгрупа із G , $G'' \not\subset D$. Якщо $D' \neq 1$, то G/D — t -група з неодиначним другим комутантом $(G'' \cdot D)/D$, що суперечить твердженню 4.1.2. Отже, $D' = 1$. Покладемо $U = G'' \cdot D$. Тоді $D = Z(U)$. Якщо U — черніковська група, то в D можна знайти таку нескінченну підгрупу H , що $X \cap G'' = 1$. Покладемо $V = X \times H$. Тоді $V \triangleleft G$, G/V — t -група з одиначним другим комутантом, тобто $V \cap G'' = X = G''$ і твердження 2) в цьому випадку доведено.

Нехай, нарешті, D — черніковська група. Тоді D містить квазіциклічну q -підгрупу R . Покладемо $V = X \cdot R$. Тоді $V \triangleleft G$ і як і раніше $G'' \subset V$. Оскільки $X \subset G''$, то $G'' = X \cdot C$, де $C = G'' \cap R$. Зрозуміло, що $R \triangleleft G$ і $C_G(R) \supset G'$. Звідси $X' \cdot C \subset Z(G')$. Твердження 2) доведено. Теорема доведена.

Зауваження 4.1.1. Група $GL(2, 3)$ є $St(\bar{A})$ -групою, а її прямий добуток на квазіциклічну 2-групу — $t(I\bar{A})$ -група. Другий комутант кожної з цих груп ізоморфний групі кватерніонів. З цього випливає, що $t(\bar{A})$ -групи є значним узагальненням t -груп, а $t(I\bar{A})$ -групи є значним розширенням $t(I)$ -груп.

Наслідок 4.1.1. Локально розв'язна нескінченна $(T(I\bar{A})-)$ $T(\bar{A})$ -група є $(ST(I\bar{A})-)$ $ST(\bar{A})$ -групою, а значить має третій комутант порядку p^6 .

$\delta = 0, 1$ і $G''' \subset Z(G')$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 4.1.1 група G і всі її підгрупи є $t(\tau)$ -групами. Покажемо, що G — розв'язна група. Якщо G — абелева або скінченно породжена, то твердження очевидне і наслідок випливає з теореми 4.1.1. Нехай G — нескінченно породжена неабелева група. Зрозуміло, що в G існують елементи a, b , такі, що $[a, b] \neq 1$.

Нехай M_α — довільна скінченна підмножина елементів із G , $G_\alpha = \langle M_\alpha, a, b \rangle$. Зрозуміло, що G_α — локальна система розв'язних підгруп. Якщо G — $T(\bar{A})$ -група, то за теоремою 4.1.1 G_α — розв'язна група з одиничним четвертим комутантом. Відомо, що тоді $G''' = 1$. Нехай G — нескінченна $T(I\bar{A})$ -група. Тоді за результатами [116] для кожної скінченної підгрупи G_α в G існує нескінченна абелева допустима відносно G_α підгрупа U_α . Заміняючи скінченну підгрупу G_α на добуток $G_\alpha U_\alpha$, одержимо локальну систему нескінченних розв'язних $t(I\bar{A})$ -підгруп групи G . За теоремою 4.1.1 $G''' = 1$. Оскільки $T(\tau)$ -група є $t(\tau)$ -група, то наслідок випливає із розв'язності групи G і теореми 4.1.1.

Теорема 4.1.2. Локально нільпотентні $T(\bar{A})$ -групи вичерпуються нільпотентними метабільтоновими групами, а значить мають обмежений клас нільпотентності і скінченний примарний абелевий комутант.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За наслідком 4.1.1 G — $ST(\bar{A})$ -група. Нехай X — неабелева скінченно породжена підгрупа із G . Покажемо, що $X \triangleleft G$. Нехай g — довільний елемент із G , $Y = \langle x, g \rangle$. Тоді Y — скінченно породжена, а значить нільпотентна група і X — її субнормальна підгрупа.

За лемою 4.1.1 $X \triangleleft Y$, із довільності g випливає, що $X \triangleleft G$. Оскільки будь-яка неабелева підгрупа із G породжується своїми скінченно породженими неабелевими, а значить нормальними в G підгрупами, то вона

сама нормальна в G . Звідси G — локально нільпотентна метабільтова група. За теоремою 2.2.2 G' — скінченна примарна абелева група, а G — нільпотентна група обмеженого класу нільпотентності. Необхідність доведена.

Достатність очевидна.

Наслідок 4.1.2. Всяка локально нільпотентна підгрупа і фактор-група $T(\bar{A})$ -групи G є нільпотентною метабільтовою групою з скінченим примарним абелевим комутантом і має обмежену ступінь нільпотентності. Якщо $X \triangleleft G$, G/X — локально нільпотентна група, то $C_G(X)$ — нільпотентна метабільтова нормальна підгрупа із G , всі неабелеві підгрупи якої нормальні в G .

Доведення. За лемою 4.1.1 клас $T(\bar{A})$ -груп замкнутий за підгрупами і фактор-групами. Тоді твердження для підгруп і фактор-груп розгляданого наслідку випливає із теореми 4.1.2. Нехай $X \triangleleft G$, G/X — локально нільпотентна група, $C = C_G(X)$, $Z = C \cap X$. Зрозуміло, що $C \triangleleft G$, $Z \subseteq Z(C)$. Оскільки за попереднім G/X — нільпотентна метабільтова група, то C/Z , а значить і C — нільпотентна метабільтова підгрупа із G . Оскільки $C \triangleleft G$ і всяка неабелева підгрупа із C субнормальна в C , а значить в G , то вона нормальна в G . Наслідок доведено.

Теорема 4.1.3. Нехай G — $T(\bar{A})$ -група. Тоді вона має ряд характеристичних підгруп $G \supset A \supset B$, де A — перший, B — другий локально нільпотентний корадикали групи G і G/A та A/B — нільпотентні метабільтові групи з скінченим примарним абелевим комутантом і обмеженим класом нільпотентності. Якщо G — $ST(\bar{A})$ -група, то B — нільпотентна група, у якій всі власні підгрупи абелеві.

Доведення. Нехай G — досліджувана група і (X_α) — система нормальних підгруп із G , для яких G/X_α — локально-нільпотентна група.

Нехай $A = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$. Тоді $A \triangleleft G$. Нехай G^* — декартовий добуток всіх G/X_α , $\alpha \in A$. За наслідком 4.1.2 G/X_α — нільпотентна група обмеженого класу нільпотентності. Звідси G^* — нільпотентна метатагамільтонова група з примарним абелевим комутантом та обмеженим класом нільпотентності. За теоремою Ремака G/A — підгрупа із G^* . Тому G має локально нільпотентний корадикал A із відповідною властивістю G/A . Так само доводиться існування другого локально нільпотентного корадикала B , який є локально нільпотентним корадикалом $T(\bar{A})$ -групи A . Зрозуміло, що $A \subset G'$, $B \subset G''$. Нехай G — $ST(\bar{A})$ -група. Тоді за наслідком 4.1.1 та твердженням 1) теореми 4.1.1 B — нільпотентна група, у якій всі власні підгрупи абелеві. Теорема доведена.

Лема 4.1.2. Нехай G — нескінченна періодична локально розв'язна $T(I\bar{A})$ -група, але не $T(\bar{A})$ -група. Тоді G — група Чернікова.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що вона нечерніковська. За умовою в G існує скінченна підгрупа X , субнормальна, але не нормальна в деякій підгрупі Y із G . Нехай g — довільний елемент із Y . Покладемо $F = \langle X, g \rangle$. Оскільки G — локально розв'язна, періодична, і, значить, локально скінченна група та $X \triangleleft\triangleleft Y$, то F — скінченна група, а X — її субнормальна підгрупа. Із нечерніковості та локальної розв'язності групи G за результатами [116] в G знайдеться нескінченна, допустима відносно F , абелева підгрупа A , для якої $F \cap A = 1$. Тоді в G існують підгрупи $U = A\lambda F$, $V = A\lambda X$. Оскільки $X \triangleleft\triangleleft F$, то V — нескінченна неабелева субнормальна підгрупа із U . За лемою 4.1.1 $V \triangleleft U$, і, значить, $V \cap F = X \triangleleft F$. За довільністю $g \in Y$. Одержимо, що $X \triangleleft Y$, що суперечить припущенню. З цієї суперечності випливає, що G — черніковська група. Лема доведена.

Лема 4.1.3. Нескінченна неметатагамільтонова локально нільпотентна

$T(I\bar{A})$ -група G є черніковською групою.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Оскільки G — неметабільтова група, то за теоремою 4.1.2 G не може бути $T(\bar{A})$ -групою. Для періодичних груп твердження леми випливає із леми 4.1.2.

Нехай G — неперіодична група. Ясно, що G — неабелева група. Нехай X — неабелева нескінченна скінченно породжена підгрупа із G і g — довільний елемент із G . Покладемо $Y = \langle X, g \rangle$. Тоді Y — скінченно породжена, а значить нільпотентна група, а X — її нескінченна неабелева субнормальна підгрупа. Звідси $X \triangleleft Y$ і за довільністю $g \in G$ $X \triangleleft G$.

Нехай $|X| < \infty$. Оскільки G — неперіодична, то вона має елемент g , для якого справедливо $|g| = \infty$. Покладемо $Y = \langle X, g \rangle$. За попереднім випадком $Y \triangleleft G$. Оскільки Y — нільпотентна скінченно породжена група, то вона має скінченну періодичну частину $T \supset X, T \triangleleft Y$. Тоді існує $z \in \langle g \rangle, |z| = \infty, [T, z] = 1$. Покладемо $Z = X \times \langle z \rangle$. За попереднім $Z \triangleleft G$, а значить її періодична частина X теж нормальна в G . Отже, ми показали, що всяка скінченно породжена неабелева підгрупа групи G нормальна в G . Оскільки будь-яка неабелева підгрупа із G породжується своїми скінченно породженими неабелевими підгрупами нормальними в G , то вона сама нормальна в G , тобто G — метабільтова група. Ця суперечність з умовою леми показує, що G — черніковська група. Лема доведена.

Т е о р е м а 4.1.4. Нескінченні локально нільпотентні $T(I\bar{A})$ -групи вичерпуються нескінченними локально нільпотентними метабільтовими групами та локально нільпотентними неметабільтовими черніковськими $\overline{IH}$ -групами.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група і нехай G — неметабільтова група. Тоді за лемою 4.1.3 G — черніковська.

Нехай X — нескінченна неабелева підгрупа із G . Покажемо, що $X \triangleleft G$.
 Нехай це не так. Тоді за лемою 4.1.1 X — несубнормальна в G . Ясно, що X — власна підгрупа із G . Тоді $G \setminus X$ містить елемент g_0 , такий що X — несубнормальна підгрупа із підгрупи $G_0 = \langle X, g_0 \rangle$. Нехай G_1 — максимальна підгрупа із G_0 , що містить X , але не містить g_0 . За теоремою Маклейна $G_1 \triangleleft G_0$. Оскільки X — несубнормальна в G_0 , то X — несубнормальна підгрупа в G_1 . Як і раніше, в G_1 знайдеться елемент g_1 , такий що X — несубнормальна підгрупа в підгрупі $\langle X, g_1 \rangle$. Нехай G_2 — максимальна підгрупа із $\langle X, g_1 \rangle$, що містить X та не містить g_1 . За теоремою Маклейна (дивись, наприклад, [122]) $G_2 \triangleleft G_1$, а тому X — несубнормальна підгрупа із G_2 . Ясно, що процес побудови груп $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$ можна продовжувати до нескінченності, що суперечить черніковості групи G . З цієї суперечливості випливає, що $X \triangleleft G$, тобто G — локально нільпотентна черніковська $H(I\bar{A})$ -група. Необхідність доведена.

Достатність очевидна.

Наслідок 4.1.3. Комутант нескінченної локально нільпотентної $T(I\bar{A})$ -групи G співпадає з комутантом нескінченної локально нільпотентної $H(I\bar{A})$ -групи (наслідок 3.2.1).

Наслідок 4.1.4. Нехай G — нескінченна $T(I\bar{A})$ -група. Тоді будь-яка локально нільпотентна підгрупа та фактор-група групи G є локально нільпотентною $H(I\bar{A})$ -групою. Якщо $X \triangleleft G$, G/X — локально нільпотентна група, то $C_G(X) \triangleleft G$ і всі нескінченні неабелеві підгрупи із $C_G(X)$ нормальні в G .

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 4.1.1 клас $T(I\bar{A})$ -груп замкнений за підгрупами і фактор-групами, тому наслідок для підгруп та фактор-груп випливає з теореми 4.1.4. Нехай $X \triangleleft G$, G/X — локально нільпотентна група, $C = C_G(X)$, $Z = C \cap X$. Тоді $C \triangleleft G$, $Z \subseteq$

$Z(C)$. Звідси C — локально нільпотентна $T(I\bar{A})$ -група. За теоремою 4.1.4 всяка нескінченна абелева підгрупа із C нормальна в C , а значить і в G . Наслідок доведено.

Наслідок 4.1.5. Якщо комутант G' локально нільпотентної (нескінченної $T(I\bar{A})$ -) $T(\bar{A})$ -групи G не містить елементів простого порядку, то G — абелева група.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за теоремою 4.1.4 G — нескінченна $H(I\bar{A})$ -група і наслідок впливає в наслідку 4.1.4.

Наслідок 4.1.6. Нескінченні локально нільпотентні нечерніковські $T(I\bar{A})$ -групи вичерпуються нескінченними нільпотентними метабільно-тоновими групами.

Теорема 4.1.5. Нехай G — нескінченна локально розв'язна $T(I\bar{A})$ -група. Тоді G має ряд характеристичних підгруп $G \supset A \supset B$, де A — перший, а B — другий локально нільпотентні корадикали групи G і G/A та A/B — локально нільпотентні $H(I\bar{A})$ -групи з черніковським нільпотентним не більше, ніж біпримарним комутантом, а B — нільпотентна група з абелевими власними нескінченними підгрупами, $|B'| = p^\delta$, $\delta = 0, 1$.

Доведення. Нехай G — досліджувана група, $\{X_\alpha\}$ — система всіх нормальних підгруп із G , для яких G/X_α — локально нільпотентна група, $\alpha \in \mathcal{A}$. Нехай $A = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, тоді $A \triangleleft G$. Покажемо, що G/A — локально нільпотентна група. Якщо серед $\{X_\alpha\}$, існує така підгрупа X_α , що $|X_\alpha| < \infty$, то можна вважати $A = X_\alpha$ і все доведено. Нехай далі для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ $|X_\alpha| = \infty$ і G^* — декартовий добуток всіх фактор-груп G/X_α . За лемою 4.1.1 G/X_α — локально нільпотентна $T(\bar{A})$ -група. З теореми 4.1.2 G/X_α — нільпотентна група обмеженого класу нільпотентності. Звідси G^* — нільпотентна група обмеженого класу нільпотентності, а

значить G^* — теж нільпотентна група. За теоремою Ремака G/A — нільпотентна група, що є підгрупою G^* . З цього випливає, що G має локально нільпотентний корадикал A і за теоремою 1.4.4 G/A — локально нільпотентна $H(I\bar{A})$ -група. За наслідком 4.1.3 G' — черніковська нільпотентна не більше, ніж біпримарна група. Зрозуміло, що $A \subset G'$. За наслідком 4.1.1 G'' — нільпотентна група з комутантом порядку p^δ , $\delta = 0, 1$. Якщо A — нескінченна підгрупа із G , то для A , як і раніше, знайдеться локально нільпотентний корадикал B , з тими ж властивостями для A/B , що і для G/A , і в цьому випадку теорема доведена.

Нехай A — скінченна підгрупа із G . Тоді B завжди існує і $B \subset G''$. Покажемо, що A/B має ті ж властивості, що і G/A . Зрозуміло, що A/B — скінченна нільпотентна $H(I\bar{A})$ -група і її комутант — черніковська нільпотентна група. Покажемо, що $(A/B)'$ — не більше, ніж біпримарна група. Нехай $|B| = 1$, $C = C_G(A)$, $D = A \cdot C$. За наслідком 4.1.2 C — локально нільпотентна нескінченна $T(I\bar{A})$ -група. Оскільки A — скінченна нільпотентна підгрупа із D , $C \triangleleft D$, то D — нескінченна локально нільпотентна $T(I\bar{A})$ -група, комутант якої за наслідком 4.1.3 не більше, ніж біпримарний. Отже, при $|B| = 1$ теорема доведена. Якщо $|B| > 1$, то твердження теореми випливає за попередньою умовою для факторгрупи G/B . Теорема доведена.

4.2 Класифікація $ST(I\bar{A})$ - та нескінченних $ST(I\bar{A})$ -груп

Лема 4.2.1. Нехай G — нескінченна $T(I\bar{A})$ -група з абелевим комутантом, що не має елементів простих порядків. Тоді G — абелева група.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що G — неабелева. Тоді G' — абелева група без скруту. В силу наслідку 4.1.5 всяка локально нільпотентна підгрупа із G абелева. З цього випливає,

що $C_G(G')$ — власна абелева підгрупа із G . Отже, в G' знайдеться такий елемент d , що в $G \setminus C_G(G')$ існує елемент x , для яких $[d, x] \neq 1$. Нехай D — нормальне замикання $\langle d \rangle$ відносно $\langle x \rangle$. Ясно, що D — абелева група без скруту допустима відносно x . Звідси в G існує неабелева підгрупа $X = D \cdot \langle x \rangle$. Покажемо, що $|X : C_X(D)| < \infty$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $X = D\lambda\langle x \rangle$, $|x| = \infty$, для довільного натурального числа n $[d, x^n] \neq 1$. За відомою теоремою Холла [72] X містить нормальну підгрупу N_1 , що $[d, x]^2 \notin N_1$, $|X : N_1| < \infty$. З цього випливає, що $(X/N_1)'$ містить p -елементи, $p > 2$. Ясно, що $D\lambda\langle x^p \rangle = N_2 \triangleleft X$, $|X : N_2| = p$. Нехай $N = N_1 \cap N_2$. Тоді $N \triangleleft X$. Зрозуміло, що в комутанті і центрі групи X/N є елементи порядку p . З цього і твердження 4.1.1 випливає, що X/N не може бути T -групою. За лемою 4.1.1 $N' = 1$ і $|X : N| < \infty$. Ясно, що $N \cap \langle x \rangle = \langle x^n \rangle$, $n > 0$. Оскільки $D \triangleleft X$, $N \triangleleft X$, то $D \cdot N$ — нільпотентна, а значить абелева група. Звідси $[D, \langle x^n \rangle] = 1$. Отже, $|X : C_X(D)| < \infty$. З цього випливає, що D — скінченно породжена, а значить вільна абелева група скінченного рангу. Нехай $p|n$. Тоді $D \cdot \langle x^{\frac{n}{p}} \rangle$ — неабелева група. Покажемо, що це веде до суперечності. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $n = p$ і $[D, \langle x^p \rangle] = 1$. Нехай D_i — підгрупа із D , породжена p^i -степенями всіх елементів із D , $i \in [0, \infty)$. Відомо, що $D_i \triangleleft X$, $D_i \supset D_{i+1}$, D_i/D_{i+1} — p -група порядку p^r , де $r = \text{rang } D$. Зрозуміло, що D/D_i — скінченна p -група, на якій $\langle D_i x \rangle$ індукує автоморфізм порядку p або 1. Отже X/D_i — нільпотентна група. Покладемо $X_i = D_i \cdot \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $X_i \triangleleft X$. Якщо для всіх $i \in [0, \infty)$ $X'_i \neq 1$, то $X_i \triangleleft X$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i = \langle x \rangle \triangleleft X$. Знову X — нільпотентна, а значить абелева група, що неможливо. Отже для деякого i $X'_i = 1$. Звідси $D_i \cdot \langle x^p \rangle$ — центральна підгрупа скінченного індексу в X . Звідси X — FC -група з періодичним комутантом і знову $X' = 1$. Отже, в усіх можливих випадках одержали суперечність, з якої випливає, що $G' = 1$. Лема доведена.

Наслідок 4.2.1. Локально розв'язні $T(I\bar{A})$ -групи без скруту витерпу-

ються неперіодичними абелевими групами без скруту.

Доведення. Необхідність. За лемою 4.2.1 будь-яка скінченно породжена підгрупа із G — абелева, а значить $G' = 1$. Необхідність доведена. Достатність очевидна.

Лема 4.2.2. Комутант нескінченної локально розв'язної $T(I\bar{A})$ -групи є періодичною групою.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За наслідком 4.1.1 G'' — нільпотентна група. Звідси G'' має періодичну частину T , $T \triangleleft G$. За лемою 4.1.1 $G'/T = ST(I\bar{A})$ -група. За лемою 4.2.1 G''/T не містить елементів нескінченного порядку. Отже, $T = G''$. Звідси в G' існує періодична частина $C \triangleleft G$. Як і раніше G/C не містить елементів нескінченного порядку. Звідси $G' = C$ — періодична група. Лема доведена.

Наслідок 4.2.2. Якщо в (нескінченній $T(I\bar{A})$ -) $T(\bar{A})$ - локально розв'язній групі G $G''' \neq 1$, то G — періодична група.

Лема 4.2.3. Комутант неперіодичної $ST(\bar{A})$ -групи G є періодичною абелевою групою.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 4.2.2 G' — періодична група. Якщо $G'' = 1$, то лема доведена. Нехай $G'' \neq 1$. Можливі випадки: 1) G' — локально нільпотентна група; 2) G' — не локально нільпотентна група.

Випадок 1. В цьому випадку G' містить p -підгрупу Міллера-Морено $M \triangleleft G$ і G/M — неперіодична ST -група. За твердженням 4.1.1 $G' = M$, G — FC -група. Відомо, що $Z(G)$ z , $|z| = \infty$. Ясно, що $M \times \langle z \rangle = G_1 \triangleleft G$. За твердженням 1.1.1 $M = \langle c \rangle \cdot \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $c \in Z(M)$, $|c| = p$, $[a, b] = c$, $\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle \cap \langle c \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle c \rangle$.

В G_1 існують підгрупи

$$G_2 = (\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle) \lambda \langle b \cdot z^{8p} \rangle,$$

$$G_3 = (\langle c \rangle \cdot \langle b \rangle) \lambda \langle a \cdot z^{8p} \rangle.$$

Зрозуміло, що $G_2 \triangleleft G$, $G_3 \triangleleft G$, G/G_2 , G/G_3 — ST -групи, що містять центральні елементи порядку $8p$. Оскільки G' — p -група, то останнє можливо лише коли

$$G' \subset G_2 \cap G_3 = (\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle) \cap (\langle c \rangle \cdot \langle b \rangle) = \langle c \rangle.$$

Звідси $|G'| \leq p$, що неможливо. Отже, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. В цьому випадку G' містить підгрупу Шмідта

$$M = P\lambda\langle x \rangle,$$

$M' = P$. Зрозуміло, що $P \subset G''$. Покладемо $N = G'' \cdot M$. Зрозуміло, що $N \triangleleft G$, $N' \neq 1$. Якщо в N існує власна неабелева нормальна підгрупа U , тоді $U \triangleleft G$, G/U — неперіодична ST -група з неединичним комутантом G'/U , що суперечить твердженню 4.1.1. Звідси всяка власна нормальна підгрупа із N абелева. За результатами [39] $N = Y\lambda\langle x \rangle$, $Y' = 1$, $\langle x \rangle$ — силовська q -підгрупа із N , $C_Y(\langle x \rangle) = 1$. За лемою 1.3.1 $G = Y\lambda D$, $D = N_G(\langle x \rangle)$. Зрозуміло, що $G' = N$, $D' = \langle x \rangle = G' \cap D$, D — FC -група. Як і раніше, $Z(D) \neq 1$, $|D| = \infty$. Покладемо $g = d^{8p}$. Якщо підгрупа $V = Y\lambda\langle g \rangle$ неабелева, то $V \triangleleft G$, G/V — ST -група, комутант якої містить елементи порядку p , а центр — порядку $8p$.

За твердженням 4.1.1 $G' = Y$, що неможливо. Отже, $[Y, \langle g \rangle] = 1$. Покладемо $Z = Y\lambda\langle xg \rangle$. Ясно, що $Z' \neq 1$, Z — субнормальна, а значить нормальна підгрупа із G . Як і раніше, $G' = Y$, що неможливо. Тому випадок 2 неможливий. Тобто в усіх випадках одержано суперечності, які показують, що $G'' = 1$. Лема доведена.

Теорема 4.2.1. Локально розв'язні $T(\bar{A})$ -групи вичерпуються групами класів:

- 1) G — розв'язна метагамільтонова група;
- 2) G — неметагамільтонова $T(\bar{A})$ -група з періодичним абелевим комутантом;
- 3) G — періодична неметагамільтонова $T(\bar{A})$ -група з абелевим другим комутантом G'' ;
- 4) G — періодична $T(\bar{A})$ -група, у якій G'' — скінченна p -група Міллера-Морено, що є силовською p -підгрупою із G' , p — просте число.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді за наслідком 4.1.1 $G - ST(\bar{A})$ -група. Якщо G — розв'язна метагамільтонова група, то вона група класу 1). Нехай G — неметагамільтонова група. За лемою 4.2.2 G' — періодична група. Якщо $G'' = 1$, то G — група класу 2).

Нехай $G'' \neq 1$. За наслідком 4.2.2 G — періодична група. Якщо $G'' \neq 1$, а $G''' = 1$, то G — група класу 3). Нехай далі $G''' \neq 1$. За наслідком 4.1.1 $G'' = M$ — скінченна p -група Міллера-Морено, p — просте число. Нехай P — силовська p -підгрупа із G' . Ясно, що $P \triangleleft G$. Якщо $P = M$, то G — група класу 4). Нехай $M \subset P$. За наслідком 4.1.2 P — нільпотентна група. За твердженням 2.1.1 в P знайдеться підгрупа Міллера-Морено $F \neq M$. Ясно, що $F \triangleleft G$ і $G/F - ST$ -група з одиничним абелевим другим комутантом. Звідси $F \supset M$, що неможливо. Ця суперечність завершує доведення необхідності.

Достатність очевидна. Теорема доведена.

Теорема 4.2.2. Локально розв'язні не локально нільпотентні $T(\bar{A})$ -групи вичерпуються групами класів:

- 1) $G - T(\bar{A})$ -група з неединичним абелевим періодичним локально нільпотентним корадикалом;
- 2) G — періодична $T(\bar{A})$ -група з нільпотентним неабелевим локально нільпотентним корадикалом A , G/A — дедекіндова група;

3) G — періодична $T(\bar{A})$ -група з неодиначним абелевим другим локально нільпотентним корадикалом B ;

4) G — періодична $T(\bar{A})$ -група, другий локально нільпотентний корадикал якої є скінченною p -групою Міллера-Морено, що співпадає з силовською p -підгрупою із G' .

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. За теоремою 4.1.3 G має ряд характеристичних підгруп $G \supset A \supset B$, де A і B — перший та другий локально нільпотентні корадикали групи G . Будь-яка власна підгрупа із B абелева. Якщо $B = A' = 1$, то G — група класу 1). Нехай $B = 1, A' \neq 1$. Тоді за наслідком 4.1.2 A — нільпотентна група, всі неабелеві підгрупи якої нормальні в G . За лемою 4.2.3 G — періодична група, а значить група класу 2). Нехай $B \neq 1$, а $B' = 1$. Тоді G — група класу 3). Нехай, нарешті, $B' \neq 1$. Тоді $G'' \supseteq B$ — скінченна p -група Міллера-Морено. Як і в теоремі 4.2.1 $B = G''$ — силовська p -підгрупа із G' і G — група класу 4). Необхідність доведена.

Достатність очевидна. Теорема доведена.

Лема 4.2.4. Нескінченна локально розв'язна $T(I\bar{A})$ -але не $T(\bar{A})$ -група G є черніковською групою.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за умовою леми в G існує скінченна неабелева підгрупа X субнормальна, але не нормальна в Y . Покажемо, що G — черніковська група. Нехай це не так. Нехай g — елемент із Y і $F = \langle X, g \rangle$. Можливі випадки: 1) Y — періодична група; 2) Y — неперіодична група.

Випадок 1. В цьому випадку Y — локально розв'язна, а значить локально скінченна група, і тому $|F| < \infty$. За результатами [116] в G існує нескінченна допустима відносно F абелева підгрупа A , $F \cap A = 1$. Покладемо $U = A\lambda F$, $V = A\lambda X$. Ясно, що V — нескінченна неабелева

субнормальна підгрупа із U . Звідси $V \triangleleft U$, $V \cap F = X \triangleleft F$. За довільністю g $X \triangleleft Y$, що неможливо.

Випадок 2. В цьому випадку $|g| = \infty$, а F — розв'язна $T(I\bar{A})$ -група. За лемою 4.2.2 F має періодичну частину T , що співпадає з нормальним замиканням X в $F = T\lambda\langle g \rangle$. За випадком 1) $X \triangleleft T$. Можливі випадки: 2.1) $|T| = \infty$, 2.2) $|T| < \infty$.

Випадок 2.1. Ясно, що $C_T(X) = C \triangleleft T$, $|T : C| < \infty$. Покладемо $D = C \cdot X$. Тоді $D \triangleleft F$. За вибором T $D = T$. Якщо $C' \neq 1$, то $C_T(C)$ і C — нормальні підгрупи із F , $X \subset C_T(C)$ — власна підгрупа із T , що неможливо. Отже, $C' = 1$. Нехай U/X — нескінченна підгрупа із T/X . Тоді $U \triangleleft F$, а значить $U = T$. Отже, в U/X немає власних нескінченних підгруп. Тоді C — квазіциклічна група. Нехай N в цьому випадку — підгрупа із T , що породжується всіма $\pi(\{z\})$ -елементами із T . Тоді $X \subset N$ — скінченна нормальна підгрупа із F , що неможливо. Випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. В цьому випадку $Z(F) \cap \langle g \rangle = z$, $|z| = \infty$. Тепер $X \times \langle z \rangle$ — нескінченна субнормальна, а значить нормальна підгрупа із F , а X — її періодична частина і в цьому випадку $X \triangleleft F$, що неможливо. Ці суперечності показують, що G — черніковська група і лема доведена.

Теорема 4.2.3. Нескінченні локально розв'язні $T(I\bar{A})$ -групи розв'язні, мають періодичний комутант і вичерпуються групами класів:

- 1) G — нескінченна $ST(\bar{A})$ -група (теорема 4.2.1, 4.2.2);
- 2) G — нескінченна неметагамільтонова локально нільпотентна черніковська $H(I\bar{A})$ -група (теорема 3.2.2);
- 3) G — нескінченна не локально нільпотентна неметагамільтонова черніковська $ST(I\bar{A})$ -, але не $T(\bar{A})$ -група, у якій $|G''| = p^\delta$, $\delta = 0, 1$, при $\delta = 1$ $G'' = M \cdot C$, де M — скінченна p -група Міллера-Морено, C —

локально циклічна q -група, p, q — не обов'язково різні прості числа, $M' \cdot C \subset Z(G')$.

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді за наслідком 4.1.1 неабелева група G''' має вид, як в групах класу 3) розглядуваної теореми. За лемою 4.2.2 G' — періодична група. Якщо $G = T(\bar{A})$ -група, то вона група класу 1).

Нехай G — не $T(\bar{A})$ -групою. Тоді G — неметабільтова група. Якщо G — локально нільпотентна, то за теоремою 4.1.4 G — група класу 2). Якщо G — не локально нільпотентна, то за лемою 4.2.4 G — група класу 3). Необхідність доведена.

Достатність очевидна. Теорема доведена.

4.3 Будова періодичних $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом

Означення 4.3.1. Для спрощення викладок періодичну не локально нільпотентну групу G з неединичним абелевим локально нільпотентним корадикалом A будемо називати $*$ -групою.

Означення 4.3.2 [61]. Автоморфізм φ групи G називається степеневим, якщо всі підгрупи групи G допустимі відносно φ .

Твердження 4.3.1 [61]. Якщо група G містить квазіцентральну підгрупу A , то G індує на A групу степеневих автоморфізмів.

Лема 4.3.1. Нехай G — не локально нільпотентна $ST(\bar{A})$ -група з локально нільпотентним корадикалом A . Тоді A — власна нормальна періодична підгрупа із G , $A \subset G'$, $|A| > 2$, $A \cdot C_G(A)$ — власна нормальна підгрупа із G , G/A — нільпотентна метабільтова $H((A \cdot C_G(A))/A)$.

група, і справедливі твердження:

1) локально нільпотентний корадикал будь-якої підгрупи із G належить A ;

2) якщо ω — гомоморфізм групи G , то для довільного простого $p \in \pi(A)$ неодиначна силовська p -підгрупа із $\omega(A)$ не належить $Z(\omega(G))$. Неодиначна силовська 2-підгрупа із $\omega(A)$ неквазіцентральна в $\omega(G)$;

3) якщо A — нільпотентна група і V — холловська підгрупа із A , $|V| > 1$, то $|V| > 2$, і $[V, G] = V$, $C_G(V)$ — власна нормальна підгрупа із G . В частинному випадку $[A, G] = A$, $A \cdot C_G(A)$ — власна нільпотентна нормальна підгрупа із G , всі неабелеві підгрупи якої теж нормальні в G .

Доведення. Нехай G і A задовольняють умову леми. За наслідком 4.1.2 $A \not\subset Z(G)$, $|A| > 2$, $A \cdot C_G(A) = C$ — власна нормальна нільпотентна підгрупа із G , всі неабелеві підгрупи якої нормальні в G і G/A — нільпотентна метагамільтонова $H(C/A)$ -група. Всі інші твердження леми випливають із результатів [70], а за лемою 4.2.2 $A \subset G'$ — періодична група. Лема доведена.

Лема 4.3.2. Нехай G — *-група, A містить неодиначну силовську q -підгрупу, для якої в G існує неабелева силовська q -підгрупа, q — просте число. Тоді $G = F \times Y$, де $F = A\lambda(\langle b \rangle \times X)$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q — просте число, $q > 2$, $A = H \times V$, $H\lambda\langle b \rangle$ — нормальна в G силовська q -підгрупа, що є скінченною групою Міллера-Морено, $[V, \langle b \rangle] = 1$, $A\lambda X$ — T -група з локально нільпотентним корадикалом A , $C_X(H) = C_X(A)$ — абелева група, Y — абелева холловська підгрупа із G .

Доведення. Нехай G і A задовольняють умову лемі, q — просте число із $\pi(A)$, по якому A має неодиначну силовську q -підгрупу H , а G має неабелеву силовську q -підгрупу. Тоді $A = H \times V$. Ясно, що $H \triangleleft G$, $V \triangleleft G$. Нехай C/V — силовська q -підгрупа із G/V . Зрозуміло, що $A \subset C$. За

лемою 4.3.1 G/A — нільпотентна метабільтонова група. Звідси $C \triangleleft G$ і за лемою 4.1.1 G/C — дедекіндова група. Розглянемо можливі випадки:
1) $V = 1$, 2) $V \neq 1$.

Випадок 1. В цьому випадку $A = H, C \triangleleft G$ — неабелева силовська q -підгрупа, що є нільпотентною метабільтоновою групою, всі неабелеві підгрупи якої нормальні в G . Оскільки $H' = 1$, то $H \subset C$. Зрозуміло, що C містить скінченну підгрупу Міллера-Морено M , $M \triangleleft G$, G/M — ST -група з силовською q -підгрупою C/M , що містить локально нільпотентний корадикал групи G/M і не містить центральних в G/M неединичних q -елементів. Можливі випадки: 1.1) $A \subset M$, 1.2) $A \not\subset M$.

Випадок 1.1. В цьому випадку $|A| < \infty$ і за результатами [31, 114] $G = A\lambda U$. Нехай Y — максимальна центральна в G холловська підгрупа із U . Тоді $U = D \times Y$, $Y' = 1$, $\pi(D) \cap \pi(Y) = \emptyset$. Покладемо $F = A\lambda D$. Тоді $G = F \times Y$. Зрозуміло, що D — нільпотентна метабільтонова група. Тоді $D = Q \times X$, де Q — силовська q -підгрупа із D , а X — її холловське доповнення. Ясно, що $C = A\lambda Q = H\lambda Q$. Оскільки G/C — дедекіндова група, то X — холловська дедекіндова підгрупа із G .

Оскільки $A \subset M$, то $M = A\lambda\langle b \rangle$, де $\langle b \rangle = M \cap Q$. Звідси $Q \not\triangleleft G$, а значить $Q' = 1$. Якщо $\langle b \rangle \subset Q$, то існує $y \in Q \setminus \langle b \rangle$. Покладемо $M_1 = \langle ay, b \rangle$. Ясно, що $M' = M'_1$, $M = \langle a, b \rangle$, $a \in A$, $a \notin M_1$, $y \notin M_1$, $C' \subset M_1$. Силовська q -підгрупа C/M_1 ST -групи G/M_1 містить неединичний елемент $\langle M_1 a \rangle$ із локально нільпотентного корадикала G/M_1 і неединичний елемент $\langle M_1 y \rangle$ із $Z(G/M_1)$, що неможливо. Отже, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q — просте число. Оскільки $M = C$, то $|M'| = q$, $M' \subset A$, $M' \triangleleft G$. Якщо $q = 2$, то A/M' — циклічна, а значить квазіцентральна 2-група локально нільпотентного корадикала G/M' , що суперечить лемі 4.3.1, отже, $q > 2$, $H = A$, $C = A\lambda\langle b \rangle = H\lambda\langle b \rangle$ — нормальна силовська q -підгрупа із G , що є групою Міллера-Морено. Зрозуміло, що $C_X(A) = C_X(H) = S_1 \triangleleft G$. Якщо $S'_1 \neq 1$, то в T -групі G/S_1 локально

нільпотентні підгрупи, а значить і C , дедекіндові, що для C неможливо. Звідси $S'_1 = 1$. За лемою 4.3.1 $[H, G] = [H, X] = H$. Нехай $g \in X \setminus S_1$. За попереднім $A = \langle c \rangle \cdot \langle a \rangle$, $|c| = q$. Покажемо, що $A \setminus X$ — T -група. Дійсно, якщо $c \in \langle a \rangle$, то $A = \langle a \rangle$ і A — квазіцентральна підгрупа із $A \setminus X$.

Остання підгрупа за твердженням 4.1.1 є T -групою. Нехай $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Тоді $A = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $[a, b] = c$. За теоремою Машке можна вважати, що $\langle a \rangle$ допустима відносно X . Тоді $g^{-1}cg = c^k$, $g^{-1}ag = a^l$, $(lk, q) = 1$, $b^{-1}g^{-1}agb = b^{-1}a^l b = c^l \cdot a^l = g^{-1}b^{-1}abg = g^{-1}cag = c^k a^l = c^l \cdot a^l$. Звідси $k \equiv l \pmod{p}$ і X індукує на A степеневий автоморфізм, тобто A — квазіцентральна підгрупа із $A \setminus X$. За твердженням 4.1.1 $A \setminus X$ — T -група і у випадку 1.1 G — група, що задовольняє твердженню леми.

Випадок 1.2. В цьому випадку $(A \cdot M)/M$ — неединичний локально нільпотентний корадикал із ST -групи G/M , тому $C = A \cdot M$. За випадком 1.1 можна вважати, що в C не існує підгруп Міллера-Морено, що містять A . За твердженням 2.1.1 $C \supset M_1 \neq M$, M_1 — підгрупа Міллера-Морено, $M' \supset C' \supset M_1$. Тепер силовська q -підгрупа C/M_1 містить неединичну підгрупу $(A \cdot M_1)/M_1$ із локально нільпотентного корадикала ST -групи G/M_1 і неединичну центральну підгрупу $(M_1 \cdot M)/M_1$ із $Z(G/M_1)$, що неможливо. Отже, випадок 1.2 неможливий.

Випадок 2. В цьому випадку G/V — група із випадку 1.1. Тоді $|H| < \infty$, $G/V = A/V \lambda U/V$, $G = A \cdot U$, $A \cap U = V$, $G = H \lambda U$, $C = H \lambda(V \lambda \langle b \rangle)$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $q > 2$, $H \lambda \langle b \rangle$ — силовська q -підгрупа із G , що є скінченною групою Міллера-Морено. Якби $V \lambda \langle b \rangle$ була неабелевою групою, то вона була б нормальна в G і $[H, \langle b \rangle] = 1$, що неможливо. Отже, $[V, \langle b \rangle] = 1$ і $H \lambda \langle b \rangle = Q \triangleleft G$. За лемою 4.1.1 G/Q — ST -група з квазіцентральним холловським локально нільпотентним корадикалом $(Q \cdot A)/Q$. Звідси V — квазіцентральна холловська підгрупа із G . Оскільки $|Q| \neq \infty$, то $G = Q \lambda U_0$, $A \cap U_0 = V$, V — ST -група з локально нільпотентним корадикалом V . Нехай Y — максимальна центральна

хотлівська підгрупа із U_0 , $Y \subset Z(G)$. Тоді $U_0 = D_0 \times Y$. Покладемо $F = Q\lambda D_0$, тоді $G = F \times Y$, D_0 — ST -група з локально нільпотентним корадикалом V . Нехай $S_0 \models C_{D_0}(Q)$. Тоді $S_0 \triangleleft G$. Якщо $S_0' \neq 1$, то в ST -групі G/S_0 силовська q -підгрупа, ізоморфна Q , буде дедекіндовою, що неможливо. Отже, $S_0' = 1$ і $C_{D_0}(V) \supseteq S_0$. Оскільки $|D_0 : S_0| < \infty$, то $D_0 = V\lambda X$. Тепер $F = A\lambda(\langle b \rangle \times X)$, $A = H \times V$, $C_X(H) = C_X(A)$. — абелева група і G — група із розглядуваної леми. Лема доведена.

Лема 4.3.3. Нехай G — $*$ -група і Q — силовська q -підгрупа із A , $q \in \pi(A)$ — просте число. Тоді $G = K\lambda X$, $C_X(Q) = C \triangleleft G$, $X \setminus C$ містить q' -елементи і для кожного такого елемента g справедливі співвідношення $Q = K \times Z$, $[Q, \langle g \rangle] = [K, \langle g \rangle] = K \neq 1$, $C_Q(g) = Z$ — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій, яка співпадає з 1, коли Q не є силовською підгрупою із G .

Доведення. Нехай G і Q задовольняють умову леми. Якщо $Q = 1$, то лема очевидна. Нехай $|Q| \neq 1$, тоді $|Q| > 2$ і $A = Q \times V$, $Q \triangleleft G$, $V \triangleleft G$. Якщо існує неабелева силовська q -підгрупа із G , то лема випливає з леми 4.3.1. Нехай всі силовські q -підгрупи абелеві. Тоді всі q -елементи із G належать $C_G(Q) = L \triangleleft G$ і $G \setminus L$ — непорожня множина q' -елементів із G . Нехай g — один із них. Можливі випадки: 1) $V = 1$; 2) $V \neq 1$.

Випадок 1. В цьому випадку $A = Q$, G/A — нільпотентна група. Тому в G існує ненільпотентна субнормальна, а значить нормальна підгрупа $N = A\lambda\langle g \rangle$. За теоремою 4.1.3 N має локально нільпотентний корадикал $K = N' = [A, \langle g \rangle] = [K, \langle g \rangle] \neq 1$. Звідси в N існує неабелева субнормальна підгрупа $N_1 = K\lambda\langle g \rangle$, $N_1' = K$ і за відомими результатами $C_K(g) = 1$. Очевидно $N_1 \triangleleft G$. За лемою 1.3.2 $G = N_1 \cdot X$, де $X = N_G(g)$, $X \cap K = 1$ і $G = K\lambda X$, $N \cap X = N_N(g) = Z \times \langle g \rangle$, $Z = C_A(g)$. Зрозуміло, що Z — силовська q -підгрупа із $Z(N)$. Нехай $z \in Z$. Тоді $(N_1 \times \langle z \rangle) \triangleleft G$, а $\langle z \rangle$ — силовська q -підгрупа із її центра. Звідси $\langle z \rangle \triangleleft G$, а Z — квазіцен-

тральна підгрупа із G . Зрозуміло, що $Q = K \times Z$ і $Q/K \cong Z$ — локально нільпотентний корадикал із G/K , який за лемою 4.3.1 не містить інволюцій. Звідси Z — група без інволюцій.

Ясно, що Z — локально нільпотентний корадикал із X . За лемою 4.1.1 $G/N_1 \cong X/\langle g \rangle$ — ST -група з холловським локально нільпотентним корадикалом. Оскільки g — q' -елемент, то $(Z \times \langle g \rangle)/\langle g \rangle$ — силовська q -підгрупа із $X/\langle g \rangle$. Звідси $|Z| = 1$, коли Q — не є силовською q -підгрупою із G . Нехай $C = L \cap X$, тоді $C \triangleleft G$, C — нільпотентна метагамільтонова група. Лема у випадку 1) доведена.

Випадок 2. В цьому випадку G/V задовольняє умову випадку 1). Тоді для A/V в різниці G/V і $C_{G/V}(A/V)$ існують q' -елементи виду $\langle Vg \rangle$ і для кожного з них справедливо $A/V = K_0/V \times Z/V$, де K_0/V і Z/V задовольняють тим же співвідношенням, що і K та Z у випадку 1).

Розглянемо підгрупу $A \cdot \langle g \rangle$. За попереднім випадком $G/V = K_0/V \lambda X/V$, де X/V — нормалізатор $\langle Vg \rangle$ в G/V . Звідси $G = K_0 \cdot X$, $K_0 \triangleleft G$, $X \cap K_0 = V$, $K_0 = K \times V$, $K \triangleleft G$, $G = K \lambda X$. Оскільки $K \triangleleft G$, то $[K, \langle g \rangle] = K$, $Z_0 = Z \times V$, $Z \triangleleft G$, $Q = K \times Z$. Так як $Z_0/V \subset Z(N/V)$, то $Z \subset Z(N)$ і Z — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій. Якщо Q — несиловська q -підгрупа в G , то A/V — несиловська q -підгрупа із G/V . Тоді $Z_0/V = 1$ і $Z_0 = 1$. Нехай $C = C_X(Q)$. Тоді $C \supset V$ і $C \triangleleft G$. Зрозуміло, що $X \setminus C$ містить q' -елементи і якщо g — один із них, то $\langle Vg \rangle$ — q' -елемент, який не належить $C_{G/V}(A/V)$. Тому твердження леми справедливе для будь-якого q' -елемента із $X \setminus C$. Лема доведена.

Лема 4.3.4. Нехай G — $\ast$ -група і H — підгрупа її локально нільпотентного корадикала A , яка розкладається в прямий добуток всіх неединичних силовських q -підгруп $Q \subset A$, які не є силовськими q -підгрупами із G для довільного простого $q \in \pi(A)$. Тоді $G = H \lambda U$, $C_U(Q) = C_U(H) = C_U(A) = S \triangleleft G$, $A = H \times V$, $V \triangleleft G$, $V \subset S = V \times C$, $C' = 1$, S — власна підгрупа із U , в $U \setminus S$ існують $\pi'(H)$ — елементи і для кожного з них g

маємо $[H, \langle g \rangle] = H$, $C_H(g) = 1$.

Доведення. Нехай G і H задовольняють умову леми. Якщо в G існує неабелева силовська q -підгрупа для деякого $q \in \pi(H)$, то твердження леми випливає із леми 4.3.2. Нехай далі для довільного $q \in \pi(H)$ силовські q -підгрупи із G абелеві. Можливі випадки: 1) $|V| = 1$; 2) $|V| \neq 1$.

Випадок 1. В цьому випадку можливі випадки: 1.1) H — примарна група; 1.2) H — біпримарна група; 1.3) H — більше, ніж біпримарна група.

Випадок 1.1. В цьому випадку H — q -група і за лемою 4.3.3 $G = Q\lambda U$, $C_U(Q) = C_U(H) = C_U(A) = S \triangleleft G$, $S < U$. Очевидно, що всі q -елементи із U належать S . За лемою 4.3.1 U — нільпотентна група. Оскільки q -підгрупи із G абелеві, то в S може бути неабелевою лише деяка силовська p -підгрупа $P \neq Q$. Ясно, що $P \triangleleft G$, G/P — ST -група з нехолловським локально нільпотентним корадикалом, що неможливо. Отже, $S' = 1$ і в цьому випадку всі твердження розглядуваної леми випливають із леми 4.3.3.

Випадок 1.2. В цьому випадку $H = Q \times R$. За лемою 4.3.3 $G = H\lambda U$, Q — силовська q -підгрупа, R — силовська r -підгрупа із H , r, q — різні прості числа, $|Q| > 2$, $|R| > 2$. Нехай $C = C_U(H)$. Як у випадку 1.1 можна показати, що $C' = 1$ і U — нільпотентна метатагаметтонова група. За тією ж лемою в U знайдеться такий p -елемент y і такий s -елемент x , що $[Q, \langle y \rangle] = Q$, $C_Q(y) = 1$, $[R, \langle x \rangle] = R$, $C_R(x) = 1$, p, s — прості числа, $q \neq p$, $r \neq s$. Покладемо $G_0 = H\lambda\langle x, y \rangle$. Покажемо, що $[R, \langle y \rangle] = R$, $C_R(y) = 1$, $[Q, \langle x \rangle] = Q$, $C_Q(x) = 1$. За лемою 4.3.3 при неабелевості підгрупи $R \cdot \langle y \rangle$ і $Q \cdot \langle x \rangle$ твердження очевидне. Нехай одна з підгруп абелева. Наприклад, нехай $[R, \langle y \rangle] = 1$. Зрозуміло, що $G_0 \triangleleft G$. а підгрупа $N_1 = Q\lambda\langle y \rangle$ неабелева і субнормальна в G_0 . Звідси $N_1 \triangleleft G$.

$(N_1 \times R)/N_1$ — локально нільпотентний корадикал ST -групи G/N_1 , що є силовською r -підгрупою із G/N_1 . Звідси $R_0 = \langle y \rangle \times R$ — силовська r -підгрупа із G і R — квазіцентральною підгрупою із $D_1 = R\lambda\langle x \rangle$. Неважко показати, що R — локально нільпотентний корадикал D_1 , а значить для довільного елемента $z \in R$, $|z| = r$ існує неабелева підгрупа $\langle z \rangle\lambda\langle x \rangle$, тобто $x^{-1}zx = z^l, l \not\equiv 1 \pmod{r}$, r — просте число більше 2, $r \neq s$. Покладемо $g = y \cdot z$ і $N_2 = Q\lambda\langle g \rangle$, $N_0 = R_0\lambda\langle x \rangle$. Як і раніше, $N_2 \triangleleft G$, $N_2 \cap N_0 = \langle g \rangle$, $\langle g \rangle \triangleleft N_0$. Тоді $x^{-1}gx = g^n = y^n \cdot z^n = y \cdot x^{-1}zx = y \cdot z^l$. Звідси $n \equiv 1 \pmod{|y|}$ і $n \equiv l \pmod{r}$, $l \equiv 1 \pmod{r}$, що неможливо. Отже, $[R, \langle y \rangle] = R$. Аналогічно, $[Q, \langle x \rangle] = Q$. З цього випливає, що $C_U(Q) = C_U(R) = S = C$ і $C' = 1$. Співвідношення для довільного $\pi'(H)$ -елемента g випливають із леми 4.3.3. В цьому випадку лема доведена.

Випадок 1.3. Нехай H — більше, ніж біпримарна група. Покладемо в цьому випадку $T = Q \times R$, де Q — силовська q -підгрупа, R — силовська r -підгрупа із H , p, q — різні прості числа, $|Q| > 2$, $|R| > 2$. Тоді $H = T \times L$, де L — холловське доповнення підгрупи T в H і $T \triangleleft G$, $L \triangleleft G$. Для G/L за випадком 1.2 маємо $G/L = H/L\lambda U/L$, $(C/L)' = 1$, де $C/L = C_{U/L}(H/L)$. Зрозуміло, що $G = T\lambda U$, $[T, C] \subset L$. Оскільки $T \triangleleft G$, то $C = C_U(T)$, $C \triangleleft G$, $L \subset C$. Покажемо, що $C' = 1$. Дійсно, якщо $L \subset Z(C)$, то C — нільпотентна група і при $C' \neq 1$ містить примарну підгрупу Міллера-Морено M , $M \triangleleft G$, G/M — ST -група з нехолловським локально нільпотентним корадикалом, що містить підгрупу $(T \times M)/M$, що неможливо. Отже, $L \not\subset Z(C)$. Тоді при $C' \neq 1$ в C знайдеться примарний елемент g , такий що $L \cdot \langle g \rangle = M$ — неабелева субнормальна в C , а значить нормальна в G група і G/M — ST -група з нехолловським локально нільпотентним корадикалом. Отже, завжди $C' = 1$. За випадком 1.2 C/L дорівнює централізатору в U/L як підгрупи $(Q \times L)/L$, так і підгрупи $(R \times L)/L$. За довільністю Q і R із L випливає, що $C = C_U(Q)$ для будь-якого $q \in \pi(H)$. Нехай в цьому випадку g — примарний елемент

із $U \setminus C$. Такий існує, оскільки $H \not\subset Z(G)$. За попереднім $H \cap \langle g \rangle = 1$ і для Q за лемою 4.3.3 $[Q, \langle g \rangle] = Q$, $C_Q(g) = 1$. Звідси $[H, \langle g \rangle] = 1$, $C_H(g) = 1$. Покладемо $N = H\lambda\langle g \rangle$. Оскільки G/H — нільпотентна група, то N — неабелева субнормальна, а значить нормальна підгрупа із G . За лемою 1.3.1 $G = H\lambda N_G(g)$. Покладемо $N_G(g) = U$, тоді $G = H\lambda U$. Нехай $C = C_U(H)$, тоді $C' = 1$. Лема в цьому випадку доведена.

Випадок 2. В цьому випадку група G/V задовольняє умови випадку 1), за яким $G/V = A/V\lambda U/V$, $G = A \cdot U = H\lambda U$ і $S/V = C_{U/V}(A/V)$, $S/V' = 1$, S/V співпадає з централізатором в U/V кожної силовської підгрупи з A/V . Зрозуміло, що V — холловська підгрупа із G , $V \subset S$. Якщо $V \subset Z(S)$, то $S' = 1$. Нехай $V \not\subset Z(S)$. Тоді в S існує примарний елемент g , для якого підгрупа $N = V\lambda\langle g \rangle$ ненільпотентна субнормальна, а значить нормальна в G . Як і раніше, G/N — ST -група з холловським локально нільпотентним корадикалом $(H \times N)/N$. Звідси H — q -група, а $H \times \langle g \rangle$ — силовська q -підгрупа із G . За лемою 4.3.3 в $U \setminus S$ існує примарний елемент x , для якого $[H, \langle x \rangle] = H$. За попереднім локально нільпотентний корадикал групи G/N квазіцентральный в G/N , тому H — квазіцентральный підгрупа із G без інволюцій. Зрозуміло, що x — p -елемент, $p \neq q$. В силу холловості V в G і нільпотентності U/V можна вважати, що $[g, x] = 1$, $[Q, g] = 1$. В G існує підгрупа $G_0 = V\lambda N_0$,

$$N_0 = Q_0\lambda\langle x \rangle,$$

де

$$Q_0 = Q \times \langle g \rangle.$$

В Q знайдеться z , $|z| = q$, $x^{-1}zx = x^l$, $l \not\equiv 1 \pmod{q}$. Покладемо $y = g \cdot z$, $N_1 = V\lambda\langle y \rangle$. Як і раніше, $\langle y \rangle \triangleleft M_0$. Покажемо, що $l \equiv 1 \pmod{q}$. З цієї суперечності випливає, що $S' = 1$, $S = C_U(A)$. Лема доведена.

Наслідок 4.3.1. Нехай G — $*$ -група, H — неодиначна холловська підгрупа її локально нільпотентного корадикалу A , що розкладається

ся в прямий добуток силовських q -підгруп Q із A для всіх простих $q \in \pi(A)$, для яких Q не є силовською q -підгрупою із G . Тоді $G = H\lambda U$, $C_U(Q) = C_U(H) = C_U(A)$ — абелева група, нормальна в G , всі $\pi(H)$ -елементи із U належать $Z(U)$, а якщо для всіх $q \in \pi(H)$ силовські q -підгрупи із G абелеві, то $\pi(H)$ -елементи із U належать $Z(G)$.

Наслідок очевидний.

Наслідок 4.3.2. Нехай G — метагамільтонова чи $*$ -група. Тоді для довільного примарного елемента $g \in G \setminus C_G(A)$ підгрупа $C_A(g)$ — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Якщо G задовольняє умову леми 4.3.2, то наслідок випливає із згаданої леми.

Нехай G не задовольняє умову леми 4.3.2. Тоді наслідок випливає із леми 4.3.3. Для метагамільтонових груп наслідок очевидний. Наслідок доведений.

Теорема 4.3.1. Періодичні $T(\bar{A})$ -групи з абелевим локально нільпотентним корадикалом мають вид $G = F \times Y$, де $F = H\lambda D$, H — абелева група, що не містить силовських q -підгруп із G ні для одного простого $q \in \pi(G)$, H, D, Y — періодичні групи, $\pi(D) \cap \pi(Y) = \emptyset$, $Y' = 1$, D містить абелеву холловську в G підгрупу V , що співпадає з локально нільпотентним корадикалом групи D , $V \times H = A \triangleleft G$, $[A, D] = A$, $[H, \langle g \rangle] = H$, $C_H(g) = 1$, $C_D(A) = S \triangleleft G$, для довільного примарного елемента $g \in D \setminus S$ підгрупа $C_A(g)$ — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій, і є групами одного з типів:

1) G — нільпотентна метагамільтонова група (теорема 2.7.1), $A = 1$, $S = D$;

2) $D = V\lambda(\langle b \rangle \times X)$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q — просте число, $q > 2$, $H\lambda\langle b \rangle$ — нормальна в G силовська q -підгрупа, що є скінченною групою Міллера-Морено; $[V, \langle b \rangle] = 1$, $A\lambda X$ — T -група з локально нільпотентним кора-

дикалом A , $C_X(H) = C_X(A)$ — абелева група;

3) $D = V\lambda P$, $P = \langle a \rangle \lambda B$, $|a| = p^\alpha$, $P' = \langle a^{p^k} \rangle$, $S \cap P = \langle a^{p^m} \rangle \times B$, $(S \cap P)' = 1$, $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$, $p^k > 2$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = a^{p^k}$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq p^{k-m+1}$, p — просте число, $p \notin \pi(H)$;

4) $F = D = V\lambda P$, $P = \langle a \rangle \lambda B$, $|a| = p^\alpha$, $P' = \langle a^{p^k} \rangle$, $S \cap P = \langle a^{p^m} \rangle \lambda B$, $B' = 1$, $\alpha > k \geq \alpha - k > m > 0$, $B = \langle b \rangle \cdot Z$, $[a, b] = a^{p^k}$, $|b| = p^\beta$, $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$, $Z \subset Z(G)$, $\exp Z \leq p^{2k-\alpha+1}$, p — просте число, V — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій;

5) $F = D = V\lambda P$, V — квазіцентральна підгрупа із G без інволюцій.

$$P = \langle a \rangle \cdot B,$$

$$|a| = p^\alpha,$$

$$P' = B' = \langle a \rangle \cap B = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \subset Z(G),$$

$$S \cap P = \langle a^{p^m} \rangle \cdot B,$$

$\alpha > m > 0$, $p^{\alpha-m} > 2$, B — майже прямий добуток підгруп $B' \times \langle b_i \rangle$ з об'єднаною підгрупою B , $|b_i| = p^{\beta_i}$, $k - m \geq \beta_i > 0$, $i \in I$, $|I| > 1$;

6) $|H| > 2$, $S' = 1$, $\pi(H) \cap \pi(D) = \emptyset$, D/V — дедекіндова група;

7) $F = D$, $S' = 1$, $S \subset D$, D/V — дедекіндова група;

8) $F = D$, $S \subset D$ — ST -група (твердження 4.1.1).

Доведення. Нехай G — досліджувана група, A — її локально нільпотентний корадикал. Якщо $|A| \leq 2$, то G — нільпотентна група і $|A| = 1$. Покладемо $G = D \times Y$, $Y' = 1$. За теоремою 4.1.2 G — метабільтова група, а значить типу 1) теореми.

Нехай $|A| > 2$, H — холловська підгрупа із A , яка розкладається в прямий добуток силовських q -підгруп Q із A для всіх простих $q \in \pi(A)$, для яких Q не є силовською підгрупою в G . Тоді $A = H \times V$, $H \triangleleft G$, $V \triangleleft G$, $H' = V' = 1$. Нехай H містить неодиначну силовську q -підгрупу і G має неабелеву силовську q -підгрупу.

Тоді G задовольняє умову леми 4.3.2. За цієї лемою G — група типу 2) цієї теореми. Отже, в подальшому будемо вважати, що при $|Q| > 1$, де Q — силовська q -підгрупа із H , силовські q -підгрупи із G абелеві. За лемою 4.3.4 $G = H\lambda U$. Нехай Y — холловська максимальна підгрупа із U , що належить $Z(G)$. Тоді $U = D \times Y$, $\pi(Y) \cap \pi(D) = \emptyset$, $Y' = 1$, H, D, Y — періодичні групи. Покладемо $F = H\lambda D$. Тоді $G = F \times Y$. Зрозуміло, що $D \cap A = V$ — абелева холловська підгрупа із G . Нехай $S = C_D(A)$. За лемою 4.1.1 S — власна підгрупа із D , нормальна в G , $V \subset Z(S)$, а група F задовольняє всі ті ж умови, що і G , отже, A — локально нільпотентний корадикал F і V — локально нільпотентний корадикал D . За лемою 4.1.1 D/V — нільпотентна група. Звідси $S = V \times C$, де C — нільпотентна метабільтова група. Зауважимо, що при $C' \neq 1$ за лемою 4.1.1 G/C — ST -група з холловським локально нільпотентним корадикалом, квазіцентральною в усій групі і без інволюцій. Звідси при $C' \neq 1$ $|H| = 1$, $F = D$, $A = V$, $|V| > 2$, V — квазіцентральною підгрупа із G без інволюцій. За наслідком 4.3.2 для довільного примарного елемента $g \in D \setminus S$ виконується $[H, \langle g \rangle] = H$, $C_H(g) = 1$, $C_A(g)$ — квазіцентральною підгрупа в G без інволюцій. Нехай F/A — дедекіндова група. Можливі випадки: 1) $|H| > 1$; 2) $|H| = 1$.

Випадок 1. В цьому випадку за наслідком 4.1.1 $C_G(H) = C_G(A) = C_G(Q)$ — абелева група, де Q — будь-яка силовська підгрупа із H , і всі $\pi(H)$ — елементи g , для яких $\langle g \rangle \cap H = 1$, належать $Z(G)$. Звідси $\pi(H)$ — елементи належать Y . Отже, D — холловська підгрупа із G , $C' = 1$ і G — група типу 6). Випадок 1) розглянуто.

Випадок 2. В цьому випадку $H = 1$, $V = A$, $|V| > 2$, S — власна підгрупа із $D = F$. Якщо $C' = 1$, то G — група типу 7), а якщо $C' \neq 1$, то G — група типу 8) розглядуваної теореми.

Нехай далі F/A — недедекіндова група. Тоді D/V — недедекіндова група, яка за лемою 4.1.1 є нільпотентною метабільтовою $H(S/V)$ -

групою. За теоремою 2.7.2 $D/V = X/V \times T/V$, де T/V — недедекіндова силовська p -підгрупа із D/V , а X/V — її абелеве холловське доповнення в D/V , $X/V \subset S/V$. Зрозуміло, що $D = X \cdot T$, $X \cap T = V$, $X \subset S$ — нільпотентна група, V — її холловська підгрупа. Звідси $X' = 1$, $X = V \cdot Y_1$, $Y_1' = 1$, $Y_1 \triangleleft G$, $Y_1 \subset Z(G)$ і за вибором D та Y $|Y_1| = 1$, тобто $D = T$. Зрозуміло, що T/V — недедекіндова p -група одного з типів 1)-3) теореми 2.7.2. Нехай T/V — група типу 3) теореми 2.7.2. Тоді S/V містить неабелеву підгрупу $S' \neq 1$. За попереднім в цьому випадку $|H| \neq 1$, V — квазіцентральна холловська підгрупа із G без інволюцій, $|V| > 2$. Оскільки S — власна підгрупа із $D = F$, то T/V не може містити квазіциклічних підгруп, оскільки в протилежному випадку із квазіцентральності V в G ми мали б рівність $D/V = S/V$ і $S = D$. Отже, $S = V \times C$, $|D : S| < \infty$, $D = V\lambda P$, P — силовська p -підгрупа із G , $P = \langle a \rangle \cdot B$, $S \cap P = \langle a^{p^m} \rangle \cdot B = C$, $m > 0$, P — $H(C)$ -група. За будовою груп типу 3) теореми 2.7.2 G — група типу 5) доводжуваної теореми. Нехай T/V — група типу 1) або 2) теореми 2.7.2. Тоді $|D : S| < \infty$, а значить $D = V\lambda P$, $C \subset P$, P — $H(C)$ -група, P — силовська p -підгрупа із G , p — просте число, $P = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $C = \langle a^{p^m} \rangle \lambda B$, $m > 0$. Якщо P — група типу 2) згаданої теореми, то вона — група типу 3) розглядуваної теореми.

Нехай, нарешті, P — група типу 2) згаданої теореми. Тоді $C' = 1$, $H = 1$, $V = A$ — квазіцентральна неодиначна холловська підгрупа із G без інволюцій і G — група типу 4) розглядуваної теореми. Всі випадки розглянуто. Теорема доведена.

ГРУПИ З УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ВСІХ ПІДГРУП

Групи з умовами щільності нормальності для підгруп вивчалися, наприклад, у роботах [159]–[161], [166], [215]–[219]. У даній главі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп, які є значним узагальненням груп із робіт [159]–[161], [215], [218], [219] і які є прикладом використання результатів попередніх глав.

5.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Означення 5.1.1. Нехай G — група, A та B — її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком (інтервалом) $[A, B]$ ((A, B)) називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A \leq X \leq B$ ($A < X < B$).

Півінтервалом $(A, B]$ чи $[A, B)$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G , для яких $A < X \leq B$ чи $A \leq X < B$.

Проміжком $\{A, B\}$ називається відрізок, інтервал чи півінтервал.

Означення 5.1.2. Модулем проміжку $|\{A, B\}|$ називається число його елементів.

Означення 5.1.3. Нехай у групі G для будь-якого відрізка $[A, B]$, де A та B τ -підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:

- 1) при $|\{A, B\}| \geq 1$: 1.1) $N \in [A, B]$;
- 2) при $|\{A, B\}| > 1$: 2.1) $N \in (A, B)$; 2.2) $N \in [A, B)$; 2.3) $N \in (A, B]$;
- 3) при $|\{A, B\}| > 2$: 3.1) $N \in (A, B)$; 3.2) $N \in [A, B)$; 3.3) $N \in (A, B]$; 3.4) $N \in [A, B]$.

$N \in [A, B]$. ШН(γ)

Тоді G називається відповідно: Н-, ШН(τ)-, ШН(τ)-, ШН(τ)-, УШН(τ)-, УШН(τ), УШН(τ)-, УШН(τ)-групою.

Якщо τ — властивість бути будь-якою підгрупою групи G , то в позначеннях

відповідних класів груп буква τ опускається.

Вісім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через $K(H)$, $K(\text{ШН}(\))$, $K(\text{ШН}[\])$, $K(\text{УШН}(\))$, $K(\text{УШН}[\])$, $K(\text{УШН}(\))$, $K(\text{УШН}[\])$.

Теорема 5.1.1. Класи $K(H)$, $K(\text{ШН}(\))$, $K(\text{ШН}[\])$, $K(\text{УШН}(\))$, $K(\text{УШН}[\])$, $K(\text{УШН}(\))$, $K(\text{УШН}[\])$, замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.

Теорема 5.1.2. Недедекіндова локально ступінчата $\text{УШН}[\]$ -група є розв'язною черніковською групою, ненормальна підгрупа U якої може бути лише власною підгрупою одного з типів:

- 1) U — циклічна підгрупа порядку p^α , $\alpha > 0$, p — довільне просте число, $\Phi(U) = M \triangleleft G$;
- 2) U — група порядку pq , p і q — не обов'язково різні прості числа, $M = E \triangleleft G$;
- 3) U — група кватерніонів порядку 8, $\Phi(U) = M \triangleleft G$;
- 4) U — циклічна підгрупа порядку $p^\alpha q$, $\alpha > 1$, p і q — різні прості числа, $M \in U$, $M \triangleleft G$, $|M| = p^{\alpha-1}q$;
- 5) $U = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, $|x| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|y| = p$, p — довільне просте число, $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] \in \langle x^{p^{\Delta-1}} \rangle$, $[U: U'] > 4$, кожна підгрупа з U порядку p^2 містить U' , $\langle x^p \rangle \times \langle y \rangle = M \triangleleft G$;
- 6) $U = R \rtimes \langle x \rangle$, R — елементарна абелева мінімальна нормальна підгрупа в U порядку $r^\gamma > 2$, $|x| = p^\beta$, p і r — різні прості числа, $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\beta > 0$, $\gamma + \beta > 2$, $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з U , $U' = R$, $R \times \langle x^p \rangle = M \triangleleft G$, при $\gamma > 1$ $\gamma + \beta < 5$.

Теорема 5.1.3. Недедекіндові локально ступінчаті $\text{УШН}[\]$ -групи мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиначних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з типів:

- 1) G — скінченна нелінійна група;
- 2) G — скінченна лінійна не більше ніж біпримарна група;

3). G має центральну квазіциклічну p -підгрупу R , для якої G/R — скінченна дедекіндова група.

Теорема 5.1.4. *Метациклічні УШН[]-групи G вичерпуються групами типів:*

- 1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 4) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $p^k > 2$, $0 < \alpha - k < 3$, $\alpha - k \leq k < \alpha$, $\alpha - k \leq \beta$;
- 5) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|d| = p^{\alpha-1}$, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-2}}$, $p^{\alpha-2} > 2$, $2 < \alpha < \beta$;
- 6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 7) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 8) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;
- 9) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $\beta \in \{3, 4\}$, $b^{-1}ab = a^7$;
- 10) $G = P \times D$, P — група кватерніонів порядку 8, D — скінченна абелева метациклічна група;
- 11) $G = P \times D$, P — силовська p -підгрупа G , $|D| = q$, p і q — різні прості числа, P — група одного з наступних типів розглядуваної теореми: 2, $|P'| = 2$; 4, $|P'| = p$; 6, $\beta < 4$;
- 12) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p і r — не обов'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^q \in Z(G)$;
- 13) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $\{z\} \in \{1, r\}$, r — просте число, $\Phi(\Phi(\langle a \rangle)) \in Z(G)$; при $|z| = r$ $b^q \in Z(G)$; при $|z| = p$ $\beta < 3$;
- 14) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p > 5$, $|b| = qr$, q і r — різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $C_b(\langle a \rangle) = 1$;
- 15) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \langle b \rangle$, $|a| = p$ — непарне просте число, $\langle z \rangle \langle b \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

16) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $|z| = q$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, b^q] = [a, z] = 1$, $[b, z] = b^{q^{\beta-1}}$.

Теорема 5.1.5. Локально ступінчаті УЩН[]-групи Шмідта мають вигляд $G = P \rtimes Q$, де P — нормальна в G силовська p -підгрупа порядку $p^\alpha > 2$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, $G' = P$, Q — ненормальна циклічна силовська q -підгрупа з G порядку q^β , $\beta > 0$, p і q — різні прості числа, $P' = \Phi(P) \in Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^\Delta$, $\Delta \in \{0, 1\}$, $\alpha - \Delta$ — показник p по модулю q , $\Phi(P) \times Q$ — максимальна підгрупа з G , $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, та вичерпуються групами типів:

- 1) P — група кватерніонів, $q = 3 > \beta$;
- 2) $\exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;
- 3) P — елементарна абелева, при $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Теорема 5.1.6. Локально ступінчаті мінімальні неметациклічні УЩН[]-групи G мають вигляд $G = AX$, де $A = \langle a, b \rangle$ — нормальна в G p -підгрупа, $a \neq 1$, X — q -група, p і q — прості числа, та вичерпуються групами типів:

- 1) $|G| = p^3$, $\exp(G) = p$;
- 2) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;
- 3) $G = A \times X$, A — група кватерніонів порядку 8, $|X| = 2$;
- 4) A — група кватерніонів порядку 8, $X = \langle x \rangle$, $|x| = 4$, $\langle x^2 \rangle = \Phi(A)$, $X = Z(G)$;
- 5) $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;
- 6) $G = A \rtimes X$ — група Шмідта типу 3 теореми 5.1.5, $|A| = p^2$, $|x| \in \{q, q^2\}$;
- 7) $G = A \rtimes X$ — група Шмідта типу 1 теореми 5.1.5, A — група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;
- 8) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ — непарне число, $X = \langle x \rangle$, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$;
- 9) $G = A \rtimes X$, $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p$ — непарне число, $X = \langle x \rangle$,

$|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, A — квазіцентральна підгрупа з G ;

10) $G = A \rtimes X$, $A = p$ — непарне число, $X = \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, $|x| = q^2$, $|z| = q$ — непарне число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[A, \langle x \rangle] = A$, $[x, z] = x^q$, $C_X(A) = \langle x^q \rangle \times \langle z \rangle$;

11) G — квазіциклічна p -група.

Теорема 5.1.7. Нехай G — локально ступінчаста $U\mathcal{CN}[1]$ -група з мінімальною неметациклічною підгрупою C . Тоді в G нормальні всі підгрупи, що строго містять C .

Всі локально ступінчасті групи G з ненормальною підгрупою C вичерпуються групами таких типів:

1) $G = P \rtimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p і q — різні прості числа, $\Phi(P) \rtimes Q$ — неінильпотентна група Міллера – Морено, $p \neq 3$;

2) $G = (R \rtimes P) \rtimes Q$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|Q| = q$, r , p і q — попарно різні прості числа, $p \neq 3$, $q \neq 2$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $R \rtimes Q$ і $P \rtimes Q$ — неінильпотентні групи Міллера – Морено.

Теорема 5.1.8. Локально ступінчасті $\mathcal{CN}[1]$ -групи G є черніковськими групами, у яких $|G'| \in \{p, p^2\}$, $|G:Z(G)| \in \{p^2q, pq\}$, p і q — не обов'язково різні прості числа, та вичерпуються групами таких типів:

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = C \rtimes Q$, C — неединична локально циклічна 2-група, Q — група кватерніонів порядку 8;

4) $G = (C \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, C — локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[a, b] = c \in C$, $|c| = p$, $|a| = |b| = p$, $[C, \langle b \rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

8) $G = P \rtimes Q$, P — силовська p -підгрупа з G , Q — силовська q -підгрупа з G , p і q — різні прості числа, $|P| \in \{p, p^2\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; при $|P| = p$, $p \equiv 1 \pmod{q}$; при $|P| = p^2$, $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ — показник p за модулем q .

Теорема 5.1.9. Класи H -, $\text{ШН}(\cdot)$ -, $\text{ШН}(\cdot)$ -груп співпадають з класом дедекіндових груп.

5.2. БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАТИХ $\text{УШН}(\cdot)$ -ГРУП

Теорема 5.2.1. Недедекіндові $\text{УШН}(\cdot)$ -групи G з комутантом порядку p , p — просте число, мають вигляд $G = CF$, C — локально циклічна p -група, чи група кватерніонів порядку 8, $[C, F] = 1$, $F = (Q \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $[a, b] \in \langle c \rangle = G' = F' \in Q = \langle u, v \rangle$, $|c| = p$, та вичерпуються групами таких типів:

1) $G = F = (Q \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle a \rangle$, $Q = \langle c \rangle$, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|a| \in \{1, r\}$, p і q — різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $b^{q^2} \in Z(G)$; при $a \neq 1$ $b^q \in Z(G)$; при $|a| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = F = Q \rtimes \langle b \rangle$, $|Q| = p$, $|b| = qr$, p, q і r — попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $C_{\langle b \rangle}(Q) = 1$;

3) $G = F = Q \times \langle a \rangle$, $|Q| = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = p^\gamma$, $\gamma > 0$, $[u, v] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $|a| \in \{1, r\}$, r — просте число;

4) $G = C \times F$, C — локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, $F = Q \times \langle a \rangle$, Q — група кватерніонів порядку 8, $|a| \in \{1, r\}$, r — просте число;

5) $F = Q \times \langle a \rangle$, $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle$, $[u, v] = c \in C$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $|a| \in \{1, r\}$, r — просте число, $|C||u||v| \neq 32$; при $a \neq 1$ $|u| = |v| = p$;

6) $G = F$, $Q = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = p^\Delta$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = c = u^{p^{\Delta-1}}$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$;

7) $Q = (\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[Q, \langle b \rangle] = 1$.

Теорема 5.2.2. Локально ступінчасті метабільтонові УЩН[]-групи G з нециклічним комутантом вичерпуються групами таких типів;

1) $G = (P \ltimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P — елементарна абелева група порядку p^2 , $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p \nmid q$ — різні прості числа, $P \ltimes \langle x \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число; при $|z| = r$ $\beta = 1$;

2) $G = (((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

3) G — група порядку p^4 з абелевим нецентральною комутантом типу (p, p) , p — непарне просте число;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ — непарне просте число, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $t = s = 1$;

6) $G = A \ltimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ — непарне просте число, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = 1$;

7) $G = A \ltimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; при $p > 2$ $t^2 + 4s$ — неквадратичний лишок за модулем p ; при $p = 2$ $s = 1$;

8) $G = (((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle)$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

9) $G = (((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число;

10) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ — непарне просте число, $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^\epsilon b^p$, $0 \leq \epsilon < p$, $a^p = c^{1+\epsilon}b^{tp}$, $0 \leq t < p$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

11) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2x^2$;

12) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p^2$, p — непарне просте число, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a,$

$x] = b^f p x^k p$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, неквадратичними лишками за модулем p є числа: $t^2 + 4fs$, $l^2 + 4f$, $k^2 + 4s$; всі елементи порядку p з G належать G' , всі метациклічні підгрупи з G абелеві;

13) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ — група Шмідта, P — група кватерніонів порядку 8, $|x| \in \{3, 9\}$;

14) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ — група Шмідта, $|P| = p^3$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$;

15) $G = P \rtimes \langle x \rangle$, $|P| = p^\alpha$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = q^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $\alpha + \beta < 6$, $P \rtimes \langle x^q \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено, α — показник p за модулем q ;

16) $G = P \rtimes \langle x \rangle$ — група Фробеніуса, P — елементарна абелева група порядку p^α , $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q і r — попарно різні прості числа, α — показник p за модулем q і дорівнює показнику p за модулем r .

Теорема 5.2.3. Нільпотентні неметагамільтонові УЩН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \rtimes \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = |z| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^4 \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) (\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = 1$, $[a, z] \in \langle a^3 \rangle$;

3) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|x| = p$, $|a| = p^2$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 2$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

4) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

6) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 16$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^3$;

7) $G = (\langle a, b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a, b \rangle$ — група кватерніонів, $[a, x] \in \langle a^2 \rangle$, $[b, x] = a$;

8) $G = (U \rtimes X) \times \langle z \rangle$, U — циклічна група чи група кватерніонів порядку 8, $|U| > 2$, X — група кватерніонів порядку 8, $|z| \in \{1, r\}$, r — просте число, $[U, X] \in w(U)$; при $U' = 1$ $[U, X] = w(U)$; при $|z| = r$ $U' \neq 1$ і $[U, X] = 1$;

9) $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

Теорема 5.2.4. Локально ступінчасті ненільпотентні неметагамільтонові УЩН[]-групи G вичерпуються групами типів:

1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, $p \nmid r$ — не обов'язково різні прості числа, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q — просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|b| = |x| = 4$, $x^{-1}ax = a^{-1}$, $\langle b, x \rangle$ — група кватерніонів порядку 8;

3) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|b| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ — просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ — непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta < 3$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{q}$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ — непарне просте число, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — квазіцентральна підгрупа з G ;

6) $G = \langle a \rangle \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ — непарне просте число, $|x| = q^2$, $|z| = q$ — непарне просте число, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$, $[x, z] = x^q$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, p — просте число, $p \neq 3$, $|x| = q$ — просте число, 2 — показник p за модулем q , $(\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено;

8) $G = (R \times P) \rtimes \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|x| = q$, $p, q \nmid r$ — попарно різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, 2 — показник p за модулем q , $q > 2$, $R \rtimes \langle x \rangle \nmid P \rtimes \langle x \rangle$ — ненільпотентні групи Міллера – Морено;

9) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ — ненадрозв'язна група Фробеніуса, $|a| = |b| = p$ — просте число, $|x| = qr$, $q \nmid r$ — не обов'язково різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod{q}$, $p \equiv 1 \pmod{r}$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \rtimes \langle x^r \rangle$ та $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \rtimes \langle x \rangle$ — надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи.

Теорема 5.2.5. Локально ступінчасті метагамільтонові УЩН[]-групи з циклічним комутантом непростого порядку є метациклічними групами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holder O. Die Gruppen der Ordnungen p^3, p^2q, pqr, p^4 // Math. Ann. — 1893. — 43. — P. 301-412.
2. Dedekind R. Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. — 1897. — 48. — P. 548-561.
3. Miller G.A., Moreno H. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. — 1903. — 4. — P. 398-404.
4. Шмидт О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. — 1924. — 31. — С. 366 - 372.
5. Шмидт О.Ю. Группы, имеющие только один класс инвариантных подгрупп // Мат. сб. — 1926. — 33. — С. 161-172.
6. Smidt O.Yu. Über unendliche Gruppen mit unendlicher Kette // Math. Z. — 1928. — 29. — S. 34-41.
7. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // B.-H. Heidelberg. Acad. Math.-Nat. Klasse. — 1933. — 2. — S. 12-17.
8. Baer R. Gruppen mit hamiltonischem Kern // Comp. Math. — 2. — S. 241-246.
9. Baer R. Zentrum und Kern von Gruppen mit Element unendlicher Ordnung // Math. — 1935. — 2. — S. 247-249.
10. Hall Ph. Comlited groups // J. London Math.Soc. — 1937. — 12. — P. 201-204.

11. Чунихин С.А. О разрешимых группах // Изв. НИИ математики и механики Том. ун-та. — 1938. — 2. — С. 220-223.
12. Чунихин С.А. О группах с наперёд заданными подгруппами // Мат. сб. — 1938. — 4(46), N 3. — С. 521-530.
13. Шмидт О.Ю. Группы с двумя классами инвариантных подгрупп // Труды семинара по теории групп. — М.-Л. — 1938. — С. 7-26.
14. Iwasawa K. Über die endlichen Gruppen und die Verände ihrer Untergruppen // J. Univ. Tokyo. — 1941. — 43. — S.171-199.
15. Best E. and Taussky O. A class of groups // Proc. PJA.-XLVII, sect A. — 1942. — P.55-62.
16. Чунихина И.К., Чунихин С.А. О p -разложимых группах // Мат. сб. — 1944. — 15(57), N2. — С. 325-342.
17. Курош А.Г., Черников С.Н. Разрешимые нильпотентные группы // Укр.мат. журн. — 1947. — N 2-3. — С. 18-59.
18. Гольфанд Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные // Докл.АН СССР.— 1948. — 60, N8. — С. 1313-1315.
19. Чарин В.С. Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР.— 1949. — 66. — С. 575-576.
20. Taunt D. On A-groups. // Proc. Cambridge Ph. Soc. — 1949. — 45, N1. — P. 14-42.
21. Redei L. Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie // J. reine und angew. Math. — 1950. — 188. — S. 201-227.
22. Глушков В.М. О нормализаторах полных подгрупп в полной группе //Докл. АН СССР.—1950. — 71. — С. 421-424.

23. Neumann B.H. Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. — 1951. — 1. — P. 178-187.
24. Чунихин С.А. Силовские свойства и полуинвариантные подгруппы // Докл.АН СССР. — 1951. — 77. — С. 973-975.
25. Мальцев А.И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. — 1951. — 28, N3. — С. 567-588.
26. Плоткин Б.И. К теории локально нильпотентных групп // Докл.АН СССР, 1951. — 76. — С. 639-641.
27. Huppert B. Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen // Math. Z. — 1953. — 58, 3. — S. 243-264.
28. Хассе Г. Лекции по теории чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1953
29. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. — 1954. — 60. — S. 409-434.
30. Neumann B. Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. — 1955. — 63, N 1. — P. 76-96.
31. Schenkman E. The splitting of certain solvable groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1955. — 6. — P. 286-290.
32. Калужнин Л.А. Центральные расширения абелевых групп I // Укр. мат. журн. — 1956. — 8. — С. 262-272.
33. Redei L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math. Debrecen. — 1956. — 4. — S. 303-324.
34. Черников С.Н. О группах с конечными классами сопряжённых элементов // Докл.АН СССР. — 1957. — 114. — С. 1177-1179.
35. Черников С.Н. О строении групп с конечными классами сопряжённых элементов // Докл.АН СССР. — 1957. — 115. — С. 60-63.

36. Gaschutz W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist // J. reine und angew. Math. — 1957. — 198, N 1-2. — S. 87-92.
37. Wielandt H. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen // Math. Z. — 1958. — 69. — S. 463-465.
38. Абрамовский И.Н., Каргаполов М.И. Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. — 1958. — XIII, вып. 3(81). — С. 242-243.
39. Сесекин Н.Ф., Широковская О.С. Об одном классе двуступенчатых групп // Мат. сб. — 1958. — 46, N2. — С. 133-142.
40. Macdonald J.A. Class of *FC*-groups // J. London Math. Soc. — 1959. — 34. — P. 73-80.
41. Hall Ph. On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. — 1959. — 9. — P. 595-622.
42. Горчаков Ю.М. Прimitивно факторизуемые группы // Докл. АН СССР. — 1960. — 131. — С. 1246-1248.
43. Schenkman E. On the norm of a group // J. Math. — 1960. — 4. — P. 150-152.
44. Судзуки М. Строение группы и строение структуры её подгрупп — М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
45. Чуннихин С.А. О некоторых направлениях в развитии теории конечных групп за последние годы // Успехи мат. наук. — 1961. — 16, N4. — С. 31-50.
46. Зельманзон М.Е. О группах, у которых все подгруппы циклические // Успехи мат. наук. — 1961. — 16, N2. — С. 109-113.
47. Плоткин Б.И. Нормальные делители, ограничивающие группу // Мат. сб. — 1961. — 53. — С. 343-352.

48. Blackburn N. Generalization of certain elementary theorems on p -groups // Proc. London. Math.Soc. — 1961. — 11, N41. — P. 1-22.
49. Холл М. Теория групп, М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
50. Шеметков Л.А. Об одной теореме Ивасава // Докл. АН БССР. — 1962. — 6, N11. — С. 688-689.
51. Ito N., Szep J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Acta Sci., Math. Szeged. — 1962. — 23. — S. 168-170.
52. Розенфельд Х.М. Некоторые классы бесконечных групп с заданными свойствами индексов // Уч. зап. Перм. ун-та. — 1962. — 22. — С. 58-64.
53. Ромалис Г.М. О метабильных группах // Успехи мат. наук.—1962.— 17,136.— С. 228.
54. Каргаполов М.И. О проблеме О.Ю.Шмидта // Сиб.мат. журн. — 1963. — 4. — С. 232-235.
55. Усольцев Л.П. Конечные группы, все подгруппы которых, кроме одного класса, абелевы // Тр. Томского ун-та. — 1963. — N163. — С. 89-93.
56. Deskins W.E. On Quasinormal Subgroups of Finite Groups // Math. Z.— 1963. — 82. — P. 125-132.
57. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. — Минск: Наука и техника. — 1964.
58. Шунков В.П. О группах, разложимых в равномерное произведение своих p -подгрупп // Докл. АН СССР. — 1964. — 154, N3. — С. 542-544.
59. Wang J. On completely decomposable groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — 15. — P. 184-186.

60. Newman M.F., Weigold J. Groups with many nilpotent subgroups // Arch. Math. — 1964. — 15. — P. 241-250.
61. Robinson D.A. Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1964. — 60. — P. 21-38.
62. Черников С.Н. Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. — 1964. — 159. — С. 759-760.
63. Scott W. Group theory. — Englewood Cliffs. — 1964.
64. Yorsi Y. Sui commutatori nei groppi il Cui derivati e prodotto di groppi ciclici // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. — 1965. — 35, N2. — P. 253-259.
65. Старостин А.И. О группах с расщепляемыми централизаторами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — 29. — С. 605-614.
66. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метегамильтоновых группах // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1966. — 5. — С. 101-106.
67. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. — 1966. — 171. — С. 806-809.
68. Абрамовский И.Н. Локально обобщённые гамильтоновы группы // Сиб. мат. журн. — 1966. — 7, N3. — С. 481-485.
69. Медведева Р.П. О конечных группах с транзитивностью инвариантности // Конечные группы. Ин-т математики АН БССР. — Минск. — 1966. — С. 72-74.
70. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. — М.: Наука, 1966.
71. Huppert B. Endliche Gruppen. — Berlin etc.: Springer, 1967.

72. Курош А.Г. Теория групп. — М.: Наука. — 1967.
73. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. — 1967. — 19. — С. 111-131.
74. Curzio M. Sui gruppi di torsione a factoriali Abelian. // Ricerche mat. — 1967. — 16, N1. — S. 154-161.
75. Шериев В.А. Конечные 2-группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами // Сиб. мат. журн. — 1967. — 8, N1. — С. 195-212
76. Устюжанинов А.Д. Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки Уральского ун-та. — 1967. — 6, N1. — С. 107-123.
77. Лиман Ф.М. Групи з неінваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР. — 1967. — 12. — С. 1073-1075.
78. Нагребецкий В.Т. Конечные ненильпотентные группы, любая небелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1967. — 6, N1. — С. 80-88.
79. Ситников В.М., Устюжанинов А.Д. Конечные группы с тремя классами неинвариантных подгруп // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1967. — 6, N1. С. 94-102.
80. Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М. О метатамилтоновых группах // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1968. — 6. — С. 50-52.
81. Heineken H., Mohamed I.J. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. — 1968. — 10. — P. 368-376.
82. Нагребецкий В.Т. Конечные группы, любая ненильпотентная подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1968. — 6, N3. — С. 45-49.

83. Старостин А.И. О минимальных группах, не обладающих данным свойством // Мат. заметки. — 1968. — 3, N1. — С. 33-37.
84. Шеметков Л.А. О конечных разрешимых группах // Докл. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — 32, N3. — С. 533-559.
85. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. — М.: Наука, 1968.
86. Лиман Ф.Н. 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. — 1968. — 4, N1. — С. 74-83
87. Лиман Ф.М. p -групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР. — 1968. — 8. — С. 696-699.
88. Черников С.Н. Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. — 1969. — 21. — С. 193-200.
89. Белоногов В.А. Конечные группы с единственным классом неинвариантных максимальных подгрупп // Докл. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. — 1969. — N3. — С. 114-117.
90. Dixon J.D., Poland J., Rhemtulla A.H. A generalization of hamiltonian and nilpotent groups // Math. Z. — 1969. — 112, N5. — С. 335-339.
91. Peng T.A. Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — 20, N1. — P. 232-234.
92. Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. — 1970. — 9, N5. — С. 575-611.
93. Черников С.Н. Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР. — 1970. — 194. — С. 1280-1283.

94. Сучков В.К. Конечные группы с заданными свойствами максимальных подгрупп // Изв. вузов. Математика. — 1970. — N12. — С. 97-102.
95. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метабильтоновых группах. III // Мат. зап. Уральского ун-та. — 1970. — 7, N3. — С. 195-199.
96. Чунихин С.А., Шеметков Л.А. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия, 1969. — (Итоги науки). — М.: ВИНТИ АН СССР. — 1971. — С. 7-70.
97. Черников С.Н. Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн. — 1971. — 23, N6. — С. 604-628.
98. Черников С.Н. О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. — К.: Наук. думка, 1971. — С. 17-39.
99. Черников С.Н. Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Группы с ограничениями для подгрупп. — К.: Наук. думка, 1971. — С. 46-65.
100. Черников С.Н. Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. — К.: Наук. думка, 1971. — С. 96-106.
101. Казарин Л.С. О некоторых классах конечных групп // ДАН СССР. — 1971. — 197, N4. — С. 773-776.
102. Мухин Ю.Н., Хоменко С.П. Топологические группы Шмидта // Группы с ограничениями для подгрупп. — К.: Наук. думка, 1971. — С. 206-217.

103. Шеметков Л.А. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп // Укр. мат. журн. — 1971. — 23, N5. — С. 678-689.
104. Klein T. Groups whose proper factors are all abelian // Israel J. Math. — 1971. — 9, N3. — P. 362-366.
105. Лиман Ф.Н. Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп. — К.: Наук. думка, 1971. — С. 65-95.
106. Cappit D. Generalised Dedekind groups // J. Algebra. — 1971. — 17, N3. — P. 310-316.
107. Robinson D. Finiteness conditions and generalized soluble groups Pt 1 // Berlin etc.: Springer, 1972.
108. Robinson D. Finiteness conditions and generalized soluble groups Pt 2 // Berlin etc.: Springer, 1972.
109. Wright C. On complements to normal subgroups in finite solvable groups // Arch. Math. — 1972. — 23, N2. — P. 125-132.
110. Зайцев Д.И. К теории нормально факторизуемых групп // Группы с заданными свойствами подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. — С. 78-104.
111. Мищенко В.И. Разрешимые группы с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами // Группы с заданными свойствами подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. — С. 127-161.
112. Черников С.Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. — С. 6-14.

113. Fattahi A. Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. — 1974. — 28, N1. — P. 15-19.
114. Зайцев Д.И. О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. — С. 72-130.
115. Баранник А.Ф. Обобщение метегамильтоновых групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. — С. 167-198.
116. Зайцев Д.И. О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. — 1974. — 214, N6. — С. 1250-1253.
117. Беляев В.В., Сесекин Н.Ф. О бесконечных группах типа Миллера-Морено // Acta math. Acad. Sci. Hung. — 1975. — 26, N3-4. — С. 369-376.
118. Мслахов В.С. Инвариантные подгруппы бипримарных групп // Мат. заметки. — 1975. — 18, N6. — С. 877-886.
119. Махнёв А.А. О конечных метегамильтоновых группах // Мат. зап. Уральского ун-та. — 10, Т.1. — 1976. — С. 60-76.
120. Baartmans A.H. Groups whose proper factors are Abelian // Acta math. Acad. Sci. Hung. — 1976. — 27, N1, 2. — P. 33-36.
121. Hurtley B. Splitting over the locally nilpotent residuals for a class of locally finite groups // Quart J. Math. — 1976. — 27. — P. 395-400.
122. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977.
123. Phillips R. Infinite groups with normality conditions on infinite subgroups // Rocky Mountain Journ. Math. — 1977. — 7. — P. 19-30.

124. Черников Н.С. Группы с плотной системой дополняемых неэкстремальных абелевых подгрупп // Мат. заметки. — 1977. — 22. — С. 611-620.
125. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряжённых элементов. — М.: Наука. — 1978.
126. Беляев В.В. Группы типа Миллера-Морено // Сиб. мат. журн. — 1978. — 19, N3. — С. 509-514.
127. Bianchi M. Sui gruppi a sottogruppi normal ciclici // Rend. Ist. Lombardo. Accad. Sci., e lett. — 1978. — A 112, N2. — S. 302-310.
128. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука. — 1978.
129. Зайцев Д.И. Группы с дополняемыми бесконечными абелевыми нормальными подгруппами // Теоретико-групповые исследования. — К.: Ин-т математики АН УССР, — 1978. — С. 15-34.
130. Барышовец П.П. Конечные неабелевы p -группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Теоретико-групповые исследования. — К.: Ин-т математики АН УССР, — 1978. — С. 34-50.
131. Барышовец П.П. О конечных неабелевых p -группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Структура групп и свойства их подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, — 1978. — С. 39-62.
132. Ольшанский А.Ю. Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. — 1979. — 245, N4. — С. 785-787.
133. Сысак Я.П. О группах с дополняемыми элементарными абелевыми подгруппами заданного ранга // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, — 1979. — С. 38-56.

134. Лиман Ф.Н. О бесконечных группах с нормализаторным условием для ненормальных делителей // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. — С. 98-105.
135. Олышанский А.Ю. Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. — 1979. — 245, N4. — С. 785-787.
136. Олышанский А.Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, N2. — С. 309-321.
137. Lennox J., Roseblau J. Soluble products of polycyclic groups. // Math. Z. — 1980. — 170, N2. — P. 153-154.
138. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука. 1980.
139. Багшовец П.П. Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. — 1980. — 32, N1. — С. 99-101.
140. Семко Н.Н. Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных подгрупп // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С.107-117.
- 141.^a Мищенко Б.И. Локально конечные группы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 55-71.
142. Huppert B., Blackburn N. Finite groups. II, III. — Berlin, 1981.
143. Казарин Л.С. О произведении абелевой группы и группы с нетривиальным центром. — Новосибирск, 1981. — 38 с. — Рукопись деп. в ВИНТИ, N 3565-81. Деп.

144. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.: Наука, — 1981.
145. Сысак Я.П. Произведения бесконечных групп. — Киев, 1982.
— 3бс. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.53)
146. Heineken H., Lennox J. A note on products of abelian groups // Arch. Math. — 1983. — 41, N 6. — P. 498-501.
147. Курдаченко Л.А., Горещкий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. — 1983. — N1, 35. — С. 42-46.
148. Артемович О.Д. О конечных нильпотентных группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. — Киев. — 1984. — 52 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.67)
149. Robinson D.J.S. Finiteness, solubility and nilpotence // Group Theory. — Academic Press. — 1984. — P. 159-206.
150. Giovanni D., Francosic F. Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal // J. Algebra. — 1985. — 96, N2. — P. 566-580.
151. Артемович О.Д. О группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями // Строение групп и свойства их подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. — С. 50-55.
152. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В. О группах, двойственных декиндовым // Докл. АН УССР. — 1989. — N10. — С. 21-22.
153. Курдаченко Л.А., Горещкий В.Э. О группах со слабым условием минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными // Укр. мат. журн. — 1989. — N 12, 41. — С. 1705-1709.
154. Требенко Д.Я. О локально ступенчатых ненильпотентных обобщённо метатамилтоновых группах // Комплексный анализ, ал-

гебра и топология. — К.: Ин-т математики АН УССР, — 1990. — С. 77-84.

155. Требенко Д.Я. Обобщённо метабильтоновы группы // Докл. АН Украины. — 1992. — №6. — С. 7-9.
156. Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Конечные группы, обладающие циклической максимальной подгруппой // Укр. мат. журн. — №5. — 1976. — С. 646-654.
157. Кузенный Н.Ф. Об обобщении дедекиндовых групп // VI Всесоюз. симпоз. по теории групп: Тез. докл. — К.: Наук. думка, 1978. — С. 32.
158. Кузенный Н.Ф. О недисперсивных группах // Укр. мат. журн. — №4. — 1978. — С. 49-51.
159. Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп абелевого ранга 1 и 2 // XV Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл.-Красноярск: Красноярский гос. ун-т. — 1979. — Ч.1. — С. 45-46.
160. Пылаев В.В., Кузенный Н.Ф. Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп абелевого ранга 3 // XV Всесоюз. алгебраич. конф. : Тез. докл. — Красноярск: Красноярский гос. ун-т. — 1979. — Ч.1. — С. 67-68.
161. Горелкий В.Э., Кузенный Н.Ф. Бесконечные группы с плотной системой инвариантных подгрупп // VIII Всесоюз. симпоз. по теории групп: Тез. докл. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 66-67.
162. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение разрешимых нильпотентных метабильтоновых групп // Мат. заметки. — 1983. — 34, №2. — С. 179-188.

163. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Структура метациклических метегамильтоновых групп — К.: Киев. пед. ин-т, 1983. — 22 с.
164. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Структура нильпотентных непериодических метегамильтоновых групп. — К., 1984. — 25 с. — Деп. в ВИНТИ, N 3208.
165. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Структура периодических метабелевых метегамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом. — К., 1984. — 16 с. — Деп. в ВИНТИ, N 6016.
166. Турбин А.Ф., Горещкий В.Э., Кузенный Н.Ф., Пылаев В.В. Конечные минимальные недисперсивные группы с обобщённо плотной системой неабелевых подгрупп // IX Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл.-М.: Университетское, 1984. — С. 123-124.
167. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Конечные нильпотентные группы с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей. К.: Киев. политех. ин-т. — 1984. — 18 с. — Деп. в УкрНИИТИ 15.05.85, N 94 Ук. 85.
168. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. О структуре бесконечных нильпотентных периодических метегамильтоновых групп // Структура групп и их подгрупповая характеристика.-К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 101-111.
169. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Конечные группы с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей // XVIII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл.-Кишинёв: Ин-т математики АН МССР, 1985. - Ч.2. — С. 189.
170. Горещкий В.Э., Кузенный Н.Ф. О расщепляемости в некоторых группах // XVIII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. — Кишинёв: Ин-т математики АН МССР, 1985. — Ч.1. — С. 131.

171. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Строение разрешимых метегамильтоновых групп // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1985. — N2. — С. 6-9.
172. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Пронормальность и транзитивность нормальности. — К.: Киев. политех. ин-т. — 1986. — 13 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 2.01.86, N26, Ук. 86.
173. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Группы с пронормальными подгруппами. — К.: Киев. политех. ин-т. — 1986. — 12 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 2.01.86, N26, Ук.86.
174. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. О почти квазициклических группах. — К.: Киев. политех. ин-т. — 1986. — 30 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, 17.07.86, N 1742, Ук. 86.
175. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Локально нильпотентные группы с некоторыми системами пронормальных подгрупп. — К.: Киев. политех. ин-т. — 1986. — 18 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 17.07.86, N1743, Ук.86.
176. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Группы с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей // Строение групп и их подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. — С. 101-107.
177. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы с некоторыми системами пронормальных подгрупп. // X Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. — Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986. — С.132.
178. Горещкий В.Э., Кузенный Н.Ф. О некоторых центральных расширениях посредством группы кватернионов // Укр. мат. журн. — 1986. — 38, N2. — С. 220-222.
179. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О строении непериодических метегамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. — 1986. —

180. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Структура метабелевых метабамилтоновых групп с элементарным коммутатором ранга три // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики-К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. — С. 39.
181. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. О полуабелевых группах.-К.: Киев. политех. ин-т, 1987. — 34 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 09.02.87, N 71, Ук.87.
182. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Группы с условием транзитивности для прономальных подгрупп. — К.: Киев. политех ин-т. — 1987. — 20 с. Деп. в УкрНИИНТИ 27.03.87, N1060. Ук.87.
183. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. группы с условием транзитивности для полярнономальных подгрупп. — К.: Киев. политех ин-т. — 1987. — 17 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 06.07.87, N1877. Ук.87.
184. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы, в которых все подгруппы прономальны // Укр. мат. журн. — 1987. — 39, N3. — С. 325-329.
185. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. Локально ступенчатые группы с абелевыми бесконечными подгруппами // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. — Львов: Ин-т проблем механики и математики АН УССР, 1987. — Ч.1. — С. 253.
186. Крайчук А.В., Кузенный Н.Ф. Группы, в которых инварианты все неабелевы подгруппы бесконечного индекса // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. — Львов: Ин-т проблем механики и математики АН УССР, 1987. — Ч.1. — С. 144.
187. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Группы с транзитивностью прономальности // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. —

Львов: Ин-т проблем механики и математики АН УССР; 1987.
— Ч.1. — С.268.

188. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Структура периодических метабелевых и метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. — 1987. — 39, N2. — С. 180–185.
189. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Разрешение групп с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей // Изв. ВУЗов. Математика. — 1987. — N 10. — С. 68–70.
190. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. Структура периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два // Укр. мат. журн. — 1988. — 40, N6. — С. 743–750.
191. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н. О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. — 1988. — 40, N3. — С. 314–322.
192. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. О группах с условием транзитивности // Исследование групп с ограничением для подгрупп. — К.: Ин-т математики АН УССР. 1988. — С. 73–80.
193. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Новые характеристики локально нильпотентных $\overline{HN}$ -групп // Укр. мат. журн. — 1988. — 40, N3. — С. 322–326.
194. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. ВУЗов. Математика. — 1988, N11. — С. 77–79.
195. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. Структура метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения. — К.: Наук. думка, 1989. — С. 173–183.

196. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н. Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // XI Всесоюз. симпози. по теории групп: Тез. докл. — Свердловск: УрО АН СССР, 1989. — С. 144.
197. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н. Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: Киев. пед. ин-т, 1989. — С. 37-45.
198. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. О группах с условием транзитивности для неабелевых нормальных делителей // XI Всесоюз. симпози. по теории групп: Тез. докл. — Свердловск: УрО АН СССР, 1989. — С. 67-68.
199. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, N2. — С. 170-176.
200. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы с пронормальными примарными подгруппами // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, N3. — С. 323-327.
201. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Локально разрешимые группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: Киев. пед. ин-т, 1989. — С. 45-52.
202. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два // Укр. мат. журн. — 1990. — 42, N2. — С. 168-175.
203. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. О расщепляемости групп. — К.: Киев. пед. ин-т, 1990. — 19 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 04.06.90,

204. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. О группах с верными подгруппами. — К.: Киев. политех. ин-т, 1990. — 8 с. — Деп. в УкрНИИ-ИНТИ 30.05.90, № 432, Укр.90.
205. Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф. О группах, все подгруппы которых имеют верный заданного вида // Укр. мат. журн. — 1990. — 42, №9. — С. 1232–1237.
206. Kuzennyj N.F., Subbotin I.J., Tomanek L. O nektorych rozshirenjach kvazicyklickych grup // Prirodne vedi. Matematika. Zbornik pedagogickej fakulty v presove univerzity P.J. Safarika. — Kosice. — 1990. — Proc. XXIV, Zvazok I, S. 99–125.
207. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. К вопросу о расщепляемости групп // Комплексный анализ, алгебра и топология. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 62–68.
208. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. Одно обобщение дедекиндовых групп // Дифференциально-функциональные уравнения. — К.: Киев. пед. ин-т, 1991. — С. 41–44.
209. Subbotin I.J., Kuzennyj N.F. On Groups with Fan Subgroups // Contemporary Mathematics. — New York: American Mathematical Society. — 1992. — 131, P. 1. — P. 383–388.
210. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С. Об одном обобщении дедекиндовых групп // Международная конференция по алгебре (Барнаул, 20–25 августа 1992 г.): Тез. докл. — Новосибирск: Университетское, 1992. — С. 54.
211. Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Субботин И.Я. Локально разрешимые $T(\bar{A})$ -группы // Международная конференция по алгебре

- (Барнаул, 20–25 августа 1992 г.): Тез. докл. – Новосибирск: Университетское, 1992. – С. 55.
212. Кузений Н. Ф., Левищенко С. С., Субботин И. Я. Некоторые результаты описания периодических $T(\bar{A})$ -групп с абелевым локально нильпотентным корадикалом // III Международная конференция по алгебре памяти М. И. Краполова (Красноярск, 23–26 августа 1993 г.): Тез. докл. — Красноярск: Ин-т Математики СО АН СССР, 1993. – С. 189–190.
213. Кузенний М. Ф., Зузук Л. І. Будова періодичних $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Укр. мат. журн. – 1995. – 10, № 10. – С. 1361–1369.
214. Кузенний М. Ф. Будова $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Укр. мат. журн. – 1996. – 45, № 3. – С. 349–361.
215. Mann A. Groups with dense normal subgroup // Israel J. Math. – 1968. – 6, № 1. – P. 13–25.
216. Горецкий В. Э. Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 127–138.
217. Кузенный Н. Ф., Курдаченко Л. А., Пылаев В. В. Бесконечные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1981. – 33, № 3. – С. 407–410.
218. Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф. Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. – Киев, 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНТИ, № 19–25–80.
219. Семко М. М., Кузенний М. Ф. Групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 61 с.

Зміст

Вступ	3
1 Попередні результати	14
1.1 Відомі та деякі нові означення і результати	14
1.2 Метациклічні групи	31
1.3 Деякі розширення квазіциклічних груп	40
1.4 Будова $H(S)$ - та деяких $H(\bar{N})$ -груп	56
2 Метагамільтонові групи	73
2.1 Попередні результати	73
2.2 Нільпотентні групи	81
2.3 Групи з циклічним комутантом	89
2.4 Групи з абелевим комутантом типу $(p^\delta, p), \delta > 1$	105
2.5 Нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p)	113
2.6 Нільпотентні групи з абелевим комутантом типу (p, p, p)	134
2.7 Загальна теорема і наслідки	142
3 Локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами	146
3.1 Попередні результати	146
3.2 Неметагамільтонові локально нільпотентні $\overline{TH}$ -групи	149
3.3 Черніковські неметагамільтонові не локально нільпотен- тні $\overline{TH}$ -групи	158

3.4	Нескінченні локально ступінчаті групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами	I 64
4	Локально розв'язні групи з умовами транзитивності нормальності для неабелевих підгруп.....	I 69
4.1	Деякі загальні результати	I 69
4.2.	Класифікація $ST(\bar{A})$ -та нескінченних $ST(\bar{IA})$ -груп.....	I 80
4.3	Будова періодичних $T(\bar{A})$ -груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом	I 87
5	Групи з умовами щільності нормальності для всіх підгруп	200
5.1	Основні означення і допоміжні результати	200
5.2	Будова локально ступінчатих УЩН[]-груп	205
	Література	209

Наукове видання

**КУЗЕННИЙ МИКОЛА ФЕОДОСІЙОВИЧ
СЕМКО МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ**

МЕТАГАМІЛЬТОНОВІ ГРУПИ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Підп. до друку 20.03.96. Формат 60х84/16. Полір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 13,48. Ум. фарбо-відб. 13,48. Обл.-вид. арк. 9,2.
Тираж 60 пр. Зам. 73.

Віддруковано в Інституті математики НАН України

252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3