

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

№ 1

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
УНІВЕРСИТЕТ ДЕРЖАВНОЇ ФІСКАЛЬНОЇ СЛУЖБИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ОБЛІКУ АНАЛІЗУ ТА АУДИТУ

СТУДЕНТСЬКІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

№ 1

Ірпінь
2021

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54
С 88

Рекомендовано до друку
Вченою радою ННІ обліку аналізу та аудиту

Редакційна колегія: *М. М. Семко,* д-р фіз.-мат. наук, професор (голов. ред); *О. Ю. Бащук,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *Л. В. Скасків,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. Б. Чернобай,* канд. фіз.-мат. наук, доцент; *О. А. Ярова,* канд. фіз.-мат. наук, доцент.

С 88 **Студентські фізико-математичні записки :** збірник наукових праць. – Ірпінь : Університет ДФС України, 2021. – № 1. – 82 с.

Збірник складається з наукових робіт магістрів кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України, присвячених сучасним проблемам математики та методичним принципам її викладання.

Для студентів математичних спеціальностей.

Матеріали розміщено у авторській редакції.
Відповідальність за зміст матеріалів, їх відповідність вимогам чинного правопису і достовірність фактів та статистичних даних несуть автори та їх наукові керівники.

УДК 51:53(08)
ББК 22.1я54+22.3я54

© ННІ обліку, аналізу та аудиту, 2021
© Університет ДФС України, 2021

ЗМІСТ

Скорик М. О., Семко М. М.
Про одну характеризацію неперіодичних
метагамільтонових груп 4

Мікулін Д. М., Семко М. М.
Про групи з умовою щільності нормальності
для неперіодичних неабелевих підгруп 17

Нестерчук К. С., Семко М. М.
Групи з умовою щільності нормальності
для неперіодичних абелевих підгруп 27

Огороднік Н. Ю.,Чернобай О. Б.
Приклади використання сучасних технологій
в навчанні математики 34

Богдан С. В., Семко М. М.
Про групи з умовою щільності нормальності
для нескінченних підгруп 40

Ключко О. О., Панченко А. С., Бащук О. Ю.
Методика вивчення теми «Похідна та її застосування» на
поглибленому рівні в курсі алгебри та початків аналізу 46

Проданик В. Б., Семко М. М.
Про неперіодичні неабелеві групи із щільною
системою неперіодичних неабелевих підгруп 59

Гончар С. В., Кучер А. О., Бащук О. Ю.
Методика вивчення нерівностей та їх систем
в загальних навчальних закладах 69

К. С. Нестерчук,
магістрантка спеціальності «Математика»
Науковий керівник:
М. М. Семко,
доктор фізико-математичних наук, професор
(Університет ДФС України, м. Ірпінь)

ГРУПИ З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ АБЕЛЕВИХ ПІДГРУП

Анотація. *Будемо говорити, що неабелева група G має щільну систему нормальних неперіодичних абелевих підгруп, якщо для будь-якої такої пари неперіодичних абелевих підгруп $A < B$, що A не максимальна в B, існує нормальна в G підгрупа N, розташована між A і B, тобто $A \leq N \leq B$ (УЩН[ІА]-група). В даній роботі отримано повний опис УЩН[ІА]-груп.*

Ключові слова: *неперіодична абелева підгрупа, нормальна підгрупа, центр групи, дедекіндова група, щільність нормальності.*

Annotation. *We will say that a non-Abelian group G has a dense system of normal nonperiodic Abelian subgroups, if for any such pair of nonperiodic Abelian subgroups $A < B$ that A is not maximal in B, there is a normal subgroup N in G located between A and B, ie. $A \leq N \leq B$ (CND[IA]-group). In this paper we obtain a complete description of CND[IA]-groups.*

Keywords: *nonperiodic Abelian subgroup, normal subgroup, group center, Dedekind group, denseness of normality.*

Однією з найстаріших та актуальних задач теорії груп є вивчення впливу різних систем підгруп на будову всієї групи. Основною задачею теорії скінченних та нескінченних груп можна вважати “повний опис” всіх існуючих в природі груп або хоча б досить широких класів груп. Історія розвитку теорії груп, яка налічує вже понад сто років, показує, що такий опис можна

отримати тільки при наявності досить суттєвих обмежень. Досить часто ці обмеження стосуються різних систем підгруп та їх властивостей. Наявність обмежень є необхідною для того, щоб отримати більш-менш прозорий опис. Будова групи значною мірою залежить від наявності деяких природних систем підгруп, їх розмірів, розташування в групі, взаємодії підгруп цієї системи між собою та з іншими підгрупами.

Починаючи з класичних робіт Р. Дедекінда [1] та Р. Бера [2], у яких описані дедекіндові групи (групи, всі підгрупи яких нормальні), почалося вивчення довільних груп G, у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності. Цей напрямок є одним із важливих в теорії груп. Його головною метою є опис узагальнень дедекіндових груп. Одне із таких узагальнень здійснюється шляхом звуження системи підгруп Σ, що є нормальними в усій групі. Назване узагальнення дедекіндових груп можна знайти в роботах багатьох авторів.

У 1968 році А. Манн [3] почав вивчати групи, у яких нормальні не всі підгрупи системи Σ, а ті групи G, що мають нормальну підгрупу N, розміщену між будь-якими двома підгрупами A і B із Σ, де A – власна не максимальна підгрупа із B. У нього Σ – система всіх підгруп групи G. Групи, введені А. Манном, С. М. Черніков у 1975 році назвав групами з умовою щільності нормальності для всіх підгруп. Він же ввів поняття умов щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т. д.) системи підгруп Σ [4, розділ 7]. Будемо говорити, що група G має щільну систему нормальних Σ-підгруп, якщо для будь-якої такої пари підгруп $A < B$, що A не максимальна в B, існує нормальна в G підгрупа N, розташована між A і B, тобто $A \leq N \leq B$. Якщо Σ – система всіх підгруп групи G, то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для всіх підгруп (коротко *УЩН[ ]*-груп). Локально ступінчасті такого роду описані у роботах [5 – 14].

Якщо Σ – система всіх неперіодичних абелевих підгруп групи G, то одержуємо означення груп з умовами щільності нормальності для неперіодичних абелевих підгруп (коротко *УЩН[ІА]*-груп).

В даній роботі отримано повний опис *УЩН[ІА]*-груп (теорема). Завдяки цій теоремі будь-яка група G тоді і тільки тоді є *УЩН[ІА]*-групою, коли її центр скінченний і вона має таку абелеву нормальну підгрупу H індексу 2 і такий елемент b другого або четвертого порядку, що $G = H < b >$, де $< b >$ – циклічна група, породжена елементом b і $b^{-1} a b = a^{-1}$ для довільного a із H.

Означення 1 (*означення 1.2.1 з* [14]). *Нехай G – група, A і B – її підгрупи, $A \leq B$. Відрізком* $[A;B]$ *називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A \leq X \leq B$.*

Означення 2 (*означення 1.2.2 з* [14]). *Модулем відрізком* $|[A;B]|$ *називається число його елементів.*

Означення 3. *Нехай у неабелевій групі G для довільного відрізка $|[A;B]| > 2$, де A та B – неперіодичні абелеві підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що $N \in [A;B]$. Тоді група G називається УЩН[ІА]-групою.*

Лема. *Нехай G –УЩН[ІА]-група. Тоді в G нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи*.

Доведення. Нехай r – довільний елемент групи G, який має нескінченний порядок. Розглянемо послідовність підгруп:

$$< r > > > < r^{t} > > < r^{t^{2}} > > \ldots > < r^{t^{k}} > > \ldots,$$

де t – довільне натуральне число. За означенням *УЩН[ІА]*-груп можна знайти таке натуральне число n, що підгрупа $< r^{t^{n}} >$ нормальна в G. Нехай p і q – різні прості числа, $< r^{p^{m}} >$ і $< r^{q^{s}} >$ – дві нормальні в G підгрупи такого роду і l, c – такі цілі числа, що:

$$lp^{m} + cq^{s} = 1.$$

Нехай $w = lp^m$, $v = cq^s$. Тоді $r = r^{w+v} = r^w r^v$. Далі:

$$x^{-1} r x = x^{-1} r^w r^v x = x^{-1} r^w (x x^{-1}) r^v x = (x^{-1} r^w x)(x^{-1} r^v x) =$$

$$= (x^{-1} r^{p^m} x)^l (x^{-1} r^{q^s} x)^c$$

для будь-якого елемента x із G. Завдяки нормальності в G підгруп $< r^{p^m} >$ і $< r^{q^s} >$ маємо, що елемент $x^{-1} r x$ належить підгрупі $< r >$. Оскільки x – довільний елемент групи G, то це означає, що підгрупа $< r >$ нормальна в G. Таким чином, в G нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи. Лема доведена.

Теорема. *Група G тоді і тільки тоді є УЩН[ІА]- групою, коли її центр скінченний і вона має таку абелеву нормальну підгрупу H індексу 2 і такий елемент b другого або четвертого порядку, що* $G = H < b >$, *де* $< b >$ *– циклічна група, породжена елементом b і* $b^{-1} a b = a^{-1}$ *для довільного a із H.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G *–УЩН[ІА]*-група. Тоді завдяки лемі G група, у якій нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи. Нехай r – довільний елемент нескінченного порядку із G і H – його централізатор в G. Оскільки нескінченна циклічна підгрупа $< r >$ нормальна в G, то підгрупа H нормальна в G і H має в G індекс, який не більший ніж число 2.

Нехай a – довільний елемент із H і нехай він має скінченний порядок. Розглянемо нескінченну абелеву підгрупу $<a, r>$, яка породжена елементами a і r. Зрозуміло, що $<a, r> = <a> \times < r >$. Покажемо, що підгрупа $<a, r>$ нормальна в G. Дійсно, розглянемо спадну послідовність підгруп:

$$\boldsymbol{B_m} = <a> \times < r^{p^m} > (m = 0, 1, 2, ...).$$

Перетин цих підгруп співпадає, очевидно з підгрупою $<a>$. Розглядаючи послідовність трійки підгруп:

$$\boldsymbol{B_l} > \boldsymbol{B_{l+1}} > \boldsymbol{B_{l+2}} \ (l = 0, 3, 6, ...)$$

із $\boldsymbol{B_m} = <a> \times < r^{p^m} >$ і використовуючи означення *УЦН[ІА]*-груп, виділяємо послідовність нормальних в G підгруп такого виду N_j, що їх перетин співпадає з підгрупою $<a>$ і, значить, підгрупа $<a>$ нормальна в G.

Якщо a має нескінченний порядок, то циклічна підгрупа $<a>$ нормальна в G як нескінченна циклічна підгрупа. Таким чином, циклічна підгрупа $<a>$ в обох випадках нормальна в групі G, а значить, і в її підгрупі H. Но тоді в H нормальні всі підгрупи. Оскільки підгрупа H,очевидно, містить елементи нескінченного порядку, то вона не може бути неабелевою дедекіндовою групою (див.[1, 2]) і, значить, абелева.

Оскільки група G неабелева, то звідси випливає, зокрема, що ні один елемент нескінченного порядку не може належати її центру. Тому $H \neq G$ і, таким чином, індекс підгрупи H в G рівний двом.

Нехай b – довільний елемент із різниці $G - H$. Так як індекс підгрупи H в G рівний двом, то $b^2 \in H$. Порядок елемента b^2 не може бути нескінченним, так як цей елемент, очевидно, міститься в центрі групи G. Но тоді елемент rb^2 має нескінченний порядок. Породжена ним нескінченна циклічна підгрупа $< r\ b^2 >$ нормальна в групі G, яка не міститься в її центрі. Тому справедливе співвідношення $b^{-1}(r\ b^2)\ b = r^{-1}\ b^{-2}$. Крім цього, $b^{-1}\ r\ b = r^{-1}$, оскільки нескінченна циклічна підгрупа $< r >$ нормальна в групі G і не міститься в її центрі. Тому:

$$b^{-1}(r\ b^2)\ b = b^{-1} r\ b)\ b = r^{-1}\ b.^2$$

Таким чином, $r^{-1}\ b^{-2} = r^{-1}\ b^2$ і тому $b^4 = 1$.

Нехай a – довільний елемент із H. Якщо він має нескінченний порядок, то із того, що підгрупа $< a >$ нормальна в групі G і не міститься в її центрі, випливає співвідношення b^{-1}a $b = a^{-1}$. Якщо елемент a має скінченний порядок, то ra – елемент нескінченного порядку і тоді:

$$b^{-1}(r\ a)\ b = (ra)^{-1} = a^{-1}\ r^{-1} = r^{-1}\ a^{-1}.$$

Оскільки $b^{-1} r\ b = r^{-1}$, то b^{-1}a $b = a^{-1}$.

Покажемо тепер, що центр групи G скінченний. Нехай z – довільний елемент із центра групи G. З огляду на те, що G неабелева група маємо, що елемент z належить H. Але тоді $b^{-1} z b = z^{-1}$. Крім цього, $b^{-1} z b = z$. Таким чином, $z = z^{-1}$ і тому $z^2 = 1$. Отже, центр $Z(G)$ групи G складається із елементів, порядкок яких не вище двох. Тому, якщо він нескінченний, то він містить таку нескінченну підгрупу:

$$B = \ldots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_{-1} \rangle \times \langle b_0 \rangle \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \ldots,$$

що перетинається по одиниці з підгрупою $\langle b \rangle$. Тоді із очевидного співвідношення:

$$\langle b \rangle = ((\ldots \times \langle b_{-2} \rangle \times \langle b_{-1} \rangle) \times \langle b \rangle) \cap (\langle b \rangle \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \ldots)$$

отримуємо, що підгрупа $\langle b \rangle$ нормальна в G. Але тоді індекс централізатора підгрупи $\langle b \rangle$ в G скінченний і навіть дорівнює двом. Тому централізатор підгрупи $\langle b \rangle$ в G містить другу степінь кожного елемента групи G. Проте при цьому центр групи G повинен мати хоча б один елемент нескінченного порядку. Оскільки друга степінь такого елемента міститься в підгрупі H, то це суперечить співвідношенню $b^{-1} a b = a^{-1}$.Таким чином, центр групи G не може бути нескінченним. Необхідність теореми доведена.

Достатність. Нехай неабелева група G, яка містить елементи нескінченного порядку, має таку абелеву нормальну підгрупу H індексу 2 і такий елемент b другого або четвертого порядку, що $G = H \langle b \rangle$ і $b^{-1} a b = a^{-1}$ для довільного a із H. Нехай D – довільна неперіодична абелева підгрупа із довільного відрізка $|[A;B]| > 2$, де A та B – неперіодичні абелеві підгрупи. Якщо D міститься в H, то нормальність D в G випливає із співвідношення $b^{-1} a b = a^{-1}$ для довільного a із H. Якщо D не міститься в H, то D містить елемент виду ab, де a – деякий елемент із H. Звідси випливає, що центр групи G містить нескінченну підгрупу $D \cap H$, що суперечить тому, що центр групи G скінченний. Таким чином, D не міститься в H. Отже,

підгрупа D нормальна в G і, значить, G –*УЩН[ІА]*-група. Достатність умови теореми доведена. Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Dedekind R**. *Uber Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind* // Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548–561.

2. **Baer R**. *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe* // S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2.** – S. 12–17.

3. **Mann A**. *Groups with dense normal subgroups* // Israel J. Math. – 1968. – 6, № 1. – P. 13–25.

4. **Черников С. Н**. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

5. **Семко М. М**. *Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп* // Класи груп з обме-женнями для підгруп. – К.: Ін–т математики НАН України. – 1997. – С. 27–41.

6. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 789–798.

7. **Семко М. М**. *Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8. – С. 1 148–1 151.

8. **Семко М. М**. *Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1 396–1 403.

9. **Семко М. М**. *Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 49–53.

10. **Семко М. М**. *Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп* // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 43–46.

11. **Семко М. М**. *Про будову УЩН[ ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1 250–1 261.

12. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих УЩН( ]-груп* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 11. – С. 1 532–1 536.

13. **Семко М. М**. *Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 383–388.

14. **Семко М. М**. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.