

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Скасків Лілія Василівна

УДК 512.54+512.554

ГРУПИ, БАГАТІ БЛИЗЬКИМИ  
ДО НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДГРУПАМИ

*01.01.06 – алгебра та теорія чисел*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата  
фізико-математичних наук

Науковий керівник  
Артемович Орест Дем'янович  
доктор фізико-математичних  
наук, професор

ЛЬВІВ – 2012

## ЗМІСТ

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| <b>Перелік умовних позначень</b> .....                | 4  |
| <b>ВСТУП</b> .....                                    | 7  |
| <b>РОЗДІЛ 1. Огляд літератури</b>                     |    |
| та основних результатів дисертації .....              | 15 |
| 1.1. Огляд літератури .....                           | 15 |
| 1.2. Низка необхідних результатів .....               | 29 |
| 1.3. Основний зміст дисертації .....                  | 35 |
| 1.4. Висновки до розділу 1 .....                      | 44 |
| <b>РОЗДІЛ 2. Групи з умовою мінімальності для</b>     |    |
| підгруп, які не є узагальнено нільпотентними .....    | 45 |
| 2.1. Групи, насичені $A\check{C}$ -підгрупами або     |    |
| $\check{S}A$ -підгрупами .....                        | 46 |
| 2.2. Групи із умовою мінімальності для підгруп,       |    |
| які не є $FN$ -групами .....                          | 51 |
| 2.3. Мінімальні не $\check{S}N$ -групи .....          | 59 |
| 2.4. Умова мінімальності для негіперцентральных       |    |
| підгруп і субнормальність .....                       | 68 |
| 2.5. Висновки до розділу 2 .....                      | 73 |
| <b>РОЗДІЛ 3. Періодичні розв'язні групи з умовою</b>  |    |
| максимальності для не майже абелевих підгруп .....    | 75 |
| 3.1. Групи з умовою $Max - \overline{AF}$ , які мають |    |
| квазіциклічний гомоморфний образ .....                | 76 |

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2. Будова періодичних розв'язних груп із умовою $Max - \overline{AF}$ ..... | 83  |
| 3.3. Висновки до розділу 3 .....                                              | 88  |
| <b>РОЗДІЛ 4. Групи і брейси</b> .....                                         | 89  |
| 4.1. Група, асоційована з брейсом .....                                       | 92  |
| 4.2. Групи Фробеніуса .....                                                   | 106 |
| 4.3. Нільпотентні брейси .....                                                | 113 |
| 4.4. Висновки до розділу 4 .....                                              | 120 |
| <b>ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ</b> .....                                                | 122 |
| <b>Список використаних джерел</b> .....                                       | 126 |

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

|                                               |   |                                                                   |
|-----------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$      | – | множина натуральних чисел,                                        |
| $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ | – | розширена множина<br>натуральних чисел,                           |
| $\mathbb{Z}$                                  | – | множина цілих чисел,                                              |
| $\mathbb{Q}$                                  | – | множина раціональних чисел,                                       |
| $\mathbb{R}$                                  | – | множина дійсних чисел,                                            |
| $\mathbb{C}$                                  | – | множина комплексних чисел,                                        |
| $\mathbb{F}_q$                                | – | скінченне поле із $q$ елементів,                                  |
| $H \leq G$                                    | – | $H$ – підгрупа в групі $G$ ,                                      |
| $H < G$                                       | – | $H$ – власна підгрупа в $G$ ,                                     |
| $H \triangleleft G$                           | – | $H$ – нормальна підгрупа в $G$ ,                                  |
| $H^a = a^{-1}Ha$                              | – | підгрупа, спряжена до підгрупи $H$<br>за допомогою елемента $a$ , |
| $G/H$                                         | – | фактор-група групи $G$<br>за підгрупою $H$ ,                      |
| $ G : H $                                     | – | індекс підгрупи $H$ в групі $G$ ,                                 |
| $p$                                           | – | просте число,                                                     |
| $\mathbb{C}_{p^\infty}$                       | – | квазіциклічна $p$ -група,                                         |
| $\mathbb{C}_{p^n}$                            | – | циклічна $p$ -група<br>порядку $p^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ),      |

|                                               |   |                                                      |
|-----------------------------------------------|---|------------------------------------------------------|
| $\cong$                                       | – | символ ізоморфізму груп,                             |
| $\times$                                      | – | символ прямого добутку,                              |
| $\rtimes$                                     | – | символ напівпрямого добутку,                         |
| $\square$                                     | – | символ, який означає<br>кінець доведення,            |
| $C_G(H)$                                      | – | централізатор підгрупи $H$<br>в групі $G$ ,          |
| $RG$ або $R[G]$                               | – | групове кільце групи $G$<br>над кільцем $R$ ,        |
| $Z(G)$                                        | – | центр групи $G$ ,                                    |
| $FratG$                                       | – | підгрупа Фраттіні групи $G$ ,                        |
| $radM$                                        | – | радикал Джекобсона модуля $M$ ,                      |
| $\gamma_k G$                                  | – | $k$ -тий гіперцентр групи $G$ ,                      |
| $G^{(n)}$                                     | – | $n$ -тий комутант групи $G$ ,                        |
| $\Omega_k(G) = \{x \in G \mid x^{p^k} = 1\}$  | – | $k$ -тий прошарок $p$ -групи $G$ ,                   |
| $char K$                                      | – | характеристика поля $K$ ,                            |
| $\text{ann}_R(u) = \{r \in R \mid ru = 0\}$   | – | анулятор елемента $u$ в кільці $R$ ,                 |
| $\oplus$                                      | – | знак прямої суми,                                    |
| $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$                     | – | комутатор елементів $x$ та $y$ ,                     |
| $[A, B]$                                      | – | взаємний комутант підгруп $A$<br>і $B$ в групі $G$ , |
| $A^G = \langle g^{-1}Ag \mid g \in G \rangle$ | – | нормальне замикання<br>підгрупи $A$ в групі $G$ ,    |

|                                                      |   |                                                                                                         |
|------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\tau(G)$                                            | – | множина всіх елементів<br>скінченного порядку групи $G$ ,                                               |
| $\exp(G)$                                            | – | експонента групи $G$ ,                                                                                  |
| $R^\circ$                                            | – | приєднана група асоціативного<br>кільця $R$ ,                                                           |
| $A^\circ$                                            | – | приєднана група брейса $A$ ,                                                                            |
| $A^+$                                                | – | адитивна група брейса $A$ ,                                                                             |
| $b^{(-1)}$                                           | – | елемент, обернений до елемента<br>$b \in A$ в приєднаній групі $A^\circ$ ,                              |
| $\text{ann } A, \text{ann}_l A$ або $\text{ann}_r A$ | – | двобічний, лівий чи правий<br>анулятори брейса $A$ ,                                                    |
| $C_A(a)$                                             | – | централізатор елемента $a$ в $A$ ,                                                                      |
| $G(R)$                                               | – | асоційована група асоціативного<br>кільця $R$ ,                                                         |
| $H(L, T)$                                            | – | група, асоційована з підмодулем $L$<br>деякого модуля над брейсом $A$ і<br>підгрупою $T$ із $A^\circ$ , |
| $H(A)$                                               | – | асоційована група брейса $A$ .                                                                          |

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Починаючи з робіт Р. Дедекінда [54] про скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, Г. Міллера і Х. Морено [76] про скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві, О.Ю. Шмідта [33] про скінченні групи, всі власні підгрупи яких нільпотентні, ведуться дослідження груп із системами підгруп, які мають важливі природні властивості. На цьому шляху, прокладеному від скінченних груп до нескінченних, виділено і охарактеризовано багато важливих класів груп, започатковано нові важливі поняття, що суттєво вплинули на подальші напрямки досліджень в теорії груп.

Систематичне вивчення нескінченних груп з умовами скінченності, зініційоване С.М. Черніковим і підсумоване в монографії [27], інтенсивно проводилось ним та його учнями, починаючи з 50-тих років минулого століття.

Цією тематикою, яка виявилась перспективною і плідною, зацікавилось багато різних дослідників із різних країн; вони опублікували результати своїх пошуків у значному числі праць, впроваджуючи при цьому в математику нові фундаментальні поняття і змінюючи погляди на предмет і методи досліджень.

Один із підходів полягає у вивченні груп з "малою" (або

"великою" у певному сенсі) системою підгруп, що мають (або не мають) деяку властивість  $\chi$ . Так, С.М. Черніков започаткував дослідження нескінченних груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для системи не  $\chi$ -підгруп (тобто системи всіх підгруп групи, які не мають властивості  $\chi$ ), серед яких варто нагадати про дослідження С.М. Чернікова [24] груп з умовою мінімальності для неабелевих підгруп, дослідження Д.І. Зайцева і Л.А. Курдаченка [11] груп з умовою максимальності для неабелевих підгруп. За цей час вивчалися групи з різними умовами мінімальності чи максимальності для різних систем підгруп; серед яких вкажемо на публікації М.Р. Діксона та Л.А. Курдаченко [57], [58], С. Фрачіозі, Ф. де Джованні і Я.П. Сисака [60], Х. Отала та Х. Пени [82], М.М. Семка [77], В.С. Чаріна [19], М.С. Чернікова [20], [21], [22], О.Д. Артемовича [3], [6], [39] та інших. Подібні дослідження груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для певних систем узагальнено нільпотентних підгруп проведено в даній дисертаційній роботі.

До груп з "малою" системою не  $\chi$ -підгруп відносяться мінімальні не  $\chi$ -групи, тобто групи, які не є  $\chi$ -групами в той час, як всі їхні власні підгрупи є  $\chi$ -групами. Перший такий приклад (а саме, нескінченної мінімальної ненільпотентної групи із субнормальними власними підгрупами) побудували Г. Хайнекен та І. Мохамед [65] в 1968 році (в їх честь такі групи названо групами типу Хайнекена-Мохамеда). Такі групи виявились нерозкладними (тобто групами, в яких будь-які дві власні під-

групи знову породжують власну підгрупу). В. Мирес в низці робіт (див. його підсумкову роботу [80]) встановив, що групи із субнормальними підгрупами завжди розв'язні. За пройдений період опубліковано біля двох десятків робіт про групи типу Хайнекена-Мохамеда, але вони все ще залишаються недослідженими.

Систематичне вивчення мінімальних не  $\chi$ -груп започаткував В. Беляєв, почавши досліджувати мінімальні не FC-групи і мінімальні не VFC-групи [7], [8]. Пізніше він та, незалежно, Б. Бруно вивчали мінімальні не майже абелеві групи [9], [46], а Б. Бруно та Р. Філіпс [47], [48], [49], [51] – мінімальні не майже нільпотентні групи. Різними авторами (див., наприклад, [64], [83] та інші) вивчались також мінімальні не SC-групи. М. Ксу [99] розглядав групи, всі власні підгрупи яких борові, та групи [100], всі власні підгрупи яких є FN-групами (тобто групами, що є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп), а О.Д. Артемович [2] вивчав властивості мінімальних не майже гіперцентральных груп. Із результатів Ф. Наполітано, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що якщо  $\chi$  – це властивість "бути розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи", то локально ступінчатих мінімальних не  $\chi$ -груп не існує. В даній дисертації встановлено, що якщо  $\chi$  – це властивість "бути розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи", то існує недосконала мінімальна не  $\chi$ -група і вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда.

Важливим напрямком застосування теорії груп – це до-

слідження груп одиниць (та груп квазірегулярних елементів) кілець. Алгебраїчні одиниці вперше зустрічаються у Ф. Гаусса. Першим важливим результатом про групи одиниць, напевно, є теорема Діріхле про одиниці кільця цілих алгебраїчних чисел. Початкові результати в цьому напрямку описано в монографії [31]. Квазірегулярні елементи ввів С. Перліс з метою характеристики радикала Джекобсона асоціативного кільця. Якщо асоціативне кільце має одиницю, то його група одиниць і приєднана група (тобто група, яка складається із елементів, оборотних стосовно операції кругового множення) ізоморфні. Радикальні кільця вивчалися в роботах Б. Амберга та О. Дікеншіда [35], Дж. Воттерса, Я.П. Сисака [18], Ю.М. Рябухіна та багатьох інших. Я.П. Сисак побудував асоційовану групу  $G(R)$  радикального кільця  $R$  [18], а О.Д. Артемович розширив цю конструкцію [37] і розглядав групу  $H(I, T)$ , асоційовану з підмодулем  $I$  модуля над довільним асоціативним кільцем  $R$  та підгрупою  $T$  приєднаної групи  $R^\circ$  цього кільця. Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи  $G(R)$  для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця  $R$ . В. Румп [92] зовсім недавно ввів в розгляд поняття брейса, який, як виявилось, насичений різними підгрупами. Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. В дисертації вводиться група  $H(L, T)$ , асоційована з підмодулем  $L$  модуля, який розглядається над довільним брейсом  $A$ , та підгрупою  $T$  приєднаної групи  $A^\circ$ . Зокрема, розглядається

група  $H(A)$ , асоційована з брейсом  $A$ , і досліджуються деякі її властивості, пов'язані з нільпотентністю.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації – складова частина досліджень із держбюджетної теми тем № 0104 U 002129, яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

**Мета і завдання дослідження.** *Мета дисертації* – дослідження груп, насичених підгрупами, близькими до нільпотентних і їх узагальнень.

*Об'єкт* дослідження – групи з умовами мінімальності (відповідно максимальності) для певних систем підгруп, близькими до нільпотентних, а також груп, пов'язаних з брейсами.

*Предмет* дослідження – особливості будови груп, які задовольняють певні умови скінченності, а також дослідження груп, асоційованих з брейсами.

*Задачі дослідження:*

- охарактеризувати групи із певними умовами мінімальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;
- дослідити періодичні групи із певними умовами максимальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;

- вивчити певні зв'язки груп із брейсами.

**Методи дослідження.** Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії груп та теорії кілець і модулів.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, нові і є такими:

- доведено, що недосконала локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою;
- охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп;
- встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп в той час, як кожна власна їхня підгрупа є такою, і в недосконалому випадку доведено, що така група є групою типу Хайнекена-Мохамеда;
- встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в групі;
- охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є майже абелевими;

- побудовано групу, асоційовану з брейсом, і досліджено деякі її властивості.

**Практичне значення одержаних результатів.** Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях в теорії груп.

**Особистий внесок здобувача.** Усі основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самотійно. У спільних статтях (див. [16], [102], [104], [107], [108]) співавтору, який є науковим керівником, належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1. 5-та міжнародна алгебраїчна конференція (2005, Львів);
2. A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70<sup>th</sup> Birthday (2005, Debrecen, Hungary);
3. 6-та міжнародна алгебраїчна конференція (2007, Кам'янець-Подільський);
4. 2-ма міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (2008, Львів);
5. 7-ма міжнародна алгебраїчна конференція (2009, Харків);
6. 8-ма міжнародна алгебраїчна конференція (2011, Луганськ);

7. на львівському міському алгебраїчному семінарі під керівництвом професора М.Я. Комарницького (2007, 2012, Львів).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у 11 працях [14–16] та [101–108] (6 без співавторів), з яких 6 (2 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку фахових видань.

**Структура та об’єм дисертації.** Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 108 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 140 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 15 сторінок.

Авторка висловлює щирі подяки своєму науковому керівнику, професору Артемовичу Оресту Дем’яновичу, за постійну увагу та підтримку в роботі.

# РОЗДІЛ 1

## ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

### І ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

В цьому розділі наведено огляд літератури та результатів досліджень за тематикою дисертаційної роботи, а також короткий огляд результатів, отриманих в дисертації.

#### 1.1. Огляд літератури

Основні означення, які використовуються в дисертаційній роботі, можна знайти в книгах з теорії груп [12], [27], [72], [30], [89], [90], [73], [91] і з теорії кілець [28], [29], [85]. Для зручності нижче в цьому підрозділі наведемо основні поняття і факти, які безпосередньо стосуються проблематики, розглядуваної в дисертації, а також дамо огляд найближчих до нашої тематики наукових досліджень.

1. Нехай нижче  $G$  – група (стосовно операції " $\cdot$ "). Нагадаємо, що *класом* груп  $\mathfrak{X}$  називається сукупність груп, яка містить одиничну (тривіальну) групу, і з умови  $G \in \mathfrak{X}$  випливає, що  $\mathfrak{X}$  містить кожну групу, яка ізоморфна  $G$ .

Часто пишуть  $G \in \mathfrak{X}$  і кажуть, що  $G$  належить до класу  $\mathfrak{X}$  (рівносильно,  $G$  –  $\mathfrak{X}$ -група або  $G$  має теоретико-групову властивість  $\mathfrak{X}$ ).

Підмножина

$$Z(G) = \{z \in G \mid g \cdot z = z \cdot g \text{ для всіх елементів } g \in G\}$$

називається *центром* групи  $G$ . Як відомо,  $Z(G)$  – нормальна підгрупа в  $G$ .

Ланцюг підгруп

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_\alpha(G) \leq \dots$$

називається верхньою центральною системою групи  $G$ , якщо:

- i)*  $Z_0(G) = \langle 1 \rangle$  – одинична підгрупа;
- ii)*  $Z_1(G) = Z(G)$  – центр групи  $G$ ;
- iii)*

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G)),$$

якщо ординал  $\alpha$  не граничний;

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G),$$

якщо ординал  $\alpha$  граничний.

Якщо знайдеться таке натуральне число  $n$ , що  $G = Z_n(G)$ , то група  $G$  називається *нільпотентною*. Найменше натуральне число  $n$  з такою властивістю називається *ступенем* (або *класом*) нільпотентності групи  $G$ . Ясно, що абелева група є нільпотентною класу 1. Якщо ж  $G = Z_\gamma(G)$  для деякого ординала  $\gamma$ , то група  $G$  називається *гіперцентральною* (або скорочено *ЗА-групою*). Із означення випливає, що кожна нільпотентна група є гіперцентральною (але навпаки це не завжди так).

Наприклад, мультиплікативна група матриць

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

нільпотентна класу нільпотентності 2, оскільки

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Якщо  $x, y \in G$ , то елемент  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$  називається *комутатором* елементів  $x$  та  $y$ , а підгрупа

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle,$$

яка породжена всіма комутаторами  $[x, y]$ , називається *комутантом* групи  $G$ . Часто  $[G, G]$  позначають скорочено через  $G'$ . Якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то послідовні комутанти групи  $G$  визначають так:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G, \\ G^{(1)} &= G', \\ G^{(2)} &= [G', G'], \end{aligned}$$

$\vdots$

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \text{ — } n\text{-тий комутант групи } G.$$

Будемо вживати таких скорочених позначень:

$$G'' = G^{(2)}, G''' = G^{(3)}.$$

Покладаючи:

$$i) \quad \gamma_1 G = G,$$

$$ii) \quad \gamma_2 G = G',$$

$$iii) \quad \gamma_\alpha G = [\gamma_{\alpha-1} G, G], \text{ якщо ординал } \alpha \text{ неграничний,}$$

$$iv)$$

$$\gamma_\alpha G = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta G,$$

якщо ординал  $\alpha$  граничний, отримаємо незростаючий ланцюг підгруп

$$G = \gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq \cdots \geq \gamma_\alpha G \geq \cdots,$$

який називається *нижньою центральною системою* групи  $G$ . Добре відомо, що  $Z_\alpha(G)$ ,  $G^{(n)}$ ,  $\gamma_\alpha G$  – нормальні підгрупи в  $G$ .

Якщо група  $G$  співпадає з своїм комутантом  $G'$ , то  $G$  називається *досконалою*; якщо ж – ні, то кажуть, що  $G$  *недосконала*.

Нехай  $\mathfrak{S}$  – теоретико-группова властивість. Кажуть, що  $G$  – *майже  $\mathfrak{S}$ -група*, якщо  $G$  містить таку підгрупу  $H$  скінченного індекса, що  $H$  має властивість  $\mathfrak{S}$ . Наприклад, якщо  $\mathfrak{S} = \mathcal{A}$  – клас абелевих груп, то майже  $\mathcal{A}$ -група називається *майже абелевою* (або  $AF$ -групою); якщо ж  $\mathfrak{S} = \mathcal{N}$  – клас нільпотентних груп, то майже  $\mathcal{N}$ -група називається *майже нільпотентною* (або  $NF$ -групою).

Ланцюг підгруп

$$G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq \cdots \quad (1.1.1)$$

і відповідно

$$G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n \geq \cdots \quad (1.1.2)$$

називається *субнормальним*, якщо  $G_n$  – нормальна підгрупа в  $G_{n+1}$  (і відповідно  $G_{n+1}$  – нормальна підгрупа в  $G_n$ ) для всіх  $n \in \mathbb{N}_0$ . Якщо  $G_i \neq G_{i+1}$  для кожного  $i \in \mathbb{N}_0$ , то ланцюг (1.1.1) називається строго зростаючим і записується у вигляді

$$G_0 < G_1 < \cdots < G_n < \cdots ;$$

подібно, якщо в (1.1.2)  $G_i \neq G_{i+1}$  для кожного  $i \in \mathbb{N}_0$ , то цей ланцюг називається строго спадним і записується у вигляді

$$G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \cdots .$$

Підгрупа  $H$  групи  $G$  називається *субнормальною* (позначається  $H \triangleleft \triangleleft G$ ), якщо існує такий субнормальний ряд (1.1.1), що  $H = G_0$  та  $G = G_n$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ . Найменше натуральне число  $n$  із такою властивістю називається *глибиною* (або дефектом) субнормальності підгрупи  $H$ . Ясно, що кожна нормальна підгрупа в групі субнормальна глибини 1. Як відомо (див. теорему 16.2.2 із [12]), в нільпотентній групі кожна підгрупа субнормальна.

Фактор-група

$$G_{i+1}/G_i$$

називається *фактором* ряду (1.1.1), а фактор-група

$$G_i/G_{i+1}$$

– *фактором* ряду (1.1.2) для  $i \in \mathbb{N}_0$ . Нагадаємо також, якщо існує субнормальний ряд (1.1.1) і натуральне число  $n \in \mathbb{N}$  такі, що  $G_0 = \langle 1 \rangle$  – одинична підгрупа,  $G_n = G$  і всі фактори ряду

(1.1.1) є абелевими, то група  $G$  називається *розв'язною* (найменше з можливих  $n$  із такою властивістю називається *ступенем розв'язності* групи  $G$ ). Кожна абелева група є розв'язною ступеня 1.

Якщо  $H$  – яка-небудь підгрупа із  $G$ ,  $K$  – нормальна підгрупа в  $H$ , то фактор-група  $H/K$  називається *секцією* групи  $G$ .

**2.** Нехай  $p$  – просте число,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді

$$\mathbb{C}_{p^n} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1\}$$

– група, яка складається із комплексних коренів степеня  $p^n$  із одиниці 1. Якщо

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{p^n} + i \sin \frac{2\pi}{p^n},$$

то  $\mathbb{C}_{p^n} = \langle \varepsilon_1 \rangle$ , тобто група  $\mathbb{C}_{p^n}$  циклічна і породжена елементом  $\varepsilon_1$ . Оскільки

$$\mathbb{C}_p \leq \mathbb{C}_{p^2} \leq \mathbb{C}_{p^3} \leq \dots \leq \mathbb{C}_{p^n} \leq \dots,$$

то їх об'єднання

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_{p^n}$$

– група, яка називається *квазіциклічною  $p$ -групою* (і позначається через  $\mathbb{C}_{p^\infty}$ ). Квазіциклічна група – це квазіциклічна  $p$ -група для певного простого числа  $p$ .

Кажуть, що група  $G$  – *розширення групи  $A$  за допомогою групи  $B$* , якщо виконуються такі дві умови:

1)  $A$  – нормальна підгрупа в  $G$ ;

2) фактор-група  $G/A$  ізоморфна групі  $B$ .

Група  $G$  називається *черніковською*, якщо вона є скінченним розширенням прямого добутку скінченного числа квазіциклічних груп. Інакше кажучи,  $G$  – черніковська група, якщо вона має таку нормальну підгрупу

$$A \cong \mathbb{C}_{p_1^\infty} \times \mathbb{C}_{p_2^\infty} \times \cdots \times \mathbb{C}_{p_n^\infty}$$

(тут  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – прості числа, які не обов'язково є різними), що фактор-група  $G/A$  скінченна.

Група  $G$  називається

- *локально нільпотентною*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа нільпотентна;
- *локально ступінчатою*, якщо кожна неединична скінченно породжена підгрупа із  $G$  містить власну підгрупу скінченного індекса.

Клас локально ступінчатих груп досить широкий; він містить, наприклад, локально нільпотентні групи і локально розв'язні (зокрема, розв'язні) групи.

**Приклад 1.1.** Нехай  $G = A \rtimes \langle t \rangle$  – напівпрямий добуток квазіциклічної  $p$ -групи  $A$  ( $p > 2$ ) і циклічної групи  $\langle t \rangle$ , порядок якої  $|t| = \infty$  нескінченний, причому

$$t^{-1}at = a^{1+p}$$

для будь-якого  $a \in A$ . Тоді група  $G$  має такі властивості:

- i*)  $G$  містить власну несубнормальну підгрупу (тому  $G$  не є нільпотентною);
- ii*)  $G$  не є черніковською;
- iii*)  $G$  – розширення абелевої групи  $A$  за допомогою абелевої групи  $\langle t \rangle$ , а тому  $G$  – розв’язна група ступеня 2.

**Приклад 1.2.** Нехай

$$G = A \rtimes \langle t \rangle$$

– напівпрямий добуток квазіциклічної 2-групи  $A$  і циклічної групи  $\langle t \rangle$  порядку 2, причому

$$t^{-1}at = a^{-1}$$

для кожного елемента  $a \in A$ . Тоді  $G$  має властивості:

- i*)  $G$  – черніковська 2-група;
- ii*)  $G$  є локально нільпотентною, але не є нільпотентною;
- iii*)  $G$  – неабелева група, яка є  $AF$ -групою (а тому і  $NF$ -групою);
- iv*) підгрупа  $\langle t \rangle$  не є субнормальною в  $G$ ;
- v*) кожна підгрупа із  $A$  субнормальна в групі  $G$ .

**3.** Група  $G$  називається *розкладною*, якщо знайдуться такі дві власні підгрупи  $A, B < G$ , що група  $G$  породжується цими підгрупами, тобто

$$G = \langle A, B \rangle.$$

Якщо таких підгруп не існує, то група  $G$  називається *нерозкладною*. Групи  $G$  із прикладів 2.1 та 2.1 є розкладними. Як зауважено в [1], абелева група  $G$  нерозкладна тоді і тільки тоді, коли  $G \cong \mathbb{C}_{p^n}$  або  $G \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$  для певного простого числа  $p$ .

Група  $G$  називається *мінімальною не  $\mathfrak{X}$ -групою*, де  $\mathfrak{X}$  – деяка теоретико-групова властивість, якщо кожна власна підгрупа із  $G$  є  $\mathfrak{X}$ -групою в той час, як сама  $G$  не є  $\mathfrak{X}$ -групою. Наприклад, якщо  $\mathfrak{X} = N$  – клас нільпотентних груп, то мінімальні не  $N$ -групи прийнято називати *мінімальними ненільпотентними групами*. Скінченні мінімальні ненільпотентні групи охарактеризував Л. Редєї [87]. Мінімальні ненільпотентні групи є скінченно породженими або локально скінченними. Приклади простих скінченно породжених мінімальних ненільпотентних груп можна знайти в монографії О.Ю. Ольшанського [13]. М. Ньюмен і Дж. Вайголд [79] ненільпотентну локально нільпотентну групу, всі власні підгрупи якої є нільпотентними, називають  $AN$ -групою. Ними встановлено, що кожна розв'язна  $AN$ -група  $G$  має локально циклічну фактор-групу  $G/G'$  і є  $p$ -групою для деякого простого числа  $p$ . Вони також охарактеризували  $AN$ -групи, які мають максимальну підгрупу.  $AN$ -групи, які не містять жодної максимальної підгрупи, зліченні. Перші приклади таких груп знайдено Г. Хайнекенем і І. Мохамедом (див. [65],

[66]), а саме в [65] ними побудовано групу  $G$  із властивостями:

- I)* комутант  $G'$  – абелева група експоненти  $p$ ;
- II)* кожна підгрупа із  $G$  є нільпотентною і субнормальною;
- III)* центр  $Z(G) = \langle 1 \rangle$  одиничний.

Пізніше на їхню честь ненільпотентні групи, всі власні підгрупи яких є нільпотентними і субнормальними, названо *групами типу Хайнекена-Мохамеда*. В [66] шляхом побудови встановлено, що існує незліченна родина попарно неізоморфних груп типу Хайнекена-Мохамеда.

Пізніше низки груп типу Хайнекена-Мохамеда побудовано також Дж. Мельдрумом [74], Б. Хартлі [62], [32], Б. Бруно і Р. Філліпсом [50] та Ф. Менегаццо [75]. Детальніший огляд досліджень мінімальних ненільпотентних груп можна знайти в монографіях Дж. Леннокса і Стоунхювера [72], Дж. Леннокса і Д. Робінсона [73] та оглядовій статті О.Д. Артемовича і Л.А. Курдаченка [4].

Х. Сміт [95] довів, що локально нільпотентна група без скруту, всі власні підгрупи якої нільпотентні, сама є нільпотентною. В. Мирес в низці робіт (див. його підсумкову роботу [80]) детально досліджував групи із субнормальними власними підгрупами. Він встановив, що такі групи розв'язні. Як наслідок, групи типу Хайнекена-Мохамеда розв'язні. Опираючись на сказане і теорему 3.1 із праці [95] маємо

**Твердження 1.1.** *Нехай  $G$  – ненільпотентна група, яка не*

має жодної максимальної підгрупи. Якщо всі її власні підгрупи нільпотентні, то вона має такі властивості:

- (i)  $G$  – зліченна  $p$ -група для деякого простого числа  $p$  і фактор-група  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ ;
- (ii) кожна підгрупа субнормальна в  $G$ ;
- (iii)  $(G')^p \neq G'$  і кожен гіперцентральний гомоморфний образ групи  $G$  абелевий;
- (iv) централізатор  $C_G(G')$  абелевий;
- (v) комутант  $G'$  недоповнюваний в групі  $G$  (тобто із рівності  $G'H = G$  для підгрупи  $H \leq G$  випливає, що  $H = G$ );
- (vi)  $G$  не має власних підгруп скінченного індексу.

Кажуть, що група  $G$  має власну факторизацію, якщо знайдуться такі дві власні підгрупи  $A, B < G$ , що

$$G = AB.$$

Виявляється, що групи типу Хайнекена-Мохамеда не мають власної факторизації. Це, зокрема, випливає із теореми 1.1 [36], яку подамо як

**Твердження 1.2.** *Нехай  $G$  – нескінченна недосконала неабелева група. Тоді рівносильні такі властивості:*

- (1)  $G'$  – нерозкладна група;
- (2)  $G$  не має власної факторизації;

(3)  $G$  – зліченна група з недоповнювальним комутантом  $G'$  і фактор-група  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$  для деякого простого числа  $p$ .

За тривалий час пошуків знайдено і інші мінімальні не- $\mathfrak{X}$ -групи. Група  $G$  називається  $FA$ -групою, якщо її комутант  $G'$  скінченний (в праці [7] такі групи названо *квазіабелевими*). В.В. Беляєв та М.Ф. Сесекін (див. [7] і [8]) описали мінімальні не  $FA$ -групи, а саме вони встановили таке важливе

**Твердження 1.3** ([7], теорема). *Недосконала група  $G$  – мінімальна не  $FA$ -група тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з таких типів:*

$$(\alpha_1) \ G = \langle b, a_0, a_1, \dots, a_i, \dots \rangle, \text{ де } b^{p^n} = 1, [a_i, a_j] = 1, [b, a_0] = 1, [b, a_i] = a_{i-1} \ (i \neq 0), a_0^p = 1;$$

$$(\alpha_2) \ G = \langle b, a_0, a_1, \dots, a_i, \dots \rangle, \text{ де } b^{p^n} = a_0, [a_i, a_j] = 1, [b, a_i] = a_{i-1} \ (i \neq 0), a_0^p = 1;$$

$$(\alpha_3) \ G = (A_1 \times \dots \times A_v) \rtimes \langle b \rangle, \text{ де } A_i \cong \mathbb{C}_{p^\infty}, b^{q^n} = 1 \ (p \text{ і } q - \text{різні прості числа}); \text{ якщо } a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots - \text{твірні елементи підгрупи } A_i, \text{ то}$$

$$a_{ij}^p = a_{i,j-1}, a_{i0}^p = 1$$

та

$$b^{-1}a_{ij}b = a_{i+1,j} \quad \text{для } i \neq j,$$

$$b^{-1}a_{vj}b = a_{1j}^{c_1} \cdots a_{vj}^{c_v},$$

де  $c_1, \dots, c_v$  – цілі  $p$ -адичні числа, які є коефіцієнтами незвідного многочлена  $x^v - c_1x^{v-1} - \dots - c_{v-1}x - c_v$ , що ділить многочлен  $\frac{x^q-1}{x-1}$  над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел.

Цією проблематикою займались також Б. Бруно і Р. Філіпс [45]. В. В. Беляєв [9] і незалежно Б. Бруно [46], [48] досліджували мінімальні не майже абелеві групи. Вони встановили таке

**Твердження 1.4.** *Якщо  $G$  – локально ступінчата періодична мінімальна не не  $AF$ -група, то  $G$  – нерозкладна метабелева група або  $G$  – група Чаріна.*

Нагадаємо одну конструкцію, яка називається *групою Чаріна*. Нехай  $p$  і  $q$  – різні прості числа,  $\mathbb{F}_q$  – скінченне поле із  $q$  елементів. Покладемо

$$F_i = \mathbb{F}_q(\varepsilon_i)$$

та

$$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i,$$

де  $\varepsilon_i$  – примітивний корінь степеня  $p^i$  із одиниці 1 ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Якщо  $A$  – адитивна група поля  $F$ , а  $B$  – мультиплікативна підгрупа, яка складається із всіх коренів степенів  $p^i$  із одиниці 1, де  $i = 0, 1, 2, \dots$ , то правило

$$b^{-1}ab = b^{p^m} \cdot a,$$

де  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , а  $b^{p^m} \cdot a$  – добуток елементів  $b^{p^m}$  та  $a$  в полі  $F$ , визначає дію групи  $B$  на групі  $A$ . Група

$$G = A \rtimes B$$

називається *групою Чаріна* (див. [9]). Для  $m = 0$  така група побудована в роботі В.С. Чаріна [19].

Нерозкладні метабелеві групи вивчалися в роботі О.Д. Артемовича [1].

Пізніше Б. Бруно (див. [46] і [49]) досліджувала групи, всі власні підгрупи яких є майже нільпотентними. Х. Отал, Х. Пена та Б. Хартлі [83], [64], [84] займалися мінімальними не  $CC$ -групами; вони встановили, що такі групи є досконалими.

В 1995 році Б. Бруно і Р. Філліпс опублікували працю [51], в якій встановили, що недосконала мінімальна не майже абелева (відповідно не майже нільпотентна) група є періодичною, і отримали таке

**Твердження 1.5** ([51], наслідок 2.7). *Нехай  $G$  – недосконала група, яка не є локально нільпотентною. Тоді  $G$  – мінімальна не майже нільпотентна група в тому і тільки тому випадку, коли  $G = V \rtimes H$  – напівпрямий добуток квазіциклічної  $p$ -групи  $H$  і спеціальної  $q$ -групи, де  $H$  діє тривіально на  $V'$  та  $V/V'$  – мінімальна нормальна підгрупа в  $G/V'$  (тут  $p$  і  $q$  – різні прості числа).*

Зазначимо також лему 2.3 із роботи [51], яка має самостійне значення, у вигляді такого

**Твердження 1.6.** *Нехай  $G$  – періодична абелева група, а  $M$  – ненульовий  $\mathbb{Z}G$ -модуль, який є групою без скруту. Тоді для будь-якої скінченної множини простих чисел  $\pi$  знайдеться такий  $\mathbb{Z}G$ -підмодуль  $N$  із  $M$ , що фактор-група  $M/N$  – періодична група, яка містить елемент порядку  $p$  для кожного  $p \in \pi$ .*

М. Ксу [99] досліджував групи, всі власні підгрупи яких є

групами Бера, і групи, всі власні підгрупи яких розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних [100]. Група, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної (відповідно абелевої) групи, прийнято скорочено називати  $FN$ -групою (відповідно  $FA$ -групою). Зрозуміло, що група  $G$  –  $FN$ -група тоді і тільки тоді, коли  $\gamma_k(G)$  скінченний для деякого  $k \in \mathbb{N}$ . Із результатів М. Ксу отримуємо таке

**Твердження 1.7.** *Нехай  $G$  – нескінченна група, яка не є скінченно породженою. Тоді – мінімальна не  $FN$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $G$  – група одного із таких типів:*

- ( $\alpha$ )  $G$  – недосконала мінімальна не  $FA$ -група (див. твердження 1.3);
- ( $\beta$ )  $G$  – недосконала мінімальна ненільпотентна група з субнормальними власними підгрупами;
- ( $\gamma$ )  $G$  – досконала локально нільпотентна мінімальна ненільпотентна група.

## 1.2. Низка необхідних результатів

Для зручності читача наведемо означення і результати, які неодноразово будуть необхідними надалі.

**Твердження 1.8** ([81], твердження 2.2). *Періодична  $AC$ -група  $G$  має таку абелеву характеристичну підгрупу  $A$ , що факторгрупа  $G/A$  черніковська.*

**Твердження 1.9** ([63], лема 4.7). *Нехай  $G$  – група, яка містить таку нільпотентну нормальну підгрупу  $A$ , що  $G/A$  черніковська. Припустимо, що  $G$  породжується родиною нільпотентних нормальних підгруп обмеженого класу. Тоді:*

- (i)  $G$  нільпотентна;
- (ii) якщо  $A$  абелева і  $G$  періодична, то  $G$  містить характеристичну абелеву підгрупу скінченного індексу.

**Твердження 1.10** ([90], стор. 156). *Локально надрозв’язна група задовольняє умову  $\text{Min} - n$  тоді і тільки тоді, коли вона гіперциклічна черніковська група. Тобто для локально надрозв’язної групи умови  $\text{Min}$  та  $\text{Min} - n$  співпадають.*

**Твердження 1.11** ([91], теорема 12.1.5). *Якщо  $M$  – максимальна підгрупа локально нільпотентної групи  $G$ , то  $M$  нормальна в  $G$ . Еквівалентно  $G' \leq \text{Frat}G$ .*

**Твердження 1.12** ([29], твердження і означення 19.24). *Кільце  $R$  називається регулярним (в сенсі фон Неймана), якщо виконуються такі рівносильні умови:*

- (a) кожен циклічний правий  $R$ -модуль плоский;
- (b) кожен правий  $R$ -модуль плоский;
- (c) якщо  $x \in R$ , то знайдеться такий елемент  $a \in R$ , що  $xa x = x$  (тоді  $xa$  – ідемпотент, який породжує  $xR$ );

- (d) кожен головний правий ідеал породжується ідемпотентом;
- (e) кожен скінченно породжений правий ідеал породжується ідемпотентом;
- (i') ліві аналоги властивості (i), де  $i = a, b, c, d, e$ .

**Твердження 1.13** ([85], частина 1, § 3, теорема 1.5). *Нехай  $K$  – поле,  $G$  – група. Групове кільце  $K[G]$  регулярне (в сенсі фон Неймана) тоді і тільки тоді, коли  $G$  – локальна скінченна група, яка не містить жодного елемента порядку  $p$ , якщо характеристика  $\text{char}(K) = p$ .*

**Твердження 1.14** ([29], наслідок 19.53). *Комутативне кільце  $R$  регулярне (в сенсі фон Неймана) тоді і тільки тоді, коли воно є  $V$ -кільцем.*

Ненульовий модуль, який має тільки два підмодулі, називається *простим*. Характеризацію правих  $V$ -кілець дає таке

**Твердження 1.15** ([28], теорема 7.32A). *Кільце  $R$  називається правим  $V$ -кільцем, якщо виконуються такі еквівалентні умови:*

- (a) кожен простий правий  $R$ -модуль ін'єктивний;
- (b) кожен правий ідеал є перетином максимальних правих ідеалів;

(с) радикал Джекобсона  $\text{rad}M = (0)$  нульовий для кожного правого  $R$ -модуля  $M$ .

**Твердження 1.16** ([28], твердження 3.56). *Об'єкт в категорії правих  $R$ -модулів ін'єктивний тоді і тільки тоді, коли кожен мономорфізм  $E \rightarrow F$  розщеплюється в категорії правих  $R$ -модулів.*

**Твердження 1.17** ([9], лема 1). *Нехай  $G = A \rtimes B$ , де  $B$  – квазіциклічна  $q$ -група, а  $A$  – нескінченна елементарна абелева  $p$ -група, причому  $A$  – мінімальна нормальна підгрупа в  $G$ . Тоді  $G$  – група Чаріна.*

Абелева (адитивна) група  $D$  така, що рівняння

$$nx = a$$

має розв'язок в  $D$  для будь-яких  $a \in D$  та  $n \in \mathbb{N}$ , називається *подільною*. Абелева група називається *редукованою*, якщо вона не має ненульових подільних підгруп.

Підгрупа  $B$  групи  $A$  називається  *$p$ -базовою*, якщо виконуються такі три умови:

- 1)  $B$  – пряма сума циклічних  $p$ -груп і нескінченних циклічних груп;
- 2)  $B$  –  $p$ -сервантна підгрупа в  $A$ ;
- 3) фактор-група  $A/B$  –  $p$ -подільна група.

**Твердження 1.18** ([30], теорема 21.3). *Кожна абелева група  $A$  – пряма сума подільної групи  $D$  і редукованої групи  $C$ , тобто*

$$A = D \oplus C.$$

*Підгрупа  $D$  групи  $A$  визначається однозначно, а підгрупа  $C$  – однозначно з точністю до ізоморфізму.*

**Твердження 1.19** ([30], твердження 27.1). *Припустимо, що підгрупа  $B$  групи  $A$  – пряма сума циклічних груп одного і того ж порядку  $p^k$ . Тоді еквівалентні такі умови:*

- (a)  $B$  – сервантна підгрупа в  $A$ ;
- (b)  $B \cap p^k A = (0)$ ;
- (c)  $B$  – прямий доданок групи  $A$ .

**Твердження 1.20** ([1], лема 2). (a) *Скінченна група нерозкладається тоді і тільки тоді, коли вона циклічна  $p$ -група.*

(b) *Нескінченна нерозкладається група не містить підгруп скінченного індексу.*

**Твердження 1.21** ([89], теорема 4.12). *Якщо  $G$  – група із центром  $Z(G)$  скінченного індексу  $n$ , то комутант  $G'$  скінченний і  $(G')^n = \langle 1 \rangle$ .*

**Твердження 1.22** ([27], теорема 2.2). *Кожна гіперцентральна квазіповна (а значить, повна) періодична група є абелевою.*

**Твердження 1.23** ([89], теорема 3.29). *Нехай  $A$  – періодична група автоморфізмів черніковської групи  $G$ . Тоді  $A$  – черніковська група.*

**Твердження 1.24** ([27], наслідок 1.7). *Кожна квазіциклічна підгрупа нільпотентної  $p$ -групи міститься в її центрі.*

**Твердження 1.25** ([37], лема 1.1). *Якщо  $G = F \rtimes H$  – група Фробеніуса з ядром  $F$  і доповненням  $H$ , то  $F = [F, h]$  для кожного неединичного елемента  $h \in H$ .*

Нагадаємо, що група  $G$  називається  $HM^*$ -групою, якщо її комутант  $G'$  – гіперцентральна група, а фактор-група  $G/G'$  – скінченний прямий добуток квазіциклічних  $p$ -груп.

**Твердження 1.26** ([81], теорема 1). *Нехай  $s \geq 1$  – ціле число. Тоді локально ступінчата група  $G$  – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи класу  $s$  в тому і тільки тому випадку, коли кожна власна підгрупа із  $G$  є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи класу  $s$ .*

**Твердження 1.27** ([81], теорема 2). *Періодична локально ступінчата група  $G$  – розширення абелевої групи за допомогою черніковської групи тоді і тільки тоді, коли кожна власна*

підгрупа із  $G$  є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи.

**Твердження 1.28** ([78], теорема А). *Нехай  $G$  – локально ступінчата група, в якій всі власні підгрупи є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп. Тоді або  $G$  – розширення нільпотентної групи за допомогою черніковської групи, або  $G$  – досконала зліченна локально скінченна  $p$ -група, в якій всі власні підгрупи є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп.*

**Твердження 1.29** ([42], теорема 1.3). *Нехай  $G$  – локально нільпотентна  $p$ -група, в якій кожна власна підгрупа є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи. Тоді  $G$  – розширення нільпотентної групи за допомогою черніковської групи.*

### 1.3. Основний зміст дисертації

В цьому підрозділі наведемо низку основних результатів дисертаційної роботи.

В розділі 2 вивчаються групи з умовами мінімальності для певних систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними.  $A\check{C}$ -групою (відповідно  $\check{C}A$ -групою чи  $N\check{C}$ -групою) називається група, яка є розширенням абелевої (відповідно черніковської чи нільпотентної) групи за допомогою черніковської (відповідно абелевої чи черніковської) групи.

**Наслідок 2.1.** Нехай  $G$  – локально ступінчата група. Тоді вірні твердження:

- (1) якщо  $G$  не є  $\check{S}A$ -групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є  $\check{S}A$ -групами;
- (2) якщо  $G$  не є  $A\check{S}$ -групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є  $A\check{S}$ -групами.

Теорему 2 із [81] узагальнює таке

**Твердження 2.2.** Нехай  $G$  – недосконала локально ступінчата група. Тоді:

- (1) якщо група  $G$  періодична і всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є  $A\check{S}$ -групами, то  $G$  –  $A\check{S}$ -група;
- (2) якщо всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є  $N\check{S}$ -групами, то  $G$  –  $N\check{S}$ -група.

Нагадаємо, що група, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної (відповідно абелевої) групи, прийнято скорочено називати  $FN$ -групою (відповідно  $FA$ -групою). Одним із центральних результатів дисертації є така характеристика груп з умовою  $Min - \overline{FN}$ .

**Теорема 2.1.** Нехай  $G$  – група, яка не має неединичних досконалих секцій. Тоді група  $G$  задовольняє умову мінімальності для не  $FN$ -підгруп  $Min - \overline{FN}$  в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:

- (1)  $G$  –  $FN$ -група;
- (2)  $G$  – майже нільпотентна група;

(3)  $G$  має таку нормальну підгрупу  $A$  скінченного індексу, що

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \quad (n \geq 1),$$

де  $A_i$  – група з нільпотентним комутантом  $A'_i = A' \leq A_0$  і подільною черніковською  $p_i$ -групою  $A_i/A'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $A_0$  – нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою  $A_0/A'$  (зокрема,  $A_0/A'$  одинична) і, крім того,  $p_1, \dots, p_n$  – попарно різні прості числа.

Одним із головних результатів роботи є така

**Теорема 2.2.** Нехай  $G$  – недосконала група. Тоді  $G$  – мінімальна не  $\check{S}N$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $G$  – мінімальна ненільпотентна група із субнормальними власними підгрупами.

Встановлена також

**Теорема 2.3.** Нехай  $G$  – локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:

- (i) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, є субнормальною в  $G$ ;
- (ii) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для негіперцентральних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, є субнормальною в  $G$ .

Грунтуючись на результатах (І. Капланського, Дж. фон Неймана та інших) із теорії кілець і модулів, отримується такі лема та твердження.

**Лема 3.2.** Нехай  $G = A \rtimes B$  – напівпрямий добуток нормальної абелевої підгрупи  $A$  скінченної експоненти  $p$  і квазіциклічної  $q$ -підгрупи  $B$ , де  $p$  і  $q$  – різні прості числа. Якщо група  $G$  задовольняє умову  $\text{Max} - \overline{AF}$  і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то вона майже абелева або

$$G' = A = A_1 \times \cdots \times A_m$$

– скінченний прямий добуток  $G$ -інваріантних підгруп  $A_i$ , де  $A_i \rtimes B$  – група Чаріна ( $n \geq 1; i = 1, \dots, n$ ).

**Твердження 3.1.** Нехай  $G$  – група без неодиначних досконалих секцій. Якщо  $G$  задовольняє  $\text{Max} - \overline{AF}$  і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то  $G$  – майже абелева група або належить до одного з типів:

- (1)  $G$  – мінімальна не майже абелева група;
- (2)  $G = G' \rtimes P$ , де  $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ ,

$$G' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

–  $p'$ -підгрупа, яка є прямим добутком своїх силовських  $p_i$ -підгруп  $Q_i$  експоненти  $p_i^{n_i}$ , причому

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна ( $n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i$ );

- (3)  $G = A \rtimes P$ , де  $A$  – мінімальна не майже абелева група,  $G' = A \rtimes P'$  та  $G/P'$  – група типу (2);

Групу, яка містить абелеву підгрупу скінченного індексу, прийнято називати майже абелевою (або  $AF$ -групою). На осно-

ві двох попередніх результатів отримано таку основну (в розділі 3) теорему.

**Теорема 3.1.** *Нехай  $G$  – періодична розв’язна група. Тоді  $G$  задовольняє умову  $Max - \overline{AF}$  в тому і тільки в тому випадку, коли вона майже абелева група або  $G = HF$  – локально майже абелева група, де  $H'F$  – майже абелева підгрупа,  $|G : H| < \infty$  і  $H$  належить до одного із типів:*

- (i)  $H$  – мінімальна не майже абелева група;
- (ii)  $H = H' \rtimes P$ , де  $P$  – квазіциклічна  $p$ -група,

$$H' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

–  $p'$ -група, яка є прямим добутком своїх силовських  $p_i$ -підгруп  $Q_i$  експоненти  $p_i^{n_i}$ , причому

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна ( $n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i$ );

- (iii)  $H = A \rtimes P$ , де  $P$  – мінімальна не майже абелева група,  $H' = A \rtimes P'$  та  $H/P'$  – група типу (ii).

Якщо  $(R, +, \cdot)$  – асоціативне кільце, то операція ” $\circ$ ”, визначена за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для будь-яких елементів  $a, b \in R$ , називається приєднаним множенням. Тоді  $(R, \circ)$  – напівгрупа з нейтральним елементом  $0 \in R$ . Якщо  $(R, \circ)$  – група (тоді вона позначається символом  $R^\circ$ ),

то кільце  $R$  називається радикальним. Поняття кругової операції в 40-их роках минулого століття ввів С. Перліс з метою характеристики радикала Джекобсона в асоціативному кільці.

В четвертому розділі розглядаються брейси  $A$ , введені В. Румпом [92]. Нагадаємо, що непорожня множина  $A$ , на якій визначено дві алгебраїчні операції  $+$  та  $\cdot$ , називається брейсом ( $=\text{brace}$ ), якщо виконуються такі умови:

- (i)  $A^+ = (A, +)$  – абелева група (з нулем 0);
- (ii)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  для будь-яких елементів  $a, b, c \in A$ ;
- (iii)  $A$  – група стосовно операції приєднаного множення  $\circ$ , визначеної за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для елементів  $a, b \in A$ .

Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення  $\cdot$ ) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. Я. П. Сисак [18] у 1982 році побудував групу, асоційовану з радикальним кільцем. Пізніше О.Д. Артемович [37] розширив цю конструкцію на випадок лівого модуля над довільним асоціативним кільцем  $R$ . Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи  $G(R)$  для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця  $R$ . Нижче побудовано групу  $H(L, T)$ , асоційовану з підмодулем  $L$  модуля, який розглядається над довільним брейсом  $A$ , та підгрупою  $T$  приєднаної групи  $A^\circ$ . В наступній лемі для брейса  $A$  побудовано асоційовану з ним групу  $H(A)$ .

**Лема 4.1.** Нехай  $M$  – модуль над брейсом  $A$ . Якщо  $L$  – підмодуль із  $M$ , а  $T$  – підгрупа із  $A^\circ$ , то

$$H(L, T) = E \rtimes T$$

– група стосовно операції, визначеної за правилом (4.1.1), причому  $E = \{(l, 0) \mid l \in L\}$  ізоморфна адитивній групі  $(L, +)$ , а  $F = \{(e, t) \mid t \in T\}$  ізоморфна групі  $T$ .

Досліджено зв'язки між асоційованими групами брейса, його підбрейса та фактор-брейса (див. леми 4.2, 4.4 та 4.5).

Нагадаємо, що група  $H = E \rtimes F$  називається групою Фробеніуса із ядром  $E$  і доповненням  $F$ , якщо виконуються дві такі умови:

- $F \cap F^g = \langle 1 \rangle$  – одинична група для всіх  $g \in H \setminus F$ ;
- 

$$E \setminus \langle 1 \rangle = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h.$$

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову, за якої група  $H(L, T)$  є групою Фробеніуса.

**Теорема 4.1.** Нехай  $M$  – модуль над брейсом  $A$ ,  $L$  – ненульовий підмодуль із  $M$ ,  $T$  – ненульова підгрупа приєднаної групи  $A^\circ$ . Тоді

$$H = H(L, T) = E \rtimes F$$

– група Фробеніуса із ядром  $E$  і доповненням  $F$  тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

- (i)  $L = Lh$  для будь-якого ненульового елемента  $h \in T$ ;

(ii)  $\text{ann}_T(l) = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$  для кожного ненульового елемента  $l \in L$

Побудовано приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

Я.П. Сисак [18] встановив, що радикальне кільце  $R$  нільпотентне (відповідно гіперцентральне) тоді і тільки тоді, коли його асоційована група  $G(R) \cong R^+ \rtimes R^\circ$  нільпотентна (відповідно гіперцентральна). Ю.Б. Ішук досліджував взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця  $R$  та його асоційованої групи  $G(R)$ . В четвертому підрозділі введено в розгляд поняття нільпотентного зліва (відповідно справа) брейса  $A$  і досліджено умови періодичності його адитивної  $A^+$  та приєднаної  $A^\circ$  груп. Нагадаємо, що  $A^{n+1} = A(A^n)$  та  $A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$  для будь-якого натурального числа  $n$ . Брейс  $A$  називатимемо нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), якщо  $A^{(n)} = \{0\}$  (відповідно  $A^n = \{0\}$ ) для певного  $n \in \mathbb{N}$ .

Деякі зв'язки властивостей адитивної  $A^+$  і приєднаної  $A^\circ$  груп нільпотентного брейса  $A$  встановлює таке

**Твердження 4.1.** *Нехай  $A$  – брейс, який є нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва),  $p$  – просте число. Тоді мають місце такі властивості:*

- (i)  $A^+$  –  $p$ -група тоді і тільки тоді, коли  $A^\circ$  –  $p$ -група;
- (ii)  $A^+$  – група без скруту тоді і тільки тоді, коли  $A^\circ$  – група без скруту.

Вивчено також взаємозв'язок між нільпотентністю брей-

са  $A$  та його асоційованої групи  $H(A)$ .

**Теорема 4.2.**

- (1) Якщо  $A$  – ненульовий нільпотентний зліва брейс, то справджуються такі властивості:
  - (i)  $H(A)$  – нільпотентна група;
  - (ii)  $\text{ann } A \neq \{0\}$ .
- (2) Якщо  $A$  – ненульовий нільпотентний справа брейс, то  $H(A)$  – розв’язна група.

## Висновки до розділу 1

Цей розділ допоміжний. У ньому викладено основні поняття і сформульовано результати, що використовуються в дисертації. Також коротко наведено основні результати даної дисертаційної роботи.

## РОЗДІЛ 2

### ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП, ЯКІ НЕ Є УЗАГАЛЬНЕНО НІЛЬПОТЕНТНИМИ

С.М. Черніков та його учні (див. монографію [27]) в багатьох роботах вивчали групи, "великі" системи підгруп яких мали деяку властивість  $\chi$ . Природно до цього напрямку віднести роботи з умовами мінімальності для підгруп, які не мають властивості  $\chi$ . В цьому контексті, С.М. Черніков вивчав групи з умовою мінімальності для неінваріантних підгруп [25] та групи з умовою мінімальності для неабелевих підгруп [26]. Р. Філіпс та Дж. Вілсон [86] досліджували поведінку груп, для яких множина підгруп, що не є локально нільпотентними, задовольняє умову мінімальності. Х. Отал та М. Пена [82] вивчали локально ступінчаті групи з умовою  $Min - \chi$ , де властивість  $\chi$  означає відповідно "нормальність", "нормальність і нільпотентність", "нормальність або локальну нільпотентність", "нормальність або нільпотентність класу  $\leq c$ ", " $c$ -гамільтоновість" та "нільпотентність класу  $\leq c$ ".

Подібно для різних властивостей  $\chi$  групи з умовою  $Min - \chi$  досліджували Б. Бруно і Р. Філіпс [45] та М. Діксон, М. Еванс і Х. Сміт [56].

Локально ступінчаті групи з умовою мінімальності для ненадрозв'язних підгруп вивчала М. де Фалько [59], а групи з різними умовами мінімальності для ненільпотентних підгруп

– М. Діксон, М. Еванс та Х. Сміт [55]. О.Д. Артемович [39] досліджував групи з умовою мінімальності для не майже нільпотентних підгруп. Різними авторами вивчалися також групи, що є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських, та групи, що є розширеннями нільпотентних груп за допомогою скінченних груп (див., наприклад, [84], [98]). Досліджувались також групи з іншими умовами мінімальності (див., наприклад, М.М. Семко [77], М.С. Черніков [21], [22] та інші).

## 2.1. Групи, насичені $A\check{C}$ -підгрупами або $\check{C}A$ -підгрупами

Нагадаємо, що  $A\check{C}$ -групою (відповідно  $\check{C}A$ -групою) називається група, яка є розширенням абелевої (відповідно черніковської) групи за допомогою черніковської (відповідно абелевої) групи. Зрозуміло, що кожна абелева і кожна черніковська група є одночасно  $A\check{C}$ -групою і  $\check{C}A$ -групою. Група  $G$  із прикладу 1.1 є  $\check{C}A$ -групою, але не є  $A\check{C}$ -групою. Як встановили Х. Отал і Х. Пена [81], мінімальних не  $\check{C}A$ -груп в класі локально ступінчатих груп не існує. Подібним чином із теореми 2 [81] і теореми С із [78] випливає, що в класі локально ступінчатих груп не існує також мінімальних не  $A\check{C}$ -груп. Аналогічний результат дістаємо для  $N\check{C}$ -груп із теореми 2 [78] і теореми 1.3 із [42], тобто локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої  $N\check{C}$ -групи, сама є такою. Нагадаємо, що  $N\check{C}$ -група – це група, яка є розширенням нільпотентної групи за допомогою

черніковської групи.

В цьому підрозділі нами досліджуються локально ступінчаті групи з умовою мінімальності для не  $A\check{C}$ -підгруп  $Min - \overline{A\check{C}}$  і умовою мінімальності для не  $\check{C}A$ -підгруп  $Min - \overline{\check{C}A}$ . Попередньо встановимо низку допоміжних результатів.

**Лема 2.1.** *Нехай  $G$  – група,  $H$  – її підгрупа, а  $\chi$  – теоретико-групова властивість, яка успадковується підгрупами і образами гомоморфізмів. Якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності  $Min - \bar{\chi}$  для не  $\chi$ -підгруп, то вірні такі твердження:*

- (1)  $H$  задовольняє умову  $Min - \bar{\chi}$ ;
- (2) якщо  $H$  – нормальна підгрупа в  $G$ , то фактор-група  $G/H$  задовольняє умову  $Min - \bar{\chi}$ ;
- (3) якщо  $H$  – нормальна підгрупа в  $G$  і  $H$  не є  $\chi$ -групою, то фактор-група  $G/H$  задовольняє умову мінімальності для підгруп  $Min$ .

*Доведення.* Нехай  $G$  – група з умовою  $Min - \bar{\chi}$ .

(1) Оскільки кожен строго спадний ланцюг не  $\chi$ -груп із  $H$  є одночасно строго спадним ланцюгом не  $\chi$ -підгруп в  $G$ , то він через скінченне число кроків обривається.

(2) Нехай  $H \triangleleft G$  та

$$G_1/H > G_2/H > \cdots > G_n/H > \cdots \quad (2.1.1)$$

– який-небудь строго спадний ланцюг не  $\chi$ -підгруп із фактор-групи  $G/H$ . Якщо  $G_i$  – повний прообраз фактор-групи  $G_i/H$  в

групі  $G$ , то

$$G_1 > G_2 > \cdots > G_n > \cdots$$

– строго спадний ланцюг не  $\chi$ -підгруп із  $G$ , а тому він обривається через скінченне число кроків. Як наслідок, ланцюг (2.1.1) через скінченне число кроків також стабілізується.

(3) Нехай  $H \triangleleft G$  і  $H$  не є  $\chi$ -групою. Від супротивного. Припустимо, що фактор-група  $G/H$  не задовольняє умову  $Min$ . Тоді існує нескінченний строго спадний ланцюг

$$\overline{G} = G/H = \overline{G}_0 > \overline{G}_1 > \cdots > \overline{G}_n > \cdots$$

підгруп  $\overline{G}_i$  в групі  $\overline{G}$  ( $i \in \mathbb{N}_0$ ). Якщо  $G_i$  – повний прообраз підгрупи  $\overline{G}_i$  в групі  $G$ , то ланцюг підгруп

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \cdots$$

є нескінченним і строго спадним, причому кожна його підгрупа не є  $\chi$ -групою, а це суперечить умові  $Min - \overline{\chi}$ . Отже, фактор-група  $G/H$  задовольняє умову  $Min$ .  $\square$

**Твердження 2.1.** *Нехай  $G$  – локально ступінчата група. Тоді вірні такі твердження:*

- (1) *група  $G$  задовольняє умову мінімальності для не  $\check{S}A$ -підгруп  $Min - \overline{\check{S}A}$  в тому і тільки в тому випадку, коли  $G$  –  $\check{S}A$ -група;*
- (2) *група  $G$  задовольняє умову мінімальності для не  $A\check{S}$ -підгруп  $Min - \overline{A\check{S}}$  в тому і тільки в тому випадку, коли  $G$  –  $A\check{S}$ -група.*

*Доведення.* ( $\Leftarrow$ ) Очевидно.

( $\Rightarrow$ ) Припустимо, що група  $G$  задовольняє умову  $Min - \overline{\check{S}A}$  (відповідно  $Min - \overline{A\check{S}}$ ). Одночасно припустимо, що група  $G$  не є  $\check{S}A$ -групою (відповідно не є  $A\check{S}$ -групою). Тоді  $G$  має скінченний строго спадний ланцюг

$$G = G_1 > G_2 > \dots > G_n$$

підгруп  $G_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), які не є  $\check{S}A$ -групами (відповідно не є  $A\check{S}$ -групами). Окрім того, всі власні підгрупи із  $G_n$  є  $\check{S}A$ -групами (відповідно  $A\check{S}$ -групами). Але з огляду на твердження 1.26 (відповідно твердження 1.27, твердження 1.28 і твердження 1.29) це неможливо. Отримана суперечність показує, що  $G$  –  $\check{S}A$ -група (відповідно  $A\check{S}$ -група).  $\square$

Із цього твердження безпосередньо маємо такий

**Наслідок 2.1.** *Нехай  $G$  – локально ступінчата група. Тоді вірні твердження:*

- (1) *якщо  $G$  не є  $\check{S}A$ -групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є  $\check{S}A$ -групами;*
- (2) *якщо  $G$  не є  $A\check{S}$ -групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є  $A\check{S}$ -групами.*

Теорему 2 із [81] узагальнює таке

**Твердження 2.2.** *Нехай  $G$  – недосконала локально ступінчата група. Тоді справджуються властивості:*

- (1) *якщо група  $G$  періодична і всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є  $A\check{S}$ -групами, то  $G$  –  $A\check{S}$ -група;*

(2) якщо всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є  $N\check{C}$ -групами, то  $G$  –  $N\check{C}$ -група.

*Доведення.* (1) Нехай  $G$  – недосконала періодична локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є  $A\check{C}$ -групами. Якщо фактор-група  $G/G'$  розкладна, то  $G = AB$  – добуток двох своїх власних нормальних підгруп  $A$  і  $B$ . Позаяк за твердженням 1.8 підгрупа  $A$  (відповідно  $B$ ) містить характеристичну абелеву підгрупу  $A_1$  (відповідно  $B_1$ ) із черніковською фактор-групою  $A/A_1$  (відповідно  $B/B_1$ ), то добуток  $A_1B_1$  – нормальна підгрупа в  $G$  і фактор-група  $G/A_1B_1$  є черніковською. Оскільки добуток  $A_1B_1$  – нільпотентна  $A\check{C}$ -група, то знову за твердженням 1.8 вона має таку характеристичну (а значить, нормальну в групі  $G$ ) підгрупу  $A_2$ , що  $G/A_2$  – черніковська група. Тому  $G$  –  $A\check{C}$ -група.

Тепер нехай фактор-група  $G/G'$  нерозкладна. Тоді за твердженням 1.20 фактор-група  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^n}$  – циклічна  $p$ -група або  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$  – квазіциклічна  $p$ -група для деякого простого числа  $p$ . Знову, застосовуючи твердження 1.8 до  $A\check{C}$ -підгрупи  $G'$ , дістаємо, що  $G$  –  $A\check{C}$ -група.

(2) Нехай  $G$  – локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є  $N\check{C}$ -групами. Якщо фактор-група  $G/G'$  нерозкладна, то за твердженням 1.20 вона черніковська.

Припустимо, що  $G/G'$  – розкладна група. Тоді  $G$  – добуток двох власних нормальних підгруп, кожна із яких є  $N\check{C}$ -групою. Як наслідок, група  $G$  має черніковський гомоморфний образ.

Таким чином, в обох випадках група  $G$  має таку нормальну підгрупу  $S$ , що  $G/S$  – черніковська група. Позаяк  $S$  має нормальну нільпотентну підгрупу  $S_1$  із черніковською фактор-групою  $S/S_1$  та за твердженням 1.9 нормальне замикання

$$S_1^G = \langle S_1^g \mid g \in G \rangle$$

– нільпотентна підгрупа в  $G$ , то  $G$  –  $NC$ -група. □

## ВИСНОВКИ.

Встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Подібним способом доведено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.2).

## 2.2. Групи із умовою мінімальності для підгруп, які не є $FN$ -групами

Як зазначалося раніше (див. твердження 1.7), мінімальні не  $FN$ -групи охарактеризував М. Ксу [100].

Нагадаємо також, що група  $G$  задовольняє умову мінімальності для не  $FN$ -підгруп  $Min - \overline{FN}$ , якщо для будь-якого строго спадного ланцюга

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n > \dots \quad (2.2.1)$$

підгруп  $G_n$  групи  $G$  знайдеться такий індекс  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ , що  $G_m$  –  $FN$ -група для всіх  $m \geq n_0$ .

**Лема 2.2.** *Кожна майже нільпотентна група задовольняє умову  $Min - \overline{FN}$ .*

*Доведення.* Нехай  $G$  – майже нільпотентна група, а  $H$  – її нормальна нільпотентна підгрупа скінченного індекса. Якщо  $G_n$  – яка-небудь підгрупа із строго спадного ланцюга (2.2.1), то  $G_n H / H$  – одинична група для певного  $n \in \mathbb{N}_0$ , а тому  $G_n$  –  $FN$ -група. Це показує, що група  $G$  задовольняє умову  $Min - \overline{FN}$ .  $\square$

**Лема 2.3.** *Нехай  $G$  – недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є  $FN$ -групами. Тоді або  $G$  –  $FN$ -група, або її комутант  $G'$  періодичний і фактор-група  $G/G'$  нерозкладна.*

*Доведення.* Якщо фактор-група  $G/G'$  розкладна, сама група  $G = AB$  – добуток двох своїх власних нормальних підгруп  $A$  і  $B$ . Так як  $\gamma_n(A)$  і  $\gamma_m(B)$  – скінченні нормальні підгрупи в  $G$  для деяких індексів  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , то фактор-група

$$\overline{G} = G/(\gamma_n(A) \cdot \gamma_m(B)) = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

– добуток двох нормальних нільпотентних підгруп  $\overline{A}$  і  $\overline{B}$ . Тому  $G$  –  $FN$ -група. З огляду на ці міркування надалі припустимо,

що  $G/G'$  – нерозкладна група, а сама  $G$  не є  $FN$ -групою. Ясно, що  $\gamma_s(G')$  – скінченна нормальна підгрупа в  $G$  для певного індексу  $s \in \mathbb{N}_0$ , а  $G/G'$  –  $p$ -група для деякого простого числа  $p$ .

Доведемо, що комутант  $G'$  періодичний. Від супротивного. Якщо група  $G'$  не є періодичною, то знайдеться така  $G$ -інваріантна підгрупа  $T \leq G'$ , що

$$\gamma_s(G') \leq T \text{ та } \overline{G'} = G'/T$$

– нільпотентна група без скруту. Тому надалі без обмеження загальності доведення будемо вважати, що комутант  $G'$  – абелева група без скруту. Тоді  $G'$  – правий  $\mathbb{Z}[G/G']$ -модуль, де дія індукується спряженням на  $G'$ , і за твердженням 1.6 знайдеться такий власний підмодуль  $N$  в  $G$ , що фактор-група  $G'/N$  –  $q$ -група для певного простого числа  $q$ , яке відмінне від  $p$ , а це веде до суперечності із зробленим припущенням. Таким чином, комутант  $G'$  періодичний.  $\square$

**Лема 2.4.** *Нехай  $G$  – недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є  $FN$ -групами. Тоді група  $G$  задовольняє умову  $Min - \overline{FN}$  в тому і тільки тому випадку, коли вірне одне із тверджень:*

- (1)  $G$  –  $FN$ -група;
- (2)  $G$  – майже нільпотентна група;
- (3)  $G$  – мінімальна не  $FN$ -група.

*Доведення.* ( $\Leftarrow$ ) Ця частина доведення є нескладною.

( $\Rightarrow$ ) Припустимо, що група  $G$  задовольняє умову леми і, окрім того,  $G$  не є  $FN$ -групою (а тому не є скінченно породженою). Тоді за лемою 2.3 комутант  $G'$  – періодична  $\pi$ -група для деякої множини простих чисел  $\pi$ , а фактор-група  $G/G'$  –  $p$ -група для певного простого числа  $p$ . Розглянемо два можливі випадки.

a) Припустимо, що група  $G$  має власну нормальну підгрупу  $M$  скінченного індексу. Тоді  $\gamma_k(M)$  – скінченна підгрупа в  $G$  для певного  $k \in \mathbb{N}_0$  і, як наслідок,

$$S = M \bigcap C_G(\gamma_k(M))$$

– підгрупа скінченного індексу в групі  $G$ . Оскільки

$$S/(S \bigcap \gamma_k(M)) \cong S\gamma_k(M)/\gamma_k(M) \leq M/\gamma_k(M)$$

і

$$S \cap \gamma_k(M) \leq Z(S),$$

то  $S$  – нільпотентна група. Отож,  $G$  –  $NF$ -група.

b) Тепер нехай група  $G$  не містить власних підгруп скінченного індексу, а значить, фактор-група

$$G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$$

– квазіциклічна  $p$ -група для певного простого числа  $p$ . Позаяк  $\gamma_s(G')$  – скінченна нормальна підгрупа в  $G$  для деякого індексу  $s \in \mathbb{N}_0$ , то маємо включення

$$\gamma_s(G') \leq Z(G),$$

а тому  $G'$  – нільпотентна підгрупа.

Якщо візьмемо скінченно породжену підгрупу  $F$  із  $G$ , то  $G'F$  – власна нормальна підгрупа в  $G$ , а тому  $\gamma_l(G'F)$  – скінченна нормальна підгрупа в  $G$  для деякого  $l \in \mathbb{N}_0$  і

$$\gamma_l(G'F) \leq Z(G).$$

Це означає, що підгрупа  $G'F$  нільпотентна. З цих міркувань також випливає, що  $G$  – локально скінченна  $p$ -група, всі власні нормальні підгрупи якої нільпотентні.

Припустимо, що група  $G$  містить підгрупу  $K$ , яка не є  $FN$ -групою. Тоді  $G = G'K$ . Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/G''(K \cap G') = \overline{G}' \rtimes \overline{K}.$$

Припустимо, що

$$\overline{G} = \overline{T}_0 > \overline{T}_1 > \dots > \overline{T}_n > \dots \quad (2.2.2)$$

– строго спадний ланцюг нормальних підгруп групи  $\overline{G}$ . Тоді

$$\overline{T}_n \leq \overline{G}'$$

для певного натурального числа  $n$ , а значить, ланцюг (2.2.2) обривається. Це означає, що  $\overline{G}$  задовольняє умову мінімальності для нормальних підгруп  $Min - n$ . За твердженням 1.10  $\overline{G}$  – черніковська група і тому (див. твердження 1.22) справджується рівність

$$G' = G''(K \cap G') = K \cap G' \leq K.$$

Таким чином,  $K = G$  та  $G$  – мінімальна не  $FN$ -група.

□

Тепер охарактеризуємо групи з умовою  $Min - \overline{FN}$ . Вірна така

**Теорема 2.1.** *Нехай  $G$  – група, яка не має неодиначних досконалих секцій. Тоді група  $G$  задовольняє умову мінімальності для не  $FN$ -підгруп  $Min - \overline{FN}$  в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:*

- (1)  $G$  –  $FN$ -група;
- (2)  $G$  – майже нільпотентна група;
- (3)  $G$  має таку нормальну підгрупу  $A$  скінченного індексу, що

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \quad (n \geq 1),$$

де  $A_i$  – група з нільпотентним комутантом  $A'_i = A' \leq A_0$  і подільною черніковською  $p_i$ -групою  $A_i/A'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $A_0$  – нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою  $A_0/A'$  (зокрема,  $A_0/A'$  одинична) і, крім того,  $p_1, \dots, p_n$  – попарно різні прості числа.

*Доведення.* ( $\Rightarrow$ ) Нехай  $G$  – група, яка не має неодиначних досконалих секцій і задовольняє умову мінімальності  $Min - \overline{FN}$ . Розглянемо два можливі випадки.

1) Якщо в групі  $G$  всі власні нормальні підгрупи є  $FN$ -групами, то за лемами 2.3 і 2.4 дістаємо, що  $G$  – група одного із типів (1), (2) або (3) із умови теореми.

2) Припустимо, що група  $G$  має власну нормальну підгрупу, яка не є  $FN$ -групою. Тоді група  $G$  має такий строго спадний

скінченний ланцюг

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > G_n,$$

що  $G_{i+1}$  – нормальна підгрупа в  $G_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), причому  $G_n$  не є  $FN$ -групою, але всі її нормальні підгрупи є  $FN$ -групами. Позначимо  $H = G_n$ . З огляду на лему 2.4, твердження 1.7 і 1.3  $H$  – група типу Хайнекена-Мохамеда або група одного із типів  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$ ,  $(\alpha_3)$  із твердження 1.3.

Якщо  $H$  – група типу  $(\alpha_3)$ , то  $H$  – черніковська група (як скінченна послідовність розширень черніковських груп за допомогою черніковських груп з огляду на лему 2.1), тобто  $H$  – це група типу (2) із умови теореми.

Тепер припустимо, що  $H$  – група типу Хайнекена-Мохамеда або група одного із типів  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$ . Тоді  $H'$  – нільпотентна нормальна підгрупа в  $G_{n-1}$  і фактор-група  $G_{n-1}/H'$  черніковська. Через  $A_{n-1}$  позначимо таку підгрупу скінченного індексу в  $G_{n-1}$ , що  $A_{n-1}/H'$  – подільна частина фактор-групи  $G_{n-1}/H'$ . Тоді  $A'_{n-1} = H'$ . Окрім того, оскільки

$$(A_{n-1}A_{n-1}^g)/H'$$

– черніковська група для кожного елемента  $g \in G_{n-2}$  і комутант  $H'$  не має власних  $G$ -інваріантних підгруп скінченного індексу, то  $A_{n-1}$  – нормальна підгрупа в  $G_{n-2}$ . Міркуючи подібним чином далі, через скінченне число кроків отримаємо, що  $G$  містить таку нормальну підгрупу  $A$  скінченного індексу, що  $A' = H'$  та  $A/A'$  – подільна черніковська група. Як наслідок,

$$A = A_1 \cdots A_n \quad (n \geq 1),$$

де  $A_i/A'$  – силовська  $p_i$ -група групи  $A/A'$  ( $i = 1, \dots, n$ ) та  $p_1, \dots, p_n$  – різні прості числа.

Якщо  $A_s$  –  $FN$ -група для певного індексу  $s$  (де  $1 \leq s \leq n$ ), то вона абелева. З огляду на зроблене вище припущення знайдеться такий індекс  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ), що  $A_m$  не є  $FN$ -групою. Як і вище, встановлюється, що  $A_m$  має субнормальну підгрупу  $U$ , всі власні підгрупи якої містяться в класі  $FN$ , але сама  $U$  не є  $FN$ -групою. Тоді справджуються рівності

$$U' = A'_m = H'.$$

Отже,  $A_m$  –  $HM^*$ -група із нільпотентним комутантом  $A'_m$ , а сама  $G$  – група типу (3) із умови теореми.

( $\Leftarrow$ ) Зрозуміло, що група типу (1) (відповідно (2)) задовольняє умову  $Min - \overline{FN}$ .

Нехай  $G$  – група типу (3) із умови теореми, а

$$G = K_0 > K_1 > \dots > K_s > \dots \quad (2.2.3)$$

– який-небудь строго спадний ланцюг її не  $FN$ -підгруп. Позаяк фактор-група  $G/A'$  черніковська, то знайдеться такий індекс  $l \in \mathbb{N}_0$ , що виконуються рівності

$$K_l A' = K_{l+1} A' = \dots$$

Тоді  $K_l$  –  $NF$ -група. Із огляду на лему 2.2 ланцюг (2.2.3) через скінченне число кроків обривається.  $\square$

## ВИСНОВКИ.

Охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій, які задовольняють умову мінімальності для підгруп, що

не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

### 2.3. Мінімальні не $\check{S}N$ -групи

Одним із підходів до вивчення груп із "малою" системою не- $\chi$  підгруп – це досліджувати мінімальні не- $\chi$  групи (тобто групи, які не є  $\chi$ -групами в той час, як всі їхні власні підгрупи є  $\chi$ -групами). В теорії скінченних груп пошуки таких груп почалися більше, ніж сто років тому (приклад цього дають групи Міллера-Морено, тобто скінченні мінімальні неабелеві групи).

В теорії нескінченних груп прикладами таких є мінімальні ненільпотентні групи (зокрема, мінімальні ненільпотентні групи із субнормальними власними підгрупами, які прийнято називати групами типу Хайнекена-Мохамеда) (див. [65]); мінімальні не майже абелеві групи (див. [9] та [46]); мінімальні не майже нільпотентні групи [49]; мінімальні не  $FC$ -групи (див. [70], [71]); мінімальні не  $CC$ -групи (див. [83], [64], [41] та [84]); мінімальні не  $FN$ -групи [100], мінімальні не парарозв'язні групи [61] та інші.

М. Ксу [100] досліджував мінімальні не  $FN$ -групи, а Х. Отал і Х. Пена [81] розширили розглядуваний клас заміною терміну "скінченна група" на термін "черніковська група"; вони розглядали локально ступінчаті групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп. В [78] встановлено, що локально ступінчата група,

всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп класу нільпотентності  $c$  (де  $c$  – фіксоване натуральне число), сама є такою. В цьому розділі охарактеризуємо групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних. Нагадаємо,  $\check{S}N$ -група – це група, яка є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.

**Лема 2.5.** *Нехай  $G$  – недосконала група. Якщо всі власні нормальні підгрупи групи  $G$  є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то вірне одне із таких тверджень:*

- (1)  $G$  – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи;
- (2)  $G/G'$  – квазіциклічна група і комутант  $G'$  – періодична підгрупа;
- (3) фактор-група  $G/G'$  – циклічна група.

*Доведення.* Якщо фактор-група  $G/G'$  розкладна, то

$$G = AB$$

– добуток двох власних нормальних підгруп  $A$  і  $B$ . Позаяк  $A$  і  $B$  – розширення черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то група  $G$  є такою ж.

Припустимо, що фактор-група  $G/G'$  нерозкладна. За твердженням 1.20 фактор-група  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^n}$  – циклічна  $p$ -група

(тоді  $G$  задовольняє умову (3)) або  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$  – квазіциклічна  $p$ -група для певного простого числа  $p$ .

Надалі припускаємо, що фактор-група  $G/G'$  – квазіциклічна  $p$ -група, а сама група  $G$  не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи. Доведемо, що  $G'$  – періодична група. Від супротивного. Припустимо, що комутант  $G'$  не є періодичним. Тоді, без обмеження загальності доведення, будемо вважати, що  $G'$  – абелева група без скруту.

Нехай  $q$  – просте число, яке відмінне від  $p$ . За твердженням 1.6 існує такий  $\mathbb{Z}[G/G']$ -підмодуль  $N$  в модулі  $G'$ , що

$$\overline{G}' = G'/N$$

–  $q$ -група. Якщо  $a$  – довільний елемент групи  $G$  і  $\overline{G} = G/N$ , то  $\overline{G}' \langle \overline{a} \rangle$  – абелева група, а це веде до суперечності. Таким чином,  $G'$  – періодична група.  $\square$

**Лема 2.6.** *Нехай  $G$  – недосконала група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп. Якщо фактор-група  $G/G'$  циклічна, то група  $G$  сама є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи або комутант  $G'$  періодичний.*

*Доведення.* Від супротивного. Припустимо, що група  $G$  не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи і комутант  $G'$  не є періодичним. Тоді, без обмеження загальності доведення, будемо вважати, що  $G'$  – абелева група без скруту.

За умовою,  $G = G'\langle a \rangle$  для певного елемента  $a \in G$ , причому

$$a^{p^n} \in G'$$

для деякого додатнього цілого числа  $n$  і простого числа  $p$ . Нехай  $q, r$  – різні прості числа, які є відмінними від  $p$ . За твердженням 1.6 знайдеться такий власний  $\mathbb{Z}[G/G']$ -підмодуль  $M$  із  $G'$ , що фактор-група

$$\overline{G'} = G'/M = \overline{A} \times \overline{B}$$

– груповий прямий добуток нетривіальної  $q$ -підгрупи  $\overline{A}$  і нетривіальної  $r$ -підгрупи  $\overline{B}$ . Якщо тепер  $A$  (відповідно  $B$ ) – повний прообраз  $\overline{A}$  (відповідно  $\overline{B}$ ) в групі  $G$ , то  $A\langle a \rangle$  і  $B\langle a \rangle$  – дві власні підгрупи групи  $G$ . Тому знайдуться такі натуральні числа  $k$  і  $s$ , що

$$\gamma_k(A\langle a \rangle) \leq A \text{ та } \gamma_s(B\langle a \rangle) \leq B,$$

причому  $\gamma_k(A\langle a \rangle)$  і  $\gamma_s(B\langle a \rangle)$  – черніковські групи. Але тоді  $G$  – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи всупереч зробленому припущенню.  $\square$

**Лема 2.7.** *Нехай  $G$  – група із квазіциклічною фактор-групою  $G/G'$ . Тоді  $G$  – мінімальна не  $\check{S}N$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $G$  – група типу Хайнекена-Мохамеда.*

*Доведення.* ( $\Leftarrow$ ) Очевидно.

( $\Rightarrow$ ) Нехай  $G$  – мінімальна не  $\check{S}N$ -група і

$$G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$$

для певного простого числа  $p$ . Зрозуміло, що група  $G$  не містить власних підгруп скінченного індексу. Нехай  $S$  – яка-небудь власна підгрупа із  $G$ . Розглянемо два можливі випадки.

(a) Припустимо, що  $G'S$  – власна підгрупа групи  $G$ . Тоді  $\gamma_m(G'S)$  – черніковська група для деякого натурального числа  $m$ . Позаяк фактор-група

$$G/C_G(\gamma_m(G'S))$$

скінченна, то маємо включення

$$\gamma_m(G'S) \leq Z(G),$$

а тому  $G'S$  – нільпотентна підгрупа.

(b) Тепер припустимо, що  $G'S = G$ . Тоді  $G^{(k-1)}S = G$  та  $G^{(k)}S \neq G$  для деякого натурального числа  $k \geq 2$ . Покладемо

$$\overline{G} = G/G''.$$

Тоді знайдеться таке натуральне число  $l$ , що  $l$ -тий гіперцентр

$$\gamma_l(\overline{S})$$

– черніковська підгрупа, яка міститься в абелевій підгрупі  $\overline{G}'$ . Тому  $\gamma_l(\overline{S})$  – нормальна підгрупа в  $\overline{G}$  і маємо включення

$$\gamma_l(\overline{S}) \leq Z(\overline{G}).$$

Це означає, що  $\overline{S}$  – нільпотентна група.

Підсумовуючи, із частин (a) і (b) випливає, що

$$\overline{G} = G/G''$$

– мінімальна ненільпотентна група. Позаяк  $\overline{G}$  (а тому і  $G/G^{(k)}$ ) – нерозкладна група, то частина (b) дає суперечність. Таким чином,  $G$  – мінімальна ненільпотентна група.  $\square$

**Лема 2.8.** *Якщо група  $G$  – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи, то  $G$  – черніковська група або комутант  $G'$  має нескінченний індекс в групі  $G$ .*

*Доведення.* За умовою, знайдеться таке натуральне число  $m$ , що  $\gamma_m(G)$  – черніковська підгрупа. Якщо фактор-група  $\overline{G} = G/\gamma_m(G)$  – скінченна група, то сама група  $G$  черніковська. Тому припустимо, що  $\overline{G}$  – нескінченна група. Тоді фактор-група  $\overline{G}/\overline{G}'$  також нескінченна, а це завершує доведення.  $\square$

М. Ньюмен і Дж. Вайголд [79] (див. також теорему 3.1 із [99]) описали будову мінімальних ненільпотентних груп з максимальною підгрупою (в таких групах не кожна власна підгрупа є субнормальною). За теоремою 3.1 із [99] кожна мінімальна ненільпотентна група із максимальною підгрупою є гіперцентральною групою, яка є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.

**Лема 2.9.** *Нехай  $G$  – група, причому фактор-група  $G/G'$  – циклічна  $p$ -група. Якщо всі власні підгрупи із  $G$  є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то  $G$  – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.*

*Доведення.* Нехай  $G$  – група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп,

причому фактор-група  $G/G'$  – циклічна  $p$ -група. Тоді

$$G = G'\langle a \rangle$$

для деякого такого елемента  $a \in G$ , причому маємо

$$a^{p^n} \in G'$$

для певного натурального числа  $n$ . Припустимо від супротивного, що  $G$  не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи. За лемою 2.6  $G$  – періодична група.

Доведемо, що комутант  $G'$  не має власних підгруп скінченного індексу. Припустимо від супротивного, що  $H$  – власна  $G$ -інваріантна підгрупа скінченного індексу в  $G'$ . Тоді  $H\langle a \rangle$  – власна підгрупа в  $G$ , а отже,  $\gamma_s(H\langle a \rangle)$  – черніковська підгрупа для деякого натурального числа  $s$ . Оскільки комутант  $G'$  не є черніковською групою, то за лемою 2.8 робимо висновок, що  $G''$  має нескінченний індекс в  $G'$ . Покладемо

$$\overline{G} = G/G''.$$

Якщо

$$\overline{H}\langle \overline{a} \rangle = (H\langle a \rangle G'')/G''$$

– черніковська група, то  $\overline{G}$  також черніковська. Оскільки  $\gamma_m(G')$

– черніковська підгрупа для деякого натурального числа  $m$ ,

$$\gamma_m(G') \leq G'' \text{ і } G'/\gamma_m(G')$$

– нільпотентна група, то за наслідком ([88], стор. 19) фактор-група

$$G'/\gamma_m(G')$$

(а тому і сама підгрупа  $G'$ ) є черніковською групою, а це суперечить зробленому припущенню. З огляду на лему 2.8 це означає, що комутант

$$(\overline{H}\langle\overline{a}\rangle)'$$

має нескінченний індекс в  $\overline{H}\langle\overline{a}\rangle$ . Тоді фактор-група

$$\overline{G}/(\overline{H}\langle\overline{a}\rangle)'$$

– скінченне розширення свого центру, що суперечить твердженню 1.21. Це означає, що  $G'$  не має власних підгруп скінченного індексу. Позаяк  $G'/\gamma_m(G')$  – подільна абелева група за твердженням 1.22, то

$$G'' = \gamma_m(G'),$$

і за твердженням 1.23 комутант

$$G' = C_{G'}(G'')$$

та, як наслідок,  $G'' \leq Z(G')$ . Отже,  $G'$  – подільна абелева група.

Нехай  $D$  – така квазіциклічна підгрупа із  $G'$ , що

$$D \not\subseteq Z(G)$$

і  $T = \langle D, a \rangle$ . Припустимо, що  $T \neq G$ . Тоді  $\gamma_k(T)$  – черніковська підгрупа для деякого натурального числа  $k$  і

$$\overline{T} = T/\gamma_k(T)$$

– нільпотентна група. Оскільки маємо включення

$$\overline{D} \subseteq Z(\overline{T})$$

за твердженням 1.24, то  $\overline{T}$  – абелева група і комутант

$$T' = \gamma_k(T).$$

Отже,  $T'\langle a \rangle$  – черніковська група і тому

$$D \leq C_T(T'\langle a \rangle).$$

Звідси дістаємо, що  $T$  – абелева група, що не так. Отримана суперечність показує, що  $T = G$  та

$$\langle D^x \mid x \in G \rangle = G'.$$

Оскільки  $C_G(D)$  має скінченний індекс в групі  $G$ , то комутант  $G'$  – черніковська підгрупа. Отримана суперечність закінчує доведення леми.  $\square$

Вірна така

**Теорема 2.2.** *Нехай  $G$  – недосконала група. Тоді  $G$  – мінімальна не  $\check{S}N$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $G$  – мінімальна нелінійнопотентна група із субнормальними власними підгрупами.*

*Доведення.*  $(\Leftarrow)$  Очевидно.

$(\Rightarrow)$  Впливає із лем 2.5, 2.7 та 2.9.  $\square$

## ВИСНОВКИ.

Встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою лінійнопотентних груп в той час,

як всі їх власні підгрупи є такими (тобто існують мінімальні не  $\check{S}N$ -групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не  $\check{S}N$ -групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2).

#### 2.4. Умова мінімальності для негіперцентральных підгруп і субнормальність

Групи з умовою мінімальності для неабелевих підгруп дослідив С.М. Черніков [26], а групи з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральных) підгруп вивчав О.Д. Артемович [3]. В низці робіт Х. Сміта, Л.А. Курдаченка, В. Миреса, К. Касоло, Б. Брукса (див., наприклад, [94], [52], [97], [68], [96] і [43]) та інших досліджувався вплив субнормальності на будову групи. Нами встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральных) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою, субнормальна в групі.

Нагадаємо, група  $G$ , кожна власна підгрупа  $H$  якої відмінна від свого нормалізатора

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\},$$

називається *групою з нормалізаторною умовою*.

**Лема 2.10.** *Нехай  $G$  – локально нільпотентна група. Якщо виконується одна із умов:*

- (i)  $G$  – група із умовою мінімальності для ненільпотентних підгруп  $\text{Min} = \overline{N}$ ;
- (ii)  $G$  – група із умовою мінімальності для негіперцентральних підгруп  $\text{Min} = \overline{ZA}$ ,

то група  $G$  задовольняє нормалізаторну умову.

*Доведення.* Нехай  $G$  – група із умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, а  $H$  – її власна підгрупа.

Припустимо, що  $H$  – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) або максимальна нільпотентна (відповідно гіперцентральна підгрупа) групи  $G$ . Тоді множина

$$\{S \mid H < S \leq G\}$$

містить мінімальний елемент. Нехай це буде підгрупа  $M_0$ . Тоді  $H$  – максимальна підгрупа в  $M_0$ , а тому за теоремою Бера-Маклейна (див. твердження 1.11) підгрупа  $H$  нормальна в  $M_0$ .

Оскільки кожна нільпотентна (відповідно гіперцентральна) підгрупа групи  $G$  задовольняє нормалізаторну умову, то група  $G$  задовольняє нормалізаторну умову.  $\square$

**Теорема 2.3.** *Нехай  $G$  – локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:*

- (i) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, є субнормальною в  $G$ ;

(ii) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для негіперцентральних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, є субнормальною в  $G$ .

*Доведення.* Припустимо, що група  $G$  задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп  $Min - \bar{N}$  (відповідно  $Min - \overline{ZA}$ ). Нехай  $H$  – підгрупа в  $G$ , яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою.

Якщо комутант  $H'$  не є нормальною підгрупою в групі  $G$ , то його нормалізатор  $N_G(H')$  є власною підгрупою в своєму нормалізаторі  $N_G(N_G(H'))$ . Оскільки кожна періодична радикальна абелева субінваріантна підгрупа є субнормальною, то підгрупа  $H/H'$  субнормальна в  $N_G(H')/H'$ .

Таким чином, підгрупа  $H$  – субнормальна підгрупа в  $M_0$ , де  $M_0$  – підгрупа, про яку йде мова в лемі 2.10. Тому факторгрупа  $M_0/H'$  має скінченний ряд, фактори якого задовольняють умову мінімальності для підгруп  $Min$ . Як наслідок,  $M_0/H'$  – черніковська група.

Нехай  $t \in N_G(M_0) \setminus M_0$ . Тоді  $(H')^t$  – нормальна підгрупа в  $M_0$ , а значить,

$$M_0/(H' \cap (H')^t)$$

– черніковська група. Звідси дістаємо, що

$$H' = H' \cap (H')^t \subseteq (H')^t.$$

Зрозуміло, що  $H' = (H')^t$ , а це суперечить вибору елемента  $t$ . Таким чином, нами встановлено, що  $H'$  – нормальна підгрупа

в групі  $G$ . Позаяк підгрупа  $H/H'$  є субінваріантною в факторгрупі  $G/H'$ , то, з тих самих міркувань, що і вище,  $H/H'$  – субнормальна підгрупа в  $G/H'$ . Отже,  $H$  – субнормальна підгрупа в  $G$ .  $\square$

**Наслідок 2.2.** *Нехай  $G$  – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група, яка задовольняє умову  $\text{Min} - \overline{N}$  (відповідно  $\text{Min} - \overline{ZA}$ ). Якщо всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є нільпотентними (відповідно гіперцентральними), то  $G$  – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група.*

*Доведення.* Нехай група  $G$  задовольняє умову  $\text{Min} - \overline{N}$  (відповідно  $\text{Min} - \overline{ZA}$ ), а  $H$  – її власна підгрупа. Припустимо, що  $H$  – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група. За теоремою 2.3 отримаємо, що  $H$  – субнормальна підгрупа в групі  $G$ , а тому її нормальне замикання  $H^G$  – власна нормальна підгрупа в  $G$ . Окрім того,  $H^G$  – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) підгрупа в  $G$ , а це веде до суперечності. Отже,  $H$  – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група.  $\square$

## ВИСНОВКИ.

Доведено, що в групі  $G$ , яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в  $G$  (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група  $G$ , яка задовольняє умову  $Min - \overline{N}$  (відповідно  $Min - \overline{ZA}$ ) з нільпотентними (відповідно гіперцентральними) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентальною) групою (наслідок 2.2).

## Висновки до розділу 2

В цьому розділі досліджуються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є узагальнено нільпотентними.

В підрозділі 2.1 встановлено, що кожна локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Аналогічним чином доведено, що кожна локально ступінчаста група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.1). Із отриманих результатів випливає, що не існує груп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими.

В підрозділі 2.2 охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

В підрозділі 2.3 встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальні не  $\check{N}$ -групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не  $\check{N}$ -групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2). Зазначимо, що з результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що не існує груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто не існує мінімальних не  $N\check{C}$ -груп).

В підрозділі 2.4 доведено, що в групі  $G$ , яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральної) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в  $G$  (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральної) локально нільпотентна група  $G$ , яка задовольняє умову  $Min - \overline{N}$  (відповідно  $Min - \overline{ZA}$ ) з нільпотентними (відповідно гіперцентральної) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральної) групою (наслідок 2.2).

### РОЗДІЛ 3

## ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗНІ ГРУПИ З УМОВОЮ МАКСИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕ МАЙЖЕ АБЕЛЕВИХ ПІДГРУП

Будемо говорити, що група  $G$  задовольняє умову максимальності для підгруп, які не є майже абелевими (скорочено умову  $Max - \overline{AF}$ ), якщо кожен строго зростаючий ланцюг

$$G_1 < G_2 < \dots < G_n < \dots$$

її підгруп  $G_i$ , які не є майже абелевими, через скінченне число кроків обривається. Кожна мінімальна не майже абелева група (тобто не майже абелева група, всі власні підгрупи якої майже абелеві) задовольняє умову  $Max - \overline{AF}$ .

Мінімальні не майже абелеві групи охарактеризовано В. В. Беляєвим [9] та, незалежно, Б. Бруно і Р. Філіпсом [46], [48], [51].

Зокрема, із [9] випливає, що мінімальна не майже абелева група  $G$  періодична і є групою Чаріна або нерозкладною метабелевою групою. Пізніше в [1] було встановлено, що нерозкладні метабелеві групи близькі до ненільпотентних груп, всі власні підгрупи яких субнормальні і нільпотентні.

Раніше Д.І. Зайцев і Л.А. Курдаченко [11] вивчали локально майже розв'язні групи з умовою максимальності для неабелевих підгруп. Зазначимо також, що дослідження груп з різними умовами максимальності проводяться надалі (див., наприклад, О.Д. Артемович [6], Л.А. Курдаченко та М.М. Семко [69], [77], М.С. Черніков [20] та інші).

### 3.1. Групи з умовою $Max - \overline{AF}$ , які мають квазіциклічний гомоморфний образ

Попередньо встановимо необхідну надалі низку результатів.

**Лема 3.1.** *Нехай  $G$  – група, яка задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп  $Max - \overline{AF}$ , а  $H$  – її підгрупа. Тоді справджуються такі властивості:*

- (1) якщо  $H \leq G$ , то  $H$  задовольняє  $Max - \overline{AF}$ ;
- (2) якщо  $H \triangleleft G$ , то  $G/H$  задовольняє  $Max - \overline{AF}$ ;
- (3) якщо  $H \triangleleft G$  і  $H$  не є майже абелевою, то  $G/H$  задовольняє умову максимальності для підгруп  $Max$ .

*Доведення.* Нехай  $G$  – група, яка задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп  $Max - \overline{AF}$ .

(1) Якщо

$$H_1 < H_2 < \dots < H_n < \dots \quad (3.1.1)$$

– строго зростаючий ланцюг не  $AF$ -підгруп групи  $H$ , то (3.1.1) є строго зростаючим ланцюгом не  $AF$ -підгруп групи  $G$ , а тому він через скінченне число кроків стабілізується.

(2) Нехай  $H$  – нормальна підгрупа групи  $G$ . Якщо

$$\overline{T}_1 < \overline{T}_2 < \dots < \overline{T}_s < \dots \quad (3.1.2)$$

– строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп факторгрупи  $G/H$  і  $T_l$  – повний прообраз підгрупи  $\overline{T}_l$  в групі  $G$  для

кожного індексу  $l$ , то отримаємо строго зростаючий ланцюг

$$T_1 < T_2 < \dots < T_s < \dots \quad (3.1.3)$$

не майже абелевих підгруп групи  $G$ . Ланцюг (3.1.3) через скінченне число кроків стабілізується, а тому ланцюг (3.1.2) також обривається через скінченне число кроків.

(3) Нехай  $H$  – не майже абелева нормальна підгрупа групи  $G$ . Якщо (3.1.2) – строго зростаючий ланцюг підгруп фактор-групи  $G/H$ , а  $T_l$  – повний прообраз підгрупи  $\overline{T}_l$  в групі  $G$  для кожного  $l$ , то (3.1.3) – строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп групи  $G$ , який стабілізується через скінченне число кроків внаслідок умови  $Max - \overline{AF}$ . Тому ланцюг (3.1.2) також стабілізується і фактор-група  $G/H$  задовольняє умову  $Max$ .  $\square$

**Лема 3.2.** *Нехай  $G = A \rtimes B$  – напівпрямий добуток нормальної абелевої підгрупи  $A$  скінченної експоненти  $p$  і квазіциклічної  $q$ -підгрупи  $B$ , де  $p$  і  $q$  – різні прості числа. Якщо група  $G$  задовольняє умову  $Max - \overline{AF}$  і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то вона майже абелева або*

$$G' = A = A_1 \times \dots \times A_m$$

– скінченний прямий добуток  $G$ -інваріантних підгруп  $A_i$ , де  $A_i \rtimes B$  – група Чаріна ( $n \geq 1; i = 1, \dots, n$ ).

*Доведення.* Припустимо, що група  $G$  не має абелевих підгруп скінченного індексу. Зрозуміло, що напівпрямий добуток

$$[A, B] \rtimes B$$

– нормальна підгрупа в групі  $G$ . Якщо ця підгрупа майже абелева, то група  $G$  нільпотентна, а це веде до суперечності із зробленим припущенням. Отже, підгрупа  $[A, B] \rtimes B$  не є майже абелевою і тому  $A = [A, B]$ .

Зрозуміло, що  $A$  – правий  $\mathbb{F}_p B$ -модуль стосовно дії, індукованої спряженням  $B$  на  $A$ , причому  $\mathbb{F}_p B$  – регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце за твердженням 1.13. Розглянемо циклічний підмодуль  $uR$ , де  $u$  – такий ненульовий елемент із  $A$ , що  $u \notin Z(G)$ . Як відомо,  $uR$  ізоморфний правому  $R$ -модулю

$$R_0 = R / \text{ann}_R(u).$$

З іншого боку,  $R_0$  – комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце, кожен ідеал якого є правим  $R$ -модулем. Якщо  $R_0$  не є простим модулем, то він містить такий ненульовий елемент  $a_1$ , що  $a_1 R_0$  – власний ідеал кільця  $R_0$ . За твердженням 1.12 маємо  $a_1 R_0 = e_1 R_0$  для певного ідемпотента  $e_1$  та, крім того,

$$R_0 = e_1 R_0 \oplus R_1$$

– кільцева пряма сума, де  $R_1$  – деякий скінченно породжений ідеал кільця  $R_0$ . Якщо  $e_1 R_0$  не є простим правим  $R$ -модулем, то він містить деякий власний підмодуль  $e_2 R_0$ , де  $e_2^2 = e_2$ . Як наслідок,

$$R_0 = e_2 R_0 \oplus R_2$$

– кільцева пряма сума, де  $R_2$  – такий ідеал із  $R_0$ , що  $R_1 < R_2$ . Міркуючи аналогічно далі, отримаємо строго зростаючу послідовність

$$R_1 < R_2 < \dots$$

підмодулів правого  $R$ -модуля  $R_0$ . Отже, модуль  $uR$  містить деяку строго зростаючу послідовність підмодулів  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Оскільки  $u \notin Z(G)$ , то знайдеться такий індекс  $k$ , що групи  $A_m \rtimes B$  не є майже абелевими для всіх  $m \geq k$ . Тоді із умови  $Max - \overline{AF}$  випливає, що

$$A_l = A_{l+1} = \dots$$

для певного індексу  $l \in \mathbb{N}$ . Це означає, що  $e_l R_0$  – простий правий  $R$ -модуль. Таким чином,  $A$  містить деякий простий  $R$ -підмодуль  $P$ . Оскільки за твердженням 1.14 кільце  $R$  –  $V$ -кільце, то  $P$  – ін’єктивний правий  $R$ -модуль за твердженням 1.15. Тому  $P$  виділяється модульним прямим доданком в  $A$  за твердженням 1.16. Беручи до уваги умову  $Max - \overline{AF}$ , робимо висновок, що

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m \quad (m \geq 1)$$

– скінченна модульна пряма сума простих правих  $R$ -модулів  $A_i$ . Тоді за твердженням 1.17 випливає, що  $A_i \rtimes B$  – група Чаріна для кожного  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**Твердження 3.1.** *Нехай  $G$  – група без неединичних досконалих секцій. Якщо  $G$  задовольняє  $Max - \overline{AF}$  і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то  $G$  – майже абелева група або належить до одного з типів:*

- (1)  $G$  – мінімальна не майже абелева група;
- (2)  $G = G' \rtimes P$ , де  $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ ,  $G' = Q_1 \times \dots \times Q_s$  –  $p'$ -підгрупа, яка є прямим добутком своїх силовських  $p_i$ -підгруп  $Q_i$  екс-

поненти  $p_i^{n_i}$ , причому

$$(\Omega_{j+1}(Q)i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна  $(n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i)$ ;

(3)  $G = A \rtimes P$ , де  $A$  – мінімальна не майже абелева група,  $G' = A \rtimes P'$  та  $G/P'$  – група типу (2).

*Доведення.* Якщо фактор-група  $G/G'$  – добуток двох власних підгруп, то  $G$  майже абелева. У випадку, коли фактор-група  $G/G'$  не розкладається у добуток власних підгруп, вона є циклічною  $p$ -групою (тоді  $G$  майже абелева) або квазіциклічною  $p$ -групою для деякого простого числа  $p$ .

Нехай  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ . Тоді, очевидно,  $G'$  – абелева підгрупа. Припустимо, що  $G$  не є майже абелевою, і розглянемо можливі випадки.

(1) Нехай комутант  $G'$  – періодична група. Тоді  $G$  –  $\pi$ -група для деякої скінченної множини простих чисел  $\pi$ . Як наслідок,  $G$  –  $p$ -група або  $G = Q \rtimes P$ , де  $P$  –  $p$ -підгрупа, а

$$Q = Q_1 \times \dots \times Q_s$$

– груповий прямий добуток силовських  $p_i$ -підгруп  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ).

(a) Якщо  $G$  – неабелева  $p$ -група, то кожна її власна не майже абелева підгрупа  $K$  міститься в максимальній підгрупі  $M$  із  $G$ . Враховуючи, що

$$M \triangleleft G \text{ та } MG' = G,$$

дістаємо суперечність. Отже,  $G$  – мінімальна не майже абелева група.

(b) Нехай  $G$  не є  $p$ -групою. Тоді або  $P$  – абелева група (а тому  $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ ), або, як випливає із частини (a),  $P$  – мінімальна не майже абелева група.

(b<sub>1</sub>) Якщо  $G'$  –  $p'$ -група, то

$$\{\Omega_n(Q_i) \rtimes P \mid n \in \mathbb{N}\}$$

– строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп із  $G$ .

Позначимо підгрупу

$$H_i = Q_i \rtimes P,$$

де

$$\exp(Q_i) = p_i^{n_i}$$

для деякого  $n_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Ясно, що комутант

$$H'_i = [Q_i, P] = Q_i.$$

Якщо для певного  $j$  ( $1 \leq j \leq n_i - 1$ ) підгрупа  $\Omega_j(Q_i) \rtimes P$  майже абелева, то вона абелева та маємо включення

$$\Omega_1(Q_i) \leq Z(H_i).$$

Позаяк маємо також включення

$$[\Omega_{j+1}(Q_i), P] \leq \Omega_1(Q_i),$$

то підгрупа  $\Omega_{j+1}(Q_i)P$  абелева. Тоді група  $H_i$  також абелева, а це не так. Отже, фактор-група

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

не є майже абелевою і за лемою 3.2 вона є групою Чаріна для кожного індексу  $j$ .

( $b_2$ ) Якщо  $P$  – мінімальна не майже абелева  $p$ -група, то  $P/P' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ , а тому  $G/P'$  – група типу (3).

(2) Тепер припустимо, що комутант  $G'$  не є періодичною групою. Позаяк  $G'$  містить нормальну абелеву підгрупу скінченного індексу  $S$  таку, що за твердженням 2.1 її нормальне замикання  $S^G$  – нільпотентна група і  $G'/S^G$  скінченна, то періодична частина  $\tau(G')$  нормальна в групі  $G$  та, без обмеження загальності будемо вважати, що  $G'$  – абелева група без скруту. Тоді за твердженням 1.6 робимо висновок, що  $\mathbb{Z}[G/G']$ -модуль  $G'$ , де дія на  $G'$  індукована спряженням, містить такий власний підмодуль  $N$ , що  $G'/N$  –  $p$ -група. Отже,  $G/N$  –  $p$ -група, яка не є майже абелевою, а тому, за доведеним вище,  $G/N$  – мінімальна не майже абелева група. За твердженням 1.4 фактор-група  $G/N$  не розкладається в добуток своїх власних підгруп. Якщо  $G$  також не розкладається в добуток своїх власних підгруп і  $L$  – деяка власна її не майже абелева підгрупа, то  $L$  міститься в максимальній підгрупі  $M$  із  $G$ . Як наслідок,  $G = G'M$ , а це веде до суперечності. Отже, в цьому випадку всі власні підгрупи із  $G$  майже абелеві, а це неможливо. Якщо ж група  $G$  розкладна, то  $G = TN$  для деякої власної не майже абелевої підгрупи  $T$ . Знову за твердженням 1.6 випливає, що  $\mathbb{Z}[G/G']$ -модуль  $N \cap T$  містить власний підмодуль  $N_1$ , для якого  $(N \cap T)/N_1$  –  $p$ -група, а це веде до суперечності. Таким чином,  $G'$  – періодична група. □

**Наслідок 3.1.** *Якщо група  $G$  задовольняє умову  $Max - \overline{AF}$  та  $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ , то  $G$  майже абелева або належить до одного із типів (1) – (3) із твердження 3.1.*

## ВИСНОВКИ.

Описано групи без неодиначних досконалих сукцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1). Охарактеризовано групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольняють умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

### 3.2. Будова періодичних розв'язних груп із умовою $Max - \overline{AF}$

В цьому підрозділі охарактеризуємо періодичні розв'язні групи із умовою  $Max - \overline{AF}$ .

**Лема 3.3.** *Якщо  $G$  – періодична група з умовою  $Max - \overline{AF}$ , то вірна одна із таких умов:*

- (1)  $G$  – майже абелева група;
- (2)  $G'$  – підгрупа скінченного індексу в  $G$ ;
- (3)  $G$  містить нормальну майже абелеву підгрупу  $A$  з квазіциклічною фактор-групою  $G/A$ .

*Доведення.* За твердженням 1.18 фактор-група

$$\overline{G} = G/G' = D/G' \times F/G'$$

– прямий добуток подільної частини  $\overline{D} = D/G'$  і редукованої підгрупи  $\overline{F} = F/G'$ . Розглянемо можливі випадки.

(a) Якщо  $\overline{D}$  – одинична група, то  $\overline{G} = \overline{F}$  – скінченна група.

(b) Припустимо, що  $\overline{D} \neq \overline{1}$ . Тоді  $G$  має квазіциклічний гомоморфний образ, а отже, для групи  $G$  справджується умова (3).  $\square$

**Твердження 3.2.** *Нехай  $G$  – періодична група, яка містить нормальну майже абелеву підгрупу  $A$  з квазіциклічною фактор-групою  $G/A$ . Якщо  $G$  задовольняє  $\text{Max} - \overline{AF}$ , то  $G$  майже абелева або знайдеться нормальна підгрупа  $N$  одного із типів (1) – (3) із твердження 3.1 така, що фактор-група  $G/N$  задовольняє умову максимальності  $\text{Max}$ .*

*Доведення.* Без обмеження загальності доведення будемо вважати, що підгрупа  $A$  абелева. За твердженням 1.18 фактор-група

$$\overline{G} = G/G' = D/G' \times F/G'$$

– груповий прямий добуток подільної частини  $\overline{D} = D/G'$  і редукованої підгрупи  $\overline{F} = F/G'$ . Нехай  $\overline{B} = B/G'$  –  $p$ -базова підгрупа із  $\overline{F}$ . Якщо  $\overline{B}$  не є скінченно породженою, то за твердженням 1.19 фактор-група

$$\overline{F}/\overline{B}^p = B_0 \times D_0$$

– прямий груповий добуток нескінченної абелевої  $p$ -підгрупи  $B_0$  і деякої  $p$ -подільної підгрупи  $D_0$ . Тоді звідси легко випливає, що

група  $G$  майже абелева. З огляду на сказане вище, далі вважаємо, що  $\overline{B}$  – скінченно породжена група і  $G$  не має абелевих підгруп скінченного індексу. Розглянемо можливі випадки.

(a) Нехай  $\overline{D}$  – неединична група. Тоді з огляду на зроблені припущення  $\overline{D} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$  і підгрупа  $\overline{F}$  скінченна. Неважко встановити, що  $D$  – група одного із типів (1) – (3).

(b) Якщо  $\overline{D} = \overline{1}$ , то фактор-група  $\overline{A} = A/G'$  скінченна. Тоді  $G$  – група одного із типів (1) – (3).  $\square$

Має місце (основна в цьому розділі) така

**Теорема 3.1.** *Нехай  $G$  – періодична розв’язна група. Тоді  $G$  задовольняє умову  $\text{Max}-\overline{AF}$  в тому і тільки в тому випадку, коли вона майже абелева група або  $G = HF$  – локально майже абелева група, де  $H'F$  – майже абелева підгрупа,  $|G : H| < \infty$  і  $H$  належить до одного із типів:*

- (i)  $H$  – мінімальна не майже абелева група;
- (ii)  $H = H' \rtimes P$ , де  $P$  – квазіциклічна  $p$ -група,

$$H' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

–  $p'$ -група, яка є прямим добутком своїх силовських  $p_i$ -підгруп  $Q_i$  експоненти  $p_i^{n_i}$ , причому

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна ( $n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i$ );

- (iii)  $H = A \rtimes P$ , де  $P$  – мінімальна не майже абелева група,  $H' = A \rtimes P'$  та  $H/P'$  – група типу (ii).

*Доведення.* ( $\Rightarrow$ ) Нехай  $G$  – періодична розв’язна група з умовою  $Max - \overline{AF}$ . З огляду на лему 3.3 і твердження 3.2 залишилось розглянути випадок, коли фактор-група  $G/G'$  скінченна, що ми і зробимо нижче.

Припустимо, що фактор-група  $G/G'$  скінченна і група  $G$  не містить абелевих підгруп скінченного індекса. Тоді знайдеться таке  $k \in \mathbb{N}$ , що  $k$ -тий комутант  $G^{(k)}$  не є майже абелевою групою в той час, як  $G^{(k+1)}$  – майже абелева підгрупа, причому фактор-група  $G^{(k)}/G^{(k+1)}$  нескінченна. За лемою 3.3 група  $G^{(k)}$  містить нормальну майже абелеву підгрупу  $A$  із квазіциклічною фактор-групою  $G^{(k)}/A$ . Тоді за твердженням 3.2 група  $G$  містить нормальну підгрупу  $H$  скінченного індекса одного із типів:  $(i)$ ,  $(ii)$  або  $(iii)$ .

( $\Leftarrow$ ) Достатньо встановити, що підгрупа  $H$  задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп  $Max - \overline{AF}$ . Зрозуміло, що мінімальна не майже абелева група  $H$  задовольняє умову  $Max - \overline{AF}$ .

З огляду на те, що для групи фактор-групи

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

є групами Чаріна ( $i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i$ ), отримуємо що групи  $H$  типів  $(ii)$  та  $(iii)$  також задовольняють умову максимальності  $Max - \overline{AF}$ .

□

## ВИСНОВКИ.

Опираючись на відомі результати Дж. фон Неймана, І. Капраського та інших з теорії кілець та модулів, охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою скінченних груп (теорема 3.1).

## Висновки до розділу 3

В цьому розділі досліджено періодичні групи без неоди-  
ничних досконалих секцій з умовою максимальності  $Max - \overline{AF}$   
для не майже абелевих підгруп.

В підрозділі 3.1 описано групи без неодиначних доско-  
налих секцій з умовою максимальності для не майже абелевих  
підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими  
(твердження 3.1). Охарактеризовано також групи з квазіциклі-  
чним гомоморфним образом за комутантом, які задовольняють  
умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслі-  
док 3.1).

В підрозділі 3.2 досліджено будову періодичних розв'я-  
зних груп з умовою максимальності для підгруп, які не є роз-  
ширеннями абелевих груп за допомогою скінченних груп (тео-  
рема 3.1).

## РОЗДІЛ 4

### ГРУПИ І БРЕЙСИ

Якщо  $(R, +, \cdot)$  – асоціативне кільце, то операція ” $\circ$ ”, визначена за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для будь-яких елементів  $a, b \in R$ , називається *круговим* або *приєднаним* множенням. Тоді  $(R, \circ)$  – напівгрупа з нейтральним елементом  $0 \in R$ . Якщо  $(R, \circ)$  – група (тоді вона позначається символом  $R^\circ$ ), то кільце  $R$  називається *радикальним*. Поняття кругової операції в 40-их роках минулого століття ввів С. Перліс з метою характеристики радикала Джекобсона в асоціативному кільці.

В цьому розділі розглядаємо брейси  $A$ , введені В. Румпом [92]. Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення ” $\cdot$ ”) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. Нижче для брейса  $A$  побудовано асоційовану з ним групу  $H(A)$  (див. лему 4.1 і нижче) і досліджено зв’язки між асоційованими групами брейса, його підбрейса (лема 4.2) та фактор-брейса (леми 4.4 та 4.5). Встановлено необхідну і достатню умову, за якої група  $H(L, T)$  асоційована з підмодулем  $L$  деякого  $A$ -модуля і підгрупою  $T \leq A^\circ$  – група Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад скінченного брейса  $A$  з групою Фробеніуса  $H(A)$  (приклад 4.1). Розглядаються також брейси  $A$  з періодичною приєднаною групою  $A^\circ$  (лема 4.7) та встановлюється, за яких умов

адитивна група  $A^+$  нільпотентного справа (відповідно зліва) брейса  $A$  буде  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.8). Також досліджується зв'язок між нільпотентністю брейса  $A$  та його асоційованої групи  $H(A)$  (теорема 4.2).

Згідно з [92], непорожня множина  $A$ , на якій визначено дві алгебраїчні операції " $+$ " та " $\cdot$ ", називається *брейсом* (=brace), якщо виконуються такі умови:

- (i)  $A^+ = (A, +)$  – абелева група (з нулем 0);
- (ii)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  для будь-яких елементів  $a, b, c \in A$ ;
- (iii)  $A$  – група стосовно операції приєднаного множення " $\circ$ ", визначеної за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для елементів  $a, b \in A$ .

Із асоціативності операції " $\circ$ " в брейсі  $A$  випливає, що

- (iv)  $a \cdot (a \circ b) = (a \cdot b) \cdot c + (a \cdot b) + (a \cdot c)$  для всіх елементів  $a, b, c \in A$ .

Група  $(A, \circ)$  називається *приєднаною групою* брейса  $A$  і позначається через  $A^\circ$ . Зрозуміло, що

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

для всіх  $a \in A$  та 0 – нейтральний елемент групи  $A^\circ$ . Домовимось елемент, обернений до елемента  $b \in A^\circ$ , позначати через

$b^{(-1)}$ . Абелева група  $(M, +)$  із нейтральним елементом  $e$  називається *модулем над брейсом*  $A$ , якщо існує відображення

$$M \times A \ni (x, a) \rightarrow xa \in M,$$

яке для будь-яких елементів  $x, y \in M$  та  $a, b \in A$  задовольняє такі умови:

$$m_1) (x + y)a = xa + ya;$$

$$m_2) x(a \circ b) = (xa)b + xa + xb;$$

$$m_3) x0 = e.$$

Над брейсом не має поняття "лівого" чи "правого" модуля, а тільки "модуля". Оскільки

$$ea = (e + e)a = ea + ea,$$

то

$$ea = e$$

для будь-якого елемента  $a \in A$ . На основі цього і рівності

$$x + (-x) = e$$

обчислюємо

$$0 = ea = (x + (-x))a = xa + (-x)a,$$

а тому

$$(-x)a = -(xa) = -xa.$$

Підмножина  $L$  із  $M$  називається *підмодулем* модуля  $M$ , якщо виконуються такі дві умови:

- $L$  – підгрупа в  $(M, +)$ ;
- $la \in L$  для будь-яких елементів  $l \in L$  та  $a \in A$ .

#### 4.1. Група, асоційована з брейсом

Я. П. Сисак [18] у 1982 році побудував групу, асоційовану з радикальним кільцем. Пізніше О.Д. Артемович [37] розширив цю конструкцію на випадок лівого модуля над довільним асоціативним кільцем  $R$ . Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи  $G(R)$  для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця  $R$ . Нижче побудовано групу  $H(L, T)$ , асоційовану з підмодулем  $L$  модуля, який розглядається над довільним брейсом  $A$ , та підгрупою  $T$  приєднаної групи  $A^\circ$ .

Нехай  $A$  – брейс,  $L$  – підмодуль  $A$ -модуля  $M$ ,  $T$  – підгрупа із приєднаної групи  $A^\circ$ . На множині пар

$$H(L, T) = \{(l, t) \mid l \in L, t \in T\}$$

визначимо операцію множення за правилом

$$(x, y)(u, v) = (xv + x + u, y \circ v) \quad (4.1.1)$$

для елементів  $x, u \in L$  та  $y, v \in T$ .

Має місце така

**Лема 4.1.** *Нехай  $M$  – модуль над брейсом  $A$ . Якщо  $L$  – підмодуль із  $M$ , а  $T$  – підгрупа із  $A^\circ$ , то*

$$H(L, T) = E \rtimes T$$

– група стосовно операції, визначеної за правилом (4.1.1), причому  $E = \{(l, 0) \mid l \in L\}$  ізоморфна адитивній групі  $(L, +)$ , а  $F = \{(e, t) \mid t \in T\}$  ізоморфна групі  $T$ .

*Доведення.* Для будь-яких елементів  $x, u, w \in L$  та  $y, v, z \in T$  встановлюємо:

1) асоціативність множення

$$\begin{aligned}
 ((x, y)(u, v))(w, z) &= (xv + x + u, y \circ v)(w, z) = \\
 &= ((xv + x + u)z + xv + x + u + w, (y \circ v) \circ z) = \\
 &= ((xv)z + xz + uz + xv + x + u + w, (y \circ v) \circ z) \\
 (x, y)((u, v)(w, z)) &= (x, y)(uz + u + w, v \circ z) = \\
 &= (x(v \circ z) + x + uz + u + w, y \circ (v \circ z)) = \\
 &= ((xv)z + xv + xz + x + uz + u + w, y \circ (v \circ z))
 \end{aligned}$$

тобто множення є асоціативним в  $H(L, T)$ .

2) існування нейтрального елемента

$$\begin{aligned}
 (x, y)(e, 0) &= (x0 + x + e, y \circ 0) = (x, y) = \\
 &= (ey + e + x, 0 \circ y) = (e, 0)(x, y),
 \end{aligned}$$

тобто  $(e, 0)$  – нейтральний елемент стосовно множення, визначеного за правилом (4.1.1).

3) Нехай  $(a, b) \in H(L, T)$ . Знайдемо такий елемент  $(x, y) \in H(L, T)$ , що

$$(a, b)(x, y) = (e, 0) = (x, y)(a, b)$$

або, рівносильно, знайдемо розв'язок системи рівнянь (невідомими є  $x$  та  $y$ ):

$$\begin{cases} ay + a + x = e, \\ b \circ y = 0, \\ xb + x + a = e, \\ y \circ b = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що  $y = b^{(-1)}$  є оберненим елементом до  $b$  в групі  $A^\circ$  та  $x = -a - ab^{(-1)}$ . Отже, обернений елемент знаходиться за формулою

$$(a, b)^{-1} = (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)}) \in H(L, T).$$

Таким чином,  $H(L, T)$  – група.

4) Окрім того, для кожного елемента  $(u, v) \in E \rtimes F$  маємо:

a) розклад в добуток підгруп

$$FE \ni (e, v)(u, 0) = (u, v) = (u, 0)(e, v) = (uv + u + e, 0 \circ v).$$

b) для кожного  $l \in L$  знаходимо

$$\begin{aligned} (l, 0)^{(u, v)} &= (u, v)^{-1}(l, 0)(u, v) = (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)})(l, 0)(u, v) = \\ &= ((-u - uv^{(-1)})0 - u - uv^{(-1)} + l, v^{(-1)} \circ 0)(u, v) = \\ &= (-u - uv^{(-1)} + l, v^{(-1)})(u, v) = \\ &= ((-u - uv^{(-1)} + l)v - u - uv^{(-1)} + l + u, v^{(-1)} \circ v) = \\ &= (-uv - (uv^{(-1)})v + lv - u - uv^{(-1)} + l + u, 0) = \\ &= (-uv - (uv^{(-1)})v - uv^{(-1)} + lv + l, 0) = \\ &= (-u(v^{(-1)} \circ v) + lv + l, 0) = \\ &= (-u0 + lv + l, 0) = (lv + l, 0) \in F, \end{aligned}$$

тобто  $E$  – нормальна підгрупа в групі  $H(L, T)$ .

c) Зрозуміло, що перетин  $E \cap F = \{(e, 0)\}$  тривіальний.

Нами встановлено, що

$$H(L, T) = E \rtimes F$$

– напівпрямий добуток підгруп  $E$  та  $F$ . На завершення доведення залишається зауважити, що відображення

$$\varphi : L \ni l \rightarrow (l, 0) \in E$$

та

$$\psi : T \ni t \rightarrow (e, t) \in F$$

– ізоморфізми груп. □

**Наслідок 4.1.** Група  $H(L, T)$  абелева тоді і тільки тоді, коли  $LT = \{e\}$  та  $T$  – абелева група.

*Доведення.* Справді, для довільних елементів  $x, u \in L$  та  $y, v \in T$  рівність

$$(x, y)(u, v) = (u, v)(x, y)$$

рівносильна тому, що

$$\begin{cases} xv + x + u = uy + u + x, \\ y \circ v = v \circ y, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} xv = uy, \\ yv = vy. \end{cases}$$

Друга рівність означає, що  $T$  – абелева група. Оскільки  $y$  – довільний елемент із  $T$  (зокрема,  $y = 0$ ), то  $xv = e$ . Це означає, що добуток  $LT = \{e\}$  тривіальний. □

Як звичайно [93], непорожня підмножина  $S$  із брейса  $A$  називається *підбрейсом*, якщо виконуються такі умови:

$s_1)$   $(S, +)$  – підгрупа в  $(A, +)$ ;

$s_2)$   $uv \in S$  для будь-яких  $u, v \in S$ .

Зрозуміло, що  $\{0\}$ ,  $A$  – тривіальні підбрейси в  $A$ . Окрім того, брейс  $A$  є модулем над самим собою. Тому кожен підмодуль  $I$  з  $A$ -модуля називається *правим ідеалом* в  $A$  (див. [92]). Поняття "лівого ідеала" для брейса не вводиться. Таким чином,  $I$  – правий ідеал брейса  $A$  в тому і тільки тому випадку, коли виконуються такі умови:

$i_1)$   $(I, +)$  – підгрупа в  $(A, +)$ ,

$i_2)$   $ia \in I$  для довільних елементів  $i \in I$  та  $a \in A$ .

Якщо, крім того, виконується умова

$i_3)$   $ai \in I$  для довільних  $i \in I$  та  $a \in A$ , то  $I$  називається *двобічним ідеалом* (або коротко *ідеалом*) брейса  $A$  (див. [92]).

Кожен (правий чи двобічний) ідеал із  $A$  є підбрейсом в  $A$ .

Для брейса  $A$  розглядатимемо:

- лівий анулятор

$$\text{ann}_l A = \{u \in A \mid uA = \{0\}\},$$

- правий анулятор

$$\text{ann}_r A = \{v \in A \mid Av = \{0\}\}.$$

Якщо  $a \in A$  та  $u_1, u_2 \in \text{ann}_l A$ , то

$$(u_1 a)A = 0 \cdot A = \{0\},$$

$$(u_1 - u_2)A = u_1A - u_2A = \{0\},$$

тобто  $\text{ann}_l A$  – лівий ідеал в  $A$ .

Якщо  $a \in A$  та  $v_1, v_2 \in \text{ann}_r A$ , то

$$A(av_1) = A \cdot 0 = \{0\},$$

$$A(v_1 - v_2) = Av_1 - Av_2 = \{0\}.$$

В твердженні 7 із [92] доведено, що підмножина  $\text{ann}_r A$  замкнена також стосовно домноження справа. Тобто  $\text{ann}_r A$  – двобічний ідеал брейса  $A$ . Зазначимо, що в роботі [92] лівий анулятор  $\text{ann}_l A$  позначається через  $\text{Soc}(A)$  та  $\text{Soc}_1(A)$  і називається *цоколем*. Зрозуміло, що анулятор

$$\text{ann} A = \text{ann}_r A \cap \text{ann}_l A$$

– лівий ідеал в  $A$ .

Нехай  $n \in \mathbb{Z}$  та

$$nA = \{na \mid a \in A\}.$$

Тоді для довільних елементів  $a, b, t \in A$  і  $n > 0$  маємо

$$\begin{aligned} na - nb &= \underbrace{(a + \dots + a)}_{n \text{ разів}} + \\ &+ \underbrace{(a + \dots + a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(a - b) + \dots + (a - b)}_{n \text{ разів}} = \\ &= n(a - b) \in nA. \end{aligned}$$

Подібні міркування спрацьовують, якщо  $n < 0$  або  $n = 0$ . Окрім того, для  $n > 0$  маємо

$$(na)t = \underbrace{(a + \dots + a)}_{n \text{ разів}} t = \underbrace{(at + \dots + at)}_{n \text{ разів}} = n(at) \in nA.$$

Таким чином,  $nA$  – правий ідеал в брейсі  $A$ .

Нехай

$$\Omega_1(A) = \{a \in A \mid na = 0\}.$$

Якщо  $a_1, a_2 \in \Omega_1(A)$  та  $t \in A$ , то  $n(a_1 - a_2) = 0$  та

$$n(a_1 t) = \underbrace{a_1 t + \cdots + a_1 t}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_1) t}_{n \text{ разів}} = 0t = 0,$$

тобто  $a_1 t \in \Omega_1(A)$ . Отже, нами встановлена така

**Лема 4.2.** *Множини  $nA$ ,  $\Omega_1(A)$  – праві ідеали в брейсі  $A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).*

Елемент  $a \in A$  називається *лівим дільником нуля*, якщо:

$$a_1) \ a \neq 0,$$

$$a_2) \ ab = 0 \text{ для деякого ненульового елемента } b \in A.$$

Елемент  $a \in A$  називається *правим дільником нуля*, якщо:

$$a_1) \ a \neq 0,$$

$$a_3) \ ca = 0 \text{ для деякого ненульового елемента } c \in A.$$

Якщо виконуються умови  $a_1), a_2), a_3)$ , то  $a$  називається *дільником нуля* в  $A$ .

Подібно як в [18], групу  $H(A) = H(A^+, A^\circ)$  будемо називати *асоційованою групою* брейса  $A$ . Зрозуміло, що  $(0, 0)$  – нейтральний елемент в  $H(A)$ .

Встановимо деякі елементарні властивості групи  $H(A)$ .

**Лема 4.3.** *Нехай  $A$  – брейс з асоційованою групою  $H(A) = E \rtimes F$ . Якщо  $S$  – підбрейс в  $A$  із асоційованою групою  $H(S) = U \rtimes W$ , то справджуються такі властивості:*

- (a)  $H(S) \leq H(A)$ ,  $U \leq E$ ,  $W \leq F$ ;
- (b) якщо  $S$  – правий ідеал в  $A$ , то  $U$  – нормальна підгрупа в  $H(A)$ ;
- (c) якщо  $S$  – двобічний ідеал в  $A$ , то  $U \triangleleft H(A)$  та  $H(S) \triangleleft H(A)$ ;
- (d) якщо  $U \triangleleft H(A)$ , то  $SA \subseteq S$ ;
- (e) якщо  $H(S) \triangleleft E \rtimes W$ , то  $AS \subseteq S$ ;
- (f)

$$C_E(F) = \{(a, 0) \in E \mid a \in \text{ann}_l A\},$$

$$C_F(E) = \{(0, u) \in F \mid u \in \text{ann}_r A\};$$

зокрема, якщо  $A$  не має дільників нуля, то

$$C_E(F) = C_F(E) = \langle (0, 0) \rangle.$$

*Доведення.* (a) Випливає безпосередньо із означення асоційованої групи.

(b) Нехай  $S$  – правий ідеал в  $A$ , а тому  $sa \in S$  для будь-яких  $s \in S$  та  $a \in A$ . Тоді для довільних елементів  $(a, b) \in H(A)$  та  $(s, 0) \in U$  знаходимо, що

$$\begin{aligned} (s, 0)^{(a, b)} &= (a, b)^{-1}(s, 0)(a, b) = \\ &= (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(s, 0)(a, b) = \\ &= ((-a - ab^{(-1)})0 - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ 0)(a, b) = \\ &= (-a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)})(a, b) = \\ &= ((-a - ab^{(-1)} + s)b - a - ab^{(-1)} + s + a, b^{(-1)} \circ b) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-ab - (ab^{(-1)})b + sb - ab^{(-1)} + s, 0) = \\
&= (-a(b^{(-1)} \circ b) + sb + s, 0) = \\
&= (-a0 + sb + s, 0) = (sb + s, 0) \in U, \tag{4.1.2}
\end{aligned}$$

а отже,  $U$  – нормальна підгрупа в групі  $H(A)$ .

(с) Нехай  $S$  – двобічний ідеал брейса  $A$ ,  $(a, b) \in H(A)$  та  $(s, t) \in H(S)$ . Тоді обчислюємо, що

$$\begin{aligned}
&(s, t)^{(a, b)} = (a, b)^{-1}(s, t)(a, b) = \\
&= (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(s, t)(a, b) = \\
&= ((-a - ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t)(a, b) = \\
&= (-at - (ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t)(a, b) = \\
&= ((-at - (ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s)b - at - (ab^{(-1)})t - \\
&\quad -a - ab^{(-1)} + s + a, b^{(-1)} \circ t \circ b) = \\
&= (-(at)b - ((ab^{(-1)})t) - ab - (ab^{(-1)})b + sb - at - (ab^{(-1)})t - \\
&\quad -ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t \circ b) = \\
&= (-a(b^{(-1)} \circ b) - (at)b - at - ((ab^{(-1)})t)b + sb + s - (ab^{(-1)})t, \\
&\quad b^{(-1)} \circ t \circ b) = \\
&= (-(at)b - at - ((ab^{(-1)})t)b + sb + s - (ab^{(-1)})t, \\
&\quad t + tb + (b^{(-1)}t)b + b^{(-1)}t) \in H(S),
\end{aligned}$$

тобто  $H(S)$  – нормальна підгрупа  $H(A)$ .

(d) Позаяк  $U \triangleleft H(A)$ , то із співвідношення (4.1.2) дедукуємо, що  $sb + s \in S$  для будь-яких  $s \in S$ ,  $b \in A$ , а тому  $sb \in S$ .

(e) Нехай  $H(S) \triangleleft E \rtimes W$ . Тоді для будь-яких елементів  $a \in A$  та  $u, v, w \in S$  маємо

$$\begin{aligned}
H(S) \ni (u, v)^{(a, w)} &= (a, w)^{-1}(u, v)(a, w) = \\
&= (-a - aw^{(-1)}, w^{(-1)})(u, v)(a, w) = \\
&= ((-a - aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v)(a, w) = \\
&= (-av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v)(a, w) = \\
&= ((-av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u)w - \\
&\quad -av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u + a, w^{(-1)} \circ v \circ w) = \\
&= (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w - aw - (aw^{(-1)})w + uw - \\
&\quad -av - (aw^{(-1)})v - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v \circ w) = \\
&= (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w + uw - \\
&\quad -av - (aw^{(-1)})v + u, v + vw + (w^{(-1)}v)w + w^{(-1)}v).
\end{aligned}$$

З цієї рівності при  $w = 0$  отримуємо, що  $(-av + u, v) \in H(S)$ , тобто  $AS \subseteq S$ .

(f) Нехай  $(a, 0) \in C_E(F)$ . Тоді виконується рівність

$$(a, 0)(0, b) = (0, b)(a, 0)$$

для кожного  $b \in A$ , а тому

$$(ab + a + 0, 0 \circ b) = (0 \cdot 0 + 0 + a, b \circ 0),$$

а це рівносильне тому, що

$$ab = 0,$$

тобто  $aA = \{0\}$  та  $a \in \text{ann}_l A$ . Якщо  $(0, u) \in C_F(E)$ , то

$$(0, u)(b, 0) = (b, 0)(0, u)$$

для будь-якого  $b \in A$ , а значить,

$$(0 \cdot 0 + 0 + b, u \circ 0) = (bu + b + 0, 0 \circ u),$$

звідки  $bu = 0$  та  $u \in \text{ann}_r A$ . □

**Лема 4.4.** *Якщо  $A$  – брейс,  $a, b \in A$ , то  $(a, b) \in Z(H(A))$  тоді і тільки тоді, коли  $aA = \{0\}$  та  $Ab = \{0\} = bA$ .*

*Доведення.* ( $\Rightarrow$ ) Нехай

$$(a, b) \in Z(H(A)).$$

Тоді для довільних елементів  $u, v \in A$  знаходимо, що

$$\begin{aligned} (av + a + u, b \circ v) &= (a, b)(u, v) = \\ &= (u, v)(a, b) = (ub + u + a, v \circ b) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} b \circ v = v \circ b, \\ av = ub. \end{cases}$$

Звідси випливає, що  $bv = vb$ . Окрім того, при  $u = 0$  отримуємо, що  $av = 0$  (і, як наслідок,  $aA = \{0\}$ ), а при  $v = 0$  випливає, що  $ub = 0$  (тобто  $Ab = \{0\}$ ).

( $\Leftarrow$ ) Оскільки для будь-яких  $u, v \in A$  маємо  $ub = 0$ ,  $av = 0$ , то елемент  $(a, b)$  комутує з будь-яким елементом  $(u, v) \in H(A)$ . □

Нехай  $S$  – двобічний ідеал в брейсі  $A$ . На множині суміжних класів

$$A/S = \{a + S \mid a \in A\}$$

в звичайний спосіб вводиться дві операції [93]:

- додавання

$$(a_1 + S) + (a_2 + S) = (a_1 + a_2) + S,$$

- множення

$$(a_1 + S)(a_2 + S) = (a_1 a_2) + S$$

для елементів  $a_1, a_2 \in A$ . Тоді  $(A/S, +, \cdot)$  – брейс, який називається *фактор-брейсом* брейса  $A$  за ідеалом  $S$ .

**Зауваження 4.1.** Зрозуміло, що для елемента  $a$  із брейса  $A$  централізатори

$$C_{A^\circ}(a) = \{z \in A \mid z \circ a = a \circ z\}$$

та

$$C_A(a) = \{z \in A \mid za = az\}$$

співпадають. Окрім того, якщо  $z_1, z_2 \in C_{A^\circ}(a)$ , то

$$(z_1 z_2)a = (az_1)z_2.$$

Справді,  $z_1 \circ z_2 \in C_{A^\circ}(a)$ , а тому

$$\begin{aligned} z_1 \circ z_2 + a + (z_1 z_2)a + z_1 a + z_2 a &= (z_1 \circ z_2) + a + (z_1 \circ z_2)a = \\ &= ((z_1 \circ z_2) \circ a = a \circ (z_1 \circ z_2)) = a + z_1 \circ z_2 + a(z_1 \circ z_2) = \\ &= a + z_1 \circ z_2 + (az_1)z_2 + az_1 + az_2, \end{aligned}$$

а звідси випливає ствердження.

Розглянемо центри

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az \text{ для будь-якого } a \in A\}$$

та

$$Z_1 = Z(A^\circ) = \{z \in A \mid z \circ a = a \circ z \text{ для будь-якого } a \in A\}.$$

Зрозуміло, що

$$Z(A) = Z(A^\circ) \triangleleft A^\circ.$$

В праці [93] розглядається дистрибутивна частина

$$A_\circ = \{x \in A \mid x(a + b) = xa + xb \text{ для будь-яких } a, b \in A\}$$

і занотовано, що має місце включення

$$Z(A^\circ) \subseteq A_\circ.$$

Окрім того, брейс  $A_\circ$  є асоціативним, а тому є найбільшим радикальним підкільцем в  $A$ .

**Лема 4.5.** *Якщо  $S$  – ідеал брейса  $A$ , то*

$$(A/S)^\circ \cong A^\circ/S^\circ.$$

*Доведення.* Правило

$$\begin{cases} \varphi : (A/S)^\circ \rightarrow A^\circ/S^\circ, \\ \varphi(a + S) = a \circ S^\circ \end{cases}$$

є відображенням. Окрім того, для довільних елементів  $a, b \in A$  знаходимо, що

$$\varphi((a + S) \circ (b + S)) = \varphi((a + S) + (b + S) + (a + S)(b + S)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi((a + b + ab) + S) = (a \circ b) \circ S^\circ = \\
&= (a \circ S^\circ) \circ (b \circ S^\circ) = \varphi(a + S) \circ \varphi(b + S),
\end{aligned}$$

тобто  $\varphi$  – гомоморфізм груп. За побудовою  $\varphi$  є сюр'єкцією. Якщо

$$a \circ S^\circ = b \circ S^\circ,$$

то для будь-якого елемента  $s \in S = S^\circ$  дістаємо, що

$$a + s + as = b + s + bs,$$

тобто

$$a + as = b + bs.$$

Але тоді

$$a + S = a + (as + S) = b + (bs + S) = b + S.$$

Це означає, що  $\varphi$  – ін'єкція і, як наслідок,  $\varphi$  – ізоморфізм груп.

□

**Лема 4.6.** *Якщо  $S$  – ідеал брейса  $A$ , то*

$$H(A)/H(S) \cong H(A/S).$$

*Доведення.* Припустимо, що

$$H(A) = E \rtimes F, \quad H(S) = U \rtimes W \quad \text{та} \quad H(A/S) = Q \rtimes R.$$

Тоді  $U \leq E$ ,  $W \leq F$ , а тому

$$H(A)/H(S) = (E \rtimes F)/H(S) =$$

$$\begin{aligned}
&= (EH(S)/H(S)) \rtimes (FH(S)/H(S)) = \\
&= (EUW/UW) \rtimes (FUW/UW) \cong (EW/UW) \rtimes (FU/UW).
\end{aligned}$$

Позаяк мають місце ізоморфізми груп

$$Q \cong (A/S)^+ \cong A^+/S^+ \cong E/U \cong EW/UW$$

та

$$R \cong (A/S)^\circ \cong A^\circ/S^\circ \cong F/W = FU/WU,$$

то отримуємо ствердження.  $\square$

## ВИСНОВКИ.

По-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, введено в розгляд групу, яка асоційована з брейсом. Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

### 4.2. Групи Фробеніуса

Нагадаємо, що група  $H = E \rtimes F$  називається *групою Фробеніуса* із ядром  $E$  і доповненням  $F$ , якщо виконуються дві такі умови:

- $F \cap F^g = \langle 1 \rangle$  – одинична група для всіх  $g \in H \setminus F$ ;
- 

$$E \setminus \langle 1 \rangle = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h.$$

Огляд про нескінченні групи Фробеніуса опубліковано А. Старостіним в 1971 році [17]. Після цього В. Блудов [10] встановив, що кожна група вкладається в ядро деякої групи Фробеніуса, при цьому доповненням може бути будь-яка нетривіальна група, що упорядкована справа (яка завжди є групою без скруту).

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову, за якої група  $H(L, T)$  є групою Фробеніуса.

**Теорема 4.1.** *Нехай  $M$  – модуль над брейсом  $A$ ,  $L$  – ненульовий підмодуль із  $M$ ,  $T$  – ненульова підгрупа приєднаної групи  $A^\circ$ . Тоді*

$$H = H(L, T) = E \rtimes F$$

– група Фробеніуса із ядром  $E$  і доповненням  $F$  тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

- (i)  $L = Lh$  для будь-якого ненульового елемента  $h \in T$ ;
- (ii)  $\text{ann}_T(l) = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$  для кожного ненульового елемента  $l \in L$ .

*Доведення.* ( $\Rightarrow$ ) Нехай  $H = E \rtimes F$  – група Фробеніуса з ядром  $E \cong (L, +)$  і доповненням  $F \cong T$ . За твердженням 1.25 для будь-яких елементів  $h \in T$  та  $l \in L$  знайдеться такий елемент  $l_1 \in L$ , що

$$(l, 0) = [(l_1, 0), (e, h)].$$

Тоді знаходимо

$$\begin{aligned} (l, 0) &= (l_1, 0)^{-1}(e, h)^{-1}(l_1, 0)(e, h) = \\ &= (-l_1 - l_1 0^{(-1)}, 0^{(-1)})(-e - eh^{(-1)}, h^{(-1)})(l_1, 0)(e, h) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (l_1, 0)(e, h^{(-1)})(l_1, 0)(e, h) = \\
&= (-l_1 h^{(-1)} - l_1 + e, 0 \circ h^{(-1)})(l_1 h + l_1 + e, 0 \circ h) = \\
&= (-l_1 h^{(-1)} - l_1, h^{(-1)})(l_1 h + l_1, h) = \\
&= ((-l_1 h^{(-1)} - l_1)h - l_1 h^{(-1)} - l_1 + l_1 h + l_1, h^{(-1)} \circ h) = \\
&= (-(l_1 h^{(-1)})h - l_1 h - l_1 h^{(-1)} + l_1 h, 0) = \\
&= (-l_1(h^{(-1)} \circ h) + l_1 h, 0) = (l_1 h, 0),
\end{aligned}$$

на підставі чого

$$l = l_1 h.$$

Це означає, що  $L = Lh$  для кожного ненульового елемента  $h \in T$ .

Із означення групи Фробеніуса також випливає, що перетин

$$F^{(a,b)} \cap F = \langle (e, 0) \rangle$$

тривіальний для кожного елемента  $(a, b) \in H \setminus F$ . Припустимо, що елемент  $t \in T$  є таким, що  $lt = e$  для певного елемента  $l \in L$ . Тоді

$$\begin{aligned}
&F \cap F^{(l,0)} \ni (e, t)^{(l,0)} = (l, 0)^{-1}(e, t)(l, 0) = \\
&= (-l - l0^{(-1)}, 0^{(-1)})(e, t)(l, 0) = (-l, 0)(e, t)(l, 0) = \\
&= (-lt - l + e, 0 \circ t)(l, 0) = (-lt - l, t)(l, 0) = \\
&= ((-lt - l)0 - lt - l + l, t \circ 0) = (-lt, t) = (e, t),
\end{aligned}$$

а значить,  $t = 0$ .

Отже,  $\text{ann}_T l = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Нехай група  $H = E \rtimes F$  задовольняє умови (i), (ii) та  $v$  – довільний ненульовий елемент із  $T$ , а  $k$  – довільний елемент із  $L$ . Тоді

$$k = k_1 v$$

для певного елемента  $k_1 \in L$  та

$$\begin{aligned} [(k_1, 0), (e, v)] &= (k_1, 0)^{-1} (e, v)^{-1} (k_1, 0) (e, v) = \\ &= (-k_1 - k_1 0^{(-1)}, 0^{(-1)}) (-e - ev^{(-1)}, v^{(-1)}) (k_1 v + k_1 + e, 0 \circ v) = \\ &= (-k_1, 0) e, v^{(-1)} k_1 v + k_1, v) = \\ &= (-k_1 v^{(-1)} - k_1 + e, 0 \circ v^{(-1)}) (k_1 v + k_1, v) = \\ &= (-k_1 v^{(-1)} - k_1, v^{(-1)}) (k_1 v + k_1, v) = \\ &= ((-k_1 v^{(-1)} - k_1) v - k_1 v^{(-1)} - k_1 + k_1 v + k_1, v^{(-1)} \circ v) = \\ &= (-(k_1 v^{(-1)}) v - k_1 v - k_1 v^{(-1)} + k_1 v, 0) = \\ &= (k_1 v, 0) = (k, 0), \end{aligned}$$

а тому має місце рівність

$$E = [E, (e, t)]$$

для будь-якого ненульового елемента  $(e, t) \in F$ .

Для довільного елемента  $(u, v) \in H$  та  $(e, t) \in F$  обчислимо

$$\begin{aligned} F^{(u,v)} \ni (e, t)^{(u,v)} &= \\ &= (u, v)^{-1} (e, t) (u, v) = (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)}) (e, t) (u, v) = \\ &= (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)}) (ev + e + u, t \circ v) = \\ &= (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)}) (u, t \circ v) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((-u - uv^{(-1)})(t \circ v) - u - uv^{(-1)} + u, v^{(-1)} \circ t \circ v) = \\
&= (-u(t \circ v) - (uv^{(-1)})(t \circ v)uv^{(-1)}, v^{(-1)} \circ t \circ v) = \\
&= (-(ut)v - ut - uv - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t - \\
&\quad - (uv^{(-1)})v - uv^{(-1)}, v^{(-1)} \circ r \circ v) = \\
&= (-u(v^{(-1)} \circ v) - (ut)v - ut - \\
&\quad - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t, v^{(-1)} \circ t \circ v) = \\
&= (-(ut)v - ut - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t, v^{(-1)} \circ t \circ v).
\end{aligned}$$

Зокрема, при  $v = 0$  та  $u \neq 0$  отримуємо, що

$$F^{(u,0)} \ni (e, t)^{(u,0)} = (-ut, t).$$

Якщо  $u$  пробігає  $L$ , то  $-ut$  також пробігає  $L$ . Це означає, що

$$H \setminus \bigcup_{(u,v) \in H} F^{(u,v)} = E \setminus \{(e, 0)\}.$$

Припустимо, що елемент

$$(e, h)^{(u,v)} \in F \bigcap F^{(u,v)}$$

для деяких  $h, v \in T$  та  $0 \neq u \in L$ . Тоді знаходимо, що

$$\begin{aligned}
(e, h)^{(u,v)} &= (u, v)^{-1}(e, h)(u, v) = \\
&= ((e, v)(u, 0))^{-1}(e, h)((e, v)(u, 0)) = \\
&= (u, 0)^{-1}((e, v)^{-1}(e, h)(e, v))(u, 0) = \\
&= (-u, 0)((e, v^{(-1)})(e, h)(e, v))(u, 0) = \\
&= (-u, 0)((eh + e + e, v^{-1} \circ h)(e, v))(u, 0) = \\
&= (-u, 0)((e, v^{(-1)} \circ h)(e, v))(u, 0) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-u, 0)(ev + e + e, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u, 0) = \\
&= (-u, 0)(e, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u, 0) = \\
&= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u + e, 0 \circ v^{(-1)} \circ h \circ v)(u, 0) = \\
&= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u, 0) = \\
&= ((-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u)0 - u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u + u, v^{(-1)} \circ h \circ v \circ 0) = \\
&= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v), v^{(-1)} \circ h \circ v),
\end{aligned}$$

а звідси

$$-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) = e.$$

На підставі умови (ii) отримуємо рівність

$$v^{(-1)} \circ h \circ v = 0$$

(тобто  $h = 0$ ). Це означає, що перетин тривіальний:

$$F \cap F^{(u,v)} = \{(e, 0)\}.$$

Таким чином,  $H = H(L, T)$  – це група Фробеніуса з ядром  $E$  і доповненням  $F$ .  $\square$

Нехай  $R$  – асоціативне кільце з одиницею 1,  $A$  – правий  $R$ -модуль. Якщо  $\mu : A \rightarrow U(R)$  – таке адитивне відображення, що

$$\mu(a\mu(b)) = \mu(a)$$

для всіх елементів  $a, b \in A$ , то  $(A, +, \cdot)$  – брейс (див. [92]) із множенням "  $\cdot$  ", визначеним за правилом

$$a \cdot b = a(\mu(b) - 1).$$

**Приклад 4.1.** Розглянемо брейс із прикладу 3 [92], тобто

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A^+ \cong \mathbb{Z}_6$$

та

$$\mu : A \rightarrow U(\mathbb{Z}_6)$$

таке, що

$$\mu(0) = \mu(2) = \mu(4) = 1,$$

$$\mu(1) = \mu(3) = \mu(5) = 5.$$

Якщо для елементів  $a, b \in A$  покласти

$$a \cdot b = a(\mu(b) - 1),$$

то  $(A, +, \cdot)$  – брейс із табличкою множення (див. таблицю 2 із [92]):

|         |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1       | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| 2       | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4       | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| 5       | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |

Нехай  $L = \{0, 2, 4\}$ . Тоді  $L \in A$ -модулем. Зрозуміло, що  $T = \{0, 5\}$  – підгрупа в  $A^\circ$ . Оскільки

$$L \cdot 5 = \{0 \cdot 5, 2 \cdot 5, 4 \cdot 5\} = \{0, 2, 4\} = L$$

та анулятори

$$\text{ann}_T(2) = \{0\} = \text{ann}_T(5)$$

нульові, то  $G(L, T)$  – група Фробеніуса.

## ВИСНОВКИ.

Знайдено необхідну і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

### 4.3. Нільпотентні брейси

Я.П. Сисак [18] встановив, що радикальне кільце  $R$  нільпотентне (відповідно гіперцентральне) тоді і тільки тоді, коли його асоційована група  $G(R) \cong R^+ \rtimes R^\circ$  нільпотентна (відповідно гіперцентральна). Ю.Б. Іщук [67] досліджував взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця  $R$  та його асоційованої групи  $G(R)$ .

В цьому підрозділі введено в розгляд поняття нільпотентного зліва (відповідно справа) брейса  $A$  і досліджено умови періодичності його адитивної  $A^+$  та приєднаної  $A^\circ$  груп. Вивчено також взаємозв'язок між нільпотентністю брейса  $A$  та його асоційованої групи  $H(A)$ .

Нагадаємо, що згідно [92]

$$A^{n+1} = A(A^n)$$

та

$$A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$$

для будь-якого натурального числа  $n$ . Як відомо,  $A^{(n)}$  – правий ідеал, а  $A^n$  – двобічний ідеал в  $A$ .

**Лема 4.7.** *Для брейса  $A$  і натурального числа  $k$  підмножина  $A^{(k+1)}$  є ідеалом в  $A^{(k)}$ .*

*Доведення.* Зрозуміло, що  $A^{(k+1)}$  – підгрупа в  $A^{(k)}$ . Окрім того,

$$A^{(k+1)}A^{(k)} \subseteq A^{(k+1)}A \subseteq A^{(k+2)} \subseteq A^{(k+1)}$$

та

$$A^{(k)}A^{(k+1)} \subseteq A^{(k)}A \subseteq A^{(k+1)},$$

тобто  $A^{(k+1)}$  – двобічний ідеал в  $A^{(k)}$ . □

**Лема 4.8.** *Нехай  $A$  – брейс,  $p$  – просте число. Тоді справджуються такі властивості:*

- (1)  $H(A)$  – періодична група в тому і тільки тому випадку, коли групи  $A^+$  і  $A^\circ$  періодичні;
- (2)  $H(A)$  –  $p$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $A^+$  та  $A^\circ$  –  $p$ -групи.

*Доведення.* (1) Нехай  $a$  – довільний елемент із  $A$ . Оскільки  $(a, 0)^n = (0, 0)$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$(na, 0) = (0, 0),$$

а значить, і  $na = 0$ . Подібно із умови  $(0, a)^m = 0$  для певного  $m \in \mathbb{N}$  отримуємо, що

$$(0, a^{(m)}) = (0, 0),$$

тобто  $a^{(m)} = 0$  (тут  $a^{(m)} = (A^{(m-1)})a$  для  $m \geq 2$ ). Навпаки теж вірно.

(2) доводиться подібно як (1).  $\square$

Для зручності наведемо брейс  $A$  *нільпотентним справа* (відповідно *нільпотентним зліва*), якщо  $A^{(n)} = \{0\}$  (відповідно  $A^n = \{0\}$ ) для певного  $n \in \mathbb{N}$ . Найменше таке натуральне число  $n$  називається *правим* (відповідно *лівим*) *індексом нільпотентності* брейса  $A$ . Має місце аналог леми 2.4 із [35], який встановлює певні зв'язки між адитивною  $A^+$  і приєднаною  $A^\circ$  групами брейса  $A$ .

**Твердження 4.1.** *Нехай  $A$  – брейс, який є нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва),  $p$  – просте число. Тоді мають місце такі властивості:*

- (i)  $A^+$  –  $p$ -група тоді і тільки тоді, коли  $A^\circ$  –  $p$ -група;
- (ii)  $A^+$  – група без скруту тоді і тільки тоді, коли  $A^\circ$  – група без скруту.

*Доведення.* Наведемо міркування для випадку правої нільпотентності. Нехай  $n$  – індекс правої нільпотентності брейса  $A$ .

(i) Застосуємо індуктивні міркування. Позаяк

$$A^{(n-1)}A^{(n-1)} \subseteq A^{(n-1)}A = \{0\},$$

то  $A^{(n-1)}$  – комутативне радикальне кільце і для  $A^{(n-1)}$  твердження вірне.

Припустимо, що твердження вірне для всіх нільпотентних справа брейсів індексу  $\leq n$ . Нехай  $A$  – нільпотентний

справа брейс індексу  $n$ .

$$\left(A/A^{(2)}\right)^2 \subseteq \left(A/A^{(2)}\right) \cdot \left(A/A^{(2)}\right) = A^{(2)}/A^{(2)} = \{\bar{0}\},$$

то отримуємо ізоморфізми груп

$$\left(A/A^{(2)}\right)^+ \cong \left(A/A^{(2)}\right)^\circ \cong A^\circ / \left(A^{(k)}\right)^\circ$$

і для  $A$  твердження також вірне.

(ii) Для довільного натурального числа  $k$  відомо, що  $A^k$  – ідеал в  $A$ , і тоді легко зауважуємо, що маємо ізоморфізми груп

$$(A^k/A^{k+1})^+ \cong (A^k/A^{k+1})^\circ.$$

Як наслідок, отримуємо, що (ii) також справджується.  $\square$

**Лема 4.9.** *Нехай  $A$  – брейс. Тоді  $Z(H(A)) \neq \{(0,0)\}$  в тому і тільки тому випадку, коли  $\text{ann}_l A \neq \{0\}$ .*

*Доведення.* ( $\Leftarrow$ ) Якщо  $0 \neq a \in \text{ann}_l A$ , то за лемою 4.3 маємо  $(a,0) \in C_E(F)$ , а це означає, що

$$(0,0) \neq (a,0) \in Z(H(A)).$$

( $\Rightarrow$ ) Якщо  $(a,0) \in Z(H(A))$  для деякого ненульового елемента  $0 \neq a \in A$ , то для всіх елементів  $u, v \in A$  отримуємо, що

$$(av + a + u, v) = (a,0)(u,v) = (u,v)(a,0) = (u+a,v).$$

Звідси робимо висновок, що  $av = 0$ , а тому  $a \in \text{ann}_l A$ .  $\square$

**Наслідок 4.2.** *Нехай  $A$  – брейс. Якщо  $H(A) = E \rtimes F$  та  $Z(H(A)) \not\subseteq E$ , то*

$$Z(A) \cap \text{ann}_r A \neq \{0\}.$$

*Доведення.* Припустимо, що  $(a, b) \in Z(H(A))$  та  $b \neq 0$ . Тоді для будь-якого елемента  $u \in A$  знаходимо, що

$$(a + u, b) = (a, b)(u, 0) = (u, 0)(a, b) = (ub + u + a, b)$$

та

$$(au + a, b \circ u) = (a, b)(0, u) = (0, u)(a, b) = (a, u \circ b).$$

Звідси випливає, що  $ub = 0$ ,  $au = 0$  та  $b \circ u = u \circ b$ . Таким чином,  $b \in Z(A)$ .  $\square$

**Теорема 4.2.** (1) *Якщо  $A$  – ненульовий нільпотентний зліва брейс, то справджуються такі властивості:*

- (i)  $H(A)$  – нільпотентна група;
- (ii)  $\text{ann } A \neq \{0\}$ .

(2) *Якщо  $A$  – ненульовий нільпотентний справа брейс, то  $H(A)$  – розв'язна група.*

*Доведення.* (1) Нехай  $A$  – ненульовий нільпотентний зліва брейс індексу нільпотентності  $n$ . Тоді

$$(A^{n-1})A = \{0\} \text{ та } A^{n-1} \neq \{0\}.$$

Це означає, що  $A^{n-1} \subseteq \text{ann}_l A$ . Тоді за лемою 4.9 отримуємо, що

$$Z(H(A)) \neq \{(0, 0)\}.$$

Оскільки  $A^{n-1}$  – двобічний ідеал в  $A$  та

$$(A/A^{n-1})^{n-1} = \{\bar{0}\},$$

то індукційними міркуваннями за числом  $n$  витягуємо, що  $H(A)$  – нільпотентна група. Окрім того,  $Z(A^\circ) \triangleleft A^\circ$ , а тому

$$\{0\} \neq (A^{n-1})^\circ \bigcap Z(A^\circ) \subseteq \text{ann } A.$$

(2) За умовою маємо  $A^{(n)} = \{0\}$  для деякого додатнього цілого числа  $n$ , а значить,

$$A^{(n-1)} \subseteq \text{ann}_r A.$$

Але  $\text{ann}_r A$  – двобічний ідеал в брейсі  $A$ , а тому  $(\text{ann}_r A)^\circ$  – абелева нормальна підгрупа в  $A^\circ$ . Накінець, результат отримуємо індукційними міркуваннями за числом  $n$ .

□

**Приклад 4.2.** Нехай  $(\mathbb{F}_2)^3$  – брейс, побудований в праці [92] (див. там приклад 2) із операцією множення ” $\cdot$ ”, яка визначається такою табличкою:

| $\cdot$ | 000 | 111 | 100 | 011 | 010 | 101 | 001 | 111 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 000     | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 |
| 111     | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 |
| 100     | 000 | 110 | 000 | 001 | 111 | 110 | 111 | 001 |
| 011     | 000 | 110 | 000 | 001 | 111 | 110 | 111 | 001 |
| 010     | 000 | 110 | 111 | 110 | 000 | 001 | 111 | 001 |
| 101     | 000 | 110 | 111 | 110 | 000 | 001 | 111 | 001 |
| 001     | 000 | 000 | 111 | 111 | 111 | 111 | 000 | 000 |
| 111     | 000 | 000 | 111 | 111 | 111 | 111 | 000 | 000 |

Тоді цей брейс має такі ланцюги

$$\begin{aligned} A \supset A^{(2)} = \{000, 111, 001, 100\} \supset \\ \supset A^{(3)} = \{000, 111\} \supset A^{(4)} = \{000\} \end{aligned}$$

та

$$A \supset A^2 = \{000, 111, 001, 100\} = A^3.$$

Це означає, що  $A$  нільпотентний справа та  $A$  не є нільпотентним зліва. Оскільки

$$111 \cdot 100 = 000 \neq 110 = 100 \cdot 111,$$

то робимо висновок, що  $111 \notin Z(A)$ , а тому

$$A^{(3)} \cap Z(A) = \{000\}.$$

Якщо  $a = 001$  та  $b = 100$ , то

$$A^\circ = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$$

– дієдральна група порядку 8. Отже,  $H(A)$  – 2-група порядку 64, а тому вона є нільпотентною. Якщо  $H(A) = E \rtimes F$ , то за наслідком 4.2 маємо  $Z(H(A)) \subseteq E$ .

## ВИСНОВКИ.

Для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса  $A$  встановлено, що адитивна група  $A^+$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група  $A^\circ$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1). Доведено, що центр  $Z(H(A))$  асоційованої групи  $H(A)$  брейса  $A$  нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9). Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група є нільпотентною, а для нільпотентного справа брейса його асоційована група є розв'язною (теорема 4.2). Наведено приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

## Висновки до розділу 4

В цьому розділі досліджуються зв'язки властивостей брейса з властивостями його адитивної і приєднаної груп.

В підрозділі 4.1, по-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, побудованою Я.П. Сисаком, введено в розгляд групу  $H(A)$ , яка асоційована з брейсом  $A$ . Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

В підрозділі 4.2 знайдено необхідну і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніу-

са (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

В підрозділі 4.3 для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса  $A$  встановлено, що адитивна група  $A^+$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група  $A^\circ$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1). Доведено, що центр асоційованої групи брейса нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9). Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група нільпотентна, а для нільпотентного справа брейса його асоційована група розв'язна (теорема 4.2). Наведено також приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

## Висновки

*Перший* розділ допоміжний, він не містить нових результатів. У ньому викладено основні поняття і сформульовано результати, що використовуються в наступних розділах дисертації. Також коротко наведено основні результати даної дисертаційної роботи.

В *другому* розділі досліджуються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є узагальнено нільпотентними.

В підрозділі 2.1 встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Подібно доведено, що локально ступінчаста група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.1). Із отриманих результатів випливає, що не існує груп, які не є розширеннями

черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими.

В підрозділі 2.2 охарактеризовано групи без неединичних досконалих секцій, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

В підрозділі 2.3 встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальні не  $\check{S}N$ -групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не  $\check{S}N$ -групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2). Зазначимо, що з результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що не існує груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальних не  $N\check{S}$ -груп).

В підрозділі 2.4 доведено, що в групі  $G$ , яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральных) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в  $G$  (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група  $G$ , яка задоволь-

няє умову  $Min - \overline{N}$  (відповідно  $Min - \overline{ZA}$ ) з нільпотентними (відповідно гіперцентральними) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою (наслідок 2.2).

В *третьому* розділі досліджуємо періодичні групи без неодиначних досконалих секцій з умовою максимальності  $Max - \overline{AF}$  для не майже абелевих підгруп.

Описано групи без неодиначних досконалих секцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1).

Охарактеризовано також групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольняють умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

В цьому *четвертому* розділі досліджуються зв'язки властивостей брейса з властивостями його адитивної і приєднаної груп.

По-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, побудованою Я.П. Сисаком, введено в розгляд групу, яка асоційована з брейсом.

Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

Знайдено необхідну і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

Для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного спра-

ва) брейса  $A$  встановлено, що адитивна група  $A^+$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група  $A^\circ$  є  $p$ -групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1).

Показано, що центр асоційованої групи брейса нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9).

Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група нільпотентна, а для нільпотентного справа брейса його асоційована група розв'язна (теорема 4.2). Наведено приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Артемович О. Д. Неразложимые метабелевы группы / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 1990. – Т. 42. – С. 1252–1254.
- [2] Артемович О. Д. Про групи з майже гіперцентральною власними підгрупами / О. Д. Артемович // Доповіді НАН України. – 1997. – № 5. – С. 7–9.
- [3] Артемович О. Д. Розв'язні групи з умовою мінімальності для негіперцентральною підгруп / О. Д. Артемович // Доповіді НАН України. – 1998. – № 11. – С. 7–9.
- [4] Артемович О. Д. Групи, багаті  $\mathfrak{X}$ -підгрупами / О. Д. Артемович, Л. А. Курдаченко // Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 218–237.
- [5] Артемович О. Д. О локально ступенчатых группах с условием минимальности для некоторой системы негиперцентральных подгрупп / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1425–1430.
- [6] Артемович О. Д. Группы с условием максимальной для негиперцентральных подгрупп / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 2002. – Т. 53, № 7. – С. 887–896.

- [7] Бе́ляев В. В. О бесконечных группах типа Миллера-Морено / В. В. Бе́ляев, Н. Ф. Сесекин // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. – 1975. – V. 26. – P. 369–376.
- [8] Бе́ляев В. В. Группы типа Миллера-Морено / В. В. Бе́ляев // Сиб. мат. ж. – 1978. – Т. 19, №3. – С. 509–514.
- [9] Бе́ляев В. В. Локально конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы / В. В. Бе́ляев // Сиб. мат. ж. – 1983. – Т. 24, №3. – С. 11–17.
- [10] Блудов В. В. О группах Фробениуса / В. В. Блудов // Сиб. мат. ж. – 1997. – Т. 38, № 6. – С. 1219–1221.
- [11] Зайцев Д. И. Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп / Д. И. Зайцев, Л. А. Курдаченко // Укр. мат. ж. – 1991. – Т. 43, № 7-8. – С. 925–930.
- [12] Каргаполов М. И. Теория групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков // М.: Наука, – 1982. – 288 с.
- [13] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А. Ю. Ольшанский // М.: Наука, – 1989. – 448 с.
- [14] Йоник Л. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних / Л. В. Йоник // Мат. методи і фіз.-мех. поля/ – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 12–16.

- [15] Йоник Л. В. Групи, багаті на АЇ-підгрупи або ЇА-підгрупи / Л. И. Йоник // Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 149–152.
- [16] Скасків Л. В. Періодичні групи з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп / О. Д. Артемович, Л. В. Скасків // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 1–5.
- [17] Старостін А. І. Про групи Фробеніуса / А. І. Старостін // Укр. мат. ж. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 628–638.
- [18] Сысак Я. П. Произведения групп, связанные с радикальными кольцами / Я. П. Сысак // В кн.: Произведения бесконечных групп. Препринт 82.53: Институт математики АН УССР, 1982. – С. 21–35.
- [19] Чарин В. С. Замечание об условии минимальности для подгрупп / В. С. Чарин // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, №4. – С. 575–576.
- [20] Черников Н. С. Группы с условием  $\pi$ -максимальности и  $\pi$ -слоистой максимальной / Н. С. Черников // Мат. заметки. – 2000. – V. 68, No 2. – P. 311–320.
- [21] Черников Н. С. Группы с условием  $\pi$ -минимальности и  $\pi$ -слоистой минимальности. I / Н. С. Черников // Сиб. мат. ж. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 1193–2006.

- [22] Черников Н. С. Группы с условием  $\pi$ -минимальности и  $\pi$ -слоистой минимальности. II / Н. С. Черников // Сиб. мат. ж. – 2002. – Т. 43, № 1. – Р. 194–211.
- [23] Черников Н. С. Группы с условиями минимальности / Н. С. Черников // Фунд. прикл. мат. – 2008. – Т. 14. – С. 219–235.
- [24] Черников С. Н. Бесконечные группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп / С. Н. Черников // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 159. – С. 759–760.
- [25] Черников С. Н. Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для инвариантных подгрупп / С. Н. Черников // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6. – С. 11–18.
- [26] Черников С. Н. Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп / С. Н. Черников // В. кн.: Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наукова думка, 1971. – С. 96–106.
- [27] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп / С. Н. Черников // М.: Наука, 1980. – 384 с.
- [28] Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории, Том 1 / К. Фейс // М.: Мир, 1977. – 688 с.
- [29] Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории, Том 2 / К. Фейс // М.: Мир, 1979. – 464 с.

- [30] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Том 1 / Л. Фукс // М.: Мир, 1974. – 336 с.
- [31] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Том 2 / Л. Фукс // М.: Мир, 1974. – 416 с.
- [32] Хартли Б. О нормализаторном условии и минитранзитивных группах подстановок/ Б. Хартли // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13, №5. – С. 589–602.
- [33] Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
- [34] Шунков В. П. Об абстрактных характеристиках некоторых линейных групп / В. П. Шунков// В кн.: Алгебра. Матрицы и матричные группы. – Красноярск, 1970. – С. 3–54.
- [35] Amberg B. On the adjoint group of some radical ring / B. Amberg, O. Dickenschied // Bull. Can. Math. – 1995. – V. 38. – P. 262–270.
- [36] Artemovych O. D. On indecomposable groups and groups with hypercentral-by-finite proper subgroups / O. D. Artemovych // Publ. Math. Debrecen. – 1998. – Vol. 53. – P. 163–175.
- [37] Artemovych O. D. On groups associated with Frobenius groups / O. D. Artemovych // Demonstratio Math. – 1998. – V. 21. – P. 875–878.

- [38] Artemovych O. D. Soluble groups with many conditions on nilpotent-by-Černikov subgroups / O. D. Artemovych // Math. Studii. – 2000. – V. 13. – P. 23–32.
- [39] Artemovych O. D. Groups with the minimal condition on non-"nilpotent-by-finite" subgroups / O. D. Artemovych // Serdica Math. J. – 2002. – V. 28. – P. 153–162.
- [40] Asar A. O. On non-nilpotent  $p$ -groups and the normalizer condition/ A. O. Asar // Turkish J. Math. – 1994. – V. 18. – P. 114–129.
- [41] Asar A. O. On minimal non-CC-groups, II / A.O. Asar, A. Arikan // Revista Mat. Univ. Compl. Madrid. – 1997. – V. 10, No 1. – P. 31–37.
- [42] Asar A. O. Locally nilpotent  $p$ -groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov/ A. O. Asar // J. London Math. Soc. – 2000. – V. 61. – P. 412–422.
- [43] Brookes C. J. B. Groups with every subgroup subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1983. – V. 15. – P. 235–238.
- [44] Bruno B. On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1983. – V. 69. – P. 153–168.

- [45] Bruno B. On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1983. – V. 69. – P. 153–168.
- [46] Bruno B. On groups with "abelian-by-finite" proper subgroups / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – V.3-B. – P. 797–807.
- [47] Bruno B. Gruppi i cui sottogruppi propri contengono un sottogruppo nilpotente di indice finito / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – (6)3-D. – P. 179–187.
- [48] Bruno B. Special  $q$ -groups and  $\mathbb{C}_p^\infty$ -groups of automorphisms / B. Bruno // Archiv Math. – 1987. – V. 48. – P. 15–24.
- [49] Bruno B. On  $p$ -groups with "nilpotent-by-finite" proper subgroups / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1989. – (7)3-A. – P. 45–51.
- [50] Bruno B. On multipliers of Heineken-Mohamed type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1991. – V. 85. – P. 133–146.
- [51] Bruno B. A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups / B. Bruno, R. E. Phillips // Archiv Math. – 1995. – V. 65. – P. 369–374.
- [52] Casolo C. Groups with all subgroups are subnormal / H. Smith // Rend. Accad. Naz. Scie. XL. – 1986. – V. 10, No 1. – P. 247–249.

- [53] Casolo C. Nilpotent subgroups of groups with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 2003. – V. 35. – P. 15–22.
- [54] Dedekind R. Über Gruppen deren sämtliche Teiler Normalteiler sind / R. Dedekind // Math. Ann. – 1897. – Bd. 48. – S. 548–561.
- [55] Dixon M. R. Groups with some minimal conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, M. J. Evans, H. Smith // J. Group Theory. – 2001. – V. 4. – P. 207–215.
- [56] Dixon M. R. Groups with various minimal conditions on subgroups / M. R. Dixon, M. J. Evans, H. Smith // Укр. мат. ж. – 2002. – Т. 54, № 6. – P. 780–787.
- [57] Dixon M. R. Locally nilpotent groups with the maximum conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko // Glasgow Math. J. – 2001. – Т. 43. – P. 85–102.
- [58] Dixon M. R. Groups with the maximum conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko // J. Group Theory. – 2001. – V. 4. – P. 75–87.
- [59] de Falco M. Groups satisfying the minimal conditions on non-supersoluble subgroups / M. de Falco // Ricerche Mat. – 1999. – V. XLVIII. – P. 353–360.

- [60] Franciosi S. Groups with many polycyclic-by-nilpotent subgroups / S. Franciosi, F. de Giovanni, Y. P. Sysak // *Ricerche Mat.* – 1999. – V. XLVIII, No 2. – P. 361–378.
- [61] Franciosi S. Groups with many supersoluble subgroups / S. Franciosi, F. de Giovanni // *Ricerche Mat.* – 1999. – V. XL, No 2. – P. 321–333.
- [62] Hartley B. A note on the normalizer condition / B. Hartley // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1973. – V. 74. – P. 11–15.
- [63] Hartley B. Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer / B. Hartley // *Quart. J Math. Oxford, Ser.2.* – 1982. – V. 33. – P. 309–322.
- [64] Hartley B. Locally graded minimal non-CC-groups are  $p$ -groups, II / B. Hartley, J. Otal, J. M. Peña // *Archiv Math.* – 1991. – V. 57. – P. 209–211.
- [65] Heineken H. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition / H. Heineken, I. J. Mohamed // *J. Algebra.* – 1968. – V. 10. – P. 368–376.
- [66] Heineken H. Groups with normalizer condition / H. Heineken, I. J. Mohamed // *Math. Ann.* – 1972. – V. 198. – P. 179–187.
- [67] Ishchuk Yu. On associated groups of rings / Yu. Ishchuk // In: *Groups St. Andrews 2001 in Oxford. Vol. I. London Math. Soc. Lecture Notes Ser.*, 304. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – P. 284–293.

- [68] Kurdachenko L. A. The nilpotency of some groups with all subgroups subnormal / L. A. Kurdachenko, H. Smith // Publ. Mathematiques. – 1998. – V. 42. – P. 411–421.
- [69] Kurdachenko L. A. Groups with the weak maximality condition for nonnilpotent subgroups / L. A. Kurdachenko, N. N. Semko // Укр. мат. ж. – 2006. – Т. 58, No 8. – С. 1068–1083.
- [70] Kuzucuoglu M. Locally finite minimal non-FC-groups / M. Kuzucuoglu, R. E. Phillips // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1989. – V. 105, No 3. – P. 417–420.
- [71] Leinen F. A reduction theorem for perfect locally finite minimal non-FC groups, II / F. Leinen // Glasgow Math. J. – 1999. – V. 41. – P. 81–83.
- [72] Lennox J. C. Subnormal subgroups of groups / J. C. Lennox, S. E. Stonehewer // Oxford: Clarendon Press. – 1987. – 253 p.
- [73] Lennox J. C. The theory of infinite soluble groups / J. C. Lennox, D. J. S. Robinson // Oxford: Clarendon Press, 2004. – 342 p.
- [74] Meldrum J. D. P. On the Heineken-Mohamed groups/ J. D. P. Meldrum // J. Algebra. – 1973. – V. 27. – P. 437–444.
- [75] Menegazzo F. Groups of Heineken-Mohamed / F. Menegazzo // J. Algebra. – 1995. – V. 171. – P. 807–825.

- [76] Miller G. A. Groups of Heineken-Mohamed / G. A. Miller, H. Mpreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – V. 4. – P. 389–404.
- [77] Muñoz-Escolano J. M. Periodic linear group with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension / J. M. Muñoz-Escolano, J. Otal, N. N. Semko // Comm. Algebra. – 2008. – V. 36, No 2. – P. 749–763.
- [78] Napolitani F. On groups with nilpotent-by-Černikov proper subgroups / F. Napolitani, E. Pegoraro // Archiv Math. – 1997. – V. 69. – P. 89–94.
- [79] Neuman M. F. Groups with many nilpotent subgroups / M. F. Neuman, J. Wiegold // Archiv Math. – 1964. – V. 15. – P. 241–250.
- [80] Möhres W. Auflosbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind / W. Möhres // Archiv Math. – 1990. – V. 54. – S. 232–235.
- [81] Otal J. Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov / J. Otal, J. M. Peña // Archiv Math. – 1988. – V. 51. – P. 193–197.
- [82] Otal J. Locally graded groups with certain minimal conditions for subgroups, II / J. Otal, J. M. Peña // Publ. Mathematiques. – 1988. – V. 32. – P. 151–157.
- [83] Otal J. Minimal non-CC-groups, II / J. Otal, J. M. Peña // Comm. Algebra. – 1988. – V. 16, No 6. – P. 1231–1242.

- [84] Otal J. Nilpotent-by-Černikov CC-groups / J. Otal, J. M. Pena // J. Austral Math. Soc. – 1992. – A53, No 1. – P. 120–130.
- [85] Passman D. The algebraic structure of group rings / D. Passman // John Wiley: New York, 1977. – 720 p.
- [86] Phillips R. E. On certain minimal conditions for infinite groups / R. E. Phillips, J. S. Wilson // J. Algebra. – 1978. – V.51. – P. 41–68.
- [87] Redei L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen / L. Redei // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – V.4. – S. 130–138.
- [88] Robinson D. J. S. Infinite soluble and nilpotent groups / D. J. S. Robinson // Queen Mary College Math. Notes. – London, 1967. – 226 p.
- [89] Robinson D. J. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part 1 / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1972. – 210 p.
- [90] Robinson D. J. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part 2 / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1972. – 254 p.
- [91] Robinson D. J. S. A course in the theory of groups / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1980. – 481 p.

- [92] Rump W. Braces, radical rings, and quantum Yang-Baxter equations / W. Rump // J. Algebra. – 2007. – V. 307. – P. 153–170.
- [93] Rump W. Modules over braces / W. Rump // Algebra and Discrete Math. – 2006. – No 2. – P. 127–137.
- [94] Smith H. Hypercentral groups with with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1983. – V. 15. – P. 229–234.
- [95] Smith H. Groups with few non-nilpotent subgroups / H. Smith // Glasgow Math. J. – 1997. – V. 39. – P. 141–151.
- [96] Smith H. Residually finite groups with with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1999. – V. 31. – P. 679–680.
- [97] Smith H. Nilpotent-by-(finite exponent) groups with all subgroups subnormal / H. Smith // J. Group Theory. – 2000. – V. 3. – P. 47–56.
- [98] Trabelsi N. Characterization of nilpotent-by-finite groups/ N. Trabelsi // Bull. Austral Math. Soc. – 2000. – V. 61. – P. 31–38.
- [99] Xu M. Groups whose proper subgroups are Baer groups / M. Xu // Acta Math. Sinica. – 1996. – V. 12. – P. 10–17.
- [100] Xu M. Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent / M. Xu // Archiv Math. – 1996. – V. 66. – P. 353–359.

- [101] Yonyk L. V. Groups with many finite-by-nilpotent subgroup / L. V. Yonyk // In: A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70<sup>th</sup> Birthday (18–23 November 2005, Debrecen, Hungary). – Debrecen, 2005. – P. 46.
- [102] Yonyk L. V. Groups with many hypercentral subgroups / O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Bul. Acad. Sci. Stiinte Rep. Moldova. Matematica. – 2008. – No 2(57). – P. 106–109.
- [103] Yonyk L. V. Groups with minimal condition on non-nilpotent subgroups / L. V. Yonyk // In: II International Conference on Problems of Mechanics and Mathematics (25–28 May 2008, Lviv), Vol. 3. Lviv Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics. – Lviv, 2008. – P. 218–219.
- [104] Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups / L. V. Skaskiv, O. D. Artemovych // In: 6<sup>th</sup> International Algebraic Conference in Ukraine (1–7 July 2007, Kamyanets-Podilsky). Abstracts of Talks. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 23.
- [105] Skaskiv L. V. On HM\*-groups / L. V. Skaskiv // In: 7<sup>th</sup> International Algebraic Conference in Ukraine (18–23 August 2009, Kharkov). Abstracts of Talks. – Kharkov, 2009. – P. 130–131.
- [106] Skaskiv L. V. Groups and braces / L. V. Skaskiv // In: 7<sup>th</sup> International Algebraic Conference in Ukraine (5–12 July

2011, Lugansk). Abstracts of Talks. – Lugansk, 2011. – P. 132.

- [107] Skaskiv L. V. Groups associated with braces /O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Carpathian Math. Publ. – 2011. – V. 3, No 1. – P. 4–14.
- [108] Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups /O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Математичний вісник Наукового Товариства імені Шевченка. – 2011. – № 8. – С. 328–334.